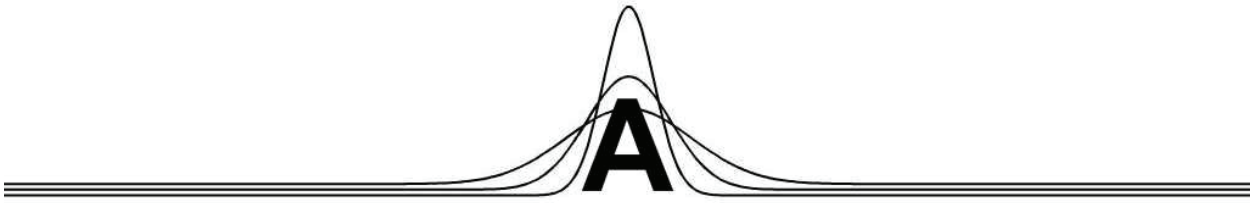


ABEL İNTEQRAL TƏNLİYİ « Абеля интегральное уравнение; Abel integral equation » –

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x-s}}, \qquad x \geq 0 \qquad (1)$$

inteqral tənliyidir, burada $f(x)$ – verilmiş funksiya, $\varphi(s)$ – axtarılan funksiyadır. $f(x)$ kəsilməz, differensiallanan funksiya olduqda ($f(x)$ üzərinə qoyulan şərtlər olduqca zəif götürülə bilinər) A. i. t.-nin yeganə həlli vardır. Bu halda, əgər $f(0) = 0$ olarsa, tənliyin həlli

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{s-z}} \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Bu tənlik üçün $f(0) = 0$ şərtini götürmədikdə, A. i. t.-nin həlli aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{s-z}}\right].$$

Aşağıdakı ehtimal məsələsi A. i. t.-nin həllinə gətirilir. $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ – ikiölçülü təsadüfi vektor, $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ isə bu vektorun yalnız $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ kəmiyyətindən asılı olan paylanmasının sıxlıq funksiyası (yəni X vektorunun paylanması dairəvi simmetriyaya malikdir) olsun; X_1 komponentinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $p_{X_1}(x_1)$-in verildiyi fərz olunur. X təsadüfi vektorunun paylanmasını təyin etmək tələb olunur (bunun prinsipcə mümkünlüyü *Kramer – Vold teoremindən* alınır; *Sferik simmetrik paylanmaya* da bax). $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, – X vektorunun uzunluğu, $p_R(r)$ – uyğun ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyası olsun; onda

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = (2\pi r)^{-1} p_R(r).$$

$|X_1|$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması iki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin hasilinin paylanması ilə üst-üstə düşür; bu kəmiyyətlərdən birincisinin paylanması R-in paylanması ilə eynidir, ikincisinin paylanması isə vahid uzunluqlu $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ ikiölçülü vektorunun absis oxuna proyeksiyası e_1-in uzunluğunun paylanması ilə eynidir; $\mathbf{e}$ vektorunun bütün istiqamətləri eyniehtimallı fərz olunur (bax, [2], fəsil 1, §10). Tam ehtimal düsturuna əsasən $x_1 > 0$ olduqda

$$p_{|X_1|}(x_1) = \int_0^1 \frac{1}{z}\, p_R\left(\frac{x_1}{z}\right) p_{|e_1|}(z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\, p_R\left(\frac{x_1}{z}\right) \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

$$\frac{1}{x_1^2} = x, \quad xz^2 = s, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\, p_{|X_1|}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = f(x),$$

$$\frac{1}{\pi s}\, p_R\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \varphi(x)$$

götürdükdə, $f(x)$ və $\varphi(s)$-in (1) münasibətilə əlaqəli olduğu aydın görünür. φ isə f ilə uyğun olaraq (2) düsturu ilə ifadə olunur.

Yuxarıda qoyulmuş məsələ, A. i. t.-nin həllinə yalnız *dim.* – *ölçüsü* 2 olan halda deyil, hətta ixtiyari cüt dim. – ölçülü hala da gətirilir.

A. i. t. tarixən ilk inteqral tənlik olmuşdur. Bu inteqral tənlik N. Abel tərəfindən (bax, [1]) 1823-də aşağıdakı maraqlı mexaniki məsələ ilə (Abel məsələsi) bağlı alınmışdır. Maddi nöqtə sükunət vəziyyətindən çıxaraq (u, x) koordinat sistemində şaquli müstəvidə yerləşən hamar əyri üzrə hərəkət edir. Bu nöqtənin x hündürlüyündən başlayaraq özünün aşağı – $(0, 0)$ vəziyyətinə çatması üçün zəruri olan t müddəti verilmiş $t(x)$ funksiyasıdır.

Əyrinin formasını təyin etmək tələb olunur. Bu məsələ üçün A. i. t. (1), $f(x) = \sqrt{2g}\; t(x)$ olur, g – ağırlıq qüvvəsinin təcili, $\varphi(s) = \frac{1}{\sin\omega}$, ω isə ordinatı s-ə bərabər nöqtədə əyriyə toxunanlar və absis oxu istiqamətləri arasındakı bucaqdır. Əyrinin tənliyi

$$u = \int_0^x \sqrt{\varphi^2(s) - 1}\; ds$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Buraya $f(x) = \text{const}$ halı da daxildir; bu hala Abel məsələsində $t(x) = \text{const}$ halı uyğun olur ki, bu zaman axtarılan əyri tsikloiddir [X. Hüygens (Ch. Huygens, 1673)].

Əd.: [1] A b e l N. H., Oeuvers complètes, t. 1, Christiania, 1839, p. 27–30; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] П р и в а л о в И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М. – Л., 1937; [4] К у р а н т Р., Г и л ь б е р т Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 1, 3 изд., М., 1951.

ABEL QRUPU « абелева группа; Abelian group », kommutativ qrup – kommutativ (yerdəyişmə) xassəli əməl təyin olunmuş qrupdur. Ehtimal paylanmalarının daşıyıcıları kimi belə A. q.-larından ədəd oxu və ya n – ölçülü Evklid fəzası (ədədlərin və ya vektorların adi toplama əməli ilə) ehtimal nəzəriyyəsinin klassik obyektidir. Digər A. q.-larında təsadüfi kəmiyyətlərə baxılması zəruriliyi təbii olaraq yaranır (bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi* cəbri strukturlarda, *Ehtimal ölçüsü* qrupda). Ehtimal nəzəriyyəsinin A. q.-larında bəzi xüsusiyyətləri aşağıdakı ən sadə misalda şərh olunmuşdur.

Misal (tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin $\mathrm{mod}\, 2$ üzrə toplanması). 0 və 1 elementlərindən ibarət, toplama qaydası

$$0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\quad 1+1=0$$

münasibətlərilə təyin olunmuş A. q. G verilir. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ – 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq, $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = q_n$, $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = p_n = 1 - q_n$ ehtimalları ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

olsun, burada toplama qeyd olunmuş qrup əməli mənasında anlaşılır (yəni S_n, – $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri cəminin adi mənada 2-yə bölünməsindən alınan qalığa bərabərdir). Onda:

a) əgər hər hansı bir n_0 qiymətində ξ_{n_0} kəmiyyəti G-də «müntəzəm» qanunla paylanmışdırsa, yəni $p_{n_0} = q_{n_0} = 1/2$ olarsa, onda $n > n_0$ olan bütün n qiymətləri üçün S_n «müntəzəm» qanunla paylanır;

b) əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(p_n, q_n) = \infty$$

olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda S_n limitdə «müntəzəm» qanunla paylanır.

c) əgər a) şərti ödənilmirsə, onda b) şərti S_n cəmlərinin paylanmalarının «müntəzəm» paylanmaya yığılması üçün yalnız kafi deyil, eyni zamanda zəruri şərtdir; bu halda limit – «müntəzəm» paylanması G qrupunda yeganə cırlaşmayan invariant paylanmadır.

A. q.-da oxşar tipli limit teoremlərinin öyrənilməsində adi, xarakteristik funksiyalar metodunun analoqu istifadə olunur (bax, *Furye çevirməsi* qrupda ehtimal paylanmalarının).

Əd.: [1] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Сазонов В. В., Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 1, с. 3–35; [3] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [4] Dvoretzky A., Wolfowitz J., «Duke Math. J.», 1951, v. 18, p. 501–07; [5] Probability measures on metric spaces, L. – N. Y., 1967.

ABEL TEOREMLƏRİ « Абеля теоремы; Abel theorems » Abel tipli teoremlər, – hər hansı bir funksiyanın Laplas çevirməsinin bu funksiyanın özünün asimptotikası üzrə asimptotikasının tərifi üçün iddialar toplusudur.

8 ABEL

Misal 1.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, x^{\alpha-1}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}},\quad \alpha > 0,\quad s > 0$$

bərabərliyinə əsasən fərz etmək olar ki, $x \to \infty$ olduqda $f(x)$ elə funksiya olarsa ki,

$$f(x) \sim x^{\alpha-1}$$

münasibəti ödənilsin, onda $s \downarrow 0$ olduqda

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}$$

münasibəti doğrudur. Əgər $f(x)$ ixtiyari sonlu intervalda mütləq inteqrallanandırsa, onda bu hökm doğrudur və o, Abel tipli teoremlərə ən sadə misaldır.

Misal 2. Fərz olunur ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ədədi sırası yığılır və bu sıranın cəmi A-ya bərabərdir. $|z| < 1$ şərtini ödəyən z-lər üçün

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n$$

funksiyası $z \uparrow 1$ olduqda

$$f(z) \to A$$

asimptotik münasibətini ödəyir (qüvvət sıraları üçün Abel teoreminin xüsusi halı).

Misal 1-ə analoji hal aşağıdakı kimidir. $0 < z < 1$ olduqda $z = e^{-s}$ və

$$G(x) = \sum_{n \le x} a_n$$

olsun. Onda

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dG(x) = s \int_0^{\infty} e^{-sx}\, G(x)\, dx.$$

$x \to \infty$ olduqda $G(x) \to A$ olduğundan, $s \to 0$ olduqda

$$f(z) \sim s \int_0^{\infty} e^{-sx}\, A\, dx = A$$

münasibətinin doğru olduğu təbiidir.

Abel tipli teoremlər ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərinin isbatında, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və s. tətbiq olunur. Bu teoremlər onlara tərs *Tauber teoremləri* ilə olduqca tamamlanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ABEL TİPLİ TEOREMLƏR « абелева типа теоремы; Abel theorems » – bax, *Abel teoremləri.*

ABSTRAKT ERQODİK TEOREM « абстрактная эргодическая теорема; abstract ergodic theorem » – bax, *Erqodik teoremlər.*

ABSTRAKT HƏLLEDİCİ QAYDA « абстрактное решающее правило; abstract decision rule » – bax, *Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi.*

AÇIQ XİDMƏT SİSTEMİ « разомкнутая система обслуживания; open queueing system » – bax, *Xidmət sistemi.*

AÇIQ TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « открытое случайное множество; open random set » – açıq çoxluqların $\mathcal{G}$ topoloji fəzasında *təsadüfi elementdir.* $\mathcal{G}$ fəzasında $\mathcal{T}_g$ topologiyası aşağıdakı kimi təyin olunur: S – separabel Hausdorf lokal kompakt topoloji fəza, $\mathcal{G}$ – bu fəzanın açıq altçoxluqları çoxluğu; $G \in \mathcal{G}$, K, – S-də mümkün olan bütün kompaktlar olsun.

$$\mathcal{G}^G = \{M : M \in \mathcal{G}, M \cap G = \varnothing\},$$
$$\mathcal{G}_K = \{M : M \in \mathcal{G}, M \cap K = \varnothing\},$$

siniflərini özündə saxlayan (ən kiçik) minimal topologiya $\mathcal{T}_g$, – $\mathcal{G}$ fəzasında təyin olunmuş topologiyadır. Bax, *Təsadüfi çoxluq.*

AÇIM(ı) seçimin **« размах (широта)** выборки; **sample range »**, seçimin dəyişmə aralığı – $\{X_i\}_{i=1}^n$ seçimi üzrə qurulmuş $\{X_{(i)}\}_{i=1}^n$ variasion sırasının kənar elementlərinin fərqi – $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ kəmiyyətinə deyilir. X_i, $1 \le i \le n$ asılı olmayan, ümumi paylanma funksiyası F olan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, W_n-in paylanma funksiyası

$$\mathbf{P}\{W_n < x\} = n \int_{-\infty}^{\infty} (F(x+t) - F(t))^{n-1} dF(t), \quad x \ge 0$$

düsturu ilə ifadə olunur. Seçimin A. çox vaxt miqyas parametrinin qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Bəzi hallarda (senzurlanmış seçimlər, robast qiymətləndirmə) A. əvəzinə kvaziaçım (rus. квазиразмах) adlanan $W_{r,s} = X_{(s)} - X_{(r)}$, $1 \le r < s \le n$ kəmiyyətlərindən istifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətlər normal qanunla paylandığı halda seçimin A. və kvaziaçımlar seçimi ortadan asılı olmur.

Əd.: [1] Дейвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

ADAMAR MATRİSİ « Адамара матрица; Hadamard matrix » eksperimentin planlaşdırılmasında – elementləri $+1$ və -1 olan $N > 1$ tərtib elə H_N kvadrat matrisidir ki, bu matris üçün

$$H_N^{\mathsf{T}} H_N = N E_N$$

şərti ödənilir, burada E_N – vahidi matrisdir. A. m.-lər belə matrislərin determinantının ekstremal xassələrini tədqiq edən J. Adamarın adı ilə adlandırılmışdır (bax, [1]). Qeyd etmək lazımdır ki, $N = 2$ halı C. Silvestr tərəfindən araşdırılmışdır (bax, [2]).

A. m.-nin birinci sətir və birinci sütun elementləri yalnız $+1$ olarsa, onda bu matris normallanmış matris adlanır. A. m.-nin varlığının zəruri şərti: $N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ və ya $N = 2$ olmasıdır. Bu şərtin kafi olub-olmaması, hələ ki, müəyyən olunmamışdır. Eksperimentin planlaşdırılmasında, A. m.-nin qurulması məsələsi iki tip modelin naməlum parametrlərindən p-nin $(p \le N)$ qiymətləndirilməsində alınır. **I** model birinci tərtib polinom şəklində olur, **II** model isə **I** modeldən özündə sərbəst həddin olmaması ilə fərqlənir. Matrisin planı kimi, **I** model üçün normallanmış A. m.-nin $N-1$ sayda sondakı sütunlarından ixtiyari $p-1$ saydasından və **II** model üçün A. m.-nin ixtiyari p sayda sütunundan istifadə etdikdə, ortoqonal planlaşdırılma adlandırılan planlaşdırılma alınır (yəni diaqonal informasion matrisi olan planlaşdırılma). A. m.-ndən natamam planların və digər planlama sxemlərinin qurulmasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Hadamard J., «Bull. sci. math.», sér. 2, 1893, t. 17, p. 240–46; [2] Sylvester J. J., «Phil. Mag.» 1867, v. 34, p. 461–72; [3] Новые идеи в планирование эксперимента, М., 1969; [4] Hedayat A., Wallis W. D., «Ann. Statist.», 1978, v. 6, p. 1184–238.

ADAPTASİYA ALQORİTMİ « адаптации алгоритм; adaptation algorithm » – optimal metodlardan qarışıq surətdə istifadə edərək, çatışmayan və ya naməlum informasiyanı bərpa etməklə, müşahidələrin təkmilləşdirilməsinə əsaslanmaqla statistik qiymətlərin təyin olunma qaydasıdır. A. a. alqoritm parametrlərinin optimal qiymətləri müşahidələrin naməlum paylanmasının xarakteristikalarından (funksionallardan) asılı olduğu halda tətbiq olunur. Bu xarakteristikaların statistik qiymətləri əsasında alqoritmin parametrləri seçilir.

A. a.-ləri asimptotik mənada effektiv (olduqca optimal) olur.

Əd.: [1] Фомин В. Н., Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация, М., 1984; [2] Bickel P. J., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 3, p. 647–71.

ADAPTƏ OLUNMUŞ (UZLAŞDIRILMIŞ) TƏSADÜFİ PROSES « адаптированный случайный процесс; adapted random process » – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses.*

F – ADAPTİV FUNKSİYA « F – адаптированная функция; F – adapted function » – bax, *Qeyri – antisipativ funksiya.*

ADAPTİV İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ PROSES diskret zamanlı **« адаптивный управляемый случайный процесс** с дискретным временем; **adaptive controlled random process** in discrete time **»** – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

ADAPTİV PROSEDUR « адаптивная процедура; adaptive procedure » – bax, *Stoxastik approksimasiya.*

ADAPTİV STATİSTİK QİYMƏT « адаптивная оценка; adaptive estimator » – sonluölçülü və ya sonsuzölçülü əngəlləyici parametrli müşahidələr sxemində naməlum parametrin təyin edilməsi üçün *statistik qiymətdir*; bu statistik qiymət əngəlləyici parametrin məlum qiymətində bu və ya digər ehtimali mənada ən yaxşı statistik qiymətin malik olduğu xassələr kimi asimptotik olaraq eyni xassələrə malikdir. A. s. q. anlayışının digər interpretasiyaları da istifadə edilir.

Əd.: [1] Bickel P. J., «Ann. Statis.», 1982, v. 10, № 3, p. 647–71.

ADDIM(ı) paylanmanın **« шаг** распределения; **spain** of a distribution **»** – bax, *Şəbəkəvari paylanma*.

ADDIM VURUĞU « шаговый множитель; step factor » – bax, *Robbins – Monro proseduru* stoxastik approksimasiyanın.

ADDIMI, ARİFMETİK PAYLANMANIN « шаг арифметического распределения; step of arithmetic distribution » – bax, *Arifmetik paylanma*, *Şəbəkəvari paylanma.*

ADDİTİV FUNKSİONAL inteqral tipli **« аддитивный функционал** интегрального типа; **additive functional** of integrale type **»** –

$$\alpha_t^s = \int_t^s f(u, \zeta(u))\, du, \qquad 0 \le t < s$$

təsadüfi kəmiyyətlər ailəsidir, burada $\zeta(\cdot)$ – asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proses, $f : [0, +\infty] \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ elə Borel funksiyasıdır ki, bu funksiya üçün bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqral təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Скороход А. В., Слободенюк Н. П., Предельные теоремы случайных блужданий, К., 1970.

ADDİTİV FUNKSİONAL(ı) Markov prosesinin **« аддитивный функционал** от марковского процесса; **additive functional** of a Markov process **»** – bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

ADDİTİV FUNKSİONAL(ı) Viner prosesinin **« аддитивный функционал** от винеровского процесса; **additiv functional** of the Wiener process **»** – arqumentlərinin toplusu üzrə kəsilməz, additivlik xassəsini ($\alpha_t^s = \alpha_t^u + \alpha_u^s$, $t < u < s$) və *Viner prosesi* $w(t)$, $t \ge 0$ ilə uzlaşma xassəsini (α_t^s, – $w(u)$, $u \in [t, s]$, $t < s$ prosesinin qiymətləri ilə doğurulmuş $\mathcal{A}_t^s$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən təsadüfi kəmiyyətdir) ödəyən *təsadüfi kəmiyyətlərin* α_t^s, $0 \le t < s$ ailəsidir.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Скороход А. В., Слободенюк Н. П., Предельные теоремы для случайных блужданий, К., 1970.

ADDİTİV FUNKSİYA « аддитивная функция; additive function » – bax, *Arifmetik modelləşdirilmə*(si) təsadüfi proseslərin, *Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsi.*

ADDİTİV FUNKSİYASI ÇOXLUQLARIN « аддитивная функция множеств; additive set function » – hər hansı çoxluqlar sinfində təyin olunmuş və additivlik xassəsinə malik (iki toplanan üçün) funksiyadır.

$\mathcal{K}$ – hər hansı çoxluqlar sinfi, G – qrup əməli + simvolu ilə işarə edilmiş kommutativ qrup olsun (yəni G additiv yazıda götürülür). $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B \in \mathcal{K}$ şərtlərilə verilən ixtiyari A və B çoxluqları üçün

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

bərabərliyi hökmən ödənilərsə, $\mu : \mathcal{K} \to G$ münasibətini ödəyən μ funksiyasına additiv funksiya deyilir.

Əgər $\varnothing \in \mathcal{K}$ olarsa, onda $\varnothing$, – G qrupunun sıfır elementidir və $\mu(\varnothing) = 0$.

Praktikada G qrupu kimi ədəd oxu $\mathbb{R}^1$, kompleks ədədlər meydanı $\mathbb{C}$, n – ölçülü Evklid fəzası $\mathbb{R}^n$, müxtəlif topoloji qruplar, sonsuzölçülü vektor fəzaları və s. fəzalara tez-tez təsadüf olunur. Digər tərəfdən, olduqca çox hallarda $\mathcal{K}$ sinfinin additiv sinif olduğu əvvəlcədən fərz olunur, yəni ixtiyari $A \in \mathcal{K}$ və $B \in \mathcal{K}$ çoxluqları üçün $A \cup B \in \mathcal{K}$ münasibəti ödənilir (yəni $\mathcal{K}$ sinfi $\cup$ əməlinə görə yuxarı yarışəbəkədir).

Additiv siniflər üçün ixtiyari Ç. a. f. eyni zamanda çoxluqların sonlu – additiv funksiyasıdır. Başqa sözlə, $\mathcal{K}$ – ixtiyari additiv sinif, μ, – $\mathcal{K}$ sinfində təyin olunmuş ixtiyari additiv funksiyadırsa, onda

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_m) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_m)$$

bərabərliyi $\mathcal{K}$-nın sonlu sayda bütün dizyunkt $(A_i)_{1 \le i \le m}$ ailəsi üçün ödənilir.

Əgər $\mathcal{K}$ sinfi $\cup$ və $\cap$ əməllərinə görə şəbəkədirsə, onda $\mu : \mathcal{K} \to G$ funksiyasının additivlik şərti

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada A, B, – $\mathcal{K}$ sinfinin ixtiyari elementləridir.

Riyazi analizdə, Evklid həndəsəsində, ehtimal nəzəriyyəsində və ölçü nəzəriyyəsində müxtəlif cəbrlərdə və halqalarda təyin olunmuş və bəzi əlavə xassələrə malik olan ədədi additiv funksiyalar xüsusi rol oynayır.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с. англ., М., 1953.

ADDİTİV KÜY « аддитивный шум; additive noise » – bax, *Kanal* additiv küylü.

ADDİTİV MƏSƏLƏLƏR(i) ədədlər nəzəriyyəsinin **« аддитивные задачи** теории чисел; **additive problems** of number theory **»** – tam ədədlərin verilmiş şəkildəki toplananlara (toplananlarının sayı çoxalan) ayrılışı haqqında məsələlərdir. Belə məsələnin ən sadə qoyuluşu aşağıdakı kimidir. $f(x)$ – natural arqumentin tamqiymətli funksiyası, p – qeyd olunmuş və ya artan natural ədəd olsun. Natural N ədədinin

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

tipli ifadələrinin sayı $I(N, n)$ üçün asimptotik düstur tapmaq tələb olunur, burada $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le p-1$ və n sonsuzluğa kimi artan parametrdir.

Bu məsələ ehtimal nəzəriyyəsi terminologiyasında aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – ümumi paylanma qanunları eyni

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = f(k)\} = 1/p, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1$$

olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $a = \mathbf{M}\,\xi_1$, $\mathbf{D}\,\xi_1 = \sigma^2 > 0$ olsun. $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətinə baxılır.

$$\mathbf{P}\{\eta_n = N\} = \int_0^1 e^{-2\pi i z N}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i z f(x)}\right)^n dz. \quad (*)$$

Aydındır ki,

$$\mathbf{P}\{\eta_n = N\} = p^{-n} I(N, n).$$

(*) inteqralının baş hissəsini ayırmaq, yəni $I(N, n)$ üçün asimptotik düsturu tapmaq üç halda mümkündür:

1) n qeyd olunmuşdur, p artandır; 2) n artandır, p qeyd olunmuşdur; 3) n və $p = p(n)$ eyni zamanda artan natural ədədlərdir.

Birinci hal ədədlər nəzəriyyəsi üçün səciyyəvidir və asimptotik düstur analitik ədədlər nəzəriyyəsinin metodları ilə tapılır. İkinci halda lokal limit teoreminə əsasən $I(N, n)$ üçün asimptotik ifadə almaq olur. Üçüncü halda $I(N, n)$ üçün asimptotik düsturun tapılması hər bir seriyası asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət seriyalar ardıcıllığı üçün lokal limit teoremi ilə eynigüclüdür. Burada mürəkkəblik, qalıq həddin ilkin paylanmalara nəzərən müntəzəm statistik qiymətinin alınmasındadır, bu isə

$$S(f, z) = \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1} e^{2\pi i z f(x)}$$

triqonometrik cəminin z-in bütün dəyişmə oblastında $p \to \infty$ olduqda qiymətləndirilməsini tələb edir, $S(f, z)$-in qiymətləri haqqında ümumi teoremlər olmadığından elə məsələlər sinifləri seçilir ki, bu məsələlərdə limitlərdə müntəzəm lokal teoremlər müəyyən olunsun. $f(x)$ qüvvət üstlü funksiya və ya çoxhədli olduğu hallar daha yaxşı öyrənilmişdir.

Toplananları sayı artan A. m.-ə ilk dəfə Q. Kastelnuovo (G. Castelnuovo, 1933) baxmışdır, o, $f(x) = x$ halında ehtimali mülahizələri tətbiq edərək, $I(N, n)$ üçün asimptotikanın baş həddini almışdır. Belə məsələlərin sistematik tədqiqinə A. Q. Postnikovun (1956, bax, [1]) işlərilə başlanılmışdır. O, $f(x) = x$ və $f(x) = x^2$ hallarında $I(N, n)$ üçün qalıq həddin müntəzəm qiyməti ilə asimptotik düsturları ciddi isbat etmişdir. A. m.-in çoxsaylı müxtəlif ümumiləşmələri vardır: dəyişənlər bütün sadə ədədlər çoxluğundan və ya bütün natural ədədlər çoxluğundan olduqda, çoxölçülü hallara da baxılmışdır (bax, [3]).

Toplananları sayı artan ədədlər nəzəriyyəsinin A. m. riyazi statistikada tətbiq olunur, məs., ranq statistikalarının asimptotik xassələrinin araşdırılmasında bunlara olduqca çox təsadüf olunur [4].

Əd.: [1] Постников А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971; [2] Сираждинов С. Х., Азларов Т. А., Зунаров Т. М., Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, Таш., 1975; [3] Исраилов М. И., «Записки науч. Семин. ЛОМИ. Исследования по теории чисел, 8», 1983, т. 121, с. 62–82; [4] Королюк В. С., Боровских Ю. В., Асимптотический анализ распределений статистик., М., 1984.

ADDİTİV MODEL « аддитивная модель; additive model » blok plan, – bax, *Blok plan.*

σ – ADDİTİV ÖLÇÜ « σ – аддитивная мера; σ – additive measure » – bax, *Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası.*

***ADDİTİV TƏSADÜFİ PROSES « аддитивный случайный процесс; additive random (stochastic) process »** – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

AFFİN ŞEYP « аффинный шейп; affine shape » – bax, *Təsadüfi şeyp.*

AĞAC(ı) imtinalar **« дерево** отказов; fault **tree »** – bax, *İmtinalar ağacı.*

AĞAC təsadüfi **« дерево** случайное; random **tree »** – bax, *Təsadüfi ağac.*

AĞACVARİ XƏTTİ KOD « древовидный линейный код; linear tree code » – bax, *Konvolyusion kod.*

AĞACVARİ KOD « древовидный код; tree code » – hər hansı bir əlifbada sözlərin sonlu və ya hesabi çoxluğudur ki, onu seçilmiş təpəsi (kök) olan ağac ilə təsvir etmək olar. Ağacın hər bir tili seçilmiş əlifbadan verilmiş uzunluqlu (əksər hallarda bütün tillər üçün eyni) sonlu sayda simvollar ardıcıllığı ilə eyniləşdirilir. Ağac üzrə kökdən başlayan ixtiyari yol hər hansı kod sözünə uyğundur; ixtiyari kod sözünə ağac üzrə hər hansı yol uyğun olur. Kodlama nəzəriyyəsində fərz olunur ki, bir düyündən çıxan bütün tillər müxtəlifdir. Sonlu uzunluqlu A. k.-a misal prefiks xassəli kodlardır, bu kodlarda kod sözü digər kod sözünün prefiksi (yəni başlanğıcı) olmur. Sonsuz uzunluqlu A. k.-a misal *konvolyusion kodlardır.*

Əd.: [1] Блейхут Р., Теория и практика кодов, контролирующих ошибки, пер. с англ., М., 1986.

AXIN « поток; flow » – *ölçülü* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fəzasının* aşağıdakı şərti ödəyən $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ avtomorfizmlər ailəsidir: ixtiyari $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ qiymətlərində $T^{t_1+t_2}x = T^{t_1}T^{t_2}x$ bərabərliyi bütün $x \in X$ üçün μ – sanki yəqin doğrudur. T^t-nin t-dən asılılıq xarakterinin dəqiqləşdirilməsi ilə *kəsilməz axın* və *ölçülən axın* anlayışları alınır.

AXIN, Bernulli axını **« поток** Бернулли; Bernoulli flow **»** – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi.*

AXIN kəsilməz **« поток** непрерывный; continuous **flow »** – bax, *Kəsilməz axın.*

AXIN ölçülən **« поток** измеримый; measurable **flow »** – bax, *Ölçülən axın.*

K – AXIN « K – поток; K – flow » – bax, *K – sistem.*

***AXIN PARAMETRİ « потока параметр; parameter of flow »** – bax, *Təsadüfi axın.*

AXINI, σ – CƏBRLƏRİN « поток σ – алгебр; filtration / family of σ – algebras » – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *ehtimal fəzasının* aşağıdakı bəzi şərtləri ödəyən σ – cəbrlər ailəsidir. T – nizamlanmış çoxluq olsun; fərz olunur ki, hər bir $t \in T$ qiymətində $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbri $\mathcal{A}_t$ təyin olunmuşdur. $(\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ σ – cəbrlər axını hər $t \in T$ üçün $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ və $s, t \in T$, $s \le t$ qiymətlərində $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$ münasibətlərini ödəyərsə, $(\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ σ – cəbrlər axını adlanır. $(M, \mathfrak{B})$ faza fəzasında hər bir $X(t)$ təsadüfi prosesi ilə bütün mümkün ola bilən $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $s \in T$, $s \le T$ üçün

$\{\omega: X(s,\omega)\in\Gamma\}$ şəklində çoxluqları özündə saxlayan Ω-nın altçoxluqlarının minimal σ – cəbri $\mathfrak{N}_t$-lərin təbii σ – cəbrlər axını $(\mathfrak{N}_t)_{t\in T}$ təyin olunur. Əgər $T=\mathbb{R}_+$ olarsa, onda $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ σ – cəbrlər axını üzərinə qoyulan adi şərtlər aşağıdakılardır: a) axının sağdan kəsilməzliyi, yəni bütün $t\geq 0$ üçün $\mathscr{A}_t=\bigcap_{s>t}\mathscr{A}_s$; b) $\mathscr{A}$ σ – cəbri $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən tam sinifdir və $\mathscr{A}_0$ σ – cəbri $\mathscr{A}$-nın sıfır ölçülü bütün çoxluqlarını özündə saxlayır.

Əd.: [1] Д е л л а ш е р и К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

AXININ İNTENSİVLİYİ « потока интенсивность; intensity of flow » – bax, *Təsadüfi axın.*

AXIRINCI GƏLƏNƏ İLK XİDMƏT (AGİX) « последним пришел – первым обслужен (ПоППО); last income first outcome (LIFO) » – kütləvi xidmət nəzəriyyəsində istifadə olunan anlayışdır. Kütləvi istehsal olunan əşyalar elə qaydada yığılır ki, son istehsal olunan əşya özündən əvvəl istehsal olunan əşya üzərinə qoyulur, yəni sonuncu qəbul olunan tələbə ilk əvvəl xidmət olunur. Xidmət olunan əşyanın xidmət olunma müddəti ərzində xidmət üçün digərləri daxil olunur və daxil olduqca üst-üstə yığılır. Bu qayda növbə xidmətində – « axırıncı gələnə ilk xidmət» qaydası adlanır.

Fərz olunur ki, birkanallı sistemə λ parametrli Puasson qanunu ilə paylanmış daxil olan tələb növbədə n-ci tələbdir. Tələbin xidmətolunma müddəti riyazi gözləməsi $1/\mu$-ə bərabər olan ixtiyari bir $B(t)$ paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətdir. Bu tələbin xidmətolunma müddətinin paylanması « A G İ X » qaydalı sistem üçün məşğulluq müddətinin paylanmasıdır; növbədə olan tələblərin sayı əvvəlcə n-ə bərabər idisə, o, yenə də n-ə bərabər olur.

Əd.: [1] С а а т и Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., М., 1965.

AKAİKE İNFORMASİON KRİTERİSİ « Акаике информационный критерий; Akaike information criterion, AIC », AİK, – bax, *Prediktorların ən yaxşı altçoxluğunun seçilməsi.*

AKAİKE KRİTERİSİ « Акаике критерий; Akaike criterion » proqnozun son qərar xətasının – bax, *Parametrik model*; tərtibin seçilməsi.

AKSİOMATİK KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ « аксиоматическая квантовая теория поля; axiomatic quantum field theory » – kvant meydan nəzəriyyəsinin bölməsidir; burada «kvant meydan» obyektini abstrakt təsvir edən ümumi postulatlar formalaşdırılır və bunlardan çoxlu nəticələr çıxarılır.

Ən çox istifadə olunan aksiomlar sistemi L. Qordinq və A. Uaytmana məxsusdur (bax, [2]). Məs., ən sadə – M^d Minkovski fəzasında skalyar neytral bozon meydanı halında, bu meydan hər hansı Hilbert fəzası H-da təsir edən və Şvarts fəzasından olan nişanlanmış hamar, sürətlə azalan $f\in S(M^d)$ funksiyalarının simmetrik operatorlarının $\{\varphi(f),\ f\in S(M^d),\ d\geq 2\}$ ailəsi ilə verilir; bu halda $f\to\varphi(f)$ uyğunluğu f-ə görə xəttidir, $\varphi(f_1)$ və $\varphi(f_2)$ operatorları isə f_1 və f_2 daşıyıcıları bir-birinə nəzərən fəzavi doğruyaoxşarlığa malik olarlarsa, kommutasiya olunurlar. Daha sonra fərz olunur ki, a) H fəzasında Puankare qrupunun (M^d-nin hərəkətlər qrupunun) hər hansı elə unitar $g\to U_g$ təsviri verilir ki, bütün g və $f\in S(M^d)$ üçün

$$U_g\varphi(f)U_g^{-1}=\varphi(\tau_g f),$$

$$(\tau_g f)(x)=f(g^{-1}x),\quad x\in M^d;$$

b) M^d-nin translyasiyalarına uyğun olan U_g altqrupunun $\{P_\mu,\ \mu=q,...,d\}$ doğuran operatorlarının birgə spektri M^d-də işıq konusunun yuxarı zolağında yerləşir; c) vuruq dəqiqiyi ilə yeganə $\Omega\in H$ vektoru vardır və bu vektor $g\to U_g$ təsvirinə nəzərən invariant və $\{\varphi(f),\ f\in S(M^d)\}$ ailəsinə nəzərən tsiklik vektordur. Bu aksiomlar sisteminin müxtəlif modifikasiyaları və $w_n(f_1,...,f_n)=(\varphi(f_1),...,\varphi(f_n)\Omega,\Omega)_H$ – *Uaytman funksiyaları* terminlərində bunların digər şəkildə ifadə formaları vardır (bax, [1]). Bu aksiomatikanın ən dərin nəticələri Uaytman funksiyalarının analitik xassələrinin öyrənilməsi ilə və səpələnmənin formal nəzəriyyəsinin qurulması ilə bağlıdır.

Əd.: [1] Й о с т Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [2] W i g h t m a n A., G a r d i n g L., «Ark. Phys.», 1964, v. 28, p. 129–84; [3] Б о г о л ю б о в Н. Н., [и др.], Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987.

AKTİV DƏYİŞƏN « активная переменная; active variable » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli.*

AKTİV EKSPERİMENT « активный эксперимент; active experiment » – *reqression eksperimentlərin planlaşdırılması* prinsiplərinə uyğun olaraq təşkil olunmuş ölçmələr toplusudur.

ALDOUS – REBOLLEDO ŞƏRTİ « Алдоуса – Реболледо условие; Aldous – Rebolledo condition » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün; martinqal metodları.

ALEKSANDROV FƏZASI « Александрова пространство; Alexandrov space » – bax, σ – *ölçülən funksiya.*

ALEKSANDROV TEOREMİ « Александрова теорема; Alexandrow theorem » – çoxluqlar siniflərində ölçülərin qiymətlərinin yığılması terminlərində *ölçülərin* zəif yığılma şərtidir. $\mathscr{M}$, – $(\mathscr{X},\mathfrak{G})$ normal topoloji fəzasında verilmiş ölçülər fəzası və $\mathbf{P}\in\mathscr{M}$ olsun. Əgər $G_1\subseteq B\subseteq\mathscr{X}\setminus G_2$ və $\mathbf{P}(G_1)=\mathbf{P}(\mathscr{X}\setminus G_2)$ şərtlərini ödəyən $G_1,G_2\in\mathfrak{G}$ açıq çoxluqları vardırsa, $\sigma(\mathfrak{G})$ σ – cəbrinin B çoxluğunun $\mathbf{P}$ – sıfır sərhədi vardır.

$\mathscr{M}$-dən olan ölçülər şəbəkəsi $(\mathbf{P}_\theta)$-nın $\mathbf{P}\in\mathscr{M}$ ölçüsünə zəif yığılması üçün:

1) $\mathbf{P}$ – sərhədinə malik, Borel $\sigma(\mathfrak{G})$ σ – cəbrinin ixtiyari B çoxluğu üçün

$$\lim_\theta \mathbf{P}_\theta(B)=\mathbf{P}(B)$$

bərabərliyinin;

2) ixtiyari $G \in \mathfrak{G}$ açıq çoxluğu üçün

$$\lim_{\theta} \inf \mathbf{P}_{\theta}(G) \geq \mathbf{P}(G) \quad \text{və} \quad \lim_{\theta} \mathbf{P}_{\theta}(\mathscr{X}) = \mathbf{P}(\mathscr{X})$$

münasibətlərinin;

3) ixtiyari qapalı F çoxluğu üçün

$$\lim_{\theta} \sup \mathbf{P}_{\theta}(F) \leq \mathbf{P}(F) \quad \text{və} \quad \lim_{\theta} \mathbf{P}_{\theta}(\mathscr{X}) = \mathbf{P}(\mathscr{X})$$

münasibətlərinin ödənilməsi kimi şərtlərdən birinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Yuxarıda şərh olunanların hamısı σ – topoloji fəzalar üçün də doğrudur.

Bax, *Ölçü.*

Teorem A. D. Aleksandrov tərəfindən [1]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, с. 307–48; 1941, т. 9, с. 563–628; 1943, т. 13, с. 169–238; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ALFA – EKSSESSİV FUNKSİYA « альфа – эксцессивная функция; alpha – excessive function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

ALFA – FAKTOR ANALİZ « альфа – факторный анализ; alpha – faktor analysis » – bax, *Faktor analiz*; sxemlər.

ALFA – NÜVƏSİ, POTENSİALLARIN « альфа – ядро потенциалов; potential alpha – kernel » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

ALFA – POTENSİAL « альфа – потенциал; alpha – potential » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

ALQORİTMİK ENTROPİYA « алгоритмическая энтропия; Kolmogorov complexity entropy » – sonlu obyektlərin entropiyası, sonlu obyektlərin mürəkkəblik ölçüsü, – verilmiş obyektin təsvir edilməsi üçün zəruri olan, A. N. Kolmoqorovun daxil etdiyi *informasiya miqdarı* ölçüsüdür.

İkilik sözlər (sıfır və vahidlərin sonlu ardıcıllıqları) çoxluğunun özünə müəyyən alqoritmlə hesablanan natamam inikasına (ümumiyyətlə isə, hər yerdə təyin olunmayan) təsvir qaydası deyilir. Təsvir qaydası G -yə nəzərən x sözünün mürəkkəbliyi – $K_G(x)$, p sözlərindən elə ən qısa uzunluqlu sözə deyilir ki, bu sözlər üçün $G(p) = x$ olsun. Elə optimal təsvir qaydası F vardır ki, ixtiyari təsvir qaydası G üçün bu qaydaya görə

$$K_F(x) \leq K_G(x) + O(1)$$

bərabərsizliyi ödənilir (bax, [1]). Optimal təsvir qaydasına nəzərən sözün mürəkkəbliyi (məhdud toplanan dəqiqliyilə təyin olunan) alqoritmik entropiya adlanır və o, $K(x)$ ilə işarə olunur.

A. e. hesablanmayan funksiyadır; elə bir qayda yoxdur ki, A. e.-sı verilmiş sözdən A. e.-sı böyük olan sözü effektiv seçmək mümkün olsun. Sözün A. e.-sı onun uzunluğunu aşmır ($+O(1)$); verilmiş uzunluqlu sözlərin əksəriyyəti üçün bu bərabərsizlik bərabərliyə yaxın olur (belə sözlər təbii olaraq «təsadüfi» sözlər sayılır). Hesablanılan inikaslar A. e.-nı konstantdan çox artırmır (bax, [2]).

Qeyd olunan sadə Kolmoqorov A. e.-dan fərqli, digər A. e. növləri də vardır (bax, [2] – [4]); məs., y məlum olduqda x -in təsviri üçün zəruri informasiya miqdarını ölçən şərti A. e. – $K(x|y)$;

$\mathrm{I}(y:x) = K(x) - K(x|y)$ fərqi y -də x haqqında informasiya miqdarı adlanan A. e.. I funksiyası demək olar ki, simmetrik funksiyadır:

$$\mathrm{I}(x:y) - \mathrm{I}(y:x) = O(\log(l(x) + l(y))),$$

burada $l(z)$, – z sözünün uzunluğudur. A. e.-nın daha bir variantı – monoton A. e. $KM(x)$ -in təyin edilməsi ikilik sözlərdə olan «başlanğıc olmaq» münasibətini nəzərə alır ([3] – [5]). Belə entropiya təsadüfilik anlayışının təyin edilməsində də istifadə oluna bilər: sıfır və vahidlərdən ibarət ardıcıllığın n uzunluqlu başlanğıc parçasının monoton A. e.-sı, yalnız və yalnız, $n + O(1)$ -ə bərabər olduğu halda, $[0, 1]$ parçasından olan təsadüfi ədəd (bax, *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər*) ikilik say sistemində sıfır və vahidlərdən ibarət ardıcıllıq şəklində ifadə olunur (bax, [3], [5]). $M(x)$ aprior ehtimal olarsa, x sözünün prefiks entropiyası $-\log_2 M(x)$ kimi təyin olunur.

Tərifə görə aprior ehtimal multiplikativ konstant dəqiqliyi ilə maksimal M funksiyasıdır. Bu funksiya – ikilik sözlər çoxluğunu mənfi olmayan həqiqi ədədlər çoxluğuna inikas etdirən və

(1) $\sum M(x) < +\infty$;

(2) r rasional ədədi $M(x)$ -dən kiçik olduğu halda $\langle r, x \rangle$ cütlər çoxluğu müəyyən bir alqoritmlə sayıla bilinir; kimi xassələrə malik bir funksiyadır. Prefiks entropiyası sadə Kolmoqorov A. e.-ından sözün uzunluğunun loqarifminin sözdən asılı olmayan konstanta hasilindən çox fərqlənmir (bax, [3]).

A. e. anlayışı ilə K. Şennonun (C. Shannon) entropiya üçün verdiyi tərif, aşağıdakı iki müddəa ilə təyin olunur.

1) x – ikilik say sistemində yazılmış söz, p və q, – x sözündəki sıfır və vahidlərin uyğun tezlikləri, $H = -(p\log_2 p + q\log_2 q)$, – 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq, p və q ehtimalları ilə alan təsadüfi kəmiyyətin Şennon entropiyası olsun. Onda $l(x) \to \infty$ olduqda, $K(x)/l(x) \leq H + O(1)$ doğrudur. Bu bərabərsizlikdən aydındır ki, A. e., eyni zamanda tezlik qanunauyğunluqlarını (digərləri ilə birlikdə) da nəzərə alır. Əgər x tezlik xüsusiyyəti olmayan qanunauyğunluqlara malikdirsə, bərabərsizliyin sol tərəfi sağ tərəfdən olduqca kiçik ola bilər; lakin aşağıdakı müddəadan aydın olur ki, «təsadüfi» x -lər üçün belə olmur.

2) 0 və 1 -in uyğun olaraq p və q ehtimalları ilə (Bernulli ölçüsü ilə) düzüldüyü α ardıcıllıqlarının n uzunluqlu başlanğıc parçasının A. e.-sının K -ya nisbətinin $n \to \infty$ olduqda limiti, $-(p\log_2 p + q\log_2 q)$ -yə bərabərdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, в. 1, с. 3–11; (см, Колмогоров А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 213–23); [2] Звонкин А. К., Левин Л. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 6, с. 85–127; [3] Вьюгин В. В., «Семиотика и информатика», М., 1981, в. 16, с. 14–43; [4] Шень А. Х., «Докл. АН СССР», 1984, т. 276, № 3, с. 563–66; [5] Левин Л. А., «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 3, с. 548–50; [6] Hartmanis J., «Bull. European Ass. Theor. Comp. Sci.», 1984, № 24 (Oct.) p. 73–78 [7] Витаньи П., Ли М., «Успехи матем. наук», 1988, т. 43, в. 6, с. 129–66.

ALLE PARADOKSU « Алле парадокс; Allais paradox » – ehtimal paylanmaları fəzasında affin indikatorla təsvir oluna bilinməyən üstünlük münasibətinə misaldır. Burada ədəd oxunda ehtimal paylanmalarının $\{F\}$ fəzasında üstünlük münasibəti $\succ$ üçün $\{F\}$ -də təyin olunan və

$$F \succ G \Leftrightarrow U(F) > U(G), \qquad (1)$$

ixtiyari $\alpha \in [0,1]$ üçün

$$U(\alpha F + (1-\alpha) G) = \alpha U(F) + (1-\alpha) U(G) \qquad (2)$$

xassələrinə malik olan U funksionalının olmadığı göstərilir (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*).

M. Alle [1]-də { 0 doll., 5 mln. doll., 25 mln. doll. } çoxluğunda topalanmış, gözlənilən təsadüfi gəlirin paylanmaları – F_1, F_2, F_3, F_4 ehtimallarını araşdırmışdır. Ehtimalların qiymətləri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

	0 doll.	5 mln. doll.	25 mln. doll.
F_1	0	1	0
F_2	0,01	0,89	0,1
F_3	0,9	0	0,1
F_4	0,89	0,11	0

«Standart individium» birinci variantı ikincidən üstün hesab edəcəkdir, çünki 5 mln. dolları əvvəlcədən almaq yaxşıdır, nəinki kiçik ehtimalla da olsa heç nə almamaq riskinə getmək, digər tərəfdən də 5 mln.-u almaq elə 25 mln.-u almaq qədər «ağlabatmazdır». Belə ki, sonuncu halda (yəni heç nə almamaq riskinə getmək halı) sıfır gəlirə öz vəziyyətini olduqca yaxşılaşdırmaq imkanını yüz faiz itkidən yaranan güclü narazılıq da əlavə olunacaqdır.

Üçüncü variant dördüncüdən üstün hesab olunur, belə ki, heç nə qazanmamaq ehtimalları «kiçik deyildirlər və bir-birindən az fərqlənirlər» və odur ki, uduşun çox olduğu variantı seçmək yaxşıdır, çünki hər iki variantda şanslar eynidir. Beləliklə, əgər $\succ$ münasibətləri qeyd olunan təsvirləri əks etdirirsə, onda $F_1 \succ F_2$ və $F_3 \succ F_4$ münasibətləri ödənilir. Əgər (1) – (2)-ni ödəyən U funksionalı vardırsa, onda

$$(F_1 + F_3)/\,1/2 \succ (F_2 + F_4)/\,1/2,$$

olur, lakin əslində

$$(F_1 + F_3)/\,1/2 = (F_2 + F_4)/\,1/2.$$

Baxılan üstünlük münasibəti kvadratik üstünlük indikatoru və ya müqayisəedici faydalılıq terminlərilə təsvir oluna bilinər (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*). Sonuncu halda müqayisəedici faydalılıq funksiyası superadditiv funksiyadır (bax, [2]).

Əd.: [1] A l l a i s M., «Econometrika», 1953, v. 21, p. 503–46; [2] К и р у т а А. Я., Р у б и н о в А. М., Я н о в с к и й Е. Б., Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах, Л., 1980.

***ALT PİLLƏ ANI « нижний лестничный момент; lower ladder time »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

14 ALTERNATİV

***ALT PİLLƏ BOYU « нижняя лестничная высота; lower ladder height »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

***ALT PİLLƏ İNDEKSİ « нижний лестничный индекс; lower ladder index »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

***ALT PİLLƏ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİ « нижние лестничные случайные величины; lower ladder random variables »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

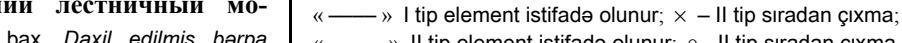
ALTERNATİV « альтернатива; alternative », a l t e r n a t i v h i p o t e z, – statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində *ilkin* (*sıfır*) *hipotezə qarşı qoyulan*, iki *statistik hipotezdən* biridir. Adətən, ilkin hipotez paylanma qanunu haqqında irəli sürülən, yoxlanılacaq müəyyən, əsas bir hipotezdir. A. isə bu hipotezdən fərqlənən mümkün hipotezlər sinfidir. Bəzən A., – alternativ hipotez olan müəyyən bir A. sinfini təmsil edən sinfə aid olan ayrıca bir paylanma kimi də anlaşılır.

ALTERNATİV HİPOTEZ « альтернативная гипотеза; alternative hypothesis » – bax, *Alternativ.*

ALTERNATİV METEOROLOJİ PROQNOZ « альтернативный метеорологический прогноз; forecast of meteorological binary variables of events / alternating meteorological forecast » – havanın elə proqnozudur ki, bu proqnozda havanın baxılan iki bir-birinə əks vəziyyətlərindən yalnız birinin baş verib-verməyəcəyi göstərilir (məs., «yağmurlu» və ya «yağmursuz» və s.). A. m. p. hava şəraitinin fövqəladə vəziyyətlərinin proqnozlaşdırılmasında xüsusilə böyük praktiki əhəmiyyətə malikdir. Havanın sonlu sayda fazalarından birinin ixtiyari proqnozunu A. m. p.-a gətirmək mümkündür (hətta ixtiyari kəmiyyət proqnozunu da, bu şərtlə ki, Y *prediktantının* qiymətlərinin mümkün oblastı sonlu sayda oblastlara bölünmüş və bu oblastlar çərçivələrində Y -in qiymətləri fərqlənməyən olsunlar), odur ki, A. m. p. ixtiyari hava proqnozunun, praktiki olaraq, əsası hesab oluna bilinər. A. m. p. halı üçün proqnozların keyfiyyət statistik qiymətləri (bax, *Proqnozu*, *havanın*; k e y f i y y ə t i n s t a t i s t i k q i y m ə t i) və meteoroloji informasiyanın optimal istifadə olunması metodları daha ətraflı surətdə öyrənilmişdir.

Əd.: [1] О м ш а н с к и й М. А., «Тр. Главн. геофиз. обсерв.», 1937, в. 14, с. 49–57; [2] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339–49; [3] Ж у к о в с к и й Е. Е., Метеорологическая информация и экономические решения, Л., 1981.

***ALTERNLƏNƏN BƏRPA PROSESİ « альтернирующий процесс восстановления; alternating renewal process »** – *bərpa nəzəriyyəsində bərpa proseslərindən* biridir. Elementlərin fasiləsiz işləmə müddətləri $\{X_1, X_2, ...\}$ və $\{Y_1, Y_2, ...\}$ olan iki tip elementlər ardıcıllığı verilir. Bunların uyğun paylanmalarının sıxlıq funksiyaları $f_1(x)$ və $f_2(x)$ olsun. Fərz olunur ki, fasiləsiz işləmə müddətləri statistik asılı olmayan kəmiyyətlərdir. I tip yeni elementdən başlayan prosesin hər bir sıradan çıxan elementi əks tip elementlə əvəz olunursa, belə proses a l t e r n l ə n ə n b ə r p a p r o s e s i (şəkil 1) adlanır.



« —— » I tip element istifadə olunur; × – II tip sıradan çıxma;
«- - - - -» II tip element istifadə olunur; ○ - II tip sıradan çıxma.

M i s a l 1. Müəyyən bir aparat fasilələrlə işləyir. Dayanan aparatın yenidən işə salınması üçün keçən müddət b ə r p a m ü d d ə t i adlandırılır. Bu halda, işləmə müddətləri və bərpa

müddətlərinin alternlənən ardıcıllığı yaranır. Əgər bu ardıcıllıqların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olduğu və bunların hər birinin uyğun paylanmasının sıxlıq funksiyaları ilə xarakterizə olunduğunu qəbul etmək olarsa, baxılan proses A. b. p.-dir.

M i s a l 2. ρ intensivlikli Puasson prosesi yaradan hissəciklər axını və bu proseslə əlaqədar aşağıdakı qayda ilə işləyən sayğac müşahidə olunur. Sayğac $t = 0$ anından başlayaraq X_1 müddəti ərzində işləmir; X_1-in paylanmasının sıxlıq funksiyası $f_1(x)$-dir. Bu müddət ərzində sayğac işləmir və bu müddət ərzində daxil olan ixtiyari hissəcik qeyd olunmur. X_1' anında sayğac işləməyə başlayır və əlavə X_1'' müddəti ərzində daxil olan hissəcik qeyd olunur. Hissəciklərin daxil olma anları Puasson prosesi əmələ gətirdiyindən X_1'' təsadüfi kəmiyyəti X_1'-dən asılı olmayaraq paylanmasının sıxlıq funksiyası $\rho e^{-\rho x}$-ə bərabər üstlü qanunla paylanır. Fərz olunur ki, X_2' və X_1' asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və X_2'-in paylanmasının sıxlıq funksiyası $f_2(x)$-dir. $(i-1)$ və i-ci qeyd olunmuş hissəciklərin arasındakı müddət $X_i' + X_i''$-ə bərabərdir. Əgər hissəciyin sayğacda qeyd olunmasına «imtina» (sıradan çıxma) kimi baxılarsa, s a d ə b ə r p a p r o s e s i alınır; belə ki, bu halda fasiləsiz işləmə müddətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $f_1(x)$-in $\rho e^{-\alpha x}$ ilə kompozisiyasına bərabər olur. Əgər sayğac açıq olduqda müşahidələr yenidən başlayarsa, onda ü m u m i b ə r p a p r o s e s i alınır ki, bu halda ilk fasiləsiz işləmə müddətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $\rho e^{-\alpha x}$-ə bərabərdir. Sadə bərpa prosesi halında hissəcik qeyd olunan anda bərpaolunma baş verir. Fasiləsiz işləmə müddəti (bərpaolunmalar arasındakı müddət) sayğacın işləmədiyi müddət ilə hissəciyin hələ daxil olmadığı, lakin onun üstlü qanunla paylanan müddət ərzində işləməyə başladığı zaman intervalının cəminə bərabərdir. Bu iki kəmiyyət asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan, bu sistemə A. b. p. kimi baxmaq olar.

Alternlənən proses ideyasına ümumi hal üçün də baxılır. Məs., tsiklik qaydada ard-ardınca yerləşən k tip elementdən ibarət sistemə baxmaq olar. Digər ümumiləşmiş halda, k tip elementlər və $\| p_{ij} \|$ matrisi götürülür; p_{ij}, – i-ci tip elementin j tipli elementlə əvəz olunmasının keçid ehtimalıdır. Belə proses s e m i - m a r k o v p r o s e s i adlanır.

Əd.: [1] К о к с Д. Р., С м и т В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967.

ALTPROSES « подпроцесс; subprocess » – *təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində Markov prosesi* ilə bağlı anlayışdır. $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ faza fəzasında eyni elementar hadisələr fəzası Ω ilə iki $(\zeta(t), \xi, \mathscr{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ və $(\widetilde{\zeta}(t), \widetilde{\xi}, \mathscr{F}_t^s, \widetilde{\mathbf{P}}_{sx})$ Markov proseslərinin verildiyi fərz olunur. Fərz olunur ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a) ixtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\widetilde{\xi}(\omega) < \xi(\omega)$;

b) $0 \le t < \widetilde{\xi}(\omega)$ olduqda, $\widetilde{\xi}(t) = \xi(t)$;

c) $\mathscr{F}_t^s = \mathscr{F}_t^s[\widetilde{\Omega}_t]$, burada $\widetilde{\Omega}_t = \{\omega: \widetilde{\xi}(\omega) > t\}$, $\mathscr{F}_t^s[\widetilde{\Omega}_t]$, – $\mathscr{F}_t^s$ σ – cəbrinin $\widetilde{\Omega}_t^s$ çoxluğunda izidir, yəni $A \in \mathscr{F}_t^s$ olduqda $A \bigcap \widetilde{\Omega}_t$ şəklində bütün hadisələrin çoxluğudur.

Bu halda $(\widetilde{\zeta}(t), \widetilde{\xi}, \mathscr{F}_t^s, \widetilde{\mathbf{P}}_{sx})$ prosesi $(\zeta(t), \xi, \mathscr{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ prosesinin yaşama müddətinin qısaldılması yolu ilə alınmışdır, deyilir.

Bu proseslərin *yaşama müddətləri* uyğun olaraq, τ və $\widetilde{\tau}$ olsun. Əgər ixtiyari (s, x) üçün $\mathbf{P}_{s,x}\{\widetilde{\tau} \le \tau\} = 1$ və $t < \widetilde{\tau}$ olduqda $\zeta(t) = \widetilde{\zeta}(t)$ olarsa, onda $\widetilde{\zeta}(t)$ prosesi $\zeta(t)$ prosesinin yaşama müddətinin qısaldılması yolu ilə alınır, deyilir.

Əgər $(\widetilde{\zeta}(t), \widetilde{\xi}, \widetilde{\mathscr{F}}_t^s, \widetilde{\mathbf{P}}_{sx})$ Markov prosesi $(\zeta(t), \xi, \mathscr{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ Markov prosesindən bu prosesə ekvivalent hər hansı prosesdən ekvivalent prosesin yaşama müddətinin qısaldılması yolu ilə alına bilinərsə, onda $(\widetilde{\zeta}(t), \widetilde{\xi}, \widetilde{\mathscr{F}}_t^s, \widetilde{\mathbf{P}}_{sx})$ prosesinə $(\zeta(t), \xi, \mathscr{F}_t^s, \widetilde{\mathbf{P}}_{sx})$ prosesinin a l t p r o s e s i deyilir.

Əgər $\mathbf{P}(s, x, t, \Gamma)$ $(\zeta(t), \xi, \mathscr{F}_t^s, \mathbf{P}_{sx})$ Markov prosesinin keçid ehtimalıdırsa, $\widetilde{\mathbf{P}}(s, x, t, \Gamma)$ isə bu prosesin hər hansı *altprosesinin ehtimalıdırsa*, onda aydındır ki,

$$\widetilde{\mathbf{P}}(s, x, t, \Gamma) \le \mathbf{P}(s, x, t, \Gamma).$$

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М., 1985; [3] Д ы н к и н Е. В., Основания теории марковских процессов, М., 1959.

ALTSİNFİ, VƏZİYYƏTLƏRİN M a r k o v z ə n c i r i n **« подкласс состояний** ц е п и М а р к о в а; **subclass** o f a M a r k o v c h a i n **»** – bax, *Markov zənciri*; v ə z i y y ə t l ə r i n t ə s n i f a t ı.

ALTŞƏBƏKƏ « подсеть; subnet » – bax, *Şəbəkə*(s i) ö l ç ü l ə r i n.

AMPLİTUD MODULYASİYA « амплитудная модуляция; amplitude modulation » – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi prosesinin dəyişdirilərək,

$$Z(t) = c\,(1 + m\,\zeta^0(t))\,\zeta(t), \quad -\infty < t < \infty$$

şəklinə çevrilməsidir, burada $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, $\mathbf{D}\zeta(t) = 1$, c – sürətlənmə əmsalı, $\zeta^0(t)$, $-\infty < t < \infty$, $\mathbf{M}\zeta^0(t) = 0$, $\mathbf{D}\zeta^0(t) = 1$ olan modelləyici *stasionar təsadüfi proses*, m, – $0 < m < 1$ münasibətini ödəyən, təsir dərəcəsini xarakterizə edən kəmiyyətdir, m *modulyasiya dərinliyi* adlanır.

Əgər $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ kovariasion funksiyaları uyğun olaraq, $B_\zeta(\tau)$ və $B_{\zeta^0}(\tau)$ olan asılı olmayan stasionar proseslərdirsə, onda $Z(t)$ stasionar prosesdir və onun kovariasion funksiyası

$$B_Z(\tau) = c^2\,B_\zeta(\tau)\,(-1 + m^2\,B_{\zeta^0}(\tau))$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əgər $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ proseslərinin spektral funksiyaları mütləq kəsilməz olarsa, onda spektral sıxlıqlar $f_\zeta(\lambda)$, $f_{\zeta^0}(\lambda)$ və $f_Z(\lambda)$ aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidirlər:

$$f_Z(\lambda) = c^2(f_\zeta(\lambda) + m^2 f_{\zeta^0}(\lambda) * f_\zeta(\lambda)),$$

burada $*$ – kompozisiya işarəsidir. $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ uyğun olaraq λ_1 və λ_2 tezliklərində topalanmış darzolaqlı spektrlərə malik olarsa, $0 < \lambda_2 << \lambda_1$ şərti ödənilərsə, $f_Z(\lambda)$ sıxlığı ± 1 tezliklərində zirvələrə malikdir, bu zirvələr d a ş ı y ı c ı z i r v ə l ə r adlanır, $\pm(\lambda_1 - \lambda_2)$ tezliklərində isə $f_Z(\lambda)$, y a n və ya p e y k z i r v ə l ə r adlanan zirvələrə malikdir. $f_Z(\lambda)$-nın bu nöqtələrdə və həm də $\lambda = \lambda_2$ üçün qiymətləri aşağıdakı təqribi ifadələrlə təyin olunur:

$$f_Z(\lambda_1) \approx c^2[\, f_\zeta(\lambda_1) + m^2 (f_{\zeta^0}(0)\, f_\zeta(\lambda_1) + \\ + f_{\zeta^0}(\lambda_2)\, f_\zeta(\lambda_1 + \lambda_2))\,],$$

$$f_Z(\lambda_1 - \lambda_2) \approx c^2[f_\zeta(\lambda_1 - \lambda_2) + m^2 f_{\zeta^0}(\lambda_2)\, f_\zeta(\lambda_1)],$$

$$f_Z(\lambda_2) \approx c^2[f_\zeta(\lambda_2) + m^2\, (\, f_{\zeta^0}(\lambda_2) f_\zeta(0) + \\ + f_{\zeta^0}(\lambda_1 - \lambda_2) f_\zeta(\lambda_1))\,].$$

$|Z(t)|$ funksiyası $Z(t)$ prosesinin *qurşayıcısıdır*. $\zeta(t)$ və $\zeta^0(t)$ darzolaqlı proseslər olduğu halda təbii fiziki interpretasiyası olunurlar, buna görə də, məs., radiotexnikada geniş tətbiq olunurlar.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Выборочные траектории и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [2] С в е ш н и к о в А. А., Прикладные методы теории случайных функций, 2 изд., М., 1968; [3] Х а р к е в и ч А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [4] Х е н н а н Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

AMPLİTUD – MODULYASİYALANMIŞ HARMONİK RƏQS « амплитудно – модулированное гармоническое колебание; amplitud – modulated harmonic oscillation » –

$$X(t) = X_0(t) \cos(\lambda_0 t + \theta)$$

şəklində rəqsdir, burada λ_0 – qeyd olunmuş dairəvi tezlik, $X_0(t)$ amplitudlu stasionar təsadüfi proses, θ fazası ya təsadüfi kəmiyyət və ya qeyd olunmuş ədəddir. Əgər θ fazası $[0, 2\pi]$ intervalında müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa, $X_0(t)$ prosesinin [spektral sıxlığı $f_0(\lambda)$ ilə təyin edən] güc paylanması $|\lambda| << \lambda_0$ tezliklər oblastında topalanmışdırsa, onda A. – m. h. r. $X(t)$ stasionar təsadüfi prosesdir və bu prosesin spektral sıxlığı $\lambda = \lambda_0$ və $\lambda = -\lambda_0$ nöqtələrində şiş zirvəyə malikdir. Əgər θ fazası qeyd olunmuşdursa, onda $X(t)$ – periodik korrelyar təsadüfi prosesdir və bu prosesin ikiölçülü spektral ölçüsü $F(d\lambda, d\lambda')$, $\lambda = \lambda'$, $\lambda = \lambda' + 2\lambda_0$ və $\lambda = \lambda' - 2\lambda_0$ parçalarında topalanmışdır.

16 AMPLİTUD

AMPLİTUD – MODULYASİYALANMIŞ İMPULSAL PROSES « амплитудно – модулированный импульсный процесс; amplitud – modulated impulse process » –

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\, \Gamma(t - t_n) \qquad (*)$$

şəklində *impulsal təsadüfi prosesdir*, burada $\Gamma(t)$ – impulsların formasını təyin edən, verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır, t_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$ zaman oxunun nöqtələri çoxluğudur, bu çoxluq təsadüfi, yaxud determinik ola bilər, X_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$ – amplitudlar ardıcıllığı stasionar təsadüfi ardıcıllıqdır.

$\{t_n\}$ – Puasson nöqtələr sistemi (vahid zaman ərzində nöqtələrin orta sayı λ-ya bərabər olan), $\{X_n\}$ isə $\mathbf{M} X_n = m$, $\mathbf{M} X_n^2 = a^2$ momentləri ilə verilən, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olarsa, $\zeta(t)$ – stasionar təsadüfi prosesdir və onun orta qiyməti və korrelyasiya funksiyası uyğun olaraq,

$$\mathbf{M}\, \zeta(t) = \lambda\, m \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u)\, du$$

və

$$\mathbf{M}\, \zeta(t + \tau)\, \zeta(t) = \\ = \lambda\, a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u + \tau)\, \Gamma(u)\, du + \lambda^2 m^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u)\, du \right]^2$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Əgər $t_n = nT_0$ (T_0 – qeyd olunmuş perioddur) və ya $t_n = nT_0 + \varepsilon_n$ ($\{\varepsilon_n\}$, – $\{X_n\}$-dən asılı olmayan stasionar təsadüfi ardıcıllıqdır) olarsa, onda $\zeta(t)$ periodu T_0 olan periodik korrelyar təsadüfi prosesdir.

Əd.: [1] К о н о в а л о в Г. В., Т а р а с е н к о Е. М., Импульсные случайные процессы в электросвязи, М., 1973; [2] Р ы т о в С. М., Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, М., 1976; [3] Л е в и н Б. Р., Теоретические основы статистической Радиотехники., 2 изд., кн. 1, М., 1974; [4] М и д д л т о н Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1–2, М., 1961–62; [5] Ф р е н к с Л., Теория сигналов, пер. с англ., М., 1974.

AMPLİTUD – MODULYASİYALANMIŞ TƏSADÜFİ PROSES « амплитудно – модулированный случайный процесс; amplitud – modulated random process » –

$$\zeta(t) = \zeta_0(t)\, \Gamma(t)$$

şəklində *təsadüfi prosesdir*, burada $\zeta_0(t)$ – stasionar təsadüfi proses, $\Gamma(t)$ isə verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır. A. – m. t. p.-in xüsusi halı – *amplitud – modulyasiyalanmış harmonik rəqsdir*. Əgər $\Gamma(t)$ periodik funksiya olarsa, onda A. – m. t. p. $\zeta(t)$, periodik korrelyar təsadüfi prosesdir; əgər

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\, dK(\omega)$$

olarsa, onda $\zeta(t)$ evolyusion spektral ayrılışı olan proseslər sinfindəndir, burada $|dK(\omega)|$, – $\omega = 0$ olduqda mütləq maksimuma malikdir.

AMPLİTUD TEZLİKLİ XARAKTERİSTİKA « амплитудно частотная характеристика; amplitude frequency response » – bax, *Ötürücü funksiya.*

ANALİTİK XARAKTERİSTİK FUNKSİYA « аналитическая характеристическая функция; analytic characteristic function » – həqiqi X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}$-nin $z = 0$ nöqtəsinin hər hansı ətrafına analitik davam oluna bilən *xarakteristik funksiyasıdır*. $z = t + is$, $|z| < r$ dairəsində analitik olan f xarakteristik funksiyası $|\mathrm{Im}\, z| < z$ zolağında da analitikdir və bu zolaqda

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\, \mathbf{P}(dx)$$

düsturu ilə ifadə oluna bilinir.

Xarakteristik f funksiyası, yalnız və yalnız, hər hansı $r > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{|X| > A\} = O(e^{-rA}), \quad A \to \infty$$

olduğu halda A. x. f.-dır. Əgər

$$a = \sup\{t > 0 : \mathbf{M}\, e^{tX} < \infty\},$$

$$b = \sup\{t > 0 : \mathbf{M}\, e^{-tX} < \infty\}$$

olarsa, onda $-ia$, ib, – f funksiyasının xüsusi nöqtələridir və $\{z : -a < \mathrm{Im}\, z < b\}$, – f funksiyası üçün maksimal analitiklik zolağıdır. A. x. f.-lar böyük yayınmalar ehtimalları haqqında teoremlərdə, paylanmaların komponentlərə ayrılışlarının dayanıqlılığı məsələlərində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979.

ANALOQLAR METODU « аналогов метод; analogous method » meteorologiyada – hava proqnozu metodudur: ötmüş illərin meteoroloji müşahidələrinin məlumatlar arxivindən cari zamana maksimum oxşar situasiya seçilir, sonra müşahidə olunan hava dəyişiklikləri proqnozlanır. Atmosfer vəziyyətləri çoxölçülü faza fəzasında nöqtə kimi götürülərək, bu nöqtələr isə zaman ötdükcə hər hansı trayektoriyalarla yerlərini dəyişdiyindən, atmosfer üçün A. m.-unda fərz olunur ki, trayektoriyanın «başlanğıc nöqtələri» yaxın olduğu halda bu nöqtələr müəyyən müddət ərzində bir-birinə yaxın qalır. Atmosfer dinamika qanunlarına tabe olduğundan, A. m.-nun tətbiqi faktiki olaraq onu ifadə edir ki, atmosferin evolyusiyasının real yerinə yetirilməsini təsvir edən dinamika tənliklərinin dəqiq həlli başlanğıc vəziyyətləri üst-üstə düşməyən, lakin oxşar verilənlər üçün istifadə olunur (üst-üstə düşməməzlik, həmişə, atmosfer xarakteristikaları üzərində müşahidələrin qaçılmaz natamamlığı və hava şəraitinin eynilə təkrarolunmamazlığı ilə yaranır). Yaxın başlanğıc vəziyyətlərdən sonrakı atmosfer vəziyyətlərinin bir-birindən fərqlənməsi sürətinin analizi meteoroloji proseslərin öncədən söylənilməsini qiymətləndirməyə imkan yaradır.

A. m. ilə proqnoz üçün həlledici qayda qurmağa görə çoxölçülü *prediktorlar* (proqnoz üçün istifadə olunan atmosfer xarakteristikalarının) fəzası X-in nöqtə kimi verilən ilkin meteoroloji vəziyyətlərinin fərqini (və ya oxşarlığını) ölçməyi bacarmaq lazımdır. $X^{(1)}$ və $X^{(2)}$ vəziyyətlərinin fərqlənmə ölçüsü – $D(X^{(1)}, X^{(2)})$-nin aşağıdakı şərtləri ödəməsi təbiidir:

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) = D(X^{(2)}, X^{(1)}),$$

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) \le D(X^{(1)}, X^{(3)}) + D(X^{(3)}, X^{(2)}),$$

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) \ge 0, \quad D(X^{(1)}, X^{(1)}) = 0.$$

Fərqlənmə ölçüsü kimi ümumiləşmiş Evklid məsafəsi:

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2\right]^{1/2}$$

geniş surətdə istifadə olunur. Ümumiləşmiş Hemminq məsafəsi:

$$D(X^{(1)}, X^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right|,$$

də istifadə olunur, burada $x_i^{(j)}$, $i = 1,...,n$ – $X^{(j)}$ nöqtəsinin koordinatları, ω_i müəyyən çəkilərdir və bu çəkilər analogiya haqqında mülahizə aparmaq üçün i-ci prediktorun fərz olunan mühümlüyünü xarakterizə edir. Digər oxşarlıq ölçülərinə də baxılır, məs., belə ölçü hava proqnozu keyfiyyətinin bu və ya digər statistik qiyməti ola bilər (bax, *Proqnozu*, *havanın*; keyfiyyətin statistik qiyməti).

Əgər müşahidələr arxivi X_j prediktorlarının və Y_j *prediktantlarının* (j – arxivdə müşahidə nömrəsidir) qiymətləri ilə verilmişdirsə, onda A. m.-na əsaslanan proqnoz alqoritmi (həlledici qayda) $\hat{Y}(X_0) = Y_{j_\alpha}$ şəklində olur, burada X_0 – proqnoz anında prediktorun qiyməti, $\hat{Y}$ – prediktantın öncə söylənilməcək qiyməti, j_α isə arxivdə olan yaxşı analoqa uyğun müşahidə nömrəsidir, yəni

$$D(X_0, X_{j_\alpha}) = \min_j D(X_0, X_j).$$

A. m. meteorologiyada uzunmüddətli proqnozlama üçün əsas metodlardan biridir (bax, [3]). Yaxşı analoqlar qrupu istifadə olunduqda bu metod daha məqbul nəticələr üçün məqsədəuyğun sayılır.

Belə qrup üzrə atmosferin bir sıra müxtəlif xarakteristikalarını proqnozlamaq mümkündür və hətta *havanın ehtimali proqnozunu* tərtib etmək mümkündür.

Əd.: [1] Груза Г. В., Ранькова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983; [2] Груза Г. В., Рейтенбах Р. Г., Статистика и анализ гидрометеорологических данных, Л., 1982; [3] Долгосрочные метеорологические прогнозы, Л., 1985.

ANDERSON BƏRABƏRSİZLİYİ « Андерсона неравенство; Anderson's inequality » – vektor fəzalarında qabarıq, sıfra nəzərən simmetrik çoxluqların və onların uyğun istiqamətlər üzrə yerinidəyişmələrinin ölçülərinin qiymətləri arasında bərabərsizlikdir. μ – topoloji vektor fəzası F-də Borel ölçüsü olsun, ixtiyari qabarıq və sıfra nəzərən simmetrik $C \subset F$ Borel çoxluğu və ixtiyari $t \in [0,1]$, $y \in F$ üçün $\mu(C + ty) \ge \mu(C + y)$, o cümlədən, $\mu(C) \ge \mu(C + y)$ münasibəti ödənilərsə, onda μ ölçüsü üçün Anderson bərabərsizliyi ödənilir, deyilir.

$\mathbb{R}^n$-də ehtimal ölçüsü üçün A. b. o halda ödənilir ki, məs., bu ölçü Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü olsun, onun sıxlığı f isə aşağıdakı şərtləri ödəsin: 1) $f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$; 2) ixtiyari $\theta > 0$ üçün $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \geq \theta\}$ çoxluğu qabarıq çoxluq olsun. Bu fakt T. Anderson tərəfindən uzlaşma statistik kriterilərinin asimptotik nəzəriyyəsinin bəzi problemlərinin öyrənilməsi ilə bağlı müəyyən olunmuşdur və bir sıra ehtimal bərabərsizliklərinin əsası olmuşdur.

A. b. mərkəzlənmiş Qauss ölçüləri üçün, separabel Banax fəzalarında və daha ümumi topoloji vektor fəzalarında digər ehtimal ölçülərinin geniş sinfi üçün doğrudur.

Əd.: [1] Anderson T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, № 2, p. 170–76; [2] Borell K., «Ark. mat.», 1974, v. 12, № 2, p. 239–52; [3] Булдыгин В. В., Харазишвили А. Б., Неравенство Брунна – Минковского и его приложения, K., 1985.

ANDERSON – YENSEN TEOREMİ « Андерсона – Йенсена теорема; Anderson – Jensen theorem » – bax, *Hasil*(i) ehtimal fəzalarının.

ANDRE İNİKAS PRİNSİPİ « Андре принцип отражения; Andre's reflection principle » – bax, *İnikas prinsipi.*

AN(ı) dayanmanın **« момент** остановки; stopping **time »** – bax, *Dayanma anı*.

ANİ SPEKTRAL SIXLIQ « мгновенная спектральная плотность; instantaneous spectral density » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

ANİ VƏZİYYƏT « мгновенное состояние; instantaneous state » – bircins Markov prosesinin elə x vəziyyətidir ki, bu vəziyyətdən çıxış ehtimalının sıxlıq funksiyası sonsuzluğa bərabərdir:

$$\lim_{t \downarrow 0} p(t, x, x) = 1,$$

$$q_x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p(t, x, x)}{t} = +\infty,$$

burada $p(t, x, x)$ – prosesin t müddəti ərzində x vəziyyətindən x-ə keçid ehtimalıdır. A. v.-in varlığı 1951-də A. N. Kolmoqorov və ondan asılı olmayaraq P. Levi (P. Lévy) tərəfindən aşkar edilmişdir, bu isə vəziyyətlər çoxluğu sonlu *Markov prosesləri* nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafına təkan vermişdir. «A. v.» termini P. Leviyə məxsusdur. Prosesin trayektoriyalarının A. v.-də olma anları çoxluğu ya sanki yəqin boş çoxluqdur və ya müsbət Lebeq ölçülü (hətta özündə metrik sıx) çoxluqdur, lakin hər yerdə sıx deyildir. A. v. *dayanıqlı vəziyyətə* qarşı vəziyyət kimi anlaşılır.

Əd.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., M., 1964.

ANOSOV DİNAMİK SİSTEMİ « Аносова динамическая система; Anosov dynamical system » – $t \in (-\infty; \infty)$ və ya $t \in \{0; \pm 1; \pm 2, ...\}$ olduqda kompakt hamar Riman çoxobrazlısı $\mathcal{D}$-də təyin olunmuş $S^t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ diffeomorfizmlərinin elə bir parametrik qrupudur ki, bu qrup üçün $\mathcal{D}$ üzərində kəsilməz $\upsilon(x)$ vektorlar meydanında $(S_*^t \upsilon)(x) = dS^t\, \upsilon\,(S^{-t}x)$ düsturu ilə təsir göstərən S_*^t xətti operatorunun spektri vahid radiuslu çevrə ilə kəsişmir. Hamar invariant ölçü olduğu halda A. d. s. güclü stoxastik xassələrə malik olur (bax, [1], [2]), t diskret olduğu halda – K – sistemdir. $\mathcal{D}$-də verilən $f(x)$ funksiyalarının geniş sinfi üçün mərkəzi limit teoremi ödənilir. A. d. s. güclü stoxastik xassələrli dinamik sistemlərə bir misaldır (bax, *Erqodik nəzəriyyə*).

Əd.: [1] Аносов Д. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 90, с. 1–210; [2] Синай Я. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 1, с. 15–68.

ANSARİ – BREDLİ KRİTERİSİ « Ансари – Брэдли критерий; Ansari – Bradley test » – iki skalyar seçimin miqyaslarında müxtəlifliyin olmasına baxmayaraq onların bircinsliyini yoxlamaq üçün *ranq kriterisidir*. Daha dəqiq, skalyar, asılı olmayan seçimlərlə təsvir olunan iki ümumi çoxluğun bircinsliyi hipotezinə qarşı alternativ hipotez – bu seçimlərin medianlarının bərabər olması şərtilə onların səpələnmə ölçülərinin müxtəlifliyini yoxlamaq üçün kriteridir. Ranqların təyin edilmə sistemi: bütün müşahidələnənlər birləşdirilir; 1 ranq iki müşahidələnənə – müşahidələnənlərdən ən böyük və ən kiçiyinə; 2 ranq – yerdə qalan müşahidələnənlərdən ən böyük və ən kiçiyinə və i. a. verilir. A. – B. k.-nin statistikası seçimlərdən birinin ranqlarının cəmidir. Əgər seçimlərin hər ikisi eyni bir kəsilməz ümumi çoxluqdan seçilmişlərsə, A. – B. k.-nin statistikası sərbəst paylanmaya malik olur; onun paylanması yalnız seçimlərin həcmindən asılı olur. Bu məsələnin həlli üçün *Sicel – Tyuki kriterisi* də tətbiq olunur. Sıfır (başlanğıc) hipotezində Sicel – Tyuki kriterisi statistikası Uilkokson ranq cəmləri kriterisi statistikası kimi paylanmışdır və buna görə də, onun paylanma və faiz nöqtələri cədvəllərindən istifadə etmək olar.

Medianları ola bilər ki, üst-üstə düşməyən iki ümumi çoxluğun miqyas ölçülərinin bərabərliyini seçimlər üzrə yoxlamaq üçün L. Mozes, paylanmadan asılı olmayan (sıfır hipotezi halında) ranq kriterisinə oxşar kriteri təklif etmişdir (bax, [2], [3]). Bu kriteridə süni randomizasiya – ilkin seçimlərin altqruplara təsadüfi bölgüsü istifadə olunur.

Əd.: [1] Ansari A. R., Bradley R. A., «Ann. Math. Statist», 1960, v. 31, № 4, p. 1174–89; [2] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., M., 1983; [3] Moses L. E., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 3, p. 973–83.

ANTİFERROMAQNİT MODEL « антиферромагнитная модель; antiferromagnetic model » – statistik mexanikanın həqiqi qiymətlərli şəbəkəvari modelinin xüsusi halıdır. Bu model onunla səciyyəvidir ki, A. m.-in hər hansı periodik əsas vəziyyəti elə $\{x_t,\ t \in \mathbb{Z}^d\}$ konfiqurasiyalarında topalanmışdır ki, bütün $t \in \mathbb{Z}^d$ üçün $x_{t+e} = -x_t$ bərabərliyi ödənilir, burada $e \in \mathbb{Z}^d$ – ixtiyari vahidi vektordur. A. m. üçün Gibbs paylanmalarının strukturu potensialı U aşağıdakı şəkildə verilən antiferromaqnit *İzinq modeli* ilə illüstrasiya olunur:

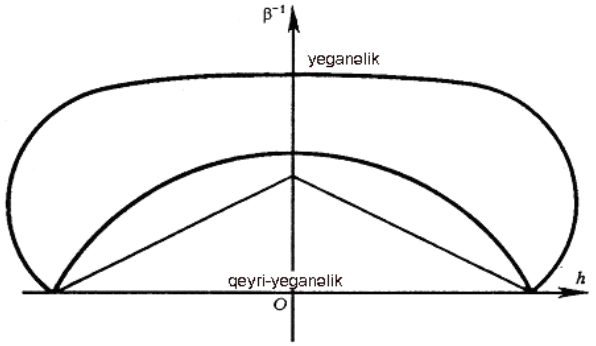
$$U_A(x_A) = \begin{cases} -h\, x_t, & A = \{t\}, \\ x_s\, x_t, & A = \{s, t\},\ |s - t| = 1, \\ 0, & \text{digər } A\text{–lar üçün}, \end{cases}$$

burada $x_t = \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}^d$, $h \in \mathbb{R}$. İzinq modelinin əsas vəziyyətləri $|h| < 2d$ olduqda, iki x^1, x^2 konfiqurasiyalarında topalanmışdır:

$$x_t^1 = (-1)^{t_1 + \ldots + t_d}, \quad x_t^2 = -x_t^1.$$

$h = 0$ olduqda İzinq A. m. İzinq ferromaqnetikinə izomorfdur. İzomorfizm dəyişənlərin $x_t \to (-1)^{t_1 + \ldots + t_d} x_t$ əvəzləməsi ilə

alınır. $h \neq 0$ olduqda modellər izomorf deyildir və $d \geq 2$ olduqda (şəkil) müxtəlif faza diaqramlarına malik olurlar.



Məlumdur ki (bax, [1]), Gibbs paylanması böyük β və kiçik h-ların üçbucaq oblastında yeganə deyildir, kiçik β və böyük h-lar oblastında isə yeganədir. Fərz olunur ki, yeganəlik və qeyri – yeganəlik oblastlarının ümumi sərhədi olan əyri mövcuddur.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Функ. анализ и его прилож.», 1968, т. 2, в. 4, с. 44–57.

ANTİSİMMETRİK FOK FƏZASI « антисимметрическое пространство Фока; antisimmetric Fock space » – bax, *Fok fəzası.*

ANTİSİMMETRİK SEÇMƏ METODU « антисимметричной выборки метод; antisymmetric variate method » – bax, *Antitetik dəyişənlər metodu.*

ANTİTETİK DƏYİŞƏNLƏR METODU « антитетичных переменных метод; antithetic variables method », antisimmetrik seçmə metodu – f funksiyasının vahidi hiperkub üzrə s – qat inteqralının Monte – Karlo metodu ilə qiymətləndirilməsində

$$[f(\xi_1,...,\xi_s) + f(1-\xi_1,...,1-\xi_s)]/2$$

ifadəsinin istifadə olunmasından ibarətdir, burada ξ_i, – $[0,1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi və ya psevdotəsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] Hammersley J., Morton K., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1956, v. 52, p. 449–75.

APARI ƏMSALI « сноса коэффициент; drift coefficients » – bax, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Aparı əmsalları.*

APARI ƏMSALLARI « переноса / сноса коэффициенты; drift coefficients » – diffuzion prosesin *doğuran operatorunun* ilk törəmələrinin qarşısındakı əmsallardır. A. ə. aparı vektorunu əmələ gətirir. Əgər diffuzion (və ya kvazidiffuzion) proses

$$dx(t) = a(t, x(t))\,dt + \sigma(t, x(t))\,dw(t)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidirsə (bax, *Diffuziya əmsalları*), onda bu prosesin A. ə. (verilmiş bazisdə) $a(t,x)$ vektorunun koordinatlarıdır (bu bazisdə).

$a(t,x)$ aparı vektorunun fiziki mənası: diffuzion prosesin t-dən $t+\Delta t$-yə qədər müddət ərzində orta meyli $x(t+\Delta t)-x(t)$, $\Delta t \downarrow 0$ olduqda $x(t)=x$ olarsa, $o(\Delta t)$ dəqiqliyi ilə $a(t,x)\Delta t$ şəklində ifadə oluna bilinir (əgər qeyd olunan meylin momenti yoxdursa, onda kəsik meyl götürülməlidir). Başqa sözlə, $a(t,x)$ x nöqtəsində t anında mühitin (hissəciyin hərəkətinin müşahidə olunduğu) hərəkəti sürətinin makroskopik sürətidir.

APARI VEKTORU « сноса вектор; drift vector » – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi*.

APARICI FUNKSİYA « ведущая функция; leading function » – bax, *Puasson prosesi*, *Nöqtəvi proses.*

***APARICI ÖLÇÜSÜ, AXININ « ведущая мера потока; leading measure of flow »** – bax, *Təsadüfi axın.*

APOSTERİOR EHTİMAL « апостериорная вероятность; posteriori probability », hər hansı təsadüfi hadisənin, aposteriori ehtimal – şərtsiz ehtimalın və ya *aprior ehtimalın* əksinə olaraq, hər hansı bir hadisənin baş verməsi şərtinə nəzərən *şərti ehtimalıdır.* «Şərti» və «aposterior» terminləri arasında heç bir prinsipial fərq yoxdur. Tətbiqi hallarda şərtin özü fərziyyəvi xarakter daşıyaraq sınaqlarda bilavasitə müşahidə olunmadıqda, «şərti» termini istifadə olunur.

«Aposterior» termini nəzərə alınacaq şərtin, faktik olaraq, müşahidə olunduğunu qeyd etmək istədikdə istifadə olunur.

A. e. aprior ehtimalla *Beyes düsturu* ilə əlaqəlidir.

APOSTERİOR ORTA QİYMƏT « апостериорное среднее; a posterior mean » – *aposterior paylanmanın* riyazi gözləməsidir.

APOSTERİOR PAYLANMA « апостериорное распределение; a posteriori distribution » şərti paylanma, – hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin müəyyən bir şərtə nəzərən *şərti ehtimal paylanmasıdır* və bu şərtsiz paylanma və ya *aprior paylanmaya* əks mənada anlaşılır.

Θ – təsadüfi parametr, $p(\theta)$ – aprior paylanmanın sıxlıq funksiyasıdırsa, $\tilde{\xi}$ – sınaqlarda müşahidə olunan təsadüfi nəticədirsə və $p(x|\theta)$ isə $\{\Theta=\theta\}$ şərtinə nəzərən $\tilde{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanmasının sıxlıq funksiyasıdırsa, onda Θ-nın $\tilde{\xi}$-yə nəzərən A. p.-sının sıxlıq funksiyası Beyes düsturuna əsasən

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)\,p(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta)\,p(x|\theta)\,d\theta}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əgər $K(x)$ paylanmalarının sıxlıq funksiyaları $p(x|\theta)$ olan paylanmalar ailəsi üçün kafi statistikadırsa, onda A. p. x-in özündən deyil, $K(x)$-dən asılıdır. x_i-lər asılı olmayan sınaqlarda şərti paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x|\theta_0)$ olan $\tilde{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin aldığı qiymətlər olarsa, onda $p(\theta|x_1,...,x_n)$ A. p.-nın $n\to\infty$ olduqda asimptotik yaxınlaşması θ-nın aprior paylanmasından «sanki asılı olmur».

Statistik həllər nəzəriyyəsində A. p.-nın rolu haqqında «*Beyes yanaşması* statistik məsələlərə» məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946.

APOSTERİOR RİSK (i) həlledici funksiyanın « **апостериорный риск** решающей функции; **a posterior risk** of a decision function » – statistik eksperimentdə müşahidə olunan X təsadüfi elementinin (seçimin) x nəticəsinin qeyd olunmuş qiymətində δ həlledici funksiyasının və θ parametrinin birgə paylanması üzrə $L(\theta, \delta(X))$ itki funksiyasının *şərti riyazi gözləməsidir*. $\delta_G(x)$ Beyes həllində A. r.-in qiyməti – şərti Beyes riski adlanır.

Bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə.

***APPROKSİMASİYA TEOREMİ** « **аппроксимации теорема; approximation theorem** » – $\mathscr{A}$ cəbrinin doğurduğu σ – cəbrə daxil olan ixtiyari A hadisəsinin $\mathscr{A}$ -ya daxil olan hadisələr ardıcıllığının limiti kimi ifadə olunması haqqında teoremdir.

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathscr{U}$, – $\mathscr{F}$ -ə daxil olan hadisələrin hər hansı $\mathscr{A}$ cəbrinin doğurduğu σ – cəbr olsun. Onda ixtiyari $A \in \mathscr{U}$ hadisəsi üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n \overline{A} \cup \overline{A}_n A) = 0 \qquad (1)$$

xassəsini ödəyən $A_n \in \mathscr{A}$ hadisələr ardıcıllığı vardır;

(1) xassəsi ona ekvivalent olan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n \setminus A) = 0$$

münasibəti şəklində də ifadə olunur.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_n A) + \mathbf{P}(\overline{A}_n A) =$$

$$= \mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_n \overline{A}) + \mathbf{P}(\overline{A}_n A)$$

olduğundan teoremin hökmü onu ifadə edir ki, $\mathbf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$ və hər bir $A \in \mathscr{U}$ hadisəsi sıfır ehtimallı çoxluq dəqiqliyilə doğuran $\mathscr{A}$ cəbrinə daxil olan hadisələr ardıcıllığının limiti kimi ifadə oluna bilər.

$A \in \mathscr{F}$ hadisəsi üçün (1) xassəsini ödəyən təsadüfi hadisələr ardıcıllığı olarsa, A -ya approksimələolunan hadisə deyilir.

APPROKSİMASİYASI, MÜRƏKKƏB PAYLANMALARIN daha sadələrilə « **аппроксимация сложных распределений** более простыми; **approximation of complex distributions** by simplier ones » – *ehtimal paylanmalarının* xassələri məlum olan və ya asanlıqla öyrənilən daha sadə formalı *ehtimal paylanması* ilə yaxınlaşmasıdır.

Misal. Paylanmanın *Pirson paylanmaları* ailəsindən olan əyri vasitəsilə approksimasiyası. Pirson əyriləri ailəsinə aid olan ehtimal paylanmasının $y = f(x)$ sıxlıq funksiyası

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{x + C_1}{C_0 + C_1 x + C_2 x^2}$$

differensial tənliyinin həllidir, burada C_0, C_1 və C_2 sabitləri σ^2 dispersiyası, asimmetriya əmsalı γ_1 və eksses əmsalı γ_2 ilə sadə münasibətlərlə əlaqəlidirlər. Beləliklə, σ^2, γ_1 və γ_2 -nin verilmiş qiymətləri üzrə paylanmanı Pirson ailəsindən uyğun əyri ilə approksimasiya etmək olar. Nəzəri paylanma məlum olmadığı halda σ^2, γ_1 və γ_2 kəmiyyətləri əvəzinə onların seçimi qiymətlərini götürərək seçimi paylanmanı hamarlamaq məqsədilə Pirson əyrisindən də istifadə etmək olar.

Daha sadə misallar *Asimptotik normal çevirmə*, *Asimptotik Pirson çevirməsi* və *Normal approksimasiya* məqalələrində verilmişdir.

Əd.: [1] Кендалл М. Д., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., 1966; [2] Elderton W. P., Frequency curves and correlation, Camb., 1953; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

$(\mathscr{K}, \Phi)$ – APPROKSİMƏEDİCİ FUNKSİONAL « **$(\mathscr{K}, \Phi)$ – аппроксимирующий функционал; $(\mathscr{K}, \Phi)$ – approximating functional** » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

***APPROKSİMƏOLUNAN HADİSƏ** « **аппроксимируемое событие; approximable event** » – bax, *Approksimasiya teoremi.*

APRİOR EHTİMAL « **априорная вероятность; a priori probability** » hər hansı hadisənin, apriori ehtimal, şərtsiz ehtimal, – hər hansı əlavə şərtə nəzərən bu hadisənin şərti ehtimalına əks mənada, həmin hadisənin şərtsiz ehtimalıdır. Şərti ehtimal, bu halda *aposterior ehtimal* adlanır. Bu terminologiya, adətən, *Beyes düsturu* ilə əlaqədar istifadə olunur.

APRİOR İNFORMASİYA « **априорная информация; a prior information** » statistik məsələlərdə – təsadüfi hadisə və ya proses haqqında statistikə a priori məlum olan keyfiyyət və kəmiyyət haqqında məlumatlardır; alınan müşahidə nəticələri üzərində işlədikdən sonra o, özünün nəticələrini çıxarır. Bir qayda olaraq hesab olunur ki, statistik məsələlərdə araşdırılan təsadüfi hadisə və ya prosesin baxıldığı $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasının keyfiyyətli təsviri məlumdur, burada Ω – elementar hadisələr fəzası, $\mathscr{A}$ isə bütün müşahidə olunan təsadüfi hadisələri özündə saxlayan Ω -nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdir. Bundan başqa, «müşahidəolunan təsadüfi hadisə və ya prosesin nəticələrinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}\{d\omega\}$, $(\Omega, \mathscr{A})$ -da təyin olunmuş bütün ehtimal paylanmaları çoxluğu $\mathrm{Cap}(\Omega, \mathscr{A})$ -dan olan $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsindəndir», əlavə informasiyasından da istifadə olunur. Bəzən müşahidə olunan $\mathbf{P}_\theta$ qanununun parametri θ -nın $(\Theta, \mathscr{B})$ -də hər hansı məlum $\mathbf{Q}\{d\theta\}$ paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət olduğunu da fərz etmək olar. Statistik qiymətləndirmədə mürəkkəb məsələlər keyfiyyətcə minimal A. i. ilə verilmirsə, bu məsələlər korrekt olmur və tutarlı həllə malik olmur (bax, [3]).

Əd.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960 (добавление); [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Ченцов Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, № 1, с. 15–31.

APRİOR İNFORMASİYADAN İSTİFADƏ « **априорной информации учет; a prior information usage** » reqression analizdə – reqressiya funksiyasının naməlum parametrləri haqqında *aprior informasiyanın* bu parametrlərin ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınan statistik qiymətlərindən daha dəqiq statistik qiymətlər almaq məqsədilə istifadə olunmasıdır. $(\mathrm{Y}, \Phi\theta, \sigma^2 W)$ xətti reqression eks-

perimentinin sxemi üçün A. i. i.-nin ən çox istifadə olunan üsulları aşağıdakılardır.

$\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrləri üzərinə $A\theta = r$ xətti məhdudiyyətlərinin qoyulduğu fərz olunur, burada A – ranqı q-yə bərabər olan $(q \times p)$ – matrisi, $0 < q < p$, r isə q – vektordur. $R\theta = r$ tənliklər sisteminin ümumi həllini $\theta = \theta_0 + B_\beta$ şəklində yazmaq olar; θ_0 – xüsusi həll, β – ixtiyari $(p-q)$ – vektor, B isə $p-q$ ranqlı $[p \times (p-q)]$ – matrisdir. Onda ilkin xətti reqression eksperimentin sxemi **r e d ü s l ə n m i ş** adlanan $(\mathrm{Y} - \Phi\theta_0, \Phi B_\beta, \sigma^2 W)$ sxeminə ekvivalentdir. θ parametrlərinin statistik qiymətləri $\hat{\theta} = \theta_0 + B_{\hat{\beta}}$ düsturu ilə təyin olunur, burada $\hat{\beta}$ – redüslənmiş modelin β parametrlərinin statistik qiymətidir.

Bir çox hallarda θ parametrləri haqqında aprior informasiya $r = R\theta + \varphi$ şəklində olur, burada r – məlum q – vektor, R – məlum $(q \times p)$ – matris, φ – təsadüfi q – vektordur və φ əsas reqression eksperimentdəki təsadüfi xətalar vektoru ilə korrelyar deyildir və $\mathbf{M}\varphi = 0$, $\mathrm{cov}\varphi = V$ – cırlaşmayan $(q \times q)$ – matrisdir. Bu halda reqression eksperiment sxemi **q a r ı ş ı q m o d e l** adlanır; bu model $(\mathrm{Y}_0, \Phi_0\theta, \sigma^2 W_0)$ sxeminə ekvivalentdir, burada

$$\mathrm{Y}_0 = \left\| \begin{matrix} Y \\ r \end{matrix} \right\|, \quad \Phi_0 = \left\| \begin{matrix} \Phi \\ R \end{matrix} \right\|, \quad W_0 = \left\| \begin{matrix} W & 0 \\ 0 & \sigma^{-2} V \end{matrix} \right\|.$$

θ parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiyməti isə

$$(\Phi' W^{-1} \Phi + \sigma^2 R' V^{-1} R)^{-1} (\Phi' W^{-1} Y + \sigma^2 R' V^{-1} r) \quad (*)$$

şəklində ifadə olunur.

$\mathbf{P}(d\theta)$ aprior paylanmasının naməlum parametrlər çoxluğu Θ-dan $(\Theta \subset \mathbb{R}^p)$ olduğu fərz olunur. Fərziyyəyə görə

$$r = \int_\Theta \theta \mathbf{P}(d\theta),$$

$$V = \int_\Theta (\theta - r)(\theta - r)' \mathbf{P}(d\theta), \quad R = \mathbf{I}_p,$$

burada $\mathbf{I}_p$ – vahidi $(p \times p)$ – matrisdir. $|V| \neq 0$ olduqda (*) statistik qiyməti **B e y e s s t a t i s t i k q i y m ə t i** adlanır; bu statistik qiymət bütün $\tilde{\theta}$ xətti statistik qiymətləri çoxluğu L-də

$$\int_\Theta \mathbf{M}(\tilde{\theta} - \theta)'(\tilde{\theta} - \theta)\, \mathbf{P}(d\theta)$$

kəmiyyətini minimallaşdırır.

Əgər naməlum parametrlər çoxluğu Θ ellipsoid, yəni

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |(\theta - r)' U^{-1} (\theta - r)| \leq k\}, \quad k > 0$$

olarsa, $R = \mathbf{I}_p$, $V = kU$ olduqda (*) statistik qiyməti **m i n i m a k s s t a t i s t i k q i y m ə t** adlanır; minimaks statistik qiymət Θ-da

$$\max_{\theta \in \Theta} a' \mathbf{M}(\tilde{\theta} - \theta)(\tilde{\theta} - \theta)' a$$

kəmiyyətini bütün $a \in \mathbb{R}^p$ üçün minimallaşdırır. Əgər $r = 0$ olarsa və $R' V^{-1} R$ matrisi vahidi matrisə mütənasib olarsa, onda (*) statistik qiyməti **y a l v a r i s t a t i s t i k q i y m ə t** adlanır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

APRİOR PAYLANMA « априорное распределение; a priori distribution », **ş ə r t s i z p a y l a n m a**, – hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanması olub, bu təsadüfi kəmiyyətin müəyyən bir şərtə nəzərən *şərti ehtimalına* əks mənada anlaşılır.

(θ, ξ) – təsadüfi kəmiyyətlər cütü (təsadüfi vektorlar və ya ən ümumi təsadüfi elementlər cütü) olsun. θ – naməlum parametr, ξ isə θ parametrini qiymətləndirmək üçün müşahidələrin nəticəsi olan təsadüfi kəmiyyətdir. θ və ξ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması θ-nın paylanma qanunu (bu halda θ-nın A. p.-sı adlanan) və ξ təsadüfi kəmiyyətinin θ-ya nəzərən şərti ehtimallar toplusu $\mathbf{P}_\theta$-lar ilə təyin olunur. θ təsadüfi kəmiyyətinin ξ təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti ehtimal paylanması (bu halda bu paylanma θ-nın *aposterior paylanması* adlanır) Beyes düsturu ilə hesablanır. A. p. statistik məsələlərdə, adətən, məlum olmur. A. p.-nın tətbiqi ilə əlaqədar « *Beyes yanaşması statistik məsələlərə* » məqaləsinə b a x.

APRİOR RİSK (i) **h ə l l e d i c i f u n k s i y a n ı n « априорный риск** рещающей функции; **a prior risk of a design function »** – parametrin aprior paylanmasına görə *həlledici funksiyanın* risk funksiyasının orta qiymətidir.

ARDICIL ANALİZ « последовательный анализ; sequential analysis » – riyazi statistikanın elə bölməsidir ki, burada aparılan sınaqlar sayı (müşahidələrin dayandırıldığı an) əvvəlcədən qeyd olunmayaraq, müşahidələr aparıldığı ərəfədə daxil olan məlumatlardan asılı olaraq seçilir. Ardıcıl metodların intensiv inkişafı və statistik praktikada tətbiqinə A. Valdın (A. Wald) işləri səbəb olmuşdur. O sübut etmişdir ki, aparılan sınaqların orta sayının təyin edilməsi üçün iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsində (asılı olmayan sınaqların nəticələri üzrə) ehtimallar nisbətinin ardıcıl kriterisi adlanan kriteri, Neyman – Pirson lemması ilə təyin olunan, ən güclü klassik fərqləndirmə üsulu ilə müqayisədə daha əlverişlidir (bu sonuncu halda seçimin həcminin qeyd olunduğu, səhv həllər ehtimallarının eyni olması nəzərdə tutulur).

A. a.-in əsas prinsipləri aşağıdakılardan ibarətdir. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F_\theta(x) = \mathbf{P}_\theta\{\xi_1 \leq x\}$ müəyyən bir Θ çoxluğundan olan naməlum θ parametrlərindən asılı paylanma funksiyasıdır. Məsələnin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, müşahidələrin nəticələrinə əsasən naməlum θ parametrinin əsl qiyməti haqqında bu və ya digər qərar çıxarılmalıdır.

İxtiyari statistik məsələnin həllinin əsasını θ parametrinin qiymətləri haqqında son (terminal) d qərarlarının fəzası D və

müşahidələrin dayandırılacaq anını (bu anda son qərar qəbul olunur) təyin edən τ qaydası təşkil edir. Müşahidələrin klassik metodlarında τ anı təsadüfi olmur və o, əvvəlcədən qeyd olunur; ardıcıl metodlarda τ «gələcəkdən» asılı olmayan (Markov anı, dayanma anı) təsadüfi kəmiyyətdir. Formal olaraq, $\mathscr{A}_n = \sigma(\omega; \xi_1, \dots, \xi_n)$, – $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbr, $\tau = \tau(\omega)$ isə $0, 1, \dots +\infty$ qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyət olsun; əgər hər bir $n \geq 0$ üçün $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{A}_n$ olarsa, τ təsadüfi kəmiyyətinə **Markov anı** deyilir ($\mathscr{A}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$). $\mathscr{A}_\tau$ hər bir $n \geq 0$ üçün $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{A}_n$ münasibətini ödəyən ölçülən A çoxluqlarının çoxluğu olsun. Əgər $\mathscr{A}_n$ təsadüfi olmayan n anına qədər (n anı da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr çoxluğu kimi interpretasiya olunarsa, onda $\mathscr{A}_\tau$ təsadüfi τ anına qədər (τ da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr çoxluğu kimi interpretasiya oluna bilər. Son (terminal) qərar $d = d(\omega)$ (və ya qoyulan məsələnin həlli) qiymətlər çoxluğu D fəzası olan $\mathscr{A}_\tau$ – ölçülən funksiyadır. Belə funksiyalar cütü $\delta = (\tau, d)$ **(ardıcıl) həlledici qayda** adlanır.

Həlledici qaydalar arasında «optimal» həlledici qaydanı təyin etmək üçün **risk funksiyası** $W(\tau, \theta, d)$ verilir və $\mathbf{M}_\theta W(\tau, \theta, d)$ riyazi gözləməsinə baxılır. $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ optimal həlledici qayda anlayışının tərifinə müxtəlif yanaşmalar mövcuddur. Bunlardan biri Beyes yanaşmasıdır; bu yanaşma ona əsaslanır ki, θ parametrinin aprior $\pi = \pi(d\theta)$ paylanması ilə verilən təsadüfi kəmiyyət olduğu fərz olunur. Onda

$$R^\delta(\pi) = \int_\Theta \mathbf{M}_\theta W(\tau, \theta, d)\, \pi(d\theta)$$

π – riskinə baxmaq olar və bu halda əgər $R^{\delta^*}(\pi) \leq R^\delta(\pi)$ münasibəti digər (məqbul) qayda üçün ödənilərsə, $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ qaydası **optimal Beyes həlli** (və ya π – optimal həll) adlanır. Risk funksiyası $W(\tau, \theta, d)$-nin ən çox yayılmış forması $c\tau + W_1(\theta, d)$ şəklində olan riskdir, burada $c \geq 0$ bir müşahidənin dəyəri, $W_1(\theta, d)$ isə son qərarın (həllin) **itki funksiyası** kimi interpretasiya olunur.

Beyes məsələlərində optimal son d^* həllinin tapılması, bir qayda olaraq, çətin olmur və bu halda əsas səylər optimal dayanma anı τ^*-nun təyin olunmasına yönəldilir. Bu zaman A. a.-in bir çox məsələləri «dayanmanın optimal qaydaları» sxemində öz əksini tapır. Bu sxem aşağıda şərh olunur.

$X = (x_n, \mathscr{A}_n, \mathbf{P}_x)$, $n \geq 0$ $x \in E$, – $(E, \mathscr{B})$ faza fəzasında Markov zənciri olsun, burada x_n, – n anında zəncirin vəziyyətidir; $\mathscr{A}_n$ σ – cəbri n anına qədər (n anı da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr cəbri, $\mathbf{P}_x$ başlanğıc (ilkin) $x \in E$ vəziyyətinin ehtimal paylanmasıdır. Fərz olunur ki, müşahidə n anında saxlanılsa, $g(x_n)$ uduşuna nail olunur. Onda τ anında müşahidənin dayandırılmasından alınan orta uduş $\mathbf{M}_x g(x_\tau)$-ya bərabərdir, burada x – ilkin vəziyyətdir. $s(x) = \sup \mathbf{M}_x g(x_\tau)$ funksiyası **dəyər** adlanır, burada sup bütün sonlu dayanma anları τ üzrə götürülür. $x \in E$ olan bütün x-lər üçün $s(x) \leq \mathbf{M}_x g(x_{\tau_\varepsilon}) + \varepsilon$ münasibətini ödəyən τ_ε anına **ε – optimal dayanma anı** deyilir; θ optimal anları **optimal anlar** adlanır. «Dayanmanın optimal qaydaları» nəzəriyyəsinin əsas sualları belədir: $s(x)$ dəyərinin strukturu nə cürdür, onu necə təyin etmək olar, ε – optimal və optimal anlar nə vaxt mövcuddur, onların strukturu necədir? Qoyulan suallara aid tipik nəticələrdən biri aşağıda şərh olunur.

$g(x)$ məhdud funksiya olsun: $|g(x)| \leq c < \infty$. Onda $s(x)$ dəyər funksiyası $g(x)$ funksiyasının ən kiçik ekssessiv majorantıdır, yəni $g(x) \leq f(x)$, $Tf(x) \leq f(x)$ xassələrini ödəyən $f(x)$ funksiyalarından ən kiçiyidir, burada $Tf(x) = \mathbf{M}_x g(x_1)$. Bu halda

$$\tau_\varepsilon = \inf \{ n \geq 0 : s(x_n) \leq g(x_n) + \varepsilon \}$$

anı ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε – optimal andır. $s(x)$ dəyəri $s(x) = \max \{g(x), Ts(x)\}$ Vald – Bellman tənliyini ödəyir və o, $s(x) = \lim_{n \to \infty} Q^n g(x)$ düsturu ilə tapılır, burada $Qg(x) = \max \{g(x), Tg(x)\}$. E çoxluğu sonlu olduğu halda

$$\tau_0 = \inf \{ n \geq 0 : s(x_n) = g(x_n) \}$$

anı optimal andır.

Ümumi halda əgər $\mathbf{P}_x\{\tau_0 < \infty\} = 1$, $x \in E$ olarsa, τ_0 anı optimal andır.

$C = \{x : s(x) > g(x)\}$, $\Gamma = \{x : s(x) = g(x)\}$ olsun. Tərifə əsasən

$$\tau_0 = \inf \{ n \geq 0 : x_n \in \Gamma \}.$$

Başqa sözlə, müşahidələr Γ çoxluğuna ilk daxil olma anında dayandırılmalıdır. Bununla bağlı olaraq, C çoxluğu **müşahidələrin davamolunma çoxluğu**, Γ **müşahidələrin dayandırılma çoxluğu** adlanır.

Bu nəticələrin illüstrasiyası kimi iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsini qeyd etmək olar. Bu məsələdə A. Vald ardıcıl metodların klassik metodlarla müqayisədə üstünlüyünü göstərmişdir. θ parametrinin π və $1-\pi$ aprior ehtimalları ilə uyğun olaraq 1 və 0 qiymətlərini aldığı fərz olunur. Son həllər (qərarlar) çoxluğu D-nin də iki nöqtədən ibarət olduğu qəbul olunur: $d = 1$ ($H_1 : \theta = 1$ hipotezi qəbul olunur) və $d = 0$ ($H_0 : \theta = 0$ hipotezi qəbul olunur). Əgər $W_1(\theta, d)$ funksiyasını

$$W_1(\theta, d) = \begin{cases} a, & \theta = 1, \quad d = 0, \\ b, & \theta = 0, \quad d = 1, \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan şəkildə seçmək olarsa və $W(\tau, \theta, d) = c\tau + W_1(\theta, d)$ götürülərsə, onda $R^\delta(\pi)$ üçün $R^\delta(\pi) = c\,\mathbf{M}_\pi \tau + a\,\alpha_\pi(\delta) + d\beta_\pi(\delta)$ ifadəsi alınır, burada $\alpha_\pi(\delta) = \mathbf{P}_\pi\{d = 0 \mid \theta = 1\}$, $\beta_\pi(\delta) = \mathbf{P}_\pi\{d = 1 \mid \theta = 0\}$ – uyğun olaraq, birinci və ikinci növ səhv ehtimallarıdır, $\mathbf{P}_\pi$ isə π

aprior paylanmasına uyğun müşahidələr fəzasında təyin olunmuş ehtimal paylanmasıdır. Əgər $\pi_n = \mathbf{P}\{\theta = 1 | \mathscr{A}_n\}$ $H_1 : \theta = 1$ hipotezinin $\mathscr{A}_n = \sigma(\omega : \xi_1, \ldots, \xi_n)$ σ – cəbrinə nəzərən aposterior ehtimalıdırsa, onda

$$R^{\delta}(\pi) = \mathbf{M}_{\pi}[c\tau + g(\pi_{\tau})]$$

düsturu doğrudur, burada $g(\pi) = \min(a\pi, b(1-\pi))$. $x_n = (n, \pi_n)$-ə tətbiq olunan optimal dayanma qaydalarının ümumi nəzəriyyəsinə əsasən, $\rho(\pi) = \inf\limits_{\tau} R^{\delta}(\pi)$ funksiyası

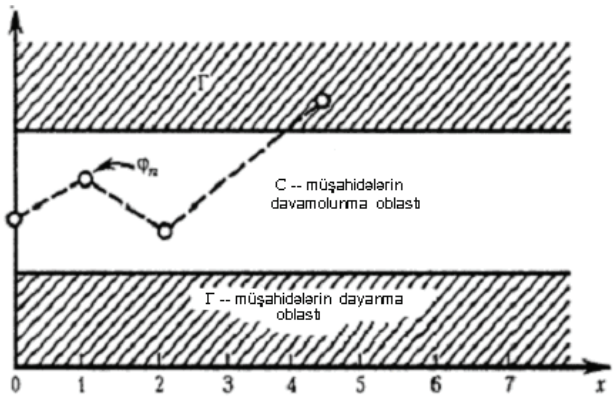
$$\rho(\pi) = \min\{g(\pi),\ c + T\rho(\pi)\}$$

tənliyini ödəyir. $\rho(\pi)$, $g(\pi)$, $T\rho(\pi)$ yuxarı qabarıq funksiyalar olduğundan, buradan belə nəticə alınır ki, iki elə A və B ədədləri var ki, $0 \le A < B \le 1$ olduqda, $C = \{\pi : A < \pi < B\}$ – müşahidələrin davamolunma oblastı, $\Gamma = [0,1] \setminus (A, B)$ isə müşahidələrin dayandırılma oblastıdır. Bu zaman $\tau_0 = \inf\{n \ge 0 : \pi_n \in \Gamma\}$ dayanma anı optimal dayanma anıdır $(\pi_0 = \pi)$.

Əgər $p_0(x)$ və $p_1(x)$ $F_0(x)$ və $F_1(x)$-in $d\mu = (dF_0 + dF_1)/2$ ölçüsünə nəzərən paylanmalarının sıxlıq funksiyalarıdırsa,

$$\varphi_n = p_1(\xi_1) \ldots p_1(\xi_n) / p_0(\xi_1) \ldots p_0(\xi_n)$$

isə doğruyaoxşarlıq nisbətidirsə, onda müşahidələrin davamolunma oblastını (şəkil 1)



Şəkil 1.

$$C = \left\{ \varphi_n : \frac{A}{1-A}\,\frac{1-\pi}{\pi} < \varphi_n < \frac{B}{1-B}\,\frac{1-\pi}{\pi} \right\}$$

şəklində yazmaq olar və

$$\tau_0 = \inf\{n \ge 0 : \varphi_n \notin C\}.$$

Bu halda əgər $\varphi_{\tau_0} \ge \frac{B}{1-B}\,\frac{1-\pi}{\pi}$ olarsa, onda $d = 1$ qərarı, yəni $H_1 : \theta = 1$ hipotezi qəbul olunur; əgər $\varphi_{\tau_0} \le \frac{A}{1-A}\,\frac{1-\pi}{\pi}$ olarsa, $d = 0$ həlli, yəni $H_0 : \theta = 0$ hipotezi qəbul olunur.

Bu optimal həlledici qaydanın strukturu aşağıda şərh olunan şərti ekstremal qoyuluşda hipotezlərin yoxlanılması məsələsi üçün də saxlanılır. Hər bir $\delta = (\tau, d)$ həlledici qaydası üçün səhvlər ehtimalları $\alpha(\delta) = \mathbf{P}_1\{d = 0\}$, $\beta(\delta) = \mathbf{P}_0\{d = 1\}$ daxil olunur və $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ədədləri verilir; daha sonra fərz olunur ki, $\Delta(\alpha, \beta)$, – $\alpha(\delta) \le \alpha$, $\beta(\delta) \le \beta$ münasibətlərini ödəyən bütün həllər qaydaları çoxluğudur və $\mathbf{M}_0\tau < \infty$, $\mathbf{M}_1\tau < \infty$. Aşağıdakı fundamental nəticə A. Vald tərəfindən alınmışdır. Əgər $\alpha + \beta < 1$ olarsa və

$$\tau = \inf\{n \ge 0 : \varphi_n \notin (a, b)\},$$

$$d = \begin{cases} 1, & \varphi_{\tau} \ge b, \\ 0, & \varphi_{\tau} \le a \end{cases}$$

şəklində olan, doğruyaoxşarlıq nisbətinə əsaslanan φ_n və d-lərin funksiyaları $\delta = (\tau, d)$ kriteriləri arasında elə $a = a^*$ və $b = b^*$ tapılarsa ki, birinci və ikinci növ səhv ehtimalları dəqiq olaraq α və β-ya bərabər olsun, onda $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ həlledici qaydası $a = a^*$ və $b = b^*$ ilə $\Delta(\alpha, \beta)$ sinfində optimal həlledici qaydadır, lakin bu o mənada anlaşılır ki, ixtiyari $\delta \in \Delta(\alpha, \beta)$ üçün $\mathbf{M}_0\tau^* \le \mathbf{M}_0\tau$, $\mathbf{M}_1\tau^* \le \mathbf{M}_1\tau$ münasibətləri ödənilməlidir.

$\delta^* = (\tau^*, d^*)$ ardıcıl həlledici qaydasının klassik qayda ilə müqayisədə üstünlüyünü $H_0 : \theta = 0$ və $H_1 : \theta = 1$ hipotezlərinin vahid diffuziyalı ζ_t Viner prosesinin lokal orta qiymətinə görə yoxlanılması məsələsində illüstrasiya etmək sadə olur. Birinci və ikinci növ səhvlərin ehtimalları uyğun olaraq α və β verilmiş ehtimallar olduğu halda, bu ehtimalları təmin edən optimal ardıcıl həlledici qayda $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tau^* = \inf\{t \ge 0 : \lambda(t) \notin (a^*, b^*)\},$$

$$d^* = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tau^*} \ge b^*, \\ 0, & \lambda_{\tau^*} \le a^*, \end{cases}$$

burada $\lambda_t = \ln \varphi_t$ və doğruyaoxşarlıq nisbəti ($\theta = 1$-ə uyğun ölçünün $\theta = 0$-a uyğun ölçüyə görə törəməsinin nisbəti)

$$\varphi_t = e^{\xi_t - t/2},$$

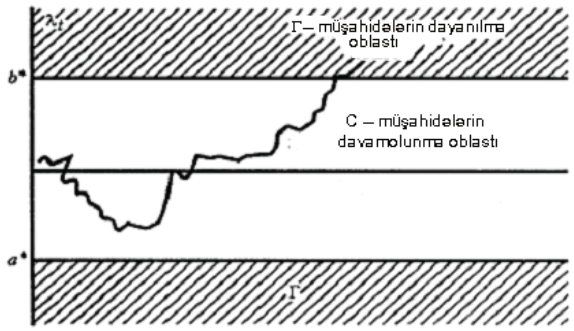
b^* və a^* isə

$$b^* = \ln(1-\alpha)/\beta,\ a^* = \ln \alpha/(1-\beta)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur (şəkil 2).

$\delta = (\tau, d)$ optimal klassik qaydası Neyman – Pirson lemmasına əsasən aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tilde{t} = t(\alpha, \beta), \quad \tilde{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{t}} \ge h(\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda_{\tilde{t}} < h(\alpha, \beta), \end{cases}$$



Şəkil 2.

$\delta = (\tau, d)$ optimal klassik qaydası Neyman – Pirson lemmasına əsasən aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\tilde{t} = t(\alpha, \beta), \quad \tilde{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{t}} \geq h(\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda_{\tilde{t}} < h(\alpha, \beta), \end{cases}$$

burada $t(\alpha, \beta) = (c_\alpha + c_\beta)^2$, $h(\alpha, \beta) = (c_\beta^2 - c_\alpha^2)/2$, c_γ isə

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_\gamma}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \gamma$$

tənliyinin köküdür. $\mathbf{M}_0 \tau^* = 2\omega(\alpha, \beta)$, $\mathbf{M}_1 \tau^* = 2\omega(\beta, \alpha)$ olduğundan

$$\frac{\mathbf{M}_0 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2\, \frac{\omega(\beta, \alpha)}{(c_\alpha + c_\beta)^2}, \quad \frac{\mathbf{M}_1 \tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2\, \frac{\omega(\alpha, \beta)}{(c_\alpha + c_\beta)^2}$$

olur, burada

$$\omega(x, y) = (1-x) \ln (1-x)/y + x \ln x/(1-y).$$

Ədədi hesablamalara görə $\alpha, \beta \leq 0{,}03$ olduqda

$$\mathbf{M}_0 \tau^* / t(\alpha, \beta) \leq 17/30, \quad \mathbf{M}_1 \tau^* / t(\alpha, \beta) \leq 17/30.$$

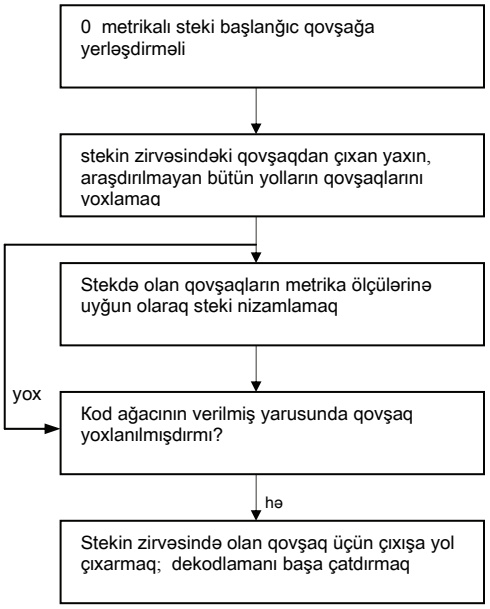
Başqa sözlə, birinci və ikinci növ səhvlərin baxılan qiymətlərində fərqləndirmə üçün optimal ardıcıl metodla müqayisədə iki dəfə az müşahidə aparılmasını təmin olunur. Bundan əlavə, əgər $\alpha = \beta$ olarsa, onda

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathbf{M}_0 \tau^* / t(\alpha, \alpha) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \mathbf{M}_1 \tau^* / t(\alpha, \alpha) = 1/4$$

olur.

Ədd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976.

ARDICIL DEKODLA(N)MA « последовательное декодирование; sequential decoding » – qəbul olunmuş məlumat və kod ağacındakı yollar arasında məsafənin (metrikanın) ardıcıl hesablanmasına əsaslanan, *ağacvari kodların* (o cümlədən, konvolyusion kodların) dekodlanma alqoritmlərinin ümumi adıdır; bu şərtlə ki, yolun tədqiq olunan seqmenti (baxılan qovşaq) bir til qədər uzadıla bilinər, lakin baxılan qovşaqlardan hansının uzadılması haqqında qərar isə yalnız onların metrikalarının kəmiyyətlərindən asılı olur. A. d. ideyası və ilk alqoritm 1957-də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Hal-hazırda stek – alqoritmin müxtəlif variantları və Fano alqoritmi (bax, [3]) tətbiq üçün ən perspektivli sayılır. Metrika kimi, adətən, *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* loqarifmindən istifadə olunur.



Şəkil 1.

S t e k – a l q o r i t m d ə stekə qoşulan qovşaqlar baxılan metrikanın ölçüsünə görə nizamlanır, sonra isə maksimal qiymətli metrikaya malik qovşaq seçilir və bu qovşaqdan çıxan bütün tillər üçün metrikanın artımları hesablanır. Yeni baxılmış metrikaların ölçüləri stekə daxil olunur, yenidən bütün qovşaqlar nizamlanır və s. Dekodlama o halda sona çatır ki, kod ağacının verilmiş yarusundakı qovşağa ilk dəfə baxılsın. Bu halda ilk informasiya altbloku haqqında qərar çıxarılır.

Adətən, baxılan yolların maksimal uzunluğu k o n v o l y u s i o n k o d u n kod məhdudiyyəti uzunluğu n_D-yə ya bərabər və ya ondan böyük götürülür (Stek alqoritmi isə şəkil 1-də verilir).

F a n o a l q o r i t m i n i n sxemi şəkil 2-də verilir. Stek – alqoritmdən fərqli olaraq, bu halda qovşaqlara dəfələrlə baxmaq olar, lakin hər bir anda alqoritm yalnız bir yolu analiz edir ki, bu da yaddaşın qənaətliliyinə imkan yaradır.

A. d.-nın əsas xarakteristikaları: kodlamada hesablama sayı kəmiyyətinin paylanma funksiyası, *səhv dekodlama ehtimalı* və yaddaş qurğularının qədərindən artıq dolması ehtimalıdır. Stek – alqoritm üçün hesablama sayı ξ-nin paylanma funksiyası

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\},$$

$$A_1 x^{-\rho_1} \leq 1 - F(x) \leq A_2 x^{-\rho_2}$$

münasibətlərini ödəyir, burada A_1, A_2, ρ_1, ρ_2 kod və rabitə kanalının parametrlərindən asılıdır. Ötürmə sürətinin kifayət qədər böyük qiymətlərində $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, belə ki, hesablama sayı təsadüfi kəmiyyəti ρ parametrli Pareto paylanmasına tabedir. Səhv dekodlama ehtimalı kod məhdudiyyəti uzunluğunun artması ilə asimptotik olaraq eksponensial azalır.

Yaddaş qurğuları qəbulolunan ardıcıllıqların qorunub saxlanılması (bufer yaddaş), həm də baxılan qovşaqların metrikalarının qorunub saxlanılması (stek–yaddaş) üçündür. Yaddaşın oyuqları sayı sonlu sayda olduğundan yaddaş qurğusunun qədərindən artıq dolması mümkündür; bu halda uyğun ehtimal yaddaşın ölçüsündən qüvvət üstü ilə asılı olur. Fano alqoritmi üçün nəticələr analojidir.

Əd.: [1] Wozencraft J. M., «IRE Nat. Conv. Rec.», 1957, v. 5, pt. 2, p. 11–25; [2] Зигангиров К. Ш., Процедура последовательного декодирования, М., 1974.

ARDICIL ETİBARLI SƏRHƏDLƏR « последовательные доверительные границы; sequential confidence bounds / limits » – müşahidələr aparılan ərəfədə əvvəlcədən verilmiş etibarlılıq hüdudu ilə hesablanan *etibarlılıq sərhədləridir* (*intervallarıdır*). Qiyməti naməlum $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,...,\theta_m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ vektor parametrindən asılı hər hansı $f(\theta)$ funksiyasının verildiyi fərz olunur və paylanmalarının sıxlıq funksiyaları θ-dan asılı $p(\theta, x)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1,...,X_n,...$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı müşahidə olunur ($p(\theta, x)$ sıxlığının daşıyıcısı θ-dan asılı deyildir). Əgər $\mathcal{A}_n = \sigma(X_k),\ k \le n$ σ – altcəbrlərinin azalmayan sisteminə nəzərən ixtiyari Markov anı N üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}_\theta \{\overline{f}_N \ge f(\theta)\} \ge \gamma,\ (\overline{f}_\infty = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{f}_n)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, $\overline{f}_n = \overline{f}_n(X_1,...,X_n),\ n = 1, 2,...$ ardıcıllığı ardıcıl yuxarı γ–etibarlı sərhəd adlanır.

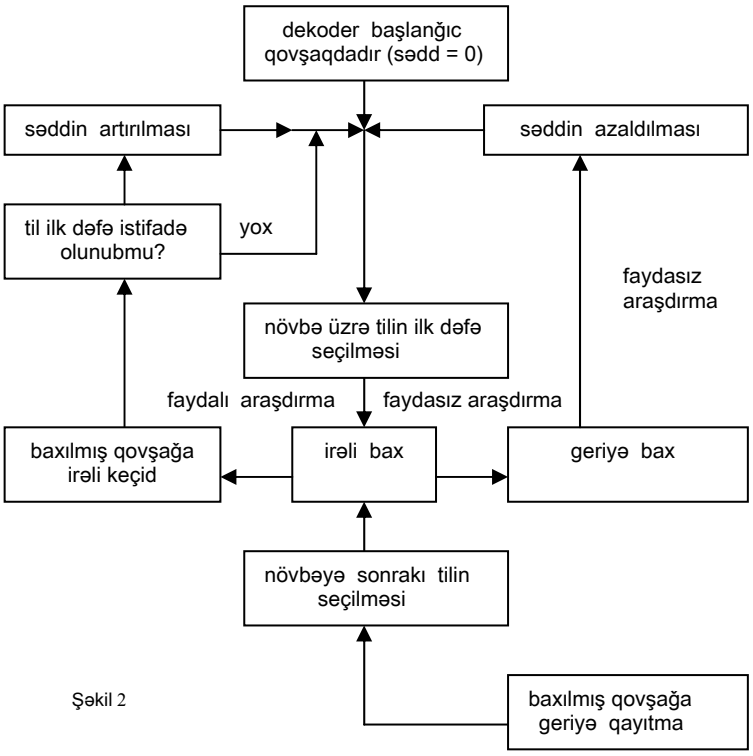
Əgər ixtiyari $\theta \in \Theta$ üçün $\mathbf{P}_\theta$ – sanki yəqin $\overline{f}_n \ge \overline{f}_{n+1}$, $n = 1, 2,...$ və $\mathbf{P}_\theta\{\overline{f}_\infty \ge f(\theta)\} \ge \gamma$ münasibətləri ödənilərsə, $\overline{f}_n = \overline{f}_n(X_1,...,X_n),\ n = 1, 2,...$ ardıcıllığı $f(\theta)$ üçün monoton (azalan) ardıcıl yuxarı γ–etibalı sərhəd adlanır. Ardıcıl aşağı etibarlı sərhədlər və ikitərəfli etibarlı intervallar analoji təyin olunur.

$\overline{f}_n$ yuxarı sərhədinin $f(\theta)$-nın əsl qiymətinə yaxınlaşma sürəti $T_c = \min\{n: \overline{f}_n \le c\}$ anı (verilmiş dəqiqliyin alınması ilə) ilə xarakterizə olunur, burada c sabitdir və $c > f(\theta)$. $T_c' = \min\{n: \overline{f}_n \le c\}$ anı aşağı sərhədlər üçün analoji məna daşıyır; $c < f(\theta)$. Qeyd olunan anın riyazi gözləməsi, ixtiyari ardıcıl yuxarı (aşağı) γ– etibarlı sərhəd üçün bütün θ və $c > f(\theta)$ ($c < f(\theta)$) qiymətlərində

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_\theta T_c &\ge \ln(1-\gamma)^{-1} / B_\theta(c) \\ \mathbf{M}_\theta T_c' &\ge \ln(1-\gamma)^{-1} / B_\theta'(c) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

bərabərsizliklərini ödəyir, burada

$$B_\theta(c) = \inf_{\varphi \in D_c} \rho(\theta, \varphi),\ B_\theta'(c) = \inf_{\varphi \in D_{c'}} \rho(\theta, \varphi),$$



Şəkil 2

$$\rho(\theta, \varphi) = \mathbf{M}_\theta[\ln p(\theta, x_n) - \ln p(\varphi, x_n)],$$

$$D_c = \{\theta: f(\theta) > c\},\ D_c' = \{\theta: f(\theta) < c\}.$$

$$\overline{f}_n = \min_{r=1,...,n} \overline{f}_r,\quad n = 1, 2,... \qquad (2)$$

ardıcıllığı $f(\theta)$ üçün monoton ardıcıl yuxarı γ – etibarlı sərhədi təyin edir, burada

$$\overline{f}_n = \inf\{c: \Phi_n(c) \le A_n - \ln(1-\gamma)^{-1}\},$$

$$\Phi_n(c) = \sup_{\varphi \in D_c} \sum_{r=1}^{n} \ln p(\varphi, X_r),$$

$$A_n = \sum_{r=1}^{n} \ln p(\hat{\theta}_{r-1}, X_r)$$

və $\boldsymbol{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1,...,X_n),\ n = 1, 2,...$ – ilk n sayda müşahidə nəticəsində alınan statistik qiymətdir.

$$\underline{f}_n^* = \max_{r=1,...,n} \underline{f}_r$$

ardıcıllığı $f(\theta)$ üçün monoton ardıcıl aşağı γ – etibarlı sərhədi təyin edir, burada

$$\underline{f}_n = \sup\{c: \Phi_n' \le A_n - \ln(1-\gamma)^{-1}\},$$

$$\Phi_n'(c) = \sup_{\varphi \in D_c'} \sum_{r=1}^{n} \ln p(\varphi, X_r).$$

$p(\theta, x),\ f(\theta),\ \hat{\theta}_n$ üzərinə qoyulan kifayət qədər geniş requlyarlıq şərtlərində (2), (3) sərhədləri (1)-də qeyd olunan $\mathbf{M}_\theta T_c$,

$\mathbf{M}_\theta\, T_c'$ effektivlik göstəricilərinin aşağı sərhədlərini $\gamma \to 1$ olduqda asimptotik olaraq alır.

$f(\theta)$ üçün uzunluğu verilən a sabitindən böyük olmayan ardıcıl γ – etibarlı interval (N, z_1, z_2) üçlüyü ilə verilir, burada N, – $\mathscr{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ sisteminə nəzərən Markov dayanma anı, $\mathbf{P}_\theta\{N < \infty\} = 1$, $z_1 \le z_2$ elə A_N – ölçülən funksiyalardır ki, bütün $\theta \in \Theta$ üçün

$$\mathbf{P}_\theta\{ z_2 - z_1 \le a \} = 1, \quad \mathbf{P}_\theta\{z_1 \le f(\theta) \le z_2\} \ge \gamma .$$

İxtiyari belə üçlük üçün dayanma anının riyazi gözləməsi, $\gamma \to 1$ olduqda,

$$\mathbf{M}_\theta\, N \ge \frac{\ln(1-\gamma)^{-1}}{W_\theta(a)}\,[\,1 + o(1)]$$

bərabərsizliyini ödəyir,

$$W_\theta(a) =$$

$$= \inf_{0 \le t \le a} \max\,\{B_\theta\,[f(\theta) + a - t],\ B_\theta[f(\theta) - t\,]\}\,. \quad (4)$$

(2), (3) sərhədlərinə əsaslanan (N^*, z_1^*, z_2^*) proseduru $f(\theta)$ üçün $\gamma \to 1$ olduqda, asimptotik olaraq, (4)-də qeyd olunmuş müşahidələr sayının orta qiymətinin aşağı sərhədini almağı təmin edən uzunluğu a -nı aşmayan ardıcıl $(2\gamma - 1)$ – etibarlı intervalı təyin edir, burada

$$N^* = \min\,\{n\colon \overline{f}_n^* - \underline{f}_n^* \le a\,\},$$

$$z_1^* = \underline{f}_{N^*}^*, \quad z_2^* = \overline{f}_{N^*}^* .$$

$p(\theta, x) = \exp[\,\theta x - b(\theta)]$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ şəklində sıxlıqların eksponensial ailəsinin θ parametri üçün digər bir yanaşması [6]-da şərh olunmuşdur. Bu yanaşmada $I_n = \bigcap_{r=1}^{n} \widetilde{I}_r$ intervallar ardıcıllığı θ üçün monoton daralan ardıcıl γ – etibarlı interval əmələ gətirir, burada

$$\widetilde{I}_n = \{\theta\colon \mathscr{M}_n(\theta) \le (1-\gamma)^{-1}\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathscr{M}_n(\theta) = \int \prod_{r=1}^{n} p(\varphi, x_r)\, dF(\varphi) \Big/ \prod_{r=1}^{n} p(\theta, x_r)$$

– mənfi olmayan martinqal, F, – Θ -da hər hansı ehtimal ölçüsüdür. Açıq $I \subset \Theta$ intervallarında $F(I) > 0$ şərtində I_n, $n = 1, 2, \ldots$ ardıcıllığı – t u t a r l ı a r d ı c ı l l ı q d ı r (bax, [6]).

$X_1, \ldots, X_n, \ldots$, – a və σ^2 naməlum parametrləri $N(a, \sigma^2)$ normal paylanmasına malik, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun.

İkipilləli Steyn proseduru (bax, [1]) bu halda a üçün verilmiş uzunluqlu etibarlı interval qurmağa imkan verir. Əgər σ^2 dispersiyası məlum olarsa, a üçün c uzunluqlu γ – etibarlı interval müəyyən edən müşahidələr sayının orta qiymətini təyin edən prosedurlardan ən yaxşısı – determinə olunmuş dayanma anı

$$N = \min\,\{\,n\colon n \ge 4\, c^{-2}\, K_\gamma^2\, \sigma^2\,\} \quad (5)$$

bərabərliyilə təyin olunan prosedurdur, burada K_γ – standart normal qanunun $(1+\gamma)/2$ sədli kvantilidir (bax, [2]). Əgər σ^2 dispersiyası naməlum olursa, onda

$$N = \min\,\{\,n\colon n \ge \max\,(n_1,\ c^{-2}\, K_n^2\, S_n^2)\} \ +\ k(\gamma)$$

$$z_1 = \hat{a}_N - (c/2), \quad z_2 = \overline{a}_N + (c/2)$$

tipli prosedurlar a üçün c uzunluqlu ardıcıl γ – etibarlı intervalı təyin edir və bu interval üçün (5)-də qeyd olunan müşahidələr sayının orta qiymətinin aşağı sərhədi $c \to 0$ olduqda asimptotik olaraq alınır, burada $n_1 \ge 2$, $K_n \to K_\gamma$, $\hat{a}_n$, S_n^2 – ilk n müşahidələr üzrə seçimi orta və seçimi dispersiyadır, $K(\gamma)$ isə hər hansı sabitdir. $\mathbf{M}\, x_n^4 < \infty$ olduqda qeyri – parametrik hal üçün analoji nəticə doğrudur (bax, [3] – [5] , [7]).

Əd.: [1] S t e i n C., «Ann. Math. Statis.», 1945, v. 16, p. 243–58; [2] S t e i n C., W a l d A., «Ann. Math. Statis.», 1947, v. 18, p. 427–33; [3] S t a r r N., «Ann. Math. Statist.», 1966, v. 37, p. 36–50; [4] C h o w Y., R o b b i n s H., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 457–62; [5] S i m o n s G., «Ann. Math. Statist.» 1968, v. 39, p. 1946–52; [6] L a i T., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, p. 265–80; [7] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., M., 1975.

ARDICIL KRİTERİSİ, EHTİMALLAR NİSBƏTİNİN « последовательный критерий отношения вероятностей; sequential probability ratio test » – iki sadə $H_0 : p(x) = p_0(x)$ və $H_1 : p(x) = p_1(x)$ hipotezlərinin ardıcıl fərqləndirilməsi məsələsində (τ^*, d^*) *həlledici qaydasıdır*, burada $p(x)$ – mühaşidə olunan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən ehtimal paylanmasıdır. E. n. a. k.-nin dayanma anı τ^*

$$L_n = \prod_{k=1}^{n} p_1(x_k) \,/\, p_0(x_k)$$

doğruyaoxşarlıq nisbətinin (A, B), $0 < A < 1 < B$ intervalında ilk çıxış anı kimi təyin olunur, yəni

$$\tau^* = \inf\ \{\,n \ge 1\colon L_n \ne (A\,,\, B)\}\,;$$

$d^* = 0$ son qərarı (həlli) (yəni H_0 hipotezinin qəbul edilməsi) $L_{\tau^*} \le A$ olduğu halda, $d^* = 1$ qərarı $L_{\tau^*} \ge B$ olduğu halda A. Vald tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur (bax, həm də [2]-yə). O, həmçinin E. n. a. k.-nin birinci və ikinci növ səhv ehtimallarını əlaqələndirən (α və β -nı əlaqələndirən) sadə bərabərsizliklərini belə almışdır və bunların hüdudları isə uyğun olaraq, A və B götürülmüşdür: $A \le \beta/(1-\alpha)$, $B \le (1-\beta)/\alpha$. [3] və [4]-də isbat olunmuşdur ki,

$$q\,[\,\mathbf{P}_0\{d = 1\} + c_0 \mathbf{M}_0\, \tau\,] + (1-q)\,[\,\mathbf{P}_1\{d = 0\} + c_1\, \mathbf{M}_1\, \tau]$$

şəklində orta Beyes riski üçün E. n. a. k. optimal (A və B -nin uyğun seçilmiş qiymətlərində) Beyes həlledici qaydasıdır, burada $\mathbf{P}_i$ və $\mathbf{M}_i$ simvollarında i indeksi H_i hipotezinin doğruluğu

fərziyyəsini göstərir, $i = 0, 1$, q, – H_0 -ın aprior ehtimalı, c_0, c_1 – bəzi müsbət konstantlardır. E. n. a. k. şərti ekstremal qoyuluşda da optimal kriteridir, yəni bu kriteri

$$\mathbf{P}_0\{d = 1\} \le \mathbf{P}_0\{d^* = 1\},$$
$$\mathbf{P}_1\{d = 0\} \le \mathbf{P}_1\{d^* = 0\}$$

şərtləri ödənilən bütün həlledici (τ, d) qaydaları arasında $\mathbf{M}_0\tau$ və $\mathbf{M}_1\tau$ kəmiyyətinin qiymətlərini minimallaşdırır. E. n. a. k.-nin optimallığı Viner prosesi halı üçün [5]-də (bax, həm də [2]), asılı olmayan artımlarlı ümumi proseslər üçün bir qədər sonra [6]-da isbat olunmuşdur. E. n. a. k.-nin xəta ehtimalları üçün tam asimptotik ayrılışlar (A və B parametrləri üzrə) qalıq hədlərinin qiymətləri ilə [7] və [8]-də verilmişdir.

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976; [3] W a l d A., W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, № 3, p. 326–39; [4] W a l d A., W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1950, v. 21, № 1, p. 52–99; [5] М и х а л е в и ч В. С., «Вісник Київського университету», 1958, т. 1, № 1, с. 101–04; [6] I r l e A., S c h m i t z N., «Math. Oper. und Statist.», 1984, Bd 15, № 1, S. 91–104; [7] Л о т о в В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 1, с. 62–72; [7] Л о т о в В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 2, с. 295–304.

ARDICIL QİYMƏTLƏNDİRMƏ « последовательное оценивание; sequential estimation » – statistik modellərin parametrlərinin *statistik qiymətləndirilməsi* üçün müşahidələr həcminin təsadüfi götürülməsinə əsaslanan metoddur. $\theta \in \Theta$ parametrindən asılı paylanmaya malik müşahidə olunan ζ_t təsadüfi prosesinin σ – altcəbrlərinin axını $\{A_t\} \subset \mathscr{A}$, $t \ge 0$ olan $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunduğu fərz olunur. τ prosesin $\{A_t\}$ axınına nəzərən Markov anı (dayanma anı), $\widetilde{\theta}$ statistik qiyməti A_t – ölçülən funksiya olarsa, $(\tau, \widetilde{\theta})$ cütü a r d ı c ı l q i y m ə t l ə n d i r m ə p l a n ı adlanır. Əgər $\tau < \infty$ münasibəti bütün $\theta \in \Theta$ parametrləri üçün sanki yəqin ödənilərsə, $(\tau, \widetilde{\theta})$ – q a p a l ı p l a n, $\mathbf{M}_\theta\widetilde{\theta} = \theta$ bərabərliyi bütün $\theta \in \Theta$ parametrləri üçün ödənilərsə, $(\tau, \widetilde{\theta})$ – m e y l s i z p l a n adlanır; $\mathbf{M}_\theta$ θ parametrinin qeyd olunmuş qiymətində riyazi gözləmə simvoludur. *Rao – Kramer bərabərsizliyinin* ödənilməsini təmin edən requlyarlıq şərtlərində eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının θ parametrinin qiymətləndirilməsinin ixtiyari qapalı, meylsiz ardıcıl planı $(\tau, \widetilde{\theta})$ üçün də

$$\mathbf{M}_\theta(\widetilde{\theta} - \theta)^2 \ge (I(\theta)\,\mathbf{M}_\theta\tau)^{-1} \qquad (*)$$

bərabərsizliyi ödənilir (bax, [1]), $I(\theta)$ – Fişer informasion miqdarıdır (bu bərabərsizlik bəzən *Rao – Kramer – Volfovits* bərabərsizliyi adlanır). Əgər müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan kəmiyyətlərdirsə və onların paylanmalarının sıxlıq funksiyası sonlu sayda kəsilmə nöqtəsi olan $p(x-\theta)$-ya bərabərdirsə, onda bir sıra əlavə şərtlər daxilində [məs., əgər $p(x)$ funksiyasının bütün sıçrayışları eyni işarəli olmazsa] qiymətləndirmənin elə ardıcıl planları vardır ki, itki funksiyası üstlü funksiya olduğu halda bu planların effektivliyi seçiminin həcmi qeyd olunmuş planlardan yüksəkdir (bax, [3]); əgər $p(x)$ kəsilməz funksiya olarsa, onda $\mathbf{M}_\theta(\tau) \le n$ münasibəti ödənilən planlar sinfində $n \to \infty$ olduqda optimal ardıcıl planlar asimptotik olaraq müşahidələr həcmi qeyd olunmuş prosedurda olan effektivliyə malikdir (itki funksiyası üstlü olduğu halda).

Müşahidə olunan daha ümumi proseslər üçün, xüsusi halda diffuzion tipli proseslər üçün (bax, [2]) (*) bərabərsizliyinin analoqları mövcüddür.

Əd.: [1] W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1946, v. 17, № 4, p. 489–93; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 700–13.

ARDICIL QİYMƏTLƏNDİRMƏ PLANI « последовательный план оценивания; sequential design of estimation » – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə*.

ARDICIL PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN « последовательное планирование эксперимента; sequential design of experiment » – $(y_1,...,y_N) = y_1^N$ ölçmələrinin aparılması üçün elə metoddur ki, y_n -in hər bir ölçülməsindən sonra bu ölçmənin ya sonuncu olduğu (dayanma anı N, n -ə bərabərdir) qəbul edilir və ya y_{n+1} -i ölçmək üçün $x_{n+1}(y_1^n) \in X$ şərtləri təyin olunur. Ölçmələr eyni şəraitdə aparılan hallarda E. a. p. *ardıcıl analizə və ya ardıcıl qiymətləndirilməyə* gətirib çıxarır. E. a. p. təsadüfi proseslər statistikasının bölməsi olub, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin müasir aparatına əsaslanır. E. a. p.-nın formal sxemi aşağıda verilmişdir.

E. a. p.-nın əsas obyekti – ayrıca bir ölçməyə uyğun $(Y, \mathscr{Y})$ ölçülən fəzasında qarşılıqlı mütləq kəsilməz $\mathbf{P}_\theta^x$ ölçülərinin ölçülən ailəsidir. Bu ölçülər ailəsi $\theta \in \Theta$ parametri və $(X, \mathscr{X})$ fəzasından olan x idarəetməsindən asılıdır. $x_n : Y^{n-1} \to X$, $n > 1$ ölçülən idarəetməsinin $U = (x_1,...,x_n,...)$ ardıcıllığının $(X, \mathscr{X})$ -də x_1 üçün $q(\cdot)$ paylanmasının və y_1^n ölçməsi üzrə $\mathscr{A}_n$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anı N -in verildiyi fərz olunur. $\xi = (U, N)$ cütünə p l a n deyilir. $B \subset \mathscr{Y}$, $\theta \in \Theta$ olduqda bütün $n = 1, 2,...$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}_\theta^U\{y_n \in B \mid y_1^{n-1}\} = \mathbf{P}_\theta^{x_n}(B) \quad (\mathbf{P}_\theta^U \text{ – sanki yəqin}) \qquad (1)$$

şərtini ödəyən, $X \times Y^\infty$ -da təyin olunan yeganə $\mathbf{P}_\theta^U$ ölçüsü qurulur. (1)-dən aydındır ki, y_n kəmiyyətləri x_n verildikdə y_1^{n-1} -dən asılı deyildir. Daha ümumi sxemlərə də baxılır: belə sxemlərdə n -ci ölçmənin təsadüfi xətaları, idarəetmələr randomlanmış olduğu hallarda, əvvəlki xətalarla əlaqəli olur və s.

ξ planına uyğun $\mathbf{P}_\theta^\xi(\cdot)$ ölçüsü $\mathbf{P}_\theta^U$ -nun $Y^N = \{\mathbf{y}_1^N\}$ çoxluğunda daralmasıdır. Əgər $\inf\limits_\theta \mathbf{P}_\theta(N < \infty) = 1$ olarsa, onda $\mathbf{P}_\theta^\xi$ ölçüləri qarşılıqlı mütləq kəsilməzdirlər, sıxlıq funksiyası isə

$$\Pi_{\theta,\varphi}^\xi(\cdot) = d\,\mathbf{P}_\theta^\xi(\cdot) \big/ d\,\mathbf{P}_\varphi^\xi(\cdot) = \prod_{i=1}^N \Gamma_{\theta,\varphi}^{x_i}(y_i)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\Gamma_{\theta,\varphi}^x(\cdot) = d\,\mathbf{P}_\theta^x(\cdot) \big/ d\,\mathbf{P}_\varphi^x(\cdot)$.

Beləliklə, x_1^N qeyd olunduğu halda y_1^N ölçmələri şərti asılı olmayandırlar.

θ parametri haqqında d həlli (qərarı) Y^N-in ölçülən Λ fəzasına inikasıdır; $w(\delta, \theta)$ itki funksiyasının verildiyi fərz olunur. Nəhayət, (U, N, δ) üçlüyü s strategiyasıdır. Onun riski $\mathbf{M}_\theta^\xi w(\delta(y_1^n), \theta)$ kəmiyyətidir. Qeyd etmək lazımdır ki, $\ln \Pi_{\theta,\varphi}^\xi$, $S(f) = \sum_{i=1}^N f^{x_i}(y_i)$ additiv statistikasına aid misaldır.

$\overline{N}_\theta = \mathbf{M}_\theta^\xi N < \infty$ və $\overline{f}_\theta^x = \int \mathbf{P}_\theta^x(dy) f^x(y)$ olsun.

Əgər $\mathbf{D}_\theta^\xi S(\overline{f}_\theta^x) = 0$ olarsa, onda requlyar additiv statistika üçün aşağıdakı Vald eynilikləri doğrudur:

$$\mathbf{M}_\theta^\xi S(f) = \overline{N}_\theta \int \overline{f}_\theta^x \pi_\theta^\xi(dx) = \overline{N}_\theta \, \overline{f}_\theta^{\pi_\theta^\xi},$$

$$\mathbf{D}_\theta^\xi S(f) = \mathbf{M}_\theta^\xi \sum_{n=1}^N \mathbf{D}_\theta^\xi (f^{x_n}(y_n) | y_1^{n-1}),$$

burada $B \subset \mathscr{X}$ üçün ξ planının statistik proyeksiyası $\pi_\theta^\xi(\cdot)$, $\pi_\theta^\xi(B) = \overline{N}_\theta^{-1} \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}_\theta^\xi \{ n \le N, x_n \in B \}$ düsturu ilə təyin olunur.

Hipotezlərin yoxlanılmasının optimal strategiyasının axtarışı, qiymətləndirilməsi və reqressiyası üçün uyğun olaraq additiv statistikanın orta qiymətləri – informasiya miqdarları mühüm əhəmiyyətə malikdirlər:

1) Kullbak yayınması $K_{\theta,\varphi}^\xi = \mathbf{M}_\theta^\xi \ln \Pi_{\theta,\varphi}^\xi$;

2) $\varphi \to \theta \in \mathbb{R}^p$ olduqda onun φ-dən asılı olmayan

$$I_\theta = \mathbf{M}_\theta^\xi \nabla \ln \Pi_{\theta,\varphi}^\xi (\nabla \ln \Pi_{\theta,\varphi}^\xi)^\mathsf{T} = \mathbf{M}_\theta^\xi S(\nabla \Gamma_{\theta,\varphi} \nabla \Gamma_{\theta,\varphi}^\mathsf{T})$$

Fişer informasion matrisi ilə təyin olunan baş hissəsi (burada və aşağıda $\nabla\varphi(\theta)$, – $\varphi(\theta)$-nın qradiyentidir);

3) xətti *reqression eksperimentin* informasion matrisi – $\mathbf{M}_\theta^\xi S(f v^{-1} f^T)$.

K, I statistikaları $\delta : y^N \to \Lambda$ inikasında artmır; Λ-da $\delta(\mathbf{y}_1^N)$ paylanmasının sıxlığı $\Phi_\theta(\cdot)$ mövcuddur və uyğun statistikalar, $K_{\theta,\varphi}(\Phi_\theta) \le K_{\theta,\varphi}^\xi$, $I_\theta(\Phi_\theta) \le I_\theta$ bərabərsizliklərini ödəyirlər [yəni $I_\theta - I_\theta(\Phi_\theta)$ mənfi olmamaqla təyin olunmuşdur].

Eksperimentin planlaşdırılmasının nəzəri – informasion metodu aşağıdakı sərhədləri təyin edir.

1) H_i, $i = 0, 1$ hipotezlərinin xəta ehtimallarının α_i-dən böyük olmadığı halda $H_i : \theta \in \Theta_i$, $i = 0, 1$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$ hipotezlərinin diskriminasiyasında:

$$\overline{N}_0 \ge \omega(\alpha_i, \alpha_{1-i}) \Big/ \sup_{\pi \in X^*} \inf_{\varphi \in \Theta_1} K_{\theta,\varphi}^\pi, \quad \theta \in \Theta_i$$

burada $\alpha_0 + \alpha_1 \le 1$, $\omega(\alpha_i, \alpha_{1-i}) = \sum \alpha_i \ln [\alpha_i / 1 - \alpha_{1-i}] \le$

$\le \min_{\varphi \in \Theta_{1-i}} K_{\theta,\varphi}(\Phi_\theta)$,

X^*, – $(X, \mathscr{X})$-də paylanmalar fəzasıdır.

2) $\mathbf{P}_\theta^\xi \{\delta = j\} = \Phi_\theta(j)$ ehtimalları ilə verilən $\mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_M$ paylanmalarının M diskriminasiyasında $\Phi_\theta(\cdot)$ ölçüləri ekvivalent, lakin üst-üstə düşməyən olduğu halda, $1 \le \theta \le M$: $\overline{N}_0 \ge$

$\ge \inf_{\pi \in X^*} \sup_{\varphi \in \Theta/\theta} R_{\theta,\varphi}^\pi$, $R_{\theta,\varphi}^\pi = K_{\theta,\varphi}(\Phi_\theta) \big/ K_{\theta,\varphi}^\pi$ – Höfdinq bərabərsizliklərinin ümumiləşməsini.

3) $\max_{\theta \in \Theta} \overline{N}_\theta \ge \inf_{\pi \in X^*} \sup_{\theta \ne \varphi} R_{\theta,\varphi}^\pi$ bərabərsizliyini.

4) $\Pi_{\theta,\varphi}^\xi$ requlyar sıxlıqları və $\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrinin kvadratik inteqrallanan statistik qiyməti δ üçün Rao – Kramer – Volfovits ümumiləşmiş bərabərsizliyini,

$$\mathbf{M}_\theta^\xi (\delta - \theta)(\delta - \theta)^\mathsf{T} \ge bb^\mathsf{T} + (\mathbf{I} + \nabla b)(\overline{N}_\theta J_\theta^{\pi_\theta^\xi})^{-1}(\mathbf{I} + \nabla b),$$

burada $b = \mathbf{M}_\theta^\xi \delta - \theta$, $\mathbf{I}$ – vahidi matris, $\nabla b = (\nabla b_1, ..., \nabla b_p)$.

5) Reqression eksperimentin parametrinin statistik qiymətlərinin təbii sinfinin kvadratik riski üçün sərhədləri.

Ümumiləşmiş reqression E. a. p., $N \ge n$ olduqda

$$\mathbf{M}_\theta^\xi (y_n | \mathbf{y}_1^{n-1}) = \eta(x_n, \theta), \quad \mathbf{D}_\theta^\xi (y_n | \mathbf{y}_1^{n-1}) = \upsilon(x_n, \theta), \qquad (2)$$

bərabərlikləri ilə verilir. $\eta(x, \theta) = \theta^\mathsf{T} f(x)$, $\upsilon(x, \theta) \equiv \upsilon(x)$, $N = \text{const}$ və $S(m) \equiv \text{const}$ olarsa, Qauss teoreminin ümumiləşməsi doğrudur:

$$\hat{\theta} = S^{-1}(m) S(f^\mathsf{T} \upsilon y) \qquad (3)$$

statistik qiyməti meylsiz xətti statistik qiymətlər arasında kovariasiyaların ən kiçik matrisinə malikdir, burada $m^x = f(x) \times$ $\times \upsilon^{-1}(x) f^\mathsf{T}(x)$. (2) modelində ξ_n planlarının requlyar ardıcıllığı üçün $\overline{N}_\theta^{\xi_n} = a_n \to \infty$ olarsa, $\pi_\theta^{\xi_n}$ proyeksiyalar ardıcıllığı π_0-ya zəif yığılır. İsbat olunmuşdur ki, θ üçün tutarlı başlanğıc θ^0 yaxınlaşmasına uyğunsuzluqlar üzrə edilən xətti $\tilde{y}_n = y_n - \eta(x_n, \theta^0)$ düzəlişləri arasında ən kiçik lokal asimptotik minimaks kvadratik riskin düzəlişi (3) düsturu ilə ifadə olunur, burada $f_0(x) = \nabla \eta(x, \theta^0)$, y isə $\tilde{y}$ ilə əvəz olunmuşdur. Belə riskin hamar qabarıq funksiyasını minimallaşdıran strategiyalar, reqressiya funksiyası $\theta^\mathsf{T} f_0(x)$, ölçmələrin kovariasiya matrisi $\text{diag}(\upsilon(x_1), ..., \upsilon(x_N))$ olan xətti reqression eksperiment üçün Φ – optimal statistik strategiyalardan yaxşı olmur (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*).

1) – 3) sərhədləri strategiyanın kiçik ehtimallı xətaları olduğu hallarda asimptotik olaraq dəqiqdir; $M \to \infty$, $q_\theta(\theta) \to 1$ olduqda sərhədlər dəqiqləşdirilmişdir (bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*); θ-dan asılı «planlar» üçün analoji nəzəriyyə tərs rabitəli kanala məlumatları ötürmə nəzəriyyəsində inkişaf olunmuşdur (bax, [2]). 4) – 5) sərhədləri böyük həcmli seçimlər

və $a_n^{-1}S(B_\theta) \to \int B_\theta(x)\,\pi_\theta(dx)$ münasibəti ehtimala görə ödənilən ξ_n ardıcıllıqlarının requlyar planları üçün dəqiqdir, burada 4)-də $B_\theta = \mathbf{I}_\theta$, 5)-də $B_\theta = m_\theta$.

Əgər zəif mənada limit informasiya matrisləri təsadüfi matrislər olarsa, onda riskin sərhədləri informasiya matrisinin paylanması üzrə ortalama ilə alınır. Məs., 4) məsələsinə aşağıdakı əlavə şərt qoyulmaqla baxılır: τ_n, – $\{\mathscr{A}_m\}$ axınına nəzərən Markov anları ardıcıllığı olsun və elə $\mathbf{y}_1^{T_n}$ – ölçülən L_θ^n matrisi vardır ki, $\mathbf{I}_\theta^{\xi_n} - L_\theta^n \to 0$, $a_{n-1}^{-1}\sum_{n=1}^{\tau_n} \mathbf{I}_\theta^{x_n} \to 0$ münasibətləri $\mathbf{P}_\theta^{\xi_n}$ ehtimalına görə ödənilsin. Onda $h \in \mathbb{R}^p$ üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\ln\left[d\,\mathbf{P}^{\xi_n}_{\theta + h a_n^{-1/2}}(\cdot) \Big/ d\,\mathbf{P}_\theta^{\xi_n}(\cdot)\right] = \\ = h^{\mathsf{T}}\delta_\theta^n - (1/2)\,h^{\mathsf{T}}\mathbf{I}_\theta^{\xi_n} h + \alpha_n, \qquad (4)$$

burada $\alpha_n(\theta, h) \to 0$ münasibəti $\mathbf{P}_\theta^{\xi_n}$ ölçüsünə görə ödənilir, $(\delta_\theta^n, \mathbf{I}_\theta^{\xi_n})$ isə şərti normal $(\xi, \mathbf{I}_\theta)$ cütünə, $\mathbf{I}_\theta$ qeyd olunduqda, zəif yığılır (yəni $\xi \sim N(0, \mathbf{I}_\theta^{-1})$). (4)-dən ixtiyari statistik qiymətin riski üçün lokal asimptotik minimaks sərhəd alınır, $\mathbf{P}_\theta^x$-də requlyarlıq şərtləri $x \in X$ üzrə müntəzəm olduğu halda isə maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti bu sərhədi bərabərliyə çevirir və o, şərti asimptotik normal olur.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983; [2] Б у р н а ш е в М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, № 6, с. 1203–26.

ARDICIL SİMPLEKS METOD « последовательный симплексный метод; sequential simplex method » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ARDICIL STATİSTİK QİYMƏT « последовательная оценка; sequential estimator » – həcmi əvvəlcədən qeyd olunmuş, lakin müşahidələr nəticəsindən asılı olmayaraq təyin edilən seçimin paylanma parametrlərinin *statistik qiymətidir*. A. Vald [1]-də göstərmişdir ki, asılı olmayan müşahidələr üzrə düzbucaqlı paylanmanın (*müntəzəm paylanmanın*) yerinidəyişmə parametrinin A. s. q., normal paylanmanın orta qiymətinin statistik qiymətindən, müşahidələrin orta sayının eyni olmasına baxmayaraq, daha sərfəli olur. Bu nəticə naməlum sıxlıqdan qeyri – requlyar asılı parametrin statistik qiymətinin təyin olunması halı üçün ümumiləşdirilmişdir. Parametrdən requlyar asılı olan eksperimentlər ardıcıllığı üçün [2]-də göstərilmişdir ki, A. s. q. asimptotik effektiv statistik qiymətin təyin edilməsi üçün sərfəli olmur. Bəzi hallarda A. s. q. münasib meylsiz statistik qiymətlərin alınmasına imkan verir, baxmayaraq ki, bu hallarda qeyd olunmuş həcmli seçim üçün meylsiz statistik qiymət olmur.

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., M., 1960; [2] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 2, с. 245–56.

ARDICIL STATİSTİK QİYMƏTLƏR « последующие оценки; sequential estimators » – qiymətləri məmulatların $\mathfrak{P}$ partiyasına nəzarət nəticələri əsasında, *nəzarət planının* parametrlərinin və partiyanın qəbul edilib-edilməməsi haqqında qərarın nəzərə alınması ilə hesablanılan *statistikalardır.* A. s. q. nəzarət üçün təqdim olunmuş $\mathfrak{P}$ partiyasında qüsurlu məmulatlar sayı D-nin – g i r i ş b r a k ı n ı n (rus. входной брак) qiymətləndirilməsi, həm də i s t e h l a k ç ı y a ö t ü r ü l m ü ş q ü s u r l u m ə m u l a t l a r (rus. принятый брак) sayı D'''-in sayının qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Əgər başqa nəzarət planları istifadə olunarsa, elə A. s. q. qurmaq mümkündür ki, bunlar əsasında *statistik qəbul nəzarətinin* effektivlik göstəricilərinin hesablanılması mümkün olur. Ardıcıl statistik qiymətlərin tətbiqi ideyasını 1950-də A. N. Kolmoqorov (bax, [1]) təklif etmişdir.

M i s a l. N məmulatdan ibarət $\mathfrak{P}$ partiyasına nəzarətdə n həcmli təsadüfi təkrarsız seçimin qəbuletmə ədədi c olan birpilləli nəzarət planından istifadə olunur. Əgər seçimdəki qüsurlu məmulatların sayı d, $d \le c$ olarsa, $\mathfrak{P}$ partiyası qəbul olunur, $d > c$ olarsa, $\mathfrak{P}$ partiyası sonradan nəzarət olunmadan qəbul olunmur. D''' ədədi üçün φ''' A. s. q.-ni tapmaq tələb olunur. Əgər $d \le c$ olarsa, onda $D''' = D - d$, əgər $d > c$ olarsa, onda $D''' = 0$ götürülür. Əgər $\mu = nD/N$ olduqda $h_{N,D}^{n,d} \approx \approx p_\mu(d) = \mu^d e^{-\mu}/d!$, – hiperhəndəsi paylanma ehtimalları üçün Puasson yaxınlaşmasından istifadə etmək imkanından istifadə olunarsa, məsələ sadələşir. Puasson yaxınlaşmasının tətbiqi üçün şərtlər ödənilərsə, $\varphi''' = \varphi'''(d)$ ixtiyari $\mu > 0$ üçün

$$\sum_{d=0}^{\infty} \varphi'''(d)\,p_\mu(d) = \sum_{d=0}^{c} (N_\mu/n - d)\,p_\mu(d)$$

meylsizlik şərtindən tapılır.

Axtarılan A. s. q.

$$\varphi'''(d) = \begin{cases} (N/n)d, & d \le c, \\ Nd/n, & d = c+1 \\ 0, & d > c+1 \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur.

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 340–63; [2] Б е л я е в Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, M., 1975; [3] Л у м е л ь с к и й Я. П., Статистические оценки результатов контроля качества, M., 1979.

ARDICIL STRUKTUR « последовательная структура; sequential structure » – statistik etibarlılıq nəzəriyyəsinin anlayışıdır. A. s. funksiyası

$$\varphi(x) = \prod_i x_i = \min(x_1, ..., x_n)$$

münasibətilə təyin olunan, « n-dən n » tipli strukturdur, burada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\varphi(x)$ – s i s t e m i n s t r u k t u r f u n k s i y a s ı d ı r, sistemdəki elementlərin sayı s i s t e m i n t ə r t i b i adlanır. Sistemin i-ci elementinin vəziyyəti indikatorla – x_i dəyişəni ilə ifadə olunur:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{əgər } i\text{-ci element işqabiliyyətlidirsə,} \\ 0, & \text{əgər } i\text{-ci element işləmirsə,} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$, n – sistemin elementlərinin sayıdır.

Binar dəyişən φ funksiyası analoji təyin olunur və sistemin vəziyyətini ifadə edir:

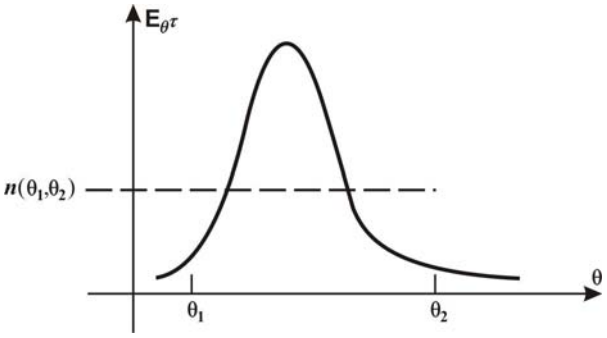
$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{əgər sistem işqabiliyyətlidirsə,} \\ 0, & \text{əgər sistem işləmirsə.} \end{cases}$$

A. s., yalnız və yalnız, bütün elementlərinin işqabiliyyətli olduğu halda işqabiliyyətli sayılır (bax, şəkil).

Əd.: [1] Б а р л о у Р., П р о ш а н Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, М., 1984.

ARDICIL YOXLANILMASI, HİPOTEZLƏRİN « последовательная проверка гипотез; sequential hypotheses testing » – təsadüfi sayda müşahidələrdən istifadə olunmaya əsaslanan, *statistik hipotezlərin yoxlanılması* metodudur. τ, – $\{\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}\}$ ehtimal fəzasında verilmiş σ – altcəbrlərin azalmayan axını $\{A_t\}$-yə $(A_t \leq \mathscr{A})$ nəzərən Markov anı (d a y a n m a a n ı), d, – A_τ – ölçülən, $0, ..., k$ qiymətlərini alan (qəbul edilən hipotezin nömrəsi) funksiya (s o n q ə r a r f u n k s i y a s ı) olarsa, (τ, d) cütü H_i, $i = 0,...,k$ – H. a. y.-sı üçün h ə l l e d i c i q a y d a (k r i t e r i) adlanır.

Müşahidələr müddətinin təsadüfiliyindən istifadə etdikdə, bəzi hallarda, səhv qərarlar ehtimallarının verildiyi halında hipotezlərin yoxlanılması üçün zəruri olan orta müşahidə müddətini olduqca azaltmaq imkanı yaranır. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının (bundan sonra yalnız bu hala baxılır) $\{\mathbf{P}_\theta\}$ paylanmaları ailəsinin parametri haqqında iki hipotezin yoxlanılması halında, ixtiyari hipotezi qəbul etdikdə minimal orta müşahidə müddətinə malik olan optimal həlledici qayda – *ehtimallar nisbətinin ardıcıl kriterisidir* (bax, [1] – [3]). $\{\mathbf{P}_\theta\}$ paylanmalar ailəsinin naməlum θ parametri haqqında iki – $H_0 : \theta \leq \theta_0$ və $H_1 : \theta \geq \theta_1$ mürəkkəb hipotezlərinin yoxlanılması halında ehtimallar nisbətinin ardıcıl kriterisi üçün orta müşahidə müddəti $\mathbf{M}_\theta\tau$-nun θ-dan asılılığının tipik mənzərəsi (kəsilməz əyri) verilmişdir; qırıq xətlə $n(\theta_0, \theta_1)$



qeyd olunmuşdur, $n(\theta_0, \theta_1)$, – $H_0 : \theta = \theta_0$ və $H_1 : \theta = \theta_1$ hipotezlərinin yoxlanılması üçün Neyman – Pirson testində müşahidələrin həcmidir və bu zaman səhvlər ehtimalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlərin ardıcıl kriteri üçün qoyulan məhdudiyyətlərlə eyni olduğu fərz olunur [(θ_0, θ_1) intervalı «əhəmiyyətsiz» zona hesab olunur].

$\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ olduqda orta müşahidə müddətinin hətta $n(\theta_0, \theta_1)$ kəmiyyətini də olduqca aşa biləcəyi ilə bağlı belə məsələ qoyulur (bax, [4]): elə (τ, d) həlledici qaydası tapmalı ki, bu qaydada $\sup_\theta \mathbf{M}_\theta\tau$ kəmiyyəti infimumunu ala bilsin (K i f e r – V e y s s məsələsi). Bu məsələnin həlli yalnız o hal üçün məlumdur ki, $\sup_\theta \mathbf{M}_\theta\tau$ kəmiyyətinin minimizasiya məsələsini hər hansı qeyd olunmuş $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ üçün $\mathbf{M}_\theta\tau$ kəmiyyətinin minimizasiya məsələsinə gətirmək mümkün olsun (m o d i f i k a s i y a o l u n m u ş K i f e r – V e y s s m ə s ə l ə s i); bu sonuncu məsələnin həlli – e h t i m a l l a r n i s b ə t i n i n ü m u m i l ə ş m i ş a r d ı c ı l k r i t e r i s i kimi adlandırılan – optimal dayanma haqqında müəyyən köməkçi həlli ilə təyin olunan qeyri – xətti sərhədli Vald testidir (bax, [5], [6]). Səhv qərarlar ehtimalları kiçik olduğu və paylanmalar ailəsi eksponensial olduğu halda Kifer – Veyss məsələsinin asimptotik həllində (səhv qərarların kiçik ehtimallı olduğu və eksponensial paylanmalar ailəsi halı üçün) ehtimallar nisbətinin ikiqat ardıcıl kriterisi alınır ki, bu kriteri üçün müşahidələrin davamolunma oblastı üçbucaq formasında olur (bax, [7], [6]).

$H_1 : \theta \neq 0$ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta = 0$ hipotezinin yoxlanılması məsələsində elə vəziyyət yarana bilər ki, əsas H_0 hipotezi yerinə yetirildikdə sonlu zaman ərzində son qərar vermək zərurəti yoxdur, əksinə, H_1 alternativi yerinə yetirildikdə isə müşahidələri olduqca tez başa çatdırmaq lazımdır, onda belə halda gücü vahidə bərabər ardıcıl kriteri qurmaq olar (bax, [8]). Məs., əgər müşahidə olunan X_i təsadüfi kəmiyyətləri $N(\theta, 1)$ normal qanunu ilə paylanmış olarlarsa, onda dayanma anı kimi

$$\tau = \inf\left\{ n \geq m : \left| \sum_{i=1}^{h} X_i \right| > [\,(n+1)\,(\ln(n+1) + a\,)\,]^{1/2} \right\}$$

kəmiyyətini götürmək olar və $\tau < \infty$ olduqda H_1 hipotezini qəbul etmək olar. Burada m və a parametrlərinin uyğun qiymətlərinin seçilməsi hesabına $\mathbf{P}_{\theta_1}\{\tau < \infty\} \leq \alpha$ bərabərsizliyinin ödənilməsinə nail olmaq olar, α – verilmiş ədəddir, $0 < \alpha < 1$ ($\mathbf{P}_{\theta_1}\{\tau < \infty\}$ şəklində ehtimallar üçün asimptotik düsturlar [8] – [10]-da verilmişdir); bu halda $\theta \neq 0$ olduqda $\mathbf{P}_\theta\{\tau < \infty\} = 1$ bərabərliyi ödəniləcəkdir. Ədəbiyyatda dayanma anı müddətinə məhdudiyyətlər qoyulduqda əyrixətli sərhədlərli bu həlledici qaydanın modifikasiyasına da baxılmışdır.

Hipotezlərin sayı ikidən çox olduğu hal üçün bir sıra nəticələri, məs., [11], [12]-də tapmaq olar.

Əd.: [1] W a l d A., W o l f o w i t z J., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, p. 326–39; [2] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [3] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976; [4] K i e f e r J., W i e s s L., «Ann. Math. Statist.», 1957, v. 28, № 1, p. 57–74; [5] L o r d e n G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1980, Bd 51, № 3, S. 291–302; [6] Д р а г а л и н В. П., Н о в и к о в А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 4, с. 679–90; [7] L o r d e n G., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 1, p. 281–91; [8] R o b b i n s H., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 6, p. 1397–1409; [9] S i e g m u n d D., Sequential analysis B. – N. Y., 1983; [10] W o o d r o o f e M., Nonlinear renewal theory in sequential analysis, Phil., 1982; [11] L o r d e n G., «Ann. Statist.», 1977, v. 5, № 1, p. 1–21; [12] Г о л у б е в Г. К., Х а с ь м и н с к и й Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, с. 544–554;

[13] Павлов И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 1, с. 149–53.

ARİFMETİK MODELLƏŞDİRİLMƏ(si) təsadüfi proseslərin « **арифметическое моделирование** случайных процессов; **arithmetic simulation** of random processes » – ehtimal paylanmalarının *statistik modelləşdirilməsi* qaydalarından biridir; trayektoriyaları bəzi arifmetik funksiyaların qiymətləri üzrə təyin olunan, paylanmaları isə funksional fəzada müəyyən ölçüyə yığılan təsadüfi proseslər ardıcıllığının qurulmasından ibarətdir.

k, m – natural ədədlər olsun. $f(m)$ funksiyası $f(k+m) = f(k)+f(m)$ şərtini ödəyərsə, additiv, $f(km) = f(k)\cdot f(m)$ şərtini qarşılıqlı sadə k və m üçün ödəyərsə, multiplikativ funksiya adlanır. p – sadə ədəd, $\alpha_p(m) = \max\{\alpha : p^{\alpha}/m\}$, $y_n : [0,1] \to [1,n]$, – 1 nöqtəsində sağdan kəsilməz funksiya, $y_n(0) = 1$, $y_n(1) = n$ olsun. Həqiqi additiv f_n funksiyaları üçün

$$H_n(t,m) = \sum_{p \le y_n(t)} f_n(p^{\alpha_p(m)}) - a_n(t), \quad 0 \le t \le 1$$

olduğu fərz olunur. Onda $H_n(t,m)$-ə $\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n\}$ ehtimal fəzasına nəzərən təsadüfi proses kimi baxmaq olar, burada $\Omega_n = \{1,...,n\}$, $\mathcal{A}_n$, – Ω-nın bütün altçoxluqlarından təşkil olunmuş cəbr, $\mathbf{P}_n(\{m\}) = 1/n$. $a_n(t)$ – müəyyən mərkəzləndirici kəmiyyətdir. $H(t,\cdot)$ prosesinin trayektoriyaları $D[0,1]$ fəzasındandır. Trayektoriyaları $C[0,1]$-dən olan uyğun proseslərə də baxmaq olar. $H_n(t,m)$ proseslərinin bir sinfi üçün Y. P. Kubilyus ([1], bax, [2], [3]) isbat etmişdir ki, $n \to \infty$ olduqda $H(t,\cdot)$ prosesinin trayektoriyasının kəsilməz differensiallanan sərhədli əyrixətli zolaqda olması ehtimalları $\mathbf{P}_n$-lər $w(t)$ Braun hərəkəti üçün uyğun ehtimallara yığılırlar. Sonralar $H_n(t,m)$ proseslərinin öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin funksional limit teoremlərini tətbiq etməyə başladılar. $H_n(t,m)$ proseslərinin bəzi sinifləri üçün $w(t)$-yə yığılma (bax, [9], [10]); sonlu dispersiyalı və asılı olmayan artımlarlı proseslərə yığılma (bax, [11]); dayanıqlı proseslərə yığılma (bax, [6]) isbat olunmuşdur; yığılma üçün zəruri və kafi şərtlər (bax, [5], [6]) və $w(t)$-yə yığılma sürətinin statistik qiymətləri tapılmışdır (bax, [6]). Semimartinqallar nəzəriyyəsindən istifadə edilərək ümumi nəticələr alınmışdır (bax, [7]).

Multiplikativ g_n funksiyaları ardıcıllığı üçün fərz olunur ki,

$$U_n(t,m) = d_n^{-1} \sum_{k \le t h_n} g_n(m+k), \quad 0 \le t \le 1;$$

burada $n \to \infty$ olduqda $h_n \to \infty$ olur, d_n – normalayıcı kəmiyyətdir. Onda $U_n(t,m)$, – $\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n\}$ ehtimal fəzasına nəzərən təsadüfi prosesdir. Ədədlər nəzəriyyəsində mühüm olan g_n funksiyalar ardıcıllığı üçün Y. P. Kubilyus və Yu. V. Linnik (bax, [4]) momentlər metodu ilə isbat etmişlər ki, $U_n(t,m)$ proseslərinin sonluölçülü paylanmaları $w(t)$-nin sonluölçülü paylanmalarına yığılır. Yu. V. Linnik (1967) belə sual qoymuşdur: $g_n(m) = \mu(m)$ olarsa, $n \to \infty$ olduqda $U_n(t,m) \to w(t)$ münasibəti doğrudurmu? Burada $\mu(m)$ – Myöbius funksiyasıdır. Bu sual [8]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Кубилюс Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [2] Кубилюс Й. П., «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, с. 361–63; [3] Кубилюс Й. П., «Lect. Notes Math.», 1976, v. 550, p. 335–50; [4] Кубилюс Й. П., Линник Ю. В., «Изв. ВУЗов. Матем.», 1959, № 6 (13), с. 88–95; [5] Тимофеев Н. М., Усманов Х. Х., «Докл. АН Тадж. ССР», 1982, т. 25, с. 207–11; [6] Манставичюс Э., «Лит. матем. сб.», 1984, т. 24, № 3, с. 148–61; [7] Григелионис Б., Микулявичюс Р., «Лит. матем. сб.», 1984, т. 24, № 2, с. 72–81; [8] Ляшенко Н. Н., «Докл. АН СССР», 1986, т. 290, с. 786–88; [9] Philipp W., «Proc. Symp. Pure Math.», 1973, v. 24, p. 233–46; [10] Babu G. J., Probabilistic methods in the theory of arithmeticcal functions, Calcutta, 1973 (Diss.); [11] Billingsley P., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, p. 749–91.

ARİFMETİK PAYLANMA « арифметическое распределение; arithmetic distribution » – $x = nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, $h > 0$ qiymətlərini alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret *paylanmasına* deyilir. Bu xassəli h-lardan ən böyüyü A. p.-nın addımı adlanır. A. p. *şəbəkəvari paylanmanın* xüsusi halıdır (bax, *Şəbəkəvari paylanma*). Digər tərəfdən hər bir şəbəkəvari paylanma yerinidəyişmiş A. p.-dır. A. p.-nın mühüm xüsusi halı $h = 1$ olduğu haldır, bu halda A. p. – tam qiymətli paylanmadır. A. p.-nın xarakteristik funksiyası $2\pi/h$ periodlu periodik funksiyadır. Əksinə, əgər hər hansı paylanmanın xarakteristik funksiyası $\varphi(z)$ hər hansı $z_0 \neq 0$ qiymətində $\varphi(z_0) = 1$ olarsa, onda bu paylanma A. p.-dır. Binomial paylanma addımı $h = 1$ olan A. p.-dır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ARİFMETİKASI, EHTİMAL PAYLANMALARININ « арифметика вероятностных распределений; arithmetics of probability distributions » – bax, *Ehtimal paylanmalarının arifmetikası.*

ARİSO – proses « АРПСС – процесс; ARIMA – process » – bax, *Avtoreqressiv – inteqrallanan sürüşən orta proses.*

ARKSİNUS QANUNU « арксинуса закон; arcsine law » – düzxətt üzərində təsadüfi dolaşmanın trayektoriyalarına aid *limit teoremidir*, *arksinus paylanması* və ya ümumiləşmiş arksinus paylanmasını ifadə edir. P. Levi 1939-da $\{\xi_t,\ t \ge 0;\ \xi_0 = 0\}$ Braun hərəkəti prosesi üçün aşağıdakı faktı qeyd etmişdir. τ_t – Braun hissəciyinin $[0,t]$ müddəti ərzində müsbət yarımoxda olduğu müddəti ifadə edən təsadüfi kəmiyyət olsun, başqa sözlə, τ_t, – $\{u : \xi_u > 0,\ 0 \le u \le t\}$ çoxluğunun Lebeq ölçüsüdür. Onda τ_t/t təsadüfi kəmiyyəti A. q. ilə paylanır:

$$\mathbf{P}\{\tau_t/t < x\} = F_{1/2}(x) = 2\pi^{-1}\arcsin\sqrt{x},$$
$$0 \le x \le 1, \quad t > 0.$$

Diskret zamanlı təsadüfi dolaşma üçün arksinus qanunu aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [2]):

$\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad 1 \le k \le n, \quad S_0 = 0;$$

$$v_n = \min \{ k : S_k = \max_{0 \le m \le n} S_m \},$$

K_n isə $0, 1, \ldots, n$ indeksləri arasında $S_k > 0$ olan k indekslərinin sayını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət olsun (bax, *İnikas prinsipi*). Onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{K_n/n < x\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{v_n/n < x\} = F_\alpha(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_1 < 0\} + \ldots + \mathbf{P}\{S_n < 0\}}{n} = \alpha$$

münasibətləri eyni zamanda ya ödənilir, ya da ödənilmir, burada $0 < \alpha < 1$ olduqda $F_\alpha(x)$ ümumiləşmiş arksinus paylanmasıdır, $F_1(x) = E(x)$ və $F_0(x) = E(x-1)$; $x \le 0$ olduqda $E(x) = 0$, $x > 0$ olduqda isə $E(x) = 1$.

Bərpa nəzəriyyəsində A. q. aşağıdakı kimi ifadə olunur. η_t kəmiyyəti $S_{\eta_t} < t \le S_{\eta_{t+1}}$ münasibətilə, $S_t^* = t - S_{\eta_t}$ kimi təyin olunarsa, $0 < \alpha < 1$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \ge 0\} = 1,$$

$$\lim \mathbf{P}\{S_t^*/t < x\} = F_\alpha(x)$$

bərabərlikləri, yalnız və yalnız,

$$\mathbf{P}\{\xi_1 > x\} = x^{-\alpha} L(x), \; x > 0,$$

$L(x)$ isə müsbət x -lər üçün təyin olunmuş, $0 < y < \infty$ olduqda

$$\lim_{x\to\infty} L(xy)/L(x) = 1$$

xassəsinə malik funksiya olduğu halda doğrudur.

Bərpa nəzəriyyəsində və təsadüfi dolaşmalar üçün A. q. arasında sıx əlaqə vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [3] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, № 4, с. 593–613.

ARKSİNUS PAYLANMASI « арксинуса распределение; arcsine distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \overline{\in} (0,1) \end{cases}$$

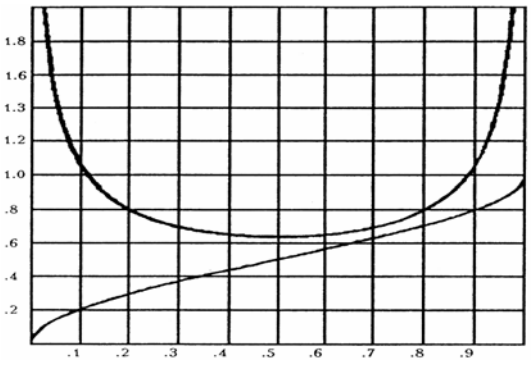
paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 2\pi^{-1} \arcsin\sqrt{x}, & x \in (0,1], \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

olan kəsilməz ehtimal *paylanmasıdır*.

32 ARKSİNUS

A. p.-sı *beta – paylanmanın* xüsusi halıdır və təsadüfi dolaşma proseslərinin tədqiqində alınır. Məs., hissəciyin ədəd oxunda simmetrik təsadüfi dolaşması zamanı müsbət yarımoxda olduğu zaman parçalarının paylanması A. p.-dır (bax, *Arksinus qanunu*). A. p. – ayrılmayan paylanmadır. A. p. ilə yanaşı ümumiləşmiş arksinus paylanması da



Arksinus paylanmasının sıxlıq funksiyası və paylanma funksiyasının qrafikləri.

istifadə olunur ki, bu paylanmanın sıxlıq funksiyası $(0,1)$ -də aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$p(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \, x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

burada $\alpha = 1/2$ olduqda ümumiləşmiş A. p.-sı A. p.-sı ilə üst-üstə düşür. Ümumiləşmiş A. p.-nın riyazi gözləməsi $(1-\alpha)$ -ya, dispersiyası $\frac{(1-\alpha)\,\alpha}{2}$ -yə bərabərdir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ARKTANGENS QANUNU təsadüfi matrislər üçün **« арктангенса закон** для случайных матриц; **arctangent law** for random matrices **»** – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi matrislər üçün.

ARONŞAYN – KOLMOQOROV TEOREMİ « Ароншайна – Колмогорова теорема; Aronszajn – Kolmogorov theorem » müsbət müəyyən funksiyaların strukturu haqqında: Λ – ixtiyari boş olmayan çoxluq olduqda $\Lambda \times \Lambda$ hasilində verilmiş f kompleks funksiyası, yalnız və yalnız, o halda müsbət müəyyən funksiyadır ki, əgər (kompleks) Hilbert fəzası H və onun elementlərinin elə $\{a_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ ailəsi olarsa ki, bütün $s, t \in \Lambda$ üçün $f(s,t) = (a_s, a_t)$ bərabərliyi ödənilsin. Əgər f funksiyası yalnız həqiqi qiymətlər alarsa, onda H həqiqi fəza götürülə bilər.

ARSO – proses « APCC – процесс; ARMA – process » – bax, *Xətti filtr*, *Qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta proses.*

ARTAN TƏSADÜFİ PROSES « возрастающий случайный процесс; increasing random process » – aşağıdakı şərtlərlə təyin olunan $\zeta = (\zeta_t)_{t \ge 0}$, $\zeta_0 = 0$ *təsadüfi prosesidir:*

1) ζ prosesinin trayektoriyaları sağdan kəsilməz və azalmayandır, yəni $s \le t$ olduqda $\zeta_s \le \zeta_t$;

2) trayektoriyalar çoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrlər ailəsi $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\ge 0}$ ilə uzlaşmış prosesdir;

3) hər bir $t > 0$ qiymətində $\mathbf{P}$ – sanki yəqin $\zeta_t < \infty$ və $\lim\limits_{t\to\infty} \zeta_t = \zeta_\infty \le \infty$ münasibətlərini ödəyir.

Əgər $\mathbf{M}\zeta_\infty < \infty$ olarsa, A. t. p. inteqrallanan proses, $\mathbf{M}\zeta_{\tau_n} < \infty$ münasibəti bütün $n \ge 1$ qiymətlərində ödənilərsə və $(\tau_n, n \ge 1)$ azalmayan Markov momentlərinin hər hansı ardıcıllığı üçün $\lim\limits_n \tau_n = \infty$ münasibəti $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilərsə, lokal inteqrallanan proses adlanır. Hər bir lokal inteqrallanan A. t. p. ζ üçün ζ-nın kompensatoru adlanan elə yeganə öngörül $\widetilde{\zeta} = (\widetilde{\zeta}_t,\ t \ge 0)$ artan təsadüfi prosesi vardır ki, $\zeta - \widetilde{\zeta}$ prosesi martinqaldır. Bu halda ixtiyari Markov anı τ üçün $\mathbf{M}\zeta_\tau = \mathbf{M}\widetilde{\zeta}_\tau$ və

$$\mathbf{M}\int_0^\infty H(s)\,d\zeta_s = \mathbf{M}\int_0^\infty H(s)\,d\widetilde{\zeta}_s$$

bərabərliyi ixtiyari mənfi olmayan $H = H(\omega, s)$ öngörül funksiyası üçün doğrudur.

λ parametrli Puasson prosesi A. t. p.-ə misaldır. Bu prosesin kompensatoru $\widetilde{\zeta}_t \equiv \lambda t$ determinik funksiyasıdır.

Əd.: [1] Делашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [3] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

ARTIM NÖQTƏSİ « точка роста; increasing point » – bax, *Atom.*

ASILI HADİSƏLƏR(i) **« зависимые события; dependent events »** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının – ixtiyari $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{A}$ hadisələri üçün

$$\mathbf{P}(A \cap B) \ne \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

şərti ödənilən hadisələrdir.

Bax, *Asılı olmayan hadisələr.*

ASILI OLMAMAZLIQ « независимость; independence » – ehtimal nəzəriyyəsində mərkəzi rol oynayan, ölçü təyin olunmuş ölçülən fəzaları tədqiq edən ümumi nəzəriyyədə ehtimal nəzəriyyəsini məhz özünəməxsusluğu ilə fərqləndirən ehtimal nəzəriyyəsinin mühüm anlayışlarından biridir. A. o. – təsadüfi hadisələrin, kəmiyyətlərin, elementlərin, kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin, σ – cəbrlərin, σ – cəbrlər axınlarının və s.-nin asılı olmamazlığı kimi anlayışları əhatə edir. Bu anlayışların tərifləndə $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ üçlüyünün qeyd olunmuş ehtimal fəzası Ω, təsadüfi $\mathscr{F}$ σ – cəbrindən ibarət və $\mathscr{F}$-də təyin olunmuş $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsünün altçoxluğu olduğu nəzərdə tutulur. Ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərində baxılan hadisələrin, sınaqların və təsadüfi kəmiyyətlərin A. o.-ı haqqında fərziyyə onun yarandığı gündən ilkin şərt kimi qoyulurdu.

İki təsadüfi A və B hadisələri üçün A. o. anlayışı aşağıdakı kimi daxil olunur. A və B ixtiyari təsadüfi hadisələr $(A, B \in \mathscr{F})$, $\mathbf{P}(A)$ və $\mathbf{P}(B)$ – bunların ehtimalları olsun. $\mathbf{P}(B) > 0$ olduqda A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\mathbf{P}(A \cap B)$, – A və B hadisələrinin birgə baş verməsi ehtimalıdır. Əgər

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \qquad (1)$$

olarsa, A və B asılı olmayan hadisələr adlanır. $\mathbf{P}(B) > 0$ olduqda (1) düsturu

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A) \qquad (2)$$

münasibəti ilə eynigüclüdür.

Tərifdən bilavasitə aydındır ki:

1) $A \in \mathscr{F}$ ixtiyari hadisədirsə, Ω və A asılı olmayan hadisələrdir;

2) Əgər $\mathbf{P}(S) = 0$, $A \in \mathscr{F}$ ixtiyari hadisədirsə, S və A asılı olmayan hadisələrdir;

3) A və B_i, $i = 1, 2$ asılı olmayan hadisələrdirsə və $B_1 \supset B_2$ olarsa, onda A və $B_1 \setminus B_2$ asılı olmayan hadisələrdir;

4) A və B asılı olmayan hadisələrdirsə, A və $\overline{B}$, $\overline{A}$ və $\overline{B}$ asılı olmayan hadisələrdir.

n sayda $(n > 2)$ $A_1, \ldots, A_n$ təsadüfi hadisələrinin A. o.-ı tərifi müxtəlif eynigüclü variantlarda verilir. Məs., əgər $2 \le m \le n$ şərtini ödəyən ixtiyari m və cüt-cüt müxtəlif ixtiyari $k_1, k_2, \ldots, k_m \le n$ natural ədədləri üçün $A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}$ hadisələrinin birgə baş verməsi ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabər olarsa, yəni

$$\mathbf{P}(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_m}) = \mathbf{P}(A_{k_1}) \ldots \mathbf{P}(A_{k_m}) \qquad (3)$$

bərabərliyi ödənilərsə, bu hadisələr asılı olmayan hadisələr adlanır (küllüyyatca asılı olmamazlıq).

Bəzən $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hadisələrinin A. o.-ı ilə (küllüyyatca A. o.-ı) yanaşı cüt-cüt A. o.-a da baxılır, bu halda $i \ne j$, A_i və A_j, $i = \overline{1, n}$ ixtiyari hadisələrinin asılı olmamazlığı anlaşılır. Küllüyyatca asılı olmayan hadisələr cüt-cüt asılı olmayan hadisələrdir, tərsi isə, ümumiyyətlə, doğru deyildir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik qurulmasından əvvəlki dövrdə A. o. anlayışının məzmunu olduqca aydın deyildi. A. A. Markov yazırdı ki, «asılı olmayan hadisələr haqqında anlayışın məlum nəzəri məsələlərdə tamamilə aydın olduğunu hesab etmək olar; digər məsələlərdə bu anlayış, aydındır ki, ehtimal haqqında əsas anlayışın aydın olmaması ilə bağlı olaraq, tamamilə aydın olmaya bilər» (bax, [1], səh. 24).

Aksiomatik yanaşma çərçivəsində A. o. anlayışı ən təbii surətdə aşağıdakı kimi daxil olunur. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, $\mathscr{A}$, – σ – cəbr, $\mathbf{P}$, – $\mathscr{A}$-da təyin olunmuş hər hansı ehtimal ölçüsü olsun. Əvvəlcə hadisələr siniflərinin A. o.-ı təyin olunur (burada yalnız $\mathscr{A}$ σ – cəbrlərinin σ – altcəbrləri olan $\mathscr{B}$ siniflərinə baxılır). Əgər ixtiyari $A_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}_n$ hadisələri (3) bərabərliyi mənasında asılı

olmayan hadisələr (küllüyatca asılı olmayan) olarsa, $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n$ sinifləri asılı olmayan siniflər adlanır. T indekslərin ixtiyari çoxluğu olarsa, əgər ixtiyari tam $n \geq 2$ qiymətində və ixtiyari cüt-cüt müxtəlif $t_1, \ldots, t_n \in T$ qiymətlərində $\mathscr{B}_{t_1}, \ldots, \mathscr{B}_{t_m}$ asılı olmayan siniflər olarsa, $\mathscr{B}_t$ ($t \in T$) sinifləri asılı olmayan siniflər adlanır. $1 \leq k \leq n$ qiymətləri üçün A_k hadisələrinin A. o.-ı

$$\mathscr{B}_k = \{\varnothing, A_k, \overline{A}_k, \Omega\}$$

siniflərinin A. o.-ı ilə eynigüclüdür.

Sınaqların asılı olmamazlığı bu sınaqların doğurduğu σ – cəbrlərin A. o.-ıdır (bax, [1]).

X_t, $t \in T$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün A. o. $\mathscr{B}(X_t)$ σ – altcəbrlərinin A. o.-ı kimi təyin olunur, burada $\mathscr{B}(X_t)$ – Borel çoxluqlarının ədəd oxuna X_t inikasına nəzərən proobrazdır. $A_1, \ldots, A_n$ təsadüfi hadisələrinin A. o.-ı bu hadisələrin indikatorları I_{A_k} -ların A. o. ilə, yəni

$$I_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_k \text{ olarsa,} \\ 0, & \omega \notin A_k \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan təsadüfi kəmiyyətlərin A. o. ilə eynigüclüdür.

$X_1, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin A. o.-ı üçün aşağıdakı şərtlər zəruri və kafidir.

1) İxtiyari həqiqi $a_1, \ldots, a_n$ ədədləri üçün paylanma funksiyası –

$$F_{X_1, \ldots, X_n}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{P}\{\omega\colon X_1(\omega) < a_1, \ldots, X_n(\omega) < a_n\}$$

uyğun paylanma funksiyalarının hasilinə bərabərdir.

$$F_{X_1, \ldots, X_n}(a_1, \ldots, a_n) = F_{X_1}(a_1) \ldots F_{X_n}(a_n).$$

2) $p_{X_1}(a_1), \ldots, p_{X_n}(a_n)$ sıxlıqlarının varlığı şərtində $\mathbb{R}^n$-də sanki bütün $(a_1, \ldots, a_n)$ qiymətlərinin Lebeq ölçüsü üzrə $p_{X_1, \ldots, X_n}(a_1, \ldots, a_n)$ sıxlığı uyğun $p_{X_1}(a_1), \ldots, p_{X_n}(a_n)$ sıxlıqlarının hasilinə bərabərdir.

3) $f_{X_1, \ldots, X_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mathbf{M} e^{iu_1X_1 + \ldots + iu_nX_n}$ xarakteristik funksiyası bütün $u_1, u_2, \ldots, u_n$ həqiqi ədədləri üçün uyğun xarakteristik funksiyaların hasilinə bərabərdir:

$$f_{X_1, \ldots, X_n}(u_1, \ldots, u_n) = f_{X_1}(u_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(u_n),$$
$$f_{X_k}(u_k) = \mathbf{M} e^{iu_k X_k}.$$

Ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm sxemləri bu və ya digər hadisələrin və təsadüfi kəmiyyətlərin A. o.-ı hipotezinə əsaslanır: asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqları (bax, məs., *Bernulli dolaşması*, *Böyük ədədlər qanunu*, *Limit teoremləri*), asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslər (bax, məs., *Viner prosesi*, *Təsadüfi proses*) və s. Bax, həm də *Sıfır – vahid qanunu.*

Asılı olmamazlıq anlayışına ümumi qeydlər.

1) Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyalarının asılı olmamazlığı. $X_1, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş A. o.-ından olduqca aydın (və A. o. anlayışından intuitiv gözlənilən tamamilə müvafiq) nəticələr almaq olar; məs., $X_1, \ldots, X_k$ və $X_{k+1}, \ldots, X_n$, $1 \leq k < n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin funksiyaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olacaqdır. Digər tip funksiyaların A. o.-ı yalnız əlavə xüsusi fərziyyələrlə yerinə yetir və paylanmaların müəyyən siniflərinin xarakterizasiyası vasitəsi ola bilər. Məs., əgər $X_1, \ldots, X_n$ – asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış və normal paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \tag{4}$$

və

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2 \tag{5}$$

funksiyaları (uyğun olaraq riyazi gözləmənin və X_k -nın dispersiyasının statistik qiymətləri) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Tərs müddəa da doğrudur: (3) və (4) funksiyalarının A. o.-ından X_k -ların paylanmalarının normal paylanma olduğu alınır.

Əgər iki

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j \quad \text{və} \quad Y_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

xətti formalarının asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu və a_j və b_j əmsallarından heç birinin sıfra bərabər olmadığı məlum olarsa, onda X_j normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir (bu tip teoremlərdən minimal şərtlərlə, məs., molekulların sürətlərinin paylanması üçün Maksvell qanununu almaq olar). Qeyd olunan müddəalara *xarakterizasion teoremlər* adlandırılan teoremlərə misallar kimi baxmaq olar və bu teoremlər Yu. V. Linnik və onun məktəbi tərəfindən daha tam surətdə öyrənilmişdir.

2) Verilmiş ehtimal fəzasında asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin varlığı. Əgər elementar hadisələr fəzası iki elementdən ibarət olarsa və bunların hər birinə $1/2$ ehtimalı qarşı qoyularsa, onda Ω-da konstantdan fərqli asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər yoxdur. Əgər ehtimal fəzası kimi Lebeq ölçüsü m ilə verilən $[0, 1]$ parçası götürülərsə, onda $F_1(x), F_2(x), \ldots$ paylanma funksiyalarının ixtiyari ardıcıllığı üçün $[0, 1]$-də təyin olunmuş, m ölçüsünə nəzərən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan elə $X_k(\omega)$ ölçülən funksiyaları tapılar ki,

$$m\{\omega\colon 0 \leq \omega \leq 1, X_k(\omega) < x\} = F_k(x)$$

olsun.

$[0, 1]$-də bu növ statistik asılı olmayan funksiyalara ən sadə misal $0 \leq \omega \leq 1$ münasibətilə verilən ω-nın ikilik ayrılışının işarələri və ya bu işarələrlə bağlı

$$r_k(\omega) = \operatorname{sign} \sin(2\pi \cdot 2^{k-1}\omega), \quad k = 1, 2, \ldots$$

– Rademaxer funksiyalarıdır. Qeyd etmək lazımdır ki, paylanmaları ilə verilmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin təyin olunduğu hər hansı ehtimal fəzasının varlığı sonsuzölçülü fəzalarda ehtimallar haqqında Kolmoqorov teoremindən alınır (bax, [3], fəs. III, §4).

3) Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər digər sxemlər üçün mənbə kimi. $Y_0, Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və $h(x, y)$ – iki dəyişənli (Borel) funksiya olsun. $X_1 = h(Y_0, Y_1)$, $X_2 = h(X_1, Y_2), ..., X_n = h(X_{n-1}, Y_n), ...$ olduğunu fərz etdikdə *Markov zənciri* əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı alınır. Buna oxşar şəkildə, məs., stoxastik differensial tənliklərin vasitəsilə Viner prosesindən *Markov proseslərini* almaq olur. Asılı olmayan qiymətlərli Qauss təsadüfi ölçülərindən Furye çevirməsi vasitəsilə Qauss stasionar təsadüfi proseslərini qurmaq olur.

4) Zəif asılılıq. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün ehtimal nəzəriyyəsinin müəyyən olunmuş asimptotik qanunları, adətən, zəif asılı kəmiyyətlər üçün, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ardıcıllığının bir-birindən «uzaqlaşmış» parçaları arasında münasib surətdə ölçülmüş asılılıq «kiçik» olduqda da müəyyən oluna bilinir (ən sadə hallarda bunlar m – asılı kəmiyyətlər ardıcıllıqları ola bilər, burada X_k və X_l, – $|k-l| > m$ olduqda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və ya *erqodik Markov zənciri* əmələ gətirən kəmiyyətlər ardıcıllıqlarıdır). Uyğun teoremlərin isbatlarının əsas qaydalarından biri baxılan halın A. o. halına gətirilməsidir.

5) Ədədlər nəzəriyyəsində asılı olmamazlıq. $p \geq 2$ və $q \geq 2$, – iki qarşılıqlı sadə natural ədədlər olsun. N natural ədəddir və 1-dən N-ə qədər natural ədədlərdən ixtiyari biri seçilir (bu ədədlərin hər birinin seçilməsi ehtimalının $1/N$ olduğu fərz olunur). A_p (uyğun olaraq A_q) seçilmiş ədədin p-yə tam bölünən (uyğun olaraq q-yə) olduğu hadisəsi olsun. Onda

$$\mathbf{P}(A_p) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p}\right], \quad \mathbf{P}(A_q) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{q}\right],$$

$$\mathbf{P}(A_p \cap A_q) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{pq}\right].$$

$N \to \infty$ olduqda A_p və A_q hadisələri «sanki asılı olmayan» hadisələr olur. Daha dərin fakt ondan ibarətdir ki, $N \to \infty$ olduqda elə $S = S_N \to \infty$ seçmək mümkündür ki, $A_2, A_3, ..., A_{p_s}$ (p_j, – j-ci sadə ədəddir) küllüyyatca «sanki asılı olmayandırlar», bu fakt arifmetik funksiyaların qiymətlərinin paylanmasının tədqiqində əsas götürülür. Ədədlər nəzəriyyəsinin digər elə bölmələri də vardır ki, A. o. ideyası aşkar və ya qeyri – aşkar olaraq iştirak edir.

6) Müşahidə nəticələri üzrə A. o. hipotezinin yoxlanılması haqqında *statistik hipotezlərin yoxlanılması* məq.-nə bax.

Əd.: [1] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [2] Колмогоров А. Н., Основные понятие теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика, ее содержание методы и значение, М., 1956; [4] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [5] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер с англ., т. 1–2, М., 1984; [6] Кубилюс Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильюс, 1962.

ASILI OLMAMAZLIQ XASSƏSİ, HADİSƏLƏR SİNFİNİN « свойство независимости класса событий; property independence of class events » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAMAZLIQ KRİTERİSİ « независимости критерий; test of independence » – hər bir qrupun digərlərindən asılı olmamazlığı haqqında *statistik hipotezi* yoxlamaq üçün kriteridir. p – ölçülü normal ümumi çoxluqdan n həcmli seçim verildiyi fərz olunur və müşahidə olunan vektorun komponentlərinin hər hansı q sayda qrupa bölgüsü verilir; bu qruplar $p_1, ..., p_q$ sayda elementdən ibarətdir. Əgər Ξ nəzəri kovariasion matrisi q^2 sayda hissəyə bölünmüşdürsə, yəni

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1q} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & ... & \sigma_{2q} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{q1} & \sigma_{q2} & ... & \sigma_{qq} \end{Vmatrix}$$

olarsa, onda yoxlanılan hipotez ondan ibarətdir ki, $j \neq k$ olduqda $\sigma_{jk} = 0$ olsun. Doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikası

$$l_H = |\hat{\sigma}|^{n/2} \Big/ \prod_{j=1}^{q} |\hat{\sigma}_{jj}|^{n/2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\|\hat{\sigma}_{jk}\|$ empirik kovariasion matrisdir və ya

$$l_H^{n/2} = |\hat{\sigma}| \Big/ \prod_{j=1}^{q} |\hat{\sigma}_{jj}|.$$

Əgər irəli sürülmüş hipotez doğrudursa, l statistikası məxrəcdən asılı deyildirsə, $|\hat{\sigma}_{jj}|$ isə $|\hat{\sigma}_{kk}|$-dan asılı deyildirsə, onda

$$\mathbf{M}(l^r) = \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{n-j}{2} + \frac{r_n}{2}\right) \prod_{k=1}^{q} \prod_{j=1}^{p_k} \Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{n-j}{2}\right) \prod_{k=1}^{q} \prod_{j=1}^{p_k} \Gamma\left(\frac{n-j}{2} + \frac{r_n}{2}\right)}.$$

Buna görə də, $-2\ln l$ təqribi olaraq χ^2 paylanması kimi paylanır və bu halda

$$f = \frac{1}{2}\left(p(p+1) - \sum_{i=1}^{q} p_j(p_j+1)\right).$$

Daha dəqiq approksimasiyadan sonra

$$\rho = 1 - \frac{2\left(p^3 - \sum_j p_j^3\right) - 9\left(p^2 - \sum_j p_j^2\right)}{6n\left(p^2 - \sum_j p_j^2\right)}$$

bərabərliyi alınır. j-nin bütün qiymətlərində $p_j = 1$ olduğu halda, yəni bütün p komponentlərinin asılı olmamazlığı yoxlanıldığı

halda, $f = p(p-1)/2$ olur. İkinci yaxınlaşmada $\rho = 1 - -(2p+11)/6n$ bərabərliyi alınır.

Bu halda statistika $|\hat{\sigma}|$-nın diaqonal elementlərinin, yəni dispersiyaların hasilinə nisbətinin $n/2$-ci dərəcədən qüvvətinə bərabərdir, başqa sözlə, korrelyasion determinantın $n/2$-ci dərəcədən qüvvətinə bərabərdir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

ASILI OLMAYAN (STATİSTİK ASILI OLMAYAN) HADİSƏLƏR « независимые (статистически независимые) события; independent (statistically independent) events » – $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ *ehtimal fəzası* verildikdə, $A \in \mathscr{F}$, $B \in \mathscr{F}$ təsadüfi hadisələri üçün

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \qquad (*)$$

bərabərliyini ödəyən hadisələrə deyilir; bu terminlə yanaşı « $\mathbf{P}$ ehtimalına nəzərən asılı olmayan», « $\mathbf{P}$ ehtimalına nəzərən statistik asılı olmayan hadisələr» anlayışı da istifadə olunur (bax, [2]).

Əgər $\mathbf{P}(A) > 0$ və $\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)$ olarsa, təbiidir ki, A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş vermə ehtimalını dəyişmir və $\mathbf{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ olduğuna görə, bu halda $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A)$ olur. Eynilə, əgər $\mathbf{P}(B) > 0$ və $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$ olarsa, yenə də $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ olduğu alınır.

Teorem 1. Əgər A və B asılı olmayan hadisələrdirsə, onda A ilə $\overline{B}$, $\overline{A}$ ilə B, $\overline{A}$ ilə $\overline{B}$ asılı olmayan hadisələrdir (bax, [1]).

Teorem 2. Uyuşmayan B_1 və B_2 hadisələrinin hər biri A ilə asılı olmayan hadisələrdirsə, onda A və $B_1 \cup B_2$ A. o. h.-dir (bax, [1]).

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_i \in \mathscr{F}$, $i = \overline{1, n}$) hadisələrinin ixtiyari cütü A. o. h.-dirsə, A_i hadisələri cüt-cüt A. o. h. adlanır.

Teorem 3. A_i $(i = \overline{1, n})$ hadisələrinin cüt-cüt asılı olmamazlığı üçün

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}(A_j), \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, n}$$

bərabərlikləri (C_n^2 sayda) ödənilməlidir.

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ ($B_i \in \mathscr{F}$) hadisələri üçün

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{r=1}^{k} B_{i_r}\right) = \prod_{r=1}^{k} \mathbf{P}(B_{i_r})$$

bərabərlikləri $2 \le k \le n$ şərtini ödəyən ixtiyari k-lar və $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ şərtini ödəyən $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indekslərinin ixtiyari toplusu üçün ödənilərsə, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ küllüyyatca A. o. h. adlanır. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ küllüyyatca A. o. h.-dirsə, ixtiyari $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$ qiymətlərində B_i, B_j cüt-cüt A. o. h.-dir. Lakin əksi doğru deyil.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Ширяев А. Н., Вероятность. М., 1980.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR küllüyyatca **« независимые события** в совокупности; **totally independent random events »** – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR, P EHTİMALINA NƏZƏRƏN « независимые события относительно вероятности P ; independent events relatively to probability P » – bax, *Asılı olmayan hadisələr.*

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR CƏBRLƏRİ « независимые алгебры событий; independent algebras of events » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR CƏBRLƏRİ, P EHTİMALINA NƏZƏRƏN « независимые алгебры событий относительно вероятности P ; independent algebras of events relatively to probability P » – bax, *Asılı olmayan hadisələr.*

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR σ – CƏBRLƏRİ « независимые σ – алгебры событий; independent σ – algebras of events » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR SİNİFLƏRİ « независимые классы событий; independent classes of events » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR SİNİFLƏRİ küllüyyatca **« независимые классы событий** в совокупности; totally **independent classes of events »** – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAYAN SEYRƏKLƏNMƏ(si) nöqtəvi prosesin **« независимое прореживание** точечного процесса; **independent thinning** of a point process **»** – bax, *Nöqtəvi proses.*

ASILI OLMAYAN SINAQLAR « независимые испытания; independent trials » – müxtəlif sınaqlara aid hadisələrin asılı olmayan hadisələr olduqları *sınaqlardır.* Hər bir S_k sınağına ehtimal fəzası $(\Omega_k, \mathscr{A}_k, \mathbf{P}_k)$ kimi baxmaq olar. A. o. s.-ı $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası – $(\Omega_k, \mathscr{A}_k, \mathbf{P}_k)$ ehtimal fəzalarının düz hasili ilə təsvir etmək olar. Bu halda ixtiyari $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, \ldots, n$ hadisələri asılı olmayan hadisələr olacaqdır, yəni

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

şərti ödəniləcəkdir.

Hər hansı real təsadüfi obyektləri təsvir edən A. o. s.-ın ehtimal modellərinin qurulmasında, adətən, belə bir prinsipdən istifadə olunur: səbəbi anlamda asılı olmayan real hadisələr nəzəri – ehtimali anlamda da asılı deyildirlər.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982.

ASILI OLMAYAN SINAQLARIN EFFEKTİV / EKVİVALENT SAYI « независимых испытаний эквивалентное число; effective number of independent trials », asılı olmayan müşahidələrin ekvivalent sayı – *asılı olmayan sınaqların* (və ya müşahidələrin) elə sayıdır ki, asılı sınaqlardan (müşahidələrdən) ibarət verilmiş seçim üçün dəqiqliklə (yəni eyni kvadratik orta xəta ilə) qeyd olunmuş statistik xarakteristikanı qiymətləndirməyə imkan verir. A. o. s. e. s.-nın tapılmasının mühüm xüsusi halı – kəsilməz və ya diskret zamanlı ($0 \le t \le T$ və ya $t = 1, 2, ..., T$) $\zeta(t)$ *stasionar təsadüfi prosesinin* bir realizasiyasının T uzunluqlu parçası üzrə seçimə görə $\mathbf{m} = \mathbf{M}\zeta(t)$ orta qiymətinin təyin olunduğu haldır. Əgər $\mathbf{m}$ kəmiyyətinin statistik qiyməti kimi alınmış, müşahidələrin ədədi ortası $\mathbf{m}_T^*$ -dən istifadə olunursa, onda t kəsilməz olduqda

$$\mathbf{M}(\mathbf{m}_T^* - \mathbf{m})^2 = \sigma_{\mathbf{m}_T}^2 = (2/T^2) \int_0^T (T - \tau)\, b(\tau)\, d\tau$$

və t diskret olduqda

$$\mathbf{M}(\mathbf{m}_T^* - \mathbf{m})^2 = \sigma_{\mathbf{m}_T}^2 = (2/T^2) \sum_{\tau=0}^{T-1} (T - \tau)\, b(\tau) - b(0)/T$$

xarakteristikalarından istifadə olunur. Burada $b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{m}][\zeta(t) - \mathbf{m}]$, – $\zeta(t)$ prosesinin mərkəzlənmiş korrelyasion funksiyasıdır [odur ki, $b(0)$, – $\zeta(t)$ prosesinin dispersiyasıdır]. N sayda asılı olmayan $\zeta_1, ..., \zeta_N$ müşahidələri üzrə $\mathbf{m} = \mathbf{M}\zeta$ kəmiyyətinin $\mathbf{m}_N^* = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \zeta_i$ statistik qiymətinin xətasının kvadratik ortası – σ_ζ^2 / N-ə bərabər olduğundan (burada σ_ζ^2, – ζ-in dispersiyasıdır), A. o. s. e. s., burada $N_{\text{ef}} = b(0) / \sigma_{\mathbf{m}_T}^2$ düsturu ilə ifadə olunur. Məs., t kəsilməz olduqda (və analoji t diskret olduqda) $\zeta(t)$ prosesinin *korrelyasiya radiusu* –

$$T_1 = (1/b(0)) \int_0^\infty b(\tau)\, d\tau$$

sonlu və sıfırdan fərqli olarsa, onda $T >> T_1$ olduqda $N_{\text{ef}} \approx \approx T/2T_1$ olur. $\mathbf{m}_2 = \mathbf{M}\zeta^2(t)$ və ya $\sigma_\zeta^2 = \mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]^2$ və ya $\mathbf{m}_k = \mathbf{M}\zeta^k(t)$ təyin edilərkən, A. o. s. e. s. T uzunluqlu parça üzrə $\zeta(t)$ stasionar prosesinin bir realizasiyası üzrə analoji tapılır. $\zeta(t)$ – korrelyasiya funksiyası $b(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ olan Qauss stasionar prosesi olduqda, $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_2$ və σ_ζ^2 kəmiyyətlərinin, $\zeta(1), ..., \zeta(t)$ qiymətləri üzrə, A. o. s. e. s. qiymətləri üçün T -nin bir sıra qiymətlərindən [1]-də cədvəl tərtib olunmuşdur.

Əd.: [1] Bayley G. V., Hammersley J. M., «J. Roy. Statist. Soc. Suppl.», 1946, v. 8, № 2, p. 184–97.

ASILI OLMAYAN SPEKTRAL TİPİ, ÖLÇÜLƏRİN « независимый спектральный тип мер; independent spectral types of measures » – bax, *Sinqulyarlığı, ölçülərin.*

ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR « независимые случайные события; independent random events » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR cüt-cüt **« независимые случайные события** попарно; **pairwise independent random events »** – bax, *Asılı olmayan hadisələr.*

ASILI OLMAYAN YERİNİDƏYİŞMƏ(si) nöqtəvi prosesin **« независимый сдвиг** точечного процесса; **independent shift** of a point process**»** – bax, *Nöqtəvi proses.*

ASILI SINAQLAR « зависимые испытания; dependent trials » statistik modelləşdirmədə – axtarılan kəmiyyətin (kəmiyyətlər ailəsinin) modelləşdirilən təsadüfi hadisə və ya prosesin bir-birindən asılı realizasiyaları üzrə orta xarakteristikası kimi hesablanıldığı modellərin (modellər ailəsinin) istifadə olunduğu *sınaqlardır.* Bu hallarda *antitetik dəyişənlər metodu* və təsadüfi parametrlərli digər kvadratik düsturlar – F funksiyalarının hər hansı fəzasında dəqiq düsturlar istifadə olunur. İnteqrallanan f funksiyası özünün F-də proyeksiyası ilə yaxın olduğu halda, bu metodların tətbiqi Monte–Karlo metodundan istifadə olunması üçün zəruri olan əməliyyatın həcmini azaldır.

$$\varphi(\alpha) = \int f(x; \alpha)\, \mathbf{P}(dx) \approx N^{-1}[f(\xi_1; \alpha) + ... + f(\xi_N; \alpha)] \approx \varphi^*(\alpha)$$

asılılığını Monte – Karlo metodu ilə hesabladıqda bütün $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_k$ qiymətlərində $\mathbf{P}(dx)$ qanunu ilə paylanmış eyni bir ξ_i ardıcıllığını istifadə etmək məqsədəuyğundur. Onda $\varphi^*(\alpha)$ əyrisi $\varphi(\alpha)$-ya yalnız C-də deyil, uyğun $C^{(n)}$ metrikasında da yaxın olur. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(dx; \alpha)$ ölçüsü α parametrindən asılı olduğu halda da asılı sınaqlar seriyasının oxşar konstruksiyası tətbiq olunur.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [2] Бахвалов Н. С., в сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, с. 5–63; [3] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике», Вильнюс, 1962, с. 425–37.

***ASILILIQ « зависимость; dependence »** – *stoxastik* və ya *ehtimalı asılılıq* – ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətlərin « asılılığı » kimi anlaşılan, riyaziyyatda istifadə olunan – kəmiyyətlərin adi funksional «asılılıq» növündən fərqli, daha ümumi asılılıq növüdür. Əgər ξ və η bir-birilə ehtimali asılı təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda ξ-nin hər hansı bir qeyd olunmuş qiymətində η -nın hər hansı qiymət alacağını dəqiq təyin etmək olmur; bu halda η təsadüfi kəmiyyətinin paylanma Qanunu ξ-nin aldığı qiymətdən asılı təyin olunur. Funksional asılılığa daha sıx ehtimal asılılığının limit halı kimi baxmaq olar. Əslində praktikada funksional asılı hesab olunan fiziki kəmiyyətlər olduqca

sıx ehtimali asılılıqla bağlıdır. Təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı xətti asılılığı kəmiyyətcə xarakterizə etmək üçün *kovariasiya* və *korrelyasiya əmsalı* adlanan ədədi xarakteristikalardan istifadə olunur (bax, *Kovariasiya*, *Korrelyasiya əmsalı*):

$$\operatorname{cov}(\xi;\ \eta) = \mathbf{M}((\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)), \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\rho}(\xi;\eta) = \operatorname{cov}(\xi;\ \eta)\big/\sqrt{\mathbf{D}\xi}\cdot\sqrt{\mathbf{D}\eta}\ . \qquad (2)$$

Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri xətti funksional asılılıqla bağlıdırsa, yəni $\eta = a\xi + b$ (a və b sabitlərdir, $a \neq 0$) olarsa, onda $\left|\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta)\right| \leq 1$ doğrudur və

$$\boldsymbol{\rho}(\xi;\eta) = \begin{cases} +1, & \text{əgər } a > 0, \\ -1, & \text{əgər } a < 0 \end{cases}$$

(bax, [2], səh., 249).

İki təsadüfi kəmiyyətin kovariasiyasının sıfırdan fərqli olması bu *təsadüfi kəmiyyətlər arasında asılılıq əlamətidir.* İki təsadüfi kəmiyyət arasında xətti ehtimali asılılıq bir təsadüfi kəmiyyətin artması ilə digər təsadüfi kəmiyyətin orta qiymət mənada xətti qanunla artmağa (və ya azalmağa) meylli olması kimi anlaşılmalıdır. $\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta) > 0$ olduqda, ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında *müsbət korrelyasiya*, $\boldsymbol{\rho}(\xi,\eta) < 0$ olduqda isə *mənfi korrelyasiya* vardır, deyilir (bax, *Asılı olmamazlıq*).

Ehtimal nəzəriyyəsində asılılıq anlayışının bir növü də təsadüfi kəmiyyətlər arasında Markov asılılığı (1906-da daxil olunmuşdur) kimi adlanan *zəncirvari asılılıq* anlayışıdır. Markov asılılığı ilə bir-birilə bağlı təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı aşağıdakı kimi təyin olunur (bax, [1]).

$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\{\mathscr{F}_n\}$ – bu fəzaya uyğun seçilmiş azalmayan σ – cəbrlər ailəsi olsun, $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{F}_n$. Hər bir n və m tam qiymətləri və $\mathbf{B}_k \in \mathscr{F}_k$ üçün, $\mathscr{F}_n$ verildiyi halda,

$$\mathbf{P}\{\omega : \mathbf{P}\{\xi_1 \in \mathbf{B}_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{B}_{n-1},\ \xi_{n+1} \in \mathbf{B}_{n+1}, \ldots,$$

$$\xi_{n+m} \in \mathbf{B}_{n+m} \mid \mathscr{F}_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in \mathbf{B}_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbf{B}_{n-1} / \mathscr{F}_n\} \times$$

$$\times\ \mathbf{P}\{\xi_{n+1} \in \mathbf{B}_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m} \in \mathbf{B}_{n+m} \mid \mathscr{F}_n\} \qquad (3)$$

bərabərliyi sanki yəqin ödənilərsə, $\mathscr{F}_n$ ardıcıllığı $\mathbf{P}$ ehtimalına nəzərən Markov zənciri əmələ gətirir, deyilir. (3) Markov xassəsi adlanır. Bu xassə müxtəlif ekvivalent formalarda ifadə olunur.

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Ширяев А. Н., Вероятность, М., Наука, 1980; [3] Вентцель Е. С., Теория вероятностей, М., 1969.

ASILILIQ RADİUSU « зависимости радиус; interaction radius » – bax, *Markov prosesi* qarşılıqlı təsirli.

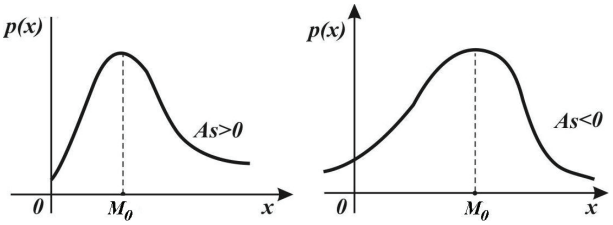
ASİMMETRİK KANAL « асимметричный канал; asymmetric channel » – bax, *Genişyayımlı kanal.*

ASİMMETRİYA ƏMSALI « асимметрии коэффициент; coefficient of skewness » – *paylanma asimmetriyasının* ən sadə və daha çox istifadə edilən ölçüsü olub,

$$\mathbf{As} = \boldsymbol{\mu}_3 \big/ \sigma^3$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\boldsymbol{\mu}_3$ – təsadüfi kəmiyyətin üçüncü mərkəzi momenti, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$ – paylanmanın dispersiyası, başqa sözlə, ikinci mərkəzi momentdir. Üçüncü tərtib momenti sonlu olan simmetrik paylanmanın A. ə., $\mathbf{As} = 0$.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma əyrisinin «uzun hissəsi» onun riyazi gözləməsindən sağdadırsa, asimmetriya müsbətdir: $\mathbf{As} > 0$; əgər «uzun hissə» riyazi gözləmədən soldadırsa, asimmetriya mənfidir, yəni $\mathbf{As} < 0$. M_0 – moda nöqtəsidir. Asimmetriyanın işarəsi modaya nəzərən təyin olunur: əyrinin «uzun hissəsi» modadan sağdadırsa, A. ə. müsbət, soldadırsa, A. ə. mənfi götürülür.



a) b)

Şəkildə A. ə. müsbət və mənfi olan paylanmaların qrafiki verilmişdir.

Parametrləri $n = 10,\ p = 1/5$ (şəkil a) və $n = 10,\ p = 4/5$ olan (şəkil b) binomial paylanma üçün

$$\mathbf{As} = \frac{1-2p}{\sqrt{n\,p(1-p)}};$$

λ parametrli eksponensial paylanma üçün

$$\mathbf{As} = \left(\frac{2}{\lambda^3};\ \frac{1}{\lambda^3}\right) = 2;$$

$(k;\ r;\ p)$ parametrli mənfi binomial paylanma üçün

$$\mathbf{As} = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$$

düsturları ilə ifadə olunur.

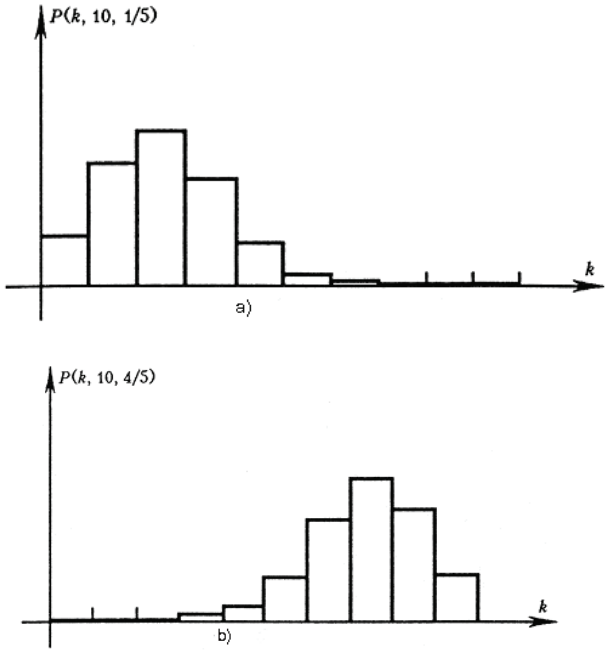
Standart normal paylanmanın A. ə. sıfırdır.

Tədqiq olunan paylanmanın A. ə. çox da böyük deyildirsə, bu halda onun paylanmasının standart normal paylanmaya yaxın olduğunu söyləmək olar.

A. ə. paylanmanın yerləşmə xarakteristikası olub, onun simmetrik paylanmadan fərqliliyini ifadə edir. Simmetrik paylanmanın hər bir sonlu tək tərtib mərkəzi momenti sıfra bərabərdir. Hər bir belə moment sıfırdan fərqli olarsa, həmin paylanmanın asimmetriyası olduğunu hökm etmək olar. Paylanmasının sıxlıq funksiyası olan unimodal paylanmanın A. ə. müsbət olduqda, onun əyrisinin «uzun hissə»si modadan sağda, mənfi olduqda modadan soldadır.

$$\hat{\mathbf{As}} = \frac{1}{ns^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3$$

kəmiyyətinə seçimi asimmetriya əmsalı deyilir, burada $x_1, \ldots, x_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\bar{x}$ və s – seçimi orta və seçimi dispersiyadır.



$n = 0$ olduqda Bernulli sınaqlarına uyğun $P(k; n, p)$ binomial paylanmanın qrafikləri: a) $p = 1/5$, – müsbət asimmetriyalı, b) $p = 4/5$ mənfi asimmetriyalı.

ASİMMETRİYASI, PAYLANMANIN « асимметрия распределения; skewness of a distribution » – *paylanmanı* simmetrik paylanmadan fərqləndirici xarakteristikadır. Simmetrik paylanmanın tək tərtibdən hər bir sonlu mərkəzi momenti sıfra bərabərdir. Sıfırdan fərqli hər bir tək tərtib mərkəzi momentin varlığına verilən paylanmanın asimmetriya göstəricisi kimi baxmaq olar. Asimmetriyanın ən çox istifadə olunan ölçüsü *asimmetriya əmsalıdır.* Asimmetriyanın digər göstəriciləri də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Asimmetriya əmsalı müsbət (mənfi) olarsa, P. a. müsbətdir (mənfidir). Sıxlığa malik unimodal paylanmanın P. a. müsbət (mənfi) olarsa, sıxlıq əyrisinin qrafikinin daha «uzun» hissəsi modadan sağdadır (soldadır).

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

***ASİMPTOTİK ASILI OLMAMAZLIQ « асимптотическая независимость; asymptotic independence »** – ehtimal nəzəriyyəsində m ə r k ə z i a s i m p t o t i k p r o b l e m ilə bağlı anlayışdır.

M ə r k ə z i l i m i t p r o b l e m i n d ə ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətlərinin $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ cəmlərinin ehtimal qanunları ardıcıllığı $\mathscr{L}(\xi_n)$-nin yığılması araşdırılır. Bu problemi təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olduğu hal üçün araşdırdıqda, daha ümumi m ə r k ə z i a s i m p t o t i k p r o b l e m ə baxılır; bu problemdə $n \to \infty$ olduqda $\mathscr{L}(\xi_n)$ qanunlar ardıcıllığının asimptotikası uyğun seçilmiş bəzi $\mathscr{L}(\eta_n)$ qanunlar ardıcıllığı ilə müqayisədə araşdırılır. Doğrudan da, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri halında mərkəzi limit probleminin öyrənilməsi cəmlərin paylanma qanunlarının uyğun surətdə seçilmiş sonsuz bölünən qanunlarla müqayisəsinə əsaslanırdı.

n' indeksli ixtiyari $\mathscr{L}(\xi_{n'})$ və $\mathscr{L}(\eta_{n'})$ qanunlar ardıcıllıqlarının limit (z ə i f y ı ğ ı l m a mənada) qanunları bərabər olarsa, $\mathscr{L}(\xi_n)$ və $\mathscr{L}(\eta_n)$ ardıcıllıqları z ə i f e k v i v a l e n t d i r, deyilir; başqa sözlə, əgər $\mathscr{L}(\xi_{n'}) \xrightarrow{z.} \mathscr{L}$ olarsa, onda $\mathscr{L}(\eta_{n'}) \xrightarrow{z.} \mathscr{L}$ və əksinə; bu halda $\mathscr{L}(\xi_n) \xrightarrow{z.} \mathscr{L}(\eta_n)$ yazılır. $\mathscr{L}(\xi_{n'}) \xrightarrow{z.} \mathscr{L}$ münasibəti onu ifadə edir ki, $F_{n'} \xrightarrow{L.} F$ münasibəti sabit toplananlar dəqiqliyilə ödənilir. « T a m a m i l ə e k v i v a l e n t l i k » anlayışı analoji təyin olunur. Bu halda «zəif» sözü «tamamilə» sözü ilə əvəz olunur və «tamamilə ekvivalentlik», simvolik olaraq, $\mathscr{L}(\xi_n) \overset{tam.}{\sim} \mathscr{L}(\eta_n)$ kimi yazılır.

$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ cəminə qarşı elə $\eta_n = \xi_n^* = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}^*$ cəmi qarşı qoymaq olar ki, bu cəmin toplananları ξ_{nk}^*-lar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və ξ_{nk}^* ilə ξ_{nk} kəmiyyətləri də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $\mathscr{L}(\xi_{nk}^*) = \mathscr{L}(\xi_{nk})$ olsun. Yəni belə demək olar ki, əgər toplananlar arasında asılılığı aradan qaldırmaq olarsa, $\mathscr{L}(\xi_n^*)$ qanunu $\mathscr{L}(\xi_n)$ qanunundan alınır. Əgər $\mathscr{L}(\xi_n) \overset{tam.}{\sim} \mathscr{L}(\xi_n^*)$ münasibəti ödənilərsə, onda ξ_{nk} kəmiyyəti a s i m p t o t i k a s ı l ı o l m a y a n t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t l ə r adlanır. Bax, [1], fəs. VIII, §28.1, 28.2.

Əd.: [1] Л о е в M., Теория вероятностей, М., 1962.

***ASİMPTOTİK ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « асимптотически независимые случайные величины; asymptotically independent random variables »** – bax, *Asimptotik asılı olmamazlıq.*

***ASİMPTOTİK AYRILIŞ « асимптотическое разложение; asymptotic expansion »** – ehtimal nəzəriyyəsində paylanmaların sıxlıq funksiyaları ilə bağlı anlayışdır.

Əgər $F(x)$ – *dayanıqlılıq göstəricisi* (və ya *dayanıqlılıq parametri*, *xarakteristiklik göstəricisi*) α-ya bərabər olan *dayanıqlı paylanmadırsa*, onda elə $c_1 > 0$ sabiti vardır ki,

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} \{1 - F(x) + F(-x)\} = c_1$$

münasibəti doğrudur. Xarakteristiklik göstəricisi α-ya bərabər hər bir dayanıqlı paylanma qanununun bütün p tərtib ($0 < p < \alpha$) sonlu mütləq momentləri vardır.

$f(x; \alpha, \beta)$ – dayanıqlı paylanmanın sıxlıq funksiyası olsun. Əgər $0 < \alpha < 1$ və $x > 0$ olarsa, onda

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin\left[\frac{k\pi}{2} \cdot \alpha \cdot (\beta + 1)\right] \times$$

$$\times \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{k!} x^{-k\alpha}. \qquad (1)$$

$\alpha > 1$ olduqda (1)-in sağ tərəfindəki sıra dağılır. Əgər $1 < \alpha < 2$, $x > 0$ olarsa, onda

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\ \frac{\Gamma((k+1)/\alpha)}{\alpha\,k!}\,x^k\ \times$$

$$\times\cos\left[\frac{k\pi}{2}\left(1+\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{2-\alpha}{\alpha}\beta\right)\right]. \qquad (2)$$

$\alpha<1$ olduqda (2)-nin sağ tərəfindəki sıra dağılır.

Əgər $\alpha=1,\ x>0$ olarsa, onda ixtiyari N üçün

$$f(x+\frac{2\beta}{\pi}\ln x,1,\beta) = \frac{1}{\pi x}\sum_{k=0}^{N}\frac{b_k}{k!}\,x^{-k} + O(x^{-N-2}),$$

burada

$$b_k = \operatorname{Im}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^k\left(i+i\beta-\frac{2\beta}{\pi}\ln t\right)^k dt.$$

Təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmasının ayrılışı.

$\{\xi_k,\ k\ge 1\}$ – qarşılıqlı asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun. ξ_k-lar üçün $\mathbf{M}\xi_n=a$, $\mathbf{D}\xi_n=\sigma^2$ və $r\le 3$ tərtib sonlu mütləq momentlərin varlığı və

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\ |g(z)|<1$$

Kramer şərtinin ödənildiyi fərz olunur, burada $g(z)$, – $\mathbf{P}\{\xi_n<x\}=G(x)$ paylanma funksiyasının uyğun xarakteristik funksiyasıdır; onda $\eta_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-na\right)$ normalanmış cəminin paylanma funksiyası $F_n(x)$ üçün x-ə görə müntəzəm olaraq

$$F_n(x)=\Phi(x)+\sum_{m=1}^{r-2}\frac{Q_m(x)}{\sqrt{n^m}}+o(n^{-(r-2)/2})$$

asimptotik ayrılışı doğrudur, burada $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}\,dz$, – $(0,1)$ parametrli normal paylanma funksiyasıdır və

$$Q_m(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\sum H_{m+2s-1}(x)\ \times$$

$$\times\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{k_l!}\left(\frac{\gamma_{l+2}}{(l+2)!\sigma^{l+2}}\right)^{k_l},$$

γ_l, – ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin l-ci semiinvariantıdır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, изд. 2, М., 1985; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

ASİMPTOTİK AYRILIŞ (1) paylanmanın **«асимптотическое разложение** распределения; **asymptotic expansion** of a distribution **»** – $\lambda\in\Lambda$ parametrindən asılı $\mathbf{P}(\lambda)$ paylanmasının $\lambda\to\lambda_0$ olduqda

$$G(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}a_j\,\Psi_j(\lambda)+o(\Psi_k(\lambda))$$

bərabərliyi şəklində ifadəsidir, burada $k\ge 0$, λ_0, – Λ çoxluğunun limit nöqtəsidir (sonlu və ya sonsuz), a_j, λ-dan asılı deyildir, $\{\Psi_j(\lambda)\}$, – $\lambda\to\lambda_0$ olduqda hər bir j qiymətində $\Psi_{j+1}(\lambda)=o(\Psi_j(\lambda))$ şərtini ödəyən funksiyaların hər hansı verilmiş ardıcıllığıdır. $G(\lambda)$ kimi paylanma funksiyası və ya təsadüfi kəmiyyətin hər hansı parametrdən asılı paylanma sıxlığı funksiyasını götürmək olar.

$F_n(x)$, – n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin normalanmış cəminin paylanma funksiyası, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası olduğu hal üçün ehtimal nəzəriyyəsində ilk dəfə 1887-də P. L. Çebışev tərəfindən $F_n(x)-\Phi(x)$ fərqinin $1/\sqrt{n}$ üstlərinə görə ayrılışı verilmişdir. Sonradan paylanmanın A. a. F. Edcuort tərəfindən araşdırılmışdır ([2]). Q. Kramer bu ayrılışları ciddi surətdə əsaslandırmışdır ([3]). Q. Kramerin aldığı nəticələrdən daha güclü və ümumiləşmiş nəticələri K. Esseen almışdır ([4]). Digər nəticələr [5] – [7]-də şərh olunmuşdur. Məs., Esseen teoremi aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər $\{X_n\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\mathbf{M}X_1=0$, $\mathbf{M}X_1^2=\sigma^2>0$, $\mathbf{M}|X_1|^k<\infty$ şərti $k\ge 3$ olan hər hansı tam k qiyməti üçün ödənilərsə və əgər

$$\lim_{|t|\to\infty}\sup\left|\mathbf{M}e^{itX_1}\right|<1$$

olarsa, onda $n\to\infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i<x\right\}=$$

$$=\Phi(x)+\sum_{j=1}^{k-2}n^{-j/2}Q_j(x)+o(n^{-(k-2/2)})$$

münasibəti $x\in\mathbb{R}^1$ üzrə ödənilir. Burada

$$Q_j(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\,P_{3j-1}(x),$$

$P_{3j-1}(x)$, – x-ə görə $(3j-1)$ dərəcəli çoxhədlidir və onun əmsalları X_1 təsadüfi kəmiyyətinin yalnız $(j+2)$-ci tərtib momentini aşmayan momentlərdən asılıdır. $Q_j(x)$ funksiyasının Çebışev çoxhədliləri ilə aşkar ifadələri vardır.

Asılı olmayan və asılı təsadüfi kəmiyyətlər (və vektorlar) cəmi üçün mərkəzi limit teoremində, təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının limit dayanıqlı paylanmaya yığılma teoremlərində asimptotik ayrılışla yanaşı, mühüm olan müxtəlif statistikalar sinifləri üçün paylanmaların asimptotik ayrılışları da tədqiq olunmuşdur.

Ədd.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; [2] Edgeworth F. V., «Trans. Comb. Philos. Soc.», 1905, v. 20, p. 36–65; [3] Cramer H., «Scand. Aktuarietidscrift», 1928, v. 11, p. 13–74, 141–80; [4] Esseen C.-G., «Acta math.», 1945, t. 77, p. 1–25; [5] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р., Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения, пер. с англ., М. 1972; [6] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [7] Hall P., Rates of convergence in the central limit theorem, Boston, 1982.

ASİMPTOTİK AYRILIŞ(ı) statistik qiymətin riskinin **« асимптотическое разложение** риска оценки; **asymptotic expansion** of the risk of an estimator **»** – $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin riskinin azalan toplananların (adətən, kiçik qiymətli parametrin qüvvət üstlərinə görə) cəmi şəklində ifadəsidir. Məs., maksimal doğruyaoxşarlıq parametrinin statistik qiymətinin orta riskinin A. a. θ parametrinin n həcmli asılı olmayan seçim üzrə ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x,\theta)$ olduqca hamar funksiya olduqda

$$\mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}-\theta|^2 = n^{-1}g_1 + n^{-3/2}g_2 + ... + n^{-k/2}g_{k-1} + O(n^{-(k+1)/2})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada g_i – müşahidələrin A. a. funksiyalarıdır.

Ədd.: [1] Гусев С. И., «Теория вероятностей и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 16–33; [2] Бурнашев М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1981, т. 45, № 3, с. 509–39.

ASİMPTOTİK AYRILIŞ(ı) statistik qiymətlərin **« асимптотическое разложение** оценок; **asymptotic expansion** of estimators **»**, statistik qiymətlərin stoxastik ayrılışı, – $\hat{\theta}$ *statistik qiymətinin* θ parametrinin əsl qiymətindən yayınmasının stoxastik azalan (adətən, hər hansı kiçik qiymətli parametrin qüvvət üstlərinə görə) toplananların cəmi şəklində ifadəsidir. Məs., n həcmli asılı olmayan seçim üzrə olduqca hamar $f(x,\theta)$ ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyasının parametrini qiymətləndirmə məsələsində maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərinin A. a.

$$\hat{\theta}^i - \theta = n^{-1/2}h_1 + ... + n^{-k/2}h_k + \xi_n$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada h_i – müşahidələr funksiyasıdır və bu müşahidələr cırlaşmayan paylanmaya malikdirlər, ξ_n – qalıq təsadüfi kəmiyyətdir və $n\to\infty$ olduqda sıfra olduqca tez yaxınlaşır. Statistik qiymətlərin A. a.-ndan, adətən, paylanma funksiyalarının ayrılışı və statistik qiymətlərin riskinin ayrılışı üçün istifadə olunur.

Ədd.: [1] Линник Ю. В., Митрофанов Н. М., «Докл. АН СССР», 1963, т. 149, № 3, с. 518–20; [2] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, № 2, с. 303–11; [3] Бурнашев М. В., «Матем. сб.», 1977, т. 104, № 2, с. 179–206.

ASİMPTOTİK BEYES KRİTERİSİ « асимптотически бейесовский критерий; asymptotically Bayes test » – hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində *statistik kriterilər* ardıcıllığıdır, *Beyes kriteriləri* ardıcıllığına asimptotik ekvivalentdir. Mürəkkəb hipotezlərin fərqləndirilməsi məsələlərinin ardıcıllığına baxılır: naməlum $\theta\in\Theta$ parametrindən asılı $\mathbf{P}_{n,\theta}$ paylanmasına malik, müşahidə olunan n həcmli X_n seçimi üzrə $H_1:\theta\in\Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0:\theta\in\Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Θ_0 və Θ_1, – Θ -nın kəsişməyən boş olmayan altçoxluqlarıdır. Asimptotik yanaşmada n -in artması ilə H_0 və H_1 hipotezləri, ümumiyyətlə, dəyişə bilərlər. Əgər elə $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcıllığı vardırsa ki, bu ardıcıllıqda hər bir $\varphi_n(X_n|\pi_n)$ kriterisi X_n seçimi üzrə qurulur və hər hansı bir aprior π_n paylanmasına nəzərən Beyes kriterisidir və $\{\psi_n(X_n)\}$ elə ardıcıllıq olarsa ki,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\theta\to\Theta}\left|\mathbf{M}_{n,\theta}\,\psi_n(X_n) - \mathbf{M}_{n,\theta}\,\varphi_n(X_n|\pi_n)\right| = 0 \qquad (*)$$

münasibəti ödənilsin, $\{\psi_n(X_n)\}$ kriterilər ardıcıllığı asimptotik Beyes kriterisi əmələ gətirir, deyilir.

A. B. k.-nin bu tərifinin müxtəlif modifikasiyaları mövcuddur. Məs., bəzən (*) münasibəti əvəzinə tələb olunur ki,

$$\lim_{n\to\infty}\left| r_{\pi_n}(\psi_n) - r_{\pi_n}(\varphi_n(\cdot|\pi_n))\right| = 0$$

münasibəti ödənilsin, burada $r_{\pi_n}(\varphi_n)$, – π_n aprior paylanma olduqda φ_n kriterisinin aprior riskidir. Digər təriflər, məs., [1]-də verilir.

A. B. k.-nin mühüm xassəsi ondan ibarətdir ki, seçimin paylanmalar ailəsi üzərinə olduqca ümumi şərtlərdə və $\{\pi_n\}$ aprior paylanmalarının hamarlığı şərtlərində A. B. k. aprior paylanmaların bu ardıcıllığından asılı olmur və bu A. B. k. *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir (bu da A. B. k.-nə bir misaldır). Bəzən A. B. k.-nin qurulmasını məsələlərin ilkin ardıcıllığı ilə təyin olunan, hipotezlərin yoxlanılmasının hər hansı limit məsələsində Beyes kriterisinin qurulmasına gətirmək olur.

Ədd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Lindley D., «Proc. 4-th Berkeley symp. math. statist. probab.», v. 1, Berk., 1961, p. 453–68.

* **ASİMPTOTİK BİRGƏ EFFEKTİV STATİSTİK QİYMƏTLƏR ARDICILLIĞI « асимптотически совместно эффективная последовательность оценок; asymptotically mutually effective sequence of estimators »** – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində bir anlayışdır. $\bar{\theta}^{(n)}$, – n həcmli seçim üzrə qurulmuş θ parametrik vektorunun meylsiz statistik qiymətlər ardıcıllığı, $I^{(n)}(\theta)$ – uyğun seçimin informasiya miqdarı matrisi, $D^{(n)}(\theta)$, – $\bar{\theta}^{(n)}$ statistik qiymətinin dispersion matrisi olsun. Əgər $n\to\infty$ olduqda

$$I^{(n)-1}(\theta)D^{(n)}(\theta)\to 1$$

münasibəti ödənilərsə, $\bar{\theta}^{(n)}$ statistik qiymətlər ardıcıllığı asimptotik birgə effektiv statistik qiymətlər ardıcıllığı adlanır.

Misal. Normal paylanmanın sıxlıq funksiyası üçün

$$f(x,a,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\theta^2}}$$

ifadəsində a və θ parametrləri naməlumdur. Bu parametrlərin qiymətləndirilməsi n sayda eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, paylanmalarının sıxlıq funksiyası $f(x, a, \theta)$ olan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üzrə aparılır.

$$\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)\right)^2 = \mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)\right) = n\mathbf{D}(\xi_k - a) = n\theta,$$

$$\mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)\right]\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2 - n\theta\right) =$$

$$= \mathbf{M}\left(\sum_{k,j=1}^{n}(\xi_k - a)(\xi_j - a)^2\right) = 0,$$

$$\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2 - n\theta\right)^2 = \mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)\right) =$$

$$= n\mathbf{D}[\xi_k - a]^2 = 2n\theta^2,$$

olduğundan, informasion matrisin elementləri üçün aşağıdakı ifadələr alınır:

$$\mathbf{M}\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial a}\right)^2 = \frac{n}{\theta}, \quad \mathbf{M}\,\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial a}\,\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \theta} = 0,$$

$$\mathbf{M}\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{n}{2\theta^2}$$

(bax, [1]). Beləliklə,

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\theta^2} \end{pmatrix} \to 0.$$

a və θ parametrlərinin statistik qiymətləri kimi

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad \bar{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2$$

meylsiz statistik qiymətləri götürülür. $\bar{s}^2$ və $\bar{\xi}$ arasında korrelyasiya sıfra bərabərdir. Doğrudan da,

$$\mathbf{M}(\bar{s}^2 - \theta)(\bar{\xi} - \theta) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\,\mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2 - n(\bar{\xi} - a)^2\right](\bar{\xi} - a) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\,\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2(\bar{\xi} - a) - n\,\mathbf{M}(\bar{\xi} - a)^3\right) = 0,$$

çünki $\xi_k - a$ Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin tək tərtib momentləri sıfra bərabərdir. Bu halda korrelyasion matris

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\theta^2}{n-1} \end{pmatrix} \to 0$$

şəklində olur və

$$I(\theta)D(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-2} \end{pmatrix}$$

münasibəti ödənilir. Beləliklə, normal paylanmanın parametrləri a və θ-nın statistik qiymətləri $\bar{\xi}$ və $\bar{s}^2$ A. b. e. s. q.-lərdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

ASİMPTOTİK ÇOXALDILMASI, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin **« асимптотическое укрупнение состояний** цепи Маркова; **asymptotic mergence of states** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin çoxaldılması.

ASİMPTOTİK DAYANIQLILIQ ehtimala görə **« асимптотическая устойчивость** по вероятности; **asymptotic stability** in probability **»** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı), təyinedici təsadüfi elementlərli differensial tənliklərin.

ASİMPTOTİK DEFEKT « асимптотический дефект; asymptotic deficiency » – bax, *Defekt*(i) kriterinin.

ASİMPTOTİK EFFEKTİV STATİSTİK QİYMƏT « асимптотически эффективная оценка; asymptotically efficient estimator » – böyük həcmli seçimlər üçün münasib statistik qiymətlər sinfindən «ən yaxşı» *statistik qiyməti* seçməyə imkan verən anlayışdır. Tutarlı müntəzəm asimptotik normal statistik qiymətlər sinfində, adətən, Fişer tərifindən istifadə olunur, bu tərifə əsasən A. e. s. q. asimptotik dispersiyası ən kiçik olan statistik qiymət hesab olunur. Asimptotik normallıq şərtindən imtina etdikdə çətinliklər yaranır, bunlarla qarşılaşmamaq üçün *Bahadur asimptotik effektivliyi*, *Volfovits və Rao asimptotik effektivliyi* tərifləri istifadə olunur. Məlum requlyarlıq şərtlərində maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti bu tərif anlamında A. e. s. q.-dir.

Əd.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİK(y i) kriterinin **« асимптотическая эффективность** критерия; **asymptotic efficiency** of a test **»** – böyük həcmli seçimlər hallarında eyni bir statistik hipotezin yoxlanılması üçün tətbiq olunan iki müxtəlif statistik kriterinin kəmiyyətcə müqayisəsinə xidmət edən anlayışdır. Kriterilərin effektivliyini təyin etmək zəruriliyi XX əsrin 30 – 40-cı illərində, hesablama nöqteyi – nəzərincə sadə olan, lakin «qeyri – effektiv» ranq üsulları yarandığı zaman meydana gəlmişdir.

A. e.-i təyin etmək üçün müxtəlif yanaşmalar mövcuddur. Fərz olunur ki, müşahidələrin paylanması $\mathbf{P}_\theta$ həqiqi θ parametri ilə

təyin olunur və bu halda $H_1 : \theta \neq \theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta = \theta_0$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur. Fərz olunur ki, verilən θ alternativinə qarşı β gücünün alınmasından ötrü, mühümlük ölçüsü α-ya bərabər hər hansı bir kriteri üçün N_1 sayda müşahidə, mühümlük ölçüsü eyni α olan digər kriteri üçün N_2 sayda müşahidə aparılmalıdır. Onda birinci kriterinin ikinci kriteriyə nəzərən *nisbi effektivliyini* $e_{12} = N_2/N_1$ düsturu ilə təyin etmək olar. Nisbi effektivlik anlayışını ifadə edən e_{12} funksiyasının, adətən, aşkar şəkildə hesablanılması mümkün olmadığından, α, β və θ arqumentlərinin funksiyası olduğundan kriteriləri müqayisə etmək üçün əhatəli məlumat daşıyıcısı olmasına baxmayaraq, tətbiqi cəhətdən əlverişli deyildir. Bu çətinlikdən yan keçmək üçün limit keçidlərindən istifadə olunur. α və β-nı qeyd etdikdə, $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ kəmiyyəti (əgər limit vardırsa) Pitmən asimptotik nisbi effektivliyi adlanır; β və θ qeyd olunduqda α-nı sıfra yaxınlaşdırdıqda, $\lim\limits_{\alpha \to 0} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ (limit vardırsa) kəmiyyəti Bahadur asimptotik nisbi effektivliyi; α və θ qeyd olunduqda $\beta \to 1$ olarsa, $\lim\limits_{\beta \to 1} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ (limit vardırsa) kəmiyyəti Hoces–Leman asimptotik nisbi effektivliyi adlanır.

Bu tərifl ərin hər birinin üstün və çatışmayan cəhətləri vardır. Məs., Pitmən asimptotik nisbi effektivliyi Bahadur asimptotik nisbi effektivliyinə nisbətən asan hesablanır, lakin bəzi hallarda iki kriterinin müqayisə edilməsi üçün az effektli olur.

Məs., müşahidələrin orta qiyməti θ, dispersiyası 1 olan normal qanunla paylandığı fərz olunur; $H_1 : \theta > 0$ alternativinə qarşı $H_0 : \theta = 0$ hipotezi yoxlanılır. $\overline{X}$ seçimi ortasına və Styudent kəsri t-yə əsaslanan mühümlük kriterilərinə baxılır. t – kriteridə dispersiyanın qiyməti haqqında informasiya istifadə olunmadığından $\overline{X}$-ə əsaslanan optimal kriteridən çox ona üstünlük verilir. Lakin Pitmən asimptotik nisbi effektivliyi nöqteyi – nəzərincə, bu kriterilər ekvivalentdirlər. Digər tərəfdən, $\overline{X}$-ə nəzərən t –kriterinin Bahadur asimptotik nisbi effektivliyi ixtiyari $\theta > 0$ qiymətində 1-dən ciddi kiçikdir. Daha mürəkkəb hallarda Pitmən asimptotik nisbi effektivliyi α və ya β-dan asılı ola bilər və bu halda onun hesablanması çox çətin olduğundan onun limit qiyməti $\beta \to 1$ və ya $\alpha \to 0$ olduqda hesablanılır. Sonuncu, adətən, $\theta \to \theta_0$ olduqda, Bahadur asimptotik nisbi effektivliyinin limit qiyməti ilə üst-üstə düşür. Asimptotik nisbi effektivliyin bu və ya digər tərifi e_{12} nisbi effektivliyinə nə dərəcədə dəqiq yaxınlaşma verməsinə əsaslanır.

Əd.: [1] Кендалл M., Стьюарт A., Статистические выводы и связи, пер. с англ., M., 1973; [2] Bahadur R., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, № 2, p. 303–24; [3] Hodges J., Lehmann E., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 324–35; [4] Никитин Я. Ю., Асимптотическая эффективность непараметрических критериев, M., 1995; [5] Lai L., «Ann. Statist.», 1978, v. 6, № 5, p. 1027–47; [6] Berk R., Brown L., «Ann. Statist.», 1978, v. 6, № 3, p. 567–81; [7] Kallenberg W., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 2, p. 583–94; [8] Wieand H., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 5, p. 1103–11; [9] Kallenberg W., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 1, p. 170–82; [10] Groeneboom P., Oosterhoff J., «Int. Statist. Rev.», 1981, v. 49, № 2, p. 127–41.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ, STATİSTİK QİYMƏTLƏRİN Bahadura görə « **асимптотическая эффективность оценок** по Бахадуру; Bahadur **asymptotic efficiency of estimators** » – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *asimptotik effektivlik* anlayışlarından biri olub, R. Bahadur tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur. Bu anlayışın tərifi mərkəzi parametrin əsl qiyməti ilə üst-üstə düşən, qeyd olunmuş uzunluqlu intervalda statistik qiymətin topalanma dərəcəsinin köməyilə asimptotik effektivliyin ölçülməsi ideyasına əsaslanır. Bahadur asimptotik effektivliyinin ölçüsünü hesablamaq üçün statistik qiymətin böyük yayınmaları ehtimallarının kobud asimptotikasının təyin olunması zəruridir. Müəyyən requlyarlıq şərtilə maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri Bahadur asimptotik effektiv statistik qiymətləridir.

Əd.: [1] Bahadur R., «Sankhya», 1960, v. 22, № 3–4, p. 229–52; [2] Шметтерер Л., Введение в асимптотическую статистику, пер. с нем., M., 1976; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, M., 1979.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ, STATİSTİK QİYMƏTLƏRİN Raoya görə « **асимптотическая эффективность оценок** по Рао; Rao **asymptotic efficiency of estimators** », statistik qiymətlərin Rao A. e. – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *asimptotik effektivliyin* tərifl ərindən biri olub, 20-ci əsrin 60-cı illərinin əvvəllərində S. R. Rao tərəfindən verilmişdir. Qiymətləndirilən parametr haqqında statistik qiymətdə olan Fişer informasiyası bütün seçimdə olan Fişer informasiyası ilə asimptotik olaraq üst-üstə düşərsə, belə statistik qiymət Rao asimptotik effektiv statistik qiyməti adlanır. Müəyyən requlyarlıq şərtləri ödənildiyi hallarda maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri və Beyes statistik qiymətləri bu tərif anlamında asimptotik effektiv statistik qiymətlərdir.

Əd.: [1] Rao C. R., «J. Roy. Statist. Soc.», 1962, v. B 24, № 1, p. 46–72; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., M., 1968; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, M., 1979.

ASİMPTOTİK EFFEKTİVLİYİ, STATİSTİK QİYMƏTLƏRİN Volfovitsə görə « **асимптотическая эффективность оценок** по Вольфовицу; Wolfowitz **asymptotic efficiency of estimators** » – qiymətləndirmə nəzəriyyəsində statistik qiymətlər üçün *asimptotik effektivlik* anlayışlarından biri olub, C. Volfovitsə [1] məxsusdur. Volfovitsə görə asimptotik effektivliyi təyin etmək üçün paylanmaları ola bilər ki, normal paylanmadan fərqli ola bilən limit paylanmasına müntəzəm yığılan statistik qiymətlər sinfi seçilir. $\{\theta_n\}$ – birölçülü θ parametri üçün statistik qiymətlər ardıcıllığı olarsa və $b > 0$ şərtini ödəyən ixtiyari b-lər üçün

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_\theta \{\theta_n \in (\theta - bn^{-1/2},\ \theta + bn^{-1/2})\}$$

kəmiyyəti qeyd olunmuş sinifdən olan statistik qiymətlərlə müqayisədə ən böyük qiymət alarsa, $\{\theta_n\}$ – Volfovits asimptotik effektiv statistik qiymətlər ardıcıllığı adlanır. Geniş requlyarlıq şərtləri daxilində maksimal doğruyaoxşarlıq və Beyes statistik qiymətləri verilən tərif anlamında Volfovits asimptotik effektiv statistik qiymətləridir.

Əd.: [1] Wolfowitz J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, № 2, с. 267–81; [2] Weiss L., Wolfowitz J., Maximum probability estimators and related topics, [B. – N. Y.], 1974; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

ASİMPTOTİK ƏHƏMİYYƏTSİZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICILLIĞI « последовательность асимптотически пренебрегаемых случайных величин; sequence of asymptotic neglectability random variables » – $X_{k,n}$ ($k=\overline{1,\ n}$; $n=1,2,\ldots$) təsadüfi kəmiyyətlərinin elə ikiqat ardıcıllığına deyilir ki, $X_{k,n}$ kəmiyyətləri k -ya ($k=1,2,\ldots,n$) görə müntəzəm olaraq ehtimala görə sıfra yığılsın, yəni ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün $k=1,\ 2\ ,\ldots,\ n$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\,|X_{k,n}|>\varepsilon\,\}<\varepsilon$$

bərabərsizlikləri ödənilsin.

Sıfıral seriyalar sxemində (*Asimptotik əhəmiyyətsiz komponentlərli seriyalar sxemində*) hər bir $X_{k,n}$ ($k=\overline{1,\ n}$) kəmiyyəti S_n cəminin komponenti olub, asimptotik əhəmiyyətsizdir (bax, *Seriyalar sxemi*, *Üçbucaq sxemi*).

ASİMPTOTİK ƏHƏMİYYƏTSİZLİK « асимптотическая пренебрегаемость; asymptotic neglectability » – bax, *Asimptotik əhəmiyyətsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı.*

ASİMPTOTİK ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « асимптотически наиболее мощный критерий; asymptotically most powerful test » verilən sinifdə – statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində *statistik kriterilər* ardıcıllığıdır və bu kriteri verilmiş sinifdən olan bütün kriterilər ardıcıllıqlarından (alternativ hipotezin qeyd olunması şərtilə) ən böyük asimptotik gücə malik olan kriteridir. X_n, – $\theta\in\Theta$ naməlum parametrindən asılı paylanmaya malik n həcmli təkrar seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı ilkin $H_0:\theta\in\Theta_0$ hipotezi yoxlanılır. Əgər kriterilər ardıcıllıqlarının K sinfindən ixtiyari $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcıllığı üçün ($\{\varphi_n\}\in K$)

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbf{M}_{n,\theta_1}(\varphi_n-\psi_n)\le 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\psi_n\}\in K$ kriterilər ardıcıllığı K sinfində $\theta_1\in\Theta_1$ nöqtəsində asimptotik ən güclü kriteri adlanır.

K sinfi kimi asimptotik mühümlük ölçüsü α -ya bərabər olan və

$$\limsup_{n\to\infty}\ \sup_{\theta\in\Theta_0}\mathbf{M}_{n,\theta}\varphi_n\le\alpha$$

şərtini ödəyən kriterilər ardıcıllıqlarının sinfini və ya mühümlük ölçüsü α -ya bərabər *asimptotik meylsiz kriterilər* ardıcıllıqları sinfini götürmək olar. Sadə ilkin hipotez irəli sürüldüyü halda A. ə. g. k. həmişə vardır. Kifayətdir ki, n -in hər bir qiymətində ψ_n kriterisi kimi mühümlük ölçüsü α -ya bərabər olan Neyman – Pirson kriterisi götürülsün. Əgər qurulmuş $\{\psi_n\}\in K$ kriterilər ardıcıllığı eyni zamanda bütün $\theta_1\in\Theta_1$ qiymətlərində A. ə. g. k. olarsa, onda bu kriterilər ardıcıllığı *asimptotik müntəzəm ən güclü kriteri* adlanır.

ASİMPTOTİK ƏN GÜCLÜ MEYLSİZ KRİTERİ « асимптотически наиболее мощный несмещенный критерий; asymptotically most powerful unbiased test » – asimptotik meylsiz kriterilər sinfində asimptotik ən güclü kriteridir.

ASİMPTOTİK QİYMƏTLƏNDİRMƏ NƏZƏRİYYƏSİ « асимптотическая теория оценивания; asymptotic estimation theory » – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsinin bölməsidir, bu bölmədə statistik qiymətlərin asimptotik xassələri seçim həcminin qeyri – məhdud artırılması, küy həddinin azaldılması və s. kimi şərtlər ilə araşdırılır.

1. A. q. n.-nin ən çox inkişaf etdiyi məsələlərdə n həcmli

$$X^{(n)}=(X_1,\ldots,X_n)\qquad(1)$$

seçimləri üzrə naməlum ümumi paylanmanın bu və ya digər xarakteristikaları seçim həcmi qeyri – məhdud artırılmaqla qiymətləndirilir. Ümumi nöqteyi – nəzərdən bu halda A. q. n.-nin nəticələri limit teoremləri ($n\to\infty$) kimi ifadə olunur. Buna görə də, təbii olaraq, A. q. n. məsələlərinin araşdırılmasında ehtimal nəzəriyyəsinin klassik limit teoremləri (*böyük ədədlər qanunu*, *mərkəzi limit teoremi*), daha mürəkkəb hallarda isə təsadüfi proseslər üçün limit teoremləri mühüm rol oynayır.

(1) seçimi üzrə $\mathscr{P}$ ümumi paylanmasının bu və ya digər xarakteristikası $T=T(\mathscr{P})$-nin statistik qiymətləri məhz (1) müşahidələrinin funksiyaları – $T_n(X_1,\ldots,X_n)$ funksiyalarıdır; odur ki, A. q. n., demək olar ki, əsasən $T_n(X_1,\ldots,X_n)$ statistikalarını $n\to\infty$ olduqda araşdıran limit nəzəriyyəsidir. Təbiidir ki, bu sahədə əsas istiqamət T_n-T fərqlərinin asimptotikasının araşdırılmasıdır.

Misal 1. (1) müşahidələrinə əsasən $\alpha_\nu=\alpha_\nu(\mathscr{P})=\mathbf{M}X_1^\nu$ momentləri qiymətləndirilməlidir. Böyük ədədlər qanununa görə $a_\nu=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^\nu$ seçimi momentləri ehtimala görə α_ν -yə yığılır (daha dəqiq, $\mathbf{P}_{\mathscr{P}}\{\,|\alpha_\nu(\mathscr{P})-a_\nu|>\delta\,\}\to 0$), $\sqrt{n}(a_\nu^2-{}-\alpha_\nu^2)^{-1/2}(a_\nu-\alpha_\nu)$ normalanmış fərqlərinin paylanmaları isə mərkəzi limit teoreminə əsasən standart normal paylanmaya yığılır.

Misal 2. Paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x)$ olan (1) seçimi üzrə p -ci kvantil ζ_p qiymətləndirilir. ζ_p -nin statistik qiyməti kimi z_p seçimi kvantili götürmək olar. Bu halda $\sqrt{n}f(\zeta_p)\times{}\times(p(1-p))^{-1/2}(z_p-\zeta_p)$ normalanmış fərqinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır.

Misal 3. $F(x)=\mathbf{P}\{X_1<x\}$ – kəsilməz funksiya, $F_n(x)$ isə (1) seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası olsun. Onda $F_n(\cdot)$ funksiyaları $C(-\infty,\infty)$-da $F(\cdot)$ funksiyasına vahid ehtimalla yığılır, $\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))$ normalanmış fərqinin paylanması isə $C(-\infty,\infty)$-da asılı olmayan artımlarlı normal

$w(x)$ təsadüfi prosesinin paylanmasına yığılır və $\mathbf{M}\left| w(x)\right|^2 = F(x)(1-F(x))$.

2. A. q. n. məsələsinin ilk qoyuluşunu aşağıdakı ümumi sxemlə ifadə etmək olar. $X^{(n)}$ seçimləri əvəzinə abstrakt ε parametrindən asılı olan X_ε müşahidələrinin hər hansı çoxluğuna baxılır. X_ε təsadüfi kəmiyyəti $\{\mathscr{X}, \mathfrak{A}_\varepsilon\}$ ölçülən fəzasından qiymətlər alır və X_ε-nun ehtimal paylanması $\mathscr{P}_\theta^\varepsilon$, – $\{\mathscr{P}_\theta^\varepsilon, \theta\in\Theta\}$ ailəsindəndir, Θ isə verilmiş parametrik çoxluqdur.

Naməlum θ parametrini və ya Φ funksiyasının θ nöqtəsindəki $\Phi(\theta)$ qiymətini X_ε müşahidəsinə görə qiymətləndirmək tələb olunur. $T_\varepsilon(X_\varepsilon)$ statistikaları statistik qiymət kimi götürülür. Asimptotik qiymətləndirilmə məsələləri T_ε statistik qiymətlərinin ε-nun dəyişilməsi ilə limit yaxınlaşmalarını müəyyən etdikdə qarşıya çıxır. Müəyyənlik üçün bu halda fərz olunur ki, $\varepsilon>0$ və $\varepsilon\to 0$ olduqda T_ε statistikasının asimptotik yaxınlaşmasına baxılır; ümumiyyətlə, hesab etmək olar ki, ε elementlərinin $\{\varepsilon\}$ çoxluğunda filtr verilmişdir və limit bu filtrə görə baxılır. Adətən (lakin bu o qədər də önəmli deyildir), A. q. n. məsələlərində $\mathscr{P}_u^\varepsilon$ və $\mathscr{P}_\upsilon^\varepsilon$ ölçüləri u və υ parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində, $\varepsilon\to 0$ olduqda, limitdə sinqulyardırlar.

M i s a l 4. $1-3$ misallarının şərtlərilə $X_\varepsilon = X^n$, $\varepsilon = n^{-1}$ götürmək olar.

M i s a l 5. X_ε, – k – ölçülü

$$X_\varepsilon = \theta + \varepsilon\xi \tag{2}$$

Qauss vektoru olsun, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$ naməlum parametr, ξ isə k – ölçülü standart Qauss vektorudur. Asimptotik məsələlər maneələr (əngəllər) intensivliyi $\varepsilon\to 0$ olduqda yaranır. Bu məsələnin sonsuzölçülü variantı, təbii olaraq, aşağıdakı kimi qoyulur: $X_\varepsilon = X_\varepsilon(t)$ müşahidəsi

$$dX_\varepsilon(t) = S(t)dt + \varepsilon dw(t), \quad 0\le t\le 1 \tag{3}$$

münasibətilə verilən təsadüfi prosesdir, S – naməlum funksional parametrdir, $S\in\Sigma\subset L_2(0,1)$, w isə Viner prosesidir.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin tətbiqi məsələləri, bir qayda olaraq, qeyri – asimptotik xarakter daşıyır. Belə məsələlər baxımından A. q. n., «dəqiq» həllər olduqca mürəkkəb olduğu hallarda, yaxşı yaxınlaşmalar alınmasına xidmət edir. Lakin A. q. n. eyni zamanda qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin dərk olunmasında da böyük əhəmiyyət kəsb edir. Ehtimal nəzəriyyəsində olduğu kimi statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin bir çox qanunauyğunluqları asimptotik xarakter daşıyır və bu qanunauyğunluqlar tam mənası ilə A. q. n.-nin yalnız limit teoremlərində təzahür olunur.

3. Məlum Φ funksiyasının naməlum θ nöqtəsində (xüsusi halda θ-nı qiymətləndirmək üçün) $\Phi(\theta)$ qiymətini qiymətləndirmək üçün paylanmaları $\{\mathbf{P}_\theta^\varepsilon, \theta\in\Theta\}$ olan X_ε müşahidələrindən istifadə olunduğu fərz olunur. A. q. n.-nin məsələsi $\Phi(\theta)$ üçün elə T_ε statistik qiymətlərinin qurulması qaydalarını göstərməkdir ki, bu statistik qiymətlər $\varepsilon\to 0$ olduqda, bu və ya digər mənada, $\Phi(\theta)$ ilə qeyri – məhdud surətdə yaxınlaşsın (tutarlı statistik qiymətlər). Müəyyənlik üçün aşağıda T_ε statistik qiymətinin tutarlı statistik qiymət olması T_ε-nun $\Phi(\theta)$-ya $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon$ ehtimalına görə yığılması kimi anlaşılır.

M i s a l 6. Müşahidələrin (1) şəklində olduğu fərz olunur. $1-3$ misallarında d_ν, ξ_p, F xarakteristikaları üçün alınan statistik qiymətlər tutarlı statistik qiymətlər olur. Misal 3-ün nəticələrindən tutarlı statistik qiymətlərin qurulması üçün ümumi bir metod alınır. Əgər F, – X_j müşahidəsinin naməlum paylanma funksiyasıdırsa və $g(F)$-i qiymətləndirmək tələb olunursa, onda geniş fərziyyələrlə $g(F_n)$ statistikaları tutarlı statistik qiymətlər olacaqdır.

M i s a l 7. Misal 5-in şərtlərilə X_ε, θ üçün tutarlı statistik qiymətdir, $X_\varepsilon(t)$ isə $\int_0^t S(u)du$ üçün tutarlı statistik qiymətdir.

M i s a l 8. X_T müşahidəsi – orta qiyməti naməlum m olan $X(t)$, $0\le t\le T$ erqodik stasionar prosesinin realizasiyasının bir parçası olsun. Onda $X_T = T^{-1}\int_0^T X(t)\,dt$, – m üçün tutarlı statistik qiymətdir, $T\to\infty$; $T^{-1}\int_0^{T-\tau}(X(t+\tau)-\overline{X}_T)(X(t)-\overline{X}_T)\,dt$ isə $R(\tau)$, $\tau>0$ korrelyasiya funksiyası üçün tutarlı statistik qiymətdir.

A. q. n.-nin tutarlı statistik qiymətlər axtarılması üçün ümumi metodları – *momentlər metodu*, *ən kiçik kvadratlar metodu*, *Beyes statistik qiymətləri* və ən geniş yayılmış metod – *maksimal doğruyaoxşarlıq metodu* kimi metodlardır. Sonuncu metod ümumi şəkildə belə şərh olunur; əgər bütün $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon$ ölçüləri ümumi ν_ε ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər olarsa, maksimal doğruyaoxşarlıq metoduna əsaslanaraq, θ üçün statistik qiymət kimi maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti –

$$\mathbf{P}_\varepsilon(u) = \frac{d\mathbf{P}_u^\varepsilon}{d\nu_\varepsilon}(X_\varepsilon), \qquad u\in\Theta$$

təsadüfi funksiyasının maksimum nöqtəsi $\hat\theta_\varepsilon$ qəbul edilir. Əgər $\Theta\subset\mathbb{R}^k$ olarsa, onda geniş fərziyyələrlə $\hat\theta_\varepsilon$, – θ üçün tutarlı statistik qiymətdir.

M i s a l 9. $X^T = (X_1,\dots,X_T)$ müşahidələrində X_j kəmiyyətlərinin 1-ci tərtib $X_j = \theta X_{j-1} + \xi_j$ avtoreqressiya prosesi təşkil etdiyi fərz olunur, burada ξ_i, – $(0,\sigma^2)$ parametrlərli normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\theta\in(-1,1)$ – naməlum parametrdir. Maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə alınmış $\hat\theta_T$ statistik qiyməti, $T\to\infty$ olduqda, birinci yaxınlaşmada

$$\sum_{j=2}^T X_jX_{j-1}\Big/\sum_{j=1}^T X_j^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} \theta$$

münasibətilə ifadə olunur.

M i s a l 10. Təbii olaraq, (2) ifadəsindəki X_ε kəmiyyəti θ üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir və $\varepsilon \to \infty$ olduqda $X_\varepsilon \to \theta$. (3) münasibətində $S = S(t;\,\theta)$ olsun, θ naməlum parametrdir və $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Bu halda maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti

$$\frac{d}{d\theta}\left[\int_0^1 S\,(t;\,\theta)\,d\,X_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 S^2(t\,;\theta)\,dt\right] = 0$$

maksimal doğruyaoxşarlıq tənliyindən təyin olunur və əgər, məs., $S(t;\,\theta) = \theta S(t)$, $\theta \in \mathbb{R}$ olarsa, onda

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \left[\int_0^1 S^2(t)\,dt\right]^{-1} \int_0^1 S(t)\,dX_\varepsilon(t) = \theta + o(1).$$

Aydındır ki, T-nin statistik qiyməti kimi T_ε statistikasının tutarlı statistik qiymət olması T-nin T_ε ilə əvəz olunmasından yarana bilən xətaların böyük və ya kiçikliyi haqqında təsəvvur yaratmır. Buna görə də, A. q. n.-nin mühüm məsələsi $\varepsilon \to 0$ olduqda $\mathbf{P}_\theta^\varepsilon\{|T - T_\varepsilon| > \delta\}$ ehtimallarının azalma sürətinin qiymətləndirilməsidir. Bu məsələnin həllinin təbii yolu $\mathbf{M}_\theta^\varepsilon |T - T_\varepsilon|^a$, $\mathbf{M}_\theta^\varepsilon \exp\{b\,|T - T_\varepsilon|^a\}$ momentlərinin asimptotik araşdırılmasıdır və sonra isə Çebışev bərabərsizliyindən istifadə olunmalıdır.

M i s a l 11. (1) seçimindəki X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin $1-\theta$ və θ ehtimalları ilə uyğun olaraq 0 və 1 qiymətlərini aldığı fərz olunur.

$$\hat{\theta}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j$$

– maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti tutarlı statistik qiymətdir və $\mathbf{M}_\theta\,\hat{\theta}_n = \theta$ və $\mathbf{D}_\theta\hat{\theta}_n = n^{-1}\theta\,(1-\theta) \le (4n)^{-1}$; Bernşteyn bərabərsizliyinə əsasən, hətta $\mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta\} \le$ $\le 2\exp\{-2n\delta^2\}$.

$1-10$ misallarını da müqayisə etmək olar.

4. T kəmiyyəti üçün müəyyən edilən T_ε statistik qiymətlərinin tutarlı statistik qiymətlər olduğu təyin edildikdən sonra, $T_\varepsilon - T$ fərqlərinin paylanmasının asimptotik xassələrinin öyrənilməsi T_ε statistik qiymətlərinin asimptotikasının öyrənilməsi üçün növbəti addımdır. $a(\varepsilon)(T_\varepsilon - T)$ normalanmış fərqlərinin paylanmalarının yığılması asimptotik etibarlı intervallar və asimptotik kriterilərin qurulması üçün istifadə oluna bilər.

$a(\varepsilon)(T_\varepsilon - T)$ fərqi üçün limit paylanmasının varlığı T_ε statistik qiymətlərinin tutarlı statistik qiymətlər olmasından daha güclü nəticədir və belə nəticələrin isbatı olduqca mürəkkəbdir. Bu halda X_ε müşahidəsilə bağlı $\{\mathscr{X}^\varepsilon, \mathfrak{A}^\varepsilon, \mathbf{P}_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta\}$ statistik eksperimentinin xüsusi bir strukturundan istifadə olunur (müşahidələrin asılı olmamazlığı, Markov xassəlilik, stasionarlıq və s.). Daha sonra, müəyyənlik üçün (1) müşahidələrinin ən mühüm halına baxılır. Bir sıra məsələlər üçün klassik limit teoremlərindən (misal 1), qaydalı statistikalar üçün limit teoremlərindən (misal 2), invariantlıq prinsipindən (misal 3) istifadə edərək, $T - T_\varepsilon$ fərqlərinin limit paylanmalarını almaq olur. $1-3$ misallarının nəticələrinə əsaslanaraq, $\Phi(a_\nu, a_\mu, ...)$, $\Phi(z_p, z_q, ...)$, $\Phi(F_n)$ şəklində statistikaların limit paylanmalarını göstərmək olar və buna görə $a_\nu - \alpha_\nu, ...,$ $z_p - \zeta_p$ fərqlərinin qüvvət üstlərinə görə Teylor ayrılışını yazaraq, xətti hədlərlə kifayətlənmək yetərlidir.

Ümumi halda, $T_\varepsilon(X_\varepsilon)$ statistik qiyməti müşahidənin mürəkkəb funksiyasıdır və $T_\varepsilon - T$ fərqlərinin paylanmasının öyrənilməsi limit teoremlərinin yeni sinfinin alınması ilə nəticələnir. Maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri mühüm sinif təşkil edir. Müşahidələrin (1) şəklində verildiyi, bütün X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı $\{\mathscr{X}, \mathfrak{A}\}$ ölçülən fəzasından qiymətlər aldıqları və bu fəzada hər hansı μ ölçüsünə görə $f(x;\theta)$ paylanma sıxlıq funksiyasına malik olduqları fərz olunur. θ naməlum parametrdir və $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Fərz olunur ki, $\{f(x;\theta)\}$ sıxlıqlar ailəsi müəyyən requlyarlıq şərtlərini ödəyir və bu şərtlər $\{f(\,\cdot\,;\theta)\}$ ailəsinin hamarlılığı ilə təyin olunur və mahiyyətcə bu şərtlər $I(\theta) = \left\| \int_{\mathscr{X}} \frac{\partial f}{\partial \theta_i}\,\frac{\partial f}{\partial \theta_j}\,\frac{d\mu}{f} \right\|$ Fişer informasiyasının varlığı tələbinə gətirilir. Bu şərtlər daxilində $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ statistikasının limit paylanması orta qiyməti sıfra bərabər, korrelyasion matrisi $I^{-1}(\theta)$ olan normal paylanmadır və

$$\mathbf{M}_\theta \left|\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)\right|_n^p \to \mathbf{M}\left|\xi\right|^p,$$

$$\xi \in N(\theta,\, I^{-1}(\theta)), \quad p > 0.$$

Nəticənin belə alınmasını aşağıdakı mülahizələr sübut edir. Maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti

$$l_n(u) = \sum_{j=1}^n \ln f(X_j; u)$$

təsadüfi funksiyasının maksimum nöqtəsidir və deməli, bu funksiyanın stasionar nöqtəsidir. Buna görə də,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = I^{-1}(\theta)\,n^{-1/2}\sum_{j=1}^n \frac{d}{d\,\theta}\ln f(X_j;\,\theta) + o(1)$$

olduğu alınır.

M i s a l 12. $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ qiymətləndirilən və θ yerinidəyişmə parametri olsun, yəni $f(x;\theta) = f(x-\theta)$. Əgər

$$I(\theta) = I = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right|^2 f^{-1}(x)\,dx$$

inteqralı sonludursa, $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ fərqi asimptotik normaldır, $(0,\, I^{-1})$ bu fərqin asimptotik normal paylanmasının parametrləridir. Əgər I inteqralı yığılmırsa, onda $\hat{\theta}_n - \theta$ fərqinin limit paylanması, ümumiyyətlə, normal paylanmadan fərqlidir, normalayıcı

vuruğun tərtibi isə $\sqrt{n}$ -dən fərqlidir. Məs., $f(x) = (\Gamma(\alpha))^{-1} \times$ $\times x^{\alpha-1}e^{-x}$, $x>0$ olsun. Onda $\alpha>2$ olduqda $I<\infty$ və normalanmış $n^{1/\alpha}(\hat{\theta}_n-\theta)$ fərqi $(0,\ I^{-1})$ parametrlərli asimptotik normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. $1\le\alpha<2$ olduqda isə normalanmış $n^{1/\alpha}(\hat{\theta}_n-\theta)$ fərqi normal paylanmadan fərqli xüsusi limit paylanmasına malikdir.

M i s a l 13. X_j – parametri naməlum λ olan Puasson paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyət olsun, qiymətləndiriləcək θ parametri isə $\theta=\lambda^{-1}$ şərtilə təyin olunur. Bu halda maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti $\hat{\theta}_n=\left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)^{-1}$ düsturu ilə ifadə olunur və $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ fərqi $(0,\ \theta^3)$ parametrlərli asimptotik normal paylanmaya malikdir, lakin $\hat{\theta}_n$ -in dispersiyası sonsuzdur.

$f(x;\theta)$ sıxlıq funksiyası üzərinə əlavə məhdudiyyətlər qoyaraq və $f(\cdot,\ \theta)$ funksiyasının olduqca hamar olmasını tələb edərək, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ fərqlərinin limit paylanmaları üçün alınan nəticələri daha da güclü etmək mümkündür: $\mathbf{M}_\theta\, l\,(\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta))$ risk funksiyası üçün asimptotik ayrılış yazmaq və böyük yayınmalar ehtimallarının asimptotikasını göstərmək yetərlidir.

5. Qiymətləndirilmə məsələlərində asimptotik qoyuluşa keçid mürəkkəb olan limitəqədər paylanmaların bunlarla müqayisədə sadə universal limit paylanmaları ilə yalnız əvəz etməyə deyil, hətta asimptotik mənada, ağlabatan surətdə optimal statistik qiymətləri təyin etməyə imkan verir. Məs., θ parametrinin $(\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k)$ statistik qiyməti T_ε-nun keyfiyyətinin $\mathbf{M}_\theta^\varepsilon\, l_\varepsilon(T_\varepsilon;\theta)$ risk funksiyası ilə ölçüldüyü fərz olunur. T_ε asimptotik optimal statistik qiymətlərini, təbii olaraq, $\mathbf{M}_\theta^\varepsilon\, l_\varepsilon(T_\varepsilon;\ \theta)$ risk funksiyasını θ-ya görə müntəzəm asimptotik minimal olaraq statistik qiymətlər kimi təyin etmək istədikdə, *ən yüksək effektiv statistik qiymətlərin* varlığı problemi qarşıya çıxır (ixtiyari T_ε statistik qiymətini bir neçə ayrı-ayrı θ nöqtələrində kifayət dərəcədə yaxşılaşdırmaq mümkündür). Bu halda itki funksiyası l_ε -nun ε -dan asılılığı qaçılmazdır və odur ki, $\varepsilon\to0$ olduqda T_ε-nun θ-ya yaxınlaşdığı hökmən nəzərə alınmalıdır. Sadəlik üçün fərz olunur ki, $l_\varepsilon(T_\varepsilon;\theta)=l(\varphi(\varepsilon)|T_\varepsilon-\theta|)$, burada $\varphi(\varepsilon)$ – normalayıcı vuruqdur. Əgər

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\left[\inf_{T_\varepsilon}\sup_{|u-\theta|<\delta}\mathbf{M}_u^\varepsilon\, l\,(\varphi(\varepsilon)\,(T_\varepsilon-u))\ -\right.$$

$$\left.-\sup_{|u-\theta|\le\delta}\mathbf{M}_u^\varepsilon\, l(\varphi(\varepsilon)(\widetilde{\theta}_\varepsilon-u))\right]=0$$

münasibəti ödənilərsə, $\widetilde{\theta}_\varepsilon$, θ nöqtəsində a s i m p t o t i k e f f e k t i v (a s i m p t o t i k o p t i m a l) s t a t i s t i k q i y m ə t adlanır. Bu tərifin məğzi ondan ibarətdir ki, optimal statistik qiymətin müntəzəm asimptotik ən yaxşı statistik qiymət olmasını deyil, yalnız lokal asimptotik minimaks statistik qiymət olmasını tələb edir. Optimallığın bu tərifi geniş bir sinfi əhatə edən hallar üçün asimptotik effektiv statistik qiymətlərin varlığını isbat etməyə və onların konstruksiyasını göstərməyə imkan yaradır.

Requlyar halda statistik qiymətlərin asimptotik effektivliyi araşdırıldıqda lokal asimptotik normallıq şərti və bu şərtə əsaslanan aşağıdan dəqiqlik sərhədlərini təyin etməyə xidmət edən Qask – Le Kam bərabərsizlikləri mühüm rol oynayır. $T_\varepsilon-T$ fərqləri üçün limit teoremlərinə (bax, b. 4) əsasən bu halda asimptotik effektiv statistik qiymətləri təyin etmək olur.

Məs., müşahidələrin (1) şəklində olduğu, b. 4-ün requlyarlıq şərtlərinin ödənildiyi fərz olunur (Fişer informasion matrisinin varlığı fərz olunur). Onda θ parametrinin ixtiyari T_n statistik qiymətləri və $l\ge0$ şərtini ödəyən itki funksiyalarının geniş bir sinfi üçün

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{n\to\infty}\sup_{|\theta-u|<\delta}\mathbf{M}_u\, l\,(\sqrt{n}\,(T_n-u))\ge\mathbf{M}l(\xi)$$

münasibəti ödənilir, burada ξ – təsadüfi vektordur və $\xi\in N(0,\mathbf{I}^{-1}(\theta))$; digər tərəfdən (bax, b. 4), $\hat{\theta}_{nn}$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri üçün $\lim_n \mathbf{M}l\,(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta))=$ $=\mathbf{M}l(\xi)$ bərabərliyi ödənilir və maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri asimptotik effektiv statistik qiymətlərdir və bu bütün itki funksiyaları üçün doğru olur. Bu halda Beyes statistik qiymətləri də asimptotik effektiv olur. Beləliklə, requlyarlıq şərtlərində belə bir mühüm fakt doğrudur: asimptotik baxımdan itki funksiyalarının seçilməsində ixtiyarilik arzuolunmaz hallara səbəb olmur.

Requlyarlıq şərtinin pozulması vəziyyəti kəskin surətdə dəyişir. Maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri asimptotik effektiv olmur. Asimptotik effektiv statistik qiymətlər sinfi seçilmiş itki funksiyasından olduqca asılı olur. X_j təsadüfi kəmiyyətinin $[0,\infty)$-da eksponensial paylanmaya malik olduğu sadə bir halda (misal 12, $d=0$) $\theta_n^*=\min X_j+\lambda/n$ statistik qiyməti λ nöqtəsində l -ə görə asimptotik effektiv statistik qiymətdir; λ, – $\int_0^l l(s+u)\,e^{-u}\,du$ funksiyasının minimum nöqtəsidir.

Requlyar məsələlər halında, yuxarıda qeyd olunduğu kimi bir çox statistik qiymətlər (Beyes, maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri) asimptotik effektik statistik qiymətlər olur, yəni $\mathbf{M}_\theta\, l\,(\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta))$ risk funksiyasının asimptotik ifadələrində birinci həddi eyni olur. Requlyarlıq şərtlərini daha da gücləndirdikdə risk funksiyasının sonrakı hədlərini müqayisə etmək olar (2-ci tərtib asimptotik effektivlik).

6. Elə səbəblər vardır ki, bunlara görə bir sıra hallarda əvvəlki bənddə qeyd olunmuş asimptotik effektiv statistik qiymətlərə digərlərilə müqayisədə üstünlük verilir. Ola bilər ki, bu asimptotik effektiv statistik qiymətlər qiymətləndirilən parametrə daha asta yaxınlaşır, lakin bunlar digər üstünlüklərə malikdirlər: hesablanmaların sadəliyi, universallıq, modelin dəyişkənliklərinə görə dayanıqlılıq kimi.

M i s a l 14. (1) müşahidələri üzrə yerinidəyişmə parametri, yəni $\mathbf{P}_\theta\{X_1-x\}=F(x-\theta)$ qiymətləndirilir. Əgər F – normal paylanmadırsa, onda $\overline{X}=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}X_j$ statistikası asimptotik

effektiv statistikadır; əgər F – Koşi paylanmasıdırsa, onda $\overline{X}$ hətta tutarlı statistika belə olmayacaqdır. Hər iki halda $z^{1/2}$ medianı tutarlıdır və $\sqrt{n}\,(z^{1/2}-\theta)$ fərqi asimptotik normaldır. Lakin F-in normal paylanma olduğu hallarda $\mathbf{M}_\theta\left|\sqrt{n}\,(\overline{X}-\theta)\right|^2=1$, $\mathbf{M}_\theta\left|\sqrt{n}\,(z^{1/2}-\theta)\right|^2=\pi(1+o(1))/2$ olur (misal 2).

Misal 14-də olduğundan daha ümumi, simmetrik paylanmanın mərkəzinin qiymətləndirildiyi halda, kəsik orta qiymətdən (böyük və kiçik müşahidələrin müəyyən hissələri atılır), qaydalı statistikaların xətti kombinasiyalarından, M – *statistik qiymətlərdən* istifadə olunur. Bütün bu statistik qiymətlər, məs., T_n-lər elə olur ki, fərqlər geniş fərziyyələrlə asimptotik normal olur.

7. Klassik A. q. n.-ndə fərz olunur ki, seçim həcmi n-in artmasına baxmayaraq Θ parametrik çoxluğunun dim. – ölçüsü məhduddur. Əslində isə, məs., $\mathbf{M}_\theta\left|\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)\right|^2$ dim. – ölçüdən xətti asılı olur və buna görə də, maksimal doğruyaoxşarlıq metodundan istifadə etdikdə əgər dim. – ölçü – k böyük olarsa, ciddi çətinliklər yaranır. Beləliklə də, seçimin həcmi n ilə birlikdə k dim. – ölçüsü üçün $k=k(n)\to\infty$ münasibəti ödənilərsə, məs., $k(n)/n\to 0$ və ya $k(n)/n\asymp 1$ olarsa, onda A. q. n.-nin yeni məsələləri yaranır.

Ola bilər ki, Θ parametrik çoxluğunun dim. – ölçüsü sonsuzdur. Bu halda qiymətləndirmə məsələləri, mahiyyət etibarilə, *qeyri – parametrik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsinə aid olur. θ üçün tutarlı statistik qiymətlərin təyin olunmasında geniş yayılmış metodlardan biri aşağıdakı kimidir. Θ çoxluğu Θ_ε çoxluğu ilə approksimasiya olunur, belə ki, approksimasiya qaydası $l:\Theta\to\Theta_\varepsilon$ elə seçilir ki, $\operatorname{diam} l^{-1}(\theta_\varepsilon)\le\delta(\varepsilon)\downarrow 0$ münasibəti ödənilsin və approksimaedici çoxluq isə elə olmalıdır ki, onun elementlərinin statistik qiymətləndirilməsi üçün mümkün olduqca sadə həll olsun. Θ_ε-dan olan elementin statistik qiyməti ilkin θ parametrinin statistik qiyməti kimi götürülür. Beləliklə, iki asimptotik məsələ: approksimasiya nəzəriyyəsi və əsl qiymətləndirmə nəzəriyyəsi məsələlərini həll etmək tələb olunur.

Misal 15. (1) müşahidələri üzrə $\mathbb{R}$-də verilmiş X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasının naməlum sıxlıq funksiyası $f(x)$-i qiymətləndirmək tələb olunur; $f\in\Sigma$, Σ isə paylanma sıxlıqlarının verilmiş sinfidir. Approksimaedici Σ çoxluğu kimi $a\int_{-\infty}^{\infty}H(b(x-y))f(y)\,dy$ tipli funksiyalar çoxluğu seçilir; $a=a(n)$, $b=b(n)$, H – münasib surətdə seçilmiş nüvədir. Onda Σ_n-dən olan elementlər $a\int_{-\infty}^{\infty}H(b(x-y))\,dF_n(y)$ (nüvə statistik qiyməti) vasitəsilə qiymətləndirilir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [5] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [6] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [7] Grenander U., Abstract inference, N. Y. – [a. o.], 1981; [8] Le Cam L., Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory, N. Y. – [a. o.], 1986; [9] Lehmann E., Theory of Point Estimation, N. Y. – [a. o.], 1983.

ASİMPTOTİK MEYLSİZ KRİTERİ « асимптотически несмещенный критерий; asymptotically unbiased test » – gücləri mühümlük ölçüsündən asimptotik olaraq kiçik olmayan statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində *statistik kriterilər* ardıcıllığıdır. X_n, – $\theta\in\Theta$ naməlum parametrindən asılı paylanmaya malik n həcmli seçim olsun. X_n seçmi üzrə $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$ alternativinə qarşı $H_1:\theta\in\Theta_0$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur və müxtəlif n qiymətlərində bu hipotezlərin yoxlanılması məsələləri ardıcıllığına baxılır.

Əgər

$$\lim_{n\to\infty}\sup\,[\sup_{\theta\in\Theta_0}\mathbf{M}_{n,\theta}\,\psi_n-\inf_{\theta\in\Theta_1}\mathbf{M}_{n,\theta}\,\psi_n]\le 0$$

münasibəti doğru olarsa, $\{\psi_n\}$ kriterilər ardıcıllığı asimptotik meylsiz kriteri adlanır. A. m. k. anlayışı meylsizlik xassəli statistik prosedurun asimptotik analoqudur.

Əd.: [1] Русас Дж., Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ASİMPTOTİK MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT « асимптотически несмещенная оценка; asymptotically unbiased estimator » – «asimptotik meylsiz statistik qiymətlər ardıcıllığı» termininin qısaldılmış variantıdır; naməlum parametrin elə statistik qiymətləri ardıcıllığı üçün tətbiq olunur ki, bu ardıcıllığa meyllərin sıfra yaxınlaşan ardıcıllığı uyğundur. $\{T_n\}$, – $\theta\in\Theta$ parametrinin statistik qiymətləri ardıcıllığı və $b_n(\theta)=\mathbf{M}_\theta T_n-\theta$, $n=1,2,\ldots$, – T_n statistik qiymətinin meyli olsun. Əgər ixtiyari $\theta\in\Theta$ üçün $n\to\infty$ olduqda $b_n(\theta)\to 0$ münasibəti ödənilərsə, onda $\{T_n\}$, – θ parametrinin asimptotik meylsiz statistik qiymətlər ardıcıllığı adlanır. θ parametrinin meylsiz statistik qiymətlərinin ixtiyari ardıcıllığı bu tərifi ödəyir.

Misal. $X=(X_1,\ldots,X_n)$ – komponentləri $a=\mathbf{M}X_i$, $\sigma^2=\mathbf{D}X_i$ parametrlərli normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan seçim olsun. Onda

$$s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X}_n)^2,\quad \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

düsturları ilə təyin olunan $\{s_n^2\}$ ardıcıllığı σ^2 parametrinin A. m. s. q. ardıcıllığıdır, belə ki, ixtiyari σ^2 üçün X seçiminin həcmi n-i qeyri – məhdud böyük götürdükdə

$$b_n(\sigma^2)=\mathbf{M}s_n^2-\sigma^2=-\sigma^2/n\to 0$$

münasibəti ödənilir.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Воинов В. Г., Никулин М. С., Несмещенные оценки их применения, М., 1989.

ASİMPTOTİK MƏQBULLUQ(ğu) statistik kriterinin **« асимптотическая допустимость** статистического критерия; **asymptotic admissibility** of statistical test **»** – bax, *Məqbulluq*(ğu) statistik kriterinin.

ASİMPTOTİK MİNİMAKS KRİTERİ « асимптотически минимаксный критерий; asymptotically minimax test » – statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində *statistik kriterilər* ardıcıllığıdır, minimaks kriterilər ardıcıllığına asimptotik ekvivalentdir. X_n, – $\theta \in \Theta$ naməlum parametrindən asılı paylanmaya malik n həcmli müşahidə olunan təsadüfi seçim olsun. Müxtəlif n -lər üçün irəli sürülən hipotezləri yoxlama məsələləri ardıcıllığına baxılır: X_n seçimi üzrə $H_1 : \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır (bu hipotezlər, ümumiyyətlə, n -in artması ilə dəyişə bilər). $\varphi_n(X_n)$, – X_n seçimi üzrə qurulmuş α_n hüdudlu minimaks kriteri olsun. Əgər $n \to \infty$ olduqda $\alpha_n \to \alpha$ və

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta \in \Theta_1} \left| \mathbf{M}_{n,\theta} \psi_n(X_n) - \mathbf{M}_{n,\theta} \varphi_n(X_n) \right| = 0 \qquad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\psi_n(X_n)\}$ kriterilər ardıcıllığı asimptotik minimaks kriteri təşkil edir, deyilir. (*) şərti

$$\lim_{n\to\infty} \left| \inf_{\theta \in \Theta_1} \mathbf{M}_{n,\theta} \psi_n(X_n) - \sup_{\{\varphi_n\} \in K_\alpha} \inf_{\theta \in \Theta_1} \mathbf{M}_{n,\theta} \varphi_n(X_n) \right| = 0$$

şərti ilə əvəz olunduğu halda A. m. k. üçün digər təriflər də mövcuddur, burada

$$K_\alpha = \{\{\varphi_n\} : \liminf_{n\to\infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{M}_{n,\theta}\, \varphi_n(X_n) \le \alpha\}.$$

Mürəkkəb hipotezləri yoxlama məsələsində kifayət qədər geniş şərtlərlə A. m. k. *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisidir.*

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Боровков А. А., Саханенко А. И., в сб.: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы, Новосиб., 1982, с. 79–90.

ASİMPTOTİK MİNİMAKS STATİSTİK QİYMƏT « асимптотически минимаксная оценка; asymptotically minimax estimator » – parametrin elə *statistik qiymətidir ki*, bütün statistik qiymətlər sinfində riskin maksimumunun limiti müvafiq normalanmada minimaldır. θ_n, – n həcmli seçim üzrə qurulmuş, $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ çoxluğundan olan, naməlum θ parametrinin statistik qiyməti olsun. Əgər

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{M}_\theta [\sqrt{n}(\theta_n - \theta)]^2 \le$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{M}_\theta [\sqrt{n}(\theta_n^* - \theta)]^2$$

münasibəti digər θ_n^* statistik qiyməti üçün ödənilərsə, onda θ_n statistik qiyməti Θ çoxluğunda asimptotik minimaks statistik qiymət adlanır. Maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri geniş requlyarlıq xassəsinə malik olur. Asimptotik minimakslıq anlayışının müxtəlif ümumiləşmələri vardır, məs., vektor parametr üçün və ardıcıl analizdə.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Wald A., в кн.: «Proc. 2-th Berkeley symp. math. statist. probab.», Berk., 1951, p. 1–11.

ASİMPTOTİK MÜNTƏZƏM ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « асимптотически равномерно наиболее мощный критерий; asymptotically uniformly most powerful test » – statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində bütün alternativ hipotezlər üçün eyni zamanda *asimptotik ən güclü kriteri* olan *statistik kriterilər* ardıcıllığıdır. A. m. ə. g. k. üçün verilən asimptotik ən güclü kriterinin tərifi

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{M}_{n,\theta_1} (\varphi_n - \psi_n) \le 0$$

münasibətinin

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\theta_1 \in \Theta_1} \mathbf{M}_{n,\theta_1} (\varphi_n - \psi_n) \le 0$$

münasibətilə əvəz olunmasından alınır.

ASİMPTOTİK MÜNTƏZƏM PAYLANMA « асимптотически равномерное распределение; asymptotically uniform distribution » – *müntəzəm paylanma* anlayışını ümumiləşdirən anlayışdır. $U = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ – yalnız tam qiymətlər alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ olsun. Əgər ixtiyari tam müsbət h üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{S_n = j \bmod h\} = 1/h,$$

$$j = 0, 1, \dots, h-1$$

bərabərliyi ödənilərsə, U ardıcıllığına asimptotik müntəzəm paylanmış ardıcıllıq deyilir.

$\mathfrak{A}$, – U ardıcıllıqlarının elə çoxluğu olsun ki, bu ardıcıllıqlardan onları təşkil edən təsadüfi kəmiyyətlərin sonlu saydasını atdıqda və ya onları dəyişdikdə o, A. m. p. xassəsini ya itirmir və ya ona malik olmur. $U \in \mathfrak{A}$ ardıcıllığının asimptotik müntəzəm paylanan ardıcıllıq olması üçün tam ədədlər şəbəkəsinin ixtiyari $L_{ah} = \{m : m = a + kh\}$ alt şəbəkəsi üçün

$$\sum_k \min\{\mathbf{P}(\xi_k \notin L_{ah}) : 0 \le a \le h-1\} = \infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir (bax, [1]). S_n cəmlərinin xarakteristik funksiyaları terminlərilə A. m. p.-ya malikolma kriterisi $n \to \infty$ olduqda $f_n(2\pi r/h) \to 0$ limit münasibətinin ödənilməsidir, burada h – qeyd olunmuş tam müsbət ədəd, $r = 0, 1, \dots, h-1$ (bax, [4]). S_n cəmlərinin A. m. p.-ya malik olması lokal limit teoreminin doğruluğu üçün zəruri şərtdir (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Прохоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, № 4, с. 535–38; [3] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [4] Dvoretzky A., Wolfowitz J., «Duke Math. J.», 1951, v. 18, p. 501–07.

ASİMPTOTİK NİSBİ EFFEKTİVLİK Bahadura görə « **асимптотическая относительная эффективность** по Бахадуру; Bahadur **asymptotic relative efficiency** » – bax, A*simptotik effektivlik*(yi) kriterinin.

ASİMPTOTİK NİSBİ EFFEKTİVLİK Hoces–Lemana görə « **асимптотическая относительная эффективность** по Ходжесу–Леману; Hodges–Lehmann **asymptotic relative efficiency** » – bax, A*simptotik effektivlik*(yi) kriterinin.

ASİMPTOTİK NİSBİ EFFEKTİVLİK Pitmənə görə « **асимптотическая относительная эффективность** по Питмену; Pitman **asymptotic relative efficiency** » – bax, A*simptotik effektivlik*(yi) kriterinin.

ASİMPTOTİK NORMAL ARDICILLIQ « **асимптотически нормальная последовательность; asymptotically normal sequence** » – riyazi gözləməsi a-ya bərabər, dispersiyası σ^2 $(0 < \sigma^2 < \infty)$ olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin S_n cəmi üçün mərkəzlənmiş və normalanmış S_n^* təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $\mathbf{P}\{S_n^* < x\}$-in $n \to \infty$ olduqda x-ə görə $(-\infty < x < \infty)$ $\Phi(x)$ müntəzəm yığılması təmin olunan $\{S_n^*\}$ ardıcıllığıdır, burada $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$.

$$S_n^* = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}},$$

$\Phi(x)$, – $(0,1)$ parametrlərli normal qanunun paylanma funksiyasıdır. Bu halda S_n^* təsadüfi kəmiyyətləri asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

$\{\xi_n\}$ asılı olmayan, lakin ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər (eyni qanunla paylanması şərt deyil) ardıcıllığı olsun. $\{\widetilde{S}_n\}$ ardıcıllığının asimptotik normallığı üçün aşağıdakı şərtin ödənilməsi kafidir:

ixtiyari $\tau > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$L_n(\tau) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}((\xi_k - a_k)^2; \left|\xi_k - a_k\right| > \tau B_n) \to 0,$$

burada $\mathbf{M}\xi_k = a_k$, $\mathbf{D}\xi_k = \sigma_k^2$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, $\widetilde{S}_n = \frac{S_n - \sum_{k=1}^{n} a_k}{B_n}$.

Əd.: [1] Боровков А. А., Курс теории вероятностей, М., 1972.

ASİMPTOTİK NORMAL ÇEVİRMƏ « **асимптотически нормальное преобразование; asymptotically normal transformation** » – *təsadüfi kəmiyyətlərin* normal qanuna daha yaxşı yaxınlaşmasını təmin edən çevirmədir. $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{X_n < x\} = F_n(x) \to \Phi(x)$$

olsun, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. $u_n(X_n)$-in paylanmasının X_n-in paylanması ilə müqayisədə normal paylanmaya «daha yaxın» olması xassəsinə malik, olduqca sadə $u_n(x)$ funksiyalarını tapmaq üçün $F_n(x)$ funksiyasının

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x)\sum_{k=1}^{r} P_k(x)\, n^{-1/2} + O(n^{-(r+1)/2})$$

asimptotik ayrılışına baxılır,

$$\varphi(x) = \Phi'(x),$$

burada $P_k(x)$, – x-ə görə çoxhədlilərdir, sonra isə bu ayrılışın çevirməsi –

$$y(x) = \Phi^{-1}[F_n(x)] = x + \sum_{k=1}^{r} Q_k(x) n^{-k/2} + O(n^{-(r+1)/2})$$

funksiyası qurulur (bu ayrılışların doğruluğu üçün şərtlər [1] və [2]-də verilmişdir). Əgər

$$u_n(x) = x + \sum_{k=1}^{r} Q_k(x)\, n^{-k/2} + O(n^{-(r+1)/2})$$

götürülərsə, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{u_n(X_n) < x\} = \Phi(x) + O(n^{-(r+1)/2})$$

olur. A. n. ç.-yə misal – *Vilson – Hilferti çevirməsidir.*

Əd.: [1] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, № 2, с. 136–49; [2] Wazow W., «Proceeding of symposia in applied mathematics», 1956, v. 6, p. 251–59.

ASİMPTOTİK NORMAL STATİSTİK QİYMƏT « **асимптотически нормальная оценка; asymptotically normal estimator** » – parametrin elə *statistik qiymətidir* ki, bu statistik qiymətin paylanması müvafiq normalanmadan sonra seçimin həcmi artdıqca normal paylanmaya yaxınlaşır. Məs., $X_1,...,X_n$ – elementləri $\mathbf{M}X_i = \theta$, $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$, $\mathbf{M}X_i^4 < \infty$ şərtlərini ödəyən seçim olsun. Onda $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ seçimi ortası və $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ seçimi dispersiyası θ və σ^2 parametrlərinin A. n. s. q.-ləridir. Bu nəticə o faktdan irəli gəlir ki, $\{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \theta),\ \sqrt{n}\,(s^2 - \sigma^2)\}$ ikiölçülü təsadüfi vektoru asimptotik olaraq ikiölçülü normal paylanmaya tabedir və bu paylanmanın orta qiymətlər vektoru sıfır vektordur, ikinci momentlər matrisi isə

$$\begin{Vmatrix} \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_3 & \mu_4 - \mu_2^2 \end{Vmatrix}$$

şəklindədir, burada $\mu_k = \mathbf{M}(X_i - \theta)^k$.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

***ASİMPTOTİK NORMAL TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « асимптотически нормальные случайные величины; asymptotically normal random variables »** – bax, *Asimptotik normal ardıcıllıq.*

***ASİMPTOTİK NORMALLIQ « асимптотическая нормальность; asymptotic normality »** – bax, *Asimptotik normal ardıcıllıq.*

ASİMPTOTİK OPTİMAL KRİTERİ « асимптотически оптимальный критерий; asymptotically optimal test » – statistik hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələsində həllin effektivliyini xarakterizə edən hər hansı funksionala baxılan sinifdə ekstremum təmin edən *statistik kriterilər* ardıcıllığıdır. A. o. k. hipotezləri yoxlama məsələsində tətbiq olunan asimptotik optimal prosedurun xüsusi bir halıdır. A. o. k. anlayışı hər bir konkret halda dəqiqləşdirilməlidir: məhz hansı asimptotik optimallığın nəzərdə tutulduğu aydın olmalıdır. A. o. k.-yə konkret misallar: *asimptotik Beyes kriterisi*, *asimptotik müntəzəm ən güclü kriteri*, *asimptotik minimaks kriteri* və b.

ASİMPTOTİK PİRSON ÇEVİRMƏSİ « асимптотически пирсоновское преобразование; asymptotic Pearson transformation » – təsadüfi kəmiyyətlərin çevirməsidir, *Pirson paylanmaları* ailəsindən olan limit paylanmasına yığılmanı yaxşılaşdırmaq üçün tətbiq olunur. A. P. ç. *asimptotik normal çevirmənin* ümumiləşməsidir. $t \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{X < x\} = F(x,\ t) \to \Phi(x)$$

olduğu fərz olunur; $\Phi(x)$ – Pirson əyriləri ailəsindən paylanma funksiyasıdır. X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası üzərinə bəzi requlyarlıq şərtlərində $F(x,t)$ funksiyasının ayrılışını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$F(x,t) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=1}^{r} P_k(x)\, t^k + O(t^{r+1}),$$

burada $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $P_k(x)$ – müəyyən çoxhədlilərdir. Sonra isə bu ayrılışın çevirməsini almaq olar, yəni:

$$y(x) = \Phi^{-1}[F(x,t)] = y_r(x) + O(t^{r+1}),$$

$$y_r(x) = x + \sum_{k=1}^{r} S_k(x)\, t^k .$$

Belə ki, əgər $u_r(x) = y_r(x) + O(t^{r+1})$ olarsa, onda $t \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{u_r(X) < x\} = \Phi(x) + O(t^{r+1}).$$

Məs., əgər X təsadüfi kəmiyyətinin paylanması – (p, q) parametrlərli beta – paylanmadırsa, $t = 1/q \to 0$, $p = \text{const}$ olarsa, onda

$$F(x,t) = I(x,\ p) + O(t)$$

olur, burada $I(x,\ p)$, – p parametrli qamma – paylanma funksiyasıdır. Əgər

$$u_1(x) = x/[1 - s(x + p - 1)],$$
$$s = t/[2 + t(p-1)]$$

olarsa, onda $s \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{u_1(X) < x\} = I(x,\ p) + O(s^2).$$

Ədd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, № 2, с. 129–55; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

ASİMPTOTİK PLAN « асимптотический план; asymptotic design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

ASİMPTOTİK SIXLIQ(ğı) çoxluğun **« асимптотическая плотность** множества; **asymptotic density** of a set **»** – bax, *Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsi.*

ASİNXRON ÇOXGİRİŞLİ KANAL « асинхронный канал множественного доступа; asynchronous channel of multiple access » – bax, *Çoxgirişli kanal.*

ASİNXRON KANAL « асинхронный канал; asynchronous channel » – bax, *Çoxgirişli kanal.*

ASSOSİYALANMIŞ SPEKTRİ, PROSESİN « ассоциированный спектр процесса; assosiated spectrum of a process » – bax, *Ortalanmış spektral funksiya.*

ASTA DƏYİŞƏN FUNKSİYA « медленно меняющаяся функция; slowly changing function » – bax, *Düzgün dəyişən funksiya*.

AŞAĞI DƏYƏRİ (QİYMƏTİ), OYUNUN « нижняя цена игры; lower value of a game » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin.*

AŞAĞI ETİBARLI SƏRHƏD « нижняя доверительная граница; lower confidence bound » – bax, *Etibarlı zolaq.*

***AŞAĞI KVARTİL « нижняя квартиль; lower quartiler »** – $p = \frac{1}{4}$ qiymətinə uyğun kvantildir. Bax, *Kvantil*.

AŞAĞI LİMİT(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının **« нижний предел** последовательности случайных событий; **lower limit** of sequence of random events **»** – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən $A_1, A_2, \ldots$ hadisələrindən, yalnız və yalnız, sonlu saydasından başqa bütün (sonsuz sayda) hadisələr baş verdikdə baş verən hadisədir; $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, Ω – eksperimentin uyğun *elementar hadisələr fəzasıdır*. A_* ilə işarə olunan bu hadisə $\{A_n\}$ hadisələr ardıcıllığının aşağı limiti adlanır və bu limit $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ kimi işarə olunur. A_* hadisəsi üçün

$$A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

bərabərliyi doğrudur. Bu hadisə, yalnız və yalnız, o vaxt baş verə bilər ki, ya $\{A_n\}$ ardıcıllığının hər hansı sonlu saylı hadisəsindən sonra gələn bütün hadisələr (sonsuz sayda) baş versin və ya sonlu sayda hadisəsindən başqa bütün hadisələr baş versin.

Əgər

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1}, ...$$

olarsa, yəni $\{A_n\}$ *monoton artan hadisələr ardıcıllığı* olarsa,

$$A_* = \varinjlim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

AŞAĞI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının **« нижняя граница** последовательности случайных событий; **lower boundary** of sequence of random events **»** – bax, *Kəsişmə*(si) / *hasil*(i) təsadüfi hadisələrin.

AŞAĞI SƏRHƏD FUNKSİONALI « нижний граничный функционал; lower boundary functional » – bax, *Faktorizasion eyniliklər.*

AŞKARLANMA MƏSƏLƏSİ, POZULMANIN « обнаружения разладки задача; changepoint problem » – təsadüfi proseslərin ehtimali xarakteristikalarının dəyişdiyi anın təyin olunmasıdır (bu və ya başqa mənada optimal). Adətən, məsələnin iki qoyuluşu fərqləndirilir – ardıcıl və aposterior (retrospektiv). Birinci halda fərz olunur ki, müşahidə olunan $\zeta = (\zeta_t), \ t \geq 0$ prosesi aşağıdakı şəkildədir:

$$\zeta_t = \begin{cases} \zeta_t^{(1)}, & t < \theta, \\ \zeta_t^{(2)}, & t \geq \theta, \end{cases}$$

burada θ – təsadüfi an (pozulma anı) olub, $\zeta^{(1)}$ prosesinin $\zeta^{(2)}$ prosesinə çevrilməsini xarakterizə edir. Əgər τ dayanma anı olarsa [$(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən, $\mathscr{A}_t = \sigma(\zeta_s, s \leq t)$], onda $\alpha = \mathbf{P}\{\tau < \theta\}$ kəmiyyəti yanlış həyəcan ehtimalını xarakterizə edir, məs., $R(\tau) = \mathbf{M}(\tau - \theta \,|\, \tau \geq 0)$ kəmiyyəti – həyəcan siqnalı t-nin düzgün verilməsi, yəni θ anından sonra gecikmə vaxtının və pozulmanın aşkarlanmasının xarakteristikası ola bilər. Olduqca geniş hallar sinfində gecikmə vaxtının $R(\tau^*) = \inf R(\tau)$ minimumunu təmin edən $\tau_a^* \in \{\tau : \mathbf{P}\{\tau < \theta\} \leq a\}$ qaydalarının tapılması haqqında məsələ olduqca ətraflı öyrənilmişdir (bax, [1]), burada infimum $\{\tau : \mathbf{P}(\tau < \theta) \leq a\}$ sinfi üzrə götürülür.

Aposterior qoyuluşda fərz olunur ki, bütün $\zeta_t, \ t \leq T$ müşahidələri verilmişdir və hipotezlərin yoxlanılması ($\theta \leq T$ və ya $\theta > T$), θ parametrinin qiymətləndirilməsi və s. tipli problemləri həll etmək tələb olunur. Əslinə qaldıqda, bu məsələlər sinfi statistik nəticələr nəzəriyyəsinin klassik məsələləri sinfinə aiddir (bax, [2]).

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [2] Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В., Ширяев А. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1988, т. 182, № 5, с. 4–23.

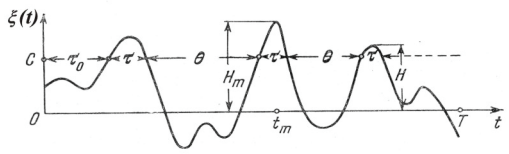
AŞMA « выброс положительный; positive outlier » – bax, *Aşma – enməsi*, *təsadüfi proses və meydanın*.

AŞMA – ENMƏ « выброс; outlier » – bax, *Aşma – enməsi*, *təsadüfi proses və meydanın*.

AŞMA – ENMƏ MÜDDƏTİ « длительность выброса; length of outlier » – bax, *Aşma – enməsi*, *təsadüfi proses və meydanın*.

AŞMA – ENMƏSİ, TƏSADÜFİ PROSES VƏ MEYDANIN « выброс случайного процесса и поля; excursion of a random process and field » – təsadüfi proses və ya təsadüfi meydanın *seçimi funksiyasının* (realizasiyasının) parametrlər fəzası ilə faza fəzasının düz hasilinin müəyyən bir seçilmiş oblastından kənarda yerləşən hissəsidir. $\zeta(t), \quad t = (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{R}^N$ həqiqi təsadüfi funksiyası üçün ($N = 1$ olduqda təsadüfi proses, $N \geq 2$ olduqda təsadüfi meydan) u səddini aşma – enmələr $\zeta(t)$ seçimi funksiyasının $A_u^+(\zeta) = \{t \in \mathbb{R}^N : \zeta(t) \geq u\}$ çoxluğunun əlaqə komponentlərinə uyğun hissələri kimi təyin olunur. T. p. və m. a. – e.-nin öyrənilməsi təsadüfi *nöqtəvi proseslərin* çıxışlarının, lokal ekstremumlarının, bliklərinin və s.-nin araşdırılması ilə sıx bağlıdır (bax, [1] – [3]).

$\{\zeta(t), \ t \in (0, T)\}$ təsadüfi prosesinin T müddəti ərzində realizasiyası aşağıda şəkildə verilmişdir. Bütün fiziki real təsadüfi



Şəkil. Stasionar təsadüfi prosesin realizasiyası

proseslər zamanın kəsilməz funksiyalarıdır. Belə funksiyalar sonlu T intervalında sonlu sayda müxtəlif H qiymətlərli maksimum və minimumlara malikdir və t_m anında realizasiya ən böyük (mütləq) maksimum H_m qiymətini alır.

$\zeta(t)$ realizasiyası qeyd olunmuş C səddini və ya verilmiş $c(t)$ əyrisini aşağıdan yuxarıya (müsbət törəmə ilə) bir neçə dəfə kəsə bilər, belə ki, τ_0 anında realizasiya bu səddi ilk dəfə aşır (yəni C səddinə ilk dəfə τ_0 anında aşağıdan çatılır).

$\zeta(t)$ təsadüfi prosesi C səddini aşağıdan yuxarıya kəsdiyi halda aşma, yuxarıdan aşağıya kəsdiyi halda enmə baş vermişdir, deyilir. Beləliklə, $(0, T)$ intervalında $\zeta(t)$ realizasiyasının C səddini aşmalarının sayı (enmələrinin sayı) n-ə bərabərdir (şəkildə aşmaların sayı üçə bərabərdir); şəkildə göstərilən τ və θ kəmiyyətləri, uyğun olaraq, aşma və enmədə qalma müddətləri adlanır. θ kəmiyyəti bəzən enmə və aşma arasındakı intervalın uzunluğu (qalma müddəti) da adlandırılır.

τ, θ və H kəmiyyətləri bir realizasiya üçün C səddi və T intervalından asılı olaraq, bir neçə qiymət ala bilir və n, τ_0 və H_m kəmiyyətlərilə birgə bir realizasiyadan digər realizasiyaya keçdikdə təsadüfi qaydada dəyişirlər.

Bundan başqa n, τ, θ, τ_0, H, H_m təsadüfi kəmiyyətlərinin statistik xarakteristikaları özü-özlüyündə təsadüfi prosesin detal xarakteristikaları kimi maraqlıdır və bunlar bir çox praktiki

məsələlərin həllində mühüm rol oynayır. Məs., n, θ və H kəmiyyətləri müəyyən şərtlər ödənildikdə radioverilişlərinin kəsilmələrinin mühüm xarakteristikalarıdır. Kosmik uçuş aparatları ilə radioəlaqədə darzolaqlı təsadüfi siqnal üçün n kəmiyyəti – kəsilmələrin (f e y d i n q l ə r i n) tezliyini, θ – müəyyən bir həddən aşağıda feydinqlərin uzunluğunu (müddəti) və H isə feydinqlərin dərinliyini ifadə edir.

n, H və H_m təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları ekstremal tənzimləmə sistemlərinin analizində (bax, [4]) və s. məsələlərdə istifadə olunur. Xüsusi halda, müəyyən bir intervalda baxılan təsadüfi prosesin realizasiyalarında H_m -in ən böyük qiymətlərinin ehtimalının sıxlıq funksiyası vasitəsilə siqnalın parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün əsas statistik kriterilərdən biri – maksimal doğruyaoxşarlıq metodunun tətbiq olunma oblastını müəyyən etmək olur (bax, [5], [6]).

$\{\zeta(t),\ t\in\mathbb{R}^N\}$ – vahid ehtimalla iki dəfə kəsilməz differensiallanan seçimi funksiyalara malik, $\mathbf{M}\zeta(0)=0$, $B(s)=\mathbf{M}\zeta(t)\,\zeta(t+s)$, $s,t\in\mathbb{R}^N$ şərtlərilə təyin olunan həqiqi bircins erqodik Qauss meydanı olsun. Belə meydan üçün u səddini tipik aşma – enmənin quruluşunu öyrənmək mümkündür və $u\to\infty$ olduqda isə aşma – enmənin xarakteristikalarının asimptotik paylanmalarını tapmaq olur. H_u, V_u, S_u – uyğun olaraq, $\zeta(t)$ təsadüfi meydanın u həddini aşma hündürlüyü, $(N+1)$ – ölçülü həcm və $\zeta(t)$ təsadüfi meydanının u səddini tipik aşması (enməsi) və $g(t)=u$ hiper – müstəvisi ilə hüdudlanmış, $(N+1)$ – ölçülü cismin oturacağının N – ölçülü həcmi olsun. $\zeta_i(t)=\partial\zeta(t)/\partial t_i$, $i=1,...,N$, $\zeta_{ij}(t)=\partial^2\zeta(t)/\partial t_i\,\partial t_j$, $1\le i,\ j\le N$ olsun. İxtiyari k sayda üst-üstə düşməyən $t^{(1)},...,t^{(k)}$, $k=1,2,...$ nöqtələri üçün $\zeta(t^{(s)})$, $\zeta_i(t^{(s)})$, $i=1,...,N$, $\zeta_{ij}(t^{(s)})$, $1\le i\le j\le N$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanması cırlaşmayan paylanma olsun. $B(t)$ kovariasion funksiyasının isə $|t|<H_0$, $H_0>0$ olduğu halda

$$\left|\frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_1^{n_1}...\partial t_N^{n_N}}-\frac{\partial^4 B(0)}{\partial t_1^{n_1}...\partial t_N^{n_N}}\right|<\frac{A}{\left|\ln|t|\right|^{1+\varepsilon}},\quad A>0,\ \varepsilon>0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} n_i=4,\quad n_i=0,1,...,4,\quad i=1,...,N$$

şərtini ödədiyi fərz olunur. Onda (bax, [8])

$$\lim_{u\to\infty}\widetilde{\mathbf{P}}_u\{uH_u>\upsilon\}=\lim_{u\to\infty}\widetilde{\mathbf{P}}_u\{\gamma u^2 S_u^{2/N}>\upsilon\}=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\widetilde{\mathbf{P}}_u\{\varkappa u^{2-2/(N+2)}V_u^{2/(N+2)}>\upsilon\}=e^{-\upsilon/B(0)},\ \upsilon\ge 0.$$

Burada

$$\gamma^N=(2\pi B(0))^{-N}\Gamma^2(N/2+1)\det\Lambda^{(1)},\ \gamma>0,$$

$$\varkappa^{N+2}=(2\pi B(0))^{-N}\Gamma^2(N/2+2)\det\Lambda^{(1)},\ \varkappa>0,$$

$$\Lambda^{(1)}=(\mathbf{M}\zeta_i(0)\,\zeta_j(0))_{1\le i,\ j\le N},$$

burada $\Gamma(z)$ – qamma funksiyadır, $\widetilde{\mathbf{P}}_u$, – $\zeta(t)$ təsadüfi meydanının u səddini tipik aşma – enməsinə uyğun ehtimal ölçüsü («üfiqi pəncərə» ölçüsü) olub, $\zeta(t)$ meydanının u səddini aşan lokal maksimumlarının nöqtəvi təsadüfi prosesi üzrə Palm paylanmasıdır. $\widetilde{\mathbf{P}}_u$ əvəzinə digər ehtimal ölçüləri istifadə olunduğu hallarda analoji nəticələr alınır (bax, [9]). Bir sıra hallarda (bax, [10]) göstərilən $(N+1)$ – ölçülü cismin səthinin sahəsi və onun oturacağının səthinin sahəsi ilə bağlı funksionalların asimptotik paylanmaları tapılmışdır.

$N=1$ olduğu halda qeyd olunan düsturlarla $\{\zeta(t),\ t\in\mathbb{R}^1\}$ stasionar erqodik Qauss təsadüfi prosesinin u səddini tipik aşma – enməsinin H_u hündürlüyünün, S_u müddətinin və V_u sahəsinin kəmiyyətləri asimptotik təyin olunur ($\mathbf{M}\zeta(t)=0$); belə ki, bu düsturlar təsadüfi prosesin seçimi funksiyası üzərinə qoyulan iki dəfə kəsilməz differensiallananlıq şərtinin ödənilmədiyi hal üçün də doğrudur.

$\widetilde{\mathbf{P}}_u$ ölçüsü əvəzinə u səddindən çıxışların təsadüfi nöqtəvi prosesi üzrə Palm paylanmasını götürmək və təsadüfi prosesin kovariasion funksiyasının, $|t|<H_0$, $H_0>0$ olduqda

$$\left|B''(t)-B''(0)\right|<A\Big/\left|\ln|t|\right|^{1+\varepsilon},\quad A>0,\ \varepsilon>0$$

şərtini ödəməsini tələb etmək kifayətdir (bax, [11]).

$\hat{\zeta}(t)$, – $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin Hilbert çevirməsi olsun; $Y(t)=(\zeta(t),\hat{\zeta}(t))$ – ikiölçülü vektor təsadüfi prosesinin $y_1^2+y_2^2<u^2$ dairəsindən çıxışlarının araşdırılması $\zeta(t)$ prosesinin qurşayıcısının (bax, *Təsadüfi proses*; k ə s i l m ə l ə r) $\zeta(t)$ üzərinə qoyulan şərtlərdə hündürlüyünün, aşma – enmə müddətinin, aşma – enmə sahəsinin asimptotik paylanmalarını tapmağa imkan verir (bax, [11]).

$D\in\mathbb{R}^N$ oblastında $\zeta(t)$, $t\in\mathbb{R}^N$ təsadüfi meydanının aşma – enmələri sayı haqqında məsələ olduqca mürəkkəbdir; aşma – enmələr sayı – $A_u^+(\zeta)\cap\overline{D}$ çoxluğunun əlaqəli komponentləri sayı $N^+(D)$ kimi təyin olunur, burada $\overline{D}=D\cup\Gamma$, $\Gamma=\partial D$, – D oblastının sərhədidir. $\zeta(t)$ – sanki yəqin üç dəfə kəsilməz differensiallanan seçimi funksiyaları olan bircins Qauss meydanı olduğu halda, $N=2$ olduqda, $N_u^+(D)$ üçün yuxarıdan və aşağıdan qiymətləri tapmaq mümkün olmuşdur (bax, [12]).

Qauss təsadüfi meydanları və bunlarla bağlı, sanki iki dəfə kəsilməz differensiallanan seçimi funksiyaları olan $\zeta(t)$, $t\in\mathbb{R}^N$ təsadüfi meydanları üçün $A_u^+(\zeta)\cap I_0$ ($I_0=[0,1]^n$) çoxluğunun bəzi inteqro – həndəsi və differensial – topoloji xarakteristikalarının orta qiymətləri üçün düsturlar alınmışdır (bax, [3]). Belə meydanlar üçün $N=2$ olduqda u səddinin izoxətlərinin strukturu da araşdırılmışdır. Qauss halında, $[0,T]^2$ kvadratında, $T\to\infty$ olduqda izoxətlərin toplam uzunluğunun asimptotik normallığı haqqında teorem isbat olunmuşdur (bax, [13]).

Qeyri – hamar realizasiyalarlı təsadüfi meydanlar üçün $A_u^+(\zeta)$ çoxluqları olduqca mürəkkəb struktura malikdirlər. Belə

meydanların bəzi sinifləri üçün $A_u(\zeta) = \{t : \zeta(t) = u\}$ sədli Hausdorf çoxluğunun dim. – ölçüsü araşdırılmışdır (bax, [3]). Belə təsadüfi meydanların sədd çoxluqlarının seyrəldilmə sxemi (bax, [14]) təklif olunmuşdur; bu sxem meydanın u səddindən kənara aşma – enmələrini (bunlar a ş m a – e n m ə l ə r i n A – n ö q t ə l ə r i adlandırılır) müəyyənləşdirir, bu aşma–enmələr müsbət uzunluqlu intervallarla bölünmüş olur. Olduqca geniş şərtlərlə (bax, [15]), bircins Qauss təsadüfi meydanının u səddini aşma – enmələrinin A – nöqtələrinin nöqtəvi təsadüfi prosesi $u \uparrow \infty$ olduqda paylanma üzrə (razılaşdırılmış zaman miqyasında, I_0 kubunda, A – nöqtələrin orta sayını sabit saxlayan) stasionar Puasson nöqtəvi prosesinə yığılır.

Fiziki tətbiqlər üçün mühüm sızma haqqında məsələ ilə sıx bağlı, $A_u(\zeta)$ və $A_u^+(\zeta)$ çoxluqlarının qeyri – məhdud əlaqəli komponentlərinin varlığı haqqında məsələyə baxılmışdır (bax, [16]).

Əd.: [1] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные процессы, пер. с англ., М., 1969; [2] Б е л я е в Ю. К., Новые результаты и обобщения задач типа пересечений, в кн. [1], с. 341–78; [3] A d l e r R. J., The geometry of random fields, N. Y., 1981; [4] М о р о с а н о в И. С., Релейные экстремальные системы, М., 1964; [5] В у д в о р д Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, пер. с англ., М., 1955; [6] Т и х о н о в В. И., К у л и к о в Е., Распределение выбросов и максимумов флуктуаций. Радиотехника 17. № 2, 1962; [7] Н о с к о В. П., в сб.: Тезисы докладов IV Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, т. 2, Вильнюс, 1985, с. 269–71; [8] Н о с к о В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 4, с. 722–33; [9] W i l s o n R. J., «Adv. Appl. Probab.», 1988, v. 20, p. 756–74; [10] Н о с к о В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1990, т. 35, в. 1, с. 148–53; [11] Б е л я е в Ю. К., Н о с к о В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 2, с. 302–14; [12] Н о с к о В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 592–96; [13] М а л е в и ч Т. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 3, с. 501–13; [14] Б е л я е в Ю. К., П и т е р б а р г В. И., в кн.: Выбросы случайный полей, М., 1972, с. 62–89; [15] П и т е р б а р г В. И., в кн.: Выбросы случайный полей, М., 1972, с. 90–118; [16] М о л ч а н о в С. А., С т е п а н о в А. К., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 2, с. 294–97; [17] П и т е р б а р г В. И., в кн.: Итоги науки и техники, Теория вероятностей, Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99; [18] Т и х о н о в В. И., Выбросы случайных процессов, М., 1970.

* **ATOM « атом; atom »** – ehtimal nəzəriyyəsində ehtimalı sıfırdan fərqli yeganə x nöqtəsindən ibarət çoxluğa deyilir.

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – *ehtimal fəzası*, $F(x)$ – paylanma funksiyası olsun. Hər hansı bir $A \in \mathscr{F}$ üçün $F\{\overline{A}\} = 0$ olarsa, F paylanması A çoxluğunda topalanmışdır, deyilir, $F\{\overline{A}\}$, – $\overline{A}$ çoxluğunun və ya intervalının funksiyasıdır (ölçüsüdür).

Özünün atomları çoxluğunda topalanmış paylanmaya a t o m i k p a y l a n m a deyilir.

M i s a l. $(0,1)$ parçasındakı rasional ədədləri $r_1, r_2, \ldots$ ardıcıllığı kimi elə yerləşdirmək olar ki, r_i-nin indeksi onun məxrəcinin atomları ilə artmasın.

Hər bir $r_k \in [0,1]$ nöqtəsinə 2^{-k} ehtimalı qarşı qoyularsa, F atomik paylanmadır, lakin $[0,1]$ parçasının bütün nöqtələri F-in artım nöqtələridir. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $F(x)$ – paylanma funksiyası olsun. Hər hansı bir $\varepsilon > 0$ üçün $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$ olarsa, x nöqtəsinə $F(x)$-in *artım nöqtəsi* deyilir. Atom nöqtələrinin sayı hesabi saydan artıq deyildir.

Atomları olmayan paylanma *kəsilməz paylanma* adlanır.

$a_1, a_2, \ldots$ – çəkiləri (ehtimalları) uyğun olaraq $p_1, p_2, \ldots,$ olan atomlar, $p = \sum p_k$, $F_a(x) = \frac{1}{p} \sum_{a_k \le x} p_k$ olsun; a_k-lar $(-\infty, x]$ intervalındandır. $F_a(x)$ funksiyası paylanma funksiyası olub, F-in *atomik komponenti* adlanır. Əgər $p = 1$ olarsa, F atomik paylanmadır. $p < 1$ olduqda, $[F - pF_a]/q = F_c$ kəsilməz paylanma funksiyasıdır; $q = 1 - p$. Bu halda

$$F = pF_a + qF_c \qquad (*)$$

paylanma funksiyası atomik F_a və kəsilməz F_c paylanma funksiyalarının xətti kombinasiyasıdır. Əgər F atomik paylanmadırsa, onda $p = 1$ və bu halda F_c-ni ixtiyari kəsilməz paylanma funksiyası götürmək olar. Əgər paylanmanın atomları yoxdursa, (*)-da $p = 0$ olacaqdır. Bu fakt özünü Jordan ayrılışı teoremində ehtiva edir; hər bir ehtimal paylanması atomik və kəsilməz paylanmaların (*) tipli qarışığıdır, $p \ge 0$, $q \ge 0$, $p + q = 1$.

Bax, *Atomik paylanma*.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1969.

* **ATOMİK KOMPONENT « атомическая компонента; atomic component »** – bax, *Atom.*

ATOMİK ÖLÇÜ « атомическая мера; atomic measure », s ı r f a t o m i k ö l ç ü, a t o m i k p a y l a n m a, – ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında aşağıdakı xassəni ödəyən *ehtimal ölçüsü* μ-dür: elə $\Omega = (\bigcup \Omega_i) \bigcup \Omega'$ sonlu və ya hesabi bölgüsü vardır ki, $\Omega' \in \mathscr{A}$, $\mu(\Omega') = 1$ və hər bir Ω_i, μ ölçüsünün atomudur, yəni $\Omega_i \in \mathscr{A}$, $\mu(\Omega_i) > 0$ və $A \in \mathscr{A}$ və $A \in \Omega_i$ olarsa, onda ya $\mu(A) = 0$ və ya $\mu(A) = \mu(\Omega_i)$ olur. Onda (Hausdorf topoloji fəzasında ixtiyari Borel ehtimal ölçüsü üçün ümumi halda) separabel metrik fəzada ixtiyari Borel ehtimal ölçüsü üçün hər bir atom hökmən birnöqtəvi çoxluqdur və bu halda A. ö. d i s k r e t ö l ç ü adlanır. Əgər yalnız bir nöqtənin ölçüsü 1-ə bərabərdirsə, uyğun diskret ölçü c ı r l a ş m ı ş ö l ç ü (və ya D i r a k ö l ç ü s ü) adlanır.

Qeyri – atomik ölçülər tez-tez istifadə olunur. Əgər ehtimal ölçüsü μ-nün heç bir atomu yoxdursa, yəni ixtiyari $\mu(B) > 0$ şərtini ödəyən $B \in \mathscr{A}$ çoxluğu üçün elə $A \subset B$, $A \in \mathscr{A}$ çoxluğu vardır ki, $0 < \mu(A) < \mu(B)$ münasibəti ödənilir, onda μ ölçüsü ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında q e y r i – a t o m i k ö l ç ü adlanır. Əslinə qaldıqda qeyri – atomiklik halında daha güclü hökm yerinə yetir: $A \subset B$ və $A \in \mathscr{A}$ münasibətini ödəyən bütün A-lar üçün $\mu(A)$-nın qiymətləri çoxluğu bütün $[0, \mu(B)]$ intervalını doldurur.

Əd.: [1] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

ATOMİK PAYLANMA « атомическое распределение; atomic distributions » – Ω elementar hadisələr fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathscr{A}$ σ – cəbrində *ehtimal paylanmasıdır*, özünün atomları çoxluğunda toplanmışdır. Bu halda $A \in \mathscr{A}$ çoxluğu $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında paylanmanın atomu adlanır, əgər $\mathbf{P}(A) > 0$ olarsa, $A \supset B \in \mathscr{A}$ olduqda, $\mathbf{P}(B) = 0$ və $\mathbf{P}(A \setminus B) = 0$ olur. Xüsusi halda atomlar məhz ayrı-ayrı nöqtələr olarsa, A. p. *diskret paylanma* ilə üst-üstə düşür.

ATSİKLİK / APERİODİK MARKOV ZƏNCİRİ « ациклическая / непериодическая цепь Маркова; acyclic / aperiodic Markov chain », qeyri–periodik Markov zənciri, – yalnız bir tsiklik altsinfi özündə saxlayan mühüm vəziyyətlərin yeganə C sinfindən ibarət, sonlu və ya hesabi bircins Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). A. M. z.-ində t addıma keçid ehtimallarının limitləri –

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$$

vardır və əgər C sinfi qayıdışsız və ya sıfır sinifdirsə, onda bütün p_j -lar sıfra bərabərdir və əgər bu sinif müsbət sinif olarsa, bütün p_i -lar müsbətdir və bunlar zəncirin yeganə stasionar paylanmasını əmələ gətirir.

ATSİKLİK VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin **« ациклическое состояние** цепи Маркова; **acyclic / aperiodic state** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

ATTRAKTOR « аттрактор; attractor » – bax, *Stoxastik attraktor*, *Qəribə attraktor.*

AVTOİNFORMATİVLİK ÖLÇÜSÜ « автоинформативности мера; autoinformation measure » – bax, *Çoxölçülü statistik analiz.*

AVTOKORRELOQRAM(ı) təsadüfi prosesin **« автокоррелограмма** случайного процесса; **autocorrelogram** of random process **»** – *korreloqram* deməkdir. Bax, *Korreloqram*.

AVTOKORRELYASİON FUNKSİYA « автокорреляционная функция; autocorrelation function » – bax, *Korrelyasion funksiya.*

AVTOKORRELYASİYA(sı) təsadüfi prosesin **« автокорреляция** случайного процесса; **autocorrelation** of random process **»**, $\zeta_t(t)$ təsadüfi prosesinin avtokorrelyasiyası – ζ_t və ζ_{t+h} təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiyasıdır. A. termini «korrelyasiya funksiyası» termini ilə yanaşı da işlənilir və əsasən, stasionar təsadüfi proseslərin araşdırılmasında (bu proseslər üçün A. t -dən deyil, yalnız h -dan asılıdır) istifadə olunur.

AVTOKORRELYASİYA FUNKSİYASI XÜSUSİ « автокорреляции частной функция, частной автокорреляции функция; partial autocorrelation function », xüsusi avtokovariasiya funksiyası, xüsusi korrelyasiya funksiyası, xüsusi kovariasiya funksiyası, – diskret zamanlı $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ təsadüfi prosesi üçün

$$\mathbf{v}(t,k) = \begin{cases} \mathbf{D}\zeta(t), & k = 0, \\ \boldsymbol{\rho}_{t,\,t-1}, & k = 1, \\ \boldsymbol{\rho}_{t,t-k,t-k+1,\ldots,t-1,} & k = 2, \ldots \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan kəmiyyətdir, burada

$$\boldsymbol{\rho}_{i,j} = \frac{\operatorname{cov}[\zeta(i), \zeta(j)]}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta(i)\,\mathbf{D}\zeta(j)}}$$

– $\zeta(i)$ və $\zeta(j)$ kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsalı*, $\boldsymbol{\rho}_{t,t-k,t-k+1,\ldots,t-1}$, – $\zeta(t-k-1),\ldots,\zeta(t-1)$ -in qeyd olunmuş qiymətlərində $\zeta(t)$ və $\zeta(t-k)$ kəmiyyətləri arasında *xüsusi korrelyasiya əmsalıdır.* $F(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, – $\zeta(t-k)$, $\zeta(t-k+1)$,..., $\zeta(t)$, $k > 1$ təsadüfi kəmiyyətlər vektorunun $(k+1)$– ölçülü birgə paylanma funksiyası, $\mathbf{P}$ bu vektorun korrelyasion matrisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\rho}_{t-k,t-k+1} & \ldots & \boldsymbol{\rho}_{t-k,t} \\ \boldsymbol{\rho}_{t-k+1,t-k} & 1 & \ldots & \boldsymbol{\rho}_{t-k+1,t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\rho}_{t,t-k} & \boldsymbol{\rho}_{t,t-k+1} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

və $\mathbf{P}_{i,j}$, – $\boldsymbol{\rho}_{i,j}$ elementinin cəbri tamamlayıcısı olsun. Onda $\zeta(t-k+1), \ldots, \zeta(t-1)$ -in qeyd olunmuş qiymətlərində $\zeta(t-k)$ və $\zeta(t)$ arasında xüsusi korrelyasiya əmsalı

$$\boldsymbol{\rho}_{t,\,t-k,\,t-k+1,\,\ldots,\,t-1} = \frac{-\mathbf{P}_{t-k,t}}{(\mathbf{P}_{t-k,t-k}\mathbf{P}_{t,t})^{1/2}}$$

düsturu ilə təyin olunur. Xususi halda, əgər $F(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ $(k+1)$ – ölçülü normal paylanma funksiyası olarsa, onda $\boldsymbol{\rho}_{t-1,\,t-k,\,t,\,t-k+1,\,\ldots}$ əmsalı $\zeta(t-k+1),\ldots,\zeta(t-1)$ -in qeyd olunmuş qiymətlərində $\zeta(t)$ və $\zeta(t-k)$ təsadüfi kəmiyyətlər cütünün marginal ikiölçülü normal paylanmasının korrelyasiya əmsalı ilə üst-üstə düşür.

X. a. f. Boks – Cenkins modellərinin statistik analizində istifadə olunur. Əgər $\zeta(t)$ p tərtib stasionar avtoreqressiv təsadüfi prosesdirsə, onda bu proses üçün $k = 0, 1, \ldots, p$ olduqda $\mathbf{v}(t,k) \neq 0$, $k \geq p+1$ olduqda isə bu proses üçün $\mathbf{v}(t,k) = 0$ olur. Bu xassəyə əsasən Boks – Cenkins modelinin $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin realizasiyasına görə qurulmasına avtoreqressiyanın tərtibi p -ni identifikasiya etmək olur.

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

AVTOKOVARİASİON FUNKSİYA « автоковариационная функция; autocovariance function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

AVTOKOVARİASİYA(sı) təsadüfi prosesin **« автоковариация** случайного процесссса; **autocovariance** of random process**»**, ζ_t təsadüfi prosesinin avtokovariasiyası – ζ_t və ζ_{t+h} proseslərinin kovariasiyasıdır. Avtokovariasiya $\mathbf{M}(\xi_t - \mathbf{M}\xi_t)(\xi_{t+h} - \mathbf{M}\xi_{t+h})$ riyazi gözləməsinə bərabərdir. Avtokovariasiya termini, adətən, *stasionar təsadüfi proseslər* (geniş mənada) üçün istifadə olunur. Bu proseslər üçün A. yalnız h-dan asılıdır və avtokorrelyasiyadan yalnız ζ_t-nin dispersiyasına bərabər vuruqla fərqlənir. A. termini ilə yanaşı «kovariasion funksiya» termini də istifadə olunur.

AVTOKOVARİASİYA – XÜSUSİ AVTOKOVARİASİYA FUNKSİYASI « автоковариации частной функция, частной автоковариации функция; partial autocovariance function » – *xüsusi avtokorrelyasiya funksiyası* ilə eynidir.

AVTOMAT EHTİMALİ « автомат вероятностный; probabilistic automation » – bax, *Ehtimali avtomat*.

AVTOMATİK TƏSNİFAT « автоматическая классификация; automatical classification » – n obyektdən ibarət çoxluğun daxilolma əməli üzrə $C_0, C_1, \dots, C_m$ bölgülərinin (klaster çoxluqlarının və ya kəsişən siniflərin) ardıcıllığının qurulmasıdır, bu bölgüdəki siniflərin sayı indeks artdıqca monoton azalır. $C_0, C_1, \dots, C_m$ – obyektlər çoxluğu olsun; C_0 çoxluğu yalnız bir obyektdən ibarət n sayda klasterdən ibarətdir, C_j çoxluğundan olan hər bir klaster ya özü klasterdir, yaxud C_{j-1} çoxluğunun klasterlərinin birləşməsidir; C_m çoxluğu yalnız n elementdən ibarət klasterdir.

Əd.: [1] Дюран Б., Оделл П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977; [2] Жамбю М., Иерархический кластер–анализ и соответствия, пер. с франц., М., 1988.

AVTOMODEL LİMİTİ, PAYLANMANIN « автомодельный предел распределения; scaling limit of a probability distribution » – bax, *Renormalizasion qrup.*

AVTOMODEL LİMİTİ, TƏSADÜFİ MEYDANIN « автомодельный предел случайного поля; scaling limit of a random field » – bax, *Renormalizasion qrup.*

AVTOMODEL PAYLANMASI, VƏZİYYƏTLƏRİN « автомодельное распределение состояний; self-similar probability distribution » – bax, *Renormalizasion qrup.*

AVTOMODEL PROSES « автомодельный процесс; automodel / demistable / scaling process », semi–dayanıqlı proses, skeylinq–proses, – elə X_t, $t \geq 0$ təsadüfi prosesidir ki, ixtiyari $k \neq 0$ qiymətində elə A_k tapılır ki, $X_{kt} = A_k X_t$ prosesinin bütün sonluölçülü paylanmaları üst-üstə düşür. Bu onu ifadə edir ki, zaman şkalasının dəyişilməsi $(t \to kt)$ faza şkalasının dəyişilməsinə ($X_t \to A_k X_k$) səbəb olur. A. p. stasionar artımlı prosesdirsə, $X_0 = a$. Əgər $\mathbf{M}X_t^2 < \infty$ olarsa, ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində $\mathbf{M}X_t = a$ olur; əgər $A_k = k^H$, $0 \leq H \leq 1$ olarsa, onda $\mathbf{M}(X_t - X_s)^2 = \sigma^2 |t-s|^{2H}$. Beləliklə, prosesin struktur funksiyası H parametrindən asılıdır. $0{,}5 < H \leq 1$ olduqda $X_t - X_s$ artımının korrelyasion funksiyası inteqrallanmayandır, bu isə onu ifadə edir ki, H parametrli A. p. sonsuz yaddaşa malikdir. Əgər $H = 0{,}5$ olarsa, onda A. p. asılı olmayan artımlarlı prosesdir, əgər $H = 1$ olarsa, onda $X_t = a + Xt$, $\mathbf{M}X = 0$, $\mathbf{M}X^2 = \sigma^2$ olur. Qauss A. p. – fraktal Braun hərəkətidir, $A_k = k^H$.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., в кн.: Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 274–77; [2] Mandelbrodt B. B., Van Ness J. W., «SIAM. Rev», 1968, v. 10, № 4, p. 422–37; [3] Taqqu M. S., «Z. Wahr. und verv. Geb.», 1979, v. 50, p. 53–89.

AVTOMODELLİK « автомодельность; self-similarity » – bax, *Kolmoqorov avtomodelliyi.*

AVTOMODELLİK TƏNLİKLƏRİ « автомодельности уравнения; self-similarity equations » – bax, *Renormalizasion qrup.*

AVTOMORFİZM(i) ölçülü fəzanın **« автоморфизм** пространства с мерой; **automorphism** of a measure space **»** – ölçülü $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ fəzasının özünə qarşılıqlı birqiymətli elə T inikasıdır ki, bu inikas $\mathbf{P}$ ölçüsünü dəyişməz saxlayır və tərs inikasla birgə ölçüləndir, yəni ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün $T^{-1}A \in \mathscr{A}$, $TA \in \mathscr{A}$ və $\mathbf{P}(T^{-1}A) = \mathbf{P}(TA) = \mathbf{P}(A)$ münasibətlərini ödəyir. Beləliklə, ölçülü fəzanın A. tərs inikası endomorfizm olan *ölçülü fəzanın endomorfizmidir.* Sıfır ölçüyə malik münasib bilinən çoxluğa xaric olunan fəzanın avtomorfizmə çevrilən inikası – sıfır modulu üzrə avtomorfizm adlanır (avtomorfizm $\bmod 0$). Sonlu və ya hesabi çevirmələr ailəsi ilə bağlı erqodik nəzəriyyə məsələlərində avtomorfizm və avtomorfizm $\bmod 0$ arasındakı fərq mühüm əhəmiyyət kəsb etmir. x_n, $-\infty < n < \infty$ təsadüfi ardıcıllığının dar mənada ikitərəfli stasionar realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmə ehtimal fəzasının avtomorfizminə bir misaldır.

AVTOMORFİZM sıfır modulu üzrə **« автоморфизм** по модулю нуль; **automorphism** of mod 0 **»** – bax, *Avtomorfizm*(i) ölçülü fəzanın.

K – AVTOMORFİZM « K – автоморфизм; K – automorphism » – bax, *K – sistem.*

AVTOREQRESSİV – İNTEQRALLANAN SÜRÜŞƏN ORTA PROSES « авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего процесс; autoregressive – integrated moving average process », ARİSO – proses (АРПСС – процесс; ARIMA process), Boks – Cenkins prosesi – $t = 0, \pm 1, \dots$ diskret zamanlı elə qeyri – stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir ki, onun sonlu hər hansı d tərtibli artımları – stasionar *qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta prosesdir* [Odur ki, A. – i. s. o. $\zeta(t)$ prosesi d tərtibli stasionar artımlarlı prosesdir]. A. – i. s. o. $\zeta(t)$ prosesi

$$Y(t) - a_1 Y(t-1) - \ldots - a_p Y(t-p) = Z(t) -$$
$$- b_1 Z(t-1) - \ldots - b_q Z(t-q) \qquad (*)$$

münasibətini ödəyir, burada $Y(t) = \nabla^d \zeta(t) = \zeta(t) -$ $- C_d^1 \zeta(t-1) + C_d^2 \zeta(t-2) - \ldots + (-1)^d \zeta(t-d)$, $Z(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ – orta qiyməti sıfra bərabər, dispersiyası məlum verilmiş qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı (yəni diskret zamanlı *bəyaz küy prosesi*), $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$ elə ədədi əmsallardır ki, (*) tənliyinin stasionar həlli vardır. p, q və d qeyd olunmuş, mənfi olmayan ədədlərdir və baxılan $\zeta(t)$ prosesinin tərtibini (və ya tipini) təyin edir və bunlar müşahidələrin nəticələrinin verilənləri əsasında təyin olunur (bax, *Parametrik model*; tərtibin seçilməsi); yalnız bundan sonra, bu verilənlər əsasında $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$ əmsallarının qiymətləri qiymətləndirilir.

A. – i. s. o. p.-lər sinfi C. Boks (G. Box) və Q. Cenkins (G. Jenkins) tərəfindən daxil olunmuş və ətraflı öyrənilmişdir. Onlar göstərmişlər ki, bu sinifdən olan proseslər müşahidələrin nizamsız fluktuasiya edən ən müxtəlif sıralarını kifayət dərəcədə yaxşı təsvir edir və belə sıralara aid statistik məsələlərin geniş sahəsinin həlli üçün olduqca əlverişlidir (bax, [1]).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974.

AVTOREQRESSİV MODEL « авторегрессии модель; autoregression model » –

$$\zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + \ldots + a_p \zeta(t-p) = \sigma^2 Z(t)$$

tənliyini ödəyən, ümumi halda skalyar kompleksqiymətli $\{\zeta(t),\ t \in T\}$, $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *təsadüfi prosesinin* modelidir, burada $a_1, \ldots, a_p$ – həqiqi ədədlərdir, $0 < \sigma^2 < \infty$, $\{Z(t),\ t \in T\}$ – ümumi halda kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin standart qeyri – korrelyar ardıcıllığıdır, yəni bu təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün $\mathbf{M} Z(t) = 0$, $\mathbf{M} Z(s) \overline{Z(t)} = \delta_{st}$, $s, t \in T$ şərtləri ödənilir; p ədədi A. m.-in tərtibi adlanır.

A. m. sürüşən orta modeli ilə birlikdə diskret zamanlı və kəsrirasional spektral sıxlıqlı, stasionar skalyar kompleks – qiymətli proseslər modellərinin sinfini tamamilə əhatə edir. A. m. praktikada təsadüf olunan bir çox proseslərin adekvat stoxastik modelidir.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [2] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

AVTOREQRESSİV PROSES « авторегрессии процесс; autoregressive process » – elə $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir* ki, onun aldığı qiymətlər

$$\zeta(t) = a_1 \zeta(t-1) + \ldots + a_p \zeta(t-p) + Y(t) \qquad (*)$$

avtoreqressiya tənliyini bəzi sabit $a_1, \ldots, a_p$ qiymətlərində ödəyir, burada p – hər hansı müsbət ədəd, $Y(t)$-lər, adətən, qeyri – korrelyar və eyni qanunla paylanmış, riyazi gözləməsi 0, dispersiyası σ^2 olan kəmiyyətlərdir. Arqumenti kompleks z olan $\varphi(z) = z^p - a_1 z^{p-1} - \ldots - a_p$ funksiyasının bütün sıfırları vahid radiuslu dairə daxilindədirsə, (*) tənliyinin həlli vardır və bu həll

$$\zeta(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\, Y(t-\nu)$$

ifadəsilə təyin olunur, burada b_ν və a_i-lər

$$\varphi^{-1}(z) = \psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

münasibətilə bağlıdır.

Məs., $\{Y(t)\}$ – spektral sıxlığı $\sigma^2 / 2\pi$ olan bəyaz küy prosesi olarsa, onda (*) tənliyini ödəyən yeganə A. p. spektral sıxlığı $f(\lambda) = (\sigma^2 / 2\pi) \left| \varphi(e^{i\lambda}) \right|^{-2}$ olan geniş mənada stasionar prosesdir, bu şərtlə ki, $\varphi(e^{i\lambda})$ həqiqi sıfırlara malik olmalıdır. Prosesin avtokovariasiyaları $r_k = \mathbf{M} \zeta(t) \zeta(t-k)$, $r_k = a_1 r_{k-1} + \ldots + a_p r_{k-p}$, $k > 0$ rekurrent münasibətini ödəyir və b_ν terminlərində

$$r_k = \sigma^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu b_{\nu+k}$$

şəklində ifadə olunur. Avtoreqressiya parametrləri a_k-lar prosesin $\boldsymbol{\rho}_k = r_k / r_0$ avtokorrelyasiya əmsalları ilə $\mathbf{A} = \mathbf{R}_p^{-1} \boldsymbol{\rho}_p$ matris münasibətilə əlaqəlidir, burada $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_p)$, $\boldsymbol{\rho}_p = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$ və $\mathbf{R}_p$ – avtokorrelyasiya əmsalları matrisidir (*Yul – Uoker tənlikləri*). Bax, *Xətti filtr.*

Əd.: [1] Grenander V., Rozenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

AVTOREQRESSİV PROSES kəsri tərtibli **« авторегрессии процесс** дробного порядка; fractional **autoregressive process »** – bax, *Hörst fenomeni.*

AVTOREQRESSİV SPEKTRAL STATİSTİK QİYMƏT « авторегрессионная спектральная оценка; autoregressive spectral estimator » – bax, *Maksimal entropiya*; spektral statistik qiymət.

AVTOREQRESSİYA « авторегрессия; autoregression » – hər hansı $\{X_n, n = 0, \pm 1, \ldots\}$ *təsadüfi ardıcıllığının* X_n qiymətlərinin bu ardıcıllığın əvvəlki X_{n-1}, $X_{n-2}, \ldots, X_{n-m}$ qiymətlərindən reqression asılılığıdır. m – tərtib xətti A. sxemi X_n-in X_{n-k}, $k = 1, \ldots, m$ üzrə *xətti reqressiya* tənliyi ilə, yəni

$$X_n = \beta_1 X_{n-1} + \ldots + \beta_m X_{n-m} + \varepsilon_n \qquad (*)$$

tənliyi ilə təyin olunur, burada $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – sabitlərdir, ε_i – riyazi gözləmələri sıfra bərabər, dispersiyaları σ^2 olan və qeyri – korrelyar (bəzən asılı olmayan), eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. A. sxemi bir sıra zaman sıralarının

təsviri üçün faydalı stoxastik modeldir. (*) A. sxeminə xüsusi tip təsadüfi proses – *avtoreqressiv proses* kimi baxmaq olar.

AYIRDETMƏ ZOLAĞI VƏ HESABLANMA ZOLAĞI « разрешающая и вычислительная полоса; rezolution bandwidth and calculation bandwidth » spektral sıxlığın qeyri–parametrik statistik qiymətinin – məsafə ilə təyin olunan anlayışlardır, bu zolaqda verilən statistik qiymətdən istifadə edərək, əsl *spektral sıxlığın* iki zirvəsini müəyyənləşdirmək olur. Əgər N həcmli seçim üçün alınmış spektral sıxlığın statistik qiymətinin spektral pəncərəsi $\Phi_N(x)$ aşağıdakı münasibətlərlə ifadə olunarsa, yəni

$$\Phi_N(x) = A_N \Phi(A_N x), \;\; A_N > 1, \; A_n \to \infty;$$

$$N \to \infty \text{ olduqda } A_N / N \to 0$$

olarsa, onda $1/A_N$ kəmiyyəti ayırdetmə zolağının eni olur.

A_N kəmiyyəti

$$b_N(t) = b(A_N^{-1} t)$$

korrelyasion pəncərəsinin enini təyin edir, yəni A_N, – $b_N(t)$ funksiyasının sıfırdan fərqli və ya sıfırdan olduqca fərqli olduğu zaman parçasıdır.

Ayırdetmə zolağının enini təyin etmək üçün çoxsaylı üsullar vardır. Bəzən bu zolaq spektral pəncərənin özünün maksimal qiymətinin yarısını aldığı nöqtələr arasındakı məsafəyə bərabər fərz olunur.

Müxtəlif formalı spektral pəncərələrin en üzrə müqayisəsi üçün (bax, [4]) N uzunluqlu seçimə görə $f_N(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiymətinin spektral pəncərəsinin normalanmış ekvivalent eni anlayışı daxil olunmuşdur, bu kəmiyyət aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$W_l = \frac{1}{N} \frac{(\mathbf{M}\, \hat{f}_N(\lambda))^2}{\mathbf{D}\, \hat{f}_N(\lambda)} \approx \frac{1}{2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_N^2(x)\, dx}. \qquad (*)$$

İstifadə olunan müxtəlif formalı pəncərələr üçün W_l kəmiyyətləri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Pəncərə	Müntəzəm ortalamanın spektral pəncərəsi	Parzen pəncərəsi	Bartlett pəncərəsi	Optimal pəncərə
W_l	$\frac{1}{A_N}$	$\frac{1{,}33}{A_N}$	$\frac{1{,}86}{A_N}$	$\frac{\alpha^2(2\alpha+1)}{\pi^2 A_N(2\alpha^2+2\alpha+1)}$

Optimal pəncərə özünün ayırdetmə zolağı ilə α göstəricisindən asılıdır, $\alpha < 0 \le 1$; α baxılan λ nöqtəsində spektral $f(\lambda)$ sıxlığının hamarlığını təyin edir və Hölder şərtində (bərabərsizlikdə) daxil olunmuş kəmiyyətdir.

Spektral sıxlığın statistik qiymətləri $\hat{f}_N(\lambda)$-ların hesablandığı nöqtələr arasındakı məsafə hesablanma zolağının eni adlanır. Əgər $b = 1/A_N$ olarsa, onda addımın belə seçilməsində statistik qiymətlər statistik olaraq asılı olmurlar. Lakin tərs Furye çevirməsi üzrə zaman sıralarının qurulmasında (bax, *Diskret Furye çevirməsi*) alınan effektin qarşısını almaq üçün $b = 1/2A_N$ götürmək zəruridir. Addımı belə seçmək üçün N uzunluqlu ardıcıllığa N sayda sıfır əlavə olunmalıdır.

Əd.: [1] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982; [2] Отнес Р., Эноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [3] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [4] Blackman R., Tukey J., The measurement of power spectra. From the point of view of communications engineering, N. Y., [1959].

A – AYIRICI PLAN « A – разделяющий план; A – separating plan » – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*.

AYRILAN EHTİYATDA SAXLAMA « раздельное резервирование; separate redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama*.

***AYRILAN XARAKTERİSTİK FUNKSİYA « разложимая характеристическая функция; decomposable characteristic function »** – bax, *Ayrılanlıq.*

AYRILAN MARKOV ZƏNCİRİ « приводимая / разложимая цепь Маркова; reducible / decomposable Markov chain » – *ayrılmayan Markov zənciri* olmayan sonlu və ya hesabi Markov zənciridir. Sonlu Markov zənciri, yalnız və yalnız, o halda ayrılandır ki, onun keçid matrisi (ola bilər ki, vəziyyətlərin hər hansı nömrələnməsindən sonra da)

$$\begin{Vmatrix} P_1 & 0 \\ Q & P_2 \end{Vmatrix}$$

blok matrisi şəklində yazılsın; P_1 və P_2 – kvadratik stoxastik matrislər, 0 – uyğun ölçülü sıfır matrisdir. Bax, *Markov zənciri*.

AYRILAN ŞAXƏLƏNƏN PROSES « разложимый ветвящийся процесс; decomposable branching process » – hissəciklərinin tiplərinin əmələ gətirdiyi siniflər sayı ikidən az olmayan, hissəciklərinin tipləri sonlu, *şaxələnən prosesdir*. Hissəciklərinin tipləri sayı n-ə bərabər olan prosesin vəziyyəti $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t))$ vektoru ilə təsvir olunur, burada $Z_k(t)$, – t anında mövcud olan k-cı tipin hissəcikləri sayıdır. i tipli hissəciyi yalnız i və $i+1$ tipli $(1 \to 2 \to \ldots \to n)$ hissəciklər doğuran kəsilməz zamanlı $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t))$ şaxələnən prosesinin xüsusi halı A. ş. p.-in asimptotikası haqqında təsəvvürü verir. Bu halda tiplər çoxluğu hər biri bir hissəcikdən ibarət n sinfə ayrılır. Final siniflərin olmadığı (bax, *Şaxələnən proses* hissəciklərinin tipləri sayı sonlu) və $Z(t)$-nin ikinci momentlərinin varlığı fərz olunur. Baxılan prosesin asimptotikası

$$A_{ii}(t) = \mathbf{M}\{Z_i(t) \,|\, Z_j(0) = \delta_{ij}, \; j = 1, \ldots, n\} = e^{a_{ii}t},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

riyazi gözləmələrinin nə cür olmasından olduqca asılı olur, burada a_{ii} – hər hansı sabitlərdir. Əgər bütün a_{ii}-lər $a_{ii} > 0$ şərtini

ödəyərsə, onda proses kritikaltı prosesdir və bu prosesin davam olunması ehtimalları –

$$Q_i(t) = \mathbf{P}\{ Z_1(t) + \ldots + Z_n(t) > 0 \,|\, Z_j(0) = \delta_{ij},\ j = 1, \ldots, n\}$$

$t \to \infty$ olduqda eksponensial azalır. Əgər bütün i-lər üçün $a_{ii} \geq 0$ olarsa və $a_{11},\ldots,a_{nn}$ arasında p sayda ($p \geq 1$) sıfırlar vardırsa, onda proses kritik prosesdir və $t \to \infty$ olduqda

$$Q_1(t) = q_1 t^{-2^{1-p}} (1 + o(1)),$$

burada $q_1 > 0$ – hər hansı sabitdir. Əgər $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 0$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{Z_1(t)Q_1(t)}{A_{11}(t)} < y_1, \ldots, \frac{Z_n(t)Q_n(t)}{A_{nn}(t)} < \right.$$

$$\left. < y_n \,|\, Z_j(t) = \delta_{ij};\ \sum_{j=1}^{n} Z_j(t) > 0 \right\}$$

şərti ehtimalları üçün $t \to \infty$ olduqda limit paylanmasının Laplas çevirməsi $\varphi(s_1,\ldots,s_n)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\varphi(s_1,\ldots,s_n) = 1 - \left(1 + \frac{1}{s_n}\right)^{-2^{1-n}}.$$

A. ş. p. üçün $Z(t)$-nin ikinci momentlərinin sonlu olduğu şərtində limit paylanmalarının tam təsviri [2] – [4]-də verilmişdir. İkinci momentlərin sonsuz olduğu halı üçün limit paylanmaları haqqında [5]-ə bax.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Полин А. К., «Матем. сб.», 1976, т. 100, с. 420–35; [3] Полин А. К., «Матем. сб.», 1977, т. 104, с. 151–61; [4] Ogura Y., «J. Math. Kyoto Univ.», Ser. A., 1975, v. 15, № 2, p. 251–302; [5] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67.

***AYRILANLIQ « разложимость; self-decomposability »** – ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu və onun xarakteristik funksiyası üçün daxil olunmuş anlayışdır, əgər hər bir ixtiyari $c \in (0,1)$ ədədi üçün elə *cırlaşmayan* f_c xarakteristik funksiyası varsa ki, hər bir u qiymətində $f(u) = f(cu) f_c(u)$ bərabərliyi ödənilsin, onda $\mathscr{L}$ qanunu və onun uyğun xarakteristik funksiyası ayrılış qanunu və ayrılan xarakteristik funksiya adlanır. Aydındır ki, *cırlaşmış xarakteristik funksiya* ayrılan xarakteristik funksiyadır və onun bütün komponentləri f_c-lər də ayrılan xarakteristik funksiyalardır.

Əgər f ayrılan xarakteristik funksiyadırsa, onda $f \neq 0$ (bax, [1]).

Ayrılanlıq kriterisi. Əgər S_n/b_n ardıcıllıqları müntəzəm *sonsuz kiçilənlik şərtini* ödəyərsə, onda mərkəzi limit teoreminə əsasən $\frac{S_n}{b_n} - a_n$ normalanmış cəmlər ardıcıllıqlarının bütün mümkün limit teoremləri müəyyən bir *sonsuz bölünən qanunlar* ailəsi – $\mathscr{N}$ ailəsini təşkil edir. Ayrılanlıq kriterisi onu ifadə edir ki, ixtiyari $\mathscr{L}$ qanunu, yalnız və yalnız, ayrılan qanun olduğu halda $\mathscr{N}$ ailəsindəndir (bax, [1]); $a_n, b_n > 0$ – həqiqi ədədlər, S_n isə n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmidir. Ayrılan xarakteristik funksiya f və onun komponentləri f_c sonsuz bölünən xarakteristik funksiyalardır. Əgər f ayrılan xarakteristik funksiyadırsa, $f \neq 0$.

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, М., 1962.

***AYRILANLIQ KRİTERİSİ « разложимости критерий; decomposable test »** – bax, *Ayrılanlıq*.

***AYRILIŞ QANUNU « разложимения закон; law of decomposability »** – bax, *Ayrılanlıq*.

AYRILMAYAN PAYLANMA « неразложимое распределение; indecomposable distribution » – iki cırlaşmayan paylanmanın kompozisiyası şəklində ifadə olunmayan ehtimal *paylanmasıdır*. Arksinus paylanması, normal və Puasson paylanmalarının qarışığı A. p.-ya misaldır. Paylanmasının daşıyıcısı bir nöqtədə kəsişən sonlu sayda düzxətlərin birləşməsi olan və ya hər hansı ciddi qabarıq qapalı hipermüstəvi ilə üst-üstə düşən, $\mathbb{R}^n$-də ($n \geq 2$ qiymətlərində) ixtiyari paylanma A. p.-dır. Hal-hazırda A. p.-lar çoxluğunun tam təsviri məlum deyildir, lakin aydındır ki, A. p.-lar sinfi olduqca geniş sinifdir, A. p.-lar çoxluğu variasiya üzrə məsafə ilə doğurulmuş güclü topologiyada bütün ehtimal paylanmaları çoxluğunda sıx çoxluqdur. Kompozisiya əməli ilə ehtimal paylanmaları semi – qrupunda vurma əməli kimi A. p. çoxluğuna natural ədədlər çoxluğunda sadə ədədlər çoxluğunun müəyyən analoqu kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Шаков В. Г., Шаков Н. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 348–51; [3] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теории вероятню и матем. статистике», Вильнюс, 1962, с. 425–37.

AYRILMAYAN ŞAXƏLƏNƏN PROSES « неразложимый ветвящийся процесс; indecomposable branching process » – hissəciklərinin tipləri sayı sonlu elə *şaxələnən prosesdir* ki, bu prosesdə hər bir tipin hissəciyinin varisi (bilavasitə və ya uzaq) müsbət ehtimalla ixtiyari tip hissəcik ola bilər. n tipli hissəcikli $\zeta(t) = (\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t))$ A. ş. p. asimptotik olaraq, bir tipli hissəciklərli şaxələnən proses kimi cərəyan edir, burada $\zeta_k(t)$, – t anında k-cı tipdən olan hissəciklərin sayıdır. Prosesin diskret zamanlı olduğu fərz olunur. Əgər $A_{ij}(t) = \mathbf{M}(\zeta_j(t) \,|\, \zeta_k(0) = \delta_{ik},\ k = 1,\ldots,n)$, $A(t) = (A_{ij}(t))$ olduğu qəbul edilərsə, onda $A(t) = A^t(1)$ münasibəti doğrudur. Ayrılmayan proseslər üçün $A(1)$ – ayrılmayan matrisdir. Bundan başqa, $A(1)$ qeyri – periodik matris olarsa, onda $t \to \infty$ olduqda $A_{ij}(t) = u_i \upsilon_j \lambda^t + o(\lambda^t)$ olur, burada λ, – $A(1)$-in perronlar köküdür; $(u_1,\ldots,u_n)$, $(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n)$, – $A(1)$-in λ-ya uyğun sağ və sol məxsusi vektorlarıdır. A. ş. p. – $\lambda < 1$ olduqda kritikaltı, $\lambda > 1$ olduqda kritik üstü, $\lambda = 1$ olduqda kritik şaxələnən proses adlanır və tiplər çoxluğu final sinif əmələ gətirmir. $\zeta(t)$-nın ikinci momentlərinin

sonlu olmasını fərz etdikdə, A. ş. p. üçün bəzi asimptotik nəticələr alınır.

Kritikaltı proseslər üçün ixtiyari i qiymətlərində və $t \to \infty$ olduqda

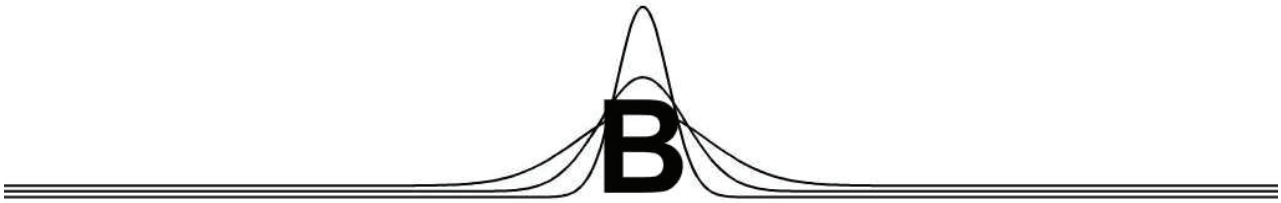
$$Q_i(t) = \mathbf{P}\{\zeta_1(t) + ... + \zeta_n(t) > 0 \,|\, \zeta_k(0) = \delta_{ik},\ k = 1,..., n\}$$

prosesinin davam etməsi ehtimalı eksponensial azalır, kritik proseslər üçün isə bu ehtimal $1/t$-yə mütənasib olaraq azalır. $t \to \infty$ olduqda, kritikaltı proses üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\zeta_1(t)}{A_{i1}(t)} < x_1, ..., \frac{\zeta_n(t)}{A_{in}(t)} < x_n \,|\, \zeta_k(0) = \delta_{ik},\ k = 1,..., n;\ \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t) > 0 \right\}$$

paylanmaları diskret paylanmalara, kritik və kritiküstü proseslər üçün isə $x_1 = x_2 = ... = x_n$ diaqonalında topalanmış paylanmalara yığılır. Kritik halda diaqonalda paylanma üstlü paylanma olur. Kəsilməz zamanlı A. ş. p.-lər üçün analoji nəticələr alınmışdır.

Əd.: [1] С е в а с т ь я н о в Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.



BAKSTER TEOREMİ « Бакстера теорема; Baxter theorem » – *Qauss prosesi* artımlarının kvadratları cəmi haqqında teoremdir: əgər $0 \le t \le T$ intervalında verilmiş həqiqi $\zeta(t)$ Qauss prosesinin t-yə görə kəsilməz $\mathbf{M}\zeta(t) = m(t)$ orta qiyməti və t, s-ə görə kəsilməz $b(t,s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)][\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)]$ korrelyasion funksiyası vardırsa, $0 \le t \le T$ olduqda $m'(t)$ törəməsi məhduddursa, $t \ne s$ olduqda $b(t, s)$ funksiyasının bütün ikinci tərtib törəmələri müntəzəm məhduddurlarsa, onda $\zeta(t)$ prosesinin N sayda subintervallarda artımlarının kvadratları cəmi (subintervallar $[0, T]$ intervalının N bərabər hissəyə bölünməsilə alınır) N sonsuzluğa sürətlə yaxınlaşdıqda $t = s$ diaqonalında $\partial b(t, s)/\partial t$ törəməsinin sıçrayışının qiyməti ilə təyin olunan sabit ədədə sanki yəqin yaxınlaşır. Yəni yuxarıda qeyd olunmuş $m(t)$ və $b(t, s)$ üzərinə qoyulan şərtlər ödənilərsə, onda

$$D^+(t) = \lim_{s \to t^+} \frac{b(t, t) - b(s, t)}{t - s},$$

$$D^-(t) = \lim_{s \to t^-} \frac{b(t, t) - b(s, t)}{t - s}$$

limitləri həmişə vardır və bu halda

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[\zeta\left(\frac{kT}{2^n}\right) - \zeta\left(\frac{(k-1)T}{2^n}\right) \right]^2 = \int_0^T [D^-(t) - D^+(t)]\, dt \qquad (*)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir (bax, [1]). Xüsusi halda, $\zeta(t)$ standart Viner prosesi və bu proses üçün $b(t, s) = \min(t, s)$ olarsa, (*)-nun sağ tərəfi T-yə bərabər olur; bu xüsusi hal üçün (*) ilk dəfə P. Levi tərəfindən isbat olunmuşdur (bax, [2]); bu Levi teoremi də adlandırılır. B. t. və onun çoxsaylı ümumiləşmələri və modifikasiyaları (bax, məs., [3] – [7]) əsasında bir çox hallarda müəyyən etmək olur ki, verilmiş iki $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ Qauss proseslərinin (və ya meydanlarının) realizasiyalarının funksional fəzasında təyin olunmuş ehtimal ölçüləri qarşılıqlı sinqulyardırlar, yəni kəsişən çoxluqlarda topalanmışlar (bax, məs., [3] – [9]).

Əd.: [1] Baxter G., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, p. 522–27; [2] Levy P., «Amer. J. Math.», 1940, v. 62, p. 487–550; [3] Гладышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 57–66; [4] Краснитский С. М., в сб.: Теория вероятн. и матем. статистика, в. 5, 1971, с. 71–80; [5] Арак Т. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 153–60; [6] Gine E., Klein R., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 4, p. 716–21; [7] Курченко А. А., в сб.: Теория вероятн. и матем. статистика, в. 33, К., 1985, с. 53–57; [8] Slepian D., «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, v. IT–4, № 2, p. 65–68; [9] Varberg D. E., «Pacific J. Math.», 1961, v. 11, № 2, p. 751–62.

BALANSLANMIŞ BLOK PLAN « сбалансированный блочный план; balanced block design » – bax, *Blok plan.*

BANAX FƏZASI dayanıqlı p tip **« банахово пространство** устойчивого типа p; **Banach space** of stable type p **»** – bax, *Banax fəzası* p tip.

BANAX FƏZASI Sazonov xassəli **« банахово пространство** со свойством Сазонова; **Banach space** with Sazonov property**»**, S – fəza, – elə fəzadır ki, bu fəzaya qoşma fəza məqbul topologiyaya malikdir. Məs., Hilbert fəzası (bax, [1]), $1 \le p < 2$ olduqda l^p fəzası, kompakt approksimasiya şərtini ödəyən və $p < 1$ olduqda L^p altfəzasına izomorf ixtiyari Banax fəzası belə fəzalardır (bax, [2]).

Əd.: [1] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [2] Муштари Д. Х., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 1, с. 66–77; [3] Муштари Д. Х., Вероятности и топологии в банаховых пространствах, Каз., 1989.

BANAX FƏZASI l_p^n-ni özündə müntəzəm saxlayan **« банахово пространство** равномерно содержащее l_p^n; **Banach space** uniformly containing l_p^n **»**, – elə Banax fəzasıdır ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və ixtiyari natural n ədədi üçün elə n – ölçülü $B_n \subset B$ altfəzası tapılar ki, $d(B_n, l_p^n) < 1 + \varepsilon$ şərti ödənilsin, burada l_p^n, – $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ vektorlarının adi n – ölçülü həqiqi fəzasıdır və bu vektorlar:

$1 \le p < \infty$ olduqda

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

norması ilə verilir və

$$\| x \|_\infty = \max\{ |x_i|,\ 1 \le i \le n \},$$

$d(E, F)$ izomorf Banax fəzaları E və F arasında aşağıdakı düsturla ifadə olunan Banax – Mazur məsafəsidir:

$$d(E, F) = \inf\{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \},$$

burada infimum E və F arasında bütün izomorfizmlər üzrə götürülür.

Hər bir sonsuz B. f. l_2^n fəzasını özündə müntəzəm saxlayır (Dvoretski lemması). Buradan Dvoretski – Rocers lemması asanlıqla alınır: hər bir sonsuzölçülü B. f.-da mütləq yığılmayan, şərtsiz yığılan sıra vardır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin məsələlərində l_p^n fəzasını özündə saxlamayan B. f. mühüm yer tutur. Bir çox cəhətlərə görə bu aşağıdakı müddəaların doğruluğu ilə əsaslandırılır:

a) B. f. l_p^n fəzasını özündə müntəzəm, yalnız və yalnız, o halda saxlamır ki, o, hər hansı $p < \infty$ üçün p kotip B. f. olsun;

b) B. f. l_1^n fəzasını özündə müntəzəm, yalnız və yalnız, o halda saxlamır ki, o, hər hansı $1 < p \leq 2$ üçün p tip B. f. olsun;

c) B. f. l_p^n fəzasını $1 \leq p < 2$ üçün özündə müntəzəm, yalnız və yalnız, o halda saxlamır ki, o, dayanıqlı p tip B. f. olsun.

l_∞^n fəzasını özündə müntəzəm saxlamayan B. f.-ları Banax fəzalarında təsadüfi sıraların yığılmasında maraq doğurur, belə ki, bu fəzalarda $\sum x_i \varepsilon_i$ və $\sum x_i \gamma_i$ sıralarının sanki yəqin yığılması ekvivalentdirlər (burada ε_i və γ_i, $i = 1, 2, \ldots$ – uyğun olaraq qarşılıqlı asılı olmayan Bernulli və standart Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllıqlarıdır); belə fəzalara B. f.-da sıraların şərtsiz yığılma nəzəriyyəsində də təsadüf olunur.

Əd.: [1] Marey B., Pisier G., «Studia Math.», 1976, v. 58, fasc. 1, p. 45–90.

BANAX FƏZASI PIP xassəli **«банахово пространство** со свойством PIP; **Banach space** with PIP» – elə $\mathbf{B}$ Banax fəzasıdır ki, hər bir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və qiymətlər oblastı $\mathbf{B}$-də məhdud hər bir *zəif ölçülən* $X : \Omega \to \mathbf{B}$ *inikası* üçün $\int_\Omega X \, d\mathbf{P}$ Pettis inteqralı vardır. Separabel, həmçinin, refleksiv fəzalar bu xassəyə malikdirlər. Məhdud ədədi ardıcıllıqların fəzası l_∞ PIP xassəsinə malik deyildir (PIP – Pettis İntegral Property anlayışının qısa variantıdır).

Əd.: [1] Edgar G. A., «Indiana Univ. Math. J.», 1979, v. 28, № 4, p. 559–79; [2] Fremlin D. H., Talagrand M., «Math. Z.», 1979, Bd 168, S. 117–49.

BANAX FƏZASI p kotip **«банахово пространство** котипа p; **Banach space** of cotype p» – bax, *Banax fəzası* p tip.

BANAX FƏZASI p tip **«банахова пространство** типа p; **Banach space** of type p» – qiymətləri Banax fəzalarından olan təsadüfi elementlərin öyrənilməsində istifadə olunan anlayışdır; bu anlayışla sıx bağlı p kotip Banax fəzası və dayanıqlı p tip Banax fəzası anlayışları da daxil olunmuşdur.

ε_n – qarşılıqlı asılı olmayan Bernulli təsadüfi kəmiyyətləri, $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = +1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -1\} = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\mathbf{B}$ Banax fəzasında $\sum \|x_n\|^p$ sırasının yığılmasından $\sum x_n \varepsilon_n$ sırasının sanki yəqin yığılması alınarsa, onda B. f. $\mathbf{B}$ p tip Banax fəzası adlanır, $x_n \in \mathbf{B}$. Fərz olunur ki, $1 \leq p \leq 2$, çünki $p > 2$ tipi üçün B. f. yoxdur; hər bir B. f.-nın 1 tipi (və deməli, $p < 1$ tipi) vardır.

ε_n əvəzinə p tərtib mütləq momentləri olan digər, eyni qanunla paylanmış cırlaşmayan mərkəzlənmiş ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər istifadə etmək olar.

$\mathbf{B}$ Banax fəzasında $\sum x_n \varepsilon_n$, $x_n \in \mathbf{B}$, $n \in \mathbb{N}$ sırasının sanki yəqin yığılmasından $\sum \|x_n\|^p$ sırasının yığılması alınarsa, $\mathbf{B}$ fəzası p kotip B. f. adlanır. Fərz olunur ki, $2 \leq p < \infty$, belə ki, $p < 2$ kotipi üçün B. f. yoxdur. ε_n əvəzinə ixtiyari, bütün tərtib mütləq momentlərə malik olan eyni qanunla paylanmış cırlaşmayan mərkəzlənmiş təsadüfi kəmiyyətlər istifadə etmək olar. $\mathbf{B}$ fəzasının p kotipi, yalnız və yalnız, o halda vardır ki, hər hansı c_p konstantı və $\mathbf{B}$-də verilmiş $\mathbf{M}\|X_k\|^p < \infty$, $\mathbf{M}X_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ xassəsini ödəyən qarşılıqlı asılı olmayan separabelqiymətli təsadüfi elementlərin bütün sonlu topluları üçün

$$\mathbf{M}\left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^p \geq c^p \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\|X_k\|^p \qquad (*)$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

$\mathbf{B}$ fəzasının p tipi, yalnız və yalnız, o halda vardır ki, (*) bərabərsizliyi əvəzinə tərs xarakterli hər hansı τ_p konstantı ilə

$$\mathbf{M}\left\| \sum_{k=1}^n X_k \right\|^p \leq \tau_p \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\|X_k\|^p$$

bərabərsizliyi doğru olsun.

$L_r(\Lambda, \Sigma, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ fəzalarının $p = \max(r, 2)$ kotipi və $p = \min(r, 2)$ tipi vardır və əgər fəzalar sonluölçülü fəzalara cırlaşmırlarsa, bu ədədləri yaxşılaşdırmaq mümkün olmur. l_∞ fəzasının $p > 1$ tipi və heç bir kotipi yoxdur. Heç bir tipi və kotipi olmayan fəzalara aid sadə misallar – kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ və sıfra yığılan ardıcıllıqların c_0 fəzasıdır. Hilbert fəzalarının eyni zamanda 2 kotipi və 2 tipi vardır. Müəyyən mənada tərs müddəa da doğrudur: əgər B. f.-nın 2 tipi və 2 kotipi vardırsa, onda o, Hilbert fəzasına izomorfdur (xətti izomorfdur) (Kvapen teoremi).

Dayanıqlı p tip B. f. elə $\mathbf{B}$ B. f.-na deyilir ki, bu fəzada $\sum \|x_n\|^p$ sırasının yığılmasından $\sum x_n f_n$ sırasının sanki yəqin yığılması alınır, burada (f_n) – dayanıqlılığı p üstlü, eyni qanunla paylanmış qarşılıqlı asılı olmayan simmetrik dayanıqlı təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır, yəni $\mathbf{M}\exp(itf_n) = \exp(-|t|^p)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Fərz olunur ki, $1 \leq p \leq 2$, belə ki, dayanıqlı $p > 2$ tipi üçün heç bir B. f. yoxdur; hər bir B. f.-nın

dayanıqlı $p<1$ tipi vardır. Dayanıqlı p tip B. f.-nın p tip B. f. da vardır. 2 tip B. f. eyni zamanda dayanıqlı 2 tip B. f.-dır. Əgər **B** B. f.-nın p tipi vardırsa, onda bütün $p_1 < p$ üçün onun dayanıqlı p_1 tipi vardır. Əgər **B** -nin dayanıqlı p tipi vardırsa, onda onun bütün $p_1 \le p$ üçün dayanıqlı p_1 tipi vardır, $p<2$ üçün isə hər hansı $p_2 > p$ üçün dayanıqlı p_2 tipi vardır.

Əd.: [1] Hoffmann–Jørgensen J., «Aarhus Univ. Matem. inst.», preprint, 1972–73, № 15; [2] Maurey B., Pisier G., «Studia Math.», 1976, v. 58, № 1, p. 45–90; [3] Woyczynski W., в кн.: Probability un Banach spacez, N. Y., 1978.

BANAX – MAZUR MƏSAFƏSİ « Банаха – Мазура расстояние; Banach – Mazur distance » – bax, *Banax fəzası* l_p^n-ni özündə müntəzəm saxlayan.

BARİMƏRKƏZ (i) ehtimal ölçüsünün « **барицентр** вероятностной меры; **baricentre** of a probability measure » – bax, *Orta qiymət* (i) μ ehtimal ölçüsünün.

BARTL – DANFORD – ŞVARTS TEOREMİ « Бартла – Данфорда – Шварца теорема; Bartle – Dunford – Schwartz theorem » – bax, *Vektor ölçü*.

BARTLETT KORRELYASİON PƏNCƏRƏSİ « Бартлетта корреляционное окно; Bartlett lag window » – bax, *Korrelyasion pəncərə*.

BARTLETT KRİTERİSİ « Бартлетта критерий; Bartlett test » – normal qanuna tabe bir neçə ümumi çoxluğun dispersiyalarının bərabərliyini empirik verilənlər əsasında yoxlamaq üçün *statistik kriteridir.*

$S_1^2, ..., S_k^2$ – uyğun olaraq, $\sigma_1^2, ..., \sigma_k^2$ dispersiyaları üçün qarşılıqlı asılı olmayan statistik qiymətlər olsun; $\nu_i S_i^2 / \sigma_i^2$ kəmiyyətləri sərbəstlik dərəcəsi sayı ν_i-yə bərabər χ^2 – paylanması ilə paylanmışlar, $i = 1, ..., k$, $N = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$ və

$$M = N \ln \left(\sum_{i=1}^{k} \nu_i S_i^2 / N \right) - \sum_{i=1}^{k} \nu_i \ln S_i^2$$

olsun. $H_0 : \sigma_1^2 = ... = \sigma_k^2$ hipotezini yoxlamaq üçün kriterinin kritik oblastı

$$M \Big/ \left[1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{N} \right) \right] > C(k, \nu_1, ..., \nu_k, \alpha)$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur. Əgər i-nin bütün qiymətlərində $\nu_i > 3$ olarsa və H_0 hipotezi doğru olarsa, onda bərabərsizliyin sol tərəfindəki kəmiyyət təqribi olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$-ə bərabər χ^2 – paylanması ilə paylanır. $C(k, \nu_1, ..., \nu_k, \alpha)$ kritik qiymətlər cədvəli [2]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Bartlett M. S., «Proc. Roy. Soc.», 1937, V. A. 160, p. 268–82; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

BARTLETT STATİSTİK QİYMƏTİ « Бартлетта оценка; Bartlett estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

BARTLETT – ŞEFFE KRİTERİSİ « Бартлетта – Шеффе критерий; Bartlett – Scheffe test » – *Berens – Fişer probleminə* aid *statistik kriteridir.* $x_{11}, ..., x_{1n_1}$, $x_{21}, ..., x_{2n_2}$, – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i)^2$, $j = 1, ..., n_i$.

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} / n_i, \quad i = 1, 2, \quad n_1 \le n_2,$$

$$C_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl} (n_1/n_2)^{1/2} - (n_1 n_2)^{-1/2} + n_2^{-1}, & l \le n_1 \text{ olduqda}, \\ n_2^{-1}, & l > n_1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

$$l_k = x_{1k} - \sum_{l=1}^{n_2} C_{kl} x_{2l}, \quad k = 1, ..., n_1, \quad l = 1, ..., n_2,$$

$$L = \sum_{k=1}^{n_1} l_k / n_1, \quad Q = \sum_{k=1}^{n_1} (l_k - L)^2$$

olsun, burada δ_{kl} – Kroneker simvoludur. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \Delta$ (Δ – verilmiş ədəddir) hipotezini yoxlamaq üçün Şeffe kriterisinin kritik oblastı

$$\frac{\sqrt{n_1}\,|L|}{[\,Q/(n_1-1)]^{1/2}} > C$$

kimi təyin olunur. Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda bərabərsizliyin sol tərəfi sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n_1 - 1)$-ə bərabər Styudent t – paylanmasına malik kəmiyyətin moduludur. $n_1 = n_2$ olduğu xüsusi halda *Bartlett kriterisi* alınır.

Əd.: [1] Scheffe H., «Ann. Math. Statist.», 1943, v. 14, № 1, p. 35–44; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

BAŞ KOMPONENTLƏR ANALİZİ « главных компонент анализ; principal component analysis », baş komponentlər metodu, – 1) B. k. a. (statistik yanaşma) – n – ölçülü təsadüfi $\mathbf{x}$ vektorunun p – ölçülü $\boldsymbol{\upsilon} = U^T \mathbf{x}$ vektoruna xətti ortoqonal U çevirməsinin tapılması üçün elə metoddur ki, bu metodla hər hansı kriterinin $\min$ ($\max$) alınır və bu da $\mathbf{x}$ -in $\boldsymbol{\upsilon}$ ilə ən yaxşı ifadə olunmasını təmin edir. Kriterilər aşağıdakılardır:

a) $p=1$, $p=2$ və s. üçün $\sum_{j=1}^{p} \sigma^2(\upsilon_j) \underset{U}{\to} \max$, yəni $\sigma^2(\upsilon_1) \underset{U_1}{\to} \max$, $\sigma^2(\upsilon_2) \underset{U_2}{\to} \max$ və $\upsilon_2 \perp \upsilon_1$ və s.;

b) $\| D(\mathbf{x} - \boldsymbol{\upsilon}) \| \underset{U}{\to} \min$, burada $D(\mathbf{x} - \boldsymbol{\upsilon})$, – $\mathbf{x} - \boldsymbol{\upsilon}$ təsadüfi vektorunun dispersion matrisidir və $\| D \|$, – $D(\mathbf{x} - \boldsymbol{\upsilon})$ -nin Evklid normasıdır.

Bu kriterilər bunların vasitəsilə alınan həllə nəzərən ekvivalentdirlər, bu həll isə **x** vektorunun kovariasiyalar matrisi Ξ-nın məxsusi vektorlarının və məxsusi qiymətlərin tapılmasına gətirir: $U^{\mathrm{T}}U = E$ olarsa, $\|\Xi - \lambda E\|U = 0$, burada E uyğun dim. – ölçülü vahidi matrisdir. Bu halda $\sigma^2(\upsilon_j) = \lambda_j$. N həcmli seçim üçün λ_j və U_j-nin maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri $\hat{\lambda}_j$ və $\hat{U}_j$ kovariasiyalar matrisi $S = (N-1)^{-1}X^{\mathrm{T}}X$ üzrə axtarılır, burada X, – $(N \times n)$ – ölçülü seçimi ortalanmış matrisdir. Bu nöqteyi – nəzərdən B. k. a., adətən, *faktor analiz* metodlarından biri kimi hesab olunur.

2) B. k. a. (həndəsi yanaşma) – p dim. – ölçülü elə ortoqonal altfəzanın tapılması metodudur ki, n – ölçülü $(n > p)$ fəzanın N nöqtələrinin sisteminin bu altfəzaya konfiqurasiyalarının təhrif olunmuş proyeksiyaları minimal olsun. Kriteri aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$\|Q - \mathbf{\theta}\| \underset{U}{\to} \min$, burada $Q = XX^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{\theta} = VV^{\mathrm{T}}$, X, – n – ölçülü fəzada nöqtələrin verilmiş sisteminin mərkəzlənmiş koordinatlarının matrisidir, $V = XU$, $\|Q - \mathbf{\theta}\|$, – $(Q - \mathbf{\theta})$ matrisinin Evklid norması və U – ortonormalanmış elə matrisdir ki, bu matrisin sütunları $u_1, ..., u_p$ $X^{\mathrm{T}}X$ matrisinin məxsusi vektorlarıdır və bunlar S-dən yalnız $(N-1)^{-1}$ vuruğu ilə fərqlənir. B. k. a.-nin optimal həndəsi xassələri seçimin strukturunun vizual öyrənilməsində istifadə olunur (bax, [2]).

3) B. k. a. (asılı olan müşahidələr ardıcıllığı üçün) – təsadüfi $f(x)$ funksiyasının təsadüfi υ_j çəkilərli ortonormalanmış koordinat funksiyaları $\varphi_j(x)$-lərin sistemi üzrə ən yaxşı xətti ayrılışı üçün metoddur (bərpa xətasının kvadratik orta anlamında). Uyğun nəzəriyyə – «təbii ortoqonal hədlərli ayrılış» (bax, [3]) və «Karunen – Loev ayrılışı» adı ilə məlumdur.

Həndəsi interpretasiyada B. k. a. ilk dəfə K. Pirson tərəfindən işlənilmişdir (bax, [4]); H. Hotellinq B. k. a.-nin statistik nəzəriyyəsini vermişdir (bax, [5]).

Əd.: [1] R a o C. R., «Sankhya, ser. A», 1964, v. 26, p. 329–58; [2] G o w e r J. C., «Biometrika», 1966, v. 53, № 3/4, p. 325–38; [3] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1960, № 3, с. 432–39; [4] P e a r s o n K., «Philos. Mag.», 1901, v. 2, p. 559–72; [5] H o t e l l i n g H., «J. Educ. Psych.», 1933, v. 24, p. 498–520; [6] J o l l i f f e I. T., Principal Component Analysis, 1986; [7] А н д р у к о в и ч П. Ф., в кн.: Многомерный статистический анализ в социально-экономический исследованиях, М., 1974, с. 189–228; [8] O k a m o t o M., в кн.: Proceed. of the Second Intern. Symp. of Mult. Analysis, N. Y. – L., 1969, p. 673–85; [9] A n d e r s o n T. W., «Ann. Math. Stat.», 1963, v. 34, № 1, p. 122–48.

BAŞ KOMPONENTLƏR METODU « главных компонент метод; principal components method » – bax, *Baş komponentlər analizi*.

BAYES DÜSTURU « Байеса формула; Bayes formula » – bax, *Beyes düsturu*.

BBQKİ TƏNLİKLƏR ZƏNCİRİ « ББГКИ цепочка уравнений; BBGKY equations hierarchy / chain » – bax, *Boqolyubov tənliklər zənciri.*

BELL ƏDƏDLƏRİ « Белла числа; Bell numbers » – bax, *Kombinator ədədlər*, *Təsadüfi bölgü.*

BELLMAN OPTİMALLIQ PRİNSİPİ « Беллмана принцип оптимальности; Bellman optimality principle » – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma.*

BELLMAN TƏNLİYİ « Беллмана уравнение; Bellman equation » – bax, *İdarəolunan diffuzion proses*, *İdarəolunan sıçrayışvari proses.*

BELLMAN – HARRİS PROSESİ « Беллмана – Харриса процесс; Bellman – Harris process », (G, h) – p r o s e s, – *şaxələnən proseslər* nəzəriyyəsində əsas modellərdən biridir. R. Bellman və T. Harris tərəfindən [1]-də *Qalton – Vatson prosesi* və kəsilməz zamanlı şaxələnən Markov prosesinin ümumiləşməsi kimi təklif olunmuşdur. B. – H. p.-ində hissəciklər bir-birində asılı olmadan evolyusiya edir. Bir hissəciyin yaşama müddəti – paylanma funksiyası $G(t)$ olan təsadüfi kəmiyyətdir. Hissəcik $h(s)$ doğuran funksiyasına müvafiq təsadüfi sayda varislər doğuraraq məhv olur. Əgər $Z(t)$ – B. – H. p.-də t anında hissəciklər sayı olarsa, onda

$$F(t; s) = \mathbf{M}[\, s^{Z(t)} \,|\, Z(0) = 1]$$

funksiyası

$$F(t; s) = \int_0^t h\,(\,F(t-u;\,s)\,dG(u) + s(1-G(t))$$

inteqral tənliyini ödəyir.

Bax, *Şaxələnən proses*, *Kritik şaxələnən proses*, *Şaxələnən proses*; r e q u l y a r l ı q.

Əd.: [1] B e l l m a n R., H a r r i s T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, № 12, p. 601–04.

BELYAYEV ALTERNATİVİ « Беляева альтернатива; Belyayev alternative » – bax, *Təsadüfi proses*; t r a y e k t o r i y a l a r ı n r e q u l y a r l ı ğ ı.

BENFORD QANUNU « Бенфорда закон; Benford's law » – bax, *İlk mühüm rəqəm qanunu.*

BER σ – CƏBRİ « бэровская σ – алгебра; Baire σ – algebra » – T topoloji fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbridir; T elə topoloji fəzadır ki, bütün $f : T \to \mathbb{R}$ kəsilməz funksionalları bu fəzaya nəzərən ölçülən funksionallardır. B. σ – c. Borel σ – cəbrinin tərkibindədir və fəza metriklənən olduğu halda bu σ – cəbrlər üst-üstə düşür. Kompakt fəza metriklənməyən olduğu halda B. σ – c. xüsusilə mühüm əhəmiyyət kəsb edir. B. σ – c.-nin elementləri B e r ç o x l u q l a r ı adlanır. G_δ çoxluqlarının doğurduğu σ – halqanın elementləri bəzən Ber çoxluqları kimi də anlaşılır.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

BER ÇOXLUĞU « бэровское множество; Baire set » – bax, *Ber σ – cəbri.*

BER FUNKSİYASI « бэровская функция; Ber function » – bax, *Ber sinfi.*

BER ÖLÇÜSÜ « Бэра мера; Bair measure » – 1) lokal kompakt Hausdorf topoloji fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – halqada təyin olunmuş, kompakt G_δ – çoxluqlarının doğurduğu və bu çoxluqlarda sonlu qiymətlər alan *ölçüdür* (bax, [1]).

2) B. ö. tamamilə requlyar topoloji T fəzasının Ber σ – cəbrində təyin olunmuş ölçüdür. Hər bir sonlu B. ö. requlyar ölçüdür. Hər bir τ_0 – hamar sonlu B. ö. yeganə surətdə τ – hamar ölçüyə (sonlu və Borel) qədər davam olunur. Bu halda əgər $B_0(T)$-nin açıq çoxluqlarının $U_\lambda U_\lambda = T$ şərtini ödəyən ixtiyari artan (U_λ) şəbəkəsi üçün $\sup\limits_\lambda \nu(U_\lambda) = \nu(T)$ bərabərliyi ödənilərsə, sonlu B. ö. ν, T-də τ_0 – hamar ölçü adlanır.

Tamamilə requlyar Hausdorf fəzasında hər bir sıx sonlu B. ö., (bax, *Sıx ölçü*) yeganə surətdə, *Radon ölçüsünə* qədər davam olunur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953, с. 218–23.

BER SİNFİ « Бэра класс; Baire class » – bax, *Borel funksiyası*.

BER TƏSNİFATI « Бэра классификация; Baire classificafition » – bax, *Borel funksiyası.*

BERENS – FİŞER PROBLEMİ « Беренса – Фишера проблема; Behrens – Fisher problem » – dispersiyaları naməlum iki *normal paylanmanın* riyazi gözləmələrinin müqayisəsi üçün statistik məsələ ilə əlaqədar yaranmış analitik problemdir. $x_{11},...,x_{1n_1}$, $x_{21},...,x_{2n_2}$, – asılı olmayan, $x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ parametrlərli normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun, $i = 1, 2$. $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, $j = 1, ..., n_i$ parametrlər vektorunun kafi statistikası $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, S_1^2, S_2^2)$ toplusudur,

$$\overline{X}_i = \sum_{1 \le j \le n_i} x_{ij}/n_i ,$$

$$S_i^2 = \sum_{1 \le j \le n_i} (x_{ij} - \overline{X}_i)^2 , \quad i = 1, 2 .$$

B. – F. p. elə K_α çoxluğunun təyin olunmasından ibarətdir ki, $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta$ hipotezi doğru olduğu halda $\{ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2, S_1^2, S_2^2) \in K_\alpha \}$ hadisəsinin ehtimalı naməlum parametrlərdən asılı deyildir və $\alpha \in (0, 1)$ olan, əvvəlcədən verilmiş ixtiyari α-ya dəqiq olaraq bərabər olur (Δ – verilmiş ədəddir). Seçmələrin həcmləri n_1 və n_2-nin tək və ya cüt olmasından asılı olmayaraq B. – F. p.-nin həlli vardır (bax, [2]). B. – F. p.-nin təqribi həlləri (bax, məs., [3] – [6]) elə L_α çoxluğunun təyin olunmasından ibarətdir ki, α-nın verilmiş qiymətində $\{ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)/S_1, S_1^2/S_2^2 \in L_\alpha \}$ hadisəsinin ehtimalı H_0 hipotezinin doğruluğu şərtilə σ_1^2/σ_2^2 kəmiyyətindən zəif asılı olur. Bartlett – Şeffe kriterisi tipli kriterilər kafi statistika ilə ifadə olunmayan statistikalara əsaslandığından güclü sayılmır.

Əd.: [1] Behrens W. U., «Landwirtsh. Jahrb», 1929, Bd, 68, № 6, S. 807–37; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Selected papers in statistics and probability by A. Wald, N.Y. – [a.o.], 1955, p. 669–95; [4] Пагурова В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 561–69; [5] Welch B. L., «Biometrika», 1947, v. 34, p. 28–35; [6] Lee A. F. S., Gurland J., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1975, v. 70, p. 933–41.

BERQ METODU avtoreqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün **« Берга метод** оценивания параметров авторегрессии; **Burg's method** of estimation of parameters of autoregressive process **»** – *avtoreqressiya* əmsalları φ_i-lərin, $i = 1, ..., p$ və qalıq küy dispersiyası $\sigma_a^2(p)$-nin p tərtib avtoreqressiya modelində qiymətləndirilməsi metodudur. Bu modeldən istifadə olunması – $x_1, x_2, ..., x_n$ müşahidələr toplusunun p tərtib avtoreqressiya prosesinin realizasiyası olduğu fərziyyəsinə əsaslanır (bax, *Xətti filtr*). C. Berqin (J. Burg) qiymətləndirmə metodunun (bax, [1]) ənənəvi sxemlərdən (bax, *Yul – Uoker statistik qiymətləri*, *Boks – Cenkins metodu*) fərqi ondan ibarətdir ki, müşahidələrin intervalı çərçivəsində sıranın irəli və geri biraddımlı ekstrapolyasiyasında xətaların empirik dispersiyaları cəminin yarısına bərabər $\sigma_a^2(p)$ statistik qiymətindən istifadə olunur. B. m. ilə alınan sonuncu avtoreqressiya əmsalı φ_p-nin («inikas əmsalı») modulunun vahiddən ciddi kiçik olması təmin olunur. B. m.-na əsasən hesablanan spektral sıxlığın parametrik statistik qiymətləri *Yul – Uoker tənliklərinin* (bax, [2]) birbaşa həlli nəticəsində alınan statistik qiymətlərdən dispersiyasının böyüklüyü və tezliyin daha yüksək ola bilməsi ilə fərqlənir.

B. m.-da müşahidələr sırasını biraddımlı ekstrapolyasiya xətaları ardıcıllığına çevirən xətti filtrin əmsallarının statistik qiymətləri axtarılır. *Levinson alqoritmindən* istifadə olunan uyğun hesablamaların sxemi, məs., [3], [4]-də şərh olunmuşdur. Avtoreqressiya əmsallarının və qalıq küy dispersiyasının hesablanması üçün altproqramlar [2], [5], kompleks proqram – [4]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Modern Spectrum analysis, N. Y., 1978, p. 38–41; [2] Ulrich T., Bishop T., «Rey. Geophys. Space Phys.», 1975, v. 13, № 1, p. 183–200; [3] Smylie D., Clarke G., Ulrich T., «Methods in Comput. Phys.», 1973, v. 13, p. 391–430; [4] Привальский В. Е., Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры), М., 1985; [5] Канаселвич Э. Р., Анализ временных последовательностей в геофизике, пер. с англ., М., 1985.

BERLİNQ BƏRABƏRSİZLİYİ « Берлинга неравенство; Burling's inequality » – bax, *Tam variasiya metrikası.*

BERNŞTEYN BƏRABƏRSİZLİYİ « Бернштейна неравенство; Bernstein's inequality » – klassik *Çebışev bərabərsizliyinin* dəqiqləşdirilmiş forması olub, S. N. Bernşteynə (1911, bax, [1]) məxsusdur; böyük yayınmalar ehtimalının qüvvət üstlü statistik qiymətini eksponensial surətdə azalanla əvəz etməyə imkan verir (bax, *Böyük yayınmalar ehtimalları*). Əgər $\mathbf{M} X_j = 0$ və $\mathbf{M} X_j^2 = b_j$, $j = 1, ..., n$ şərtlərini ödəyən, asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $\mathbf{M}|X_j|^l \le$ $\le b_j H^{l-2} l!/2$ ($l > 2$, H, – j-dən asılı olmayan sabitdir) bərabərsizlikləri ödənilərsə, onda $S_n = X_1 + ... + X_n$ cəmi üçün $r > 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|S_n| > r\} \le 2\exp\{-r^2/2(B_n + Hr)\}, \qquad (1)$$

– Bernşteyn bərabərsizliyi doğrudur;

$B_n = \sum b_j$. Eyni qanunla paylanmış məhdud X_j təsadüfi kəmiyyətləri üçün ($\mathbf{M}X_j = 0$, $\mathbf{M}X_j^2 = \sigma^2$ və $|X_j| \le L$, $j = 1,...,n$) (1) bərabərsizliyi

$$\mathbf{P}\{|S_n| > t\sigma\sqrt{n}\} \le 2\exp\{-t^2/2(1+a/3)\} \qquad (2)$$

münasibəti ilə daha sadə şəkildə ifadə olunur; $a = Lt/\sqrt{n}\sigma$. A. N. Kolmoqorov (1)-də ehtimalın aşağı qiymətini almışdır. Bernşteyn – Kolmoqorov qiymətləndirilmələri təkrar loqarifm qanununun isbatında istifadə olunur. (2)-nin dəqiqliyi haqqında müəyyən təsəvvür (2) bərabərsizliyinin sol tərəfi üçün mərkəzi limit teoreminin

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2/2}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}t}\left(1-\frac{\theta}{t^2}\right)e^{-t^2/2},\ 0<\theta<1$$

düsturu ilə verilən təqribi qiyməti ilə müqayisədən alınır. 1967-dən sonra birölçülü B. b.-lərindən başqa çoxölçülü və sonsuzölçülü hallar üçün də analoji bərabərsizliklər alınmışdır.

Əd.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946; [2] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 101, S. 126–35; [3] Hoeffding W., «J. Amer. Statist. Assoc.» , 1963, v. 58, № 301, p. 13–30; [4] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 266–74; [5] Прохоров А. В., «Матем. заметки», 1968, т. 3, в. 6, с 731–39; [6] Юринский В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 1, с. 106–07.

BERNŞTEYN TEOREMİ « Бернштейна теорема; Bernstein theorem » – bax, *Böyük ədədlər qanunu.*

BERNULLİ AXINI « Бернулли поток; Bernoulli flow » – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi.*

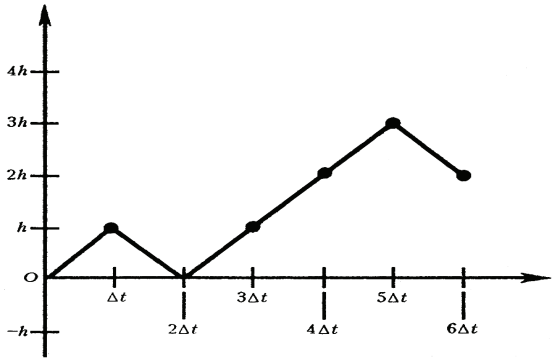
BERNULLİ ARDICILLIĞI « Бернулли последовательность; Bernoulli sequence » – bax, *Binomial paylanma.*

BERNULLİ AVTOMORFİZMİ « Бернулли автоморфизм; Bernoulli automorphism » – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi.*

BERNULLİ DOLAŞMASI « Бернулли блуждание; Bernoulli random walk » – *Bernulli sınaqlarının* doğurduğu *təsadüfi dolaşmadır.* B. d. timsalında daha ümumi təsadüfi dolaşmaların bəzi əsas cəhətlərini izah etmək mümkündür. İntuitiv nöqteyi – nəzərdən təsadüfiliyin paradoksal xassələri bu sadə sxemdə aydın olur.

B. d.-nı, məs., aşağıdakı terminlərlə ifadə etmək olar. Məs., hissəcik x oxu üzrə kh (k – tam ədəddir, $h>0$) tipli nöqtələr şəbəkəsilə hərəkət edir («dolaşır»). Hərəkət $t=0$ anında başlayır və hissəciyin vəziyyəti yalnız $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, ...$ diskret anlarında qeyd olunur. Hissəciyin koordinatı hər addımda əvvəlki vəziyyətindən asılı olmayaraq h qədər p və $q=1-p$ ehtimalları ilə uyğun olaraq ya artır, yaxud azalır.

Beləliklə, hissəciyin sağa və ya sola yerinidəyişməsi (uyğun olaraq «müvəffəqiyyət» və «qeyri – müvəffəqiyyət») «müvəffəqiyyət» ehtimalı p -yə bərabər olan Bernulli sxemi ilə ifadə olunur. B. d., adətən, həndəsi olaraq təsvir olunur: zaman oxu t – absis oxu, x oxu isə ordinat oxu kimi götürülür (bax, şəkil 1, burada hərəkətini 0 anında başlayan hissəciyin hərəkət qrafikinin başlanğıc hissəsi verilmişdir).



Şəkil 1. Bernulli hərəkəti edən hissəciyin hərəkət qrafikinin başlanğıc hissəsi.

ξ_i , – i -ci addımda hissəciyin yerinidəyişməsinə (addımına) bərabər təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı əmələ gətirir.

Hərəkətdə olan hissəciyin $n\Delta t$ anındakı vəziyyətinin koordinatı $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyəti ilə təyin olunur. Buna görə də, B. d.-nın qrafiki təsadüfi kəmiyyətlərin artmaqda olan cəmlərini əyani olaraq təsvir edir və qrafikdə olan bu dəyişmələrə xas olan bir çox səciyyəvi cəhətlər daha ümumi təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün də dəyişməz qalır. Klassik «*iflas məsələsi*»ndə oyunçulardan birinin kapitalının dəyişmələri də bu qrafiklə təsvir edilir (məhz bu məsələ ilə əlaqədar B. d.-nın bir çox müşahidə olunan hadisələrinin ehtimalları üçün düsturlar tapılmışdır).

Fizikada birölçülü diffuziya proseslərinin (bax, *Diffuzion proses*) «kobud» təsvirində, molekulların təsviri ilə hərəkətdə olan maddi hissəciklərin Braun hərəkəti üçün B. d. istifadə olunur.

B. d. ilə bağlı mühüm faktlar aşağıdakılardır (əgər qeyd olunmursa, $\Delta t = 1$, $h = 1$ qəbul olunmuşdur).

Qayıdış ehtimalları. Hissəcik hərəkətini sıfırdan başlayır. Bu halda hissəciyin sıfır vəziyyətinə heç olmasa bir qayıdışı ehtimalı $1-|p-q|$-yə bərabərdir, yəni $p=q=1/2$ olan simmetrik halda vahidə bərabərdir, $p \ne q$ olan simmetrik halda isə bu ehtimal vahiddən kiçikdir. Simmetrik halda τ_1 – hissəciyin sıfır vəziyyətinə ilk qayıdışa qədər müddəti, τ_2 – birinci və ikinci qayıdışlar arasındakı müddət və τ_3 – ikinci və üçüncü qayıdışlar arasındakı müddət və i. a. olarsa, $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ məhz asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. τ_i təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sonsuzluqdur. Hissəciyin sıfır vəziyyətinə N-ci qayıdışına qədərki müddət, yəni $\tau_1 + ... + \tau_N$ təsadüfi kəmiyyəti (cəmi) N^2 kimi artır, daha dəqiq $\tau_1 + ... + \tau_N < xN^2$ bərabərsizliyinin ehtimalının limiti

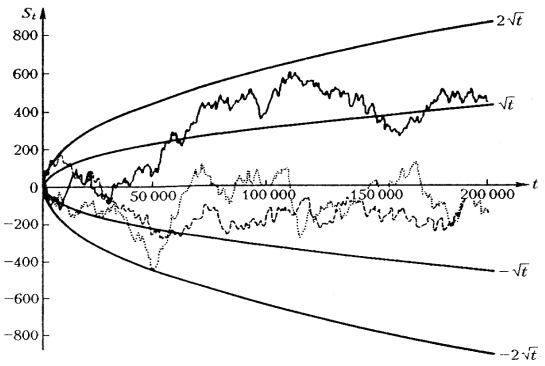
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{1/\sqrt{x}}^\infty e^{-s^2/2}\,ds$$

kəmiyyətinə bərabərdir. $2n$ addıma qayıdışlar sayı N_{2n} təsadüfi kəmiyyətinin orta qiyməti

$$\mathbf{M}(N_{2n}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}C_{2n}^n - 1$$

düsturu ilə təyin olunur və bu kəmiyyət $\sqrt{n}$ kimi artır:

$$\mathbf{M}(N_{2n}) \sim 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$



Şəkil 2. Üç Bernulli dolaşmasının qrafiki, hər bir dolaşma 200000 zaman vahidi ərzində müşahidə olunmuşdur.

Bu faktdan paradoksal nəticə: simmetrik B. d.-nın qrafikindəki ardıcıl surətdə sıfra qayıdışlar arasındakı «dalğalar»ın son dərəcə uzun (şəkil 2) olması nəticəsi alınır. Bununla bir də belə vəziyyət əlaqədardır ki, B. d.-sının qrafikinin absis oxundan yuxarıda olduğu müddətin hissəsi T_n/n üçün $1/2$ -ə yaxın olan qiymətləri ən az ehtimallı olur. Daha dəqiqliklə, $k\to\infty$, $n-k\to\infty$ olduqda $T_{2n}=2k$ bərabərliyinin ehtimalı $p_{2n,2k}$ üçün

$$p_{2n,2k} \sim \frac{1}{\pi n\sqrt{x\,(1-x)}}$$

düsturunun doğruluğu hökmü alınır, burada $x = x_{n,k} = k/n$. Bu hökmdən nəticə kimi **arksinus qanunu** alınır: hər bir $0<\alpha<1$ şərtini ödəyən α üçün

$$\mathbf{P}\{\ T_n/n < \alpha\} \to \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}\,.$$

Bu fakta əsaslanaraq göstərmək olar ki, 10000 addıma hissəcik $\geq 0{,}1$ ehtimalı ilə müsbət tərəfdə zamanın 9930 andan çox dəfə qalır, başqa sözlə, hissəcik hər on halda bir dəfədən az olmayaraq müsbət tərəfdə olacaqdır (ilk baxışdan bu hal mənasız görünür).

Maksimal yayınma. Hərəkətdə olan hissəcik vahid ehtimalla $p>q$ olduqda $+\infty$-a; $p<q$ olduqda $-\infty$-a gedir. Buna görə də, məs., $p<q$ olduqda $S^+ = \max\limits_{0\leq i<\infty} S_i$ təsadüfi kəmiyyəti təyin olunur və bu kəmiyyətin ehtimalı

$$\mathbf{P}\{S^+ = x\} = (1-p/q)\,(p/q)^x$$

olur.

Sərhədlərli Bernulli dolaşması. Bir çox hallarda uducu və ya əksedici ekranlarlı B. d.-na baxılır. Məs., fərz olunur ki, dolaşma sıfırdan başlayır. a nöqtəsində uducu ekranın olması hissəciyin bu nöqtəyə çatdıqda həmin nöqtədə qalması kimi anlaşılır, yəni hissəcik hərəkət etmir və a nöqtəsində qalır.

$a=(k+1/2)$ nöqtəsində ($k\geq 0$, tam ədəddir) əksedici ekran olduğu halda, hissəcik q ehtimalı ilə k-dan $k-1$ vəziyyətinə keçir və p ehtimalı ilə öz yerində qalır. Udulma ehtimalları və bu və ya digər nöqtələrə çatma ehtimallarının hesablanması üçün əsas vasitə fərqlər tənlikləridir. Məs., uducu nöqtənin $-a$ ($a>0$) olduğu fərz olunur. $z_{t,x}$, $-t$ anında x nöqtəsində olan hissəciyin n anına qədər (n anı da daxil olmaqla) udulmadığı ehtimalıdırsa, onda bu ehtimal

$$z_{t,x} = q\,z_{t+1,\,x-1} + p\,z_{t+1,\,x+1}, \qquad x>-a$$

tənliyi və

$$z_{t,-a} = 1, \qquad 0\leq t\leq n$$

$$z_{n,x} = 0, \qquad x>-a$$

sərhəd şərtlərilə təyin olunur. $p=q=1/2$ olduqda bu məsələnin həlli A. Muavr (A. Moivre) və P. Laplasa (P. Laplas) məlum idi. **Laplas düsturu** aşağıdakı şəkildədir:

$$z_{t,x} = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(a+x)\varphi}{\sin\varphi}\,(\cos\varphi)^{\gamma}d\varphi, \qquad (*)$$

burada

$$\gamma = a + x + 2\left[\frac{n-t-x-a}{2}\right] + 1.$$

Diffuziya məsələləri ilə bağlı hallarda, məs., $p=q=1/2$, $\Delta t = 1/N$, $h = 1/\sqrt{N}$ olduğu halda B. d. sxemi üçün $N\to\infty$ olduqda hesablanmış ehtimallar Braun hərəkəti üçün analoji ehtimallara bərabər olan limitlərə yaxınlaşır. Hərəkətini sıfırdan başlayan hissəciyin T anına qədər uducu ekranda $-\alpha$ nöqtəsində hərəkətini dayandırması hadisəsinin ehtimalını hesablamaq tələb olunur. $n/N = T$, $t=0$, $x=0$, $a/\sqrt{N} = \alpha$ olduqda, (*) düsturunda limitə keçdikdə

$$1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha/\sqrt{T}} e^{-z^2/2}dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha/\sqrt{T}}^{\infty} e^{-z^2/2}dz$$

kəmiyyəti alınır. Bu kəmiyyət Braun hərəkətində olan hissəciyin koordinatı $X(\upsilon)$-nin $\min\limits_{0\leq\upsilon\leq T} X(\upsilon) \leq -\alpha$ bərabərsizliyini ödəməsi ehtimalına, yəni hissəciyin $-\alpha$ səddində udulma ehtimalına bərabərdir. Bu və ya digər surətdə oxşar paralel münasibətləri tam təsvir etmək üçün ümumi nöqteyi – nəzərdən yanaşaraq «artmaqda olan cəmlərin» diskret prosesindən kəsilməz təsadüfi prosesə keçidi araşdırmaq olar.

B. d. sxemi ilə *gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu* və *təkrar loqarifm qanunu* kimi təsadüfi kəmiyyətlərin cəminə xas olan qanunauyğunluqları əyani surətdə izah etmək olur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

BERNULLİ ENDOMORFİZMİ « Бернулли эндоморфизм; Bernoulli endomorphism » – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi.*

BERNULLİ ƏDƏDLƏRİ « Бернулли числа; Bernoulli numbers » – Ya. Bernullinin adı ilə adlandırılmış,

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\,\frac{x^n}{n!}$$

ayrılışı ilə təyin olunan, rasional B_n ədədləridir. İlk dəfə B. ə. natural qüvvət üstlü ardıcıl natural ədədin qüvvət üstlü cəmlərinin öyrənilməsi ilə əlaqədar Bernulli tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1]). Bəzən $\beta_n=(-1)^{n-1}B_{2n}$, $n\geq 1$ ədədləri də B. ə. adlanır. $n\geq 3$ şərtini ödəyən bütün təkqiymətli n-lər üçün $B_n=0$, ilk B. ə.-nin qiymətləri isə $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$; $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$, $B_8=-1/30$, $B_{10}=5/66$, $B_{12}=-691/2730$ kimidir. B. ə.-nin sonrakı qiymətləri isə

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k=0,\quad n>1$$

rekurrent münasibətilə təyin olunur.

$n\leq 90$ olduğu hallarda B_{2n} üçün dəqiq qiymətlər, $n\leq 250$ halları üçün təqribi qiymətlər hesablanmışdır (bax, [2]).

z-in cüt qiymətlərində B. ə. $\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}$ Riman dzeta – funksiyası vasitəsilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\,\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,\zeta(2n),\quad n\geq 1.$$

B. ə. analizin, ədədlər nəzəriyyəsinin, kombinatorikanın, riyazi statistikanın bir çox məsələlərində mühüm rol oynayır, bir sıra maraqlı arifmetik və kombinator xassələrə malikdirlər.

Qeyri – məxsusi inteqrallar sırasının qiymətləri B. ə. vasitəsilə ifadə olunur, məs.:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{e^{ax}+1}\,dx=\frac{2^{2n-1}-1}{2n}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2n}\left|B_{2n}\right|,\quad a>0,\ n\geq 1;$$

bunlar bir çox analitik funksiyaların qüvvət sıralarına ayrılışındakı əmsallar olur, məs.:

$$\operatorname{tg} z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,2^{2n}(2^{2n}-1)\,B_{2n}\,\frac{z^{2n-1}}{(2n)!},\quad |z|<\frac{\pi}{2};$$

$$\ln\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n-1}\,B_{2n}\,\frac{z^{2n}}{n(2n)!},\quad |z|<\pi.$$

B. ə. Eyler – Makleron cəmləmə düsturunda iştirak edirlər:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)=\int_x^{x+n} f(t)\,dt-\frac{1}{2}\,(f(x+n)-f(x))+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\,(f^{(2k-1)}(x+n)-f^{(2k-1)}(x))+R_r(x,n).$$

Təqribi hesablamalar üçün istifadə olunan asimptotik Stirlinq sırası da B. ə. ilə ifadə olunur:

$$\ln\Gamma(x+1)\approx(x+1/2)\ln x-x+\ln\sqrt{2\pi}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\,x^{-2k+1}.$$

Riyazi statistikada B. ə.-nə, əsas etibarilə, müşahidələri qruplaşdırarkən momentlərə Şeppard düzəlişləri ilə əlaqədar təsadüf olunur. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması mütləq kəsilməz paylanmadırsa və bu paylanma h uzunluqlu intervallarla qruplaşdırılırsa və $\overline{\alpha}_\upsilon$ qruplandırılmış paylanmanın υ tərtib momentidirsə, onda uyğun şərtlərlə

$$\alpha_\nu\equiv\mathbf{M}\xi^\nu=\sum_{k=0}^{\nu}C_\nu^k\,(2^{1-k}-1)\,B_k\,h^k\,\overline{\alpha}_{\nu-k};$$

semiinvariantlar üçün isə daha sadə ifadə:

$$\varkappa_\nu=\overline{\varkappa}_\nu-B_\nu h^\nu/\nu,\quad \nu>1,\quad \chi_1=\overline{\chi}_1$$

olur.

Mərkəzi momentlər, ikiölçülü momentlər və semiinvariantlar üçün analoji düsturlar mövcuddur (bax, [3]).

Ədb.: [1] Бернулли Я., О законе больших чисел, пер. с лат., 1986; [2] Tables of the higher mathematical functions, v. 2, Bloomington, 1935; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [5] Бурбаки Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965.

BERNULLİ PAYLANMASI « Бернулли распределение; Bernoulli distribution » – bax, *Binomial paylanma.*

BERNULLİ SXEMİ « Бернулли схема; Bernoulli scheme » – bax, *Bernulli sınaqları*.

BERNULLİ SINAQLARI « Бернулли испытания; Bernoulli trials » – yalnız iki nəticə ilə (məs., «müvəffəqiyyət» və «qeyri – müvəffəqiyyət») ifadə oluna bilən elə *asılı olmayan sınaqlardır* ki, ixtiyari sınaqda baş verə bilən eyni bir nəticənin ehtimalı sınaqdan sınağa dəyişmir. B. s. ehtimal nəzəriyyəsində baxılan əsas sxemlərdən biridir.

p – bir sınaqda «müvəffəqiyyət» (sadəlik üçün «M» ilə işarə etmək olar) baş verməsi ehtimalı, $q=1-p$ isə bir sınaqda «qeyri – müvəffəqiyyət» («Q» simvolu ilə işarə etmək olar) baş verməsi ehtimalı olsun. Onda n sayda sınaqlar ardıcıllığında, məs., $\mathrm{MM}\underbrace{\mathrm{Q}\ldots\mathrm{Q}}_{n-3}\mathrm{M}$ düzümünün ehtimalı $\underbrace{ppq\cdot\ldots\cdot qp}_{n-3}=p^3q^{n-3}$ olur. B. s. sxemi ilə bir çox ehtimal paylanmaları bilavasitə bağlıdır. Məs., *binomial paylanma*, *mənfi binomial paylanma*, *həndəsi paylanma* belə paylanmalardır. n sayda B. s.-ında baş verən müvəffəqiyyətlər sayı S_n olsun. Onda $\{S_n=k\}$ hadisəsinin ehtimalı

$$\mathbf{P}\{S_n=k\}=C_n^k\,p^k\,q^{n-k}\qquad(*)$$

düsturu ilə təyin olunur, $k=0,1,\ldots,n$; yəni S_n təsadüfi kəmiyyəti binomial paylanma qanununa tabedir. Binomial paylanma üçün (*) düsturunda $n\to\infty$ olduqda, $\mathbf{P}\{S_n=k\}$ ehti-

malı ya *normal paylanmaya*, yaxud *Puasson paylanmasına* yaxınlaşır (bax, [1], [2]). X_1 – ilk müvəffəqiyyətə qədər aparılan sınaqların sayı olsun. Onda $\{X_n = k\}$ hadisəsinin ehtimalı $\underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{k \text{ dəfə}} p$ hasili ilə təyin olunur və $\mathbf{P}\{Y_1 = k\} = q^k p$, $k = 0, 1, \ldots$. Bu halda Y_1 təsadüfi kəmiyyəti *həndəsi paylanma* qanununa tabedir. Əgər Y_r, – r -ci «müvəffəqiyyət» baş verənə qədər, «qeyri – müvəffəqiyyət»lərin sayı olarsa, onda r -ci «müvəffəqiyyət» yalnız $(r+k)$ -cı sınaqda baş verdiyinə görə $\{Y_r = k\}$ hadisəsinin ehtimalı

$$\mathbf{P}\{Y_r = k\} = C^k_{r-1+k}\, p^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

düsturu ilə təyin olunur. Bu halda Y_r təsadüfi kəmiyyəti *mənfi binomial paylanma* qanununa tabedir. B. s.-ında müvəffəqiyyətlər sayı S_n -i n sayda asılı olmayan $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi ilə ifadə etmək olar; bu halda ξ_i – bir sınaqda «müvəffəqiyyət» sayını ifadə edən elə təsadüfi kəmiyyətdir ki, $\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{M\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{Q\} = q$, $p+q=1$. Onda $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminə aid olan bir çox mühüm qanunauyğunluqlar ilk dəfə B. s. sxemi üçün müəyyənləşdirilmişdir (*Bernulli teoremi*, *böyük ədədlər qanunu*, *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu*, *təkrar loqarifm qanunu*, *mərkəzi limit teoremi və s.*).

Sonsuz B. s.-nın ciddi araşdırılması üçün 0 və 1 -dən ibarət sonsuz ardıcıllıqlar fəzasında ehtimal ölçüsünün təyin olunması zəruridir. Bu ya bilavasitə, ya da ki, $p = q = 1/2$ halı üçün aşağıda şərh olunan qaydada təyin olunur. ω, – $(0, 1)$ parçasında ixtiyari seçilmiş ədəd, *müntəzəm qanunla* paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun. $\xi_j(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti 0 və ya 1 qiymətlərindən birini alır, $j = 1, 2, \ldots$. Onda $\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(\omega)/2^j$ cəmi ω -nın ikilik kəsrə ayrılışıdır. Aydındır ki, $\mathbf{P}\{\xi_i(\omega) = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i(\omega) = 1\} = 1/2$ və $\xi_j(\omega)$ -lar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Deməli, ω -nın 0 və 1 -lərin müəyyən düzümü ilə ikilik kəsrə ayrılışı B. s. sxemi ilə təsvir olunur, bu halda $p = 1/2$. Lakin $(0, 1)$ -də ölçünü elə təyin etmək olar ki, ixtiyari p ($p \neq 1/2$ olduqda Lebeq ölçüsünə görə sinqulyar ölçü alınır) üçün B. s. sxemi alınsın.

B. s. bir çox hallarda həndəsi olaraq izah edilir (bax, *Bernulli dolaşması*). B. s. ilə bağlı bir sıra ehtimallar iflas məsələləri ilə əlaqədar olaraq ehtimal nəzəriyyəsinin ilkin mərhələlərində hesablanmışdır.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] К а ц М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

BERNULLİ TEOREMİ « Бернулли теорема; Bernoulli theorem » – *böyük ədədlər qanununun* tarixən ilk dürüst ifadəsidir. B. t. Ya. Bernullinin (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» (Fərzetmələr məharəti) kitabının dördüncü hissəsində şəhr olunmuşdur. Kitabın bu hissəsi ehtimal nəzəriyyəsi üzrə ilk ciddi əsər sayılır. B. t. *asılı olmayan sınaqlar* ardıcıllığına (bax, *Bernulli sınaqları*) aiddir; bu sınaqlardan hər birində hər hansı müşahidə oluna bilən müəyyən bir hadisənin baş vermə ehtimalı («müvəffəqiyyət» ehtimalı) p -yə bərabərdir. n – sınaqların sayı, m – bu sınaqlarda «müvəffəqiyyət»lər baş verməsi sayı olsun. B. t.-ində hökm olunur ki, ε və η ixtiyari müsbət ədədlər olarsa, elə n_0 ədədi vardır ki, $n \geq n_0$ şərtini ödəyən bütün n -lər üçün

$$\mathbf{P}\{-\varepsilon \leq m/n - p \leq \varepsilon\} \geq 1 - \eta$$

münasibəti doğrudur. Ya. Bernullinin bu teorem üçün verdiyi isbat, (və yalnız binomial paylanmada ehtimalların ən böyük ehtimallı qiymətdən uzaqlaşdıqca azalması xüsusiyyətinin öyrənilməsinə əsaslanan) verilmiş ε və η -ya görə n_0 üçün sərhədi təyin etməyə imkan verən bərabərsizliyə əsaslanır. Məs., Ya. Bernulli hesablamışdır ki, $p = 2/5$ və $n \geq 25550$ olduqda

$$\mathbf{P}\{-1/50 \leq m/n - p \leq 1/50\} \geq 0,999$$

olur.

Ya. Bernullinin ilkin mülahizələri bir qədər təkmilləşdirilməklə, kifayətdir ki, n_0 ədədi

$$n_0 > (1 + \varepsilon)/\varepsilon^2 \ \log 1/\eta \ + \ 1/\varepsilon$$

şərti ödənilməklə seçilsin və buna görə də, $|m/n - p| > \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalı $(1 - \mathbf{P})$ -nin qiymətləndirilməsi üçün $2 \cdot \exp\{-n\varepsilon^2/2\}$ alınır.

Yuxarıda verilmiş misal üçün $n \geq 17665$ şərti alınır (daha mürəkkəb qiymətləndirmələrdən aydın olur ki, $n \geq 6502$ götürmək kifayətdir; müqayisə üçün: Muavr – Laplas teoreminə əsasən n_0 üçün təqribi qiymət 6498 alınır). $1 - \mathbf{P}$ ehtimalı üçün *Bernşteyn bərabərsizliyindən* və onun analoqlarından istifadə etməklə digər qiymətləndirmələr almaq olur (bax, *Binomial paylanma*).

Əd.: [1] Б е р н у л л и Я., О законе больших чисел, пер. с лат., М., 1986; [2] М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Б е р н ш т е й н С. Н., Теория вероятностей, 4 изд, М. – Л., 1946.

BERNULLİ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİ « Бернулли случайная величина; Bernoulli randon variable » – 1) 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq, p və $1 - p$ ($0 < p < 1$) ehtimalları ilə alan təsadüfi kəmiyyətdir. Əgər $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – asılı olmayan B. t. k.-ləridirsə, onda $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ təsadüfi kəmiyyəti binomial paylanma qanunu ilə paylanır.

2) -1 və $+1$ qiymətlərini eyni ehtimalla alan təsadüfi kəmiyyətdir. Rademaxer ardıcıllığı asılı olmayan B. t. k.-ə misaldır.

BERNULLİ VEKTORU « Бернулли вектор; Bernoulli vector » – bax, *Lyusian*.

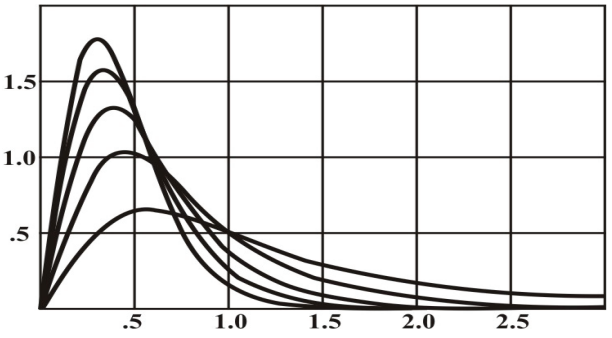
BERNULLİ YERİNİDƏYİŞMƏSİ « Бернулли сдвиг; Bernoulli shift » – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmə çevirməsidir. B. y. T – hesabi sayda $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ ehtimal fəzalarının düz hasili $\prod_{i \in I} (Y_i, \mathscr{B}_i, \nu_i)$ fəzasında təsir göstərir (bu zaman $I = \mathbb{Z}^+$ və ya $\mathbb{Z}$) və bu

çevirmə $\omega = (\omega_i, i \in I)$ ardıcıllığını $\omega' = (\omega'_i, i \in I)$ ardıcıllığına çevirir, burada $\omega'_i = \omega_{i+1}$. Əgər $I = \mathbb{Z}^+$ olarsa, onda T – birtərəfli Bernulli yerinidəyişməsi (və ya Bernulli endomorfizmi), əgər $I = \mathbb{Z}$ olarsa, onda T – ikitərəfli Bernulli yerinidəyişməsi (və ya Bernulli avtomorfizmi) adlanır. $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ vəziyyətlər fəzası adlanır. Bütün dinamik sistemlərdəki B. y.-ləri ən güclü stoxastiklik (qarışma) xassələri ilə seçilirlər; məs., birtərəfli B. y. dəqiq endomorfizmdir, ikitərəfli B. y. isə K – avtomorfizmdir. «B. y.» termini (eyni zamanda «Bernulli endomorfizmi» və «Bernulli avtomorfizmi» terminləri) ehtimal fəzasının ixtiyari endomorfizminə (avtomorfizminə) görə işlənilir, bu halda endomorfizm (avtomorfizm) yuxarıda qeyd olunan mənada B. y.-nə izomorfdur. Sonlu sayda vəziyyətləri olan dar mənada stasionar x_n, $-\infty < n < \infty$ təsadüfi ardıcıllığının realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmə üçün izomorfizm, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, x_n ardıcıllığı Ornsteynin «çox zəif Bernullilik» şərtini ödəsin (bax, [1], [2]), bu şərt isə Kolmoqorov requlyarlıq və mütləq requlyarlıq şərtləri arasında (bax, [3]) yer tutur.

Eyni entropiyalı bütün B. y.-ləri izomorfdurlar (bax, *İzomorfizmi*, *dinamik sistemlərin* metrik). Hər bir ikitərəfli T B. y. hər hansı bir $\{S^t, -\infty < t < \infty\}$ ölçülən axınına elə daxil ola bilinər ki, $T = S^1$ olsun. Belə axına daxil olan hər bir çevirmə uyğun entropiyası ilə B. y.-nə izomorfdur, axının özü isə Bernulli axını adlanır.

Əd.: [1] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., M., 1978; [2] Ornstein D., Weiss B., «Isr. J. Math.», 1974, v. 17, № 1, p. 94–104; [3] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, M., 1970.

BERR PAYLANMASI « Беррa распределение; Burr distribution » – məlum paylanmaların, o cümlədən, normal paylanmanın approksimasiyası üçün İ. Berr tərəfindən [1]-də təklif olunmuş *paylanmalar* ailəsidir. B. p. empirik paylanma funksiyasının hamarlanması üçün də tətbiq olunur.



$\alpha = 2$ və $\beta = 1; 2; 3; 4; 5$ qiymətlərində Berr paylanmasının sıxlıq funksiyası.

Ən sadə B. p.-nın paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x^{\alpha})^{\beta}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Burr I., «Ann. Math. Statist.», 1942, v. 13, № 2, p. 215–32.

BERRİ – ESSEEN BƏRABƏRSİZLİYİ « Берри – Эссеена неравенство; Berry – Esseen inequality » – bir ölçülü F və G paylanma funksiyalarına uyğun f, g xarakteristik funksiyalar terminlərində $\rho(F, G)$ *müntəzəm metrikasının* yuxarı sərhədidir.

Sıxlıq funksiyası məhdud olan G paylanmaları halında B. – E. b.-nin bir-birindən prinsipial fərqlənməyən variantları A. Berri (bax, [1]) və K. Esseen (bax, [2]) tərəfindən bir-birindən asılı olmayaraq tapılmışdır. Bu bərabərsizlik bir qədər modifikasiya olunmuş şəkildə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\rho(F, G) \leq A \int_0^T \left| f(t) - g(t) \right| \frac{dt}{t} + B \frac{q}{T}, \qquad (1)$$

burada T – ixtiyari müsbət ədəddir, $q = \sup_x G'(x)$,

$$A(\theta) = \frac{\theta}{\pi(2V(\theta) - \theta)}, \quad B(\theta) = \frac{\theta V(\theta)}{2V(\theta) - \theta}, \qquad (2)$$

$$V(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(\theta \int_0^{\theta} \sin t \frac{dt}{t} - 1 + \cos\theta\right),$$

θ parametri isə $2V(\theta) > \theta$ $(\theta > 1{,}6996)$ şərtini ödəyən ixtiyari qiymətləri ala bilər.

A və B kəmiyyətlərinin dəyişikliklərinin xarakteri haqqında onların aşağıdakı qiymətlərinə görə mülahizə yürütmək olar:

θ	$A(\theta)$	$B(\theta)$
3,1	0,5930	4,4376
3,8	0,4659	4,6812
4,5	0,4169	5,1967
5,2	0,3992	5,8610
5,7	0,3956	6,3923
6,7	0,3951	6,7236.

A və B əmsallarının (2) şəklini saxlamaqla (1) bərabərsizliyini müəyyən bir qayda üzrə $V(\theta)$ funksiyasını seçmək hesabına dəyişmək olar ki, bu θ-nın konkret qiymətləri üçün $A(\theta)$ və $B(\theta)$ qiymətlərini azaltmağa imkan verir (bax, [3], [4]). B. – E. b. paylanmaların limit paylanmasına yığılma sürətinin qiymətləndirilməsi məsələlərinin bir çoxunda, məs., *Berri – Esseen teoremlərində* olduğu kimi, mühüm analitik alət rolunu oynayır. B. – E. b.-nin çoxölçülü yaxşı analoqları yoxdur, lakin birölçülü halda bir sıra digər metrikalar üçün belə analoqlar vardır (bax, *Levi metrikası*, *Orta metrika*).

Əd.: [1] Berry A. C., « Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, № 1, p. 120–36; [2] Esseen C.-G., «Ark. Mat., Astr. och Fysik», 1942, Bd 28A, № 9, S. 1–19; [3] Zolotarev V. M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 8, S. 332–42; [4] van Beek P., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd 23, S. 187–96.

BERRİ – ESSEEN TEOREMİ « Берри – Эссеена теорема; Berri – Esseen theorem » – $\mathbf{M}X_i = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 + \ldots + \mathbf{M}X_n^2 = 1$, $\varepsilon = \mathbf{M}\left|X_1\right|^3 + \ldots + \mathbf{M}\left|X_n\right|^3 < \infty$ şərtlərini ödəyən, asılı olmayan $X_1, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri-

nin cəmi $S_n = X_1 + ... + X_n$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası F_n-in standart normal qanunun paylanma funksiyası Φ-dən yayınmasının ρ *müntəzəm metrikasında* yuxarı sərhəd qiyməti, yəni

$$\rho(F_n, \Phi) \le C\varepsilon, \qquad (1)$$

münasibətinin doğruluğu haqqında teoremdir, burada C – mütləq sabitdir. Bu qiymət A. M. Lyapunov tərəfindən alınmış (bax, *Lyapunov teoremi*) analoji qiymətin dəqiqləşməsi olub, A. Berri və K. Esseen (uyğun olaraq, [1] və [2]-də) tərəfindən bir-birindən asılı olmayaraq alınmışdır. X_i – eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda, S_n cəmini $S_n = (Y_1 + ... + Y_n)/\sqrt{n}$ şəklində, $\mathbf{M}Y_i = 0$, $\mathbf{M}Y_i^2 = 1$ şərtləri ilə ifadə etmək olar; onda (1) bərabərsizliyi aşağıdakı kimi ifadə olunar:

$$\rho(F_n, \Phi) \le C\beta/\sqrt{n}, \qquad (2)$$

burada $\beta = \mathbf{M}|Y_1|^3$. (1) və (2)-də C-nin yuxarı qiymətləri bir çox müəlliflər tərəfindən tapılmışdır (bax, [5]). C üçün ən yaxşı qiymətləri hal-hazırda İ. S. Şiqanov [4]-də tapmışdır: ümumi (1) halında $C \le 0{,}7975$, (2) xüsusi halında isə $C \le 0{,}7655$ (bax, [4] və [3]). K. Esseen isbat etmişdir ki, $C \ge C_0 = (\sqrt{10} + 3)/6\sqrt{2\pi} = 0{,}4097...$. (1)-də C-nin minimal qiymətinin C_0-a bərabər olması haqqında hipotez olduqca doğruyaoxşardır. (1), (2) şəklində B. – E. t.-nin müxtəlif dəqiqləşmələri vardır. Bunlardan ən maraqlısı (2)-ni dəqiqləşdirən Salahutdin – Ulyanov qiymətidir:

$$\rho(F_n, \Phi) \le C_1 \min(\varkappa_3, \varkappa_3^{\alpha_n}) n^{-1/2},$$

burada C_1 – mütləq sabitdir, $\alpha_n = \min(1, n/4)$ və $\varkappa_3 = 3\int x^2 |F(x) - \Phi(x)|\, dx$ – üçüncü tərtib fərq psevdomomentidir ki, bu momentdə F, Y_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

Əd.: [1] Berry A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, № 1, p. 120–36; [2] Esseen C.-G., «Ark. Mat. Astr. och Fysik», 1942, Bd 28A, № 9, S. 1–19; [3] Esseen C.-G., «Skand. Actuar.», 1956, № 3–4, p. 160–70; [4] Шиганов И. С., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, M., 1982, с. 109–15; [3] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, M., 1986.

BERTRAN MƏSƏLƏSİ « Бертрана задача; Bertrand problem » – bax, *Bertran paradoksu.*

BERTRAN PARADOKSU « Бертрана парадокс; Bertrand paradox » – ehtimal məsələlərinin həllində məsələnin qoyuluşunda ilkin şərtlərin (fərziyyələrin) qeyri – səlis ifadə olunması ilə bağlı paradokslardan biridir. J. Bertran tərəfindən qeyd olunmuşdur. [1]-də Bertran məsələsində vahid radiuslu dairədə «ixtiyari» seçilmiş vətərin uzunluğunun bu dairə daxilinə çəkilmiş düzgün üçbucağın tərəfindən böyük olması ehtimalını tapmaq tələb olunur. Vətərin vəziyyətini təyin edən parametrlərdən asılı olaraq axtarılan ehtimal üçün üç müxtəlif qiymət $(1/2,\ 1/3,\ 1/4)$ alınır: vətərin vəziyyəti birinci halda dairənin mərkəzindən vətərə qədər ρ məsafəsi və x oxu ilə vətərə çəkilmiş normal arasındakı θ bucağı ilə; ikinci halda vətərin çevrə ilə kəsişdiyi α və β nöqtələrinin bucaq koordinatları ilə; üçüncü halda dairənin mərkəzindən vətərə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağının dekart koordinatları $(x,\ y)$ ilə təyin olunur. Hər üç halda dairənin mərkəzi koordinat başlanğıcındadır. A. Puankare göstərmişdir ki (bax, [2]), paradoksun alınması səbəbi hər dəfə uyğun parametrlərin uyğun oblastda müntəzəm paylandığının qəbul edilməsidir. Həndəsi nöqteyi – nəzərdən ρ-nun $0 \le \rho \le 1$ intervalında, θ-nın $0 \le \theta \le 2\pi$ intervalında müntəzəm paylanan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu qəbul etmək təbii olardı (bax, [3]).

Əd.: [1] Bertrand J., Calcul des probabilités. P., 1889; [2] Poincaré H., Calcul des probabilités. 2 éd., P., 1912; [3] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., M., 1972.

BESSEL OPERATORU « Бесселя оператор; Bessel operator » – bax, *Bessel prosesi.*

BESSEL PROSESİ « Бесселя процесс; Bessel process » – aparı əmsalı $a(t, x) = (\alpha - 1)/2x$, diffuziya əmsalı $b(t, x) = 1$ olan birölçülü *diffuzion prosesdir*. Belə prosesin doğuran operatoru

$$L_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha - 1}{2x}\frac{d}{dx}\right)$$

düsturu ilə ifadə olunan Bessel operatoru adlandırılan operatordur. Əgər $\alpha = d$ natural ədəddirsə, onda B. p. d – ölçülü $\boldsymbol{w}(t) = \{\boldsymbol{w}_1(t), ..., \boldsymbol{w}_d(t)\}$ Viner prosesinin radial hissəsi $|\boldsymbol{w}(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{w}_i^2(t)}$ ilə eyniləşdirilə bilinər. $\alpha = 2$ olan B. p. – Reley prosesi adlanır.

BETA – APPROKSİMASİYA « бета – аппроксимация; beta approximation » hiperhəndəsi paylanma üçün – xüsusi olaraq seçilmiş paylanma vasitəsilə hiperhəndəsi paylanmanın yaxınlaşmasına əsasən qurulmuş approksimasiyadır. «B. – a.» termini binomial paylanmanın approksimələdici funksiyasının uyğun beta–paylanması terminologiyasında ifadə oluna bilinməsi ilə bağlı yaranmışdır.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin parametrləri N, n və M olan hiperhəndəsi paylanma qanununa tabe olduğu fərz olunur:

$$\mathbf{P}\{\xi = m\} = \begin{cases} \dfrac{C_M^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}; & \text{əgər } \max(0,\ M+n-N) \le \\ & \le m \le \min(M, n) \text{ olarsa;} \\ 0, & \text{digər hallarda.} \end{cases}$$

$N \ge 25$ olduqda $\mathbf{P}\{\xi \le m\}$ ehtimalını hesablamaq üçün B. – a. məsləhətdir (bax, [1]) və bu halda

$$\mathbf{P}\{\xi \le m\} \approx \mathbf{I}_{1-x}(n' - m + c,\ m - c + 1)$$

götürülür, burada $0 \le t \le 1$, $a > 0$, $b > 0$ olduqda

$$\mathbf{I}_t(a,b) = B_{a,b}(t) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^t z^{a-1}(1-z)^{b-1}\,dz$$

beta – paylanma funksiyasıdır,

$$n' = \frac{(N-2)^2}{N-1} \times$$

$$\times \frac{nM(N-n)(N-M)}{[(N-M)(N-n) + nM - N][N(n+M-1) - 2nM]},$$

$$x = \frac{N(n+M-1) - 2nM}{N(N-2)},$$

$$c = \frac{nM(M-1)(n-1)}{(N-1)[(N-M)(N-n) + nM - N]}.$$

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., 1987.

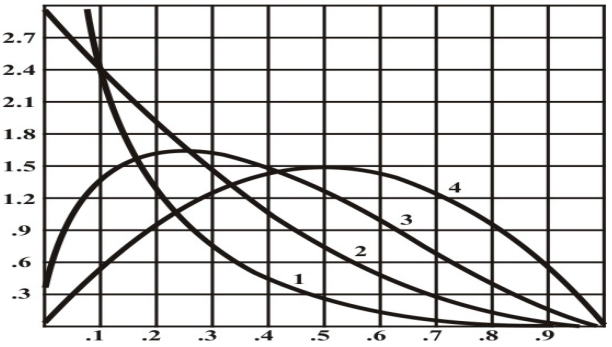
BETA – PAYLANMA « бета – распределение; beta distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası (şəkil)

$$\beta_{m,n}(x) = \frac{1}{B(m,n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \qquad (1)$$

düsturu ilə verilən, $(0,\ 1)$ -də topalanmış kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*, burada $m,\ n$ – mənfi olmayan parametrlər, normalayıcı $B(m,n)$ vuruğu –

$$B(m,\ n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

düsturu Eyler beta – funksiyasıdır.



(1) $m = 0{,}5,\ n = 3{,}5$; (2) $m = 1,\ n = 3$; (3) $m = 1{,}5,\ n = 2{,}5$; (4) $m = 2,\ n = 2$ olduqda beta – paylanmanın sıxlıq funksiyaları (bütün hallarda $m + n = 4$).

B – p.-nın paylanma funksiyası natamam beta – funksiyası vasitəsilə ifadə olunur:

$$I_x(m,n) \equiv B_{m,n}(x) =$$

$$= \frac{1}{B(m,n)} \int_0^x y^{m-1}(1-y)^{n-1}\,dy,\ 0 < x < 1$$

B – p.-nın momentləri

$$m_k = B(m+k,\ n)/B(m,n)\ ,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

düsturu ilə ifadə olunur; B – p.-nın riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $m/(m+n)$ və $mn/(m+n)^2(m+n+1)$ nisbətlərilə, asimmetriyası isə $2(m-n)/(m+n-2)$ nisbətilə ifadə olunur. Əgər $m > 1$ və $n > 1$ olarsa, onda $\beta_{m,n}(x)$ sıxlıq funksiyası əyrisinin yeganə $x = (m-1)/(m+n-2)$ maksimum nöqtəsi vardır, intervalın uclarında isə $\beta_{m,n}(x) = 0$ olur. Əgər $m < 1$ və ya $n < 1$ olarsa, onda qrafikin uc ordinatlarından biri sonsuzluqdur, lakin əgər $m < 1$ və $n < 1$ olarsa, onda hər iki ucda ordinatlar sonsuzluqdur və əyri bu halda U şəkilli olur. B – p.-nın xarakteristik funksiyası cırlaşmış hiperhəndəsi $F(m, m, n; it)$ funksiyasıdır. $m = 1$ və $n = 1$ olduqda, B – p. $(0, 1)$ intervalında *müntəzəm paylanmaya* çevrilir. B – p.-nın digər xüsusi halı $m = n = 1/2$ olduğu haldır ki, bu da paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\beta_{1/2,1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{x(1-x)}$$

kimi ifadə olunan *arksinus paylanmasıdır.* (1)-də $x = 1/(1+t)$ əvəzləməsi apardıqda, paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\beta'_{m,n}(t) = \frac{1}{B(m,n)} \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n-2}}\ ,\ 0 < t < \infty \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunan və i k i n c i n ö v B – p. adlandırılan paylanma alınır.

(1) və (2) paylanmaları *Pirson paylanmaları* sistemində I tip və VI tip paylanmalara uyğundur.

B – p.-nın yaranması hallarından biri belədir: əgər ξ_1 və ξ_2 – uyğun olaraq, m və n parametrli *qamma – paylanma* ilə paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi_1/(\xi_1+\xi_2)$ təsadüfi kəmiyyəti paylanmasının sıxlıq funksiyası $\beta_{m,n}(x)$ olan B – p. ilə paylanmışdır. Bu fakt tətbiqi məsələlərdə, xüsusilə də, riyazi statistikada B – p.-nın rolunu izah edir: mühüm statistikaların çoxunun paylanmaları B – p. olur. Məs., F – nisbət paylanma funksiyası $F_{m,n} = n\chi_m^2/m\chi_n^2$

$$\mathbf{P}\{F_{m,n} < x\} = B_{m/2,\ n/2}(mx/(n+mx))$$

düsturu ilə ifadə olunur (χ^2 təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı k olan *xi – kvadrat paylanması* ilə paylanmışdır).

F – paylanmaların qiymətləri, adətən, B – p. üçün tərtib olunmuş cədvəllər vasitəsilə hesablanır.

B – p. funksiyası vasitəsilə binomial paylanma funksiyalarının qiymətlərini

$$B_{n-m,\ m+1}(1-p) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

münasibətinə əsaslanaraq hesablamaq olur.

B – p. yalnız riyazi statistikada tətbiq olunmur; məs., B – p.-nın sıxlıq funksiyası Yakobi ortoqonal çoxhədlilər sistemi üçün çəki funksiyasıdır.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Пирсон К., Таблицы неполной бета-функции, пер. с англ., М., 1974.

BETA – PAYLANMA çoxölçülü **« бета – распределение** многомерное; multidimensional **beta distribution »** – bax, *Dirixle paylanması.*

BEYES DÜSTURU « Бейеса формула; Bayes formula » – hadisələrin (və ya hipotezlərin) *aposterior ehtimallarını aprior ehtimallar* vasitəsilə hesablamaq üçün düsturdur. $A_1, ..., A_n$ uyuşmayan hadisələrin tam qrupu olsun: $\bigcup A_i = \Omega$, $i \neq j$ olduqda $A_i \cap A_j = \varnothing$; Ω – yəqin hadisə, $\varnothing$ – qeyri – mümkün hadisədir. Hər bir i üçün $\mathbf{P}(A_i) > 0$. Onda $\mathbf{P}(B) > 0$ şərtini ödəyən ixtiyari B hadisəsinin baş verməsi şərtilə A_i hadisəsinin baş verməsinin aposterior ehtimalı $\mathbf{P}(A_i \mid B)$, –

$$\mathbf{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B \mid A_i)}, \quad i = \overline{1, n} \qquad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur. $\mathbf{P}(A_i)$, – A_i hadisəsinin aprior ehtimalı, $\mathbf{P}(B \mid A_i)$, – A_i hadisəsinin ($\mathbf{P}(A_i) > 0$) baş verməsi şərtilə B hadisəsinin şərti ehtimalıdır. (*) Beyes düsturu T. Beyes (T. Bayes) tərəfindən isbat olunmuş, 1763-də çap olunmuşdur.

Bax, *Beyes prinsipi.*

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

BEYES HƏLLEDİCİ FUNKSİYASI « бейесовская решающая функция; Bayesian decision function / rule » – aposterior riskə minimum qiymət təmin edən *həlledici funksiyadır.* B. h. f. bəzən aprior riskin minimizasiyası ilə təyin olunur; əgər Beyes riski (B. h. f.-nın aprior riski) sonlu olarsa, onda bu iki tərif üst-üstə düşür. Bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə.

Əd.: [1] Заксш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

BEYES HƏLLEDİCİ QAYDASI « бейесовское решающее правило; Bayesian decision rule » – bax, *Qeyri – parametrik diskriminant analiz.*

BEYES HƏLLİ « бейесовское решение; Bayesian decision » – *Beyes həlledici funksiyası* əsasında qəbul olunmuş qərardır (həldir). Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə.

BEYES KRİTERİSİ « бейесовский критерий; Bayesian test » – statistik məsələlərə *Beyes yanaşması* əsasında qurulmuş *statistik kriteridir.* B. k. statistik həllər nəzəriyyəsində ümumi *Beyes helledici funksiyası* anlayışının statistik hipotezlərin yoxlanılma nəzəriyyəsində konkretləşdirilməsidir.

X – təsadüfi seçim, $\mathbf{P}_\theta$, – X seçiminin naməlum $\theta \in \Theta$ parametrindən asılı paylanması, $p(x|\theta)$ – bu paylanmanın müəyyən bir σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyası olsun. X üçün $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezinə $H_1 : \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezi qarşı qoyulur; Θ_0 və Θ_1, – Θ-nın boş olmayan kəsişməyən altçoxluqlarıdır.

Θ parametrik fəzasında (bu fəzanın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrlə) $\pi(\cdot)$ aprior paylanması verilir. $\pi(\cdot)$ paylanması Θ_0 və Θ_1 altçoxluqlarında $\pi_0(\cdot)$ və $\pi_1(\cdot)$ paylanmalarını H_0 və H_1 hipotezlərinin q_0 və q_1 aprior ehtimallarını doğurur, $q_0 + q_1 = 1$. Bütün kriterilər arasında

$$r_\pi(\varphi) = q_0 \mathbf{M}_{\pi_0} \varphi(X) + q_1 \mathbf{M}_{\pi_1} (1 - \varphi(X))$$

aprior riskini minimallaşdıran $\varphi(\cdot\,;\pi)$ kriterisi Beyes kriterisi adlanır, burada $i = 0, 1$ üçün

$$\mathbf{M}_{\pi_i} \varphi(X) = \int \varphi(x)\, f_{\pi_i}(x)\, \mu(dx),$$

$$f_{\pi_i}(x) = \int_{\Theta_i} p(x|\theta)\, \pi_i(d\theta).$$

B. k. $\varphi(\cdot\,;\pi)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur :

$$\varphi(x\,;\pi) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } q_0 f_{\pi_0}(x) > q_1 f_{\pi_1}(x), \\ 1, & \text{əgər } q_0 f_{\pi_0}(x) < q_1 f_{\pi_1}(x) \end{cases}$$

olarsa, $\{\pi_n\}$ aprior paylanmalar ardıcıllığına görə $\{\varphi(\cdot\,;\pi_n)\}$ B. k.-ləri ardıcıllığının limiti (kriterilərin zəif yığılması mənasında olan) – geniş mənada B. k. adlandırılan kriteridən fərqli olaraq, $\varphi(\cdot\,;\pi)$ – bəzən dar mənada B. k. adlanır.

Olduqca geniş şərtlərlə geniş mənada bütün B. k.-lərinin çoxluğu kriterilərin tam sinfini əmələ gətirir və bu zaman yalnız hər biri sonlu sayda nöqtələrdə topalanmış aprior paylanmalar ardıcıllıqları ilə kifayətlənmək olar.

B. k.-ni qurmaq üçün yuxarıda verilmiş yanaşma bəzən tam Beyes yanaşması adlanır; Θ_0 və Θ_1-də yalnız π_0 və π_1 aprior paylanmalarının verilib, hipotezlərin aprior ehtimallarının isə verilmədiyi digər hal qismən Beyes yanaşması adlanır. Qismən Beyes yanaşmasında bəzən

$$\int \varphi(x)\, f_{\pi_0}(x)\, \mu(dx) \leq \alpha$$

şərtini ödəyən kriterilərə baxılmaqla kifayətlənmək olur; belə siniflərdə ən güclü Neyman – Pirson kriterisindən iki sadə hipotezin fərqləndirilməsi məsələsində istifadə olunur. Bu hipotezlər X seçiminin paylanmasının sıxlıq funksiyaları $f_{\pi_0}(\cdot)$ və $f_{\pi_1}(\cdot)$ üçün irəli sürülmüş hipotezlərdir. Müşahidələrin ardıcıl sxemində hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində də B. k. təyin edilir və qurulur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967; [4] Заксш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [5] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.

BEYES ÖLÇMƏSİ « бейесовское измерение; Bayesian measurement » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.*

BEYES PRİNSİPİ « бейесовский принцип; Bayesian principe » statistik oyunlar nəzəriyyəsində – *statistik oyunların* Beyes strategiyasının tapılması məsələsinin ondan daha sadə və adi olan *iki şəxsin oyunu* məsələsi kimi sadələşdirilməsi üçün müddəadır.

(D, Θ, w) – iki şəxsin ilkin oyunu, $(\mathscr{D}, \Theta, W)$ isə $(X, \mathbf{P}_\theta)$ cütü ilə birlikdə uyğun statistik oyun olsun; $X \in \mathfrak{X}$, – $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına müvafiq seçim, $\theta \in \Theta$, $\mathscr{D}$ – bütün $\delta(X): \mathfrak{X} \to D$ həlledici funksiyalarının çoxluğu olsun:

$$W(\delta(\cdot), \theta) = \int w(\delta(x); \theta)\, \mathbf{P}_\theta(dx).$$

Əgər $\mathfrak{X}$ -də təyin olunmuş hər hansı σ – additiv μ ölçüsünə nəzərən $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasının şərti sıxlıq funksiyası $f_\theta = d\mathbf{P}_\theta(x)/d\mu$ varsa və Θ -da təyin olunmuş hər hansı σ – additiv λ ölçüsünə nəzərən $\mathbf{Q}$ aprior paylanmasının sıxlıq funksiyası $g(t) = d\mathbf{Q}(t)/d\lambda$ varsa, onda verilən X seçimi üzrə şərti olan $\mathbf{Q}_X$ aprior paylanmasının λ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyası –

$$q(t \mid X) = \frac{q(t) f_t(X)}{f(X)},$$

$$f(X) = \int q(t) f_t(X)\, \lambda(dt) \qquad (*)$$

münasibətlərilə təyin olunur (Beyes düsturu).

İxtiyari $\mathbf{Q}$ aprior paylanmasının ilkin oyunu (D, Θ, w) üçün Beyes strategiyası $\pi_{\mathbf{Q}}$-nün varlığı fərz olunur. B. p.-ində iddia edilir ki, f_θ və q sıxlıq funksiyalarının varlığı fərz olunduqda, (D, Θ, W) statistik oyununda $\mathbf{Q}$ aprior paylanmasına elə $\pi_{\mathbf{Q}}(X)$ Beyes strategiyası uyğundur ki, bu strategiya iki şəxsin ilkin oyununun $\mathbf{Q}_X$ təbiətli strategiyası üçün ilə $\pi_{\mathbf{Q}_X}$ Beyes strategiyası ilə üst-üstə düşür, burada $\mathbf{Q}_X$ – sıxlığı (*) olan aposteriori paylanmadır.

Bu müddəa $\pi_{\mathbf{Q}}(X) = \pi_{\mathbf{Q}_X}$ bərabərliyi ilə ifadə olunur və qoyulmuş məsələni $\mathbf{Q}_X$ aposterior paylanmasının tapılması və ilkin oyun üçün Beyes strategiyasının axtarılması məsələlərinə gətirir. B. p. – statistik məsələlərin əsas sinifləri üçün Beyes strategiyasının formasını lazımi anda təyin etməyə imkan verir.

Məs., $D = \{\delta_1, \delta_2\}$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $w(\delta_i, \theta_j) = w_{ij}$, $(w_{11} = w_{22} = 0)$ olsun. $\mathbf{P}_\theta$ paylanmalı X seçimi əsasında $\{\theta = \theta_1\}$ və $\{\theta = \theta_2\}$ iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsinə baxılır; onda əgər $f_{\theta_1}(X)/f_{\theta_2}(X) < a\,(1-q)/q(1-a)$ olarsa, Beyes kriterisi $\delta(X) = \theta_2$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $a = w_{12}/(w_{12} + w_{21})$, q isə $\{\theta = \theta_1\}$ hadisəsinin aprior ehtimalıdır.

Əgər D və Θ, – $\mathbb{R}^k$ fəzasının oblastları, $w(\delta, \theta) = c(\delta - \theta)^2$ olarsa, onda θ parametrinin Beyes statistik qiyməti

$$\theta^*_{\mathbf{Q}} = \int t\, \mathbf{Q}_X(dt) = \int t q(t \mid X) \lambda(dt)$$

kimi ifadə olunur. Bu statistik qiymət aposterior paylanmanın orta qiymətidir. Əgər $w(\delta, \theta) = c|\delta - \theta|$, $k = 1$ olarsa, onda $\theta^*_{\mathbf{Q}}$ aposterior paylanmanın medianına bərabərdir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика (Дополнительные главы), М., 1984.

BEYES REQRESSİYASI « бейесовская регрессия; Bayesian regression » – parametrlərin aprior paylanması verildikdə xətti *reqression eksperiment* parametrlərinin qiymətləndirilməsidir. Bax, *Aprior informasiyadan istifadə.*

BEYES RİSKİ « бейесовский риск; Bayesian risk » – *aprior riskin* bütün həlledici funksiyaları üzrə aşağı sərhədidir. Əgər Beyes həlledici funksiyası vardırsa, onun aprior riski B. r.-nə bərabərdir. Bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə, *Aposterior risk*(i) həlledici funksiyanın, *Qeyri – parametrik diskriminant analiz.*

BEYES STATİSTİK QİYMƏTİ « бейесовская оценка; Bayesian estimator » – aposterior riskin minimum qiymətini təmin edən *statistik qiymətdir*. Məs., kvadratik itki funksiyası $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ olarsa, skalyar θ parametrinin B. s. q. θ-nın aposterior ortasıdır, $L(\theta, d) = |\theta - d|$ olduğu halda isə θ-nın aposterior paylanmasının medianıdır; θ-nın (μ, τ) parametrlərli aprior normal paylanmalı təsadüfi kəmiyyət olduğundan və $L(|\theta - d|)$ tipli qabarıq itki funksiyasının nə cür olmasından asılı olmayaraq, qeyd olunmuş n həcmli seçim üzrə təyin edilmiş (θ, σ) parametrlərli normal paylanmanın seçimi orta qiyməti θ üçün B. s. q. –

$$(n\bar{x}\sigma^{-2} + \mu\tau^{-2}) \,/\, (n\sigma^{-2} + \tau^{-2})$$

aposterior orta qiymətinə bərabərdir.

Müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanması və qiymətləndirilən θ parametrinin aprior paylanması üzərinə qoyulan uyğun requlyarlıq şərtlərində B. s. q.-nin asimptotik paylanması (seçimin həcmi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda) aprior paylanmadan asılı olmur və maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinin asimptotik paylanması ilə üst-üstə düşür.

Bax, *Aprior informasiyadan istifadə.*

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

BEYES STRATEGİYASI « бейесовская стратегия; Bayesian strategy » statistik oyunlar nəzəriyyəsində – parametrik çoxluqda verilmiş aprior paylanmaya əsasən orta itkiləri minimallaşdıran strategiyadır (həlledici funksiyadır).

Bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*, *Statistik oyun.*

BEYES YANAŞMASI « бейесовский подход; Bayesian approach » – bax, *Beyes yanaşması* empirik, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə.

BEYES YANAŞMASI empirik **« бейесовский подход** эмпирический; empirical **Bayesian approach »** – G paylanması naməlum olduğu hallarla bağlı statistik məsələlər *Beyes yanaşmasının* elə statistik realizasiyasıdır ki, bu halda baxılan eksperimentdən əvvəl aparılmış statistik eksperimentlərin nəticələri – $x^{(k)} = (x_1, \ldots, x_k)$ seçimləri üzrə δ_G Beyes həlledici funksiyalarının tutarlı statistik

qiymətləri təyin olunur. Cari eksperimentin nəticəsi x, X təsadüfi elementinin (məs., seçimin) realizasiyasıdır; $\mathbf{P}(\cdot \mid \theta)$, – X-in paylanması, θ, – Θ parametrik fəzasının naməlum qeyd olunmuş nöqtəsidir və θ-nin bu qiymətinə görə $\mathscr{D}$ həllər fəzasından müəyyən bir d həllini seçmək tələb olunur. «Arxiv» verilənlərinin nəticəsi $x_1, \ldots, x_k$, X-ə analoji $X_1, \ldots, X_k$ asılı olmayan təsadüfi elementlərinin realizasiyalarıdır və bu elementlərin $\mathbf{P}(\cdot \mid \theta_i)$, $i = 1, \ldots, k$ paylanmalarındakı uyğun $\theta_1, \ldots, \theta_k$ qiymətləri öz növbəsində G paylanmasından olan təsadüfi seçimin realizasiyasıdır.

Beləliklə, $x^{(k)}$, – X-in şərtsiz (marginal)

$$\mathbf{P}_G(\cdot) = \int_{\Theta} \mathbf{P}(\cdot \mid \theta)\, G(d\theta)$$

paylanmasına uyğun seçimin realizasiyasıdır.

Əgər mümkün G aprior paylanmalarının sinfi $\mathfrak{G} = \{G(\cdot, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ hər hansı sonluölçülü λ parametrinin qiymətlərinə qədər dəqiqliklə konkretləşdirilmişdirsə, onda λ-nı $\mathbf{P}_G(\cdot, \lambda)$ paylanmasına uyğun $X^{(k)}$ seçiminə görə qiymətləndirmək olar; Beyes həlledici funksiyasını qurmaq üçün G aprior paylanması əvəzinə onun statistik qiyməti $G(\cdot, \hat{\lambda}_k)$-dan istifadə etmək olar.

Tarixən bu metod empirik qaydaların qurulması üçün ilk tətbiq olunmuş metoddur; bu metodu K. Cini (1911, bax, [1]) istifadə etmişdir və empirik B. y.-nın kəşfində bu metoda üstünlük verilir. Bütün mümkün olan aprior paylanmalar sinfi $\mathfrak{G}$ parametrik fəzada verildiyi halda (bax, [2]) K. Cininin aldığı bir sıra nəticələr «qeyri – parametrik» hal üçün empirik B. y.-nın müasir ideyalarını belə üstələyir.

S. N. Bernşteyn (bax, [3]) istehsal edilən məhsulun keyfiyyətinin atestasiyası məqsədilə klassik (beyes olmayan) etibarlı interval qiymətləndirmədən istifadənin korrekt olmadığını göstərərək, Beyes etibarlı interval qiymətləndirməsində G-nin statistik qiyməti kimi

$$\hat{p}_k(x, x^{(k)}) = \int_{\Theta} p(x \mid \theta)\, G(d\theta) \qquad (*)$$

inteqral tənliyinin (birinci növ Fredholm tənliyinin) həllini götürməyi təklif etmişdir, burada $\hat{p}_k(x, x^{(k)})$, – $\mathbf{P}_G$ paylanmasının arxiv məlumatları əsasında hesablanmış sıxlıq funksiyasının statistik qiyməti, $p(x \mid \theta)$, – $\mathbf{P}(\cdot, \theta)$-nın müəyyən bir μ ölçüsünə görə sıxlıq funksiyasıdır.

Riyazi statistikanın bu sahəsində son «sıçrayış» H. Robbinsə ([4], [5]) məxsusdur. O, empirik Beyes həllinin ümumi məsələsini ifadə etmiş, empirik prosedurlar riski anlayışını daxil etmiş, empirik həlledici funksiyaların seçilməsində optimallıq prinsipini ifadə etmiş və bunların qurulmasının ümumi metodlarını yenidən işləmişdir.

Statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində empirik B. y. tədqiqat obyekti kimi $\delta_G = \delta_G(x)$ Beyes həlledici funksiyalarını və onların empirik analoqları $\delta_k = \delta_k(x, x^{(k)})$ empirik həlledici funksiyalarını araşdırır; bu funksiyalar $(\mathscr{X}^{k+1}, \mathfrak{X}^{k+1})$ seçimi fəzalarının düz hasilində təyin olunan funksiyalardır.

Verilmiş $L(\theta, d)$ itki funksiyasına görə δ_G Beyes həlledici funksiyası qurulmuş olduğu halda δ_k empirik həlledici funksiyasının riski tam orta itkilər kimi təyin olunur:

$$\mathscr{R}_G(\delta_k) = \mathbf{M} L(\upsilon, \delta_k(X, X^{(k)})) =$$

$$= \int_{\mathscr{X}^k} \ldots \iint_{\Theta} G(d\theta) \int_{\mathscr{X}} L(\theta, \delta_k(x, x^{(k)}))\, \mathbf{P}(dx \mid \theta) \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}_G(dx_i).$$

Empirik həlledici funksiyanın (δ_k-nın) riski $k \to \infty$ və G ixtiyari qeyd olunmuş paylanma olduqda Beyes riskinə yığılarsa, yəni $\mathscr{R}_G(\delta_k) \to R_G(\delta_G)$ olarsa, onda δ_k empirik həlledici funksiyası asimptotik optimal həlledici funksiya adlanır. Son nəşr olunmuş bəzi ədəbiyyatda «asimptotik optimal empirik həlledici funksiya» əvəzinə «empirik Beyes həlledici funksiyası» termini də istifadə olunur; əvvəllər Robbinsin istifadə etdiyi kimi sonuncu termin ixtiyari empirik həlledici funksiya üçün onun optimallıq xassələrindən asılı olmadan istifadə olunurdu.

Asimptotik optimal empirik həlledici funksiyaların varlığı üçün zəruri şərt Beyes həlledici funksiyası δ_G-nin «sadəliyi»dir – δ_G-nin G aprior paylanmasından yalnız X-in şərtsiz ehtimalı ilə asılılığıdır. Daha dəqiqliklə: əgər $\mathbf{P}_{G_1} = \mathbf{P}_{G_2}$ bərabərliyi ixtiyari $G_1 \neq G_2$ paylanmaları üçün sanki hər yerdə $\delta_{G_1} = \delta_{G_2}$ bərabərliyini təmin edirsə, δ_G sadə Beyes həlledici funksiyası adlanır.

Misal 1. $(0, \theta)$-da müntəzəm paylanmış θ parametri haqqında irəli sürülmüş $\theta \leq \theta_0$ (birinci həll) və $\theta > \theta_0$ (ikinci həll) iki mürəkkəb hipotezi yoxlamaq tələb olunur.

Statistik eksperiment paylanması verilmiş ailədən olan təsadüfi kəmiyyətin bir müşahidəsinin nəticəsi x-in qeydə alınmasından ibarətdir. $0 - 1$ tipli itki funksiyasından istifadə olunur:

Verilmiş θ üçün düzgün və ya səhv qərar qəbul edilməsindən asılı olaraq, itki uyğun olaraq, 0 və ya 1-ə bərabər götürülür. Fərz olunur ki, bütün aprior paylanmalar (G) sinfi müsbət yarımoxda verilmiş Lebeq ölçüsünə görə mütləq kəsilməz bütün paylanmalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür və $g(\theta)$, G paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır. Müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyətinin şərtsiz paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_G(x) = \int_x^{\infty} (g(\theta)/\theta)\, d\theta$$

inteqralına bərabərdir və $X = x$ olduqda əgər $2p_G(\max(\theta_0, x) < p_G(x)$ olarsa, Beyes həlledici funksiyası d_1 qiymətini, əks halda isə d_2 qiymətini alır. Beyes həlledici funksiyası sadədir, çünki G-dən X-in marginal sıxlığı vasitəsilə asılıdır. Odur ki, asimptotik optimal empirik həlledici funksiyanı $p_G(x)$ sıxlıq funksiyasının tutarlı statistik qiymətinə əsasən (məs., nüvə statistik qiyməti) qurmaq olar.

Misal 2. Binomial sxemdə n həcmli seçimə baxılır; θ – bir sınaqda uğurlu nəticə («müvəffəqiyyət») ehtimalı olsun. Kvadratik itki funksiyası halı üçün θ-nın Beyes statistik qiymətini təyin etmək problemi araşdırılır.

Sınaqların verilən sxemində müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyəti üçün məqbul statistika vardır, onun x realizasiyası n sınaqda «müvəffəqiyyət»lər sayına bərabərdirsə, onda δ_G Beyes

statistik qiyməti seçimi verilənlərdən yalnız x realizasiyası vasitəsilə və marginal $p_G(y,\ n) = \mathbf{P}_\theta\{X = y\}$ paylanmaları ilə asılı olub,

$$\delta_G(x) = \frac{x+1}{n+1}\ \frac{p_G(x+1,\ n+1)}{p_G(x,\ n)}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bu halda $\delta_G(x)$ həlledici funksiyası sadə Beyes statistik qiyməti deyildir (bu sonlu seçimi fəzalara xas olan tipik bir haldır; bax, [7]), deməli, asimptotik optimal empirik statistik qiymət yoxdur. Lakin n həcmli seçim üçün arxiv verilənlərindən istifadə edərək, $n-1$ həcmli seçim üzrə Beyes statistik qiymətinə uyğun asimptotik optimal empirik statistik qiymət təyin etmək mümkündür. n-in kifayət qədər böyük qiymətində bu yanaşma empirik statistik qiymətin optimallaşdırılma probleminin praktik cəhətdən həlli üçün tam mənada qaneedicidir.

H. Robbins və C. Neymanın məqalələrinin ([5] və [6]) nəşrindən sonra, qeyd olunan problemlərlə bağlı, xüsusilə də, kvadratik itki funksiyası halı üçün həqiqi θ parametrinin qiymətləndirilməsi sahəsində nəticələr alınmışdır. Bu halda Beyes statistik qiymətinin aşkar ifadəsi vardır, o, θ parametrinin aposterior orta qiymətinə bərabərdir. Buna görə də, Beyes statistik qiymətinin sadəliyi problemi və asimptotik optimal statistik qiymətlərin varlığı üçün kafi şərtlərin təyin olunması problemi kifayət qədər geniş ehtimal modelləri sinfində həll olunur (bax, məs., [9]). Nəşr olunmuş əsas nəticələrin əksəriyyəti konkret ehtimal modelləri çərçivəsində optimal statistik qiymətlərin təyin olunmasına və arxivin həcmi $k \to \infty$ olduqda bu statistik qiymətlərin Beyes statistik qiymətlərinə yığılma sürətinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Sonsuzölçülü fəzalar halında mümkün aprior paylanmaların yığılma sürəti, adətən, $O(k^{-1})$-dən kiçik olur (patoloji hallar istisna olunmaqla); bu S i n q x h i p o t e z i adlanır və bu məsələnin tam həlli yığılma sürətinin aşağı sərhədləri göstərilməklə [10]-da verilmişdir.

Asimptotik optimal statistik qiymət olmadığı hallarda, L. N. Bolşev praktik cəhətdən faydalı olan Beyes həlledici funksiyasının ikitərəfli qiymətləndirilməsi metodunu təklif etmişdir (bax, [11]). Parametrik qiymətləndirilmənin ümumi məsələsi çərçivəsində bu metod aşağıdakından ibarətdir. Cari eksperimentin nəticəsi x-ə görə $\delta_G(x)$ Beyes həlli ilə bağlı olan

$$\underline{\delta}(x, \mathbf{P}_G) = \inf_G \delta_{G'}(x) \text{ və } \overline{\delta}(x, \mathbf{P}_G) = \sup_G \delta_{G'}(x)$$

iki ekstremum hesablanılır; bu hesablama $\mathbf{P}_{G'} = \mathbf{P}_G$ bərabərliyini ödəyən bütün G' paylanmaları üzrə aparılır. $\underline{\delta}$ və $\overline{\delta}$ sərhədləri sadə funksiyalardır və olduqca ümumi şərtlər daxilində arxiv verilənləri üzrə əsaslı qiymətləndirilir.

Empirik B. y. statistik həllər nəzəriyyəsinin inkişafında böyük rol oynamışdır. Əslinə qaldıqda riyazi statistikanın yeni sahəsi olub, zəmanətli keyfiyyət nəzarətinin mühüm problemlərini, məhsulun seçimi atestasiyasını, statistik diaqnostikanı və digər məsələləri praktik həll etməyə geniş imkanlar yaradır; empirik həllər funksiyasında keçmişin təcrübəsi nəzərə alındığından orta itki, statistik eksperimentin qoyulmasına şərf olunan xərclər olduqca azalır.

Zəmanətli statistik nəticələr probleminə d – aposterior yanaşmasının tətbiqi üçün H. Robbinsin ideyalarının inkişafı [12]-də verilmişdir (bax, *Beyes yanaşması* s t a t i s t i k m ə s ə l ə l ə r ə).

Əd.: [1] G i n i C., «Metron», 1949, v. 15, p. 133–71; [2] F o r c i n a A. «Int. Statist. Rev.», 1982, v. 50, p. 65–70; [3] Б е р н ш т е й н С. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1941, т. 5, с. 85–94; [4] R o b b i n s H., в кн.: Proceedings Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability, v. 1, Berk. – Los Ang., 1956, p. 157–63 (рус. пер. «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 133–40); [5] R o b b i n s H., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, № 1, p. 1–20 (рус. пер. «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 122–40); [6] N e y m a n J., «Rev. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 30, № 1, p. 11–27 (рус. пер. – «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 113–32); [7] К а г а н А. М., «Докл. АН СССР», 1963, т. 150, № 4, с. 733–35; [8] S i n g h R. S., «Ann. Statist.», 1979, v. 7, № 4, p. 890–902; [9] К а з а к я в и ч ю с В. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 67–73; [10] К а з а к я в ю с В. В., в кн.: IV Междунар. Вильнюс. Конф. По теории вероятн. и матем. статист. Тезисы докл., Вильнюс, 1985, т. 2, с. 7–8; [11] Б о л ь ш е в Л. Н., в кн.: Междунар. Конгресс математиков в Ницце, 1970. Докл. сов. матем., М., 1972, с. 48–55; [12] С и м у ш к и н С. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 42–58.

BEYES YANAŞMASI s t a t i s t i k m ə s ə l ə l ə r ə **« бейесовский подход** к с т а т и с т и ч е с к и м з а д а ч а м; **Bayesian approach** t o s t a t i s t i c a l p r o b l e m **»** – Θ parametrik fəzasında aprior G paylanmasının varlığını fərz edən yanaşmadır, məqsədi

$$R_G(\delta) = \int_\Theta R(\theta,\ \delta)\, G(d\theta)$$

aprior riskini minimallaşdıran δ *həlledici funksiyalarının* qurulmasıdır. Beləliklə, B. y.-sında müşahidə olunan X təsadüfi elementinin (məs., seçimin) paylanması $\mathbf{P}(\cdot\,|\,\theta)$-dakı θ ($\theta \in \Theta$) parametrinin əsl (naməlum) qiyməti paylanması G olan hər hansı θ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası kimi anlaşılır; risk – risk funksiyası $R(\theta, \delta)$-nın orta qiyməti (G paylanması üzrə), yəni tam itki kəmiyyəti $R_G(\delta) = \mathbf{M}L(\theta, \delta(x))$ götürülür, $L(\theta, \delta(x))$ – itki funksiyasıdır.

$R_G(\delta)$-nın minimumunu təmin edən $\delta_G = \delta_G(x)$ həlledici funksiyası *Beyes həlledici funksiyası*, onun aprior riski $R_G(\delta_G)$ *Beyes riski* adlanır. Əgər Beyes həlledici funksiyası mövcud deyildirsə, onda Beyes riski kimi $\inf_\delta R_G(\delta)$ kəmiyyəti anlaşılır.

Riyazi statistikada bir sıra hallarda Beyes həlledici funksiyasını təyin edən xassə aprior riskin minimallığı deyil,

$$R_G(\delta\,|\,x) = \int_\Theta L(\theta,\ \delta(x))\ p(x\,|\,\theta)\ G(d\theta)/p_G(x)$$

aposterior riskinin minimallığıdır, burada $p = d\mathbf{P}/d\mu$ – təsadüfi X elementinin paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır [seçimi $(\mathscr{X}, \mathfrak{X})$ fəzasında hər hansı μ ölçüsünə görə],

$$p_G(x) = \int_\Theta p(x\,|\,\theta)\, G(d\theta)$$

– X-in marginal (şərtsiz) sıxlıq funksiyası, $L(\theta, \delta)$ – itki funksiyasıdır. Beyes həlledici funksiyasının belə tərifi daha konstruktivdir. Əgər aposterior riskin minimumunun $\mathbf{P}_G$ ölçüsü üzrə sonlu orta qiyməti vardırsa, onda verilən tərifləri ekvivalent olur, çünki

$$R_G(\delta) = \int_{\mathscr{X}} R_G(\delta \mid x)\, p_G(x)\, \mu(dx)\,.$$

Aprior risk həlledici funksiyanın ədədi xarakteristikasıdır, buna görə də, Beyes həlledici funksiyası mövcud olmasa belə, ε – Beyes həlledici funksiyası δ_G^{ε} vardır və bu funksiya üçün hər hansı bir $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$R_G(\delta_G^{\varepsilon}) \le \inf_{\delta} R_G(\delta) + \varepsilon$$

münasibəti ödənilir.

M i s a l. İki mürəkkəb $H_0 : \theta \in \Theta_0$ (d_0 həlli) və $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ (d_1 həlli) hipotezlərinin yoxlanılması məsələsində itki funksiyası $0-1$ tipli olarsa:

$$L(\theta,\, d_i) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } \theta \in \Theta_{1-i}, \\ 0, & \text{əgər } \theta \in \Theta_i, \end{cases} \qquad i = 0, 1$$

olur, həlledici δ funksiyasının $\delta = d_i$ nöqtəsində aposterior riski – H_i hipotezinə alternativ H_{1-i} hipotezinin doğru olmasının aposterior ehtimalı –

$$R_G(d_i \mid x) = \int_{\Theta_{1-i}} p(x \mid \theta)\, G(d\theta) / p_G(x)$$

ehtimalına bərabərdir.

Deməli, *Beyes kriterisinə* görə hipotez o halda qəbul olunur ki, onun doğruluğunun aposterior ehtimalının qiyməti ən böyük olsun (aposterior ehtimallar bərabər olduğu halda randomizasiya etmək mümkündür).

Qiymətləndirmə ilə bağlı statistik problemdə Beyes həlledici funksiyasına misal *Beyes statistik qiyməti* məqaləsində şərh olunmuşdur.

B. y. məqbul statistik prosedurların (Beyes həlledici funksiyaları və onların limitləri həlledici funksiyaların tam sinfini əmələ gətirir) və minimaks həlledici qaydaların qurulmasında mühüm rol oynayır (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*). B. y. çərçivəsində statistik nəticənin zəmanətli prosedurlarının qurulmasında məhdudiyyətlər əksər hallarda aprior riskə deyil, bilavasitə aposterior risk üzərinə qoyulur (aposterior risk, əsas etibarilə, Beyes etibarlı intervalarının qurulmasında istifadə olunur). Bundan əlavə, bir sıra tətbiqi məsələlərdə (məs., qəbuletmə nəzarətində) hər bir d həllinin qəbulolunması ilə əlaqədar olaraq orta itki üzərinə qoyulan verilmiş məhdudiyyətlərin ödənildiyi statistik prosedurların qurulması zəruridir, yəni d – risk funksiyası –

$$R_G(d, \delta) = \mathbf{M}\{ L(\theta, d) \mid \delta(x) = d \}, \quad d \in \mathscr{D}$$

üzərinə məhdudiyyətlər qoyulmalıdır.

Hipotezlərin yoxlanılmasının statistik problemi çərçivəsində d – a p o s t e r i o r y a n a ş m a adlandırılan statistik nəticənin zəmanətlilik probleminə yanaşma 1974-də L. N. Bolşev tərəfindən təklif olunmuşdur. Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi çərçivəsində onun ideyalarının inkişafı [5]-də şərh olunmuşdur.

Statistik eksperimentlər ardıcıllığı ilə müşahidə apardıqda bu eksperimentlərə uyğun naməlum $\theta_1, \theta_2, \ldots$ qiymətləri, həqiqətən də, G paylanmasından seçim olduğu halda (məs., keyfiyyətə nəzarət statistik məsələsində, istehsal olunmuş məhsulun atestasiyasında) B. y.-nın praktiki realizasiyasında çətinliklər yaranır və bu çətinlik əsas etibarilə, aprior paylanmanın konkretləşdirilməsi zəruriliyi ilə izah olunur. Təbiidir ki, G-ni və həmçinin müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanmasını yalnız Θ parametrik fəzasında uyğun ehtimal modelini quraraq, bəlkə də bəzi parametrlərin qiymətinə qədər dəqiqliklə konkretləşdirmək olar və ya riyazi statistikanın qeyri – parametrik metodlarından da istifadə etmək olar. İxtiyari halda naməlum G paylanması haqqında obyektiv informasiya «arxiv» məlumatlarına – əvvəllər aparılmış statistik eksperimentlərin analoji nəticələrinə əsaslanır və burada *empirik Beyes yanaşması* realizə olunur.

Aprior paylanmanın digər konkretləşdirilmə üsulları da mövcuddur; bu üsullarda subyektiv ehtimal anlayışından, faydalılıq funksiyalarından, etibardan istifadə edən ən az informativlik prinsipindən istifadə olunur. Zəmanətli prosedurların qurulmasında konservativ yanaşma da istifadə olunur.

Əd.: [1] Д е Г р о о т М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974; [2] H a r t i g a n J. A., Bayes theory, N. Y. – [a. o.], 1983; [3] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [5] В о л о д и н И. Н., в сб.: Исследования по прикладной математике, Казань, 1984, в. 10, с. 13–53.

BEYES YAYINMASI « бейесовское отклонение; Bayesian deviation » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.*

BƏRABƏRÇƏKİLİ DİNAMİK SİSTEM « равновесная динамическая система; equilibrium dynamical system » – bax, *Dinamik sistem*(i) s t a t i s t i k m e x a n i k a n ı n.

BƏRABƏRÇƏKİLİ PAYLANMA « равновесное распределение; equilibrium distribution » – bax, *Dinamik sistem*(i) s t a t i s t i k m e x a n i k a n ı n.

BƏRABƏRÇƏKİLİ POTENSİAL « равновесный потенциал; equilibrium potential » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* M a r k o v z ə n c i r i ü ç ü n, *Potensial nəzəriyyəsi* M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n.

BƏRABƏRÇƏKİLİ STATİSTİK MEXANİKA « равновесная статистическая механика; equilibrium statistical mechanics » – bax, *Statistik mexanika.*

BƏRABƏREHTİMALLI YERLƏŞMƏ SXEMİ, HİSSƏCİKLƏRİN; q r u p l a r l a y e r l e ş m ə n i n b ə r a b ə r e h t i m a l l ı s x e m i **« равновероятное схема размещения частиц** к о м п л е к т а м и; **equiprobable scheme** f o r g r o u p **allocation of particles »** – bax, *Yerləşməsi*, *hissəciklərin* q r u p l a r l a.

BƏRABƏREHTİMALLI YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN « равновероятное размещение частиц; equiprobable allocation of particles / uniform allocation of particles » – bax, *Polinomial / multinomial yerləşməsi*, *hissəciklərin.*

BƏRPA(s ı) M a r k o v p r o s e s i n i n **« восстановление** м а р к о в с к о г о п р о ц е с с а; **regeneration** o f a M a r k o v p r o c e s s **»** – bax, *Markov prosesi*; ç e v i r m ə l ə r.

BƏRPA AXINI « восстановления поток; renewal input » – bax, *Giriş axını* k e ç m i ş i m ə h d u d t ə s i r l i l i y ə m a l i k.

BƏRPA ANI « восстановления момент; renewal time » – *regenerativ prosesin* ehtimal xassələrinin yenidən bərpa olunduğu andır.

BƏRPA FUNKSİYASI « восстановления функция; renewal function » – hər hansı *paylanma funksiyası* $F(t)$ üzrə F -in özü-özü ilə n – qat kompozisiyaları sırasının cəmi, yəni

$$H(t) = \sum_{n \geq 0} F^{*n}(t) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}\{X_n \leq t\}$$

cəmi kimi ifadə olunan $H(t)$ funksiyasıdır, burada $(X_n,\ n \geq \geq 0)$ – nöqtəvi *bərpa prosesidir*; bərpa intervalları – $\tau_n = X_n - X_{n-1},\ n \geq 1$ təsadüfi intervallarının paylanma funksiyası F -dir.

Əgər $\mathbf{P}\{\tau_n = 0\} < 1$ olarsa, $H(t)$ sonlu funksiyadır və

$$H(t) = 1 + \int_0^t H(t-s)\, dF(s)$$

şəklində *bərpa tənliyini* ödəyir (inteqral qapalı $[0, t]$ intervalı üzrə götürülür). $H(t)$ funksiyası azalmayan, mənfi olmayan, semi – additiv funksiyadır, yəni

$$H(t + s) \leq H(t) + H(s)$$

və $t, s \geq 0$ olduqda, elementar bərpa teoremini ödəyir, yəni

$$\lim_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{m},$$

burada $m = \int_0^\infty t\, dF(t)$. Bundan əlavə, $m_2 = \int_0^\infty t^2 dF(t)$ ikinci momenti sonlu olarsa, onda

$$t/m \leq H(t) \leq t/m + m_2/2m^2$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

Blekuell teoreminin hökmünə görə, $F(t)$ şəbəkəvari olmayan paylanma funksiyası olduqda, ixtiyari $a > 0$ qiymətində

$$\lim_{t \to \infty} (H(t + a) - H(t)) = a/m$$

olur, yəni $F(t)$-nin artım nöqtələri $\{0, d, 2d, ...\}$ tipli hər hansı bir şəbəkə təşkil etmir. Bu fərziyyə ilə

$$\lim_{t \to \infty} (H(t) - t/m) = m_2/2m^2$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

BƏRPA İNTERVALI « восстановления интервал; renewal interval » – bax, *Bərpa prosesi.*

BƏRPA NƏZƏRİYYƏSİ « восстановления теория; renewal theory » – ehtimal nəzəriyyəsinin elə bir bölməsidir ki, bu bölmədə hər hansı mürəkkəb sistem elementlərinin imtinası (sıradan çıxması) və bərpa olunması ilə bağlı təsadüfi hadisə və proseslər araşdırılır. Bu təsadüfi hadisə və proseslərə xas olan ən mühüm xassə bərpa anı adlanan hər hansı təsadüfi zaman anlarında hadisə və proseslərin ehtimal xassələrinin tamamilə bərpa olunmasıdır. Bu anlar ardıcıllığı daxil olunmuş *bərpa prosesini* təşkil edir.

B. n.-nin əsas nəticələri bərpa proseslərinin və regenerativ proseslərin asimptotik cərəyanı ilə bağlıdır. Bu proseslərin paylanmaları *bərpa tənliyindən* birqiymətli təyin olunduğundan, analitik nöqteyi – nəzərdən, B. n.-nin tədqiq obyekti bərpa tənliyinin həllərinin asimptotik xassələrinin öyrənilməsidir. B. n.-nin nəticələri (xüsusilə də, əsas *bərpa teoremi*) xidmət sistemləri nəzəriyyəsi, şaxələnən proseslər nəzəriyyəsi, ehtiyatlar nəzəriyyəsi kimi nəzəriyyələrin tətbiqi və nəzəri problemlərinin tədqiqatında effektiv surətdə istifadə olunur.

B. n.-nin klassik nəticələrinin çoxsaylı ümumiləşmələri bərpa anları arasında intervalların verilməsindən asılı olaraq: a) intervallar dəyişənişarəli; b) vektor qiymətlərlə verilən ($\mathbb{R}$ və $\mathbb{R}^n$-də B. n.), c) müsbət ehtimalla sonsuz olan, ç) intervallar yalnız şərti asılı olmayan (Markov bərpası nəzəriyyəsi), d) müxtəlif paylanmalara malik, e) seriyalar sxemində dəyişən və s. halları üçün araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Севастьянов Б. А., Теория восстановления, в кн.: Итоги и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 2, М., 1974, с. 99–128; [3] Феллер В., Введение в теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

BƏRPA PROSESİ « восстановления процесс; renewal process » – paylanma funksiyası $F(t)$ olan, mənfi olmayan, eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan $\tau_1, \tau_2, ...$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $X_n = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_n,\ n \geq 1,\ X_0 = 0$ cəmlərinin klassik sxemi ilə bağlı *təsadüfi prosesdir*. $\nu(t)$ sayıcı bərpa prosesinin t anında qiyməti

$$\nu_t = \sum_{n \geq 0} \mathbf{I}(X_n \leq t) = 1 + \max(n : X_n \leq t)$$

münasibətilə təyin olunur.

Əgər $\tau_n = X_n - X_{n-1}$ bərabərliyilə təyin olunan bərpa intervalları ardıcıl olaraq dəyişdirilən (və ya bərpa olunan) identik elementlərin fasiləsiz işləmə müddəti kimi interpretasiya olunarsa, onda ν_t təsadüfi kəmiyyəti t müddəti ərzində dəyişdirilmələr (və ya bərpalar) sayına bərabərdir. ν_t təsadüfi prosesinin trayektoriyaları hissəvi sabitdirlər və $(X_n,\ n \geq 0)$ təsadüfi zaman anlarında vahid uzunluqlu sıçrayışlarlıdırlar, bu anlar bərpa anları adlanır.

B. p. *bərpa nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir. ν_t prosesinin tədqiqində bərpa funksiyası $H(t) = \mathbf{M}\nu_t$ əsas rol oynayır; bu funksiya vasitəsilə moment funksiyaları rekurrent ifadə olunur:

$$H_k(t) = \mathbf{M}(\nu_t)^k \ (\ k \geq 2 \text{ olduqda }):$$

$$H_k(t) = \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-1)^{i-1} \int_0^t H_{k-i}(t-s)\, dH(s).$$

ν_t prosesi ilə yanaşı, hissəvi xətti trayektoriyalarlı *ötüm* prosesi $\gamma(t)$ və *çatım* prosesi $\eta(t)$ də təyin olunur ki, bu

proseslərin qiymətləri uyğun olaraq t nöqtəsindən $(X_n,\ n \geq 0)$ ardıcıllığının ən yaxın sağ (sol) nöqtəsinə qədər məsafəsinə bərabərdir və ötüm müddəti $\gamma(t)$, çatım müddəti $\eta(t)$ bu halda $\nu(t)$ ilə uyğun olaraq

$$\gamma(t) = \zeta_{\nu_t} - t, \quad \eta(t) = t - \zeta_{\nu_t - 1}$$

münasibətlərilə bağlıdır.

$\gamma(t)$ və $\eta(t)$ – təsadüfi Markov proseslərdir. $\gamma(t)$ və $\eta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması üçün

$$\mathbf{P}\{\gamma(t) \geq u,\ \eta(t) \geq v\} = q_{u+v}(t - v)$$

bərabərliyi ödənilir, burada $q_u(t)$ funksiyası

$$q_u(t) = 1 - F(t + u) + \int_0^t q_u(t - s)\, dF(s)$$

bərpa tənliyinin həllidir və $F(t)$ paylanma funksiyasının şəbəkəvari olmaması və $m = \mathbf{M}\tau_1$ riyazi gözləməsinin sonlu olması şərtləri ödənilərsə, bu funksiya

$$\lim_{t \to \infty} q_u(t) = \frac{1}{m} \int_u^\infty (1 - F(t))\, dt$$

münasibətini ödəyir (bax, *Bərpa funksiyası*).

Əgər $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ olarsa, onda B. p.-nin mühüm halı – Puasson prosesi alınır, bu halda $\mathbf{P}\{\nu_t = n + 1\} = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$, $n \geq 0$, $H(t) = 1 + \lambda t$, $q_u(t) = e^{-\lambda u}$, $m = 1/\lambda$ olur və $\nu(t)$ ilə $\gamma(t)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 2, 1984.

BƏRPA PROSESİ; superpozisiya « **восстановления процесс;** суперпозиция; superposition of **renewal process** » – ν_t^k, $1 \leq k \leq l$ ilkin bərpa proseslərinə müvafiq bütün nöqtələrin birləşməsi kimi təyin olunan, ədəd oxu üzərində *nöqtəvi prosesdir.* Əgər bərpa prosesləri $(\zeta_n^k,\ n \geq 0)$ nöqtələrindən yaranmış proseslərdirsə, onda B. p. $\{\zeta_n^k,\ n \geq 0,\ 1 \leq k \leq l\}$ çoxluğunun artmaqla nizamlanmasından alınan $(\zeta_n,\ n \geq 0)$ nöqtələrindən ibarətdir. Bu prosesə uyğun

$$\nu_t = \sum_{n \geq 0} \mathbf{I}(\zeta_n \leq t)$$

sayıcı prosesi üçün $\nu_t = \nu_t^1 + \ldots + \nu_t^l$ münasibəti doğrudur. B. p.-nin superpozisiyası ilkin bərpa proseslərini doğuran l sayda bərpaolunan elementlərdən ibarət sistemdə imtina anları ardıcıllığı kimi interpretasiya olunur.

BƏRPA TEOREMİ « восстановления теорема; renewal theorem » – *bərpa funksiyasının* asimptotik xassələrini ifadə edən hökmdür. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

$$\zeta(t) = 1 + \max(n : S_n < t) = \min(n : S_n \geq t),$$

$H(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$ olsun. İnteqral və lokal B. t. adlandırılan iki B. t. vardır. İnteqral B. t.-ndə hökm olunur ki,

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} H(t) = 1/m,\ m = \mathbf{M}\xi_k$$

münasibəti doğrudur. Lokal B. t.-ndə hökm olunduğuna görə, şəbəkəvari olmayan ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri və qeyd olunmuş ixtiyari $h > 0$ üçün

$$\lim_{t \to \infty} [H(t + h) - H(t)] = h/m$$

münasibəti doğrudur.

Əgər ξ_n tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər və ξ_n -lərin mümkün qiymətlərinin ən böyük ortaq böləni 1 -ə bərabər olarsa, onda

$$\lim_{k \to \infty} [H(k + 1) - H(k)] = 1/m$$

münasibəti doğrudur; k tam qiymətlər alır. Lokal B. t. əsas B. t. adlandırılan hökm, yəni: şəbəkəvari olmayan ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri və $(0, \infty)$ -a bilavasitə Riman mənada inteqrallanan ixtiyari $g(u)$ funksiyası üçün

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t g(t - u)\, dH(u) = \frac{1}{m} \int_0^\infty g(u)\, du \qquad (*)$$

münasibəti doğrudur, hökmünə ekvivalentdir. Tamqiymətli ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri üçün analoji nəticə ödənilir, lakin ardıcıllıq $t \to \infty$ olduqda tamqiymətli olmalıdır və (*)-nun sağ tərəfi

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^\infty g(k)$$

şəklində ifadə olunmalıdır.

Bərpa funksiyası $H(t)$ Vald eyniliyinə əsasən dolaşmanın *çatım anı* – $\chi(t)$ -nin riyazi gözləməsi ilə

$$mH(t) = t + \mathbf{M}\chi(t)$$

münasibətilə bağlıdır, burada $\xi_k \geq 0$ olduğu halda

$$\mathbf{P}\{\chi(t) > v\} = \int_0^t dH(u)\ \mathbf{P}\{\xi_1 > t - u + v\}$$

olduğundan, əsas B. t.-nə görə

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{M}\chi(t) = \frac{1}{m} \int_0^\infty G(t)\, dt = \frac{\mathbf{M}\xi_1^2}{2m},$$

$$G(t) = \int_t^\infty \mathbf{P}\{\xi_1 > v\}\, dv.$$

olur (tamqiymətli ξ_k -lar üçün $t \to \infty$ tamqiymətli qiymətlər üzrə götürülür). Buna görə də, $t \to \infty$ olduqda

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{\mathbf{M}\xi_1^2}{2m^2} + o(1).$$

B. t. təsadüfi dolaşmaların xüsusiyyətlərinin tədqiqində mühüm rola malikdir. Bu halda

$$R(t) = H(t) - \frac{t}{m} - \frac{\mathbf{M}\xi_1^2}{2m^2}$$

fərqinin sıfra yığılması sürəti maraq kəsb edir. Əgər $\mathbf{M}\xi_1^{k+2} < \infty$ və $\liminf_{|\lambda| \to \infty} \left| 1 - \mathbf{M}e^{i\lambda\xi_1} \right| > 0$ olarsa, onda

$$R(t) = -\frac{1}{m^2} \int_t^\infty G(u)du + o\left(\frac{\ln t}{t^{k+1}} \right) = o(t^{-k}).$$

$\mathbf{M}\xi_1^{k+2} < \infty$ şərtini ödəyən tamqiymətli ξ_k -lar üçün

$$R(t) = -\frac{1}{m^2} \sum_{j \geq t} \sum_{k > j} \mathbf{P}\{\xi_1 \leq k + 1\} + o(t^{-k-1}).$$

Əgər $\mathbf{P}\{\xi_1 > t\}$ eksponensial olaraq azalarsa və o, mütləq kəsilməz komponenti özündə saxlayarsa, onda bəzi $\varepsilon > 0$, $c < \infty$ ədədləri üçün

$$R(t) < ce^{-\varepsilon t},$$

$$\operatorname{var}_{(t, \infty)} R(t) < ce^{-\varepsilon t}$$

olur. Bu hökm tamqiymətli ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Stone C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 120, № 2, p. 327–42; [5] Takacs L., Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, N. Y. – [a. o.], 1967.

BƏRPA TEOREMİ ELEMENTAR « восстановления элементарная теорема; elementary renewal theorem » – *bərpa funksiyasının* asimptotikası haqqında teoremdir.

BƏRPA TƏNLİYİ « восстановления уравнение; renewal equation » –

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t - s)\, dF(s)$$

şəklində, $[0, \infty)$-da verilmiş funksiyalar üçün xətti inteqral tənlikdir, burada x – naməlum, y – verilmiş funksiyadır, F isə sıfırda topalanmayan hər hansı paylanma funksiyasıdır. İnteqral qapalı $[0, t]$ intervalı üzrədir. *Bərpa nəzəriyyəsi* B. t.-nin həllərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Lokal məhdud ölçülən funksiyalar sinfindən olan hər bir $y(t)$ funksiyası üçün B. t.-nin yeganə həlli vardır. Bu həll

$$x(t) = \int_0^t y(t - s)\, dH(s)$$

düsturu ilə verilir, burada $H(t)$, – $F(t)$ paylanma funksiyasına görə qurulmuş *bərpa funksiyasıdır.*

Əsas bərpa teoremində hökm olunur ki,

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{m} \int_0^\infty y(t)dt,$$

burada $m = \int_0^\infty t\, dF(t)$. Bu hökmün doğruluğu üçün m kəmiyyətinin sonlu olması və aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənilməsi kifayətdir:

(a) $F(t)$ paylanma funksiyası şəbəkəvari paylanma deyildir, yəni $F(t)$ funksiyasının artım nöqtələri hər hansı bir arifmetik şəbəkə təşkil etmir:

$$\sum_{n \geq 0} F(nh+) - F(nh-) < 1,$$

ixtiyari $h > 0$ üçün $y(t)$ funksiyası $[0, \infty)$-da Riman mənada bilavasitə inteqrallanan olsun, yəni

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{[n, n+1]} \left| y(t) \right| < \infty$$

və $\delta \to 0$ olduqda

$$\delta \sum_{n \geq 0} \sup_{[n\delta, n\delta + \delta]} y(t) - \inf_{[n\delta, n\delta + \delta]} y(t) \to 0;$$

(b) $F(t)$ paylanma funksiyası ciddi qeyri–sinqulyar paylanmadır, yəni $F^{*n}(t)$ kompozisiyasının mütləq kəsilməz komponenti vardır, $y(t)$ funksiyası isə kəsilməz olub, $[0, \infty)$-da Lebeq mənada inteqrallanandır və $t \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник. К., 1983.

BƏYAZ KÜY « белый шум; white noise » – spektral sıxlığı sabit olan ümumiləşmiş stasionar $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir.* B. k. prosesinin korrelyasiya (ümumiləşmiş) funksiyası $B(t) = \sigma^2\delta(t)$ şəklindədir, burada σ^2 – müəyyən müsbət sabit, $\delta(t)$ isə delta – funksiyadır. B. k. prosesi tətbiqi məsələlərdə çox qısa müddətli korrelyasiyaya malik təsadüfi kükrəntiləri təsvir etmək məqsədilə istifadə olunur (məs., «istilik küyü» – naqildə elektronların istilik hərəkəti nəticəsində yaranan cərəyan gücünün pulsasiyaları). $\zeta(t)$ B. k. təsadüfi prosesinin

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t}\, dz(\lambda) \qquad (*)$$

spektral ayrılışındakı $e^{i\lambda t}\, dz(\lambda)$ «elementar rəqs»ləri bütün λ tezlikləri üçün (orta mənada) eyni intensivliyə malikdirlər, yəni amplitudun kvadratının orta qiyməti

$$\mathbf{M}\,|\,dz(\lambda)\,|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\,d\lambda\,, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

düsturu ilə eyni bir kəmiyyətlə təyin olunur.

(*) spektral ayrılışı onu ifadə edir ki, kvadratı ilə inteqrallanan ixtiyari $\varphi(t)$ funksiyası üçün

$$\langle \zeta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\zeta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\,dz(\lambda)$$

münasibəti doğrudur, burada $\widetilde{\varphi}(\lambda)$, – $\varphi(t)$ funksiyasının Furye çevirməsidir. Ümumiləşmiş $\zeta = \langle \zeta, \varphi \rangle$ prosesinin $\varphi(t)$ funksiyasından daha aşkar olan asılılığı $dz(\lambda)$ tipli uyğun stoxastik $d\eta(t)$ ölçüsünün köməyilə ifadə oluna bilər [$d\eta(t)$ – stoxastik $dz(\lambda)$ ölçüsünün Furye çevirməsidir], yəni

$$\langle \zeta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,d\eta(t)\,.$$

Qauss bəyaz küy prosesi $\eta(t)$ Braun hərəkəti prosesinin ümumiləşmiş törəməsidir: $\zeta(t) = \eta'(t)$. Bu proses

$$Y'(t) = a\,(t, Y(t)) + \sigma(t, Y(t))\,\eta'(t)$$

tipli stoxastik differensial tənliklərlə «idarəolunan» stoxastik differensial $Y(t)$ proseslərinin qurulması üçün əsas götürülür; bu tənliklər, adətən, differensial formada

$$dY(t) = a(t,\ Y(t)\,dt + \sigma(t,\ Y(t))\,d\eta(t)$$

şəklində yazılır.

B. k. istifadə olunan digər mühüm model – dayanıqlı rəqsi sistemin $\zeta(t)$-nin stasionar təsadüfi kükrəntilərinin təsiri ilə evolyusiyasını təsvir edən $Y(t)$ təsadüfi prosesidir və bu $Y(s)$, $s<t$ və $\zeta(u)$, $u>t$ asılı olmayan təsadüfi proseslər olmalıdır. $P(z)$ – sol yarımüstəvidə kökləri olan çoxhədlidirsə, $P(d/dt)Y(t) = \zeta(t)$ tipli sistem belə sistemə ən sadə misaldır; «keçid proseslərinin» sönməsindən sonra

$$Y(t) = \int \frac{1}{P(i\lambda)}\,dz(\lambda)$$

olur.

Tətbiqi məsələlərdə kəsri effekt proseslərinin təsvirində

$$\zeta(t) = \sum_k \delta\,(t - \tau_k)$$

tipli B. k. prosesi böyük rol oynayır (k indeksi $-\infty$-dan ∞-a qədər dəyişir və $\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots$ – zamana görə Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi anlardır), yəni $\zeta(t)$ prosesi $\eta(t)$ Puasson prosesinin ümumiləşmiş törəməsidir. Kəsri effekt prosesinin özü

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c\,(t,\ s)\,\zeta(s)\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s)\,d\eta(s) = \sum_k c(t,\ s - \tau_k)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $c(t, s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t,\ s)|^2 ds < \infty$$

şərtini ödəyən hər hansı çəki funksiyasıdır; bu halda $\zeta = (\zeta, \varphi)$ ümumiləşmiş prosesinin orta qiyməti

$$a(\varphi) = a\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt$$

düsturu ilə təyin olunur, burada a – yuxarıda qeyd olunan Puasson qanununun parametridir və

$$\zeta(t) = a + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dz(\lambda)$$

spektral ayrılışında bu prosesin $dz(\lambda)$ stoxastik ölçüsü elədir ki,

$$\mathbf{M}\,|\,dz(\lambda)|^2 = (a/2\pi)d\lambda\,.$$

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

BƏYAZ KÜY diskret « **белый шум** дискретный; discrete **white noise** » – bax, *Diskret bəyaz küy*.

BƏYAZ KÜY kəsri « **белый шум** дробный; fractional **white noise** » – bax, *Kəsri bəyaz küy*.

BƏYAZ KÜY tezliklərin sonlu zolağında « **белый шум** в конечной полосе частот; **white noise** in a finite bandwidth » – elə Qauss (və ya bu terminin genişlənmiş mənada istifadə olunan, ixtiyari) stasionar təsadüfi prosesidir ki, orta qiyməti sıfra bərabərdir, spektral sıxlığı əgər $|\lambda| \le \Omega$ olarsa, $f(\lambda) = f_0 = \text{const}$, $|\lambda| > \Omega$ olduqda isə, $f(\lambda) = 0$ şəklində ifadə olunur (burada Ω – hər hansı müsbət sabitdir) və korrelyasion funksiyası –

$$B(\tau) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} f(\lambda)\,d\lambda = 2f_0\,\frac{\sin\Omega\tau}{\tau}$$

münasibətilə təyin olunur. Tezliklərin sonlu zolağında B. k. adi B. k.-ün dairəvi tezlikləri $\lambda \le \Omega$ olan harmonik rəqslərini heç cürə dəyişməyən, lakin $\lambda > \Omega$ tezlikli bütün rəqslərin qarşısını aşağı tezliklərin xətti filtrdən ötürülməsi vasitəsilə alınır.

BƏYAZLANMA « **предбеливание; prewhitening** » – zaman sıralarının *spektral analizində* istifadə olunan prosedurdur. Əgər analiz olunan zaman sırası Y_t-nin spektral

sıxlığının zirvələri və çökəkləri haqqında əvvəlcədən məlum bilgilər olarsa, onda çevirmə vasitəsilə yeni Z_t sırasına keçid faydalı olur;

$$Z_t = \sum_{r=0}^{q} c_r Y_{t-r}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Bu halda sıranın spektral sıxlığı

$$h(\lambda) = \left| \sum_{r=0}^{q} c_r e^{i\lambda r} \right|^2 f(\lambda) \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $f(\lambda)$, – Y_t-nin spektral sıxlığıdır (bax, *Xətti filtr*). c_r əmsalları elə seçilməlidir ki, $h(\lambda)$ mümkün olduqca hamar olsun (bəyaz küyün spektral sıxlığına yaxın olsun). Hamar spektral sıxlığı qiymətləndirmək olduqca asan olduğundan, əvvəlcə Z_t sırası üzrə $h(\lambda)$ qiymətləndirilir, sonra isə (*)-dan $f(\lambda)$ tapılır.

BHATTAÇARYA – RAO SFERİK MƏSAFƏSİ « Бхаттачария – Рао сферическое расстояние; Bhattacharya – Rao spherical distance » – bax, *Riman informasion metrikası.*

BİXƏTTİ MODEL(i) t ə s a d ü f i p r o s e s i n **« билинейная модель** с л у ч а й н о г о п р о ц е с с а; **bilinear model** f o r r a n d o m p r o c e s s / **bilinear time** s e r i e s m o d e l **»** – diskret zamanlı həqiqi $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin*

$$\zeta(t) + \sum_{i=1}^{p} a^i \zeta(t-i) = e(t) + \sum_{i=1}^{p} b^i e(t-i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c^{ij} \zeta(t-i) e(t-j), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (*)$$

fərqlər tənliyi ilə təyin olunması üçün modeldir, burada $e(t)$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır: $\mathbf{M}\, e(t) = 0$, $\mathbf{M} e^2(t) = \sigma^2 < \infty$ (bəyaz küy), $\{a^i, 1 \le i \le p\}$, $\{b^j, 1 \le j \le q\}$ və $\{c^{ij}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le s\}$ – sabitlərdir. Bəzən $e(t)$ dar mənada stasionar ardıcıllıq olduqda, daha ümumi B. m.-lərə də baxılır. (*) modeli p, q, r, s parametrlərinin qiymətləri ilə xarakterizə olunur və $BL(p, q, r, s)$ simvolu ilə işarə olunur. Əgər bütün $i = 1, \ldots, r$ və $j = 1, \ldots, s$ qiymətlərində $c^{ij} = 0$ olarsa, onda B. m. (p, q) tərtib avtoreqressiv sürüşən orta prosesinin modelinə çevrilir.

Təsadüfi proseslərin ümumi B. m.-lərinin öyrənilməsi uyğun proseslərin vəziyyətlər fəzasında onların vektor təsvirlərinə əsaslanır ki, bu da modeli təsvir edən fərqlər tənliklərinin tərtiblərini azaltmağa imkan verir. Təsadüfi proseslərin B. m. nəzəriyyəsinin əsas istiqamətləri – modellərin tənliklərinin stasionar həllərinin varlığı şərtlərinin və zaman sıralarını proqnozlama məsələlərinə təsadüfi proseslərin B. m.-lərinin tətbiqində mühüm rol oynayan bixətti modellərin çevrilmə şərtlərinin, həmçinin B. m.-in parametrlərinin qiymətləndirilməsi məsələlərinin araşdırılmasından ibarətdir (bax, [1] – [3]). Burada B. m.-in çevrilməsi, modelin özü və onun parametrləri tamamilə məlum olarsa, müşahidəoluna bilinməyən $e(t)$ prosesi üçün

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{M} [e(t) - \hat{e}(t)]^2 = 0$$

şərtini ödəyən $\hat{e}(t)$ statistik qiymətlərinin alınmasının mümkünlüyü anlaşılır.

Diskret zamanlı

$$\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \ldots, \zeta_n(t)\}$$

vektor təsadüfi prosesinin çoxölçülü B. m.

$$\zeta_k(t) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{u=1}^{n} a_{ku}^i \zeta_u(t-i) = e_k(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \sum_{u=1}^{n} b_{ku}^j e_u(t-j) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} c_{kuv}^{ij} \zeta_u(t-i) \times$$

$$\times e_v(t-j), \quad k = 1, \ldots, n$$

– fərqlər tənlikləri sistemi ilə verilir, burada $\mathbf{e}(t) = \{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorlar ardıcıllığıdır: $\mathbf{M}\, e(t) = 0$, G – korrelyasion matris, $\{a_{ku}^i, 1 \le i \le p, k, u = 1, \ldots, n\}$, $\{b_{ku}^j, 1 \le j \le q, k, u = 1, \ldots, n\}$, $\{c_{kuv}^{ij}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le s, k, u, v = 1, \ldots, n\}$ – sabitlərdir.

Ədb.: [1] G r a n d e r C. W. J., A n d e r s e n A. P., An introduction to bilinear time series models, Gött., 1978; [2] R a o T. S., «J. Roy. Stat. Soc., ser. B», 1981, v. 43, № 2, p. 244–55; [3] R a o T. S., G a b r M. M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, B., 1984.

BİKOMPAKT t o p o l o j i $(\mathscr{X}, \mathscr{I})$ f ə z a s ı n d a **« бикомпакт** в т о п о л о г и ч е с к о м п р о с т р а н с т в е $(\mathscr{X}, \mathscr{I})$; **bicompact / compact set** i n a t o p o l o g i c a l s p a c e **»** – elə $K \subset \mathscr{X}$ çoxluğudur ki, onun ixtiyari açıq örtüyünün sonlu altörtüyü vardır. Əgər K çoxluğunun qapanması bikompakt çoxluq olarsa, onda K n i s b i b i k o m p a k t çoxluq (rus. относительно бикомпактным) adlanır. K topoloji fəzada, yalnız və yalnız, o halda bikompakt çoxluqdur ki, K-da hər bir şəbəkənin yığılan altşəbəkəsi olsun (bax, [1]). B. – bəzən *kompakt* da adlandırılır. Metrik fəzada kompakt və B. anlayışları üst-üstə düşür. Ümumi halda, bu anlayışlar arasındakı fərqi ayırmaq üçün kompakt çoxluqlar h e s a b i k o m p a k t çoxluqlar adlandırılır. İxtiyari kompakt B.-dır, lakin ixtiyari B. kompakt deyildir.

Ədb.: [1] К е л л и Д ж.-Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М. – Л., 1948.

BİLYARD « бильярд; billiards » – bax, *Sinay bilyardı.*

BİMODAL PAYLANMA « бимодальное распределение; bimodal distribution », i k i z i r v ə l i p a y l a n m a, – təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının sıxlıq funksiyası əyrisinin *modasının* iki qiyməti ilə təyin olunan iki maksimumunun varlığı ilə xarakterizə olunan ehtimal *paylanmasıdır.* B. p. bir çox hallarda iki normal paylanmanın «qarışığı» kimi alınır. Bax, *Multimodal paylanma*, *Unimodal / təkzirvəli paylanma.*

BİNAR MÜNASİBƏTLƏR STATİSTİKASI « бинарных отношений статистика; binary relations statistics » – qeyri – ədədi təbiətli *obyektlər statistikasının* elə bölməsidir ki, burada müşahidə nəticələri binar münasibətlərdir. Binar münasibətlər arasında ən çox tətbiq olunanlar – r a n q l a n m a (xətti kvaziqayda münasibətləri), b ö l g ü l ə r (ekvivalentlik münasibətləri), t o l e r a n t l ı q (refleksiv simmetrik münasibətlər) kimi münasibətlərdir. Seçimi orta kimi *Kemeni məsafəsi* vasitəsilə təyin olunan *Kemeni medianından* və digər *yaxınlıq ölçüləri* əsasında qurulan *orta kəmiyyətlərdən* istifadə olunur. Sıxlığın *nüvə statistik qiymətləri* (altçoxluğun elementlərinin sayına müvafiq ölçü üzrə) reqressiyada, diskriminant analizdə, bircinsliyin yoxlanılmasında və başqa məsələlərdə tətbiq olunur. Bir çox hallarda, xüsusilə də, binar münasibətlər doğuran ehtimalların qurulmasında, *ekstremal statistik məsələlər* həll olunur. Binar münasibətlərin izotrop fəzalarında ehtimalların *monoton paylanmaları* mühüm rol oynayır, belə paylanmalar üçün moda nəzəri orta ilə üst-üstə düşür. Binar münasibət, bu münasibətin təyin olunduğu sonlu çoxluğun dekart kvadratının altçoxluğu ilə eyniləşdirildiyindən, B. m. s. *Sonlu təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır (bax, [1]). B. m. s.-nın bir çox məsələlərində aksiomatik daxil edilən yaxınlıq ölçüləri istifadə olunur (bax, [2]).

Təsadüfi tolerantlıqlar nəzəriyyəsi asılı olmayan elementlərli sonlu təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinin bir hissəsidir və deməli, lyusianlar nəzəriyyəsinin bir hissəsidir. Ölçmə nəzəriyyəsinə görə qaydalı və ya nominal şkalalarda ölçmələr uyğun olaraq, ranqlanma və bölgülərə gətirir. Təsadüfi ranqlanmalar nəzəriyyəsi 20-ci əsrin əvvəllərindən inkişaf etməyə başlamışdır (bax, [3], [4]). İxtiyari A və B xətti qaydaları üçün Kendall ranq korrelyasiyası $\tau(A,B)$ və Kemeni məsafəsi $d(A,B)$

$$\tau(A,\ B) = 1 - 2d(A,B)/k(k-1)$$

münasibətilə bağlıdırlar, burada k – ranqlanan obyektlərin sayıdır. Təsadüfi bölgülər nəzəriyyəsi (bax, [5]) riyazi cəhətdən olduqca çətindir.

Cüt-cüt müqayisələr nəzəriyyəsini B. m. s.-na aid etmək olar, belə ki, bu müqayisələr binar münasibətlərin alınması üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] О р л о в А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Р а у ш е н б а х Г. В., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 169–203; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] К е н д э л М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [5] М а а м я г и А. В., Некоторые задачи статистического анализа классификаций, Тал., 1982; [6] Д э в и д Г., Метод парных сравнений, пер. с англ., М., 1978.

BİNAR ŞAXƏLƏNƏN PROSES « бинарный ветвящийся процесс; binary branching process » – eyni tipli hissəciklərli elə *şaxələnən prosesdir* ki, hissəciklər bir çevrilmədə ya itir (məhv olur), ya da iki hissəyə bölünür. Kəsilməz zamanlı B. ş. p.-in t anında hissəcikləri sayının paylanmasının uyğun doğuran funksiyası $\psi(t;s)$ aşkar şəkildə ifadə olunur. Kritik şaxələnən proses halında

$$\psi(t;\ s) = 1 - (1-s)\left[\frac{bt}{2}(1-s)+1\right]^{-1}$$

olur, burada $b>0$ sabitdir. Qeyri – kritik proses halında

$$\psi(t;\ s) = 1 - e^{at}(1-s)\left[\frac{b}{2a}(e^{at}-1)(1-s)+1\right]^{-1},$$
$$a \neq 0.$$

B. ş. p. *doğum* və *ölüm prosesinin* xüsusi halıdır.

Əd.: [1] С е в а с т ь я н о в Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

BİNAR TƏSADÜFİ PROSES « бинарный случайный процесс; binary random process », d i x o t o m i k t ə s a d ü f i p r o s e s – hər bir realizasiyası yalnız iki qeyd olunmuş c_1 və c_2 qiymətlərini alan $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir.* $\zeta(t) \to a\zeta(t) + b = \zeta_1(t)$ xətti çevirməsilə (c_1, c_2) qiymətlərini ixtiyari verilmiş ədədlər cütü ilə əvəz etmək olar; buna görə də, B. t. p.-i tədqiq edərkən elə əvvəlcədən $c_1=1,\ c_2=0$ və ya $c_1=1,\ c_2=-1$ götürülür. Sonuncu halda, B. t. p. bəzən *vahidi təsadüfi proses* adlanır (bax, məs., [1]).

B. t. p.-ə ilk misalı N. Viner araşdırmışdır (bax, [2], [3]). Stasionar B. t. p.-ə tipik misal *təsadüfi teleqraf siqnalıdır*; bu halda B. t. p.-ə – binar rabitə kanalı ilə ötürülən siqnal modeli kimi baxmaq olar, məs., fasilələrlə bir-birini əvəz edən cərəyanlar ardıcıllığı göndərilən teleqraf kanal.

B. t. p.-lər təbii olaraq girişə daxil olan $\zeta(t)$ siqnalını qeyri – xətti çevirən m ə h d u d l a y ı c ı n ı n çıxışındakı proseslərin baxılmasında yaranır; bu məhdudlayıcı daxil olan $\zeta(t)$ siqnalını $|\zeta(t)| \le a$ (burada a – qeyd olunmuş müsbət ədəddir) olduqda daxil olunmuş siqnalı təhrifsiz ötürür. Əgər $|\zeta(t)| > a$ olarsa, onda bu siqnalı $a\zeta(t)/|\zeta(t)|$; Əgər $\mathbf{M}\zeta(t)=0$, $\mathbf{M}\zeta^2(t) \ge a^2$ olarsa, onda belə məhdudlayıcının çıxışındakı proses faktiki olaraq B. t. p.-dən fərqlənməyəcəkdir.

$\zeta(t)$ – Qauss stasionar prosesi,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \ \text{olduqda}, \\ -1, & x < 0 \ \text{olduqda} \end{cases}$$

olarsa, $Y(t) = \operatorname{sgn}\zeta(t)$ prosesi stasionar B. t. p.-dir, $Y(t)$ prosesi $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin korrelyasiya funksiyasının polyar qiymətləndirmə metodunda əsas rol oynayır (bax, *Polyar korrelyasion funksiya*); $Y(t)$-dən $\zeta(t)$-nin spektral sıxlığının sadə təqribi yaxınlaşmasının təyin olunması üçün də istifadə olunur (bax, [4]).

$\zeta(t)$ stasionar B. t. p.-in $B(\tau) = \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\zeta(t)$ korrelyasiya funksiyasının qrafikinin $\tau = 0$ nöqtəsində hökmən zirvəsi olur (bax, [1]).

Əd.: [1] M a s r y E., «SIAM J. Appl. Math.», 1972, v. 23, № 1, p. 28–33; [2] W i e n e r N., «Acta math.», 1930, t. 55, № 2–3, p. 117–258; [3] В и н е р Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, пер. с англ., М., 1963, с. 194; [4] K e d e m B., Binary time series, N. Y., Basel, 1980.

BİNOMİAL ƏMSAL « биномиальный коэффициент; binomial coefficient » – Nyuton binom ayrılışında C_N^n əmsalıdır:

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} C_N^n\, x^n\, y^{N-n},$$

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!},\ 0 \le n \le N$$

düsturu ilə hesablanan B. ə. N sayda müxtəlif elementdən ibarət çoxluğun n sayda elementli birləşmələrinin sayına bərabərdir. B. ə. $\binom{N}{n}$ simvolu ilə də işarə olunur.

B. ə.-lar arasında bir çox münasibətlər vardır. Məs.,

$$C_N^n = C_N^{N-n},\ C_{N+1}^n = C_N^n + C_N^{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{N} C_N^n = 2^N,\quad C_N^n = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, C_{N-m}^{n-k},\quad 1 \le m \le n.$$

B. ə.-lar müxtəlif ehtimal – kombinator məsələlərdə təbii olaraq yaranır. Məs., hiperhəndəsi paylanma

$$p(M, N, m, n) = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

$0 \le m \le n \le N$, $m \le M \le N$, $n - m \le N - M$ münasibətlərilə təyin olunur.

$$B_n = \frac{1}{n!}\,\mathbf{M}\xi\,(\xi - 1)\,\ldots\,(\xi - n + 1) = \sum_{N=n}^{\infty} C_N^n\,\mathbf{P}\{\xi = N\}$$

bərabərlikləri tamqiymətli ξ təsadüfi kəmiyyətinin faktorial momentlərini təyin edir. Əgər $h(u) = -u\log_2 u - (1-u)\times$ $\times \log_2(1-u)$, $\tau = (2n+1)/2N$ olarsa, onda

$$C_{N-1}^n = \frac{2^{Nh(\tau)}}{\sqrt{2\pi N}}\, e^{\varepsilon(N,n)},$$

$$0 \le \varepsilon(N, n) \le (16n\tau(1-\tau))^{-1}.$$

B. ə.-ların bir sıra ümumiləşmələri vardır. Bunlardan p o l i n o m i a l ə m s a l l a r:

$$\binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!},$$

$$n_1 + \ldots + n_k = N,\quad k > 2,$$

q – binomial əmsallar və ya Q a u s s ə m s a l l a r ı n ı (bu əmsallar $q \to 1$ olduqda B. ə. ilə üst-üstə düşür):

$$\binom{N}{n}_q = \frac{\prod_{i=1}^{N}(q^i - 1)}{\prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)\prod_{i=1}^{N-n}(q^i - 1)},\quad q > 1$$

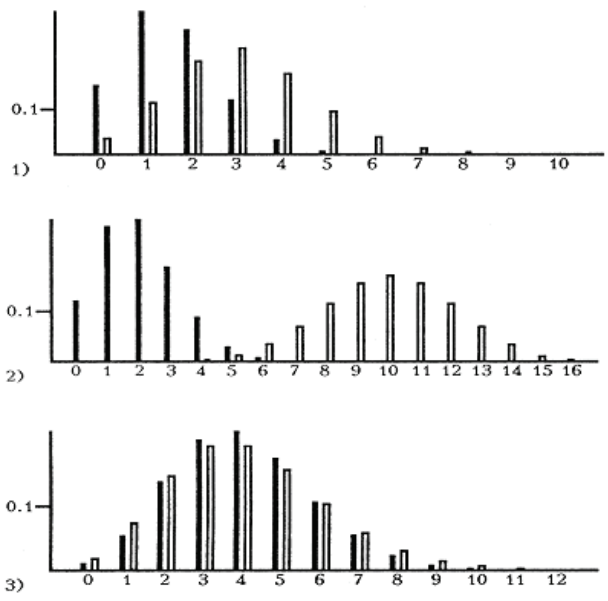
qeyd etmək olar.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

BİNOMİAL PAYLANMA « биномиальное распределение; binomial distribution », B e r n u l l i p a y l a n m a s ı – $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ tam qiymətlərini uyğun olaraq

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = b(k; n, p) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret *ehtimal paylanmasıdır* (bax, şəkil).



1) $n = 5,\ p = 0{,}3$ və $n = 10,\ p = 0{,}3$;

2) $n = 20,\ p = 0{,}1$ və $p = 0{,}5$;

3) $n = 20,\ p = 0{,}2$ binomial paylanma olduğu halda $\lambda = np = 4$ approksiməedici halı üçün Puasson paylanması.

p – B. p.-nın parametridir və m ü s b ə t n ə t i c ə («müvəffəqiyyət») e h t i m a l ı d ı r, $0 \le p \le 1$. B. p. asılı olmayan sınaqlar ardıcıllığı ilə bağlı əsas ehtimal paylanmalarından biridir. $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ – 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq, p və $1-p$ ehtimalları ilə alan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun (yəni hər bir ξ_i təsadüfi kəmiyyəti $n = 1$ halı üçün B. p. qanununa tabedir).

ξ_i təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan sınaqların nəticələri kimi interpretasiya olunur: əgər i-ci sınaq «müvəffəqiyyət»lə nəticələnmişdirsə, $\xi_i = 1$, əks halda isə $\xi_i = 0$ götürülür. Əgər aparılan sınaqların ümumi sayı qeyd olunmuşdursa, onda belə sxem *Bernulli sınaqları* adlanır. $\{\xi_i,\ i \ge 1\}$ ardıcıllığına *Bernulli ardıcıllığı* deyilir. n sınaqda «müvəffəqiyyət»lər sayı $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,\ n \ge 1$ bu halda p parametrli B. p. qanununa tabedir. B. p.-nın doğuran funksiyası $\psi(s) = (ps + q)^n$-ə bərabərdir $(q = 1 - p)$. $\psi(s)$ doğuran funksiyasının Nyuton binomuna ayrılışı $b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n$ olduğundan «B. p.» termini qəbul edilmişdir; $b_k = b(k, n, p)$.

B. p.-nın momentləri aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur:

$$\mathbf{M}\xi = np,\ \mathbf{D}\xi = \mathbf{M}[\xi - \mathbf{M}\xi]^2 = np(1-p),$$

$$\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = np(1-p)(1-2p);$$

B. p.-nın asimmetriyası

$$\mathbf{As} = (1-2p)\Big/\sqrt{np(1-p)},$$

ekssesi

$$\mathbf{Es} = (1-6p(1-p))/np(1-p),$$

xarakteristik funksiyası isə

$$f(z) = (1+p(e^{iz}-1))^n$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Binomial paylanma funksiyası ixtiyari həqiqi y üçün

$$F(y) = \mathbf{P}\{\xi \le y\} = \sum_{k=0}^{[y]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < y < n$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $[y]$, – y-in tam hissəsidir. Bütün həqiqi y qiymətlərində

$$F(y) = \Phi\left[\frac{y-np+0{,}5}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + R_n(y, p)$$

bərabərliyi müntəzəm ödənilir, burada Φ – Laplas funksiyası, $R_n(y, p) = O(n^{-1/2})$.

$n \to \infty$ olduqda B. p. funksiyası Φ standart normal paylanma funksiyası terminologiyasında

$$F(y) \equiv \frac{1}{B([y]+1, n-[y])} \int_p^1 t^{[y]}(1-t)^{n-[y]-1}\,dt$$

asimptotik düsturu ilə (Muavr – Laplas teoremi) ifadə olunur, burada $B(a, b)$ – Eyler beta – funksiyasıdır.

Əgər asılı olmayan sınaqlar sayı n böyük, p ehtimalı kiçik olarsa, onda $b(k; n, p)$ individual ehtimalları, asimptotik olaraq Puasson paylanması terminlərilə ifadə olunur:

$$b(k; n, p) \approx \frac{(np)^k}{k!}\, e^{-np},$$

Bu halda, əgər $n \to \infty$ və $0 < c \le y \le C$ (c və C – sabitlərdir) olarsa, onda $0 < p < 1$ intervalından olan bütün p-lərə görə müntəzəm olaraq

$$F(y) = \sum_{k=0}^{[y]} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + O(n^{-2}), \ \lambda > 0$$

asimptotik düsturu ödənilir, burada

$$\lambda = (2n-[y])\,p/(2-p).$$

B. p.-nın çoxölçülü ümumiləşməsi *polinomial paylanmadır*.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [4] Прохоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 3, с. 135–42; [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

BİNOMİAL SEÇİM « биномиальная выборка; binomial sample » – bax, *Seçim* statistik.

BİR EHTİMAL FƏZASI METODU « одного вероятностного пространства метод; common probability space method » – limit teoremlərinin isbatı (təsadüfi proseslər üçün də) və bunlarda yığılma sürətinin qiymətlərinin alınması metodu olub, bir ehtimal fəzasında verilmiş, araşdırılan təsadüfi elementlərin bunların paylanması ilə eyni paylanmaya malik olan və müəyyən bir metrikada bir-birinə yaxın olan digər təsadüfi elementlərlə əvəz olunmasından ibarətdir. X_n, $n = 0, 1, \ldots$ – qiymətləri $(\mathscr{X}, d)$ metrik fəzasından olan, ola bilər ki, müxtəlif ehtimal fəzalarında da verilən təsadüfi elementlər olsun. X_n^*, $n = 0, 1, \ldots$, – $(\mathscr{X}, d)$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi elementlər olsun, lakin bu təsadüfi elementlərin eyni bir ehtimal fəzasında verildiyi, X_n, $n = 0, 1, \ldots$ təsadüfi elementləri ilə eyni qanunla paylandıqları fərz olunur. Əgər $\{X_n^*\}$ elementlərini elə seçmək olarsa ki, $d(X_n^*, X_0^*) \to 0$ münasibəti sanki yəqin və ya ehtimala görə ödənilsin, onda $P_n \Rightarrow P_0$ olur; P_n, – X_n elementinin paylanmasıdır, $n = 0, 1, \ldots$. Bu yanaşma təsadüfi proseslər üçün ümumi limit teoremlərinin isbatında tətbiq edilmişdir (bax, [1]). Bu üsuldan yığılma sürətinin qiymətlərinin alınmasında da istifadə olunmuşdur, çünki Levi – Proxorov məsafəsi $\pi(P_n, P_0)$ üçün

$$\pi(P_n, P_0) \le \inf_{\varepsilon} \max\left[\varepsilon,\ \mathbf{P}\{d(X_n^*, X_0^*) > \varepsilon\}\right] \qquad (*)$$

bərabərsizliyi doğrudur. $(\mathscr{X}, d)$ tam separabel fəza olduqda Strassen teoreminə görə B. e. f. m. geniş imkanlar yaradır: (*)-da bərabərlik halı X_n^* və X_0^* təsadüfi elementlərinin birgə paylanmasının «ən yaxşı» seçilməsi ilə alınır, həmçinin $P_n \Rightarrow P_0$ zəif yığılmasından $d(X_n^*, X_0^*) \to 0$ münasibətinin sanki yəqin ödənildiyini təmin edən $\{X_n^*\}$ elementlərinin varlığı faktı alınır (bax, [1]).

B. e. f. m.-nun tətbiqinə aid misal: $\{X_n\}$ həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər, $X_n^* = F_n^{-1}(Y)$, $n = 0, 1, \ldots$, $F_n(\cdot)$, – X_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, Y, – $[0, 1]$-də müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olduğu haldır.

B. e. f. m. yığılma sürətinin araşdırılmasında geniş surətdə tətbiq edilir (bax, [2], [3], [4], [5], [6]).

Əd.: [1] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [3] Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, К., 1961; [4] Strassen V., «Proc. 5th Berk. Symp. Math. Stat. Probab.», 1967, v. 2, № 1, p. 315–43; [5] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Warh. und verw. Geb.», 1975, Bd 32, № 1, S. 111–31; 1976, Bd 34, № 1, S. 33–58; [6] Berkes I., Philipp W., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 1, p. 29–54.

BİRADDIMLI KEÇİD EHTİMALI « одношаговая вероятность перехода; one-step transition probability » – bax, *Markov zənciri*.

BİRCİNS XAOS « однородный хаос; homogeneous chaos » – sonluölçülü paylanmaları yerinidəyişmələrə nəzərən invariant olan, $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$ fəzasında *təsadüfi ölçünün*

işarə olunması üçün termindir (bax, [1]). B. x. nəzəriyyəsində Viner prosesinin kvadratı ilə inteqrallanan funksionallarının Viner – İto çoxqat inteqralları (p o l i n o m i a l b i r c i n s x a o s) ilə yaxınlaşması mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] W i e n e r N., «Amer. J. Math.», 1938, v. 60, p. 897–936; [2] Х и д а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

BİRCİNS İZOTROP KORRELYASİON FUNKSİYA « однородная изотропная корреляционная функция; homogeneous isotropic correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

BİRCİNS KANAL « однородный канал; homogeneous channel » – bax, *Kanal* y a d d a ş s ı z.

BİRCİNS KEÇİD FUNKSİYASI « однородная переходная функция; homogeneous / stationary transition function » – bax, *Keçid funksiyası.*

BİRCİNS KORRELYASİON FUNKSİYA « однородная корреляционная функция; homogeneous correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

BİRCİNS MARKOV PROSESİ « однородный марковский процесс; homogeneous Markov process » – bax, *Markov prosesi*.

BİRCİNS MARKOV ZƏNCİRİ ZAMAN ÜZRƏ « однородная по времени цепь Маркова; time homogeneous Markov chain » – zaman keçdikcə evolyusiya xarakteri dəyişməyən *Markov zənciridir*. Ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında verilən, biraddımlı keçid ehtimalları $p_n(x, \Gamma)$, $n \geq 0$ olan $X = (X_n)$ Markov zənciri üçün bircinslik xassəsi $p_n(x, \Gamma)$ ehtimalının n -dən asılı olmamazlığıdır. Vəziyyətləri sayı hesabidən çox olmayan $\mathscr{E} = \{1, 2, ...\}$ vəziyyətlər çoxluğunda verilən Markov zənciri üçün bircinslik tələbi $p_{ij}(n, n+1) = p_n(i, \{j\})$ ehtimalının n -dən asılı olmamazlığına gətirilir. ($i, j \in \mathscr{E}$).

Z. ü. B. M. z. – Markov zəncirləri nəzəriyyəsinin öyrənilən əsas obyektlərindəndir. «Markov zənciri» və «Zaman üzrə B. M. z.» terminləri əksər hallarda sinonimlər kimi işlədilir.

BİRCİNS ÖLÇÜ « однородная мера; homogeneous measure » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

BİRCİNS PUASSON ÖLÇÜSÜ « однородная пуассоновская мера; homogeneous Poisson measure » – bax, *Puasson ölçüsü*.

BİRCİNS SİNFİ, FUNKSİYALARIN R e n y i y ə g ö r ə **« однородный класс функций** п о Р е н ь и; R é n y i's **homogeneous class of functions »** – gücü n -ə bərabər sonlu Λ çoxluğunda funksiyaların aşağıdakı şərtlə verilən $\mathscr{F}$ sinfidir: Λ -dan olan ixtiyari λ və μ üçün $f(\lambda) = f(\mu)$ şərtini ödəyən $f \in \mathscr{F}$ funksiyalarının sayı λ və μ -dən asılı olmayan R_2 ədədinə bərabərdir. İsbat olunmuşdur ki, $\mathscr{F}$ -in gücü $2R_2(n-1)/(n-2)$ ədədini aşmır. $\mathscr{F}$ -in ixtiyari seçilmiş N sayda elementlərinin Λ -dan olan hər hansı λ və μ -lərdəki qiymətlərinin ardıcıllığının üst-üstə düşməsi ehtimalı üçün yuxarı və aşağı sərhədlər tapılmışdır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

BİRCİNS TƏSADÜFİ MEYDAN « однородное случайное поле; homogeneous random field » – s nöqtələrinin bircins $S = \{s\}$ fəzasında verilmiş elə $X(s)$ *təsadüfi meydanıdır* ki, bu meydan S fəzasını özünə çevirən $G = \{g\}$ tranzitiv çevirmələr qrupu ilə təmin olunmuşdur və bu meydan elə xassəyə malikdir ki, onun qiymətlərinin müəyyən statistik xarakteristikaları s arqumentlərinə G qrupunun ixtiyari çevirməsinin tətbiqi nəticəsində dəyişmir. B. t. m. iki sinfə ayrılır: əgər ixtiyari $n = 1, 2, ...$ və $g \in G$ üçün n sayda $s_1, ..., s_n$ ixtiyari nöqtələrində meydanın qiymətlərinin sonluölçülü ehtimal paylanması həmin meydanın $gs_1, ..., gs_n$ nöqtələrində qiymətlərinin ehtimal paylanması ilə üst-üstə düşərsə, $X(s)$ meydanı d a r m ə n a d a B. t. m. adlanır; əgər bütün $s \in S$, $s_1 \in S$ və $g \in G$ üçün $\mathbf{M}|X(s)|^2 < \infty$ və $\mathbf{M}X(s) = \mathbf{M}X(gs)$, $\mathbf{M}X(s)\overline{X(s_1)} = \mathbf{M}X(gs)\overline{X(gs_1)}$ olarsa, $X(s)$ g e n i ş m ə n a d a B. t. m. adlanır.

Mühüm xüsusi hal – G qrupu kimi bütün mümkün ola bilən paralel köçürmələr qrupu seçildikdə k ölçülü $\mathbb{R}^k$ Evklid fəzasında (və ya tamqiymətli koordinatlarlı $\mathbb{R}^k$ -nın nöqtələrinin $\mathbb{Z}^k$ şəbəkəsində) B. t. m. halıdır, bəzən B. t. m. kimi, ümumiyyətlə, məhz bu – sonuncu tip meydan anlaşılır. $\mathbb{R}^k$ -da bütün mümkün ola bilən izometrik çevirmələrin G qrupuna müvafiq, $\mathbb{R}^k$ -da verilən B. t. m., əksər hallarda, *bircins* və *izotrop təsadüfi meydan* adlandırılır.

B. t. m. anlayışı stasionar təsadüfi proses anlayışının təbii ümumiləşməsidir; stasionar təsadüfi prosesdə olduğu kimi B. t. m.-nın özü və onun kovariasion funksiyası üçün xüsusi şəkilli *spektral ayrılış* mümkündür (bax, məs., [1] – [3]). B. t. m. və onun bəzi ümumiləşmələrinə əksər hallarda müxtəlif tətbiqi məsələlərdə təsadüf olunur; o cümlədən, statistik turbulentlik nəzəriyyəsində $\mathbb{R}^k$ -da bircins və izotrop təsadüfi meydanlar kimi (skalyar və vektor), l o k a l b i r c i n s və l o k a l i z o t r o p t ə s a d ü f i m e y d a n l a r (başqa sözlə – bircins və izotrop artımlarlı meydanlar) adlandırılan meydanlar da mühüm rol oynayır və bunlar da bircins və izotrop meydanların sadə ümumiləşmələridir (bax, məs., [4]), müasir fiziki kvantlanmış meydanlar nəzəriyyəsində və statistik fizikada isə ümumiləşmiş B. t. m.-lar nəzəriyyəsi tətbiq olunur (bax, *Ümumiləşmiş təsadüfi meydan*).

Əd.: [1] Y a g l o m A. M., в кн.: Proceedings of 4th Berkeley symposium mathematical statistics and probability, v. 2, Berk. – Los. Ang., 1961, p. 593–622; [2] Х е н н а н Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [3] Я д р е н к о М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [4] М о н и н А. С., Я г л о м А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967.

BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES ASILI OLMAYAN ARTIMLARLI « однородный случайный процесс с независимыми приращениями; homogeneous random process with independent increments » – bax, *Təsadüfi proses* a s ı l ı o l m a y a n a r t ı m l a r l ı.

BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES, ZAMAN ÜZRƏ « однородный по времени случайный процесс; time homogeneous random process » – bax, *Stasionar təsadüfi proses.*

BİRCİNS ÜMUMİLƏŞMİŞ MEYDAN « однородное обобщенное поле; homogeneous generalized field » – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses*.

BİRCİNS VƏ HƏNDƏSİ PROSES « однородный и геометрический процесс; homogeneous and geometric process » – bax, *Həndəsi proses.*

BİRCİNS VƏ İZOTROP HƏNDƏSİ PROSES « однородный и изотропный геометрический процесс; homogeneous and isotropic geometric process » – bax, *Həndəsi proses.*

BİRCİNS VƏ İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDAN « однородное и изотропное случайное поле; homogeneous and isotropic random field » – Evklid fəzasında elə *təsadüfi funksiyadır* ki, onun müəyyən xarakteristikaları fəzanın izometrik çevirmələri qrupu G-yə nəzərən invariantdırlar (paralel köçürmələr, fırlanmalar və simmetriyalar kimi çevirmələr). Əgər $\mathbf{M}\left|X(t)\right|^2 < +\infty$ şərtini ödəyən $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ həqiqiqiymətli təsadüfi funksiyasının riyazi gözləməsi $\mathbf{M}X(t)$ t-dən asılı olmazsa və $\mathbf{M}X(t)X(s) = B(|t-s|)$ yalnız t və s arasında $|t-s|$ məsafəsindən asılı olarsa, onda $X(t)$ təsadüfi funksiyası bircins və izotrop təsadufi meydan adlanır. Qoyulan tələb ilk iki momentin (orta qiymət və kovariasion funksiyanın) G qrupuna nəzərən invariantlığını ifadə edir. B. və i. t. m.-nın mühüm xüsusiyyəti həm korrelyasion funksiyanın, həm də meydanın özünün spektral ayrılışlarının olmasıdır.

Kvadratik orta mənada kəsilməz təsadüfi meydanın kovariasion funksiyası $B(r)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$B(r) = \int_0^\infty Y_n(\lambda r)\, d\Phi(\lambda), \qquad (1)$$

burada

$$Y_n(x) = 2^{(n-2)/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\,\frac{J^{(n-2)/2}(x)}{x^{(n-2)/2}}$$

– sferik Bessel funksiyasıdır, $\Phi(\lambda)$, – $[0, +\infty)$-da məhdud kəsilməz funksiya olub, $X(t)$ təsadüfi meydanının spektral funksiyası adlanır. $X(t)$ meydanının özü aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [1]):

$$X(t) = c_n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(\theta_1, ..., \theta_{n-2}, \varphi) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{I}_{m+(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{(n-2)/2}}\, Z_m^l(d\lambda) \qquad (2)$$

burada $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-2}, \varphi)$, – t nöqtəsinin sferik koordinatları, $S_m^l(\theta_1, ..., \theta_{n-2}, \varphi)$, – m dərəcəli ortonormalanmış sferik harmoniklər,

$$h(m,n) = (2m+n-2)\,\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\,m!}$$

– belə harmoniklərin sayı, $Z_m^l(\cdot)$ – ixtiyari S_1 və S_2 Borel çoxluqları üçün

$$\mathbf{M}\, Z_m^l(S_1)\, Z_{m_1}^{l_1}(S_2) = \delta_m^{m_1}\,\delta_l^{l_1}\,\Phi(S_1 \cap S_2)$$

şərtini ödəyən, ortoqonal qiymətlərli təsadüfi ölçülər toplusudur [burada $\Phi(S) = \int_S d\Phi(\lambda)$, – $\Phi(\lambda)$ spektral funksiyasının doğurduğu Lebeq – Stiltyes ölçüsüdür, $c_n^2 = 2^{n-1}\Gamma(n/2)\,\pi^{n/2}$, δ_i^j – Kroneker simvoludur]. (1)-dəki inteqrallar ortoqonal ölçü üzrə stoxastik inteqrallardır; (2) sırası kvadratik orta mənada yığılır.

B. və i. t. m. $\mathbb{R}^2$ və $\mathbb{R}^3$-də tətbiq üçün böyük maraq doğurur. B. və i. t. m.-nın $\mathbb{R}^2$-də spektral ayrılışı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$X(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\varphi \int_0^\infty Y_k(\lambda r) Z_k^l(d\lambda) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi \int_0^\infty Y_k(\lambda r) Z_k^2(d\lambda) +$$

burada $Z_k^l(\cdot)$, $l = 1, 2,$ – (3) şərtini ödəyən ortoqonal təsadüfi ölçülər toplusudur.

Tətbiqdə çoxölçülü təsadüfi meydanlar da mühüm rol oynayır (məs., sürətlər meydanı). İxtiyari $g \in G$ üçün

$$\mathbf{M}X(t) = 0, \qquad \mathbf{M}X'(t)X(s) = g\,\mathbf{M}X'(gt)\,X(gs)g',$$

olarsa, $X(t) = \{X_1(t), ..., X_n(t)\}$ vektor təsadüfi funksiyası bircins və izotrop vektor təsadüfi meydanı adlanır.

$$B(r) = \mathbf{M}X'(t+r)X(t) = (B_{ij}(r))$$

kovariasion matrisi iki

$$B_{ij}(r) = [B_{ll}(r) - B_{kk}(r)]\,\frac{r_i r_j}{r^2} + B_{kk}(r)\delta_i^j$$

skalyar funksiyaları ilə ifadə olunur.

$B_{ll}(r)$ və $B_{kk}(r)$ funksiyaları, uyğun olaraq, uzununa və eninə korrelyasion funksiyalar adlanır və bunlar aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$B_{ll}(r) = \mathbf{M}X_l(t+r)X_l(t),$$

$$B_{kk}(r) = \mathbf{M}X_k(t+r)X_k(t),$$

burada $X_l(t)$, – $X(t)$ vektorunun r istiqamətinə proyeksiyası, $X_k(t)$ – bu vektorun r-ə perpendikulyar olan hər hansı istiqamətə proyeksiyasıdır. Vektor B. və i. t. m.-nın kovariasion matrisləri üçün də spektral ayrılışlar məlumdur.

Əd.: [1] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [3] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338.

BİRGƏ ÖLÇMƏ « совместное измерение; joint measurement » – bax, *Müşahidələnən.*

BİRGƏ PAYLANMA « совместное распределение; joint distribution » – eyni ehtimal fəzasında verilən bir neçə təsadüfi kəmiyyətin *paylanmasına* aid ümumi termindir. $X_1, ..., X_n$, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş, $(\mathscr{X}_k, \mathscr{B}_k)$ ölçülən fəzalarında qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $B_1 \in \mathscr{B}_1, ..., B_n \in \mathscr{B}_n$ çoxluqlarında

$$\mathbf{P}_{X_1,..., X_n}(B_1, ..., B_n) = \mathbf{P}\{X_1 \in \mathscr{B}_1, ..., X_n \in \mathscr{B}_n\}$$

kimi ilə təyin olunan $\mathbf{P}_{X_1,...,X_n}(B_1, ..., B_n)$ funksiyasına $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması deyilir. B. p. ilə birgə paylanma funksiyası, ehtimal paylanmalarının birgə sıxlığı anlayışları da daxil olunmuşdur.

Əgər $X_1, ..., X_n$ adi həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda B. p. $\mathbb{R}^n$ fəzasında $(X_1, ..., X_n)$ təsadüfi vektorunun paylanmasıdır (bax, *Çoxölçülü paylanma*). Əgər $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesdirsə, onda $t_1, ..., t_n \in T$ olduqda $X(t_1), ..., X(t_n)$ qiymətlərinin B. p. – $X(t)$ təsadüfi prosesinin çoxölçülü paylanmaları adlanır, $n \geq 2$.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

BİRGƏ SIXLIĞI, EHTİMAL PAYLANMALARININ « совместная плотность распределения вероятностей; joint probability density » – bax, *Birgə paylanma.*

BİRXƏTLİ XİDMƏT SİSTEMİ « однолинейная система обслуживания; single – server queueing system », birkanallı xidmət sistemi – eyni zamanda bir tələbdən artıq xidmət mümkün olmayan *xidmət sistemidir*. B. x. s.-nin əsas tipi gözləməli, birkanallı *xidmət sistemidir*. Adətən, B. x. s.-nin işləməsi

$$z_{n+1} = f(z_n, \xi_n)$$

rekurrent münasibətilə verilən (z_n) ardıcıllığı ilə xarakterizə olunur, burada (ξ_n) – idarəedici ardıcıllıqdır. Gözləməli sistemdə n-ci tələbi gözləmə müddəti w_n üçün

$$w_{n+1} = \max\{0, w_n + \eta_n - u_n\}$$

münasibəti doğrudur, burada η_n, – n-ci tələbin xidmətolunma müddəti, u_n, – n və $n+1$-ci tələblərin daxil olduğu anlar arasındakı müddətdir.

BİRİNCİ LAPLAS QANUNU « первый закон Лапласа; Laplace first law / distribution » – bax, *Laplas paylanması.*

BİRKANALLI XİDMƏT SİSTEMİ « одноканальная система обслуживания; single-channel queueing system » – *birxətli xidmət sistemidir.*

BİRKHOFF – XİNÇİN ERQODİK TEOREMİ « Биркгофа – Хинчина эргодическая теорема; Birkhoff – Khinchin ergodic theorem » – dar mənada stasionar ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı $..., \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, ...$ üçün $\mathbf{M}|\xi_0| < \infty$ olduqda,

$$\mathbf{M}(\xi_0 | I_\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \xi_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=-m}^{0} \xi_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \xi_k$$

limitləri vahid ehtimalla mövcuddur, hökmü ilə ifadə olunan tarixən ilk *erqodik teoremdir*, burada I_ξ, – $\{\xi_i\}$ ardıcıllığının yerinidəyişməyə nəzərən invariant hadisələr σ – cəbridir. Bu teorem bəzi məhdudiyyətlərlə G. Birkhoff ([1]), tamamilə ümumi hal üçün isə A. Ya. Xinçin ([2]) tərəfindən isbat olunmuşdur. Dar mənada stasionar $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ prosesləri üçün $\mathbf{M}|\xi(0)| < \infty$ olduqda analoji hökm doğrudur (bu halda cəmlər inteqrallarla əvəz olunur).

Əd.: [1] Birkhoff G., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1931, v. 17, p. 656–60; [2] Chintschin A., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, S. 485–88.

BİRQİYMƏTLİLİK XASSƏSİ ÇOXLUĞUN ÖLÇÜYƏ NƏZƏRƏN « однозначности свойство множества по отношению к мере; one-valued property of a set relatively to a measure » – bax, *Davamolunması, ölçülərin.*

BİRLƏŞDİRİLMİŞ SPEKTRİ, PROSESİN « присоединенный спектр процесса; associated spectrum of a process » – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

BİRLƏŞMƏ(si) hadisələrin **« объединение** событий; union of **events »** – hadisələr *cəmidir*.

BİRLƏŞMƏ təkrarsız **« сочетание** без повторений; **combination** without repetitions **»** – bax, *Birləşmə.*

BİRLƏŞMƏ(si) / **CƏM**(i) təsadüfi hadisələrin **« объединение / сумма** случайных событий; **union / sum** of random events **»** – yalnız və yalnız eksperimentdə müşahidə oluna bilən A və B təsadüfi hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən, onlardan heç biri baş vermədikdə baş verməyən hadisəyə deyilir və $A \cup B$ və ya $\sup(A, B)$ kimi işarə olunur. İxtiyari sayda təsadüfi hadisələrin birləşməsi analoji qaydada təyin olunur:

A_i – eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisə, $i \in J$, J isə i-nin qiymətlər aldığı ixtiyari çoxluqdursa, A_i *hadisələrinin birləşməsi* hadisəsi – $\bigcup_{i=J} A_i$, yalnız və yalnız, A_i hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir. Ω elementar hadisələr fəzası, A müşahidə oluna bilən ixtiyari təsadüfi hadisədirsə $(A \subset \Omega)$, onda

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cup \Omega = \Omega.$$

Tərifə görə $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Əgər C elə hadisə olarsa ki, $A \subset C$ və $B \subset C$, onda

$$A \cup B \subset C,$$

yəni $A \cup B$ hadisəsi A və B hadisələrinin dəqiq yuxarı sərhədidir. Hadisələr üçün birləşmə əməli
kommutativlik: $A \cup B = B \cup A$;
assosiativlik: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
distributivlik: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
idempotentlik: $A \cup A = A$
xassələrinə tabedir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теории вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, М., 1969.

BİRÖLÇÜLÜ DİFFUZİYA « одномерная диффузия; one-dimensional diffusion » – həqiqi oxun intervalında verilmiş, kəsilməz trayektoriyalarlı standart *Markov prosesidir*. İxtiyari birölçülü bircins *diffuzion proses* B. d.-nın xüsusi halıdır. B. d.-nın müfəssəl öyrənilməsinə V. Fellerin əsas təşkiledici işlərilə başlanmışdır (bax, [1], [2]) və o, əsas etibarilə analitik metodları tətbiq etmişdir. Hal-hazırda üstünlük verilən ehtimali yanaşma Y. V. Dınkin (bax, [3], [4]) tərəfindən işlənilmişdir. B. d. nəzəriyyəsi təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin tamamlanmış fəsillərindən biri sayılır (bax, [4], [5]).

$\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, – $E \subset \mathbb{R}^1$ ixtiyari intervalında verilmiş B. d. olarsa və onun ixtiyari $x \in D$ nöqtəsindən çıxan trayektoriyası kəsildiyi ana qədər D-nin ixtiyari qeyd olunmuş nöqtəsinə çatarsa, ζ – requlyar diffuzion proses adlanır. Əgər B. d. bütün E-də requlyar olarsa, E isə ya parça, ya da interval olarsa, o, *Feller prosesi* əmələ gətirir. $E = [c_1, c_2]$ parçasında requlyar, kəsilməz (bax, *Qırılma anı*) ζ B. d.-nın keçid funksiyası və evolyusiya xarakteri – kanonik (və ya təbii) $p(x)$ şkalası və $n(x)$ ölçüsü ilə birqiymətli təyin olunur, $x \in E$. Bunlardan birincisi $p(x) = \mathbf{P}_x\{\zeta_{\tau_1} = c_2\}$ bərabərliyi ilə verilir və E-də kəsilməz, artan funksiyadır, burada τ_1, – ζ-nın $\mathbf{I} = (c_1, c_2)$-dən ilk çıxış anıdır. $n(x)$ ölçüsü $\mathbf{I}$-də $D_p^+ m(x)$-ə bərabər götürülür, burada $m(x) = \mathbf{M}_x \tau_1 < \infty$ ($D_p^+ m(x)$-in sağ törəməsi –

$$\lim_{y \downarrow x} \frac{m(y) - m(x)}{p(y) - p(x)}$$

limitinə bərabər götürülür; $D_p m(x)$-in ikitərəfli törəməsi analoji qaydada təyin olunur). Tərifə görə, fərz olunur ki, $n(c_i) = -\beta_i$, $i = 1, 2$, burada β_1 (uyğun olaraq β_2), – c_1-dən (c_2-dən) başlayan trayektoriyalar üçün c_2 (c_1) nöqtəsinə çatma müddətinin riyazi gözləməsidir. $n(x)$ funksiyası E-də artır və $\mathbf{I}$ daxilində kəsilməzdir. ζ prosesinin infinitezimal operatoru A, Feller düsturu – $Af(x) = D_n D_p^+ f(x)$, $x \in E$ ilə verilir. A operatorunun təyinolunma oblastından olan f funksiyasının strukturu tamamilə təsvir olunmuşdur (bax, [4], [5]); məlumdur ki, məs., bunlar E-də kəsilməzdirlər və E parçasının ucları c_1 və c_2-də

$$\nu_i D_n D_p^+ f(c_i) + (-1)^i D_p f(c_i) = 0, \quad i = 1, 2$$

sərhəd şərtlərini ödəyirlər, burada $\nu_1 = n(c_1 + 0) - n(c_1)$, $\nu_2 = n(c_2) - n(c_2 - 0)$.

Hər hansı intervalda verilmiş qırılmayan və bu intervalda requlyar B. d.-nın infinitezimal operatorları yuxarıda qeyd olunan tip ümumiləşmiş ikinci tərtib differensial operatorların köməyilə sərhəd şərtləri olmadan təsvir olunur (bax, [4], [5]). Qapalı intervallarda verilmiş verilən B. d.-ya qədər oxşar B. d.-ların davamlarının qurulması məsələsinə [1], [2]-dən başlayaraq çox səylər edilmişdir.

Qırılan və requlyar olmayan B. d.-lar halı ətraflı öyrənilmişdir (bax, [4], [5]). Məlumdur ki, birölçülü Viner prosesinin zaman dəyişənini təsadüfi əvəz etməklə çevirmə apararaq bir çox B. d. almaq olur (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr; [4], [5]).

Bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

Əd.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Feller W., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 417–36; [3] Дынкин Е. Б., «Докл. АН СССР», 1955, т. 105, с. 206–09; [4] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [5] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [6] Волконский В. А., «Тр. Моск. Матем. о-ва», 1960, т. 9, с. 143–89.

BİRÖLÇÜLÜ DİFFUZİYA; sərhədlərin təsnifatı **« одномерная диффузия;** классификация границ; **one-dimensional diffusion;** classification of boundaries **»** – $E = (c_1, c_2) \subset \mathbb{R}^1$ intervalının sərhəd nöqtələrinin təsnifatıdır və bu təsnifat E-də verilmiş $X = \{X_t, \xi, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x\}$ *birölçülü diffuziya* prosesinin bu nöqtələr ətrafındakı vəziyyətindən asılı olaraq təyin edilir. c_1 sərhəd nöqtəsi olsun. a) $X_\xi = \lim_{t \uparrow \xi} X_t$ olduqda $\mathbf{P}_x\{X_\xi = c_1\}$ ehtimalı ya müsbət və ya sıfra bərabər olarsa, c_1 – cazibə və ya itələyici sərhəd; b) $\mathbf{P}_x\{X_\xi = c_1, \xi < \infty\}$ ehtimalı ya müsbət və ya sıfra bərabər olarsa, c_1 – çatılan və ya çatılmaz sərhəd; c) τ_c, – (c_1, c) intervalından ilk çıxış anıdırsa, $\mathbf{M}_x \tau_c$ riyazi gözləməsinin sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olaraq, c_1 sərhəd nöqtəsi finit və ya qeyri–finit sərhəd adlanır [bax, *İlk çatım anı*; a) və b) tərifləri də x nöqtəsi E-də, c) tərifində isə (c_1, c) intervalında dəyişir, $c \in E$]. c_2 nöqtəsi üçün də analoji tərifər qəbul edilir.

c_1 və c_2 sərhədlərindən hər biri, ya cazibə və ya itələyici sərhəddir. İxtiyari itələyici sərhəd çatılmaz sərhəddir. Cazibə sərhədi finit və ya qeyri – finit sərhəd olmasından asılı olaraq çatılan və çatılmaz sərhəddir.

B. d.-nın verildiyi ixtiyari $E \subset \mathbb{R}^1$ intervalının sərhəd nöqtələri də müxtəlif xassələrinə görə təsnif olunur. Məs., əgər $c_1 \in E$ və c_1 nöqtəsi E-nin digər nöqtələrindən çatılmayandırsa, onda c_1 təbii sərhəd; əgər $c_1 \in E$ və X diffuziyası $E \setminus \{c_2\}$-də requlyardırsa, onda c_1 əksedici sərhəd

adlanır. Adi Viner prosesinin faza fəzasının $\gamma\colon x \to |x|$ çevirməsi nəticəsində alınan $c_1 = 0$ nöqtəsində əksolunan Viner prosesi üçün qeyd olunan nöqtə əksedici sərhəddir (bax, *Markov prosesi*; ç e v i r m ə l ə r).

E intervalının sərhədlərinin təsnifatı bilavasitə uyğun kanonik ölçü ilə bağlı terminlərlə ilk dəfə V. Feller tərəfindən təklif olunmuşdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] F e l l e r W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, № 2, p. 468–599.

BİRÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ PROSES « одномерный случайный процесс; one-dimensional random process » – bax, *Təsadüfi proses*.

BİRPARAMETRLİ EYLER ƏDƏDLƏRİ « однопараметрические числа Эйлера; one-parameter Euler numbers » – bax, *Eyler ədədləri.*

BİRSEÇİMLİ STYUDENT KRİTERİSİ « одновыборочный критерий Стьюдента; one-sample Student's test » – bax, *Styudent kriterisi.*

BİRTƏRƏFLİ BERNULLİ YERİNİDƏYİŞMƏSİ « односторонний сдвиг Бернулли; one-sided Bernoulli shift » – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi.*

BİRTƏRƏFLİ DOĞURUCU « односторонняя образующая; one-sided generator » – bax, *Entropiya*(s ı) d i n a m i k s i s t e m i n.

BİRTƏRƏFLİ PAYLANMA « одностороннее распределение; one-sided distribution » – bax, *Birtərəfli sonsuz bölünən paylanma.*

BİRTƏRƏFLİ SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « одностороннее безгранично делимое распределение; one-sided infinitely divisible distribution » – tamamilə $[r, \infty)$ (və ya $(-\infty, r]$) yarımoxunda topalanmış *sonsuz bölünən paylanmadır*, burada $|r| < \infty$. $F(x)$ paylanma funksiyası üçün

$$\operatorname{lext} F = \inf\{x : x,\ -F\text{-in artım nöqtəsidir}\},$$

$$\operatorname{rext} F = \sup\{x : x,\ -F\text{-in artım nöqtəsidir}\}.$$

olsun. Əgər $\operatorname{lext} F > -\infty$ və ya $\operatorname{rext} F < \infty$ olarsa, F b i r t ə r ə f l i p a y l a n m a adlanır. F – sonsuz bölünən paylanma funksiyası, $f(t)$ isə bu paylanmanın spektral funksiyası $G(x)$ olan, *Levi – Xinçin kanonik ifadəsi* ilə təyin olunan xarakteristik funksiyası olsun. $\operatorname{lext} F > -\infty$ ($\operatorname{rext} F < \infty$) olması üçün G funksiyasının $x \le 0$ ($x \ge 0$) yarımoxunda sabit olması və

$$\int_0^{\infty} x^{-1}\, dG < \infty \quad \left(\int_0^{\infty} |x^{-1}|\, dG < \infty\right)$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu halda

$$\operatorname{lext} F = \gamma - \int_0^{\infty} x^{-1}\, dG, \quad \operatorname{rext} F = \gamma - \int_{-\infty}^{0} x^{-1} dG.$$

Məs., B. s. b. p. Qauss komponentlərinə malik ola bilməz.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Р а м а ч а н д р а н Б., Теория характеристических функций, пер. с англ., М., 1975.

BİRTƏRƏFLİ STYUDENT KRİTERİSİ « односторонний критерий Стьюдента; one-sided Student's test » – bax, *Styudent kriterisi*.

BİSPEKTR « биспектр; bispectrum » – bax, *Bispektral sıxlıq.*

BİSPEKTRAL FUNKSİYA « биспектральная функция; bispectral function » – birölçülü stasionar təsadüfi prosesin üçüncü tərtib *spektral funksiyasıdır* (bax, S*pektral sıxlıq*, S*pektral semi – invariant*).

BİSPEKTRAL SIXLIQ « биспектральная плотность; bispectral density », b i s p e k t r, – $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ şərtini ödəyən birölçülü stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin üçüncü tərtib *spektral* (bax, S*pektral semi – invariant*) *sıxlığıdır.*

Əd.: [1] B r i l l i n g e r D., «Ann. Math. Stat.», 1965, v. 36, p. 1351–74; [2] B r i l l i n g e r D., R o s e n b l a t t M., в кн.: Spectral Analysis of Time Series, N. Y. – L. – Sydney, 1967, p. 153–88, 189–232; [3] Х е н н а н Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [4] S u b b a R a o T., G a b r M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, N. Y. – [a. o.], 1984.

BİT « бит; bit » – informasiya miqdarının ikilik vahididir və miqdarın təyin olunmasında 2 əsasına görə loqarifmdən istifadə etdikdə alınır (ing. – binary digit, qısaca «B»). B. İnformasiya miqdarının ən çox istifadə olunan vahididir. Tərifdə natural və ya onluq loqarifmdən istifadə olunduqda uyğun olaraq, «nat» (ing. natural digit) və «hartli» (ing. hartley) vahidləri istifadə edilir.

BLEKMAN – TYUKİ METODU « Блэкмана – Тьюки метод; Blackman – Tukey method » – $\zeta(t)$, $t = 0, 1, \ldots$ stasionar təsadüfi ardıcıllığının (stasionar zaman sırasının) $t = 1, 2, \ldots, T$ qiymətlərində bir realizasiyası x_t üzrə spektral sıxlığı $f(\lambda)$ üçün statistik qiymət $f_T^*(\lambda)$ -nın

$$f_T^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=0}^{k_T - 1} a_T(\tau)\, B_T^*(\tau) \cos \lambda\tau \qquad (*)$$

düsturu ilə hesablanma metodudur, burada $B_T^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \times$ $\times \sum_{t=1}^{T-\tau} x_{t+T}\, x_t$, – x_t sırasının seçimi korrelyasion funksiyasıdır, $a_T(\tau)$, – $\tau > k_T$ olduqda sıfra çevrilən, ağlabatan surətdə seçilmiş korrelyasion pəncərədir, burada k_T, – T -nin kiçik bir hissəsidir (məs., $k_T = 0{,}1\ T$). B. – T. m. [1]-də inkişaf etdirilmişdir və 20-ci əsrin 50 – 60-cı illərində spektral qiymətləndirmədə əsas praktiki metod olmuşdur (bax, məs., [2] – [4]). Lakin sürətli çevirmələrin alqoritmləri və Furye çevirmələrinin digər yaxın sürətli hesablama metodları geniş surətdə yayıldıqdan sonra, bu metod öz əhəmiyyətini itirmiş oldu və yalnız müşahidələrin olduqca kiçik sıralarına tətbiq olunduqda istifadə üçün məsləhət görüldü (T -nin tərtibi 100 və ya daha az olduğu hallar üçün). T -nin böyük qiymətlərində B. – T. m.-nu yalnız dəyişilmiş formada istifadə etmək məsləhətdir, bunun üçün isə sürətli Furye çevirmə alqoritmini üç dəfə tətbiq etmək lazımdır.

[x_t sırasının $I_T(\lambda)$ periodoqramını hesablamaq üçün $B_T^*(\lambda)$ seçimi korrelyasion funksiyasını $I_T(\lambda)$-nın Furye çevirməsi kimi təyin etmək üçün və nəhayət, f_T^*-ni (*) düsturu ilə hesablamaq üçün] (bax, məs., [5]).

B. – T. m.-nun bir sıra ümumiləşmələri və dərin modifikasiyaları mövcuddur (bax, məs., [6]).

Ədl.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1–2, М., 1971–72; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Бендат Дж., Пирсол А., Измерение и анализ случайных процессов, пер. с англ., М., 1974; [5] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [6] Наттолл А. Х., Картер Дж. К., «Тр. Ин-та электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9, с. 243–55.

BLEKUELL TEOREMİ « Блэкуэлла теорема; Blackwell theorem » – bax, *Bərpa nəzəriyyəsi*, *Statistik qiymətləndirmə.*

BLOK « блок; block » – bax, *Blok plan.*

BLOK DEKODLA(N)MASI « блоковое декодирование; block decoding » – blok kodlarının n uzunluqlu kod sözlərinin kanalın çıxışında n uzunluqlu hərflərin ardıcıllığına görə bərpa olunduğu *dekodlanmadır*; bu halda ardıcıl kod sözlərinin dekodlanması bir-birindən asılı olmayaraq aparılır. Diskret siqnallar və məlumatlar halında B. d.-nın xüsusi cəhəti ondan ibarətdir ki, bütün əməliyyatlar sonlu sayda elementi olan müəyyən bir çoxluğun altçoxluğunda aparılır. B. d.-da, adətən, *doğruyaoxşarlıq maksimumu* üzrə, *kod məsafəsinin minimumu* üzrə *dekodlama* metodları istifadə olunur. Bu halda, bir çox məlum blok kodlarının B. d. blokun uzunluğuna görə polinomial mürəkkəbliklə aparılır (bax, *Mürəkkəblik*(yi) kodlama və dekodlamanın).

Ədl.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

BLOK KODU « блоковый код; block code » – A əlifbasının n hərfli bütün sözlərindən ibarət *koddur*. n ədədi B. k.-nun uzunluğu, $R = n^{-1}\log_2 M$ ədədi B. k.-nun sürəti adlanır, M B. k.-nun gücüdür. Kodun cəbri strukturundan asılı olaraq B. k. altsiniflərə ayrılır. Əgər A-da meydanın strukturu verilirsə (adətən, $|A| < \infty$ və meydan sonludur) və B. k. A^n-də k ölçülü altfəzadırsa, onda B. k. xətti (qrup) (n, k) – kodu adlanır. İxtiyari xətti kodun kodlama mürəkkəbliyi $O(n^2)$-dır. Additiv küylü kanalların xətti kodlarında ötürücülük qabiliyyətliliyinə, həmçinin *səhv dekodlama ehtimalının* B. k. sinfində ən yaxşı məlum yuxarı statistik qiymətinə nail olunur. Koordinatların tsiklik yerinidəyişməsinə görə invariant xətti kodlar tsiklik kodlar adlanır və bunlar kodlama nəzəriyyəsinin araşdırdığı əsas obyektlərdən biridir. Bir çox məlum B. k.-ları üçün polinomial mürəkkəbliyi olan dekodlama metodları mövcuddur.

Ədl.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Мак-Вильямс Ф. Д., Слоэн Н. Д. А., Теория кодов, исправляющих ошибки, пер. с англ., М., 1979.

BLOK PLAN « блочный план; block design » – eksperimentin bloklu strukturlu planıdır, yəni üzərində *reqression eksperiment* aparılan obyektlər çoxluğu bloklar adlandırılan altçoxluqlara ayrılmış plandır. Eksperiment üçün ayrı-ayrı təcrübələrin aparılmasında qoyulan şərtlərin bircins olmadığı şəraitdə eksperimentin nəticələrinə bu şərtlərin təsirini azaltmaq məqsədilə R. Fişer [1]-də bloklar və randomizasiyadan istifadəni təklif etmişdir. Məs., bitkilər becərilən sahədə kənd təsərrüfatı bitkisinin növlərinin məhsuldarlığı müqayisə olunarkən, bu sahənin müəyyən hissələrində məhsuldarlıq, adətən, fərqli olur. Bu nöqteyi – nəzərdən, bütün sahə kiçik hissələrə bölünür, sonra eyni tipli hissələr bloklar şəklində (mümkün olduqca) qruplaşdırılır. Növlərdən hər birini bütün bloklardan olan hissələrdə təcrübədən keçirdikdə məhsuldarlıq statistik qiymətinin dispersiyasının minimallığına nail olunur, statistik qiymətin hər bir blokda meylsiz olması üçün isə növ təyin etmək üçün hissə təsadüfi seçilməlidir. Çoxfaktorlu modeldə, bu qayda ilə faktorların səviyyələrinin ixtiyari toplusu üçün tam randomlanmış B. p. alınır.

Təsadüfi hadisə və proseslərin statistik modellərində blokların olduğunu nəzərə almaq lazımdır. Məs., yuxarıdakı misalda B. p.-nın

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk},$$

$$i = 1, ..., t,\ j = 1, ..., b,\ k = 1, ..., K_{ij} \qquad (*)$$

münasibətilə verilən additiv modeli təbiidir, burada y_{ijk}, – (i, j) – oyuğunun k-cı təkrarında məhsulun miqdarı, μ – ümumi orta qiymət, α_i, β_j, – uyğun olaraq j-ci blokun i-ci növünün əsl effektləridir, ε_{ijk} – təcrübələrin təkrarındakı xətalardır. *Faktor eksperimentlər nəzəriyyəsi* nöqteyi – nəzərincə təcrübələr çoxluğunun bloklara bölgüsü yardımçı «blok» faktorun daxil olunmasına ekvivalentdir, belə ki, bu blok faktorun səviyyəsinin qiymətləri göstərir ki, təcrübə şərtləri bloklardan hansına aiddir və bu halda eksperimentin nəticələrinin üzərində statistik olaraq yenidən işlənmələr aparıldıqda, adətən, β_j effektinin statistik qiymətindən istifadə olunmur.

Bir çox səbəblərə görə (qənaət baxımından, çətinliklərlə əlaqədar) tam B. p.-ı əksər hallarda reallaşdırmaq mümkün olmur. Digər tərəfdən də, blokların sayının çoxaldılması onların bircinsliyini azaldaraq, blokdaxili dispersiyanın artmasına və bununla da, parametrlərin statistik qiymətlərinin dəqiqliyinin azalmasına səbəb olur. Bəzən blokların kiçikliyi isə fiziki qeyri – bircinslik səbəblərindən yaranır. Göstərilən səbəblərə əsaslanaraq, kiçik həcmli blokları olan natamam B. p.-lardan (blokları tam olmayan planlardan) istifadə olunur, belə kiçik blokların həcmi qoyulan şərtlərin ümumi sayından az olur. Bunların qurulmasında istifadə olunan ixtiyari simmetriya eksperiment nəticələrinin analizinin sadələşməsinə səbəb olur. Buna görə də, natamam B. p.-ların mühüm sinifləri balanslanmış və qismən balanslanmış planlar sinifləri hesab edilir (bax, [2], [3]).

Hər bir blokda k vahid sahə hissəsi olan b sayda blokdan ibarət, $t > k$ növün müqayisəsi üçün baxılan B. p., əgər t sayda növdən hər bir növ r sahə hissəsində reallaşırsa və hər bir növlər cütü isə λ sayda blokda təsadüf olunursa, balanslanmış blok planı adlanır (BNBP – rus. СНБП). Belə parametrlərli BNBP-nın varlığı üçün $rt = bk$ və $\lambda(t-1) = r(k-1)$ şərtləri zəruri, lakin kafi deyildir. Kombinator analizdə BNBP-nın varlığı və ya yoxluğu üçün bir sıra kafi şərtlər alınmışdır.

(*) münasibətindəki α_i parametrlərinin müxtəlifliyi haqqında hipotezlər $k = \sum c_i\alpha_i$ ($\sum c_i = 0$) kontrastlarını qiymətləndirməklə yoxlanılır. Buna görə $k_1, ..., k_{t-1}$ kontrastlarının ixtiyari ortonormalanmış bazisini seçərək $\hat{k} = (\hat{k}_1, ..., \hat{k}_{t-1})$ vektorunun

kovariasiyalar matrisi D tapılır, burada $\hat{k}_i$, – k_i kontrastının ən kiçik kvadratlar statistik qiymətidir. D-nin təyin olunması B. p. analizinin ən çox vaxt aparan və çətin hesablanan hissəsidir. BNBP üçün bu hissə trivialdır, belə ki, D-nin diaqonal elementləri bərabərdirlər və diaqonal elementlərdən fərqli elementlərin hamısı isə üst-üstə düşür.

Natamam B. p.-nın daha ümumi tipi qismən balanslanmış blok planıdır (QBNBP – rus. частично сбалансированный блочный план, ЧСНБП), yəni parametrləri b, k, t və r olan, yuxarıda verilən mənada, ixtiyari elə natamam B. p.-dır ki, onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) növlərin bütün nizamlanmamış cütləri m sayda altçoxluğa bölünür; hər bir topluya bu altçoxluqlardan i-cisinə aid olan yalnız n_i sayda cüt daxildir;

2) i-ci altçoxluğun cütləri yalnız λ_i blokda iştirak edir;

3) əgər hər hansı cüt i-ci altçoxluğa daxildirsə, onda bu cütdəki növlərdən birinin j-ci altçoxluqdan biri ilə, digərinin isə k-cı altçoxluqdan olan biri ilə cüt əmələ gətirdiyi elementlərin sayı $p^i_{jk} = p^i_{kj}$ ədədinə bərabərdir.

$m = 1$ olan QBNBP – BNBP-dır. QBNBP-nın parametrləri bir sıra münasibətlərlə əlaqəlidirlər; QBNBP-nın varlığı haqqında, həmçinin onların bir sıra kombinator xassələri haqqında bir sıra nəticələr məlumdur (bax, [8]).

Fərz olunur ki, (*) additiv modelinə baxılır. Burada X oblastı – (i, j) şəbəkəsidir, $i = 1, ..., t$, $j = 1, ..., b$ (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*), i – növün nömrəsi, j – blokun nömrəsi, $\alpha^{\mathsf{T}}\mathbf{1} = \beta^{\mathsf{T}}\mathbf{1} = 0$, $\alpha^{\mathsf{T}} = (\alpha_1, ..., \alpha_t)$, $\beta^{\mathsf{T}} = (\beta_1, ..., \beta_s)$, $\mathbf{1}$ – vahidlərdən ibarət matrisdir. Ümumiləşmiş ξ planı X şəbəkəsində verilən ixtiyari ehtimal paylanmasıdır.

$$Z = \|\xi(i, j)\|, \quad r_i = \sum_j \xi(i, j),$$

$$k_j = \sum_i \xi(i, j), \quad r^{\mathsf{T}} = (r_1, ..., r_t),$$

$K = \operatorname{diag}(k_1, ..., k_b)$, $R = \operatorname{diag}(r_1, ..., r_t)$ və $\min k_i > 0$ olsun. Qiymətləndirilə bilinən kontrastlar və $l^{\mathsf{T}}\alpha$ xətti formalarının çoxluqları, yalnız və yalnız, o halda üst-üstə düşür ki, $C(\xi)$-nin ranqı $(t-1)$-ə bərabər olsun, burada $C(\xi) = K - ZK^{-1}Z^{\mathsf{T}}$, belə ki, $l_1^{\mathsf{T}}\alpha$ və $l_2^{\mathsf{T}}\alpha$ üçün ən kiçik kvadratlar statistik qiymətlərini $\hat{k}_1$ və $\hat{k}_2$ ilə əvəz etdikdə, $\operatorname{cov}(k_1, k_2) = l_1^{\mathsf{T}} C^{-}(\xi) l_2$ olur, burada C^{-}, – C-yə g – tərs ixtiyari matrisdir.

Adətən, planlar sinfi $k_j = k$ şərtilə daraldılır. Əgər elə ξ^* planı varsa ki, hər hansı c, d üçün $C(\xi^*) = c\mathbf{I}_\upsilon + d\mathbf{1}_\upsilon\mathbf{1}_\upsilon^{\mathsf{T}}$ şərtini ödəmiş olsun və $C(\xi)$-nin izi $C(\xi)$ matrislərinin S çoxluğunda ən böyüyü olsun, onda $C(\xi^*)$ matrisi S-də Şur mənada maksimaldır, yəni

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i(\xi^*) - \lambda_i(\xi)) \geq 0$$

bərabərsizliyi bütün $m = 1, 2, ..., \upsilon$ qiymətlərində ödənilir, burada $\lambda_i(\xi^*)$, – $C(\xi)$-nin i-ci məxsusi qiymətidir (qiymətinə görə). Nəticə: $\Phi(C(\xi^*))$ funksiyası S-də, bütün populyar kriterilər də daxil olmaqla, $\Phi(C)$ funksiyalarının geniş sinfi üçün minimaldır (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*). Əlavə şərtlə, hətta $k_i = k$ fərziyyəsini qəbul etmədikdə belə, nəticə doğrudur. BNBP ξ^*-nun optimallığı bu nəticələrin nəticəsidir.

Bir sıra ümumiləşmələr isbat olunmuşdur: çoxfaktorlu hal – burada bloklar indekslər sistemi ilə nömrələnir, optimal planlara misallar – latın, yunan – latın və s. kvadrat, Yuden planlarıdır; sanki balanslanmış hal – S-də tələb olunan şəkilli $C(\xi^*)$ matrisi yoxdur. Onda bir çox hallarda QBNBP-lar Φ – optimal olur.

Ədb.: [1] Фишер Р. А., Статистические методы для исследователей, пер. с англ., 1958; [2] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [3] Финни Д., Введение в теорию планирования экспериментов, пер. с англ., М., 1970; [4] Partially balanced design, в кн.: Encyclopedia of Statistical Sciences, v. 6, N. Y., 1985; [5] Nearly balanced design, в кн.: Encyclopedia of Statistical Sciences, v. 6, N. Y., 1985; [6] Clatworthy W. H., Nables of two-associate-class partially balanced designs, Wash., 1973; [7] Маркова Е. В., Неполно блочные планы, М., 1970; [8] Маркова Е. В., Лисенков А. Н., Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента, М., 1979; [9] Giovagnoli A., Wynn H. P., «Proc. Berk. Conf. in Honor of J. Neyman and J. Kiefer», 1985, v. 1, p. 418–33.

BLOK – SXEM « блок – схема; block scheme » – bax, *Kombinator analiz.*

BLOK – STRUKTUR « блочная структура; block structure » – bax, *Blok plan.*

BLOK TEZLİYİ « блоковая частота; block frequency » – bax, *Seçimi bloklar.*

BLYUMENTAL – GETUR – MAK-KİN TEOREMİ « Блюменталя – Гетура – Мак-Кина теорема; Blumenthal – Getoor – Mc Kean theorem » – bax, *Markov prosesi*; zamanın təsadüfi əvəzlənməsi.

BOXNER İNTEQRALI « Бохнера интеграл; Bochner integral » – qiymətləri Banax fəzasından olan güclü birinci tərtiblə güclü ölçülən (Boxnerə görə ölçülən) funksiyanın inteqralıdır. Daha dəqiq, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ – ehtimal fəzası və ya daha ümumi, müsbət ölçülü fəza, $\mathscr{B}$ – Banax fəzası olsun. Əgər $f : \Omega \to \mathscr{B}$ sadə funksiyalarının (yəni yalnız sonlu sayda müxtəlif qiymətlər alan) sıfırdan fərqli aldığı qiymətlər $\mathscr{A}$-nın sonlu μ – ölçülü çoxluqlarında alınırsa, bu funksiyalar μ – inteqrallanan funksiyalar adlandırılır və bunlar üçün inteqral aydın təbii şəkildə təyin olunur. Əgər

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \, d\mu(\omega) = 0 \qquad (*)$$

münasibətini ödəyən μ – invariant $f_n : \Omega \to \mathscr{B}$ sadə funksiyalarının ardıcıllığı varsa, onda $f : \Omega \to \mathscr{B}$ funksiyası Boxnerə görə inteqrallanan funksiya adlanır. Bu halda, aydındır ki, f_n-in inteqralları ardıcıllığı $\mathscr{B}$-də fundamental ardıcıllıqdır və bu ardıcıllığın limiti, (*) bərabərliyi mənasında f-i approksiməedici μ – inteqrallanan sadə funksiyaların bütün ardıcıllıqları üçün eynidir. Bu limitə f funksiyasının μ ölçüsünə görə Boxner inteqralı deyilir.

Güclü ölçülən f funksiyasının Boxnerə görə inteqrallanan olması üçün

$$\int_{\Omega} \| f(\omega) \| \, d\mu(\omega) < +\infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

B. i.-nın varlığı *Pettis inteqralının* varlığını doğurur və bu inteqralların qiymətləri üst-üstə düşür.

Əd.: [1] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

BOXNER – XİNÇİN TEOREMİ « Бохнера – Хинчина теорема; Bochner – Khinchin theorem » – müsbət müəyyən funksiyaların ifadə olunması haqqında teoremdir: $t \in \mathbb{R}^n$ olduqda $f(t)$ funksiyasının

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(t, x)\} \mathbf{P}(dx)$$

şəklində ifadə olunması üçün $f(t)$-nin kəsilməz müsbət müəyyən funksiya olması zəruri və kafidir. Başqa sözlə, $\mathbb{R}^n$-də verilmiş ehtimal paylanmalarının uyğun xarakteristik funksiyaları sinfi $f(0)=1$ şərti ilə normalanmış kəsilməz müsbət müəyyən funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür.

Bu teoremin isbatını S. Boxner ilk dəfə [1] və [2]-də nəşr etdirmişdir. B. – X. t. A. Ya. Xinçinə məxsus (bax, [3]) stasionar prosesin korrelyasiya funksiyasının spektral ayrılışı üçün bir təməl rolunu oynamışdır.

B. – X. t.-ni $\mathbb{R}^n$-dən fərqlənən strukturlarda təyin olunan müsbət müəyyən funksiyalar sinfi üçün ümumiləşdirmək olur (bax, [5], [6]).

Məs., tam ədədlərin $\mathbb{Z}$ qrupu halında (momentlərin triqonometrik problemi ilə əlaqədar olaraq) bu teorem F. Riss (F. Riesz) və H. Herqlots (H. Herglotz) tərəfindən əvvəlcə alınmışdı. B. – X. t. harmonik analizin ən mühüm nəticələrindən biridir. Sonsuzölçülü fəzalar halında bu teoremin ümumiləşmələri alınmışdır (bax, *Sazonov teoremi*, *Sazonov topologiyası*).

Əd.: [1] B o c h n e r S., Vorlesungen über Fouriersche integral, Lpz., 1932. (rus. per. Б о х н е р С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962); [2] B o c h n e r S., «Math. Ann.», 1933, Bd 108, S. 378–410; [3] K h i n c h i n e A., «Math. Ann.», 1934, Bd 109, S. 604–15 (rus. per. – «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42–51); [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [5] Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа, М., 1961; [6] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально группах, пер. с англ., М., 1981; [8] Х ь ю и т т Э., Р о с с К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ, т. 2, М., 1975.

BOKS – CENKİNS METODU « Бокса – Дженкинса метод; Box – Jenkins approach / method » – *zaman sırasının avtoreqressiv sürüşən orta prosesi* (ARSO – proses) modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi və identifikasiyası prosedurudur. ARSO – proses modeli – modelin tərtibinin seçilməsi, onun parametrlərinin öncədən qiymətləndirilməsi, əvvəlki statistik qiymətlərdən ilkin məlumatlar kimi istifadə olunmaqla sonuncu qiymətləndirmə, diaqnostik yoxlama və yekun modelin seçilməsindən ibarətdir. Bu zaman öncədən fərz olunur ki, baxılan x_t, $t=1, ..., n$ zaman sırası (p, d, q) tərtib hər hansı *avtoreqressiv – inteqrallanan sürüşən orta prosesinin* (ARİSO – prosesinin) realizasiyasıdır; bu proses $(1-B)^d \varphi(B)(x_t - \mathbf{M}x_t) = \theta(B)\, a_t$ şəklində tənliklə ifadə olunur, burada $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - ... - \varphi_p B^p$ – avtoreqressiya operatoru, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q$ – sürüşən orta operatoru, $Bx_t = x_{t-1}$, $\mathbf{M}x_t$, – x_t sırasının orta qiyməti, a_t – riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası σ_a^2 olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır. $\varphi(z)=0$ və $\theta(z)=0$ tənliklərinin bütün köklərinin $\mathbb{Z}$ kompleks müstəvisində vahid radiuslu dairə xaricində yerləşdiyi fərz olunur: onda x_t prosesi stasionardır və çevriləndir. p, d, q parametrlərini, φ_j, $j = 1, ..., p$ avtoreqressiya əmsallarını, θ_j, $j = 1, ..., q$ sürüşən orta əmsallarını və σ_a^2 dispersiyasını qiymətləndirmək tələb olunur.

B. – C. m. [1]-də təklif olunmuşdur. Qüvvət üstü d-nin seçilməsi çevirmədən sonra alınmış $\boldsymbol{W}_{d,t} = (1-B)^d (x_t - \mathbf{M}x_t)$ sırasının seçimi korrelyasion funksiyasının olduqca tez azalması üçün qoyulan tələbə əsaslanır. p və q naməlum olduqda d-ni seçmək üçün [2]-də şərh olunmuş metoddan istifadə etmək olar: bu metod $\boldsymbol{w}_{d-1,t-1}$ üzrə $\boldsymbol{w}_{d,t}$ artımlarının reqressiya əmsallarının sıfra bərabər olması hipotezinin ardıcıl yoxlanılmasından ibarətdir. $d \geq 1$ olduğu halda, sonradan (p, q) tərtib *qarışıq avtoreqressiv orta sürüşən prosesinin* (ARSO – proses) realizasiyası olan $\boldsymbol{w}_{d,t}$ sırası analiz olunur. Modelin tərtibi (p, q)-nü əvvəlcədən seçmək üçün $\boldsymbol{w}_{d,t}$ sırasının korrelyasion və xüsusi korrelyasion funksiyalarının statistik qiymətləri analiz olunur; korrelyasion funksiya $k > q$ yerinidəyişməsi olduğu halda q tərtib *sürüşən orta prosesi* modeli üçün sıfra çevrilməlidir, xüsusi korrelyasion funksiya isə $k > p$ olduğu halda, p tərtib avtoreqressiya prosesi modeli üçün sıfra çevrilməlidir. p və q-nün digər qiymətləndirilmə metodları «*Parametrik model*; t ə r t i b i n s e ç i l m ə s i» məqaləsində şərh olunmuşdur.

Avtoreqressiya parametrlərinin ilkin statistik qiymətləri

$$r_{q+i} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j r_{q-j+i}, \quad i = 1, ..., p$$

şəkilli *Yul – Uoker tənlikləri sisteminin* həllindən sonra axtarılır.

Orta sürüşən parametrlərinin statistik qiymətləri, sonradan

$$C_k = (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q) \Big/ \left(1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j^2\right)$$

– sürüşən orta tənliklərinin parametrlərinə görə qeyri – xətti tənliklərin Nyuton – Rafson metodu ilə həlli vasitəsilə hesablanılır, burada C_k, $k=1,...,q$, –

$$\boldsymbol{w}'_{d,t} = \boldsymbol{w}_{d,t} - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \boldsymbol{w}_{d,t-j}$$

sırasının kovariasion funksiyasıdır. Bu halda σ_a^2 dispersiyasının statistik qiyməti də alınır.

Avtoreqressiya və sürüşən orta parametrlərinin ilkin mərhələdə alınan statistik qiymətləri maksimal doğruyaoşxarlıq statistik qiymətlərinin qurulması üçün ilkin şərtlərdir; bu vaxt fərz olunur ki,

$w_{d,t}$ sırası verilmiş periodlu mövsüm dəyişikliklərini də əks etdirir. $\hat{a}_t$ qalıq bəyaz küyünün kvadratları cəmini minimallaşdıran parametrlərin statistik qiymətləri Markvardt alqoritmi vasitəsilə hesablanılır. B. – C. m. parametrlərin statistik qiymətlərinin korrelyasion matrisinin hesablanılmasını da təmin edir və bu da sonradan diaqnostik yoxlama ərəfəsində istifadə olunur. Uyğun alqoritmlər [1]-də verilmişdir.

$q = 0$ olduqda, avtoreqressiya parametrlərinin ilkin statistik qiymətlərinin tapılması o qədər də zəruri deyildir, çünki yaxşı statistik qiymətləri daha sadə üsulla da almaq olur (məs., *Berq metodu*). $q \neq 0$ olduğu halda (bax, məs., [5]) φ_j və θ_k parametrlərini qiymətləndirmək üçün bu metoda yaxın olan çox da mürəkkəb olmayan metodlar təklif olunmuşdur.

[3]-də (p, q) tərtib ARSO – proses modelinin skalyar zaman sırası kimi ifadəsini təmin edən kompleks proqram verilmişdir (bax, [3]). [4]-də çoxölçülü hal araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Said S., Dickey D., «Biometrika», 1984, v. 71, № 3, p. 599–607; [3] Akaike H., Arahato E., Ozaki T., «Computer Science monographs», 1975, № 5; [4] Akaike H., Nakagava T., Statistical Analysis and Control of Dynamic Systems, Dordrecht, 1988; [5] Friedlander B., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1982, v. IT-28, № 4, p. 639–46.

BOKS – CENKİNS PROSESİ « Бокса – Дженкинса процесс; Box – Jenkins process » – bax, *Avtoreqressiv – inteqrallanan sürüşən orta proses* (*ARİSO – proses*).

BOKS – UİLSON METODU « Бокса – Уилсона метод; Box – Wilson method » – ölçmələrdə təsadüfi xətalar olduqda funksiyanın ekstremumunun axtarışında qradiyent metodunun modifikasiyasıdır (bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*).

BOQOLYUBOV TƏNLİKLƏR ZƏNCİRİ « Боголюбова цепочка уравнений; Bogolyubov equations hierarchy / chain » qeyri–tarazlıqlı statistik mexanikada – μ_t vəziyyətinin korrelyasion funksiyalarını əlaqələndirən

$$\rho^{(n)}((q_1, p_1), ..., (q_n, p_n); t) = \rho^{(n)}_{\mu_t}((q_1, p_1), ..., (q_n, p_n)),$$

$$q_j, p_j \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le j \le h,\ h \ge 0$$

xətti tənliklər sistemidir, burada μ_t – ilkin $\mu\ (= \mu_0)$ ehtimal paylanmalarından başlayan hərəkət tənliklərinin həlli boyunca yerinidəyişmə nəticəsində alına bilinən ehtimal ölçüsüdür. B. t. z. aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(n)}(\cdot\,;\,t) = \{\rho^{(n)}(\cdot,\,t),\,H^{(n)}\} +$$

$$+ \int d\,q_{n+1}\,d\,p_{n+1}\,\{\rho^{(n+1)}(\cdot, | q_{n+1}\,p_{n+1}; t),\,V_{q_{n+1}} | \cdot)\},\ n \ge 0. \qquad (*)$$

Burada

$$H^{(n)}((q_1, p_1), ..., (q_n, p_n)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \| p_j \|^2 + \sum_{1 \le j_1, j_2 \le n} U(\| q_{j_1} - q_{j_2} \|)$$

– qarşılıqlıtəsirinin cüt potensialı $U(r)$, $r \ge 0$ olan n – natamam hamiltonian, $V(q_{n+1} | q_1, ..., q_n) = \sum_{j=1}^{n} U(\| q_{n+1} - q_j \|)$, – $q_{n+1} \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsindəki hissəciyin $q_1, ..., q_n \in \mathbb{R}^d$ nöqtələrində yerləşən hissəciklərlə qarşılıqlı təsir enerjisi, $\{\cdot, \cdot\}$ – Puasson mötərizəsidir. $\{\mu_t\}$ vəziyyətlər ailəsini, çox vaxt, korrelyasion funksiyaları (*) tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin həllini verən ehtimal ölçülərinin ailəsi kimi təyin etmək məsləhətdir. (*) sistemi [1]-də N. N. Boqolyubov tərəfindən təklif edilmiş və öyrənilmişdir. Ədəbiyyatda ББГКИ (kiril əlifbasında, Боголюбов – Борн – Грин – Кирквуд – Ивон) « tənliklər zənciri » termini də istifadə olunur. (*) sistemi üçün varlıq və yeganəlik teoremləri hal-hazırkı dövrə qədər yalnız xüsusi hallar üçün alınmışdır (bax, [2], [4]). Stasionar həllər bir sıra işlərdə öyrənilmişdir (bax, [5]).

B. t. z. kinetik tənliklərin və hidromexanika tənliklərinin riyazi çıxarılışında mühüm rol oynayır (bax, [6], [7]).

Əd.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М. – Л., 1946, а также; Избранные труды, т. 2, К., 1970, с. 90–196; [2] Gallavotti G., Lanford O., Lebowitz J., «J. Math. Phys.», 1972, v. 13, № 11, p. 2898–905; [3] Петрина Д. Я., Гераскименко В. И., Малышев П. В., Математические основы класссической статистической механики, К., 1985; [4] Синай Я. Г., Сухов Ю. М., «Теоретич. и матем. физика», 1974, т. 19, № 3, с. 344–63; [5] Gurevich B. M., Suhov Y u. M., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 49, № 1, p. 63–96; 1977, v. 54, № 1, p. 81–96; 1977, v. 56, № 3, p. 225–36; 1982, v. 84, № 3, p. 333–76; [6] Spohn H., «Rev. Mod. Phys.», 1980, v. 52, № 3, p. 569–615; [7] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84.

BOLŞEV APPROKSİMASİYASI « Большева аппроксимация; Bol'shev's approximation » – bax, *Hiperhəndəsi paylanma*.

BOLTSMAN PAYLANMASI « Больцмана распределение; Boltzmann distribution » – $r_1 + ... + r_n = r$ şərtini ödəyən, mənfi olmayan tam $r_1, ..., r_n$ qiymətlərini alan $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin diskret birgə paylanmaları –

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = r_1, ..., \xi_n = r_n\} = \frac{r!}{r_1! ... r_n!} \cdot \frac{1}{n^r} \qquad (*)$$

düsturu ilə verilən paylanmadır.

r müxtəlif kürəciyin n müxtəlif oyuqda yerləşdirilməsi məsələsində bütün mümkün olan n^r sayda yerləşmələrin eyni ehtimallı olduğu fərz olunarsa və ξ_i, – i-ci oyuqdakı kürəciklərin sayı olarsa, onda $(\xi_1, ..., \xi_n)$ təsadüfi vektoru B. p. ilə paylanır. Bu halda $1, 2, ..., n$ nömrəli oyuqlarda uyğun olaraq $r_1, ..., r_n$ sayda hissəciyin yerləşməsi ehtimalı (*) düsturu ilə hesablanır; hissəciklərin oyuqlarda yerləşmələrinin qeyd olunan ehtimallarla verilməsi Maksvell–Boltsman statistikası adlanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

BOLTSMAN STATİSTİKASI « Больцмана статистика; Boltzmann statistics » – klassik mexanikada qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəciklər sisteminə (klassik ideal qaz) tətbiq edilən *statistikadır*. L. Boltsman (L. Boltzmann; 1868 – 71)

tərəfindən təklif olunmuşdur; bu statistika bir hissəciyin koordinat və impulslarının faza fəzasında hissəciklərin paylanmasını təyin edir.

Bu faza fəzası çox sayda kiçik oyuqlara bölünür, hər bir oyuqda isə yerləşən hissəciklər sayı N_i böyük ədəd olur və bu oyuqlarda hissəciklərin bütün mümkün ola bilən yerləşmələrinin paylanmalarına baxılır. i-ci oyuğun faza həcmi G_i bu oyuğun 6 – ölçülü fəzada h^3 vahidində həcmidir, burada $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ – Plank sabitidir. Hissəciklərin verilmiş sayına və enerjiyə uyğun bütün mikroskopik vəziyyətlər eyniehtimallı sayılır. G_i ölçülü oyuqlardan hər birində N_i hissəcik yerləşməklə, N sayda hissəciyin M sayda oyuqda yerləşməsi üçün müxtəlif üsulların sayı

$$W_B(\dots N_i \dots) = N! \prod_{1 \le i \le M} G_i^{N_i} / N_i!,$$

$$N = \sum_i N_i$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada hissəciklərin tamamilə asılı olmadıqları, fərqlənmədikləri və hər bir oyuq daxilində hissəciklərin yerdəyişmələrinin vəziyyətinin dəyişmədiyi nəzərə alınır. B. s.-nda bu kəmiyyət vəziyyətin statistik çəkisini təyin edir. Statistik çəki təyin olunarkən, bundan başqa, nəzərə alınmalıdır ki, eyni tipli hissəciklərin yerdəyişməsi vəziyyəti dəyişmir və buna görə də, W_B-ni $N!$ dəfə azaltmaq lazımdır.

B. s.-nda fərz olunur ki, tarazlıq vəziyyəti statistik olaraq ən böyük ehtimal paylanmasına uyğundur, bu da hissəciklərin qeyd olunmuş N qiymətində və E enerjisinin qeyd olunmuş qiymətində W-nin maksimumuna uyğun olur və bu da oyuqda hissəciklərin orta sayı üçün Boltsman paylanmasına gətirir; bu paylanma aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\overline{n}_i = \overline{N}_i / G_i = e^{(\mu - \varepsilon_i)/kT}, \quad E = \sum_i \varepsilon_i N_i,$$

burada k – Boltsman sabiti (universal sabitdir və $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}\, erg/grad$), T – mütləq temperatur, μ – kimyəvi potensialdır.

Əd.: [1] Майер Дж., Гепперт – Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [2] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955.

BOLTSMAN TƏNLİYİ « Больцмана уравнение; Boltzmann equation » – L. Boltsmanın 1872-də (bax, [1]) təklif etdiyi, seyrəklənmiş qazların kinetik nəzəriyyəsinin aşağıdakı şəkildə verilən əsas tənliyidir:

$$\frac{\partial f(q, \upsilon, t)}{\partial t} = -\upsilon \frac{\partial f(q, \upsilon, t)}{\partial q} +$$

$$+ \iint [\, f(q, \upsilon', t)\, f(q, \upsilon_1', t) - f(q, \upsilon, t)\, f(q, \upsilon_1, t)\,] \times$$

$$\times |\upsilon - \upsilon_1| B(\upsilon - \upsilon_1, \omega)\, d\omega\, d\upsilon_1,$$

burada $f(q, \upsilon, t)$ – qaz hissəciklərinin $q \in \mathbb{R}^3$ nöqtəsində $v \in \mathbb{R}^3$ sürəti ilə t anında orta topalanmasıdır, $\omega \in S^2$, $(\omega, \upsilon - \upsilon_1) \ge 0$, $B(\upsilon, \omega)$ – səpələnmənin differensial kəsiyidir, qaz hissəciklərinin qarşılıqlıtəsir potensialı üzrə təyin olunur, $\upsilon' = \upsilon - (\upsilon - \upsilon_1, \omega)\, \omega$, $\upsilon_1' = \upsilon_1 + (\upsilon - \upsilon_1, \omega)\, \omega$. Belə hesab olunur ki, bu tənlik Boltsman – Qred limitində alınır (bax, [1] – [4]).

Bəzi potensiallar üçün B. t.-ni keçid intensivliklərinin $f(\cdot, t)$-dən xətti asılılığı olan sıçrayışvari qeyri – xətti Markov prosesi üçün *Kolmoqorov tənliyi* kimi yazmaq olar (bax, [2], [3]).

$\{f_n\}$, $f_n = f(q_1, \upsilon_1, t)\, f(q_2, \upsilon_2, t) \dots f(q_n, \upsilon_n, t)$ toplusu, B. t. zəncirinin həllidir (bax, [2] – [4]). Bu «molekulyar xaos» hipotezinə müvafiqdir və Markov şaxələnən proseslərinə bağlılığı göstərir, bu bağlılıq isə B. t.-nə analoji tənliklər üçün müəyyən olunmuşdur və Monte – Karlo metodunda istifadə olunur. Hal-hazırda B. t.-nin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər ümumi şəkildə kifayət dərəcədə isbat olunmamışdır, Boltsman – Qred limit keçidinin korrektliyi yoxlanılmamışdır, müvafiq xətti (şaxələnən) və qeyri – xətti Markov prosesləri qurulmamışdır.

Əd.: [1] Больцман Л., Лекции по теории газов, пер. с нем., М., 1956; [2] Nonequilibrium phenomena, «Stud. Stat. Mech.», 1983, v. 10; [3] Гуревич Б. М., Оселедец В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 14, М., 1977, с. 5–39; [4] Добрушин Р. Л., [и др.], в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 233–307; [5] Черчиньяни К., Уравнение Больцмана, пер. с англ., М., 1981; [6] Черчиньяни К., Теория и приложения уравнения Больцмана, пер. с англ., М., 1978.

BONFERRONİ BƏRABƏRSİZLİYİ « Бонферрони неравенство; Bonferroni's inequality » – n sayda $A_1, \dots, A_n$ hadisələrindən r saydasının eyni zamanda baş verməsi ehtimalı $P_{[r]}$-i aşağı və yuxarıdan qiymətləndirmək üçün bərabərsizlikdir. Məlumdur ki,

$$P_{[r]} = \sum_{j=r}^{n} (-1)^{j-r} C_j^{j-r} p_j, \qquad (1)$$

$$p_j = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_j \le n} \mathbf{P}\left\{ \bigcap_{k=1}^{j} A_{i_k} \right\}, \quad p_0 = 1.$$

n hadisədən heç olmasa r saydasının baş vermə ehtimalı P_r aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$P_r = \sum_{i=r}^{n} \mathbf{P}_{[i]} = \sum_{j=n}^{n} (-1)^{j-r} C_{j-1}^{j-r} p_j. \qquad (2)$$

Əgər (1) düsturunda və ya (2) düsturunda yalnız $p_r, p_{r+1}, \dots, p_{r+k-1}$ hədlərini saxlayıb, $p_{r+k}, \dots, p_n$ hədləri atılarsa, onda yaxınlaşma xətasının işarəsi birinci atılan toplananın işarəsi ilə eynidir və bu xəta mütləq qiymətcə birinci atılan toplanandan kiçikdir. Məs., (1) düsturunda $k = 1$ və $k = 2$ seçilərsə, uyğun olaraq

$$p_r - C_{r+1}^1 p_{r+1} \le P_{[r]} \le p_r \quad \text{və} \quad p_r - C_r^1 p_{r+1} \le P_r \le p_r$$

bərabərsizlikləri alınır.

Xüsusi halda, əgər $r = n$ olarsa, onda

$$1 - \sum_{i=1}^{n} P\{\overline{A_i}\} \le \mathbf{P}\left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right\}.$$

Bax, *Daxiletmə və xaricetmə metodu.*

Əd.: [1] Bonferroni C. E., «Publ. Ist. Sup. Sci. Econ. Commun. Firenze», 1936, t. 8, p. 1–62; [2] Bonferroni C. E., в кн.: Volume

di Studi in onore di prof. S. Ortu Carboni Genova, 1936; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984.

BOREL CƏBRİ « борелевская алгебра; Borel algebra » – bax, *Borel meydanı*, *hadisələrin* .

BOREL σ – CƏBRİ « борелевская σ – алгебра; Borel σ – algebra » – bütün açıq altçoxluqları özündə saxlayan, topoloji fəzanın altçoxluqlarının minimal σ – cəbridir. B. σ – c.-nə aid altçoxluqlar Borel çoxluqları adlanır. Lokal kompakt Hausdorf fəzası halında kompakt altçoxluqların doğurduğu σ – cəbrdən olan altçoxluqlar da bəzən Borel çoxluqları adlanır. Bax, *Çoxluqlar σ – cəbri.*

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

BOREL ÇOXLUĞU « борелевское множество; Borel set » – verilmiş topoloji fəzanın Borel σ – cəbrinə (yəni bu fəzanın bütün açıq hissələrinin ailəsinin doğurduğu σ – cəbrə) aid olan çoxluqdur. B. ç. anlayışı *Borel funksiyası* anlayışı ilə sıx bağlıdır. Tam separabel metrik fəzalara homeomorf olan polski topoloji fəzalarının Borel altçoxluqları ümumi topologiyada, ehtimal nəzəriyyəsində və funksional analizdə xüsusilə mühüm rol oynayır. Qeyri – hesabi polski fəzalarında B. ç. ω_1 -dən ciddi kiçik bütün mümkün ordinal ədədlərin köməyilə müəyyən surətdə təsniflənir, burada ω_1 – birinci qeyri – hesabi ordinaldır. İsbat olunur ki, belə təsnifatda bütün siniflər boş olmayan siniflərdir. Borel çoxluğunun strukturu nöqteyi – nəzərindən polski fəzasının ixtiyari iki qeyri – hesabi Borel altçoxluqları öz aralarında izomorfdurlar.

Klassik analizin kəsilməzlik və yığılma ilə bağlı müxtəlif suallarında G_δ, F_σ, $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$ və s. tipli çoxluqların – ilkin siniflərin B. ç.-larına tez-tez təsadüf olunur. İxtiyari polski topoloji fəzasında hər bir G_δ – çoxluğu doğurulmuş topologiyaya nəzərən polski fəzasıdır (P. S. Aleksandrov teoremi). Sonluölçülü Evklid fəzasında ixtiyari B. ç. Lebeq mənada ölçülən olub, Ber xassəsinə malikdir. İxtiyari topoloji fəzanın bütün Borel altçoxluqları Ber xassəsinə malikdirlər.

Bax, *Cəbri*, *çoxluqların*.

Əd.: [1] К у р а т о в с к и й К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [2] Б у р б а к и Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975.

BOREL FUNKSİYASI « борелевская функция; Borel function » – T topoloji fəzasında təyin olunmuş, Borel mənada ölçülən ədədi f funksiyasıdır. Əgər ixtiyari $a \in \mathbb{R}^1$ üçün $f^{-1}((a, +\infty))$ çoxluğu T topoloji fəzasında Borel çoxluğudursa, f Borel mənada ölçülən funksiyadır, deyilir (bax, *Borel çoxluğu*). Ekvivalent tərif: f, – T -də verilmiş ixtiyari ədədi funksiya və $A \subset \mathbb{R}^1$ ixtiyari Borel çoxluğu olduqda $f^{-1}(A)$ çoxluğu T -də Borel çoxluğu olarsa, f Borel funksiyası adlanır. g və f, – T -də ixtiyari B. f.-ları olsun. Onda $g + f$, λg ($\lambda \in \mathbb{R}^1$), $g f$, $\sup(g, f)$, $\inf(g, f)$, $|g|$ funksiyaları da B. f.-larıdır. Əgər $(f_n)_{n \in N}$, – T -də B. f. ardıcıllığıdırsa və bu ardıcıllıq hər bir $x \in T$ nöqtəsində yığılandırsa, onda $f = \lim\limits_n f_n$ limit funksiyası da B. f.-dır. Hər bir B. f. Ber xassəsinə malikdir. (T', S') – ölçülən fəza, φ, – T' -də ədədi ölçülən funksiya, g – həqiqi $\mathbb{R}^1$ oxunda verilmiş ixtiyari B. f. olsun. Onda $g \circ \varphi$ kompozisiyası (T', S') ölçülən fəzasında ölçülən funksiyadır. Əgər $T = \mathbb{R}^n$ olarsa, onda T -də təyin olunmuş ixtiyari B. f. Lebeq mənada ölçüləndir. Tərsi doğru deyildir. Yalnız hökm etmək olar ki, $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş, Lebeq mənada ölçülən ixtiyari ədədi f funksiyası üçün $\mathbb{R}^n$ -də elə g B. f. tapılar ki, sanki bütün $x \in \mathbb{R}^n$ nöqtələrində $f(x) = g(x)$ olur.

İxtiyari polski topoloji T fəzasında verilən B. f.-ları ω_1 -dən ciddi kiçik olan bütün mümkün olan ordinal ədədlər vasitəsilə təsnif olunur; ω_1 – birinci qeyri – hesabi ordinaldır. B. f.-larının belə təsnifatı Ber təsnifatı, uyğun siniflər isə Ber sinifləri adlanır. Bu təsnifat əsasında B. f.-ları haqqında bir çox faktlar transfinit induksiya metodu ilə isbat olunur. Qeyri – hesabi polski fəzasında verilən bütün B. f.-larının çoxluğunun gücü kontinium gücünə bərabərdir. Belə fəzada Borel mənada ölçülməyən ədədi funksiyalar mövcuddur. İsbat olunmuşdur ki, qeyri – hesabi polski fəzaları üçün bütün Ber sinifləri boş olmayan siniflərdir (Lebeq teoremi). B. f. anlayışı daha ümumi Borel inikası anlayışının xüsusi halıdır; Borel inikası T topoloji fəzasının Y topoloji fəzasına elə inikasıdır ki, ixtiyari $A \subset Y$ Borel çoxluğu üçün bu inikasda $f^{-1}(A)$ çoxluğu T fəzasında Borel çoxluğu olur. Əgər T və Y – polski fəzaları, f, – T fəzasının Y fəzasına Borel inikası, B isə T -də Borel altçoxluğu olarsa, onda $f(B)$ obrazı, ümumiyyətlə, Y -də Borel çoxluğu olmayacaqdır. Bu obraz Y -də analitik (Suslin) altçoxluqdur. Lakin f inikası eyni zamanda inyektiv (qarşılıqlı birqiymətli) inikas olarsa, onda $f(B)$ çoxluğu Y fəzasında Borel çoxluğu olur.

Əd.: [1] К у р а т о в с к и й К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [2] Б у р б а к и Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975.

BOREL QANUNU, GÜCLƏNDİRİLMİŞ BÖYÜK ƏDƏDLƏRİN « Бореля усиленный закон больших чисел; Borel strong law of large numbers » – Bernulli sxemi üçün (bax, *Bernulli sınaqları*) E. Borel tərəfindən tərtib və isbat olunmuş (bax, [1]) *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun* tarixən ilk variantıdır. $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, ...$$

Onda $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ «müvəffəqiyyət» ehtimalı $1/2$ olan Bernulli sxemində «müvəffəqiyyət»lər sayıdır. E. Borel [1]-də isbat etmişdir ki,

$$S_n / n \to 1/2$$

münasibəti $n \to \infty$ olduqda vahid ehtimalla ödənilir. Sonradan Q. Hardi (G. Hardy, 1914) və J. Litlvud (J. Littlewood) isbat etmişlər ki,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{|S_n - n/2|}{\sqrt{n \ln n}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir. 1922-də A. Ya. Xinçin daha güclü nəticə almışdır; o isbat etmişdir ki,

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{|S_n - n/2|}{\sqrt{n\ln\ln n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 1.$$

Bax, *Təkrar loqarifm qanunu.*

Əd.: [1] B o r e l E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] K a ц M., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., M., 1963.

BOREL İNİKASI « борелевское отображение; Borel mapping » – bax, *Borel funksiyası.*

BOREL MEYDANI, ÇOXLUQLARIN « борелевское поле множеств; Borel field of sets », M çoxluqlar sisteminin doğurduğu – M-i özündə saxlayan, hesabi sayda birləşmə əməli və tamamlama əməlinə keçidə görə qapalı olan, minimal çoxluqlar sistemidir.

BOREL MEYDANI, HADİSƏLƏRİN « борелевское поле событий; Borel field of events », σ – meydan, Borel cəbri, hadisələrin σ – cəbri – boş olmayan Ω çoxluğunun (elementar hadisələr fəzasının) *Borel meydanını* təşkil edən altçoxluqlarının (hadisələrin) $\mathcal{A}$ sinfidir.

BOREL MƏNADA ÖLÇÜLƏN FUNKSİYA « измеримая функция в смысле Бореля; Borel measurable function » – bax, *Borel funksiyası.*

BOREL MODELİ « борелевская модель; Borel model » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

BOREL ÖLÇÜSÜ « борелевская мера; Borel measure » – topoloji T fəzasının çoxluqlarının Borel σ – cəbrində verilmiş μ ölçüsüdür. Əgər $\mu(T) = 1$ olarsa, B. ö. – ehtimal i ölçü adlanır. B. ö.-nün mühüm siniflərini τ – hamar, requlyar, sıx və Radon ölçüləri təşkil edir.

«B. ö.» termini başqa mənalarda da istifadə olunur. Məs., kompakt çoxluqların doğurduğu, kompakt çoxluqlarda sonlu qiymətlər alan, σ – halqada verilmiş ölçü, lokal kompakt fəzada ölçü də B. ö. adlanır. Bəzən $\mathbb{R}^n$-də Lebeq ölçüsünün Borel σ – cəbrinə daralması da B. ö. adlandırılır.

Əd.: [1] X a л м o ш П., Теория меры, пер. с англ., M., 1953.

BOREL «SIFIR–VAHİD» KRİTERİSİ « Бореля критерий «нуль-единица»; Borel zero-one law » – bax, *Borel – Kantelli lemması.*

BOREL TEOREMİ « Бореля теорема; Borel theorem » – bax, *Limit teoremləri*, diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin.

BOREL – KANTELLİ LEMMASI « Бореля – Кантелли лемма; Borel – Cantelli lemma »: ixtiyari $\{A_n, n \geq 1\}$ təsadüfi hadisələr ardıcıllığı üçün $\sum \mathbf{P}(A_n)$ sırası yığılarsa,

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right\} = 0.$$

Əgər $A_1, A_2, \ldots$ asılı olmayan hadisələrdirsə, $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ hadisəsinin ehtimalı ya 0-a, yaxud 1-ə bərabərdir. Bu halda, Borelin «sıfır, yaxud vahid» kriterisi doğrudur: $\sum \mathbf{P}(A_n)$ sırasının yığılan olub-olmamasından asılı olaraq $\mathbf{P}(A)$ ehtimalı ya sıfra, yaxud vahidə bərabərdir.

Bu nəticə A. N. Kolmoqorovun «Sıfır, yaxud vahid» qanununun xüsusi bir halıdır.

B. – K. l. *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* ilə bağlı elmi işlərdə isbat olunmuşdur. B. – K. l.-nın hadisələrin cüt-cüt asılı olmamazlığı (bax, [1]) və asılılığı (bax, [2]) halları üçün ümumiləşmələri vardır.

Əd.: [1] B o r e l E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] C a n t e l l i F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26, p. 39–45; [3] П е т р о в В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, M., 1987; [4] Л о э в M., Теория вероятностей, пер. с англ., M., 1962.

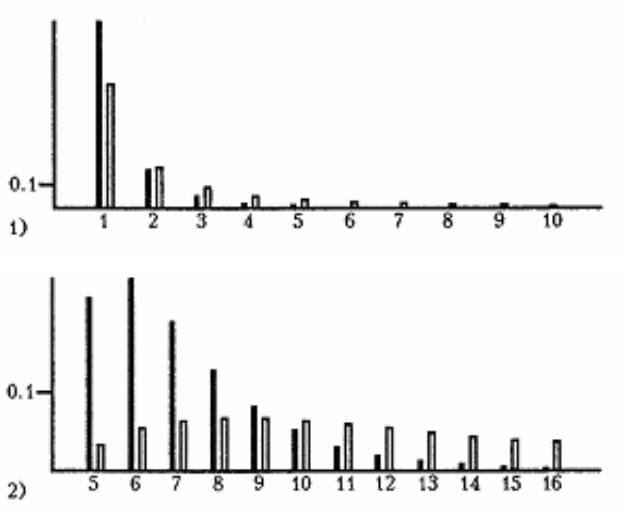
BOREL – KANTELLİ – LEVİ LEMMASI « Бореля – Кантелли – Леви лемма; Borel – Cantelli – Lévy lemma » – bax, *Kompensator.*

BOREL – TANNER PAYLANMASI « Бореля – Таннера распределение; Borel – Tanner distribution » – tamqiymətli $m = k,\ k+1, \ldots$ qiymətlərini (k – tam ədəddir)

$$p_m = \mathbf{P}\{\xi = m\} = \frac{k}{(m-k)!}\, m^{m-k-1} e^{-\alpha m} \alpha^{m-k},$$

$$0 < \alpha < 1,\ k > 0$$

ehtimalları ilə (bax, şəkil) alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal *paylanmasıdır*. B. – T. p. kütləvi xidmət nəzəriyyəsində α parametrli Puasson giriş axınlı kütləvi



Borel – Tanner paylanması: 1) $k = 1$, $\alpha = 0{,}3$ və $\alpha = 0{,}7$; 2) $k = 5$, $\alpha = 0{,}3$ və $\alpha = 0{,}7$.

xidmət sistemində məşğulluq periodunda xidmət olunmuş tələblərin sayının paylanması kimi yaranır; bu halda başlanğıc anda növbənin uzunluğunun k-ya bərabər olduğu və xidmət müddətinin sabit olduğu nəzərdə tutulur.

BOŞ BLOKLAR KRİTERİSİ « пустых блоков критерий; empty blocks test » – F_1 paylanmasından n_1 həcmli təkrar seçimlə yaranmış və F_2 paylanmasından

əvvəlki seçimdən asılı olmayan n_2 həcmli təkrar seçim nöqtələri ilə doldurulmuş boş seçim bloklarının sayının – $\mu_0^{(1)}(n_1, n_2)$ statistikasının əsası təyin olunan *statistik kriteridir.*

B. b. k. *boş qutular kriterisinin* analoqudur və bu kriteri F_1 və F_2 kəsilməz paylanma funksiyalarının üst-üstə düşməsi hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunur. Boş bloklar sayı ilə seriyaların ümumi sayının statistikası arasında əlaqə vardır (bax, *Seriyalar kriterisi*):

$$u = -2\mu_0^{(1)}(n_1, n_2) + 2(n_1 + 1) + \gamma = \\ = -2\mu_0^{(2)}(n_2, n_1) + 2(n_2 + 1) + \gamma,$$

burada γ , – 0 və ya 1 qiymətini alır, $\mu_0^{(2)}(n_2, n_1)$ – birinci seçimin blokları dolduqda ikinci seçimin boş bloklarının sayıdır.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] К у д л а е в Э. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 26, М., 1988; [3] M o o d A. M., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 367–92.

BOŞ QUTULAR KRİTERİSİ « пустых ящиков критерий; empty cells test » – müşahidə nəticələrinin seçimdə olmadığı ədəd oxu intervallarının sayına bərabər statistikaya əsaslanan, paylanmanın növü haqqında hipotezin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir.*

Yoxlanılan hipotezə görə, $x_1, x_2, ..., x_n$ seçimindəki asılı olmayan müşahidə nəticələrinin paylanma funksiyası eyni $F(x)$ kəsilməz funksiyası olsun. $z_0 = -\infty < z_1 < ... < z_{N-1} < z_N = \infty$ nöqtələri elə seçilir ki, $F(z_k) - F(z_{k-1}) = 1/N$, $k = 1, 2, ..., n$ olsun. μ_0 elə $(z_{k-1}, z_k]$ yarımintervallarının sayı olsun ki, bu intervallarda seçimi qiymətlərdən heç biri yoxdur. B. q. k.-nin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, hipotez $\mu_0 \le C$ olduqda qəbul olunur, $\mu_0 > C$ olduqda isə qəbul olunmur. Bu kriterinin xarakteristikalarının hesablanması h i s s ə c i k l ə r h a q q ı n d a k l a s s i k m ə s ə l ə ilə bağlıdır.

n sayda müxtəlif qutuya bir-birindən asılı olmayaraq r sayda müxtəlif hissəcik yerləşdirilir; ixtiyari qeyd olunmuş hissəciyin ixtiyari qeyd olunmuş qutuya düşməsi ehtimalı $1/N$ -ə bərabər götürülür. Boş qutuların sayı $\mu_0(n, N)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması B. q. k. statistikasının paylanması ilə eynidir.

$\mu_0(n, N)$ statistikasına əsaslanan kriteridən hissəciklərin oyuqlarda polinomial qanunla yerləşməsi haqqında alternativ hipotezə qarşı onların oyuqlarda müntəzəm yerləşməsi hipotezinin yoxlanılmasında istifadə etmək olar. Oyuqların nömrələrinin dəyişilməsinə görə μ_0 statistikasının invariantlığına əsaslanaraq qeyd olunmuş alternativ hipotez əvəzinə alternativ hipotezlərin uyğun sinfinə baxılır.

B. q. k.-nin təbii ümumiləşməsi $\eta_r = c_{r0}\mu_0 + c_{r1}\mu_1 + ... + c_{rr}\mu_r$ kəmiyyətinə əsaslanan kriteridir; μ_k – yalnız k sayda hissəciklər olan qutuların sayıdır. Bu kəmiyyət bölünən statistikadır.

Əd.: [1] К о л ч и н В. Ф., С е в а с т ь я н о в Б. А., Ч и с т я к о в В. П., Случайные размещения, М., 1976.

***BOYSKAUT BIÇAĞI (QATLANAN BIÇAQ) METODU « бойскаутского ножа (складного ножа метод); method of correction bias, jackknife method »** – K e n u y – T y u k i m e t o d u, m e y l ə d ü z ə l i ş m e t o d u, p a r ç a l a m a m e t o d u, c ə k n a y f m e t o d u – çoxölçülü statistik analizin qeyri – ənənəvi metodlarından biri olub, araşdırılan statistikanın meyl və dispersiyasının qiymətləndirilməsi, hər hansı bir statistikanın paylanmasının əvvəlcədən verilmiş nöqtəyə görə simmetrik olması haqqında ilkin hipotezlərin yoxlanılması üçün psevdoqiymətlərə əsaslanan metoddur.

R. Miller bu metodu [1]-də mükəmməl surətdə təsvir etmişdir. B. b. m.-nun izahı daha sadə «*butstrəp*» – *metodun* köməyi ilə verilir. Əslində butstrəp – metodlar B. b. m.-ndan daha geniş surətdə tətbiq olunur, belə ki, onlar daha etibarlı nəticələrin alınmasına imkan verir. Məs., butstrəp – metodun tətbiqi nəticəsində s e ç i m i m e d i a n ı n dispersiyası asimptotik olaraq daha korrekt qiymətləndirilir, lakin bu məsələdə B. b. m.-nu tətbiq etmək olmur. Məlumdur ki, butstrəp – metod xətti diskriminasiya məsələlərində xətaların hissələrinin qiymətləndirilməsində «yenidənyoxlama» qeyri – parametrik metodunun əvəzləyicisi kimi əvəzolunmazdır.

B. b. m. butstrəp – metodun approksimasiyası üçün xətti ümumiləşmədir.

$x_1,...,x_n$ – paylanma funksiyası F_θ olan ümumi çoxluqdan seçim olsun; θ – naməlum parametr, $\theta_n(x_1,...,x_n)$, – θ üçün statistik qiymətdir. Onda θ_n statistik qiymətinin psevdoqiyməti – $\theta_{ni} = n\theta_n - (n-1)\theta_{n-1}^i$, $i = 1, ..., n$ olacaqdır, burada $\theta_{n-1}^i = \theta_{n-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$, – x_i müşahidələnəninin xaric edildiyi seçim üzrə müəyyən edilmiş statistik qiymətdir. Meylin azaldılması üçün B. b. m. θ_n -in

$$\theta_n^* = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\theta_{ni}$$

qiyməti ilə əvəz olunmasından ibarətdir.

Əgər θ_n statistik qiymətinin meyli $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}(\theta_n - \theta) = b_1/n + b_2/n^2 + o(n^{-3})$$

asimptotik ayrılışı kimi ifadə olunarsa, onda θ_n^*-nun meyli bir tərtib az olur, yəni $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}(\theta_n^* - \theta) = -b_2/n^2 + o(n^{-3}).$$

B. b. m.-nu m dəfə tətbiq etdikdə, meylin ayrılışındakı hədləri n^{-m} tərtibə qədər xaric etmək olur. θ_n statistikasının dispersiyasının B. b. m. ilə hesablanmış statistik qiyməti

$$\sigma_n^* = (n(n-1))^{-1}\sum_{i=1}^{n}[\theta_{ni} - \theta_n^*]^2$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əd.: [1] M i l l e r R. G., The jackknife – a review «Biometrika» 61, p. 1–17, 1974; [2] Q u e n o u i l l e M., «Biometrika», 1956, v. 43, № 3–4, p. 353–60; [3] T u k e y J., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 2, p. 614; [4] Э ф р о н Б., Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа, пер. с англ., М., 1988.

BOZE – EYNŞTEYN MODELİ « Бозе – Эйнштейна модель; Boze – Einstein model » – bax, *Boze – Eynşteyn statistikası.*

BOZE – EYNŞTEYN STATİSTİKASI « Бозе – Эйнштейна статистика; Boze – Einstein statistics » – bir-birindən fərqlənməyən tam spinli [spin – elementar hissəciklərin (elektron, proton, neytron) və ya bunların kvant təbiətli atom nüvəsinin hərəkət miqdarının məxsusi mexaniki momentidir] sistemlərə tətbiq edilən kvant statistikasıdır. Ş. Boze (S. Boze) və A. Eynşteyn (A. Einstein) tərəfindən 1924-də təklif olunmuşdur. Bu statistikada çoxhissəli sistemin hər bir kvant vəziyyətində bir-birindən fərqlənməyən ixtiyari sayda hissəcik ola bilər.

Statistik mexanikada faza fəzası n sayda oblasta və ya oyuqlara bölünür. Bir-birindən fərqlənməyən r sayda hissəciyi Boze – Eynşteyn modeli adlanan modelə görə n sayda müxtəlif oyuqda $C_{n+r-1}^{r} = C_{n+r-1}^{n-1}$ müxtəlif üsulla yerləşdirmək olar; hər bir oyuqda heç olmazsa bir hissəcik olması şərtilə (bütün oyuqlar doludur, boş oyuq yoxdur) r sayda bir-birindən fərqlənməyən hissəciyi n müxtəlif oyuqda C_{r-1}^{n-1} $(r > n)$ üsulla yerləşdirmək olar. Fotonlar, özündə cüt sayda elementar hissəcik daşıyan atomlar və atom nüvələrinin paylanması məhz Boze – Eynşteyn modelinə uyğundur.

Məs., ideal qazın kvant vəziyyəti səviyyələrin dolması saylarının çoxluğu $\{n_p\}$ ilə təyin olunur; hər bir n_p ədədi impulsu p olan birhissəvi kvant vəziyyətində olan hissəciklərin sayıdır, B. – E. s. halında $n_p = 0, 1, 2, \ldots$. Böyük sistemlər üçün enerji səviyyələri olduqca sıx yerləşir və $V \to \infty$ olduqda kəsilməz spektrə yaxınlaşırlar. Buna görə də, səviyyələri orta enerjisi $\varepsilon_i = p_i^2 / 2m$ olan G_i səviyyəyə malik kiçik oyuqlar üzrə qruplaşdırmaq mümkündür, bu halda fərz olunur ki, $G_i >> 1$. Bütün sistemin vəziyyəti $\{N_i\}$ toplusu ilə təyin olunur; N_i – oyuğun səviyyələri üzrə n_p -lərin cəmidir. Makroskopik vəziyyətin statistik çəkisi, yəni hissəciklərin oyuqlarda müxtəlif yerləşmələrinin sayı –

$$W(N_i) = \prod_i (G_i + N_i - 1)! \Big/ N_i!(G_i - 1)!$$

ədədinə bərabərdir. Vəziyyətlər üzrə hissəciklərin ən ehtimallı yerləşməsi $E = \sum_i \varepsilon_i N_i$ enerjisi verildiyi halda statistik çəkinin maksimallığı şərtindən və $N = \sum_i N_i$ hissəciklər sayından tapılır. Oyuqların müvafiq olan dolu olma ədədləri –

$$\overline{n}_i = \overline{N}_i / G_i = (e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1)^{-1}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada μ – kimyəvi potensial, k – Boltsman sabiti (universal sabitdir və $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}\, erg/grad$), T – mütləq temperaturdur.

B. – E. s.-na tabe hissəciklər sistemi üçün vəziyyətlər simmetrik dalğa funksiyası ilə təsvir olunurlar, bu isə B. – E. s.-nın tərifinin yalnız ideal qaz üçün doğru olduğunu deyil, digər hallarda da doğru olmasını ifadə edir.

Əd.: [1] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., М., 1997; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [4] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в его кн.: Избранные труды, т. 2, К., 1970.

BOZON FƏZASI « бозонное пространство; boson space » – bax, *Fok fəzası.*

***BÖLGÜ « разбиение; partition »**, sonlu bölgü – hər hansı bir Ω çoxluğunun cüt-cüt uyuşmayan və birləşməsi Ω -ya bərabər olan boş olmayan altçoxluqlarından təşkil olunmuş çoxluqlar sinfinə deyilir. Əgər $B_i \subset \Omega$, $B_i \neq \varnothing$, $(i = \overline{1, n})$, $i \neq j$ olduqda, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i, j = \overline{1, n}$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ olarsa, $\mathscr{B}_n = \{B_1, \ldots, B_n\}$ çoxluqlar sistemi Ω çoxluğunun bölgüsünü təşkil edir. B_i -lərə $\mathscr{B}_n$ bölgüsünün atomları deyilir. $\mathscr{B}_n$ bölgüsünün doğurduğu $\mathscr{A}(\mathscr{B}_n)$ çoxluqlar cəbri 2^n sayda çoxluqlardan ibarətdir:

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}_n) = \{\{B_1\}, \ldots, \{B_n\}, \{B_1 \cup B_2\}, \ldots, \{B_{n-1} \cup B_n\}, \ldots, \Omega, \varnothing\}.$$

$n = 2$ olduqda, $\mathscr{B}_2 = \{B, \overline{B}\}$ və $\mathscr{A}(\mathscr{B}_2) = \{\{B\}, \{\overline{B}\}, \Omega, \varnothing\}$.

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası, $B_i \in \mathscr{F}$, $i = \overline{1, n}$ olarsa, $\mathscr{B}_n = \{B_1, \ldots, B_n\}$ hadisələr çoxluğunun doğurduğu $\mathscr{A}(\mathscr{B}_n)$ cəbri Ω -nın $\mathscr{B}_n$ «bölgüsü»nün doğurduğu hadisələr cəbridir. Hər bir sonlu hadisələr (çoxluqlar) cəbri müəyyən bir «bölgü»nün doğurduğu cəbrdir.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$

hesabi bölgüsü analoji təyin olunur.

Bax, *Binar münasibətlər statistikası.*

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

BÖLGÜ(sü) natural ədədin **« разбиение натурального числа; partition of natural number »** – bax, *Təsadüfi bölgü.*

K – BÖLGÜ « K – разбиение; K – partition » – μ ölçülü Ω Lebeq fəzasının ölçülən ξ bölgüsüdür və bu fəzada ölçünü saxlayan elə işlək $\{T^t,\ t \in \mathbb{Z}$ və ya $\mathbb{R}\}$ dinamik sistemi vardır ki,

1) $t \geq 0$ üçün $T^t \xi \geq \xi$,

2) $\bigvee_t T^t \xi = \varepsilon (\mathrm{mod}\ 0)$,

burada ε – ayrı-ayrı nöqtələrə bölgüdür;

3) $\bigvee_t T^t \xi = \sigma (\mathrm{mod}\ 0)$,

burada ν – trivial bölgüdür və onun yeganə elementi Ω -dır. K – b. requlyar proseslər halında $t < 0$ olduqda stasionar prosesin evolyusiyasından asılı hadisələr σ – cəbrinin analoqudur. K – b.-yə malik dinamik sistemlər *K – sistemlər* adlanır.

BÖLÜNƏN / DİZYUNKT ÖLÇÜLƏR AİLƏLƏRİ « разделимые семейства мер; dizjoint families of measures » – cüt-cüt sinqulyar ölçülərdən ibarət və bəzi əlavə xassələrə malik ailələrdir. $(X, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza olsun. Əgər

ölçülən çoxluqların elə $\{X_\theta, \theta\in\Theta\}$ ailəsi varsa ki, $\theta=\theta'$ olduqda $\mu_\theta(X-X_{\theta'})\neq 0$ və $\theta\neq\theta'$ olduqda $\mu_\theta(X_{\theta'})=0$ şərtləri $\mathscr{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş μ_θ ölçüləri üçün ödənilsin, onda μ_θ, $\theta\in\Theta$ ölçülər ailəsi *zəif bölünən* (*zəif dizyunkt*) ölçülər ailəsi adlanır.

Əgər elə $\{X_\theta, \theta\in\Theta\}$ ölçülən çoxluqlar ailəsi varsa ki, $\theta\neq\theta'$ olduqda $X_\theta\bigcap X_{\theta'}=\varnothing$ və $\theta=\theta'$ olduqda $\mu_\theta(X-X_{\theta'})=0$ şərtləri ödənilsin, onda $\mathscr{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş $\{\mu_\theta, \theta\in\Theta\}$ ölçülər ailəsi bölünən (dizyunkt) ailə adlanır.

Misal. X – müstəvidə $[0,1]\times[0,1]$ kvadratı, $\mathscr{A}$ – bu kvadratın Borel altçoxluqlarının σ – cəbri, $\Theta=[0,1]\cup[2,3]$ olsun. Əgər $\theta\in[0,1]$ olarsa, μ_θ ölçüsü $0\le x\le 1$, $y=\theta$ parçasında Lebeq ölçüsü olsun, əgər $\theta\in[2,3]$ olarsa, μ_θ ölçüsü $x=\theta-2$, $0\le y\le 1$ parçasında Lebeq ölçüsü olsun. Əgər X_θ – göstərilən parçalardırsa, onda $\{\mu_\theta, \Theta\in[0,1]\cup\cup[2,3]\}$ ölçülər ailəsi zəif bölünən, $\{\mu_\theta, \theta\in[0,1]\}$ ölçülər ailəsi bölünən ailədir (bax, [2]).

[1]-də Martinin nəzəri – çoxluq aksiomunun köməyilə (bu kontinium hipotezindən olduqca zəifdir) isbat olunmuşdur ki, tam separabel metrik fəzada verilmiş Borel ölçülərinin zəif bölünən hər bir kontinual ailəsi B. ö. a.-dir.

X – kontinuum güclü çoxluq olsun, bu çoxluq $\mathfrak{c}$ ilə işarə olunmuşdur. Cüt-cüt sinqulyar ölçülərin X -də elə minimal ailəsi qurulmuşdur ki (bax, [3]), onun gücü $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ -dir. X –də hər bir zəif B. ö. a.-nin gücü $2^{\mathfrak{c}}$ -dən çox deyildir, X -də hər bir B. ö. a.-nin gücü isə $\mathfrak{c}$ -dən çox deyildir. Deməli, X -də elə zəif B. ö. a. vardır ki, o, B. ö. a. deyildir.

Əd.: [1] Зеракидзе З. С., «Сообщ. АН Груз. ССР», 1984, т. 113, № 2, с. 273–75; [2] Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В., Состоятельные оценки параметров случайных процессов, К., 1980; [3] Харазишвили А. Б., Некоторые вопросы функционального анализа и их применения, Тб., 1979.

BÖLÜNƏN STATİSTİKA « разделимая статистика; decomposable statistic » –

$$X_n=\sum_{k=1}^{k_n} f_{nk}(Y_{nk}, Z_{nk}) \qquad (1)$$

kimi ifadə olunan *təsadüfi kəmiyyətdir*, burada Y_{nk} və Z_{nk} – uyğun olaraq, l – ölçülü və m – ölçülü təsadüfi vektorlar, f_{nk}, – $\mathbb{R}^{l+m}$ Evklid fəzasında təyin olunmuş həqiqi Borel funksiyalarıdır (vektor funksiya). Bu halda $T_{nk}=(Y_{nk}, Z_{nk})$, $k=1,\dots,k_n$ vektorlarının birgə paylanması $\mathbf{P}_n$ bəzi asılı olmayan təsadüfi $\theta_{nk}=(\eta_{nk}, \zeta_{nk})$, $k=1,\dots,k_n$ vektorlarının şərti paylanmaları ilə üst-üstə düşür, bu şərtlə ki,

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{k_n}\eta_{nk}=y_n,\quad \zeta_n=\sum_{k=1}^{k_n}\zeta_{nk}=z_n. \qquad (2)$$

Burada fərz olunur ki, η_n təsadüfi vektorunun paylanması $\mathbb{R}^l$ -də Lebeq ölçüsünə görə mütləq kəsilməz paylanmadır, ζ_n təsadüfi vektorunun paylanması isə tamqiymətli koordinatlarlı, maksimal addımı 1-ə bərabər m – ölçülü şəbəkədə topalanmış şəbəkəvari paylanmadır.

Bu termin ilk dəfə (bax, [1]) ən mühüm və öyrənilmiş B. s.-ların sinfi üçün – n sayda asılı olmayan sınaqlarlı və nəticələrinin baş vermə ehtimalları p_{nk}, $0<p_{nk}<1$, $k=1,\dots,k_n$ olan polinomial sxemdə additiv statistikalar sinfi üçün daxil olunmuşdur. Bu sinfə, məs., doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinin, xi – kvadrat kriterisinin, boş qutular kriterisinin statistikaları daxildir. Bu sxem üçün (1)-də Y_{nk} komponenti yoxdur, $m=1$, $Z_{nk}\equiv\nu_{nk}$ k -cı nəticənin baş vermə tezliyidir, $\theta_{nk}=\zeta_{nk}$, $k=1,\dots,k_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması, uyğun olaraq, $n\,p_{nk}$ parametrlərli Puasson paylanmasıdır; (2)-də $\sum_n z_n=n$. Polinomial sxemin simmetrik B. s.-ları mühüm sinif təşkil edir; bu halda (1)-dəki f_{nk} funksiyaları k indeksindən asılı olmur. Bu altsinif $\sum_{r=0}^{n} c_r\,\mu_r$ xətti kombinasiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür, burada

$$\mu_r=\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{I}(\nu_{nk}=r)$$

[$\mathbf{I}(A)$, – A hadisəsinin indikatorudur]. Digər B. s.-lar sinfi $[0,1]$-də müntəzəm paylanma ilə bağlı seçimi intervalların additiv funksiyalarıdır. B. s.-ların müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşmələri və bir sıra misallar [2] – [6]-da şərh olunmuşdur.

Tətbiq üçün ən böyük maraq doğuran hal, $n\to\infty$, $k_n\to\infty$ olduqda B. s.-ların zəif yığılmasının öyrənilməsidir.

X_n B. s.-nın xarakteristik funksiyasının asılı olmayan təsadüfi $(f_{nk}(\theta_{nk}), \theta_{nk})$, $k=1,\dots,k_n$ vektorlarının cəminin birgə xarakteristik funksiyası ilə ifadəsinə əsaslanaraq, geniş şərtlər daxilində belə cəmlər üçün limit teoremlərini istifadə edərək, bu halda, B. s.-nın limit paylanmalarının sinfinin müfəssəl təsviri mərkəzi limit teoremində yığılma sürətinin qiymətləndirilməsindəki suallar, $\mathbf{P}_n$ -ə kontiqual alternativlər halında B. s.-nın nə şəkildə ifadə olunması, həmçinin B. s.-ya əsaslanmış statistik kriterilərin asimptotik effektivliyi də daxil olmaqla alınmışdır.

Əd.: [1] Медведев Ю. И., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 5, с. 987–89; [2] Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 22, М., 1984; [3] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Ронжин А. Ф., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1986, т. 177; [4] Кудлаев Э. М., в кн.: «Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика», т. 26, М., 1988; [5] Кудлаев Э. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1985, т. 30, № 1, с. 170–74; [6] Holst L., «Ann. Probab.», 1981, v. 9, № 5, p. 818–30.

BÖLÜNƏNLİK ŞƏRTİ « разделимости условие; separability condition » – bax, *Ehtimal* kvant fizikasında.

BÖLÜNMƏ PRİNSİPİ « разделения принцип; separation principle » – *təsadüfi proseslərin* idarəetmə məsələlərinə aid prinsipdir, bu məsələlərdə idarəetmə müşahidələrdən alınan idarəolunan statistikanın seçimi ilə həyata keçirilir.

Fərz olunur ki, $w = (w_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinə nəzərən İto differensialı

$$dY_t = (a(t)\, Y_t + c(t)\, u_t)\, dt + B(t)\, dw_t$$

ilə $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesinin idarəetmə məsələsində $u = (u_t)_{t \geq 0}$ idarəetmə prosesi X_s, $0 \leq s \leq t$ təsadüfi kəmiyyətləri ilə doğurulmuş $\mathscr{F}_t^X$ σ – cəbrləri axını ($\mathscr{F}_t^X$) ilə uzlaşdırılmışdır, burada $X = (X_t)_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesinin $\tilde{w} = (\tilde{w}_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinə nəzərən İto differensialı –

$$dX_t = A(t) Y_t\, dt + B(t)\, d\tilde{w}_t$$

vardır, $\tilde{w}$ prosesi w -dən asılı deyildir və

$$V_t(u) = M\left\{ l(Y_T) + \int_0^T L(t, Y_t, u_t)\, dt \right\}$$

funksionalının minimizasiyası məqsədilə seçilir.

Əgər $(X_0,\ Y_0)$ Qauss vektoru olarsa, aşağıdakı b ö l ü n m ə p r i n s i p i doğrudur:

$$V_T(u) =$$

$$= \mathbf{M}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi P(T)}} \int_{-\infty}^{\infty} l(y)\, \exp\left(-\frac{(y - \pi_T(Y))^2}{2P(T)} \right) dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi P(T)}} \int_{-\infty}^{\infty} L(t,\ y,\ u_t)\, \exp\left(-\frac{(y - \pi_T(Y))^2}{2P(T)} \right) dy\, dt \right\},$$

burada $(\pi_t(Y),\ P(t))_{t \geq 0}$ prosesləri aşağıdakı tənliklər sistemi ilə təyin olunur:

$$d\pi_i(Y) = (a(t)\, \pi_t(Y) + c(t)\, u_t)\, dt + \frac{A(t)P(t)}{B(t)}\, d\tilde{w}_t,$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = 2a(t)P(t) + b^2(t) - \left(\frac{A(t)P(t)}{B(t)} \right)^2,$$

$\overline{w} = (\overline{w}_t)_{t \geq 0}$ yeniləşdirici Viner prosesidir və

$$\overline{w}_t = \int_0^t \frac{dX_s - A(s)\, \pi_s(Y)\, ds}{B(s)}\ ;$$

bu proseslə bağlı olaraq, tam sürətdə məlum olmayan verilənlər üzrə Y prosesinin idarəetmə məsələsi tam sürətdə məlum olan verilənlərlə $\pi(Y) = (\pi_t(Y))_{t \geq 0}$ prosesinin X_s, $0 \leq s \leq t$ müşahidələri üzrə Y_t -nin kvadratik orta mənada optimal Y_t statistik qiyməti ilə idarəetmə məsələsinə gətirilir.

Əd.: [1] W o n h a m W. M., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 2, p. 312–26.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU « больших чисел закон; law of large number » – olduqca ümumi bəzi şərtlərlə təsadüfi faktorların birgə təsirini təsadüfdən sanki asılı olmayan bir nəticəyə gətirən ümumi prinsipdir. $\{\xi_k,\ k \geq 1\}$ – sonlu riyazi gözləmələri olan ($\mathbf{M}\left|\xi_k\right| < +\infty$) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun.

$$\frac{1}{n} \sum \xi_k - \frac{1}{n} \sum \mathbf{M}\xi_k$$

fərqinin ehtimala görə sıfra yığılmasını ifadə edən teoremlər B. ə. q. adlanır. B. ə. q. adlanan limit teoremlərinin ümumi ideyası riyazi formada 1933-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif olunmuşdur (bax, [6], səh. 99 – 100). Sınaqlar sayının kifayət qədər böyük qiymətlərində təsadüfi hadisənin baş vermə tezliyinin onun ehtimalı ilə yaxınlaşması qeyd olunan prinsipin təsirinə ilk misaldır.

17-ci əsrin sonu 18-ci əsrin əvvəllərində Ya. Bernulli [1]-də isbat etmişdir ki, n sayda asılı olmayan sınaqlardan hər birində $0 < p < 1$ şərtini ödəyən p ehtimalı ilə baş verən A hadisəsinin tezliyi ν_n ilə p arasındakı fərq $n \to \infty$ olduqda ehtimala görə sıfra yığılır, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\, |\nu_n - p| > \varepsilon\} \to 0\,, \qquad (1)$$

burada $\nu_n = \frac{1}{n} \sum \xi_k$ – ilk n sınaqda A hadisəsinin tezliyi, ξ_k, $k = 1, 2, ...,$ – k -cı sınaqda A hadisəsinin baş verib-verməməsindən asılı olaraq, uyğun olaraq, 1 və ya 0 qiymətlərini p və $1 - p$ ehtimalları ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Bernulli teoremi adı ilə məlum olan bu teorem sonradan S. Puasson tərəfindən, A hadisəsinin ehtimalının baş verdiyi sınağın nömrəsindən asılı ola bilən asılı olmayan sınaqlar ardıcıllığı halı üçün isbat olunmuşdur (bax, [2]). p_k, – A hadisəsinin k -cı sınaqda baş vermə ehtimalı, $k = 1, 2, 3, ...$ və $\overline{p} = (p_1 + p_2 + ... + p_n)/n$ olsun. Puasson teoremində hökm olunur ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\, |\nu_n - \overline{p}| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (2)$$

münasibəti ödənilir. Bu teoremin ilk ciddi isbatını Puasson isbat metodundan tamamilə fərqli metodla, bəzi ekstremal mülahizələrə əsaslanaraq P. L. Çebışev (1846) vermişdir; S. Puasson (2)-ni qeyd olunan ehtimalın təqribi düsturundan – Qauss qanununa əsaslanan və hələ o vaxtlar ciddi əsaslandırılmamış düsturdan istifadə edərək çıxarmışdır. S. Puasson Bernulli teoreminin ümumiləşməsi olan öz teoremini «böyük ədədlər qanunu» adlandıraraq, «B. ə. q.» terminini ilk dəfə istifadə etmişdir.

Bernulli və Puasson teoremlərinin sonrakı təbii ümumiləşmələri alınmışdır: Bernulli halında $\mathbf{M}\nu_n$ ($\mathbf{M}\xi_i$ -lərin ədədi ortası ilə üstüstə düşən) p -yə, Puasson halında $\overline{p}$ -yə bərabərdir. Başqa sözlə, hər iki halda ξ_k təsadüfi kəmiyyətinin ədədi ortasının bu təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələrinin ədədi ortasından yayınmasına (fərqinə) baxılır.

P. L. Çebışevin «Orta kəmiyyətlər haqqında» əsərində (1867) isbat olunmuşdur ki, asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ təsadüfi

kəmiyyətləri üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $n \to \infty$ şərtlərində olduqca ümumi fərziyyələrlə

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\xi_k \right| > \varepsilon \right\} \to 0 \qquad (3)$$

münasibəti doğrudur. P. L. Çebışev $\mathbf{M}\xi_k^2$ riyazi gözləmələrinin eyni bir sabitlə məhdud olduğunu fərz etmişdi, lakin onun isbatından aydın olur ki, ξ_k -nın dispersiyası $\mathbf{D}\xi_k = \mathbf{M}\xi_k^2 - (\mathbf{M}\xi_k)^2$ – nın məhdud olmasının və ya $n \to \infty$ olduqda $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k = o(n^2)$ olması kifayətdir. Beləliklə, P. L. Çebışev Bernulli teoreminin geniş ümumiləşdirilməsinin mümkünlüyünü göstərmişdir. A. A. Markov ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər (yəni asılı olan və ya asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər) ardıcıllığı üçün B. ə. q.-nu daha da ümumi halda isbat etmişdir (bax, [3]): ixtiyari $\{\xi_k,\ k \geq 1\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\frac{1}{n^2}\,\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to 0$$

şərti ödənilərsə, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\xi_k \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur. O təklif etmişdir ki, Bernulli teoreminin ümumiləşmələrinin hamısı (o cümlədən, [3]) B. ə. q. adlandırılsın.

B. ə. q.-nun isbatı üçün Çebışev metodu riyazi gözləmələrin ümumi xassələrinin dəqiq təyin edilməsi və *Çebışev bərabərsizliyinin* tətbiqinə əsaslanır [Çebışev bərabərsizliyinin tətbiqindən (3) ehtimalı üçün

$$n^{-2}\,\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k$$

sərhəd qiyməti alınır; bu sərhədi müəyyən məhdudiyyətlərlə daha da dəqiqləşdirmək olur; bax, *Bernşteyn bərabərsizliyi*]. B. ə. q.-nun digər sonrakı isbat formaları bu və ya digər dərəcədə Çebışev metodu əsasında alınmışdır. A. A. Markov ξ_k təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyalarının olmadığı halı araşdırmışdır. Bu halda ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri deyil, bu təsadüfi kəmiyyətlərdən alınmış «kəsik» təsadüfi kəmiyyətlər: $\xi'_{n,k}$ kəmiyyətləri götürülür; bu «kəsik» təsadüfi kəmiyyətlər isə

$$\xi'_{n,k} = \begin{cases} \xi_k, & \text{əgər } \left|\xi_k - \mathbf{M}\xi_k\right| \leq L_n \text{ olarsa}, \\ 0, & \text{əgər } \left|\xi_k - \mathbf{M}\xi_k\right| > L_n \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur, burada L_n – müəyyən sabitlərdir. Məs., o isbat etmişdir ki, bəzi $\delta > 0$, $L > 0$ sabitləri və bütün n -lər üçün əgər $\mathbf{M}\left|\xi_n - \mathbf{M}\xi_n\right|^{1+\delta} < L$ şərti ödənilərsə, onda (3) münasibəti doğrudur.

ξ_k – eyni qanunla paylanmış, sonlu riyazi gözləmələri olan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda B. ə. q. (3) ödənilir, bu hal A. Ya. Xinçin tərəfindən (1929) isbat olunmuşdur və Xinçin teoremi adlanır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün B. ə. q.-nun sonuncu variantını müəyyən dərəcədə ifadə etmək mümkündür. Buna görə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının limit üzrə sabitlik anlayışı ilə bağlı daha ümumi nöqteyi – nəzərdən yanaşma məqsədəuyğundur. Əgər $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və elə $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ sabitlər ardıcıllığı vardırsa ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\,|\eta_n - C_n| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (4)$$

münasibəti ödənilsin (yəni $\{\eta_n - C_n\}$ ardıcıllığı ehtimala görə sıfra yığılsın; əgər (4) hər hansı bir C_n üçün ödənilirsə, onda bu münasibət $C'_n = m\eta_n$ üçün də ödənilir. $m\eta$, – η təsadüfi kəmiyyətinin medianıdır), onda $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...$ limit üzrə sabit təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

Daha sonra, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı əvəzinə

$$\begin{array}{l} \xi_{1,1}, ..., \xi_{1,k_1}, \\ \xi_{2,1}, ..., \xi_{2,k_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n,1}, ..., \xi_{n,k_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

seriyalar sxemi adlanan təsadüfi kəmiyyətləri götürmək olar (ξ_{n,k_n} -in birinci indeksi seriyanın nömrəsi, ikinci indeksi isə seriya daxilində təsadüfi kəmiyyətin nömrəsidir). Hər bir ayrı seriyadakı təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığını $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, ..., $\xi_{n,k} = \xi_k / n$ qəbul edərək seriyalar sxemi kimi göstərmək olar.

$\eta_n = \xi_{n,1} + ... + \xi_{n,k_n}$ olsun. Onda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminə B. ə. q.-nun tətbiqi məsələsi ümumi formada belə ifadə olunur: hansı şərtlər daxilində η_n cəmləri limit üzrə sabitdir? Bu suala A. N. Kolmoqorov cavab vermişdir (1928). Ümumilik baxımından $\xi_{n,k}$ -ların medianlarının sıfra bərabər olduğu fərz olunur. $\widetilde{\xi}_{n,k}$, –

$$\widetilde{\xi}_{n,\,k} = \begin{cases} \xi_{n,k} & \text{əgər } \left|\xi_{n,k}\right| \leq 1 \text{ olarsa}, \\ 0, & \text{əgər } \left|\xi_{n,k}\right| > 1 \text{ olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda $n \to \infty$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P}\{\,|\xi_{n,\,k}| > 1\} \to 0$$

və $n \to \infty$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{M}\,\widetilde{\xi}_{n,\,k}^{\,2} \to 0$$

şərtlərinin eyni zamanda ödənilməsi η_n cəmlərinin limit üzrə sabitliyi üçün zəruri və kafidir. C_n əvəzinə $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{M}\widetilde{\xi}_{n,k}$ götürmək olar. Bu şərtlərin kafiliyi Çebışev metodu ilə asanlıqla isbat olunur. Əgər $\mathbf{M}\xi_{n,k}$ riyazi gözləmələri vardırsa, onda elə əlavə şərtlər göstərmək olur ki, bu şərtlər əsasında $C_n = \mathbf{M}\eta_n$ götürmək olar və bu da B. ə. q.-nun (3) şəklində klassik ifadəsi üçün zəruri və kafi şərtlərə gətirir. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\{\xi_i\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün isə bu şərtlər Xinçinin qeyd olunmuş teoreminə uyğun olaraq riyazi gözləmənin varlığı şərtinə gətirir. Lakin bu halda η_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortalarının limit üzrə sabitliyi üçün $n \to \infty$ olduqda

$$n\mathbf{P}\{|\xi_1| > n\} \to 0 \qquad (5)$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

(5) şərti ödənilməyən hallara aid misallar vardır. Məs., əgər ξ_n təsadüfi kəmiyyəti paylanmasının sıxlıq funksiyası $1/\pi(1+x^2)$ olan Koşi paylanması ilə paylanmışdırsa (belə təsadüfi kəmiyyətin uyğun xarakteristik funksiyası $e^{-|t|}$-yə bərabərdir), (5) şərti ödənilmir. Bu halda $\eta_n = \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ ədədi ortalarının uyğun xarakteristik funksiyaları $e^{-n|t/n|} = e^{-|t|}$-yə bərabərdir və deməli, n -in ixtiyari qiymətində η_n və ayrıca götürülmüş ixtiyari ξ_i toplananının xarakteristik funksiyası eynidir və o, $e^{-|t|}$-yə bərabərdir və deməli, η_n -in və hər bir toplananın paylanması da eynidir.

B. ə. q. ödənilməyən mühüm hallara aid misal kimi təsadüfi dolaşmalarda qayıdış müddəti ilə bağlı məsələləri qeyd etmək olar. Məs., simmetrik *Bernulli dolaşmasında* başlanğıc ana n -ci qayıdış müddəti τ_n təsadüfi kəmiyyəti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmidir: $\tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, belə ki, ξ_1 – birinci qayıdışa qədər keçən müddət, ξ_2 – birinci və ikinci qayıdışlar arasındakı müddətdir və s. τ_n/n^2 təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, $n \to \infty$ olduqda paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} e^{-1/2x} x^{-3/2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

olan cırlaşmayan limit qanunu ilə paylanır. Beləliklə, bu halda ξ_i təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortasının paylanması, yəni τ_n/n (kobud ifadə ilə) n tərtib uzunluqlu parçada yerləşir [lakin qeyd olunmalıdır ki, əgər B. ə. q. tətbiq oluna bilinərsə, τ_n/n -in paylanması $o(1)$ uzunluqlu parçalarda topalanır].

B. ə. q.-nun asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəminə tətbiqi (istər klassik formada, istərsə də daha ümumi hallarda) ilk növbədə onunla bağlıdır ki, ξ_i və ξ_j təsadüfi kəmiyyətlərinin indeksləri arasındakı $|i-j|$ fərqi artdıqca, bu kəmiyyətlər arasında asılılıq olduqca azalır. Markov zənciri yaradan asılı təsadüfi kəmiyyətlərlə bağlı uyğun teoremlər ilk dəfə A. A. Markov tərəfindən (1907) isbat olunmuşdur. $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ sonlu sayda qiymətlər alan, bircins Markov zənciri yaradan və bir addıma bütün keçid ehtimalları müsbət olan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, ξ_j və ξ_i arasında asılılığın $(j-i) \to \infty$ olduqda olduqca azalması ξ_i -nin qeyd olunmuş qiymətində ξ_j -nin şərti paylanmasının $n \to \infty$ olduqda ξ_i -nin seçilmiş qiymətindən asılı olmayan limitlə ifadə olunması ilə bağlıdır (e r q o d i k M a r k o v t e o r e m i). Bu hökmdən nəticə kimi B. ə. q. alınır: əvvəlcə $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right)^2 \to 0$$

münasibətinin ödənilib-ödənilməməsi təyin olunur, burada $a = \lim_{k\to\infty} \mathbf{M}\xi_k$; əgər bu münasibət ödənilərsə, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

olduğu alınır. B. ə. q.-nun tətbiq edilməsi üçün daha ümumi hal S. N. Bernşteynin təklif etdiyi aşağıdakı şərtlərlə ifadə olunur: L – hər hansı sabit, R – korrelyasiya əmsalı, $\varphi(n)$, – $n \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşan funksiyadırsa və əgər $\mathbf{D}\xi_j < L$, $R(\xi_i, \xi_j) \le \varphi(|i-j|)$ şərtləri ödənilərsə, onda $\{\xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinə (3) münasibətilə ifadə olunan B. ə. q. tətbiq olunur. Əgər $\{\xi_n\}$ geniş mənada stasionar təsadüfi ardıcıllıqdırsa, onda korrelyasiya əmsalı üzərinə qoyulan şərti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_j = 0$$

zəif şərtilə əvəz etmək olar, burada $R_j = R(\xi_i, \xi_{i+j})$.

Əvvəlki nəticələri müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirmək mümkündür. Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda hər yerdə «ehtimala görə» yığılmaya baxılırdı. Digər tip yığılmalara da baxılır: vahid ehtimalla, kvadratik orta mənada və s. (əslinə qaldıqda yuxarıda göstərilən şərtlərin çoxu kvadratik orta yığılmanı təmin edir və bu yığılmadan da ehtimala görə yığılma alınır). Vahid ehtimalla yığılma halı mühüm olduğundan bu hal xüsusi bir adla «böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu» adlandırılmışdır (bax, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu*).

Daha sonra bir çox teoremlər müvafiq dəyişikliklərlə ixtiyari d – ölçülü Evklid fəzasından, bəzi Banax fəzalarından, Hilbert fəzasından qiymətləri olan təsadüfi vektorlar üçün də ifadə olunmuşdur. Məs., əgər $\{\xi_n\}$ – qiymətləri separabel Banax fəzasından olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa və əgər $\mathbf{M}\|\xi_n\|$ ($\|x\|$, – x -in normasıdır) riyazi gözləmə olarsa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün və $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{\left\|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \mathbf{M}\xi_1\right\| > \varepsilon\right\} \to 0$$

münasibəti doğrudur.

Ən ümumi formada baxılan B. ə. q. *erqodik teoremlərlə* sıx əlaqədardır. Aydındır ki, bu halda bir çox teoremlər $\frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)dt$ şəklində orta qiymətlərilə ifadə olunur, burada $\zeta(t)$ – kəsilməz parametrdən asılı təsadüfi prosesdir (bax, məs., [11]).

Qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi əvəzinə onların simmetrik funksiyalarına da baxmaq olar. Bu hal A. Ya. Xinçin tərəfindən statistik mexanikanın bəzi nəticələrinin əsaslandırılması ilə bağlı araşdırılmışdır (1951–55, bax, [10]).

A. Ya. Xinçinin aldığı nəticə aşağıdakı xüsusi bir misalla izah olunur. $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n}$, –

$$\xi_{n,1}^2 + \ldots + \xi_{n,n}^2 = n\mu, \quad \mu > 0$$

kürəsinin səthi üzərində müntəzəm paylanmış nöqtənin koordinatları olsun. Onda $f(\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,n})$ simmetrik funksiyalarının geniş bir sinfi üçün B. ə. q. ödənilir; bu isə o mənada anlaşılır ki, bu funksiyaların qiymətləri $n \to \infty$ olduqda limit üzrə sabit kəmiyyətlər olur [R. Levi (1925) qeyd etmişdir ki, olduqca çoxlu sayda dəyişənlərin kifayət qədər requlyar funksiyaları təyin olunduqları oblastın böyük hissəsində, demək olar ki, sabitdir].

Əd.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер. – Бернулли Я., О законе больших чисел, M., 1986); [2] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matiere civile, précedées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [3] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; [4] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [5] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946; [6] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [7] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [8] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер., с англ., М., 1956; [9] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [10] Хинчин А. Я., Симметрические функции на многомерных поверхностях, в кн.: Памяти А. А. Андронова, М., 1955, с. 541–74; [11] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [12] Uspensky J. V., Introduction to mathematical probability, N. Y. – L., 1937.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU Banax fəzalarında **« больших чисел закон** в банаховых пространствах; **law of large numbers** in Banach spaces **»** – Banax fəzasının *təsadüfi elementlərinin* normalanmış və mərkəzlənmiş cəmlərinin bu fəzanın təsadüfi olmayan elementlərinə müvafiq surətdə yığılma faktını əks etdirən ümumi prinsipdir. Topoloji nöqteyi – nəzərdən yığılma, bır qayda olaraq, Banax fəzasının təbii norma mənasında anlaşılır, lakin bununla belə sonsuzölçülü Banax fəzalarında daha zəif topologiyalarda yığılma istisna edilmir. Nəzəri – ehtimali baxımdan ehtimala görə yığılmaya, müvafiq tərtib orta mənada yığılmaya və 1 ehtimalla yığılmaya baxılır. Təsadüfi kəmiyyətlər üçün B. ə. q.-na oxşar, 1 ehtimalla yığılma halı Banax fəzalarında böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu adı ilə xüsusilə seçilir. Banax fəzalarında B. ə. q.-nun müxtəlif formalarının ödənilməsi şərtlərini təyin edən teoremlər – Banax fəzalarında təsadüfi elementlər cəmlərinin asimptotikasını öyrənən mühüm limit teoremləridir.

B. ə. q. Banax fəzalarında və daha ümumi xətti normalanmış fəzalarda təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – parametrik statistikası məsələlərində və təsadüfi proseslərin statistikasında tətbiq olunur. Banax fəzalarında B. ə. q. ilə mahiyyətcə bağlı ilk teoremlərdən biri empirik paylanma funksiyaları haqqında Qlivenko – Kantelli teoremidir (bax, [1]). Bu teoremə görə, əgər ξ_k, $k \geq 1$ – ümumi paylanma funksiyası $F(x)$ olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdırsa, onda

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_n(x) - F(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

münasibəti 1 ehtimalla ödənilir, burada

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}\{\xi_k < x\}$$

– empirik paylanma funksiyası, $\mathbf{I}\{\xi_k < x\}$, – $\{\xi_k < x\}$ hadisəsinin indikatorudur. Baxılan halda, indikator funksiyalarına ($\mathbf{I}\{\xi_k < x\}$, $-\infty < x < \infty$) məhdud həqiqi funksiyalar fəzasında təsadüfi elementlər kimi baxmaq olar ki, bu funksiyaların bütün ədəd oxunda müntəzəm yığılma norması ilə verildiyi fərz olunur.

Banax fəzalarında B. ə. q.-nun müxtəlif variantlarının sistematik surətdə öyrənilməsi klassik teoremlərin bir sıra analoqlarının təyin olunması ilə nəticələnmişdir. Kolmoqorov teoreminin Banax fəzalarında ümumiləşməsi olan Murye teoremi (bax, [2]) belələrindəndir. Doğrudan da, əgər $\{\xi_k, k \geq 1\}$ – separabel $(B, \|\cdot\|)$ Banax fəzasında eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi elementlər ardıcıllığıdırsa, onda $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ ardıcıllığı bu fəzanın normasında 1 ehtimalla, yalnız və yalnız, $\mathbf{M}\|\xi_1\| < \infty$ olduğu halda yığılır. Bu halda

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \mathbf{M}\xi_1;$$

$\mathbf{M}\xi_1$, – ξ_1 təsadüfi elementinin riyazi gözləməsidir.

Skalyar normalanmalarla Banax fəzalarında B. ə. q.-na formal olaraq, təsadüfi kəmiyyətlər üçün B. ə. q.-nun bilavasitə ümumiləşməsi kimi baxmaq olar. Lakin ümumi Banax fəzalarında və təsadüfi kəmiyyətlərin (toplananların) müxtəlif paylanmalı olduğu halda B. ə. q.-nun bu və ya digər formaları fəzanın topoloji və həndəsi strukturu ilə sıx bağlıdır (bax, [3] – [5]).

Operator normalanmalarla Banax fəzalarında da asılı olmayan təsadüfi elementlərin cəmi üçün də B. ə. q.-nun müxtəlif variantları vardır.

Əd.: [1] Glivenko V., «Atti Accad. naz. Lincei.», 1928, v. 8, p. 673–76; [2] Mourier E., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1953, t. 13, p. 161–244; [3] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [4] Hoffman – Jørgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.» 1976, v. 4, p. 587–99; [5] Taylor R. L., «Lect. Notes in Math.», 1978, № 672; [6] Булдыгин В. В., Солнцев С. А., Функциальные методы в задачах Суммирования случайных величин, К., 1989.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU qeyri–stasionar təsadüfi proseslər üçün **« закон больших чисел** для нестационарных случайных процессов; **law of large numbers** for non-stationary random processes **»** –

1) qeyri – stasionar $\zeta(t)$ *təsadüfi proseslərinin* geniş sinfi üçün

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T \zeta(t)\,dt = \hat{\zeta}, \qquad (1)$$

və ya diskret t zamanlı təsadüfi proseslər üçün

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\zeta(t)=\hat{\zeta} \qquad (1a)$$

limitlərinin varlığı haqqında müddəadır, burada limit ya kvadratik orta mənada (deməli, həmçinin ehtimala görə) və ya 1 ehtimalla yığılma mənada anlaşılır [sonuncu halda limitin varlığı haqqında (1) və ya (1a) münasibətlərilə ifadə olunan müddəa qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu adlanır]. Əgər t kəsilməz zaman, $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2<\infty$, $0<t<\infty$ və $\mathbf{M}\,\zeta(t)\,\zeta(s)=B(t,s)$ isə t, s-in kəsilməz funksiyası olarsa, məs., hər hansı $C<\infty$ üçün və bütün $T>0,\ S>0$ şərtini ödəyən T və S-lər üçün

$$\lim_{\substack{T\to\infty,\\ S\to\infty}}\frac{1}{TS}\int_0^T\int_0^S B(t,s)\,dt\,ds$$

limiti varsa və

$$\frac{1}{TS}\int_0^T\int_0^S\left|B(t,s)\right|dt\,ds<C$$

şərti ödənilərsə, qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün B. ə. q. ödənilir (bax, [1], [2]). Qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün B. ə. q. ixtiyari harmoniklənən təsadüfi proseslər üçün də ödənilir, belə ki, yalnız Loev mənada harmoniklənən $\zeta(t)$ prosesləri üçün deyil, Rozanov mənada harmoniklənən (və ya zəif harmoniklənən) proseslərin geniş sinfi üçün də ödənilir; bu halda $\hat{\zeta}=Z(+0)-Z(-0)$ olur, burada $Z(\lambda)$, – $\zeta(t)$ prosesinin ifadəsinə Furye – Stiltyes inteqralı kimi daxil olan təsadüfi funksiyadır, burada (1) və (1a)-nın sol tərəfindəki $0\le t\le T$ intervalı üzrə ortalanmanı ixtiyari $S\le t\le T$ intervalı üzrə, $T-S\to\infty$ şərti ödənilməklə əvəz etmək olar (bax, [3], [4]). Qeyri – stasionar proseslər üçün B. ə. q. ortalanmış korrelyasion funksiyaya malik olan bütün $\zeta(t)$ təsadüfi prosesləri üçün də doğrudur (bax, [5], [6]).

2) Məs., kəsilməz t halında, bu teorem geniş şərtlərlə

$$\hat{\zeta}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\mathbf{M}\zeta(t)\,dt \qquad (2)$$

münasibətinin doğruluğu haqqında teoremdir, belə ki, $\zeta(t)$-nin qiymətlərinin uzun zaman intervalı üzrə orta qiyməti – $\mathbf{M}\zeta(t)$ orta qiymətinin $0\le t\le\infty$ yarımoxu üzrə ortalanmış olduqca dəqiq qiymətidir [(2)-nin sağ tərəfindəki limitin varlığı həmişə fərz olunur]. $\hat{\zeta}=[\zeta(t)-\mathbf{M}\zeta(t)]$ olduğundan hesab etmək olar ki, $\mathbf{M}\zeta(t)=0$ və hansı şərtlərdə $\hat{\zeta}=0$ olacağını araşdırmaq lazımdır. Belə şərtlərdən ən sadəsi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B(t,s)\,dt\,ds=0$$

şərtidir (bax, [7]). Əgər $\zeta(t)$ harmoniklənən prosesdirsə, $\hat{\zeta}=0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğru olur ki, $\lambda=0$, $\omega=0$ nöqtəsinin prosesin spektral ölçüsü $F(\lambda,\omega)$-nın qiymətinə təsiri sıfra bərabər olsun (bax, [3], [4]); əgər $\zeta(t)$ – ortalanmış spektral funksiyası $F(x)$ olan prosesdirsə, $\hat{\zeta}=0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $F(\lambda)$ funksiyası $\lambda=0$ nöqtəsində kəsilməz olsun (bax, [5], [6]). Xüsusi halda, stasionar $\zeta(t)$ prosesi üçün bütün bu şərtlər stasionar təsadüfi proseslər üçün *böyük ədədlər qanununun* doğruluğu şərtlərinə çevrilir.

Əd.: [1] Kawata T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, № 6, p. 276–302; [2] Kawata T., в сб.: Keio mathem. seminar reports, № 1, Yokohama, 1973, p. 1–23; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 496–99; [4] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [5] Nagabhushanam K., Bhagavan C. S. K., «Sankhya», Ser. A., 1969, v. 31, p. 421–424; [6] Rao M. M., в сб.: Developments in statistics, v. 1, N. Y., 1978, p. 171–225; [7] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969, с. 99–103.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU Markov prosesləri üçün **« закон больших чисел** для марковских процессов; **law of large numbers** for Markov processes **»** – Markov zəncirinin bir-birindən uzaq zaman anlarında aldığı qiymətlərin asılılıq dərəcəsinə qoyulan əlavə məhdudiyyətlərlə doğru olan müddəadır. $\omega_1,\omega_2,\ldots$ – Markov zənciri, $\omega_i,\ i=1,2,\ldots$ – ölçülən $(\Omega_i,\mathscr{A}_i)$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

$(\Omega_i,\mathscr{A}_i)=(\Omega,\mathscr{A})$ və $\omega_1,\omega_2,\ldots$ – bircins Markov zənciri olsun. Fərz olunur ki: 1) $0<\varphi(\Omega)<\infty$ şərtini ödəyən φ ölçüsü və elə $\nu\ge1$ tam ədədi və $\varepsilon>0$ ədədi vardır ki, $\varphi(A)<\varepsilon$ olduqda, ν addıma keçid funksiyası üçün $p^{\nu}(\omega,A)<1-\varepsilon$ şərti ödənilir və 2) Ω-da yeganə erqodik vəziyyətlər sinfi vardır. π, – $\mathscr{A}$-da stasionar ehtimal ölçüsü, $X(\omega)$, – Ω-da ölçülən funksiya olsun, bu şərtlə ki,

$$\int_\Omega\left|X\right|(\omega)\,\pi(d\omega)<\infty.$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(\omega_k)=\int_\Omega X(\omega)\,\pi(d\omega)$$

sanki yəqin ödənilir.

1) şərti Döblin şərti adlandırılan şərtin ümumiləşmiş formasıdır; əgər Ω çoxluğu sonlu olarsa, onda bu şərt ödənilir.

Məhdudiyyətlərin digər təbii tipi – «müntəzəm qarışmanın göstəricilərinə» qoyulan elə məhdudiyyətlərdir ki, bunlar Markov zənciri halında aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\varphi_n=\sup_{1\le k<\infty}\ \sup_{A\in\mathscr{A}_{k+n},\,B\in\mathscr{A}_n,\,\mathbf{P}(B)>0}\left|\mathbf{P}(A\,|\,B)-\mathbf{P}(A)\right|.$$

X_k, – Ω_k-da ölçülən funksiya, $\xi_k=X_k(\omega_k)$ olsun. Aşağıdakı müddəa [3]-dəki nəticələrin xüsusi halıdır. Əgər $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^{1/2}<\infty$ və $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{D}\xi_k/k^2<\infty$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\mathbf{M}\xi_k)=0 \qquad (*)$$

sanki yəqin ödənilir; əgər

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{1/2}n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\xi_k=0$$

olarsa, (*) münasibətində ehtimala görə yığılma ödənilir. Əgər $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)^{1/2}<\infty$ olarsa, $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^{1/2}<\infty$ şərti ödənilir, α_k – zəncirin erqodiklik əmsalıdır (bax, *Mərkəzi limit teoremi* Markov prosesləri üçün).

Əgər

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n^{-1}n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\xi_k=0$$

münasibəti ödənilərsə, (*)-da ehtimala görə yığılma ödənilir (bax, [2]).

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [2] Statulevicius V., «Proc. 2-nd Japan – USSR Sympos. on Probab. Theory», 1972, v. 1, p. 138–52; [3] Утев С. А., «Тр. Ин.-та матем. СО АН СССР», 1984, т. 3, с. 50–77.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU stasionar təsadüfi proseslər üçün **« больших чисел закон** для стационарных случайных процессов; **law of large numbers** for stationary random processes **»** – 1) ixtiyari, geniş mənada *stasionar* $\zeta(t)$ *təsadüfi posesi* üçün

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\int_{S}^{T}\zeta(t)\,dt=\hat{\zeta} \qquad (1)$$

və ya

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\sum_{t=S}^{T-1}\zeta(t)=\hat{\zeta} \qquad (1a)$$

limitlərinin həmişə varlığı haqqında müddəadır. [(1) düsturu kəsilməz zamanlı proseslər üçün, (1a) düsturu isə diskret zamanlı proseslər üçündür], burada limit kvadratik orta (və ya ehtimala görə) yığılma mənada anlaşılır. Stasionar təsadüfi proseslər üçün B. ə. q.-nun bu forması A. Ya. Xinçinə məxsusdur (bax, [1], [2]). $\tilde{\zeta}$ təsadüfi kəmiyyəti $\zeta(t)$ prosesinin $\lambda=0$ nöqtəsində spektral ayrılışına daxil olan $Z(\lambda)$ təsadüfi funksiyasının sıçrayışı ilə üst-üstə düşür (bax, məs., [3]).

2) $\hat{\zeta}=\mathbf{M}\zeta(t)$ bərabərliyi, yalnız və yalnız,

$$b(\tau)=\mathbf{M}\,[\zeta(t+\tau)-\mathbf{M}\,\zeta(t+\tau)]\,[\zeta(t)-\mathbf{M}\,\zeta(t)]$$

funksiyası ya

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}b(\tau)d\tau=0 \qquad (2)$$

şərtini və ya uyğun olaraq,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{\tau=0}^{T-1}b(\tau)=0 \qquad (2a)$$

şərtini ödədiyi halda doğrudur, müddəasıdır [yəni $\hat{\zeta}=\mathbf{M}\zeta(t)$ bərabərliyi haqqında müddəa onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ prosesinin orta qiymətini ən böyük dəqiqliklə təyin etmək mümkündür, buna görə bu prosesin müşahidə olunmuş qiymətlərinin olduqca böyük interval üzrə orta qiymətini götürmək lazımdır]. Stasionar proseslər üçün B. ə. q.-nun bu forması Ye. Ye. Slutskiyə məxsusdur, əksər hallarda Slutski erqodik teoremi və ya Slutski teoremi adlanır ([4], [5]); spektral terminlərdə (2) və ya (2a) şərtlərini $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyasının $\lambda=0$ nöqtəsində kəsilməzlik şərti kimi ifadə etmək olar (bax, [3]).

Stasionar proseslər üçün B. ə. q.-nun yuxarıdakı ifadələri $\mathbb{R}^k$ və ya $\mathbb{Z}^k$ bircins təsadüfi meydanları halında ixtiyari tam k qiyməti üçün ümumiləşdirilir.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Матем. сб.», 1933, т. 40, с. 124–28; [2] Khintchine A., «Math. Ann.», 1934, Bd 109, S. 604–15; [3] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [4] Slutski E. E., в сб.: Actualités Sci. et Industr., № 738, P., 1938, p. 33–55; [5] Слуцкий Е. Е., в его кн.: Избранные труды, M., 1960.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU təsadüfi çoxluqlar üçün **« больших чисел закон** для случайных множеств; **law of large numbers** for random sets **»** – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU təsadüfi meydanlar üçün **« больших чисел закон** для случайных полей; **law of large numbers** for random fields **»** – ortalanma aparılan oblastı genişləndirdikdə *təsadüfi meydanın* orta qiymətlərinin yığılması haqqında müddəadır. Orta qiymətlərin yığılması anlayışı müxtəlif mənalarda: ehtimala görə, kvadratik orta mənada, 1 ehtimalla yığılma mənada (bu halda böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun tətqiq olunması nəzərdə tutulur) anlaşılır. Məs., fərz olunur ki, $X(t)$ – tamqiymətli $\mathbb{R}^m$ şəbəkəsində elə bircins təsadüfi meydandır ki, $\mathbf{M}X(t)=0$. Belə meydanın korrelyasion funksiyası $B(h)=\mathbf{M}X(t+h)\overline{X(t)}$ aşağıdakı şəkildə ifadə oluna bilinir:

$$B(h)=\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\sum_{k=1}^{m}h_k\lambda_k}F(d\lambda),$$

burada $F(\cdot)$, – $[-\pi,\pi]^m$ fəzasının Borel çoxluqlarının σ – cəbri $\mathscr{B}_m$ -də ölçüdür. $X(t)$ meydanının özü isə

$$X(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\sum_{k=1}^{m}t_k\lambda_k}z(d\lambda)$$

ifadəsilə təyin olunur, burada $z(\cdot)$, – $\mathscr{B}_m$ -də elə ortoqonal təsadüfi ölçüdür ki, $\mathbf{M}z(S_1)\overline{Z(S_2)}=F(S_1\cap S_2)$, $S_1\in\mathscr{B}_m$, $S_2\in\mathscr{B}_m$. Onda $z\{(0)\}$ -a bərabər olan, kvadratik orta mənada

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2N+1)^m}\sum_{\substack{|X_j|\le N,\\ j=1,\dots,m}}X(t)$$

limiti vardır, burada (0), – $\mathbb{R}^m$-in $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ nöqtəsindən ibarət çoxluqdur. Bu limitin 1 ehtimalla $\mathbf{M}X(t)$-yə ($\mathbf{M}X(t) = 0$) bərabər olması üçün zəruri və kafidir ki, $\mathbf{M}\left|Z\{(0)\}\right|^2 = F\{(0)\}$ bərabərliyi ödənilsin, əgər $F\{(0)\} = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{m} \log \left| \log \frac{1}{|\lambda_j|} \right| F(d\lambda) < +\infty$$

olarsa, onda $X(t)$ təsadüfi meydanına böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununu tətqiq etmək olur (bax, [1], [2]). Əgər $X(t)$ – asılı olmayan qiymətlərli bircins təsadüfi meydan olarsa, onda $X(t)$-yə böyük ədədlərin güclən-dirilmiş qanununun tətbiq olunması üçün zəruri və kafidir ki (bax, [3]),

$$\mathbf{M}\,|X(t)|\;(\ln^{+}|X(t)|\;)^{m-1} < +\infty$$

münasibəti ödənilsin. Təsadüfi meydanlar üçün B. ə. q.-na, adə-tən, təsadüfi meydanın ortalandığı genişləndirilə bilinən çoxluq-ların müxtəlif ardıcıllıqlarına tətbiqdə baxılır. Böyük ədədlərin güclənditilmiş qanununun kürələr üzrə ortalanması halında izotrop meydanlara tətbiq olunması üçün şərtlər [4] və [5]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Г а п о ш к и н В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 295–319; [2] К л е с о в О. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1981, в. 25, с. 29–40; [3] S m y t h e R. T., «Ann. Probab.», 1973, v. 1, p. 164–70; [4] Я д р е н к о М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [5] Г а п о ш к и н В. Ф., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1984, в. 30, с. 34–38.

BÖYÜK ƏDƏDLƏRİN GÜCLƏNDİRİLMİŞ QANUNU « больших чисел усиленный закон; strong law of large numbers » – böyük ədədlər qanununun (onun ümumi anlamında) formalarından biridir, bu qanunda hökm olunur ki, müəyyən şərtlər ödənildikdə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının ədədi orta qiymətləri 1 ehtimalla müəyyən sabit kəmiyyətlərlə qeyri – məhdud surətdə getdikcə yaxınlaşırlar. Daha dəqiq,

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \qquad (1)$$

– təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ olsun. Əgər elə sabit A_n-lər ardıcıllığı varsa ki,

$$S_n/n - A_n \to 0 \qquad (2)$$

münasibətinin ehtimalı $n \to \infty$ olduqda 1-ə bərabər olsun, onda (1) ardıcıllığı B. ə. q. q.-nu ödəyir, deyilir. Bu verilən tərifl eynigüclü digər forma aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər ixtiyari $\varepsilon \to 0$ üçün bütün

$$\left| S_n/n - A_n \right| \le \varepsilon_n, \quad \left| S_{n+1}/(n+1) - A_{n+1} \right| \le \varepsilon, \dots \qquad (3)$$

bərabərsizliklərinin eyni zamanda ödənilməsi ehtimalı $n \to \infty$ olduqda 1-ə yaxınlaşarsa, (1) ardıcıllığı B. ə. q. q.-nu ödəyir, deyilir. Beləliklə, adi böyük ədədlər qanununda yalnız ayrı-ayrı cəmlərə baxılırsa, burada cəmlərin bütün ardıcıllığının asimptotikasına baxılır. Əgər (1) ardıcıllığı B. ə. q. q.-nu ödəyirsə, onda bu ardı-cıllıq eyni A_n-lərlə adi böyük ədədlər qanununu da ödəyir, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\,|S_n/n - A_n| \le \varepsilon\,\} \to 1 \qquad (4)$$

münasibəti doğrudur. Tərsi doğru olmaya bilər. Məs., əgər (1) təsadüfi kəmiyyətlərindən hər biri $n \ge 16$ qiymətlərində $\pm\sqrt{n/\ln\ln\ln n}$ qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, bunlar üçün (4) böyük ədədlər qanunu $A_n = 0$ şərtilə ödənilir, lakin A_n-lərin heç bir qiymətində (2) – B. ə. q. q. ödənilmir.

Belə misalların mövcudluğu əvvəlcədən o qədər də aydın deyildir, belə ki, ehtimala görə yığılma 1 ehtimalla yığılmadan zəifdir, bununla belə, məs., asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sıraları üçün yığılmanın hər iki növü eynigüclüdür.

B. ə. q. q. ilk dəfə E. Borel tərəfindən [1]-də Bernulli sxemi üçün formalaşmış və isbat olunmuşdur (nəzəri – ədədi interpretasiyada; bax, *Borel qanunu güclənditilmiş böyük ədədlərin*). Bernulli sxeminin xüsusi halları $(0,1)$ parça-sında ixtiyari həqiqi ω ədədinin (müntəzəm paylanmaya malik) hər hansı bir əsasa görə sonsuz kəsr şəklində ayrılı-şında yaranır (bax, *Bernulli sınaqları*). Məs., ω-nın ikilik ayrı-lışında, yəni $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)/2^n$ cəmində $\xi_n(\omega)$-nın ardıcıl işarələri 0 və 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan asılı ol-mayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$ cəmi ikilik ayrılışdakı ilk n işarə arasında vahidlərin sayıdır, $S_n(\omega)/n$ isə bunların bir hissəsidir. Bu halda, S_n kəmiyyətinə «müvəf-fəqiyyət» (1-in olması) ehtimalı $1/2$ olan Bernulli sxemində «müvəffəqiyyətlər» sayı kimi də baxmaq olar. E. Borel isbat etmişdir ki, S_n/n-dəki vahidlərin payı $(0,1)$ parçasında sanki bütün ω-lar üçün $1/2$-ə yaxınlaşır. Analoji olaraq, ω-nın 10 əsasına görə ayrılışında «müvəffəqiyyəti» $0, 1, ..., 9$ rəqəmlərindən birinin bu ayrılışda rast gəlməsi kimi interpretasiya etmək olar. Bu halda da, «müvəffəqiyyət» ehtimalı $1/10$-ə bərabər Bernulli sxemi alınır və seçilmiş bir ədədin onluq ayrılışda ilk n işarəsi arasında olması tezliyi $(0,1)$ parçasında sanki bütün ω-lar üçün $1/10$-a yaxınlaşır. Borel həmçinin qeyd etmişdir ki, r rəqəmdən ibarət ixtiyari qeyd olunmuş qrupun müşahidə olunması tezliyi də sanki bütün ω-lar üçün $1/10^r$-ə yaxınlaşır.

F. Kantelli [2]-də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün toplanan-ların ikinci və dördüncü tərtib momentləri terminlərində (bu şərtlərlə Bernulli sxemi də əhatə olunur) B. ə. q. q.-nun şərtlərini vermişdir.

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}\left| \xi_j - \mathbf{M}\xi_j \right|^k$$

işarələməsini qəbul edərək, Kantelli şərtini aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_{n,4} + B_{n,2}^2)/n^2 < \infty.$$

E. Borel və F. Kantellinin isbatları aşağıdakı mülahizəyə əsaslanmışdır. Fərz olunur ki, müsbət ədədlərin hər hansı $\varepsilon_n \to 0$ ($n \to \infty$ olduqda) ardıcıllığı üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|S_n/n - A_n| > \varepsilon_n\} < \infty \qquad (5)$$

münasibəti ödənilir. Onda *Borel – Kantelli lemmasına* əsasən (5) münasibətində ehtimal işarəsi altındakı hadisələrdən yalnız sonlu saydası 1 ehtimalla baş verir. Buna görə də, n -in olduqca böyük bütün qiymətlərində

$$\left|S_n/n - A_n\right| \le \varepsilon_n$$

hadisəsi 1 ehtimalla baş verir, yəni (3) münasibəti ödənilir. E. Borel (5) sırasının hədlərini Muavr – Laplas teoreminə görə, F. Kantelli isə dördüncü momentlərlə Çebışev bərabərsizliyi ilə qiymətləndirmişlər.

B. ə. g. q.-nun tətbiq olunması üçün şərtlərin sonradan genişləndirilməsi A. Ya. Xinçin və A. N. Kolmoqorov tərəfindən həyata keçirilmişdir. A. Ya. Xinçin [3], [4]-də «böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu» terminini daxil etmiş və $A_n = \mathbf{M}(S_n/n)$ şərtilə B. ə. g. q.-nun kafi şərtini vermişdir (asılı təsadüfi kəmiyyətlər üçün də).

ξ_i və ξ_k arasında korrelyasiya əmsalını $r_{i,k}$ ilə işarə edərək,

$$c_n = \sup_{|i-k|=n} |r_{i,k}|\ , \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\ ,$$

qəbul edərək Xinçin şərtini hər hansı $\delta > 0$ üçün $B_{n,2}\, C_n = O(n^{2-\delta})$ formasında yazmaq olar.

Toplananlar asılı olmadığı halda B. ə. g. q.-nun tətbiq olunması üçün şərtlər: sonlu dispersiyalı təsadüfi kəmiyyətlər üçün A. N. Kolmoqorov kafi şərti (1930) və riyazi gözləmələri sonlu olan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün zəruri və kafi şərtlər (1933) məlumdur. Sonlu dispersiyalarlı (1) təsadüfi kəmiyyətləri üçün Kolmoqorov teoreminə görə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n/n^2 < \infty \qquad (6)$$

şərtində B. ə. g. q.-nun $A_n = \mathbf{M}(S_n/n)$ qiymətlərilə (1) ardıcıllığına tətbiq olunduğu alınır. Dispersiya terminlərilə (6) şərti o mənada ən yaxşı şərt hesab oluna bilinər ki, b_n – ixtiyari müsbət ədədlər, $\sum b_n/n^2$ dağılan ardıcıllıq olarsa, B. ə. g. q.-na tabe olmayan $\mathbf{D}\xi_n = b_n$ və asılı olmayan ξ_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı qurmaq mümkündür. (6) şərtinin (asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün B. ə. g. q.-nun ödənilməsinin digər bir sıra şərtlərinin də) tətbiq olunma oblastı aşağıdakı qeydə əsaslanaraq genişləndirilə bilinər. $\mathbf{m}_n$, – ξ_n -in medianı olsun.

$\sum \mathbf{P}\{|\xi_n - \mathbf{m}_n| > n\}$ sırasının yığılması B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün zəruri şərtdir. Borel – Kantelli lemmasına əsasən, hər hansı bir nömrədən başlayaraq 1 ehtimalla $\left|\xi_n - \mathbf{m}_n\right| < n$ bərabərsizlikləri ödənilir.

Buna görə də, B. ə. g. q.-nun tətbiq olunub-olunmadığını araşdırdıqda ilk növbədə bu son şərti ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərlə kifayətlənmək olar.

A. Ya. Xinçin və A. N. Kolmoqorovun isbatlarında (5) sırasının yığılması əvəzinə, $n_k = 2^k$ qiymətlərində

$$\sum_k \mathbf{P}\left\{\max_{n_k < n \le n_{k+1}} \left|S_n/n - A_n\right| > \varepsilon_n\right\}$$

sırasının yığılması müəyyənləşdirilir. Bu zaman A. Ya. Xinçin mahiyyətcə sıralar nəzəriyyəsinin funksiyaların ortoqonal sistemləri üzrə bəzi ideyalarından, A. N. Kolmoqorov isə təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin maksimumları üçün onun adını daşıyan bərabərsizlikdən istifadə etmişlər.

B. ə. g. q.-nun zəruri və kafi şərtini asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün vermək olar. $2^k < n \le 2^{k+1}$ şərtilə təyin olunan n -lər üzrə $\sum_{(k)}$ cəmini hesabladıqda, $Z_k = 2^{-k}\sum_{(k)} \xi_n$ qəbul edərək, bu şərti aşağıdakı şəkildə yazmaq olar: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_k \mathbf{P}\{|Z_k - \mathbf{m}Z_k| > \varepsilon\} < \infty\,, \qquad (7)$$

burada $\mathbf{m}Z_k$, – Z_k -nın medianıdır (bax, [6]). Bəzi əlavə məhdudiyyətlərlə (7)-dən ayrı-ayrı toplananların xarakteristikaları vasitəsilə ilə ifadə olunan şərtlər almaq olur. Məs., əgər $\xi_n = O(n/\ln\ln n)$ və ya bütün ξ_n -lər normal qanunla paylanmış olarsa, onda (7) şərti: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon/\mathbf{D}Z_k\} < \infty$$

şərtinin ödənilməsilə eynigüclüdür. Burada ξ_i -lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunduğundan

$$\mathbf{D}Z_k = 2^{-2k}\sum_{(k)} \mathbf{D}\xi_n\ .$$

Markov zəncirləri və stasionar proseslərə B. ə. g. q.-nun tətbiq olunması şərtləri məlumdur (bax, [7]). Məs., korrelyasion funksiyası $R(n)$ olan geniş mənada stasionar ξ_n ardıcıllıqlarına Xinçin metodu tətbiq edildikdə belə bir müddəa alınır: əgər $\sum \ln^2 n/n\,|R(n)|$ sırası yığılarsa, onda $(\xi_0 + \ldots + \xi_n)/(n + 1) \to \mathbf{M}\xi_0$ münasibəti 1 ehtimalla ödənilir. Dar mənada stasionar proseslər üçün B. ə. g. q., bəzən

$$Y = \lim_{n\to\infty} (\xi_0 + \ldots + \xi_n)/(n+1)$$

limitinin 1 ehtimalla ödənildiyi kimi anlaşılır (Y təsadüfi kəmiyyəti ξ_0 -ın yerinidəyişməyə nəzərən invariant çoxluqların σ – cəbri üzrə şərti riyazi gözləməsinə bərabərdir. Y kəmiyyəti vahid ehtimalla sabitdir və yalnız metrik tranzitiv proseslər üçün $\mathbf{M}\xi_0$ -a bərabərdir). B. ə. g. q. məhz bu formada *Birkhof – Xinçin erqodik teoremidir.*

Normalanmış xətti fəzalarda təsadüfi vektorlar üçün B. ə. g. q.-nun variantları mövcuddur (bax, [9]). Tarixən ilk misal kimi empirik paylanma funksiyalarının nəzəri paylanma funksiyasına yığılması haqqında Qlivenko – Kantelli teoremini qeyd etmək olar. S_n/n -in A_n -dən yayınmaları haqqında ifadədən *təkrar loqarifm qanunu* alınır.

Əd.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247–71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26, p. 39–45; [3] Хинчин А. Я., Основные законы теории

вероятностей, M., 1927; [4] Хинчин А. Я., «C. r. Acad. sci.», 1928, t. 186, p. 285–87; [5] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1930, t. 191, p. 910–12; [6] Прохоров Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, с. 523–36; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, M., 1972; [9] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., M., 1965.

S. V. Naqayevin işində (bax, [10]) asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün bir kriteri də təklif olunmuşdur. Ümumiliyi pozmadan, Yu. V. Proxorov kimi (bax, [11]) fərz etmək olar ki, ξ_i simmetrik paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bunu nəzərə aldıqda S. V. Naqayev teoremini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

$h_k(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ və $k = 1, 2, \ldots$ – uyğun

$$\frac{\partial}{\partial h} \log M \exp(hZ_k)\, I(W_k < \varepsilon) = 2\varepsilon$$

tənliklərinin həlli olsun, Z_k (7)-dəki kimi təyin olunur və

$$W_k = \max(|\xi_m| / m : 2^k < m \le 2^{k+1}).$$

Əgər $h_k(\varepsilon)$ həlli vardırsa, onda bu həll yeganədir. Əks halda, tərifə görə fərz olunur ki, $h_k(\varepsilon) = \infty$.

Onda B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ \mathbf{P}(\xi_n > \varepsilon n) + \exp(1 - \varepsilon 2^{n+1} h_n(\varepsilon)) \} \qquad (8)$$

sırasının yığılması zəruri və kafidir.

Yu. V. Proxorovun (7) kriterisinə oxşar S. V. Naqayev kriterisi mürəkkəb Z_k və W_k təsadüfi kəmiyyətlərinin istifadə edilməsi ilə bağlı olduğundan, bu kriterinin birinci kriteridən hansısa prinsipial üstünlüyü olmur. Bununla əlaqədar olaraq, yalnız asılı olmayan ayrı-ayrı ξ_j toplananlarının xarakteristikalarından istifadə etməklə ((6) və (8) şərtləri kimi) B. ə. g. q.-nun kriterisinin alınması probleminin tamamilə həll olunduğunu hesab etmək olmaz. [10]-da misal göstərilmişdir ki, axtarılan kriterini sonlu sayda momentlər istifadə olunduğu halda qurmaq mümkün deyildir.

Əd.: [10] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 609–18; [11] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 153–65.

BÖYÜK ƏDƏDLƏRİN GÜCLƏNDİRİLMİŞ QANUNU stasionar təsadüfi proseslər üçün **« больших чисел усиленный закон** для стационарных случайных процессов; **strong law of large numbers** for stationary random processes **»** – 1) *stasionar* $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesi* üçün

$$\lim_{T-S\to\infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T \zeta(t)\, dt = \hat{\zeta} \qquad (1)$$

və ya (t diskret olduqda)

$$\lim_{T-S\to\infty} \frac{1}{T-S} \sum_{t=S}^{T-1} \zeta(t) = \hat{\zeta} \qquad (1a)$$

limitlərinin 1 ehtimalla varlığı haqqında müddəadır. Stasionar proseslər üçün B. ə. g. q.-na aid olan ən mühüm müddəa Birkhoff – Xinçin erqodik teoremidir; bu teoremə əsasən, dar mənada stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün $\mathbf{M}|\zeta(t)| < \infty$ şərti (kəsilməz t halında çox ümumi requlyarlıq şərti də əlavə olunmaqla, belə ki, bu tətbiqi məsələlərdə həmişə ödənilir) B. ə. g. q.-nun ödənilməsini təmin edir.

1) müəyyən şərtlər daxilində [bu halda bu şərtlər $\zeta(t)$ stasionar prosesi üçün B. ə. g. q.-nun doğruluq şərtləri adlanır] $\hat{\zeta} = \mathbf{M}\zeta(t)$.

2) Əgər $\zeta(t)$ geniş mənada stasionar prosesdirsə, onda $\zeta(t)$ prosesinə adi böyük ədədlər qanununun tətbiqi üçün [yəni (1) və (2)-nin ehtimala görə və kvadratik orta mənada limitinin varlığı üçün, burada $\hat{\zeta} = \mathbf{M}\zeta(t)$]

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T b(s)\, ds = 0 \\ \text{və ya da ki,} \\ \lim\limits_{T\to\infty} \displaystyle\sum_{s=0}^{T} b(s) = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Slutski şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada

$$b(s) = \mathbf{M}[\zeta(t+s) - \mathbf{M}\zeta(t+s)][\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]$$

(bax, *Böyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün). Əgər $\zeta(t)$ – dar mənada stasionar proses və $\mathbf{M}|\zeta(t)| < \infty$ olarsa, onda Birkhoff – Xinçin teoreminə əsasən (1) və (2) limitləri 1 ehtimalla vardır, əgər bundan başqa, $\mathbf{M}|\zeta(t)|^2 < \infty$ da olarsa [$\zeta(t)$ prosesi geniş mənada stasionar olduğundan], $\hat{\zeta} = \mathbf{M}\zeta(t)$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün Slutski şərti (3)-ün ödənilməsi təbii olaraq zəruri və kafidir [yəni $\zeta(t)$ prosesi üçün B. ə. g. q.-nun ödənilməsi üçün].

Lakin, bununla belə, $\zeta(t)$ prosesi dar mənada deyil, yalnız geniş mənada stasionar proses olarsa, onda bu proses üçün ola bilər ki, Slutski şərti ödənilsin [yəni $\zeta(t)$ üçün adi böyük ədədlər qanunu doğrudur], amma bu halda (1) və ya (2) limitləri 1 ehtimalla yoxdur [yəni $\zeta(t)$ üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu ödənilmir]. Bu növ ilk misal [1]-də göstərilmişdir; daha əvvəllər (bax, [2], [3]) stasionar (geniş mənada) $\zeta(t)$ prosesləri üçün B. ə. g. q.-nun doğruluğunun bəzi ümumi kafi şərtləri göstərilmişdir, xüsusi halda, bu şərtlərdən aydın olur ki, əgər (3)-də $1/T$ vuruğunu daha yavaş azalan $1/T^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ vuruğu ilə əvəz etdikdən sonra (3) şərti doğru olarsa, B. ə. g. q. yəqin ki, ödəniləcəkdir (bax, [4]). [4], [5]-də göstərilmişdir ki, $1/T$ vuruğu $(\log T)^a / T$, $a > 3$ ilə əvəz olunduqdan sonra (3) şərti doğru olarsa, B. ə. g. q. da doğrudur. Sonralar isbat olunmuşdur ki (bax, [6], [7]), bəzi $C > 0$ və $\varepsilon > 0$ qiymətlərində, olduqca böyük bütün s-lər üçün $|b(s)| < C(\log\log s)^{-2-\varepsilon}$ bərabərsizliyi ödənildikdə geniş mənada stasionar $\zeta(t)$ prosesi üçün

B. ə. g. q. həmişə ödənilir, lakin $b(s)$ sonsuzluqda $(\log\log s)^{-2}$ kimi ödənildiyi $\zeta(t)$ prosesləri üçün bu qanun doğru olmaya da bilər.

Əd.: [1] Blanc – Lapierre A., Tortrat A., «C. r. Acad. sci.», Ser. A – B, 1968, t. 267, № 20, p. 740–43; [2] Loeve M., «Rev. Sci.», 1945, v. 83, p. 297–303; [3] Blanc - Lapierre A., Brard R., «Bull. Soc. Math. France», 1946, t. 74, p. 102–15; [4] Вербицкая И. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 2, с. 358–65; [5] Вербицкая И. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 4, с. 715–20; [6] Гапошкин В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 2, с. 388–92; [7] Гапошкин В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 295–319.

BÖYÜK ƏDƏDLƏRİN GÜCLƏNDİRİLMİŞ QANUNU təsadüfi çoxluqlar üçün **« больших чисел усиленный закон** для случайных множеств; **strong law of large numbers** for random sets **»** – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün.

BÖYÜK KANONİK ANSAMBL « большой канонический ансамбль; grand canonical ensemble » – bax, *Gibbs paylanması.*

BÖYÜK dim. – ÖLÇÜLƏR EFFEKTİ « больших размерностей эффект; large dimensions effect » – statistik fizikada bəzi kəmiyyətlərin hesablanmasında çoxsaylı naməlum parametrlərlə ifadə olunan, bəzi kəmiyyətlərin tutarlı statistik qiymətlərinin tapılmasında əsas sayılan, sayı sonsuzluğa yaxınlaşan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı Borel funksiyalarının özü-özünə ortalanma xassəsidir (bax, aşağı). B. dim. – ö. e. çoxölçülü statistik analizdə böyük dim. – ölçülü müşahidələrdə və həm də, nizamlanmamış strukturlar nəzəriyyəsində aşkar olunmuşdur. Bu analizinin əsas statistik qiymətlərindən biri Ξ kovariasion matrisinin rezolventinin normalanmış izinin statistik qiyməti olub,

$$\varphi(z,\Xi) = m_n^{-1}\,\mathrm{tr}\,\|\,\mathrm{I}z-\Xi\,\|^{-1}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada z – kompleks parametr, $\mathbf{I}$ – vahidi matris, m_n, – Ξ matrisinin tərtibidir.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – normal qanunla $(N(a,\Xi))$ paylanmış ξ təsadüfi vektoru üzərində aparılmış asılı olmayan müşahidə nəticələri olsun. Əgər Ξ matrisinin məxsusi qiymətləri λ_p -lər aşağı və yuxarıdan kostantlarla məhduddurlarsa və

$$\lim_{n\to\infty} m_n/n = c, \quad 0<c<\infty$$

Kolmoqorov şərti ödənilərsə, onda B. dim. – ö. e. ondan ibarətdir ki, $\varphi(z,\hat{\Xi})$ funksiyaları özü-özünə ortalanır, yəni

$$p\lim_{n\to\infty}\,[\,\varphi(z,\hat{\Xi}) - \mathbf{M}\varphi(z,\hat{\Xi})] = 0, \quad \mathrm{Im}\,z\neq 0$$

münasibəti ödənilir və $\theta(z) = \mathbf{M}\varphi(z,\hat{\Xi})$ funksiyası

$$\theta(z) = m_n^{-1}\sum_{p=1}^{m_n}[\,z-\lambda_p(1-k_n+k_n z\theta(z))]^{-1}+o(1)$$

funksional tənliyini ödəyir, burada

$$\hat{\Xi} = (n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\hat{a})(x_k-\hat{a})^{\mathsf{T}},$$

$$\hat{a} = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}x_k, \quad k_n = m_n/n<1.$$

Bu tənlikdən istifadə edərək, göstərmək olar ki, Kolmoqorov şərti ödənildiyi halda $\varphi(z,\Xi)$ funksiyasının statistik qiyməti kimi $\varphi(\hat{\gamma},\hat{\Xi})\,\hat{\gamma}z^{-1}$ ifadəsini götürmək olar, burada $\hat{\gamma}$, – $1-k_n+k_n\gamma\varphi(\gamma,\hat{\Xi}) = \gamma z^{-1}$ tənliyinin analitik həllidir.

Çoxölçülü analizin əsas ifadələrinin analizində B. dim. – ö. e.-dən istifadə etdikdə aşağıdakı tutarlı statistik qiymətlər alınır: c_n – sabitlərin hər hansı ardıcıllığı olduqda

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{-2}\ln[\,n(n-m_n)^{-1}] = 0$$

şərtini ödəyən, normalanmış ümumiləşmiş $c_n^{-1}\ln\det\Xi$ dispersiyasının statistik qiyməti –

$$c_n^{-1}\{\ln\det\hat{\Xi} + \ln[\,(n-1)^{m_n}(A_{n-1}^{m_n})^{-1}n(n-m_n)^{-1}]\}$$

kəmiyyətinə bərabərdir, burada $A_n^m = n\ldots(n-m+1)$;

$(a_1-a_2)^{\mathsf{T}}\Xi^{-1}(a_1-a_2)$ Mahalanobis məsafəsinin statistik qiyməti

$$(\hat{a}_1-\hat{a}_2)^{\mathsf{T}}\Xi_1^{-1}(\hat{a}_1-\hat{a}_2)\,\frac{n_1+n_2-2-m}{n_1+n_2-2}-\frac{m}{n_1}-\frac{m}{n_2}$$

ifadəsinə bərabərdir, burada Ξ – iki asılı olmayan m – ölçülü ξ_1 və ξ_2 təsadüfi vektorlarının ümumi kovariasion matrisi, $\mathbf{M}\xi_1 = a_1$, $\mathbf{M}\xi_2 = a_2$,

$$\hat{\Xi}_1 = (n_1+n_2-2)^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n_1}(x_k-\hat{a}_1)(x_k-\hat{a}_1)^{\mathsf{T}} + \sum_{p=1}^{n_2}(y_p-\hat{a}_2)(y_p-\hat{a}_2)^{\mathsf{T}}\right\},$$

x_i və y_i – uyğun olaraq, ξ_1 və ξ_2 vektorları üzərində asılı olmayan müşahidələrin nəticələridir, $\hat{a}_1 = n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i$, $\hat{a}_2 = n_2^{-1}\sum_{i=1}^{n_2}y_i$.

Requlyarlanmış Mahalanobis məsafəsi – $(a_1-a_2)^{\mathsf{T}}(\mathrm{I}\varepsilon + \Xi)^{-1}(a_1-a_2)$-in statistik qiyməti

$$(\hat{a}_1-\hat{a}_2)^{\mathsf{T}}(\mathrm{I}\varepsilon+\varepsilon\hat{\theta}\hat{\Xi}_1)^{-1}(\hat{a}_1-\hat{a}_2) - (n_1^{-1}+n_2^{-1})\,\mathrm{tr}\,\varepsilon\hat{\theta}^{-1}\hat{\Xi}_1(\mathrm{I}\varepsilon+\varepsilon\hat{\theta}^{-1}\hat{\Xi}_1)^{-1}$$

ifadəsilə təyin olunur, burada $\hat{\theta}$, –

$$1-k_m+k_m\theta_m^{-1}\,\mathrm{tr}(\mathrm{I}\theta+\hat{\Xi}_1)^{-1} = \theta\varepsilon^{-1},\ \varepsilon>0,$$

$$k_m = m(n_1+n_2-2)^{-1}$$

tənliyinin müsbət həllidir.

Ədədi analizdə də B. dim. – ö. e.-nin tətbiqi yaxşı nəticələr verir. $A\,x = b$ matrisinin verildiyi fərz olunur, burada $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $j = 1, ..., m$, $i = 1, ..., n$ – düzbucaqlı matris, $b = (b_1, ..., b_n)$, $x^{\mathrm{T}} = (x_1, ..., x_m)^{\mathrm{T}}$ – axtarılan həldir, A matrisinin elementləri orta qiymətləri A matrisinin uyğun elementlərinə bərabər olan hər hansı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyalarıdır.

$$x_\alpha = [\,\mathrm{I}\alpha n + A^{\mathrm{T}}A\,]^{-1}A^{\mathrm{T}}b\,,\ \alpha > 0$$

– $Ax = b$ tənliklər sisteminin requlyarlanmış həlli olsun. Belə həllər üçün B. dim. – ö. e.-i aşağıdakı kimi ifadə olunur. X matrisinin elementlərinin $N(a_{ij},\ \sigma^2)$ normal qanunla paylanmış asılı təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur.

$c \in \mathbb{R}^m$ və b vektorları

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-1}\sum_{k=1}^{m}\left|(A^{\mathrm{T}}b,\ \varphi_k)\,(c, \varphi_k)\right| < \infty$$

şərtini ödəyir, belə ki,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sup_{k=1,\,...,\,n}\ n^{-1}\lambda_k(A^{\mathrm{T}}A)\ < \infty,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ m n^{-1} < 1\,,$$

burada λ_k və φ_k – uyğun olaraq, $A^{\mathrm{T}}A$ matrisinin məxsusi qiymətləri və normalanmış məxsusi vektorlarıdır.

Onda $A = X$ olduqda

$$p\lim_{n\to\infty}\left[(x_\alpha, c) + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\infty}\ \frac{\partial}{\partial z}\,f(z, y)_{z=0}\,dy\right] = 0$$

münasibəti ödənilir, burada $f(z, y)$ funksiyası

$$f(z, y) = n^{-1}\sum_{k=1}^{m}[\ y(1 + \sigma^2\,f(z, y)) + \sigma^2\left(1 - \frac{m}{n}\right) + \\ + \lambda_k(z)\,(1 + \sigma^2\,f(z, y)\,)^{-1}]^{-1} + o(1)$$

tənliyini ödəyir, $\lambda_k(z)$ isə $K^{\mathrm{T}}(z)K(z)$ matrisinin məhz məxsusi qiymətləridir,

$$K(z) = n^{-1/2}A + zbc^{\mathrm{T}}n^{1/2}.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 2, с. 252–65; [2] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988; [3] Лифщиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А., Введение в теорию неупорядоченных систем, М., 1982.

BÖYÜK YAYINMALAR empirik paylanma funksiyası üçün **«большие уклонения** для эмпирической функции распределения; **large deviation** for empirical distribution function**»** – *empirik paylanma funksiyasının* uzaq oblasta düşməsi ehtimalı kiçik olan yayınmalardır. $F_n = F_n(t)$ – paylanma funksiyası $F = F(t)$ olan $(x_1, ..., x_n)$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, G_1 – paylanma funksiyaları çoxluğu, G_2 – məhdud variasiyalı funksiyalar çoxluğu olsun. Əgər G_1 və G_2 elə çoxluqlar olarsa ki, $n \to \infty$, $x = x(n) \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\ \{F_n \in G_1\} \to 0\,,\ \ \mathbf{P}\ \{(F_n - F)\sqrt{n} \in x\,G_2\} \to 0 \qquad (*)$$

münasibətləri təmin olunsun, onda (*) ehtimallarının asimptotik təsviri məsələləri empirik paylanma funksiyası üçün böyük yayınmalar haqqında məsələlər adlanır.

B. y. ehtimallarının kobud (loqarifmik) asimptotikası araşdırıldıqda G, H məhdud variasiyalı funksiyaların Kullbak – Leybler informasion məsafəsi–

$$K(G, H) = \int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{dG}{dH}(t)\,dG(t)$$

və

$$R(G, H) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dG}{dH}(t)\right)^2 dH(t)$$

məsafəsi əsas rol oynayır; əgər $G(t)$ $H(t)$-yə nəzərən mütləq kəsilməz funksiya deyildirsə, onda bu məsafələr ∞-a bərabər götürülür. Əgər $\mathrm{var}\,G = 0$ olarsa, onda $F(G, H)$ məsafəsinə

$$R(G, H) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{K(H + \Delta G, H)}{\Delta^2} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{K(H, H + \Delta G)}{\Delta^2}$$

limiti kimi baxmaq olar.

Bəzi $\mathfrak{M}_1^F$ və $\mathfrak{M}_2^F$ siniflərindən olan G_1 və G_2 çoxluqları üçün aşağıdakı müddəalar ödənilir:

$$\ln\mathbf{P}\{F_n \in G_1\} \sim -n\inf_{H\in G_1}K(H, F),$$

$$\ln\mathbf{P}\,\{(F_n - F)\sqrt{n} \in xG_2\} \sim -x^2\inf_{H\in G_2}R(H, F).$$

$\mathfrak{M}_1^F$ və $\mathfrak{M}_2^F$ sinifləri «zərif» sərhədli çoxluqlardan ibarətdirlər. Məs., əgər F $[0, 1]$-də müntəzəm paylanmadırsa, onda $\mathfrak{M}_2^F$ sinfinə

$$\inf_{H\in G^0}K(H, F) = \inf_{H\in\overline{G}}K(H, F)$$

şərtini ödəyən çoxluqlar daxildirlər, burada G^0 və $\overline{G}$ – müntəzəm yığılma topologiyasında G-nin daxili və qapayıcısıdır.

B. y. ehtimallarının kobud asimptotikası haqqında analoji nəticələr ixtiyari fəzadan qiymətlər alan $(x_1, ..., x_n)$ seçimi üzrə qurulmuş empirik ölçülər üçün də doğrudur.

(*) məsələlərinin ikincisində $x < \sqrt{\ln n}$ halında B. y.-ların kobud asimptotikasının məlum olması empirik paylanma funksiyası üçün təkrar loqarifm qanunlarının müxtəlif variantlarını almağa kifayət edir.

Empirik paylanma funksiyalarının B. y.-ı ehtimallarının dəqiq (loqarifmik olmayan) asimptotikası bəzi xüsusi G_i çoxluqlar sinfi üçün məlumdur.

Bax, *Böyük yayınmalar* təsadüfi dolaşma üçün.

Əd.: [1] Санов И. Н., «Матем. сб.», 1957, т. 42, № 1, с. 11–44; [2] Боровков А. А, «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [3] Боровков А. А., Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12–26; [4] Groenboom P., Oosterhoff J., Ruymgaart F. H., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 4, p. 553–86.

BÖYÜK YAYINMALAR təsadüfi dolaşma üçün **« большие уклонения** для случайного блуждания; **large deviations** for a random walk**»** – *təsadüfi dolaşmanın* trayektoriyasının uzaq oblasta düşməsi ehtimalları kiçik olan yayınmalardır. $S = (S_0, S_1, ...)$ – təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası, Ω, – V fəzasında $s = (s_0, s_1, ...)$ ardıcıllıqlarının çoxluğu olsun; $a \in \mathbb{R}$ olduqda, $as = (as_0, as_1, ...)$, $a\Omega = \{as: s \in \Omega\}$ olduğu fərz olunur. Əgər Ω və $x \to \infty$ ardıcıllığı üçün $x \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{S \in x\Omega\} \to 0 \qquad (1)$$

münasibəti ödənilərsə, onda bu ehtimalın asimptotik ifadəsinin təyin edilmə məsələsi böyük yayınmalar haqqında məsələ adlanır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0 \qquad (2)$$

cəmlərinin doğurduğu təsadüfi dolaşmalar üçün B. y. müfəssəl öyrənilmişdir.

(2) təsadüfi dolaşmasının B. y. haqqında məsələlərinin geniş sinfi (1) ehtimalının araşdırılmasına gətirilir; bu halda $S = S_{(n)}$ $(S_k,\ k \leq n = n(x))$ trayektoriyasının başlanğıc hissəsidir, $\Omega = \Omega_n$ isə n uzunluqlu sonlu ardıcıllıqlar fəzasında çoxluqdur.

(2) təsadüfi dolaşmaları üçün B. y. haqqında məsələlər arasında *sərhəd məsələləri* xüsusilə seçilir. Bu halda Ω çoxluğu iki sərhəd arasında olan trayektoriyalar (ardıcıllıqlar) çoxluğu ilə əlaqədar olur. $g^{\pm}(t)$, – $[0, 1]$ parçasında verilmiş $g^-(0) < 0 < g^+(0)$, $g^-(t) < g^+(t)$ şərtlərini ödəyən hamar funksiyalar olsun. $\mathbf{M}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$ olduqda (1) münasibəti ödənilərsə, $s_n(k/n) = S_k/\sqrt{n}$, $k = 0, 1, ..., n$ qəbul edib, $s_n(t)$ kəsilməz təsadüfi sınıq xəttini almaq olar və $[0, 1]$ parçasının digər nöqtələrində $s_n(t)$ -ni, məs., xətti interpolyasiya ilə də təyin etmək olar.

Əgər $\Omega = \{g(t): g^-(t) \leq g(t) < g^+(t)\}$ zolağı $g(t) \equiv 0$ düzxəttini özündə saxlamırsa, onda *invariantlıq prinsipinə* əsasən $x \to \infty$, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{s_n(\cdot) \in x\Omega\} \to 0. \qquad (3)$$

Əgər $g^{\pm}(t)$ əyrilərindən heç biri absis oxuna toxunmursa, onda $x \to \infty$, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{s_n(\cdot) \notin x\Omega\} \to 0.$$

Bu halda təsadüfi dolaşmaların sərhəd məsələlərinin B. y.-na baxılır. Hər iki halda baxılan kiçik qiymətli ehtimalın asimptotik ifadəsinin tapılması təsadüfi dolaşmanın bir sərhəddən kənara çıxma ehtimalının hesablanmasına gətirilir. Məs.,

$$\mathbf{P}\{s_n(\cdot) \notin x\Omega\} = [\mathbf{P}\{\max_{0 \leq t \leq 1} (s_n(t) - xg^+(t)) > 0\} +$$

$$+ \mathbf{P}\{\max_{0 \leq t \leq 1} (xg^-(t) - s_n(t)) > 0\}](1 + o(1)).$$

Nəticədə B. y. haqqında iki növ məsələ alınır.

1. Birinci sərhəd məsələsi, $\inf g(t) > 0$ halında

$$B_1 = \{\max_{t \in [0,1]} (s_n(t) - xg(t)) > 0\}$$

hadisəsinin ehtimalının asimptotikasının araşdırılması məsələsidir.

2. İkinci sərhəd məsələsi, $\inf g(t) < 0$ halında

$$B_2 = \{\max_{t \in [0,1]} (s_n(t) - xg(t)) < 0\}$$

hadisəsinin ehtimalının asimptotikasının araşdırılması məsələsidir.

Əgər $|\lambda| < \lambda_0$, $\lambda_0 > 0$ olduqda

$$\psi(\lambda) = X\mathbf{M}e^{\lambda X_1} < \infty, \qquad (4)$$

Kramer şərti ödənilərsə, onda 1 və 2 məsələləri nəticələrinin forması və həll metodlarına görə olduqca fərqli məsələlərdir. Nəticələri ifadə etmək məqsədilə, Kramer şərti ödənildiyi halda, bütün B. y. haqqında məsələlərdə təyinedici rol oynayan

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} (\lambda\alpha - \ln\psi(\lambda))$$

yayınma funksiyası daxil etmək zəruridir.

Birinci sərhəd məsələsinin həllinin təsvirində mühüm element – $t\Lambda(a_\tau(t)/t) = \Lambda(\tau)$ tənliyinin həlləri kimi təyin olunan $a_\tau(t)$ sədd xətlərinin birparametrli ailəsidir. $a_\tau(t)$ funksiyaları t üzrə artan və qabarıq, τ-ya görə artandırlar, məs., $(0, 1)$ parametrli normal paylanma üçün

$$\Lambda(\alpha) = \alpha^2/2 \quad \text{və} \quad a_\tau(t) = \tau\sqrt{t}.$$

Əgər τ kiçik ədəd olarsa, onda ixtiyari ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti üçün sədd xətləri $\tau\sqrt{t}$ -yə yaxın olur.

τ_g τ-nun elə ən kiçik qiyməti olsun ki, $a_\tau(t)$ əyrisi $xg(t)/\sqrt{n}$ əyrisinə ilk dəfə τ_g-də toxunsun. Onda $g(t)$ funksiyasının hamarlığının ödənilməsi üçün bəzi fərziyyələrlə

$$\mathbf{P}(B_1) \sim cn^\beta e^{-n\Lambda(\tau_g)} \qquad (5)$$

münasibəti ödənilir, bu halda β $a_{\tau_g}(t)$-nin $xg(t)/\sqrt{n}$ əyrisinə necə toxunmasından asılıdır. Məs., əgər $g(t)$ və $a_{\tau_g}(t)$ toxunma nöqtəsi t_g ətrafında kifayət qədər hamar funksiyalar, q isə t_g nöqtəsində $g(t)$ və $a_{\tau_g}(t)$ funksiyalarının üst-üstə düşən törəmələrinin sayı olarsa, onda $\beta = 1/2 - 1/(q+1)$. Əgər $g(t)$ və $a_{\tau_g}(t)$ bütün bir intervalda üst-üstə düşərlərsə $(q = \infty)$, onda $\beta = 1/2$ olur.

Λ yayınma funksiyası (t, g) müstəvisində özünəməxsus metrika təyin edir. Bu müstəvidə koordinat başlanğıcından çıxan düzxətli yollar ən qısa yollar, $a_\tau(t)$ funksiyalarının qrafikləri isə τ qədər eyni məsafədə olan nöqtələrin xətləri olur. (5) ehtimalının qiymətinə əsas təsir edən, « τ_0 uzunluqlu», demək olar ki, düzxətli olan trayektoriyalar dəstəsidir; bu trayektoriyalar koordinat başlanğıcını $(t_g,\ g(t_g))$ nöqtəsi ilə birləşdirir.

«Bərkidilmiş uclu» birinci sərhəd məsələsində, yəni $\mathbf{P}\{S_n = \rho\} > 0$ olduğu halda $\mathbf{P}\{B_1, S_n = \rho\}$ tipli ehtimalları tədqiq edərkən, analoji vəziyyət müşahidə olunur (əgər

$\mathbf{P}\{S_n = \rho\} = 0$ olarsa, onda $\mathbf{P}\{B_1, S_n \in \Delta\}$ ehtimalına baxılır, burada Δ – kiçik intervaldır). Sadəlik üçün $\rho = 0$ olsun. Bu halda bu məsələdə sədd xətləri

$$\Lambda(t, b) = \sup_{0 < t < 1} \Lambda(t, \tau) \equiv \Lambda_1(\tau)$$

tənliyinin həlli kimi təyin olunur, burada

$$\Lambda(t, b) = t\Lambda(b/t) + (1 - t)\,\Lambda(-b/(1-t))$$

və bu sədd xətləri kiçik τ-lar üçün normal paylanmaya uyğun sədd xətləri – $b_\tau(t) = \tau\sqrt{t(1-t)}$ xətlərinə oxşar olur. O biri hallar keyfiyyətcə (5) halında olduğu kimi qalır, lakin, bu şərtlə ki, (5)-in sağ tərəfində n-dən asılı vuruq $n^{\beta_1} e^{-n\Lambda_1\tau_g}$ ilə əvəz olunsun, burada $\beta_1 = -1/(q+1)$ (daha ətraflı bax, [1]-ə).

Bu nəticələr riyazi statistikada mühüm əhəmiyyətə malik olub, Kolmoqorov – Smirnov tipli asimptotik optimal kriterilərin qurulmasına imkan verir.

İkinci sərhəd məsələsində $\mathbf{P}(B_2)$ ehtimalının qiymətinə əsas təsir edən trayektoriyalar dəstəsi daha mürəkkəb quruluşa malikdir.

$g_m = \min g(t) < 0$, $h(t)$, – $(0, 0)$ və $(1, g_m)$ nöqtələri arasında «tel kimi çəkilmiş» və $g \geq g(t)$ şərtini ödəyən (t, g) nöqtələr çoxluğu A-nı aşağıdan qurşayan əyri olsun.

Onda

$$\ln \mathbf{P}(B_2) \sim -n \int_0^1 \Lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\, h'(t)\right) dt$$

münasibəti doğrudur və ən böyük ehtimallı trayektoriyalar dəstəsi A çoxluğuna toxunmadan $h(t)$ əyrisi ətrafında topalanır. $\mathbf{P}(B_2)$ ehtimalı üçün dəqiq asimptotik ifadə daha mürəkkəbdir (bax, [2]).

Əgər ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri (4) Kramer şərtini ödəmirsə, $\mathbf{P}\{\xi_1 > x\}$ və $\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\}$ ehtimalları isə $x \to \infty$ olduqda kifayət dərəcədə düzgün olaraq (məs., üstlü) azalırsa, onda sərhəd məsələlərində B. y. ehtimallarını ifadə edən qanunlar başqa formada olur. Burada B. y. ehtimalları ilə bağlı həndəsə tamamilə başqa olacaqdır. Bu halda $(0, 0)$ və (t, a) nöqtələrini birləşdirən $s_n(u)$ trayektoriyalarının ən qısa (və ya ən ehtimallı) yolları düzxətlər deyil, $u \leq v$ olduqda $d(u) = 0$, $v < u \leq t$ olduqda $d(u) = a$ şərtlərilə təyin olunan pilləvari $d(u)$ xətləri olacaqdır. Bu yaxşı məlum olan bir fakta – qüvvət üstlü halda böyük yayınmalar ehtimallarına əsas təsir edən trayektoriyaların yalnız bir aşması (və ya enməsi) olan trayektoriyalar olması faktına əsaslanır. Birinci sərhəd məsələsində $x >> \sqrt{\ln n}$ olduqda $\mathbf{P}(B_1)$ ehtimalı üçün asimptotik ifadə

$$\mathbf{P}(B_1) \sim n \int_0^1 \mathbf{P}\{\xi_1 > x\sqrt{n}\, g_1(t)\}\, dt,$$
$$g_1(t) = \min_{u \geq t} g(u) \qquad (6)$$

münasibətlərilə verilir.

İkinci sərhəd məsələsində isə

$$\mathbf{P}(B_2) \sim n\gamma \mathbf{P}\{\xi_1 < x\sqrt{n}\, g_m\} \qquad (7)$$

münasibəti $\mathbf{P}(B_2)$ ehtimalının asimptotik ifadəsidir, burada $\gamma = \min\{t:\, g(t)\, g_m\} > 0$. Əgər $x \leq c\sqrt{\ln n}$ olarsa, onda (6) və (7) düsturlarında «Kramer» halında olduğu kimi əlavə hədlər olur (bax, [3]).

$g(t)$ düzxətli sərhəd olduğu xüsusi hal daha yaxşı araşdırılmışdır. Bu hal, mahiyyət etibarilə, $\overline{S}_n = \max_{k \leq n} S_k$ (bax, [4]) təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması haqqında məsələyə ekvivalentdir. Bu halda, adətən, $\overline{S}_n$-in digər sərhəd funksionalları ilə birgə paylanması öyrənilir.

(3) ehtimalının asimptotikasını Ω $C[0, 1]$ kəsilməz funksiyalar fəzasının $\mathfrak{B}$ Borel σ – cəbri ixtiyari çoxluğu olduğu halda da öyrənmək mümkündür.

Fərz olunur ki, $A \in \mathfrak{B}$ çoxluğu $g(t) = 0$ nöqtəsinin ətrafını özündə saxlamır. Onda $x \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}\{s_n \in xA\} \to 0$. Və fərz olunur ki, yuxarıdakı xassəli A çoxluqlarının $\mathfrak{A}$ sinfi verilmişdir, $z = z(n) \to \infty$ isə hər hansı artan ardıcıllıqdır. w – standart Viner prosesinin paylanması olsun; əgər $y = y(n) \to \infty$, $y = o(z)$ olduqda

$$\mathbf{P}\{s_n \in yA\} \sim w(yA), \quad A \subset \mathfrak{A}$$

olarsa, B. y. oblastında $(\mathfrak{A}, z)$ – invariantlıq prinsipi yerinə yetir, deyilir. Fərz olunur ki, $\mathfrak{A}$ və z aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $y \to \infty$, $A \in \mathfrak{A}$ üçün $\ln w(yA) \geq -cy^2$,

2) $y = o(z)$ üçün $w([\partial(yA)]^{1/z}) = o(w(yA))$, burada ∂B, – B çoxluğunun sərhədi, $(B)^\varepsilon$ – bu çoxluğun ε – ətrafıdır. Onda əgər $\mathbf{M}\left|\xi_1\right|^r < \infty$, $r < 2$ olarsa, onda $(\mathfrak{A}, \sqrt{\ln n})$ – invariantlıq prinsipi doğrudur. Əgər (4) şərti ödənilərsə, $(\mathfrak{A}, n^{1/6})$ – invariantlıq prinsipi doğrudur. Məlumdur ki, 1) şərti heç olmasa bir daxili nöqtəsi olan bütün A-lar üçün ödənilir, 2) şərti də çoxluqların geniş sinfi üçün ödənilir (hər halda sərhəd məsələlərində baxılan A zolaqları üçün).

$A \in \mathfrak{A}$ və $y = o(z)$ olduqda, əgər

$$\ln \mathbf{P}\{s_n \in yA) \sim \ln w(yA) \qquad (8)$$

münasibəti ödənilərsə, $(\mathfrak{A}, z)$ – kobud invariantlıq prinsipi yerinə yetir, deyilir. $\mathfrak{A}$ silindrik çoxluqları özündə saxladıqda və $\sqrt{\ln \ln n} = o(z)$ olduqda, təkrar loqarifm qanunu $(\mathfrak{A}, z)$ – kobud invariantlıq prinsipinin nəticəsidir.

Fərz olunur ki, $\mathfrak{A}$ 1) şərtini və

2′) $\ln w([\partial(yA)]^\delta) \leq \ln w(yA)(1 + o(1))$

şərtini ixtiyari $\delta = o(y)$ ardıcıllığı üçün ödəyir. Onda əgər (4) şərti ödənilərsə, $(\mathfrak{A}, \sqrt{n})$ – kobud invariantlıq prinsipi doğrudur (bax, [5]).

(8)-in sağ tərəfini aşkar şəkildə tapmaq olur. Doğrudan da,

$$\ln \mathbf{P}\{s_n \in yA\} \sim \frac{y^2}{2\sigma^2} \inf \int_0^1 (g'(t))^2 dt, \quad g \in A \cap C_1, \quad (9)$$

burada C_1, – $[0,1]$-də mütləq kəsilməz funksiyalar çoxluğudur.

(8) və (9) münasibətləri $y \sim c\sqrt{n}$ üçün, ξ_j normal paylanmaya malik olmadıqda, doğru olmaya bilər. Bu halda da $\ln \mathbf{P}\{s_n \in xA\}$-nın asimptotikasını aşkar şəklində tapmaq mümkündür. Həqiqətən də, A çoxluqlarının geniş sinfi və $x \to \infty$ üçün (bax, [6]),

$$\ln \mathbf{P}\{s_n \in xA\} \sim -n \inf \int_0^1 \Lambda\left(\frac{x}{n} g'(t)\right) dt, \quad g \in A \cap C_1.$$

Əgər Kramer şərti ödənilmirsə və $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}$, $\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\}$ düzgün (üstlü) surətdə azalırlarsa, onda A çoxluqlarının olduqca geniş sinfi üçün $\mathbf{P}\{s_n \in xA\}$ ehtimalının özünün (onun loqarifminin deyil) asimptotikasını aşkar olaraq tapmaq olur; yəni

$$\mathbf{P}\{s_n \in xA\} = w(xA)(1 + o(1)) + (c_1(A) + o(1)) \times$$

$$\times n\mathbf{P}\{\xi_1 > x\} + (c_2(A) + o(1))\, n\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\sqrt{n}\};$$

burada $c_1(A)$, $c_2(A)$ n-dən asılı deyildirlər [(7) və (8)-lə müq. et] və burada axırıncı iki toplanan $x/\sqrt{\ln n} \to \infty$ olduqda əsas toplananlar hesab olunur (bax, [3]).

Yuxarıda ifadə olunmuş müddəaların çoxu (2)-dəki toplananların eyni ehtimallı olması haqqında fərziyyəsiz də doğrudur. Bunlar çoxölçülü fəzalarda (hətta sonsuzölçülü Banax fəzalarında) təsadüfi dolaşmalar üçün də doğru olur. ξ_k kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı şərtini də zəiflətmək mümkündür (bax, [7]).

Əd.: [1] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1964 , т. 5, № 2, с. 253–89; № 4, с. 750–67; [2] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–95; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 227–54; [4] Боровков А. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [5] Могульский А. А., в кн.: Предельные теоремы для сумм случайных величин, Новосибирск, 1984, с. 93–124; [6] Пинелис И. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 1, с. 73–87; [7] Вентцель А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 235–52; в. 3, с. 512–26.

BÖYÜK YAYINMALAR təsadüfi proseslər üçün **« большие уклонения** для случайного процесса; **large deviations** for a random process **»** – təsadüfi prosesin trayektoriyasının uzaq oblasta (uyğun metrikada) düşməsidir. $\zeta(t)$ – trayektoriyaları hər hansı $\mathscr{X}$ funksional fəzasından olan təsadüfi proses, $\mathbf{P}$, – $\mathfrak{P}$ σ – cəbrli $\mathscr{X}$ fəzasında bu prosesin uyğun paylanması olsun. $\mathscr{X}$ fəzası kimi, adətən, σ – cəbrləri silindrik çoxluqların doğurduğu σ – cəbrlər olan $C(0,1)$ və $D(0,1)$ fəzalarına baxılır. $x \to \infty$ olduqda A çoxluğu $f = 0$ nöqtəsinin ətrafını özündə (uyğun metrikada) saxlamadığı halda $\mathbf{P}(xA)$ asimptotikasının axtarılması məsələsi $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün böyük yayınmalar haqqında məsələ adlandırılır (burada $xA \in \mathfrak{P}$, – xf funksiyalarının çoxluğudur $f \in A$). Nadir hallar istisna olunmaqla, $\mathbf{P}(A)$-nın aşkar ifadəsini, hətta ən sadə A çoxluqları və ən sadə ζ prosesləri üçün tapmaq mümkün olmur. Lakin tam bir sıra hallar üçün, $x \to \infty$ olduqda, $\mathbf{P}(xA)$-nın asimptotikasını öyrənmək mümkün olur (eyni mülahizəni $x \to 0$, A isə məhdud olduğu halda da söyləmək olar).

B. y. haqqında məsələlərin həlli istiqamətində proqres, əsasən, ζ prosesinin təbiəti və A çoxluğu ilə əlaqədar fərziyyələrin xarakteri ilə bağlıdır. Asılı olmayan artımlarlı proseslər, Markov və Qauss prosesləri və Markov zəncirində verilmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ardıcıl cəmlərinin doğurduğu proseslər üçün bu sahədə ən ciddi irəliləyişlər əldə etmək mümkündür. Əgər «kobud» asimptotika məsələsinə [yəni $x \to \infty$ olduqda $\ln \mathbf{P}(xA)$-nın asimptotik yığılması] baxılırsa, A çoxluğu haqqında fərziyyələr olduqca geniş olur, əgər məsələ $\mathbf{P}(xA)$-nın özünün asimptotikası haqqındadırsa, onda xüsusi fərziyyələr irəli sürülür. Sonuncu halda, əsas etibarilə, əyrixətli zolaqlarla:

$$A = A(g_-, g_+) = \{g : g_-(t) < g(t) < g_+(t);\ 0 \leq t \leq 1\}$$

ilə kifayətlənilir, burada $g_-(t)$, $g_+(t)$ – verilmiş funksiyalardır. (bu cür nəticələrlə, məs., [1] – [3]-də tanış olmaq olar.)

«Kobud» asimptotika halı. Əgər $\zeta(t) = w(t)$ – standart Viner prosesi, W, – $C(0,1)$-də bu prosesə uyğun paylanmadırsa, onda $A \subseteq C(0,1)$ çoxluqlarının geniş sinfi üçün

$$\ln \mathrm{W}(xA) \sim -x^2 \Lambda(A)$$

olur, burada

$$\Lambda(A) = \inf_{f \in A \cap C^1} \Lambda(f),$$

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

($\Lambda(f)$ – Viner prosesinin yayınma funksiyasıdır), C^1 – mütləq kəsilməz $f = f(t)$ funksiyaları sinfi, $f(0) = 0$. A çoxluğu $\Lambda(A_0) = \Lambda(\overline{A})$ şərtini ödəməlidir, burada A_0 və $\overline{A}$ – uyğun olaraq, A çoxluğunun müntəzəm norma topologiyasında daxili və qapayıcısıdır.

İxtiyari kəsilməz Qauss proseslərinin B. y. haqqında «kobud» teoremlər analoji olur. $\mathscr{X}^*$, – $\mathscr{X} = C(0,1)$ fəzasında bütün kəsilməz xətti $\theta = \theta(f)$ funksionallarının qoşma fəzası olsun. $\mathscr{X}$-də $\zeta(t)$ prosesi üçün yayınma funksiyası

$$\Lambda(f) = \sup_{\theta \in \mathscr{X}^*} \{\theta(f) - \ln \mathbf{M} e^{\theta(\zeta)}\}, \quad f \in \mathscr{X}$$

bərabərliyilə təyin olunur. Onda Borel çoxluqları $A \in \mathfrak{P}$ üçün

$$\Lambda(A_0) = \Lambda(\overline{A}) \qquad (*)$$

şərti ödənildiyi halda

$$\ln \mathbf{P}(xA) \sim -x^2 \Lambda(A)$$

hökmü doğrudur (bax, [4], [5]), burada $\Lambda(A) = \inf_{f \in A} \Lambda(f)$.

Markov prosesləri və $s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \le nt} X_i$ prosesləri ardıcıllıqları üçün (bu proseslər asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu təsadüfi proseslərdir; $\mathbf{M} X_i = 0$) nəticələr bir qədər çətin ifadə olunur [burada nəticə x/n nisbətindən də asılı olur; $x = x(n)$, müəyyən şərtlərlə $\mathbf{P}\{s_n \in xA\}$ ehtimalı $n \to \infty$ olduqda özünü $\mathrm{W}(xA)$ kimi aparır] (bax, [1]).

$s_n(t)$ prosesləri ardıcıllıqları üçün (və bir sıra digər hallarda) B. y. haqqında məsələyə $\mathbf{P}\{\zeta^{(n)} \in A\}$ ehtimalının asimptotika məsələsi kimi yanaşmaq olar, burada $\zeta^{(n)} (= x^{-1} s_n(t))$, – $f(t) = 0$ funksiyasına ehtimala görə yığılan proseslər ardıcıllığıdır, A isə qeyd olunmuş çoxluqdur. Məsələnin belə qoyuluşu daha ümumidir, bir sıra hallarda isə daha da məqsədəuyğundur.

İndi isə, fərz olunur ki, $\zeta^{(n)}(t)$ – trayektoriyaları $\mathscr{X} = D(0,1)$ fəzasından olan Markov təsadüfi proseslərinin ardıcıllığıdır, $\mathbf{P}^{(n)}$ $\mathscr{X}$-də ($\mathfrak{B}$ silindrik çoxluqların və ya ρ Skoroxod metrikasına nəzərən Borel çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbrlə) verilmiş müvafiq paylanmadır.

$\zeta^{(n)}$ Markov proseslərinin B. y. ehtimallarının kobud asimptotikası, t ə s i r f u n k s i o n a l ı a d l a n a n $k(n)S(f)$ hasili ilə təsvir olunur ki, bu funksional $\zeta^{(n)}$-in f funksiyasının ətrafına düşmə çətinliyini xarakterizə edir və yayınmalar funksiyasının analoqudur:

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} k^{-1}(n) \ln \mathbf{P}\{\rho(\zeta^{(n)}, f) < \delta\} = -S(f).$$

Daha dəqiq, müsbət $k(n)$ ardıcıllığı ∞-a yaxınlaşır, $S(f)$ funksionalı $[0, \infty)$ qiymətini alır. $S(A) = \inf_{f \in A} S(f)$ olsun. Əgər:

0) ixtiyari $s \ge 0$ üçün $\Phi(s) = \{f : S(f) \le s\}$ kompakt çoxluq olarsa;

1) ixtiyari açıq $A \subseteq \mathscr{X}$ çoxluğu üçün

$$\liminf_{n \to \infty} k^{-1}(n) \ln \mathbf{P}\{\zeta^{(n)} \in A\} \ge -S(A)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə;

2) ixtiyari qapalı $A \subseteq \mathscr{X}$ çoxluğu üçün

$$\limsup_{n \to \infty} k^{-1}(n) \ln \mathbf{P}\{\zeta^{(n)} \in A\} \le -S(A)$$

olarsa, $k(n)S(f)$, – $\zeta^{(n)}$ prosesi üçün t ə s i r f u n k s i o n a l ı d ı r, deyilir (bax, [2]). Əgər $S(A_0) = S(\overline{A})$ olarsa [(*) ilə müqayisə et], $A \subseteq \mathscr{X}$ çoxluğu S funksionalına nəzərən r e q u l y a r ç o x l u q adlanır.

1), 2) şərtlərini bir şərt kimi aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

1) + 2)) ixtiyari requlyar $A \subseteq \mathscr{X}$ çoxluğu üçün

$$\lim_{n \to \infty} k^{-1}(n) \ln \mathbf{P}\{\zeta^{(n)} \in A\} = -S(A)$$

ödənilərsə.

Proseslərin B. y. haqqında kobud teoremlər alınmışdır, məs., [2], [6] – [9]-da.

B. y.-ın kobud asimptotikasının daha bir təsvir forması inteqral formasıdır:

3) əgər $F(f)$ $\mathscr{X}$-də kəsilməz məhdud funksionaldırsa, onda

$$\lim_{n \to \infty} k^{-1}(n) \ln \mathbf{M} e^{k(n) F(\zeta^{(n)})} = \sup_{f \in \mathscr{X}} \{F(f) - S(f)\}$$

münasibəti doğrudur (bax, [10], [11]).

Diskret zamanlı Markov prosesi üçün təsir funksionalı aşağıdakı kimi təyin olunur (bax, [2]).

$\zeta^{(n)}(t)$ diskret t zamanlı elə Markov prosesi olsun ki, onun aldığı qiymətlər $\tau = n^{-1}$-ə bölünən olsun. $z \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^1$ üçün $\zeta^{(n)}$ prosesinin x nöqtəsində bir addıma artımının paylanmasının Laplas çevirməsinin loqarifmi

$$G(t; x, z) = \ln \mathbf{M}\left(e^{\tau z (\zeta^{(n)}(t+\tau) - x)} \Big/ \zeta^{(n)}(t) = x \right)$$

olsun.

$$H(t; x, \alpha) = \sup_{z \in \mathbb{R}^1} \{\alpha z - G(t; x, z)\}$$

isə $G(t; x, z)$ funksiyasının Lejandr çevirməsi olsun. Onda geniş fərziyyələrlə $\zeta^{(n)}$ prosesinin təsir funksionalı

$$n S(f) = \sum_{k=0}^{n-1} H(k/n, f(k/n), f'(k/n))$$

düsturu ilə ifadə olunur. Kəsilməz zamanlı Markov proseslərinin geniş sinfi üçün təsir funksionalı analoji ifadə edilir (bax, [2]).

$x \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}(xA)$-nın dəqiq asimptotikasını hesablamaq üçün ən çətin texniki vasitələr tələb olunur; bu nəticələr bu halda çətin ifadələrlə alınır (bax, [12], [13]).

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 227–54; [2] В е н т ц е л ь А. Д., Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов, М., 1986; [3] Случайные процессы. Выборочные функции и пресения. Сб. статей, пер. с англ., М., 1978; [4] Б о р о в к о в А. А., М о г у л ь с к и й А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; [5] B a h a d u r R. R., Z a b e l l S. L., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 4, p. 587–621; [6] V a r a d h a n S. R. S., «Com. Pure Appl. Math.», 1966, v. 19, № 3, p. 261–286; [7] Б о р о в к о в А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [8] М о г у л ь с к и й А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 309–23; [9] В е н т ц е л ь А. Д., Ф р е й д л и н М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [10] S c h i l d e r M., «TAMS», 1966, v. 125, № 1, p. 63–85; [11] Д у б р о в с к и й В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 215; [12] Б о р о в к о в А. А., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 2, с. 253–89; № 4, с. 750–67; [13] М о г у л ь с к и й А. А., «Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд.», 1984, т. 3, с. 93–124.

BÖYÜK YAYINMALAR EHTİMALLARI « больших уклонений вероятности; large deviations probabilities » – $\mathbf{P}\{S_n - a_n > b_n\}$, $\mathbf{P}\{S_n - a_n < -b_n\}$, $\mathbf{P}\{|S_n - a_n| > b_n\}$ tipli ehtimallardır, burada $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $\{\xi_j\}$ – təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\{b_n\}$ və $\{a_n\}$, – $b_n > 0$ və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|S_n - a_n| b_n^{-1} > \varepsilon\} = 0$ (ehtimala görə yığılma) şərtlərini ödəyən ardıcıllıqlar olsun.

Əgər ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri sıfra, dispersiyaları isə sabit σ^2 -na bərabərdirsə, onda $a_n = 0$ və $b_n = x_n \sigma\sqrt{n}$ götürmək olar, burada $n \to \infty$ olduqda $x_n \to \infty$ olur. Bu ehtimalların hesablanması üçün Kramer (bax, [2]) və Linnik (bax, [3]) teoremlərinin və bunlardan da güclü (bax, [2], [6], [9]) teoremlərin böyük əhəmiyyəti vardır.

[7], [9]-da B. y. e.-nın araşdırılması üçün semi–invariantlar metodu təklif edilmişdir; bu metod ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər (o cümlədən, asılı) cəmi əvəzinə bəzi funksionallara baxmağa imkan verir. Bu metodun mahiyyəti aşağıdakı müddəadan ibarətdir: $\Delta > 0$ parametrindən asılı ixtiyari ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası vahid olduqda, bu təsadüfi kəmiyyətin k tərtib semi – invariantı $\mathbf{s}_k$

$$|\mathbf{s}_k| \le (k!)^{1+\gamma} \Delta^{2-k}, \quad k = 3, 4, \ldots, \quad \gamma \ge 0 \qquad (*)$$

şərtini ödəyərsə, onda $0 \le x < \Delta_1$ intervalında

$$1 - F_\xi(x) = (1 - \Phi(x)) \exp\{L(x)\} \times$$
$$\times \{1 + \theta(x + 1)((1 - x/\Delta_1)\Delta_1)^{-1}\}$$

münasibəti doğrudur, burada $\Delta_1 = (1/6)(\sqrt{2}\Delta/6)^{1/(1+2\gamma)}$, $L(x)$, – $\gamma = 0$ olduqda Kramer sırasının analoqu, $\gamma > 0$ olduqda bu sıranın parçasıdır və bu sıranın əmsalları $\mathbf{s}_k$ semi – invariantları ilə ifadə olunur, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası, θ – məhdud kəmiyyətdir (bax, [8], [9]).

B. y. e.-nın təminatlı qiymətlərinin alınması üçün Çebışev bərabərsizliyi tipli bərabərsizliklərdən istifadə olunur və bu qiymətlər B. y. e. üçün eksponensial qiymətlər adlanır. Məs., ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün (*) şərti ödənirsə, onda $x > 0$ şərtini ödəyən bütün x -lər üçün

$$\mathbf{P}\{\xi \ge x\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2} \frac{(x\Delta)^\beta}{2x^2 + (x\Delta)^\beta}\right\}$$

münasibəti doğrudur, burada $\beta = (1 + \gamma)^{-1}$.

Böyük yayınmalar problematikasında böyük yayınmaların loqarifmik ehtimallarının asimptotik tədqiqatı mühüm yer tutur (kobud teoremlər adlanır). $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ doğuran funksiyalarının semi – invariantlarının $\varphi_j(\lambda) = \ln \mathbf{M} \exp\{\lambda \xi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun, belə ki, $\lambda \in [c, d]$, $0 \le c < d$ üçün $n^{-1}\varphi_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(\lambda)$; $D = \{\lambda \in (c, d) : \varphi'$ vardır və λ nöqtəsində kəsilməzdir $\}$ və $A = \{a : \varphi'(\lambda) = a, \lambda \in D\}$ olsun. Bu halda aşağıdakı müddəa doğrudur: əgər $\varphi(\lambda)$ $[c, d]$ intervalında ciddi qabarıq funksiyadırsa, onda

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\{\xi_n \ge na\} \underset{n\to\infty}{\to} \varphi^*(a), \quad a \in A,$$

münasibəti doğrudur; burada $\varphi^*(a) = \inf\{-\lambda a + \varphi(\lambda) : \lambda \in [c, d]\}$ yayınma funksiyasıdır (bax, [9]).

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] Прохоров Ю. В., в сб.: Итоги науки и техники, т. 10, М., 1972, с. 5–24; [5] Юринский В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 152–54; [6] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 231–54; [7] Statulevicius V., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1966, Bd 6, № 2, S. 133–44; [8] Рудзкис Р., Саулис Л., Статулявичус В., «Лит. матем. сб.», 1978, т. 18, № 2, с. 99–116; [9] Саулис Л., Статулявичус В., Предельные теоремы о больших уклонениях, Вильнюс, 1989; [10] Plachky D., Steinbach J., «Period. Math. Hungar.», 1975, v. 6, p. 343–45.

BRAUN EKSKURSİYASI « броуновская экскурсия; Brownian excursion », Braun hərəkəti üçün ekskursiya –

$$w_e(t) = (\tau_2 - \tau_1)^{1/2} |w((1-t)\tau_1 + t\tau_2)|, \quad 0 \le t \le 1$$

münasibətilə Viner prosesi üzrə (*Braun hərəkəti prosesi*) təyin olunan kəsilməz $w_e(t)$, $0 \le t \le 1$ *təsadüfi prosesidir*, burada $\tau_1 = \sup\{t \le 1 : w(t) = 0\}$ və $\tau_1 = \inf\{t \ge 1 : w(t) = 0\}$ – uyğun olaraq, $t = 1$ anından əvvəlki anda $w(t)$-nin sonuncu sıfrı, $w(t)$-nin bu zaman anından sonrakı birinci sıfrıdır. B. e. qeyri – bircins Markov diffuzion prosesidir; bu prosesin birölçülü ehtimal paylanmaları və keçid ehtimallarının sıxlıq funksiyaları [1]-də verilmişdir (fəsil 2). B. e. ilə Braun körpüsü arasında əlaqələr və müəyyən təsadüfi proseslər ardıcıllıqlarının B. e.-na yığılması teoremləri [2] – [7]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 1, p. 117–29; [3] Durrett R. T., Iglehart D. L., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 1, p. 130–35; [4] Vervaat W., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 1, p. 143–49; [5] Getoor R. K., Sharpe M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 47, H.1, S. 83–106; [6] Knight F. B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1980, v. 258, № 1, p. 77–86; [7] Imhof J. P., «Stud. sci. Math. Hung.», 1985, v. 20, № 1–4, p. 1–10.

BRAUN HƏRƏKƏTİ çoxparametrli **« броуновское движение** многопараметрическое; multiparametric **Brownian motion »** – bax, *Levi meydanı.*

BRAUN HƏRƏKƏTİ; ekskursiya **« броуновское движение** экскурсия; **Brownian excursion »** – bax, *Braun ekskursiyası.*

BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ « брауновского движения процесс; Brownian motion process » – *maye içərisində çəkili hissəciklərin* (*həddindən kiçik*) *kəsilməz xaotik hərəkətidir.* 1827-də R. Braun (R. Brown) tərəfindən kəşf edilmişdir. Yalnız mikroskopla müşahidə olunan çəkili hissəciklər bir-birindən asılı olmayaraq, mürəkkəb trayektoriyalarla hərəkət edir; hər bir hissəcik mayenin molekulları ilə təsadüfi toqquşmaya məruz qalır; molekulların hissəciyə hər bir təkanı nəzərə alınmayacaq dərəcədə təsir göstərməsinə baxmayaraq, onların birlikdə etdiyi təkanlar hissəciyin müşahidə olunan hərəkətinə səbəb olur.

Braun hərəkəti nəzəriyyəsi XX əsrin əvvəllərində L. Başelye (L. Bachelier), A. Eynşteyn (A. Einstein) və M. Smoluxovski (M. Smoluchowski) tərəfindən təklif olunmuşdur. ξ_t – Braun hissəciyinin t anında koordinatlarından biri olsun; müəyyənlik üçün $\xi_0 = 0$ fərz olunur. Hissəciyi əhatə edən molekulların hərəkəti yalnız statistik olaraq təsvir oluna bilindiyindən ξ_t təsadüfi kəmiyyətdir. Hissəciyin $[0, t]$ müddəti ərzində yerdəyişməsi demək olar ki, bir-birindən asılı olmayan, lakin olduqca kiçik çoxlu sayda təsirlərin cəminin ümumi nəticəsidir. Buna görə də, *mərkəzi limit teoreminə* əsasən, ξ_t-nin normal qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyət olduğu postulatı tamamilə doğruyaoxşardır.

Əgər mayenin özlülüyü kifayət qədər çox olarsa, hissəciyin hərəkət sürəti olduqca azalır və onda hissəciyin müşahidə olunan yerdəyişmələrinin bir-birilə kəsişməyən zaman intervallarında birbirindən asılı olmadığını hesab etmək olar. Simmetriya nöqteyi – nəzərindən $\mathbf{M}\,\xi_t = 0$ götürülür və əgər fiziki şərtlər dəyişməzsə, onda $\mathbf{M}(\xi_{t+s} - \xi_t)^2 = f(s)$ t-dən asılı olmur. Bu sonuncu razılaşma, qeyd olunan asılı olmamazlıqla birlikdə dispersiya üçün $f(s) = cs$ münasibətilə ifadə olunur. c sabiti fiziki nəzəriyyə üçün əhəmiyyət kəsb edir. A. Eynşteyn c sistemin ölçmə aparılması mümkün olan bəzi parametrləri və bəzi fiziki sabitləri arasında əlaqə olduğunu sübut etmişdir. Məs., sferik hissəciklər üçün

$$c = kT/3\pi\eta a \qquad (*)$$

burada a – hissəciyin radiusu, k – Boltsman sabiti, T – mütləq temperatur, η – mayenin dinamik özlülük ədədidir.

N. Viner (N. Wiener, 1929) B. h. p.-nin ehtimal modeli olaraq, aşağıdakı şərtlərlə təyin olunan $\{\zeta(\omega, t);\ t \geq 0\}$ təsadüfi prosesini ($(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$-də təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlər ailəsini) qurmuşdur:

1) sanki yəqin $\zeta(\omega; 0) = 0$ olur;

2) əgər $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ olarsa, $\zeta_{t_{i+1}} - \zeta_{t_i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ artımları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir;

3) ixtiyari s, $t \geq 0$ qiymətlərində $\zeta_{t+s} - \zeta_t$ artımı riyazi gözləməsi 0, dispersiyası s-ə bərabər olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir;

4) sanki bütün qeyd olunmuş ω-lar $(\omega \in \Omega)$ üçün $\zeta(\omega, t)$ t-yə görə kəsilməz funksiyadır.

Bu proses standart Braun hərəkəti prosesi və ya standart Viner prosesi adlanır və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində mühüm yer tutur.

Birölçülü Braun hərəkəti prosesi (**Viner prosesi**) $t \geq 0$ qiymətlərində təyin olunmuş elə $\zeta_t = \zeta(\omega; t)$ təsadüfi prosesidir ki, bu prosesin sonluölçülü paylanmaları $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ olduqda, $\zeta_{t_1}, \zeta_{t_2}, \ldots, \zeta_{t_n}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının sıxlıq funksiyaları ilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$p_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left[2\pi(t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\} \right]$$

$x_0 = 0$, $x_1, \ldots, x_n$ – həqiqi dəyişənlərdir.

$\zeta(\omega; t)$ prosesi diffuziya prosesləri üçün də ehtimal modeli kimi götürülür.

Ədd.: [1] Э й н ш т е й н А., С м о л у х о в с к и й М., Броуновское движение, пер. с нем., М. – Л., 1936; [2] Л а м п е р т и Д ж., Вероятность, пер. с англ., М., 1973; [3] Л е в и П., Стохастические процессы и броуновское движение. пер. с франц., М., 1972; [4] Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. 2-ое, С. К о р о л ю к, Н. И. П о р т е н к о, А. В. С к о р о х о д, А. Ф. Т у р б и н, М., 1985.

BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ ç o x ö l ç ü l ü **« брауновское движение процесс** м н о г о м е р н ы й; m u l t i v a r i a t e **Brownian motion process »** – bax, *Çoxölçülü Braun hərəkəti prosesi*.

BRAUN KÖRPÜSÜ « брауновский мост; Brownian bridge » – bax, *Viner körpusu.*

BRAUN MEANDRI « брауновский меандр; Brownian meander » –

$$w_m(t) = (1 - \tau_1)^{1/2} \left| w(\tau_1 + (1 - \tau_1)) \right|, \quad 0 \leq t \leq 1$$

münasibətilə Viner prosesi üzrə (*Braun hərəkəti prosesi* üzrə) təyin olunan kəsilməz $w_m(t)$, $0 \leq t \leq 1$ *təsadüfi prosesidir*; $\tau_1 = \sup\{t \leq 1 : w(t) = 0\}$ $t = 1$ anından əvvəlki anda $w(t)$-nin sonuncu dəfə sıfra bərabər olma anıdır. B. m. *Braun ekskursiyasına* yaxın qeyri – bircins Markov diffuzion prosesidir.

Ədd.: [1] D u r r e t t R. T., I g l e h a r t D. L., M i l l e r D. R., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 4, p. 117–29; [2] D u r r e t t R. T., I g l e h a r t D. L., M i l l e r D. R., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 1, p. 130–35.

BRAUN MƏLƏFƏSİ « брауновская простыня; brownian sheet » – bax, *Viner meydanı.*

BRAUN PROQNOZLAMA METODU « Брауна метод прогнозирования; Brown's method of forecasting / prediction » – *təsadüfi proseslərin* eksponensial hamarlanmaya əsaslanan adaptiv proqnozlanması üçün sadə metoddur. ζ_t təsadüfi prosesinin B. p. m. ilə proqnozlanma modeli

$$\hat{\zeta}_t(k) = a_0(t) + a_1(t)k + \ldots + a_p(t)\,k^p$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

$a_0(t)$, ..., $a_p(t)$ əmsalları çəkili ən kiçik kvadratlar metodu ilə, yəni

$$\sum_{j=0}^{\delta} (\zeta_{t-j} - \hat{\zeta}(-j))^2 \beta^j$$

kəmiyyətinin minimallıq şərtindən təyin edilir, burada β-nın qiyməti hamarlama əmsalı adlanır. $|\beta| < 1$ olduğu halda proqnozlamada bu əmsaldan istifadə müşahidə olunan prosesin son müşahidələrdəki qiymətlərinin böyük çəkili, nadir müşahidə olunan qiymətlərinin isə az çəkili götürülməsinə imkan verir. $\hat{\zeta}_t(k)$-dan $\hat{\zeta}_{t+1}(k)$-ya keçiddə əmsalların hesablanması rekurrent qayda ilə aparılır. Məs., $p = 1$ olduqda $a_0(t+1)$ və $a_1(t+1)$ əmsalları üçün

$$a_0(t+1) = (1-\beta^2)\,\zeta_{t+1} + \beta^2 a_0(t) + \beta^2 a_1(t),$$

$$a_1(t) = (1-\beta^2)\,\zeta_{t+1} - (1-\beta^2)a_1(t) - \\ -(1-\beta^2)\,a_0(t) + a_1(t)$$

düsturları doğrudur.

Əd.: [1] B r o w n R., Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, Englewood Cliffs (N. Y.), 1963; [2] К е н д э л М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

BRAUN VƏRƏQİ « брауновский лист; Brownian sheet » – bax, *Viner vərəqi.*

BUCAQ MODULYASİYASI « угловая модуляция; angular modulation » – bax, *Tezlikli – modulyar ossilyasiya.*

BUCAQ TEZLİYİ « угловая частота; angular frequency » – bax, *Tezlik*.

BUFER YADDAŞ « буферная память; buffer memory » – bax, *Ardıcıl dekodla*(n)*ma.*

BUL CƏBRİ n o r m a l a n m ı ş **« булева алгебра** н о р м и р о в а н н а я; s t a n d a r d i z e d **Boolean algebra »** – bax, *Təsadüfi hadisə*.

BUL FUNKSİYASI t ə s a d ü f i **« булева функция** с л у ч а й н а я; r a n d o m **Boolean function »** – bax, *Təsadüfi Bul funksiyası*.

BUL MODELİ « булева модель; Boolean model » – $\mathbb{R}^n$-də, paralel yerinidəyişmələrin $\mathbb{T}_n$ qrupuna nəzərən invariant *təsadüfi çoxluqdur*. B. m. aşağıdakı kimi qurulur: $\mathbb{T}_n$-də $\mathcal{N} = \{t_i\}$ – invariant nöqtəvi təsadüfi prosesi və eyni qanunla paylanmış asılı olmayan qabarıq təsadüfi çoxluqlar ardıcıllığı $\{D_i\}$ götürülür. $U = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} t_i D_i$ çoxluğuna $\{t_i\}$ və $\{D_i\}$ ilə doğurulmuş B u l m o d e l i deyilir. Əgər $\mathcal{N} = \{t_i\}$ Puasson nöqtəvi prosesi olarsa, onda B. m. P u a s s o n B u l m o d e l i adlanır. Əgər U $\mathbb{R}^n$-də B. m.-dirsə, onda $U \cap \mathbb{T}_r$ də B. m.-dir, burada $\mathbb{T}_r$, – $\mathbb{R}^n$-də r – ölçülü müstəvidir, $r \le n$. $U \cap \mathbb{T}_1$ çoxluğunu kəsişməyən $\{I_k\}$ intervallarının birləşməsi şəklində ifadə etmək olur, onun tamamlayıcısı isə kəsişməyən $\{I'_k\}$ intervallarının birləşməsinin tamamlayıcısıdır. I'_k isə I-nin tamamlayıcısıdır. Əgər U – Puasson B. m.-dirsə, onda bir-birini əvəz edən $\{I_k, I'_k\}$ ardıcıllığında intervallar asılı olmayandırlar, $\{I'_k\}$-dən olan tipik intervalın uzunluğu (bax, *Həndəsi proses*) eksponensial paylanma qanunu ilə paylanır. Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant B. m. üçün $\{I'_k\}$-dən olan tipik intervalın eksponensial paylanma ilə paylanması $U \cap \mathbb{T}_1$ prosesinin rekurrentliyindən alınır (bax, *Stoxastik həndəsə*).

Əd.: [1] Stochastic geometry, geometric statistics, sterelogy, Lpz., 1984; [2] М а т е р о н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

BUNYAKOVSKİ BƏRABƏRSİZLİYİ « Буняковского неравенство; Bunyakovskii's inequality » – e h t i m a l n ə z ə r i y y ə s i n d ə – sonlu $\mathbf{M}\,\xi\eta$ riyazi gözləməsinə malik ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri $\mathbf{M}\,\xi$ və $\mathbf{M}\,\eta$ üçün bərabərsizlikdir və bu bərabərsizlik aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$(\mathbf{M}\,\xi\eta)^2 \le \mathbf{M}\,\xi^2\,\mathbf{M}\,\eta^2. \qquad (*)$$

Bu bərabərsizlik inteqrallar üçün 1859-da ilk dəfə V. Y. Bunyakovski tərəfindən verilmişdir. A. Koşi (A. Cauchy) (*) bərabərsizliyinin analoqunu 1821-də cəmlər üçün isbat etdiyindən, (*) eyni zamanda K o ş i – B u n y a k o v s k i b ə r a b ə r s i z l i y i də adlanır. Bəzən B. b. Şvarts bərabərsizliyi də adlanır, lakin bu bərabərsizliyə H. Şvartsın (H. Schvarz) işlərində 1884-dən sonra təsadüf olunmuşdur.

B. b., yalnız və yalnız, o halda bərabərliyə çevrilir ki, əgər $a^2 + b^2 > 0$ şərtini ödəyən elə a və b sabitləri olarsa ki, $a\xi + b\eta = 0$ bərabərliyi sanki yəqin ödənilsin. (*)-dan kovariasiya üçün

$$|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \le \sqrt{\mathbf{D}\xi\,\mathbf{D}\eta},$$

korrelyasiya əmsalı üçün

$$|\boldsymbol{\rho}(\xi, \eta)| \le 1$$

bərabərsizlikləri alınır.

BURGERS TƏNLİYİ « Бюргерса уравнение; Burgers equation » – bax, *Statistik hidromexanika*.

BURKHOLDER – QANDİ – DEVİS BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Буркхольдера – Ганди – Дэвиса неравенства; Burkholder – Gundy – Davis inequalities » –

$$c_p\,\mathbf{M}[\zeta, \zeta]_T^{p/2} \le \mathbf{M}(\zeta_T^*)^p \le C_p\,\mathbf{M}[\zeta, \zeta]_T^{p/2}, \quad p \ge 1$$

ikitərəfli bərabərsizlikləridir, burada $\zeta = \{\zeta_t,\ t \ge 0\}$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı *lokal martinqal*, $\zeta_0 = 0$, $[\zeta, \zeta] = ([\zeta, \zeta]_t,\ t \ge 0)$, – ζ-nın kvadratik variasiyası, T isə $\zeta^* = (\zeta_t^*,\ t \ge 0)$ təsadüfi prosesinin *Markov anıdır*; $\zeta_t^* = \sup_{s \le t} |\zeta_s|$. c_p və C_p sabitləri yalnız p-dən asılıdır.

$p > 1$ olduqda bu bərabərsizliklər B u r k h o l d e r – Q a n d i b ə r a b ə r s i z l i k l ə r i, $p = 1$ olduqda isə D e v i s b ə r a b ə r s i z l i k l ə r i adlanır.

Əd.: [1] B u r k h o l d e r D., D a v i s B., G u n d y R., Integral inequalities for convex functions of operator on martingales, в сб.: Proc 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 1972, v. 2, p. 223–40; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

BUTSTRƏP – QİYMƏT « бутстрап – оценка; bootstrap estimator » – bax, *Butstrəp qiymətləndirmə metodu.*

BUTSTRƏP QİYMƏTLƏNDİRMƏ METODU « бутстрап – метод оценивания; bootstrap method of estimation » – $X_n = (x_1,...,x_n)$ seçiminə görə qurulmuş statistikanın paylanmasının X_n-in empirik paylanmasından olan seçim üzrə qurulmuş eyni statistikanın paylanması vasitəsilə *statistik qiymətləndirilmə* metodudur.

F, – x_i-nin paylanma funksiyası, $T(F)$, – F-in hər hansı funksionalı olsun [məs., $T(F)$ F-in orta qiyməti, medianı və ya dispersiyası ola bilər]. $T_n(X_n)$, – X_n seçiminə görə $T(X)$ funksionalı üçün qurulmuş statistik qiymət olsun. Praktikada X_n seçimi üzrə təyin edilən $\theta_n(X_n, F) = T_n(X_n) - T(F)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının müxtəlif xarakteristikalarının statistik qiymətlərinin olması faydalıdır. Belə xarakteristikalardan ən çox istifadə olunanlar θ_n təsadüfi kəmiyyətinin meyli adlanan $\mathbf{M}\{\theta_n(X_n, F)\}$ və $\mathbf{D}\{\theta_n(X_n, F)\}$ dispersiyası kimi tipik xarakteristikalardır. Bəzən $\theta_n(X_n, F)$ statistikasının özünün paylanma funksiyasının qiymətləndirilməsi tələb olunur. Bu məqsədlə də B. q. m.-dan istifadə edilir. $\theta_n(X_n, F)$ statistikasının paylanmasının butstrəp–qiyməti (θ_n-in butstrəp–paylanması adlanan) X_n qeyd olunduqda $\theta_n(X_n^*, F_n)$ statistikasının paylanması kimi təyin edilir. Burada F_n, – X_n seçiminə uyğun paylanma funksiyası, $X_n^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, x_i^* – paylanma funksiyası F_n olan $i = \overline{1, n}$ qiymətlərində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

T_n-nin meyli və dispersiyasının [$\theta_n(X_n, F)$ statistikasının paylanmasının digər xarakteristikalarının da] butstrəp – qiymətləri θ_n-in butstrəp – paylanmasının uyğun xarakteristikaları kimi təyin olunur.

Butstrəp – paylanmanın aşkar analitik hesablanması yalnız bəzi xüsusi hallarda mümkündür. Buna görə də, bir qayda olaraq, aşağıdakı üsulla butstrəp – paylanma üçün approksimasiyalar qurulur. Paylanma funksiyası F_n olan x_{ij}^*, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, n}$ təsadüfi kəmiyyətləri çoxluğundan N sayda asılı olmayan seçimlər $X_{1n}^* = (x_{11}^*, ..., x_{1n}^*)$, …, $X_{Nn}^* = (x_{N1}^*, ..., x_{Nn}^*)$ götürülür. Sonra $\theta_1^* = \theta_n(X_{1n}^*, F_n),...,\theta_N^* = \theta_n(X_{Nn}^*, F_n)$ kəmiyyətləri hesablanaraq, statistikanın paylanmasının statistik qiyməti kimi $\theta_1^*, ..., \theta_N^*$ kəmiyyətlərinin empirik paylanması götürülür. Praktikada bu üsul B. q. m.-nun tətbiqi məqsədilə əsas götürülür. Əgər T_n statistikasının yalnız meyli və ya dispersiyasının qiymətləndirilməsi tələb olunursa, onda ümumi sayılmayan digər üsul – *Cəknayf metodu* (rus. "*метод складного ножа*" kimi də adlanan) üsulunu tətbiq etmək olar. Bu metodla alınmış statistik qiymətlərin meyl və dispersiyası butstrəp – qiymətlərin approksimasiyasıdır.

Əd.: [1] Эфрон Т. Б.., Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа, пер. с англ., М., 1988.

* **«BUTSTRƏP» METOD « «бутстреп» метод; «Boot-strap» method »** – çoxölçülü statistik analizin qeyri – ənənəvi metodlarından biridir. B. Efron tərəfindən 1977-də təklif olunmuş B. m. ənənəvi statistik metodlardan onunla fərqlənir ki, alınmış məlumatların müxtəlif hissələri dəfələrlə araşdırılır və alınan nəti-cələr müqayisə olunur və son qərar qəbul olunur. «Butstrəp» ter-mininin ilk dəfə işlənilməsi 20-ci əsrin 50-ci illərinə təsadüf edir. Rus ədəbiyyatında «раскрутка» kimi işlənmişdir. Sonradan bu termin [8]-də belə ifadə olunmuşdur: «Bootstrap» – özü-özünü təmin edən. Metoda və cihaza aid istifadə olunur. Butstrəp prosedur məlumatları araşdırma prosesində seçimi idarə-etmə qaydası kimi anlaşılır. Seçimin ənənəvi idarəolunma oblastı eksperimentlərin və ya tədqiqlərin planlaşdırılmasıdır; lakin yeni cəhət hesablama prosedurlarına, məlumatlar üzərində işləmə qaydalarına müəyyən bir qaydaya görə yanaşmadan ibarətdir.

Ənənəvi yanaşmada, əgər seçim verilmişdirsə, ən effektiv statistik qiymətlərin alınması üçün və hipotezlərin yoxlanılması üçün ən güclü kriterinin təyin edilməsi məqsədilə seçimi müşahidələnənlərin hər biri istifadə olunmalıdır; belə ki, hər bir müşahidələnənin hesaba alınmaması sərbəstlik dərəcəsi sayının bir vahid azalmasına səbəb olur və bu da alınan nəticələrə təsir edir. Bu halda alınan statistik qiymətlər meylli olur.

Məlumatlar ardıcıl seriyalarla (seçimlərlə) və ya tək-tək daxil olduğu halda, B. m.-un tətbiqi üçün çox da böyük olmayan həcmli seçim götürülür (B. Efron).

İmitasion modelləmə yaranana qədər hesablama prosesində seçimin idarəolunması haqqında məlumat belə olmadığı halda, «yenidənyoxlama» və ya «kross – yoxlama» yanaşması təklif olunmuşdu. Bu sadə yanaşmanın mahiyyəti ondan ibarətdir ki, verilmiş seçim təsadüfi qaydada yarı bölünür. Birinci hissə müşahidəçini maraqlandıran statistik qiymətlərin alınması, ikinci hissə isə «imtahan» üçün istifadə olunur. Sonradan bu ideya təkmilləşmiş və seçimin bir dəfə yox, bir neçə dəfə (ən yaxşısı çox dəfə) bölünməsi, məhz yarı deyil, məs., on hissəyə bölünməsi kimi hallar araşdırılmışdır. Hesablama texnikası imkan verir ki, effektivlik itkisi çox az, seçimi meylin olduqca az olmasını təmin edən prosedur tətbiq edilsin. Belə bir proseduru 1949-da M. Kenuy (M. Quenouille) (bax, [1]) təklif etmişdir. Bu prosedurun ideyası ondan ibarətdir ki, ardıcıl surətdə müşahidələr bir-bir xaric olunur, hər dəfə qalan informasiya üzərində işlənilir və çıxarılmış nöqtədə nəticənin nə olacağı təyin olunur. Bütün nöqtələr üzrə bu qayda ilə alınan fərqlənmələr toplusu özündə meyl haqqında informasiya daşıyır və bundan da istifadə olunur. Bundan başqa bu məlumatlarda dispersiya haqqında da informasiya olur və bu cəhətdən bu prosedurun tətbiqi üçün yeni perspektivlər meydana gəlir. Bu metodu C. Tyuki təkmilləşdirmiş (bax, [2], [3]) və onu «qatlanan bıçaq» metodu (Cəknayf metodu) adlandırmışdır. Bu metod rus ədəbiyyatında Kenuy metodu, meylə düzəliş, parçalama metodu kimi də adlandırılmışdır. Statistiklərin «qatlanan bıçaq» metoduna gətirən araşdırmalarından asılı olmayaraq mütəxəssislər obrazların müəyyənləşdirilməsi üzrə eyni nəticələrə gəlmişlər. Belə metodla alınan statistik qiymətlərin meylsiz statistik qiymətlər olduğu 1969-da isbat olunmuşdur (bax, [4]).

B. m. «qatlanan bıçaq» prosedurunun müəyyən bir ümumiləşməsidir. Belə ki, «qatlanan bıçaq» metodunda yenidənyoxlama metodlarında altseçimlərin formalaşması verilmiş ümumi çoxluqdan qaytarmamaq şərtilə seçim edilməsidir. B. Efron qaytarmamaq şərtilə seçimi təklif etmişdir. Onda məlumatlar üzərində araşdırmaların hər bir mərhələsində bütün sərbəstlik dərəcəsi sayları formal olaraq dəyişmir. Seçimi idarəetmə planlarından B. m.-un üstünlüyü məhz bununla izah olunur.

Butstrəp – prosesin ehtimal modeli aşağıdakı kimi qurulur.

$\xi_1, ..., \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər, $F(x) = \mathbf{P}\{\xi_i < x\}$ olsun. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ seçimi üzrə hər hansı verilmiş $\mathcal{F}$ funksional ailəsində $\theta = \theta(F)$

qiyməti qiymətləndirilir. n – ölçülü seçim üzrə hesablanmış $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\xi)$ statistik qiyməti

$$R(\hat{\theta}, F) = \mathbf{M}_F L(\hat{\theta}(\xi), F) \quad (1)$$

kəmiyyəti ilə ölçülür. Burada $L(\hat{\theta}, F)$ – əsl F paylanmasına uyğun $\theta = \theta(F)$ naməlum qiyməti əvəzinə $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin götürülməsindən yaranan itkilərdir. B. m. (1) bərabərliyi ilə verilən $R(\hat{\theta}, F)$-i

$$\hat{R}(\hat{\theta}) = R(\hat{\theta}^*, \hat{F}) \equiv \mathbf{M}_{\hat{F}} L(\hat{\theta}(\xi^*), F) \quad (2)$$

əvəzləməsi ilə qiymətləndirməyə imkan verir. Burada $\hat{F}$, – F paylanmasının statistik qiyməti, ξ^*, – $\hat{F}$-dən asılı olmayan n – həcmli təkrar seçimdir, yəni $\xi_1^*, ..., \xi_n^*$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $\xi_1, ..., \xi_n$ verilmiş qiymətlərinə nəzərən birgə şərti paylanması

$$\mathbf{P}\{\xi_1^* < x_1, ..., \xi_n^* < x_n \mid \xi_1, ..., \xi_n\} = \hat{F}(x_1) \dots \hat{F}(x_n) \quad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

$\xi^* = (\xi_1^*, ..., \xi_n^*)$ çoxluğu $\hat{F}$-dən n – həcmli b u t s t r ə p s e ç i m adlanır. $\hat{\theta}(\xi^*) = \hat{\theta}^*$, – $\hat{\theta}$-nın butstrəp realizasiyasıdır.

$$\mathbf{P}\{\hat{\theta}(\xi^*) < x \mid \xi_1, ..., \xi_n\} =$$

$$= \int_{\{z:\, \hat{\theta}(z) < x\}} \dots \int d\hat{F}(z_1) \dots d\hat{F}(z_n) = \hat{G}(x) \quad (4)$$

şərti ehtimalı paylanma funksiyası

$$\mathbf{P}\{\hat{\theta}(\xi) < x\} \le \int_{\{z:\, \hat{\theta}(z) < x\}} \dots \int dF(z_1) \dots dF(z_n) = G_F(x) \quad (5)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\hat{\theta}$ statistikasının b u t s t r ə p s t a t i s t i k q i y m ə t i d i r. Bu halda (2) düsturu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat{R}(\hat{\theta}) = \int \dots \int L(\hat{\theta}(z_1, ..., z_n), \hat{F}) \, d\hat{F}(z_1) \dots d\hat{F}(z_n) =$$

$$= \int L(z, \hat{F}) \, d\hat{G}(z) \quad (6)$$

F paylanma funksiyasının statistik qiymətinin seçilmə proseduru aprior informasiya ilə müəyyənləşdirilir. Parametrik halda, F-in $\mathcal{F} = \{F_\eta, \eta \in H\}$ ailəsinə mənsub olması məlum olarsa, H isə $\mathbb{R}^p$ p – ölçülü fəzanın oblastıdırsa, $\hat{F}$ statistik qiyməti əksər hallarda maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti η-nın əvəz olunmasının nəticəsi olur, yəni $\hat{F} = \hat{F}_\eta$ olur. Bu halda qiymətləndirilən $\theta = \theta(F_\eta) = t(\eta)$ funksionalı bir qayda olaraq, η-nın ($\eta \in H$) hamar funksiyası olur, $\hat{R}(\hat{\theta})$ kəmiyyəti isə

$$R(\hat{\theta}, F) = r(\hat{\theta}, \eta) =$$

$$= \int \dots \int l(\hat{\theta}(z_1, ..., z_n), dF_\eta(z_1) \dots dF_\eta(z_n)) \quad (7)$$

statistikası ilə, $l(\hat{\theta}, \eta) = L(\hat{\theta}, F_\eta)$, $\eta = \hat{\eta}$ əvəzləməsi ilə təyin olunur.

Digər qeyri – parametrik statistika halı əsl paylanma funksiyası F-in məlum olmadığı haldır.

Bu halda, $\hat{F}$ statistik qiyməti, adətən, empirik paylanma funksiyasıdır, yəni n sayda $\xi_1, ..., \xi_n$ nöqtələrinin hər birinə $1/n$ çəkisi qarşı qoyulur. Butstrəp – seçimlər, bu halda $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$-də topalanmış şərti polinomial paylanma qanununa tabe olur və ξ_1-in butstrəp – seçimdə υ_1 dəfə, ξ_n-in υ_n dəfə $(\upsilon_1 + ... + \upsilon_n = n)$ təkrar olunması hadisəsinin şərti ehtimalı

$$\frac{n!}{\upsilon_1! \dots \upsilon_n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n, \quad 0! = 1$$

düsturu ilə təyin olunur.

İstər parametrik, istərsə qeyri – parametrik halda (6) düsturu ilə $\hat{R}(\hat{\theta})$-nı (7)-dəki inteqralların çoxqat olması və polinomial sxemdəki toplananlar sayının çox olması ilə əlaqədar olaraq həmişə dəqiqliklə hesablamaq mümkün olmur. Buna görə də, B. Efron, statistik nəzəriyyəni Monte – Karlo metodu ilə əlaqələndirməni təklif etmişdir.

B. Efronun elmi işlərində verilmiş hallardan fərqli hallarda – ilkin seçimlərlə butstrəp seçimlərin həcmlərinin üst-üstə düşməyəcəyi hallarda P. Bikel və D. Fridman (bax, [5]) riyazi gözləmə və paylanma funksiyası üçün butstrəp – statistik qiymətlərin asimptotikasını müəyyən etmişlər. $\mu_n = (x_1 + ... + x_n)/n$ kəmiyyəti $\mu = \int x dF(x)$ – riyazi gözləməsinin statistik qiyməti, $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_n)^2$ isə $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 dF(x)$ dispersiyasının statistik qiyməti olsun, $0 < \sigma < \infty$; butstrəp – verilənlər üzrə $\mu_m^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi_i^*$ realizasiyaları təyin olunur; $(\xi_i^*, i = 1, ..., m)$, – $\hat{F} = \hat{F}_n$ paylanma funksiyası ($\xi_1, ..., \xi_n$ nöqtələrinə $1/n$ çəkisini qarşı qoyan) ilə şərti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda $m, n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|\mu_m^* - \mu_n| > \delta(\xi_1, ..., \xi_n)\} \to 0$$

münasibəti ixtiyari $\delta > 0$ və sanki bütün seçimi ardıcıllıqlar üçün ödənilir. Bu *Böyük ədədlər qanununun* ümumiləşməsidir. Bundan başqa, sanki bütün ardıcıllıqlar üçün t-nin ixtiyari qiymətində $m, n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\sqrt{m}(\mu_m^* - \mu_n) < t s_n / \xi_1, ..., \xi_n\}$$

şərti ehtimalları $\Phi(t)$-yə yığılır, yəni *mərkəzi limit teoremi* yerinə yetir.

R. Beran butstrəp – statistik qiymətlərin asimptotik optimallığını [6]-da araşdırmışdır. R. Beran həm də etibarlı statistik qiymətləndirmə fenomenini də izah etmişdir. B. Efron etibarlı qiymətləndirmənin yaxşılaşdırılmış butstrəp – prosedurlarını təklif etmiş,

R. Beran isə onların üstünlüyünü izah etmişdir və o göstərmişdir ki, standart intervala əsaslanan $\tilde{H}_n(t) = \Phi(t/\hat{\sigma}_n)$ statistik qiyməti butstrəp – statistik qiymətindən pisdir;

$$\hat{H}_n(t) \equiv H_n(\hat{F}, t) = \mathbf{P}_{\hat{F}}\{(\hat{\theta}_n^*(\xi^*) - \hat{\theta}(\xi)) < t/\sqrt{n}\}$$

– $H_n(F, t)$ paylanma funksiyasının butstrəp – statistik qiyməti asimptotik optimallıq xassəsinə malikdir,

$$H_n(F, t) = \mathbf{P}_F\{\hat{\theta}_n(\xi) - \theta(\xi) < t/\sqrt{n}\}$$

normalanmış paylanma funksiyasıdır.

Beləliklə, B. m. seçimlə əlaqədar yaranan meyli aradan qaldırmaq məqsədilə yaranmışdır. Bu metod təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları haqqında hipotezləri yoxlamaq məqsədilə, reqressiya, dispersion analiz və s. ilə əlaqədar ixtiyari statistik məsələlərin araşdırılmasında tətbiq olunur.

Əd.: [1] Quenouille M. N., Approximate tests of correlation in time series // J. Roy, Statist. Soc.-Ser. B., 1949, 11, p. 68–84; [2] Quenouille M. H., Notes on bias in estimation // Biometrika, 1956, 43, p. 353–360; [3] Tukey J. W., Bias and confidence in not quite large samples / Ann. Math. Statist., 1958, 29, p. 614; [4] Лунц А. Л., Браиловский В. Л., Об оценке признаков, полученных в статистических процедурах и распознавания. Изв. АН. СССР – Сер. Техн. Кибернетика, № 3, 1969; [5] Bickel P. J., Freedman D. A., Some asymptotic theory for the bootstrap., Ann. Statist., 9, № 6, p. 431–443, 1981; [6] Beran R., Estimated sampling distributions; the bootstrap and competitors, Ann. Statist., 10, № 1, p. 212-223, 1982; [7] Ефрон Б., Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа, пер. с англ., М., 1988; [8] Вычислительная техника и обработка данных: Терминологический толковый словарь фирмы BM.-М.: Статистика, 1978.

Bax, *Cəknayf metodu.*

BUTSTRƏP – PAYLANMA « бутстрап – распределение; bootstrap distribution » – bax, *Butstrəp qiymətləndirmə metodu.*

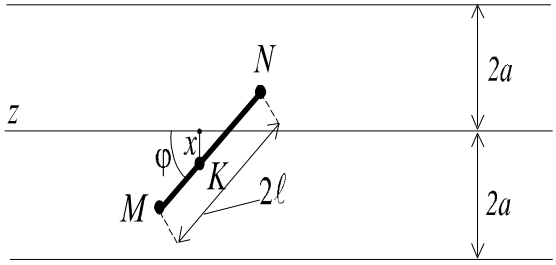
BÜTÜN REQRESSİYALAR METODU « всех регрессий метод; all possible regressions method » – kompyuter yaddaşının qənaətlə istifadə edilməsini ifadə edən, kvadratların qalıq cəmini minimallaşdıran, reqression eksperimentin prediktorlarının gücləri verilmiş altçoxluqlarının sürətləndirilmiş ayırd olunmasıdır.

Əd.: [1] Себер Г., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Статистические методы для ЭВМ, пер. с англ., М., 1986.

BYENEME – ÇEBIŞEV BƏRABƏRSİZLİYİ « Бьенеме – Чебышева неравенство; Bienaime – Chebyshev inequality » – bax, *Çebışev bərabərsizliyi.*

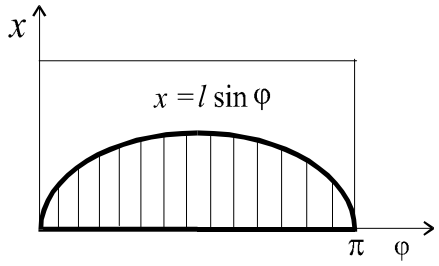
BYUFFON HALQASI « Бюффоново кольцо; Buffon ring » – bax, *İnteqral həndəsə.*

BYUFFON İYNƏ MƏSƏLƏSİ « Бюффона задача об игле; Buffon's needletossing problem » – *həndəsi ehtimalların* hesablanmasına aid ilk misaldır. Məsələ J. Byuffon tərəfindən 1733-də qoyulmuş, 1777-də həlli ilə birlikdə nəşr olunmuşdur (bax, [1]). Məsələ aşağıdakı kimi qoyulmuşdur: bir-birindən $2a$ uzunluqda məsafədə yerləşən və Oy oxuna paralel olan düzxətlər çəkilmiş müstəvi üzərinə ixtiyari qaydada $2l$ $(l < a)$ uzunluqlu iynə atılır. İynənin bu düzxətlərdən birini kəsməsi hadisəsinin ehtimalını tapmaq tələb olunur. x – iynənin mərkəzi nöqtəsindən ona soldan ən yaxın düzxəttə qədər məsafə, φ – iynə ilə bu düzxəttin əmələ gətirdiyi bucaq olsun.



Şəkil 1

φ bucağı və x kəmiyyəti iynənin müstəvidəki vəziyyətini birqiymətli təyin edir. Bu eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası – $\Omega = \{(x, \varphi): 0 \le x \le l,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$ düzbucaqlısı olacaqdır.



Şəkil 2

Aydındır ki, iynə düzxətlərdən birini, yalnız və yalnız, $x \le l\sin\varphi$ şərti ödənildikdə kəsə bilər.

$$C = \{(x, \varphi): x \le l\sin\varphi,\ (x, \varphi) \in \Omega\}$$

çoxluğu şəkil 2-də ştrixlənmiş oblastdır. Əgər x və φ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və uyğun olaraq, $(0, 1)$ və $(0, \pi)$-də müntəzəm qanunla paylanmışlarsa, onda axtarılan ehtimal

$$\mathbf{P}(C) = \frac{\int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi} \qquad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur.

(*) düsturundan istifadə edərək, π ədədinin qiymətini eksperimental olaraq təyin etmək mümkün olmuşdur (iynənin atılma sayını çoxaltmaq şərtilə). Əgər qurulmuş ehtimal modeli eksperimenti adekvat olaraq ifadə edirsə, onda n-in böyük qiymətlərində iynənin düzxətti kəsməsi hadisəsinin tezliyi m/n $\mathbf{P}(C)$ ehtimalından çox az fərqlənməlidir, yəni $2l/a\pi \sim m/n$ münasibəti ödənilməlidir. Bu münasibətdən

$$\pi \sim \frac{2l \cdot n}{a\, m}$$

olduğu alınır.

Birinci hesablama Monte – Karlo metodu ilə aparılmışdır.

B. m.-nə uyğun ikili məsələ də qoyulur: iynənin vəziyyəti qeyd olunur və bu halda müstəvi üzərinə ixtiyari qaydada, bərabər –

vahid məsafədə yerləşən paralel düz xətlərdən ibarət şəbəkə atılır; bu halda B. m. müstəvi üzərində düzxətlərin Evklid hərəkətlərinə nəzərən invariant ölçü anlayışına, yəni inteqral həndəsə anlayışlarına gətirir.

Əd.: [1] B u f f o n G., Essai d'arithmetique morale Supplementa «L'Histoire Naturelle», 1777, t. 4; [2] К е н д а л л M., М о р а н П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [3] Комбинаторные принципы в стохастической геометрии. Сб. статей, Ер., 1980.

BYUFFON – SİLVESTR MƏSƏLƏSİ « Бюффона – Сильвестра задача; Buffon – Sylvester problem » – *Byuffon iynə məsələsinin* iynələrin sayının m-ə bərabər halı üçün ümumiləşməsidir; [1]-də C. Silvestr tərəfindən araşdırılmışdır; məsələ aşağıdakı şəkildə qoyulur. Müstəvi üzərində m sayda iynə qeyd olunmuşdur. B_i, – i-ci iynəni kəsən düzxətlər çoxluğu, μ – düzxətlər fəzasında Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant ölçü olsun. $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i\right)$ və $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right)$ ölçülərinin qiymətlərini təyin etmək tələb olunur. C. Silvestrin aldığı nəticəyə görə $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i\right)$ və $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right)$ – iynələrin ucları arasında bütün mümkün məsafələrin tamqiymətli əmsallarla xətti funksiyalarıdır. İynələrin sayının ixtiyari ədəd olduğu və onların ümumi yerləşdirilməsi halında tamqiymətli əmsalların hesablama alqoritmi ilk dəfə [2]-də təklif olunmuşdur. Sonrakı araşdırmalardan aydın olmuşdur ki, B. – S. m. kombinator inteqral həndəsənin ümumi nəzəriyyəsinin başlanğıc hissəsində əhatə olunmuşdur.

Əd.: [1] S y l v e s t e r J. J., «Acta Math.», 1890, v. 14, p. 185–205.

CALAŞDIR(IL)MA(sı) təsadüfi proseslərin **« склеивание** случайных процессов, каплинг; **coupling** of random processes **»**, kaplinq – iki və ya bir neçə *təsadüfi prosesin* eyni bir ehtimal fəzasında verilməsinin xüsusi bir qaydasıdır ki, ya bu proseslərin vəziyyətləri və ya paylanmaları zaman anlarının müəyyən çoxluğunda üst-üstə düşür (calaşırlar). Bu üsul erqodik teoremlərin isbatında (varlıq və yeganəlik teoremlərinin), stasionar paylanmalara yığılma sürətinin qiymətləndirilməsində, təsadüfi proseslərin dayanıqlılığının qiymətləndirilməsi və dayanıqlılıq şərtlərinin tapılmasında və s.-də effektiv olur. Calanma metodu ən geniş surətdə vəziyyətləri çoxluğu ixtiyari olan Markov zəncirlərinin, təsadüfi Gibbs meydanlarının, regenerarlanan və yeniləşən proseslərin analizində istifadə olunur. Calanma qaydasının mənası marginal paylanmalar qeyd olunduğu halda müqayisə olunan təsadüfi proseslərin birgə paylanmasının variasiyasındadır, bu şərtlə ki, calanma effektli olsun. Calanma effektli olduqda bir prosesin xassələri haqqında onunla «calanmış» prosesin xassələrinə görə mülahizələr aparmaq və onun üçün kəmiyyətcə uyğun statistik qiymətlər almaq olur.

Bax, *Markov prosesi*; çevirmələr.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [3] Калашников В. В., Метод склеивания, его развитие и применения, в кн.: Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989.

CARİ ÖDƏMƏ « текущая плата; reward function » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

CAZİBƏ OBLASTI « притяжения область; attraction domain » – bax, *Renormalizasion qrup.*

CAZİBƏ OBLASTI dayanıqlı qanunun **« притяжения область** устойчивого закона; **domain of attraction** of a stable law **»**, G dayanıqlı qanununun C. o. – elə F *paylanmalarının* çoxluğudur ki, normalayıcı A_n ardıcıllıqlarını hər hansı cür seçdikdə və $B_n > 0$ olduqda, bütün x-lər üçün $n \to \infty$ olduqda

$$F^{*n}(B_n x + A_n) \to G(x) \qquad (*)$$

münasibəti ödənilir, burada $*n$, – n – qat kompozisiyanı ifadə edir. (*) şərti

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - A_n \right) \Big/ B_n$$

cəmlərinin paylanma funksiyalarının $G(x)$ funksiyasına zəif yığılmasına ekvivalentdir, burada X_i – paylanma funksiyaları $F(x)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Bütün dayanıqlı qanunlar və yalnız bunlar boş olmayan C. o.-na malikdirlər. Eyni tip qanunlara aid cazibə oblastları bəzən üst-üstə düşür və belə hallarda onlara tiplərin cazibə oblastları deyilir. Əgər qanun xarakteristik göstəricisi $0 < \alpha \le 2$, α olan dayanıqlı paylanmanın C. o.-na aid olarsa, onda ixtiyari $0 < \delta < \alpha$ üçün

$$\int |x|^{\delta} F(dx) < \infty$$

olur və (*)-da B_n kəmiyyətləri $B_n = n^{1/\alpha} h(n)$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $h(n)$ – asta dəyişən funksiyalardır. Hər bir dayanıqlı G qanunu özünün C. o.-na aiddir, bu halda $B_n = n^{1/\alpha}$ olur, α isə G qanununun göstəricisidir. (*) münasibəti $B_n = a n^{1/\alpha}$ ($a > 0$ sabitdir) bərabərliyi ilə verilən B_n-lər üçün ödənilərsə, onda F paylanmaları çoxluğu *normal cazibə oblastı* adlanır.

Paylanma funksiyası $F(x)$-in göstəricisi α olan, $0 < \alpha \le 2$ dayanıqlı qanunun C. o.-na aid olması üçün

$$\lim_{z \to \infty} z^2 \chi(z) \Big/ \int_0^z x^2 \, d\chi(x) = (2 - \alpha)/\alpha$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir; burada $\chi(z) = 1 - F(z) + F(-z)$, $z > 0$ (Sakoviç teoremi [3]).

$0 < \alpha < 2$ olduğu halda

$$F(x) = (C_1 + o(1)) |x|^{-\alpha} h(|x|), \quad x \to -\infty,$$

və

$$F(x) = 1 - (C_2 + o(1)) x^{-\alpha} h(x), \quad x \to \infty$$

şərtləri də zəruri və kafi şərtlərdir, burada $h(x)$ – asta dəyişən funksiyadır, $C_1 \ge 0$, $C_2 \ge 0$, $C_1 + C_2 > 0$.

$\alpha = 2$ olduqda, yəni normal qanuna cazibə üçün aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənilməsi zəruri və kafidir:

1) $F(x)$ sonlu dispersiyaya malik paylanmadır;

2) $(1 - F(x) + F(-x)) x^2$, – $x \to \infty$ olduqda asta dəyişən funksiyadır.

Paylanmanın dayanıqlı qanunların C. o.-na aid olması haqqında kriterilər çoxölçülü hallar üçün də məlumdur (bax, məs., [3]).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Сакович Г. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 357–61.

CAZİBƏ OBLASTI qrupda dayanıqlı paylanmanın « **притяжения область** устойчивого распределения на группе; **domain of attraction** of a stable distribution on a group » – lokal kompakt G qrupunda bütün elə ν ehtimal paylanmalarının çoxluğudur ki, bu ν -lər üçün G qrupunda kəsilməz avtomorfizmlərin elə $\{\tau_n\}$ ardıcıllığı və G qrupunun elementlərinin elə $\{x_n\}$ ardıcıllığının varlığı fərz olunur ki,

$$Y_n = \sigma_n(S_n \circ x_n) \qquad (1)$$

normalanmış kompozisiyalarının paylanmaları $n \to \infty$ olduqda G qrupunda verilmiş μ *dayanıqlı paylanmasına* zəif yığılır, burada $\circ$ – qrup əməlidir, $S_n = X_1 \circ \ldots \circ X_n$ – eyni μ paylanması ilə verilən asılı olmayan $X_1, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kompozisiyasıdır.

Əgər G qrupunun bütün kəsilməz avtomorfizmlərinin $\mathrm{Aut}\, G$ çoxluğundan hər bir σ üçün və G qrupunda təyin olunmuş bütün Borel ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathscr{M}^1(G)$ -dən μ ölçüsü üçün, hər bir $E \subset G$ Borel çoxluğu üçün $\sigma\mu$ ölçüsü $\sigma\mu(E) = \mu(\sigma^{-1}(E))$ qaydası üzrə təyin olunarsa, onda (1) münasibətini paylanmalar simvolikası ilə $n \to \infty$ olduqda

$$\sigma_n(\nu^{*n}) * \delta_{x_n} \Rightarrow \mu \qquad (2)$$

münasibəti şəklində yazmaq olar, burada ν^{*n} – kompozisiya əməlinə nəzərən ν -nün n – qat kompozisiyasıdır, δ_{x_n}, – x_n nöqtəsində çırlaşmış ehtimal paylanmasıdır. μ paylanmasının G qrupunun avtomorfizmlərinin kəsilməz birparametrli $T = \{\tau_t,\ t > 0\}$ qrupuna nəzərən dayanıqlı paylanma olduğu fərz olunur (bax, *Dayanıqlı paylanma* qrupda). G qrupunda normal dayanıqlı paylanmanın C. o. elə $\nu \in \mathscr{M}^1(G)$ ehtimal paylanmalarının çoxluğu kimi təyin olunur ki, bunlar üçün (1) münasibəti və ya (2) münasibəti $\sigma_n = \tau_{1/n}$ avtomorfizmlərilə ödənilsin. $\mathscr{D}(\mu)$ və $\mathscr{D}_N(\mu)$ uyğun olaraq, dayanıqlı və normal μ paylanmasının C. o. olsun. (1) və (2) münasibətlərində $x_n = e$ olduqda, C. o. üçün ciddi mənada daha güclü nəticələr alınmışdır. Bu halda limit paylanması μ G qrupunda *ciddi dayanıqlı paylanma* olacaqdır. (Bundan sonra, burada, C. o. və dayanıqlı paylanmalar ciddi mənada anlaşılır.) C. o.-nı ixtiyari $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ paylanması üçün təyin etmək olar. Bununla belə, bu anlayış aşağıdakı nəticəyə əsasən yalnız dayanıqlı paylanmalar üçün məzmun kəsb edir. Əgər μ ölçüsü G -də tam ehtimal ölçüsüdürsə, yəni μ ölçüsü G qrupunun əlaqəlilik siniflərinin heç birində özünün əlaqə altqrupu üzrə topalanmamışdırsa, onda $\mathscr{D}(\mu)$, yalnız və yalnız, μ ölçüsü dayanıqlı olduğu halda boş olmayan C. o.-dır (bax, [1]).

G qrupunda ixtiyari ciddi dayanıqlı μ paylanması $C_0 \otimes_\gamma K$ yarıdüz hasilinə izomorf olan hər hansı qapalı T – invariant C altqrupunda topalanmışdır, burada C_0 – birəlaqəli nilpotent Li qrupu, K – kompakt qrup, $\gamma: K \to \mathrm{Aut}(C_0)$ – yarıdüz hasilin strukturunu təyin edən homomorfizmdir. μ dayanıqlı paylanması $\mu = \mu_0 * \omega_K$ şəklində ayrılışla ifadə oluna bilir, burada μ_0, – C_0 -da dayanıqlı paylanma, ω, – K -da normalanmış Haar ölçüsüdür (bax, [1]). Əgər G – birəlaqəli nilpotent $\mathfrak{g}$ Li cəbrinə malik Li qrupudursa və $\exp: \mathfrak{g} \to G$ eksponensial inikasdırsa, onda G qrupunda ixtiyari obyekt üçün (ölçü, avtomorfizm, funksional doğuran funksiyalar üçün) eksponensial inikas istifadə edərək, $\mathfrak{g}$ Li cəbrində analoji obyekt təyin etmək mümkündür. Belə obyektin hər biri qrupdakı eyni hərflə, lakin yuxarısında $\circ$ işarəsi ilə (məs., əgər $\nu \in \mathscr{M}^1(G)$ olarsa, onda $\overset{\circ}{\nu} \in \mathscr{M}^1(\mathfrak{G})$) işarə olunduqda və əgər μ ölçüsü G -də dayanıqlı ölçüdürsə, onda *ölçülərin kompozisiya semi – qrupuna* uyğun A *doğuran funksionalından* istifadə edərək $\mathfrak{g}$ -də ölçülərin kompozisiya semi – qrupunun doğuran funksionalı $\overset{\circ}{A}$ və λ ölçüsünü təyin etmək mümkündür. λ ölçüsü $\mathfrak{g}$ -də $\overset{\circ}{T}$ – dayanıqlı ölçü olur. Qeyd etmək lazımdır ki, $\lambda \neq \overset{\circ}{\mu}$. Belə bir nəticə doğrudur: $\nu \in \mathscr{D}(\mu)$ münasibəti, yalnız və yalnız, $\overset{\circ}{\nu} \in \mathscr{D}(\lambda)$ olduğu halda doğrudur (bax, [2], [3]). Ümumi halda, μ dayanıqlı paylanmasının idempotent ω_k vuruğu olarsa, C. o.-nın təsviri yalnız qrupların xüsusi sinifləri üçün alınmışdır. Məs., $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasının məxsusi hərəkətlərinin qrupu $M(d)$ üçün $\{X_n\}$ asılı olmayan $M(d)$ – qiymətli, ν paylanmasına malik elementlərin ardıcıllığı olsun. Hər bir X_i elementini $X_i = (U_i, Y_i)$ kimi göstərmək olar, burada $U_i \in SO(d)$ – koordinat başlanğıcı ətrafında fırlanma, Y_i, – $Y_i \in \mathbb{R}^d$ vektoruna $\mathbb{R}^d$ -də yerinidəyişmə işarələməsidir. $\bar{\nu}$ ilə U_i -nin paylanması işarə olunmuşdur. Aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər μ $M(d)$ -də göstəricisi α -ya bərabər dayanıqlı paylanmadırsa, onda $\nu \in \mathscr{D}(\mu)$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki: 1) $\bar{\nu}^{*n}$ n – qat kompozisiyası $n \to \infty$ olduqda $SO(d)$ qrupunda normalanmış Haar ölçüsünə zəif yığılır; 2) $\mathbf{P}\{|Y_i| > x\} = (c + o(1))\, x^{-\alpha} h(x)$, burada $c > 0$, $h(x)$, – $x \to \infty$ olduqda asta dəyişən funksiyadır (bax, [4] – [6]).

Bax, *Mərkəzi limit teoremi* qruplarda.

Əd.: [1] Hazod W., «Lecture Notes in Math.», 1986, № 1210, p. 304–52; [2] Khokhlov Yu. S., In: Probability Measures on Groups, X, N. Y., 1991, p. 239–48; [3] Hazod W., Scheffler H.–P., «J. Theor. Probab.», 1993, v. 6, № 1, p. 175–86; [4] Хохлов Ю. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 2, с. 342–44; [5] Гринцявичус А. К., «Литов. матем. сб.», 1985, т. 25, № 3, с. 39–52; [6] Гринцявичус А. К., «Литов. матем. сб.», 1990, т. 30, № 1, с. 14–29.

CAZİBƏ OBLASTI operator dayanıqlı paylanmanın « **притяжения область** операторно устойчивого распределения; **domain of attraction** of an operator stable distribution » – $\mathbb{R}^d$ -də bütün elə υ ehtimal *paylanmalarının* toplusudur ki, bunlar üçün $\mathbb{R}^d$ -də xətti operatorların $\{A_n\}$ ardıcıllığı vardır və $\mathbb{R}^d$ -də vektorların elə $\{a_n\}$ ardıcıllığı vardır ki, $n \to \infty$ olduqda

$Y_n = A_n(S_n - a_n)$ normalanmış cəmlərinin paylanmaları *operator dayanıqlı* μ *paylanmasına* zəif yığılır, burada $S_n = X_1 + ... + X_n$ – eyni υ paylanmasına malik asılı olmayan təsadüfi vektorların cəmidir. B – operator dayanıqlı μ paylanmasının eksponenti olduqda, A_n kimi n^{-B} şəklində operator götürülərsə, onda operator dayanıqlı paylanmanın normal cazibə oblastının tərifi alınır.

μ – eksponenti B olan, $\mathbb{R}^d$-də tam operator dayanıqlı paylanma olsun. μ paylanması $\mathbb{R}^d$-də sonsuz bölünən paylanmadır və onun xarakteristik funksiyası $\hat{\mu}$-nün (a, C, M) üçlüyü ilə *Levi – Xinçin kanonik ifadəsi* mümkündür, burada $a \in \mathbb{R}^d$, C – kovariasion operator, M – Levi ölçüsüdür. Aydındır ki, ixtiyari operator dayanıqlı μ paylanması $\mu = \mu_g * \mu_p$ şəklində ifadə olunur, burada μ_g, – R_g altfəzasında tam Qauss ölçüsüdür, μ_p paylanması R_p altfəzasında Qauss komponenti olmayan tam operator dayanıqlı paylanmadır, R_g və R_p altfəzaları B – invariant fəzalardır və $R_p \cap R_g = \{0\}$, $R_g \oplus R_p = \mathbb{R}^d$. Levi ölçüsü aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$M(E) = \int_L \int_0^\infty I_E(t^B x)\, t^{-2}\, dt\, K(dx),$$

I_E, – $E \subset \mathbb{R}^d$ çoxluğunun indikatorudur,

$$L = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1,\ \|t^B x\| > 1 \text{ bütün } t > 1 \text{ üçün}\},$$

$$K(A) = M(t^B x : x \in A,\ t \geq 1),\ A \subset L.$$

Levi ölçüsü faktiki olaraq R_p altfəzasında topalanmışdır.

F_g və F_p – uyğun olaraq, R_g və R_p altfəzalarında proyeksiyalayıcı operatorlar, $D_N(\mu)$ – operator dayanıqlı μ paylanmasının normal C. o. olsun. Aşağıdakı nəticə doğrudur: $\nu \in D_N(\mu)$ münasibəti, yalnız və yalnız o halda doğrudur ki, $F_g(\nu) \in D_N(\mu_g)$ və $F_p(\nu) \in D_N(\mu_p)$ münasibətləri ödənilsin. Bundan əlavə, $\nu \in D_N(\mu)$, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, ixtiyari $A \subset L \cap R_p$ Borel altçoxluğu üçün: $K(\partial A) = 0$, $\lim_{t\to\infty} t\nu\{s^B x : x \in A,\ s > t\} = K(A)$ və $F_g(\nu)$ isə C kovariasion operatoru ilə üst-üstə düşən kovariasion operatora malik olsun, burada ∂A, – A çoxluğunun sərhədidir (bax, [1], [2]).

Cazibə normal olmadıqda vəziyyət mürəkkəbləşir, belə ki, bu halda normalayıcı operatorların şəkli verilmir.

$S^{d-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^d : \|\theta\| = 1\}$ olsun.

$$a_n(\theta) = \sup\{a \geq 0 : n\mathbf{M}(\langle X_1, \theta\rangle^2 \wedge a^2) \geq a^2\} \text{ və}$$

$$\boldsymbol{w}(\theta) = \sup\{\boldsymbol{w} \geq 0 : \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 \wedge \boldsymbol{w}^2) M_\theta(dy) + \|C_\theta\|^2 \geq \boldsymbol{w}^2\}$$

S^{d-1}-də təyin olunmuş funksiyalardır, burada $a \wedge b = \min(a, b)$, C_θ, – C operatorunun məhdudiyyəti, M_θ, – M ölçüsünün $\theta \in S^{d-1}$ istiqamətinə proyeksiyası, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, – $\mathbb{R}^d$-də skalyar hasildir. $d_{n,\theta} > 0$, $M_{n,\theta}$ – spektral Levi ölçüləri olduqda, əgər ixtiyari $y > 0$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} \left| n\mathbf{P}\{\langle X, \theta\rangle \geq d_{n,\theta}(y)\} - M_{n,\theta}\{[y, \infty)\}\right| = 0$$

münasibəti ödənilərsə, onda X^d təsadüfi vektoru qalıqlarda müntəzəm $(d_{n,\theta}, M_{n,\theta})$ şərtini ödəyir, deyilir. $l_n(\theta)$, – S^{d-1}-dən olan vektorlar ardıcıllığı və

$$m_{n,l_n}(\theta) = n\,\mathbf{M}(\langle X, \theta\rangle I\{|\langle X, \theta\rangle| \leq a_n(\theta)/\boldsymbol{w}(l_n(\theta))\}),$$

burada $I(A)$, – A hadisəsinin indikatorudur,

$$h_{n,l_n}(\theta) = m_{n,l_n}(\theta) - a_1(M_{l_n}, b_{l_n})\, a_n(\theta)/\boldsymbol{w}(l_n(\theta))$$

olsun, burada

$$b_\theta = \langle a, \theta\rangle + \int \langle u, \theta\rangle [(1 + \langle u, \theta\rangle^2)^{-1} - (1 + \|u\|^2)^{-1}] M(du)$$

$$a_1(M_\theta, b_\theta) = b_\theta + \int_{|u|\leq 1} u^3(1 + u^2)^{-1} M_\theta(du) + \int_{|u|>1} u(1 + u^2)^{-1} M_\theta(du).$$

Əgər

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} \left| h_{n,l_n}(\theta) - \sum_{j=1}^{d} h_{n,l_n}(\xi_{nj})\langle\theta, \xi_{nj}\rangle \right| \Big/ a_n(\theta) = 0$$

olarsa, kəsik orta qiymətlər $m_{n,l_n}(\theta)$, $\{\xi_{n1}, ..., \xi_{nd}\}$ bazisinə nəzərən v e k t o r a o x ş a r orta qiymətlər adlanır. Bu halda ν-nün paylanması operator dayanıqlı μ paylanmasının C. o.-na, yalnız və yalnız, o halda aid olur ki, vahidi vektorlardan elə $\{\gamma_{nj}, j = 1, ..., d\}$ bazisi mövcud olsun ki,

$$R_n : R_n^{*-1}\gamma_{nj} = (a_n(\gamma_{nj})/\boldsymbol{w}(e_j))\, e_j$$

operatorları və $g_n(\theta) = R_n^{*-1}\theta \Big/ \left\|R_n^{*-1}\theta\right\|$ vektorları üçün aşağıdakı şərtlər ödənilsin:

1) X_1 təsadüfi vektoru qalıqlarda $a_n(\theta)/\boldsymbol{w}(g_n(\theta), M_{g_n}(\theta))$ – müntəzəm şərtini ödəyir;

2) $\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta \in S^{d-1}} \left| a_n(\theta)/\boldsymbol{w}(g_n(\theta)) \left\|R_n^{*-1}\theta\right\|^{-1} \right| = 0$;

3) $m_n(\theta) = m_{n,g_n}(\theta)$ kəsik orta qiymətlər $\{\xi_{n1}, ..., \xi_{nd}\}$ bazisinə nəzərən vektoraoxşar orta qiymətlərdir, bu bazis isə R_n^{*-1}-in aşağıdakı şəkildə verilən polyar ayrılışı ilə təyin olunur:

$$R_n^{*-1}x = \sum_{j=1}^{d} \langle x, \zeta_{nj}\rangle \left\|R_n^{*-1}\zeta_{nj}\right\| \boldsymbol{\psi}_{nj},$$

burada $\{\psi_{n1}, ..., \psi_{nj}\}$ – ortonormalanmış bazisdir. R_n operatorlarını $\{S_n\}$ ardıcıllığı üçün normalayıcı kimi götürmək olar. $\{\gamma_{n1}, ..., \gamma_{nd}\}$ bazisinin konstruktiv qurulması məsələsi hələ ki, həll olunmamışdır (bax, [3]).

Əgər μ xalis Qauss paylanmasıdırsa, onda ümumiliyi pozmadan, onu standart normal paylanma hesab etmək olar ki, bu paylanma da sferik simmetrik paylanmadır. Bu halda, X_1 təsadüfi vektorunun paylanması ν tam operator dayanıqlı μ paylanmasının C. o.-na, yalnız və yalnız, o halda mənsubdur ki,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\theta\in S^{d-1}} t^2 \mathbf{P}\{|\langle X_1, \theta\rangle| > t\} \Big/ \mathbf{M}(\langle X_1, \theta\rangle^2 \wedge t^2) = 0$$

münasibəti ödənilsin. Bu zaman $a_n(\theta)$ funksiyasından istifadə edərək, normalayıcı A_n operatorlarını aşkar şəkildə yazmaq olur (bax, [4]). Göstəricisi $\alpha < 2$ olan sferik simmetrik dayanıqlı qanunlara cazibə şərtləri ümumi halla müqayisədə olduqca sadə olur (bax, [4]).

Əd.: [1] Jurek Z. J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 2, с. 396–400; [2] Hudson W. W., Mason J. D., Veech J. A., «Ann. Prob.», 1983, v. 11, № 1, p. 178–84; [3] Hahn M. G., Klass M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1985, Bd 69, S. 479–505; [4] Hahn M. G., Klass M. J., «Lecture Notes Math.», 1981, № 860, p. 187–218.

CAZİBƏ SƏRHƏDİ « притягивающая граница; attracting boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

CESSEN – VİNTNER TEOREMİ « Джессена – Винтнера теорема; Jessen – Wintner theorem »: əgər ədəd oxunda diskret paylanma funksiyalarının hesabi sayda kompozisiyası paylanma funksiyasıdırsa, onda bu paylanma funksiyası ya diskret, ya sinqulyar, ya da mütləq kəsilməzdir (bax, *Lebeq ayrılışı*). Misallar göstərir ki (bax, [2], VIII fəs., §5), qeyd olunan hallardan hər biri reallaşır. C. – V. t. metriklənən lokal kompakt Abel qrupları halı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Jessen B., Wintner A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1935, v. 38, № 1, p. 48–88; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] Золотарев В. М., Круглов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 712–24; [4] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979.

CEYMS – STEYN STATİSTİK QİYMƏTİ « Джеймса – Стейна оценка; James – Stein estimator » – kovariasion matrisi $\sigma^2 E$, orta qiymətlər vektoru naməlum θ olan, $\mathbb{R}^p$-də $N(\theta, \sigma^2 E)$ Qauss paylanmasına tabe təsadüfi X vektoru üzrə təyin olunan

$$\hat{\theta}^{JS} = (1 - \sigma^2(p-2)/|X|^2)X$$

şəklində *statistik qiymətdir*, burada E – vahidi matrisdir. $p > 2$ olduqda $\hat{\theta}^{JS}$ statistik qiyməti X-in $|\hat{\theta} - \theta|^2$ *itki funksiyasına* nəzərən adi statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur, yəni:

$$\mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}^{JS} - \theta|^2 < \mathbf{M}_\theta |x - \theta|^2 = \rho\sigma^2, \quad \theta \in \mathbb{R}^p, \qquad (1)$$

münasibəti ödənilir. Xüsusi halda $\mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}^{JS}|^2 = 2\sigma^2$. $\hat{\theta}^{JS}$ – minimaks, lakin $\mathbb{R}^p$-də qeyri–məqbul statistik qiymətdir və

$$\hat{\theta}^{JS}_+ = (1 - \sigma^2(p-2)/|X|^2)_+ X$$

statistik qiymətini aşmır, burada $a_+ = \max(a, 0)$ işarələməsindən istifadə olunmuşdur.

X kimi eyni paylanmaya malik n sayda asılı olmayan müşahidələr nəticəsində $\hat{\theta}^{JS}_n$, $\hat{\theta}^{JS}_{+n}$ statistik qiymətləri X vektorunun seçimi vektorla, σ^2-nın isə σ^2/n ilə əvəz olunması ilə alınır. $n \to \infty$ olduqda hər iki statistik qiymət $|\theta| > \delta$, $\delta > 0$ üzrə müntəzəm ayrılışla ifadə olunur:

$$n\mathbf{M}_\theta |\hat{\theta}_n - \theta|^2 = p\sigma^2 - (p-2)^2\sigma^4 n^{-1} |\theta|^{-2}(1 + \sigma(1))$$

və n^{-1}-ə qədər dəqiqliklə məqbul statistik qiymətlərdir.

(1)-i ödəyən $\hat{\theta}$ statistik qiymətlərin varlığı 1956-da Ç. Steyn tərəfindən kəşf olunmuşdur (bax, [1]), $\hat{\theta}^{JS}$ və $\hat{\theta}^{JS}_+$ statistik qiymətləri [2]-də təklif olunmuşdur.

Geniş planda Ç. Steynin aldığı nəticə (effekt) ondan ibarətdir ki, asılı olmayan seçimlər üzrə qurulmuş, $\hat{\theta}_i$ komponentləri və uyğun θ_i parametrlərinin məhz məqbul statistik qiymətləri olan $(\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_p)$ statistik qiyməti skalyar itki funksiyasına nəzərən $(\theta_1, ..., \theta_p)$ vektorunun qeyri – məqbul statistik qiyməti ola bilər. Bu nəticə qiymətləndirmənin müxtəlif məsələlərini əhatə edir.

$N(\theta, G)$ Qauss paylanmasına malik X müşahidəsi üzrə naməlum θ vektorunu qiymətləndirmək tələb olunur; bu halda kvadratik itki funksiyasının $L(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta|^{\mathsf{T}} H(\hat{\theta} - \theta)$ olduğu fərz olunur, burada G, H – verilmiş simmetrik müsbət müəyyən matrislərdir. $\hat{\theta} = X + Gg(X)$ şəkilli statistik qiymətlər üçün risk

$$\mathbf{M}_\theta L(\hat{\theta}, \theta) = \mathbf{M}_\theta (L(X, \theta) + \delta(X))$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, – $N(\theta, G)$, $\theta \in \mathbb{R}^p$ ölçüsü üzrə $|g|^2$ ilə birlikdə inteqrallanan hissə-hissə kəsilməz törəmələrə malikdir,

$$\delta(x) = \sum_{i,j=1}^{p} C_{ij} \left(2\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + g_i(x) g_j(x) \right),$$
$$C = (C_{ij}) = GHG. \qquad (2)$$

$g(x) = \nabla \ln f^2(x)$, $f(x) > 0$ olsun. Onda

$$\delta(x) = \varphi f^{-1}(x) \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

olur və $f(x) = \lambda(C^{1/2}x)$ əvəzləməsindən sonra $\delta(x)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\delta(x) = \varphi(\Delta\lambda/\lambda)(C^{-1/2}x),$$

$\Delta\lambda$ – Laplas operatorudur.

Beləliklə, $\Delta\lambda/\lambda$ nisbətinin xüsusiyyətləri ilə inteqrallanan ixtiyari müsbət superharmonik λ funksiyası üçün X-in standart statistik qiymətindən üstün olan $\hat{\theta}$ statistik qiyməti vardır. $p>2$ olduqda, xüsusi halda, $\alpha=(2-p)/2$ qiymətlərində $\Delta\lambda/\lambda$ nisbətinin minimal olduğu sinifdə $\lambda=|x|^{\alpha}$, $2-p\le\alpha\le 0$ belə funksiyalardır. Bu halda uyğun statistik qiymət

$$\hat{\theta}=(1-(p-2)H^{-1}G^{-1}/X^{\mathrm{T}}G^{-1}X)X$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur və $H=G=E$ olduqda bu bərabərlikdən $\hat{\theta}^{JS}$ statistik qiyməti alınır.

$\hat{\theta}^{JS}$ statistik qiymətinin qurulma metodunun çoxsaylı ümumiləşmələri mövcuddur. $\hat{\theta}^{JS}$-in bəzi modifikasiyaları aşağıda şərh olunur.

1) Statistikə G matrisi məlum deyildir, lakin ona orta qiyməti G-yə bərabər və sərbəstlik dərəcəsi sayı $n-1$ olan, Uişart paylanmalı S' statistik qiyməti məlumdur. $p>2$ olduqda

$$(1-(p-2)/(n-p+3)X^{\mathrm{T}}S^{-1}X)X$$

statistik qiyməti itki funksiyası $(\hat{\theta}-\theta)G^{-1}(\hat{\theta}-\theta)$-ya nəzərən X-in statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur (bax, [2]).

2) $y_i=\sum_{j=1}^{p}X_{ij}\theta_j+\varepsilon_i$

tənlikləri ilə verilən xətti reqressiya məsələsində $(\hat{\theta}-\theta)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\times$ $\times X(\hat{\theta}-\theta)$ itki funksiyasının Ceyms – Steyn tipli statistik qiyməti

$$(1-\sigma^2(p-2)/|\hat{\theta}_0|^2)\hat{\theta}_0$$

kimi ifadə olunur, burada ε_i – müşahidələrin $(0,\sigma^2)$ parametrlərli asılı olmayan Qauss xətaları, $X=(X_{ij})$, $\hat{\theta}_0$ – ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin olunmuş statistik qiymətdir.

3) X vektorunun komponentlərinin asılı olmayan X_i təsadüfi kəmiyyətləri, $\mathbf{M}X_i=\theta_i$, $\mathbf{M}(X_i-\theta_i)^2=1$, $\mathbf{M}(X_i-\theta_i)^3=0$, $\mathbf{M}(X_i-\theta_i)^4=k$ olduğu fərz olunur. Onda bütün $p>2$, $b\le p-2$, $a\ge 4{,}5+4(k-3)/3$ qiymətlərində $\hat{\theta}=(1-$ $-b/(a+|X|^2))X$ statistik qiyməti $|\hat{\theta}-\theta|^2$ itki funksiyasına nəzərən X-in statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur.

4) $X-\theta$ vektorunun sferik simmetrik paylanmaya malik olduğu fərz olunur. Onda $p>3$, $0<a\le 2(p-2)/p\,\mathbf{M}_0|X|^{-2}$ qiymətlərində $(1-a/|X|^2)X$ statistik qiyməti $|\hat{\theta}-\theta|^{\alpha}$, $1<\alpha\le 2$ itki funksiyasına nəzərən X-in statistik qiyməti ilə müqayisədə üstün olur (bax, [4]).

Əgər müşahidə olunan X vektorunun komponentləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, onların paylanmaları eksponensial paylanmalar sinfindən olarsa, onda $(\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_p)$ standart statistik qiymətlərinin yaxşılaşdırma proseduru $\delta(x)\le 0$ differensial bərabərsizliyinin həllinə gətirilir, burada δ, – $C_{ij}(x)$ əmsalları dəyişkən olan (2) tipli ifadədir (bax, [5] – [7]). X vektorunun hüdud dim. – ölçüsü (Qauss paylanması halında ikiyə bərabərdir) bu halda ixtiyari ola bilər.

Əd.: [1] Stein C., в кн.: Proc. 3d Berk. Sympos. Math. Statist. Probab., v. 1, Berk., 1956, p. 197–206; [2] James W., Stein C., в кн.: Proc. 4th Berk. Sympos. Math. Statist. Probab., v. 1, Berk., 1961, p. 361–79; [3] Shinozaki N., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 1, p. 322–35; [4] Brandwein A., Strawderman W., «Ann. Statist.», 1980, v. 8, № 2, p. 279–84; [5] Berger J., «Ann. Statist.», 1980, v. 8, № 3, p. 545–71; [6] Brown L., «Ann.Statist.», 1980, v. 8, № 3, p. 572–85; [7] Ghosh M., Parsian A., «J. Multivar. Anal.», 1980, v. 10, № 4, p. 551–64.

*** – CƏBR « * – алгебра; * – algebra »** – bax, *Cəbri, müşahidələnənlərin.*

CƏBR, A ÇOXLUĞUNUN DOĞURDUĞU « алгебра, порожденная множеством A; algebra, induced by set A » – bax, *Çoxluqlar cəbri.*

CƏBRİ DEKODLAMA « алгебраическое декодирование; algebraic decoding » – kodun cəbri strukturunu istifadə edən *dekodlamadır.* Məs., $n=q^m-1$ uzunluqlu, $2t+1$ konstruktiv məsafəli,

$$\sum_{i=0}^{n-1}c_i\alpha^{ij}=0,\quad j=1,2,...,2t$$

xətti tənliklər sistemi ilə verilən q-lük BÇH kodu üçün C. k. – naməlum y_i, $x_i\in F_q^m$ simvollarına görə

$$\sum_{i=1}^{t}y_i x_i^j=S_j,\quad j=1,2,...,2t$$

cəbri tənliklər sisteminin həllindən ibarətdir; α, — q^m elementdən ibarət F_q^m meydanının primitiv elementidir. BÇH (Bouz – Çoudhuri – Hokvinqem; Boze R. C., Ray – Chaudhuri D. K., Hocquenghen A.) kodlarının əsas xassəsi ondan ibarətdir ki, onların vasitəsilə asanlıqla reallaşan sadə alqoritmlə t saydaya qədər səhvi düzəltmək olur. Müvafiq Berlekemp alqoritmi polinomial mürəkkəbliyə malikdir (bax, *Mürəkkəblik*(yi) kodlama və dekodlamanın) və əgər səhvlərin sayı t-ni aşmırsa, o, məlumatı (kod sözünü) düzgün bərpa etməyə imkan verir.

Qeyd etmək lazımdır ki, hal-hazırda kodların geniş bir sinfi üçün *səhv dekodlama ehtimalını* minimallaşdıran C. d.-lar məlum deyildir.

Əd.: [1] Берлекэмп Э., Алгебраическая теория кодирования, пер. с англ., М., 1971.

CƏBRİ, HADİSƏLƏRİN « алгебра событий; algebra of events » – elementləri elementar hadisə adlanan hər hansı Ω çoxluğunun altçoxluqlarının cəbridir. Hər bir çoxluqlar cəbri kimi H. c. sonlu sayda birləşmə, kəsişmə və inkar əməllərinə nəzərən qapalı sinifdir. Hesabi sayda birləşmə əməlinə görə qapalı H. c. hadisələr σ–cəbri adlanır. İxtiyari hadisələr σ – cəbri hesabi sayda aparılan nəzəri – çoxluq əməllərinə nəzərən qapalı çoxluqdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində əksər hallarda aşağıdakı H. c. və hadisələr σ – cəbrlərinə baxılır.

1) Ω çoxluğunun sonlu altçoxluqlarının və onların tamamlayıcılarının cəbri; Ω çoxluğunun hesabi altçoxluqlarının və onların tamamlayıcılarının σ – cəbri. 2) $\mathbb{R}^k$-nın $\{x = (x_1,...,x_k) \in \mathbb{R}^k : a_i \le x_i < b_i,\ i = 1, ..., k,\ -\infty \le a_i < b_i \le +\infty\}$ şəklində intervallarının sonlu birləşmələrindən təşkil olunmuş, $\mathbb{R}^k$-nın altçoxluqlarının cəbri. 3) Ω-nın bütün açıq altçoxluqlarını özündə saxlayan minimal σ – cəbr, yəni Ω topoloji fəzasının Borel altçoxluqlarının σ – cəbri. 4) Funksiyalara (trayektoriyalar fəzasında σ – cəbr və bu funksiyaların doğurduğu σ – cəbr.

Hadisələr cəbri və hadisələr σ – cəbrləri $\mathbf{P}$ ehtimalının təyin olunma oblastlarıdır. Əgər $\mathbf{P}(E) = 0$ olarsa, E – q e y r i – m ü m k ü n h a d i s ə, $\mathbf{P}(E) = 1$ olarsa, E – y ə q i n h a d i s ə adlanır. $\mathcal{A}$ cəbrində ixtiyari σ – additiv ehtimal $\mathcal{A}$-nın doğurduğu σ – cəbrdə (yəni $\mathcal{A}$-nı özündə saxlayan minimal σ – cəbrdə) təyin olunan σ – additiv ehtimala qədər birqiymətli davam olunur.

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

σ – CƏBRİ, HADİSƏLƏRİN « σ – алгебра событий; σ – algebra of events » – bax, *Cəbri, hadisələrin, Borel meydanı, hadisələrin.*

CƏBRİ, KVAZİLOKAL MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏRİN « алгебра квазилокальных наблюдаемых; algebra of quasilocal observables » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

CƏBRİ, MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏRİN « алгебра наблюдаемых; algebra of observables » – *qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir.

Toplama, hasil, kompleks ədədə vurma əməlləri və $X \to X^*$ involyusiya əməli təyin olunmuş assosiativ cəbr aksiomları və

$$(X^*)^* = X, \quad (X+Y)^* = X^* + Y^*$$

$$(XY)^* = Y^*X^*, \quad (\lambda X)^* = \overline{\lambda} X^*$$

aksiomları ödənilən, $X, Y, ...$ elementlərinin çoxluğuna $*$ – c ə b r deyilir, burada λ – ixtiyari kompleks ədəddir. Məs., verilmiş ehtimal fəzasında təyin olunmuş kompleks təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu kommutativ $*$ – cəbr təşkil edir. Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində fiziki sistemlərin ümumi modellərinə baxılır və bu modellər üçün müşahidələnənlər çoxluğu, ümumiyyətlə, ixtiyari $*$ – cəbri təşkil edir. Müşahidələnən X və Y-in qeyri – kommutativliyi, məs., kvant – mexaniki sistemlərdə tamamlanma fenomeninin real təzahürüdür (bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*). Nəzərə alınmalıdır ki, sözün həqiqi mənasında müşahidələnənlər (gerçək) məhz $*$ – cəbrin ö z ü - ö z ü - n ə q o ş m a elementləridir, yəni elə X elementləridir ki, $X^* = X$. Riyazi nöqteyi – nəzərdən norma anlayışının daxil olunması mümkün olan məhdud M. c. əlverişlidir. $\|X^*X\| = \|X\|^2$ bərabərliyi ödənilən Banax $*$ – cəbri $\mathfrak{U}$, C^* – c ə b r i adlanır. $Y \in \mathfrak{U}$, $X = Y^*Y$ olduqda $X \ge 0$ olarsa, özü-özünə qoşma $X \in \mathfrak{U}$ m ü s b ə t e l e m e n t adlanır.

Əgər $X - Z \ge 0$ olarsa, $X \ge Z$ qəbul edərək, özü-özünə qoşma elementlər çoxluğu $\mathfrak{U}$-da həqiqi, qismən nizamlanmış vektor fəzası daxil edilir.

I vahidinə malik C^* – cəbrində *vəziyyət* $\mathfrak{U}$-da elə müsbət φ xətti funksionalına deyilir ki, $X \ge 0$ olduqda $\varphi(X) \ge 0$ və $\varphi(I) = 1$ olsun. Bütün mümkün vəziyyətlər çoxluğu $\mathfrak{S}$ qoşma $\mathfrak{U}^*$ fəzasının zəif qabarıq $*$ – kompakt altçoxluğudur.

M i s a l l a r. 1) Adi cəbri əməllər, involyusiya kimi – kompleks qoşma və müntəzəm norma təyin olunmuş, verilmiş ölçülən Ω fəzasında $X(\omega)$ məhdud kompleks təsadüfi kəmiyyətlərinin çoxluğu kommutativ C^* – cəbri təşkil edir. Ω-da hər hansı bir $\mathbf{P}(d\omega)$ ehtimal paylanması

$$\varphi(X) = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega)$$

düsturu ilə vəziyyət doğurur.

2) $\|X\| = ess\sup|X(\omega)|$ norması ilə (Ω, μ) ölçülü fəzasında məhdud kompleks təsadüfi kəmiyyətlərin ekvivalentlik siniflərinin çoxluğu $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mu)$ kommutativ C^* – cəbri əmələ gətirir. Əgər $p(\omega)$ elə inteqrallanan təsadüfi kəmiyyətdirsə ki, $p(\omega) \ge c \pmod{\mu}$ və

$$\int_\Omega p(\omega)\, \mu(d\omega),$$

onda

$$\varphi(x) = \int_\Omega X(\omega)\, p(\omega) \mu(d\omega)$$

$L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \mu)$ vəziyyət təyin edir.

3) Operator norması ilə verilən kompleks H Hilbert fəzasında bütün məhdud operatorlar çoxluğu $\mathfrak{B}(H)$ qeyri – kommutativ C^* – cəbri əmələ gətirir. S – operator sıxlığı, tr – operatorun H-da izi olduqda, $\varphi(X) = \mathrm{tr}\, SX$ münasibəti $\mathfrak{B}(H)$-da vəziyyət təyin edir.

Abstrakt ixtiyari C^* – cəbri hər hansı Hilbert fəzası H-da məhdud operatorlar cəbrinə izomorfdur. Bu halda kommutativ C^* – cəbrləri funksiyalara vurma operatorlarının cəbri kimi reallaşır. Zəif operator topologiyasında qapalı operator C^* – cəbri W^* – cəbri adlanır [mis. 2) və 3)]. Əgər $\{X_\alpha\} \subset \mathfrak{U}$ Hermit elementlərinin məhdud istiqamətlənmiş çoxluğu üçün $\sup_\alpha \varphi(X_\alpha) = \varphi(\sup_\alpha X_\alpha)$ bərabərliyi ödənilərsə, φ vəziyyəti W^* – cəbri $\mathfrak{U}$-da n o r m a l v ə z i y y ə t adlanır. 2) və 3) mis.-da uyğun W^* – cəbrlərində normal vəziyyətlərin ümumi şəkli verilir

Əd.: [1] Д и к с л ь е Ж., C^* – алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [2] Б р а т т е л и У., Р о б и н с о н Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982.

CƏBRİ, SİLİNDRİK ÇOXLUQLARIN « алгебра цилиндрических множеств; algebra of cylinders » – sonluölçülü ölçülən oturacaqları $\Omega = \prod_{t\in T} \Omega_t$ fəzalar hasilindən olan silindrlərin $\mathscr{A}$ – cəbridir, burada T – ixtiyari çoxluq, Ω_t – hər bir $t\in T$ üçün altçoxluqlarının uyğun $\mathscr{A}_t$ cəbri ilə verilən çoxluq olsun. $\mathscr{A}$ cəbrinin elementləri olan

$$\left\{ \omega = \{\omega_t,\ t\in T\}:\ T_s\,\omega \in E \in \prod_{t\in S} \mathscr{A}_t \right\} \qquad (*)$$

şəklində çoxluqlar – silindrlər adlandırılır, burada S, – T-də sonlu altçoxluqdur, $T_s\,\omega = \{\omega_t,\ t\in S\}$, – ω elementinin $\prod_{t\in S}\Omega_t$ fəzasına proyeksiyası və $\prod_{t\in S}\mathscr{A}_t$, – $\mathscr{A}_t$, $t\in S$ cəbrlərinin hasilidir, yəni $\prod_{t\in S}\Omega_t$-nin $\{\{\omega_t,\ t\in S\}:\ \omega_t\in E_t\in\mathscr{A}_t,\ t\in S\}$ şəklində altçoxluqlarının sonlu birləşmələrinin çoxluğudur. E çoxluğu (*) silindirinin oturacağı adlanır. Əgər $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrlər olarsa, onda S-in qeyd olunmuş (*) çoxluqları da σ – cəbr təşkil edir, lakin $\mathscr{A}$-nın özü, ümumiyyətlə, cəbr deyildir.

Bax, *Silindrik σ – cəbr.*

Əd.: [1] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

CƏBRİ TƏSADÜFİ TƏNLİK « алгебраическое случайное уравнение; algebraic random equation » – əmsalları $\xi_1,...,\xi_n$ *təsadüfi kəmiyyətləri* olan

$$f(t) = t^n + \xi_1 t^{n-1} + ... + \xi_n = 0 \qquad (*)$$

tipli tənlikdir. (*) tənliyinin kökləri $\nu_1 = \lambda_1 + i\mu_1$, $\nu_2 = \lambda_1 - i\mu_1$,..., $\nu_{2k-1} = \lambda_k + i\mu_k$, $\nu_{2k} = \lambda_k - i\mu_k$, $\nu_{2k+1} = \tau_1$,..., $\nu_n = \tau_{n-2k}$ şəklində ifadə olunur, $|\nu_1| \geq ... \geq |\nu_n|$, burada λ_l, μ_l, $l = \overline{1,k}$, τ_j, $j = 1$,..., $n-2k$ – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər, k isə təsadüfi kəmiyyətin indeksi olub, 0-dan $[n/2]$-yə qədər tam qiymətlər alır.

Əgər $\xi_1,...,\xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x_1,...,x_n)$ vardırsa, onda (*) tənliyinin kökləri vahid ehtimalla müxtəlifdir. Əgər ξ_i-lər kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, ξ_i-lərin isə xəyali və həqiqi komponentlərinin birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(\mathrm{Re}\,z_i,\ \mathrm{Im}\,z_i;\ i = 1,...,n)$ vardırsa, onda ν_i köklərinin ($i = 1,...,n$) paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p\,(\mathrm{Re}\,\Delta_i,\ \mathrm{Im}\,\Delta_i;\ i = 1,...,n) \prod_{\substack{i,\,j=\overline{1,n},\\ i>j}} |z_i - z_j|$$

şəklindədir, burada $\arg\nu_1 > ... > \arg\nu_n$; $\arg z_1 > ... > \arg z_n$, Δ_i funksiyası z_i kompleks dəyişəninin simmetrik funksiyasıdır, $i = \overline{1,n}$. (*) tənliyinin $(a,\ b)$ intervalında köklərinin sayı $n(a,\ b)$ üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$n(a,\ b) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_a^b \cos[y\,f(t)]\,|f'(t)|\,dt,$$

burada təkrarlanan kök bir dəfə nəzərə alınır və əgər kök a və ya b ilə üst-üstə düşərsə, bu halda $n(a,b)$ $1/2$ qədər azalır. ξ_i, $i = \overline{1,n}$ əmsalları $(0,1)$ parametrli normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$\mathbf{M}\,n(a,b) = \pi^{-1} \int_a^b [1 - h_n^2(t)]^{-1/2} (1 - t^2)^{-1} dt,$$

$$h_n(t) = n t^{n-1} (1 - t^2)(1 - t^{2n})^{-1}.$$

Əd.: [1] Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. Гл. ред., П р о х о р о в Ю. В., М.,1999; [2] К а ц М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965.

CƏKNAYF METODU « метод складного ножа; Jackknife method » – bax, *Boyskaut bıçağı* (*qatlanan bıçaq*) *metodu.*

CƏMİ, TƏSADÜFİ SAYDA TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « сумма случайного числа случайных величин; sum of random number of random variables » – bax, *Təsadüfi cəm.*

CƏMLƏNMƏ SXEMİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « схема суммирования случайных величин; scheme of summation of random variables » – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas modellərindən biridir ki, burada *təsadüfi kəmiyyətlərin* $S_n = X_1 + ... + X_n$ cəmlərinin sonlu və sonsuz toplularına baxılır. C. s.-nin xüsusi halları X_j, $j = 1,...,n$ toplananları üçün hər hansı əlavə fərziyyələrlə bağlıdır. Nəticədə Markov zənciri təşkil edən və ya stasionar ardıcıllıq əmələ gətirən və s. kimi təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin modelləri yaranır. Ümumi halda $(X_1,...,X_n)$ toplananlarının birgə paylanması n-dən asılı ola bilər (bax, *Seriyalar sxemi, üçbucaq sxem*), cəmlərdəki toplananların sayı isə sonsuz da ola bilər (sonuncu halda fərz olunur ki, sıra sanki yəqin yığılır). Təsadüfi kəmiyyətlərin C. s. ilə bağlı digər nəticələr haqqında bax, *Limit teoremləri*, *Limit teoremləri* Markov zəncirləri üçün.

p – CƏMLƏYİCİ OPERATOR « p – суммирующий оператор; p – summing operator » – bax, *Radonlayıcı operator.*

CIRLAŞAN PAYLANMA « вырожденное распределение; degenerate distribution » n ölçülü Evklid fəzasında – baxılan fəzanın dim. – ölçüsü n-dən kiçik olan hər hansı xətti çoxobrazlısında topalanmış *ehtimal paylanmasıdır.* Əks halda paylanma cırlışmayan paylanma adlanır. İkinci momenti sonlu C. p. onunla səciyyələnir ki, uyğun kovariasiyalar (və ya korrelyasion) matrisinin ranqı r, n-dən kiçik olur. Bu halda r verilmiş C. p.-nın topalandığı xətti çoxobrazlıların dim. – ölçülərindən ən kiçiyi ilə üst-üstə düşür. C. p. anlayışı təbii olaraq vektor fəzalarında verilmiş paylanmalar üçün də verilir. Bəzən C. p. qeyri–məxsusi paylanma, cırlaşmayan paylanma isə məxsusi paylanma da adlanır.

Xarakteristik funksiyası vahidə bərabər olan, yeganə artım nöqtəsi $x=0$ nöqtəsində olan cırlaşan təsadüfi kəmiyyətin paylanması C. p.-dır. Təsadüfi kəmiyyətin C. p.-sı $\mathscr{D}(0)$ ehtimal nəzəriyyəsinin əsas qanunlarından biridir.

CIRLAŞMAYAN PAYLANMA, məxsusi paylanma **« невырожденное распределение,** собственное распределение; **nondegenerate distribution »** – bax, *Cırlaşan paylanma.*

CIRLAŞMAYAN ŞAXƏLƏNƏN PROSES « невырождающийся ветвящийся процесс; nondegenerating branching process » – bax, *Şaxələnən proses*; cırlaşan.

CIRLAŞMIŞ İKİÖLÇÜLÜ NORMAL PAYLANMA « вырожденное двумерное нормальное распределение; degenerate / singular bivariate normal distribution » – bax, *İkiölçülü normal paylanma*.

CIRLAŞMIŞ ÖLÇÜ « вырожденная мера; degenerate / singular measure » – bax, *Atomik ölçü*.

CİDDİ DAYANIQLI PAYLANMA « строго устойчивое распределение; strictly stable distribution » – eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan, müəyyən $B_n>0$ sabitləri ilə normalanmış $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri –

$$Z_n=(\xi_1+\ ...\ +\xi_n)B_n^{-1},\quad n=1,\ 2,...$$

üçün $n\to\infty$ olduqda bütün mümkün ola bilən limit paylanmalarını özündə cəmləşdirən, *dayanıqlı paylanmalar* sinfinin altsinfi $\mathfrak{W}$-dən olan paylanmadır. $\mathfrak{W}$-dən olan qanunların paylanma funksiyaları üçparametrli

$$G(x,\alpha,\theta,\lambda),\quad 0<\alpha\le 2,$$

$$|\theta|\le\min(1,2/\alpha-1),\quad \lambda>0$$

ailəsini əmələ gətirir.

$$G(x,\ \alpha,\theta,\lambda)=G(x\lambda^{-1/\alpha},\alpha,\ \theta,1)$$

olduğundan bu qanunları standartlaşdırmaq mümkündür. $G(x,\ \alpha,\ \theta)=G(x,\ \alpha,\ \theta,\ 1)$ funksiyaları bir-birilə çoxsaylı analitik münasibətlərlə əlaqəlidirlər (bax, [1]), xüsusilə də, bu funksiyalar üçün *sonsuz bölünən paylanmaların ikilik xassəsi* olduqca geniş variantlarda məlumdur: əgər $\alpha\ge 1,\ x>0$ olarsa, onda ixtiyarı θ üçün

$$\alpha\,(1-G(x,\ \alpha,\ \theta))=C(x^{-\alpha},\ \alpha^*,\ \theta^*)\ -\ (1-\theta^*)/2$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\alpha^*=1/\alpha,\ 1+\theta^*=\alpha(1-\theta)$.

C. d. p.-lar *Dayanıqlı paylanma* məqaləsində qeyd olunmuş funksional tənliyin həlləri çoxluğunu təşkil edir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

CİDDİ MARKOV XASSƏSİ « строго марковское свойство; strong Markov property » – $\zeta_t=\zeta(t),\ t\ge 0$ təsadüfi prosesinin qeyd olunmuş anda «indiki» ζ_τ vəziyyəti məlum olarsa, onun «gələcək» $\{\zeta_t\}_{t>\tau}$ vəziyyətlərinin bu prosesin «keçmiş» $\{\zeta_t\}_{t<\tau}$ vəziyyətlərindən asılı olmamazlığı (ehtimali nöqteyi – nəzərdən) xassəsidir, burada τ yalnız *Markov xassəsindəki* konstantlar kimi deyil, ixtiyari dayanma anları kimi də anlaşılır. Sadəlik üçün fərz olunur ki, $\zeta=(\zeta_t,\mathscr{A}_t,\mathbf{P}_x)$, – $(E,\mathscr{B})$ faza fəzasında qırılmayan bircins Markov prosesi, $p(t,x,\Gamma)$ isə əsas $(\Omega,\mathscr{A})$ fəzasında keçid funksiyasıdır; $(\Omega,\mathscr{A})$ fəzasında ζ_s-i ζ_{s+t}-yə çevirən θ_t operatorlarının da təsir etdiyi nəzərdə tutulur. ζ *proqressiv ölçülən proses* olsun (bu şərt ζ_τ-nun $\mathscr{A}_\tau$ – ölçülənliyini təmin edir).

Əgər ixtiyari $t\ge 0$, $x\in E$, $\Gamma\in\mathscr{B}$ və ixtiyari sonlu τ dayanma anı üçün (Ω-də elə τ funksiyası üçün ki, $0\le\tau<\infty$ və $\{\tau\le t\}\in\mathscr{A}_t,\ t\ge 0$, burada $\mathscr{A}_\tau=\{A:A\in\mathscr{A},\ A\bigcap\{\tau\le t\}\in\in\mathscr{A}_t, t\ \ge\ 0\}$)

$$\mathbf{P}_x\{\zeta_{\tau+t}\in\Gamma\,|\,\mathscr{A}_\tau\}\ =\ p(\,t,\ \zeta_\tau,\Gamma)\qquad(*)$$

bərabərliyi $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilərsə, ζ – ciddi Markov xassəli prosesdir. (*)-dan C. M. x.-nin digər formaları alınır:

$$\mathbf{P}_x\{\zeta_{\tau+\eta}\in\Gamma\,|\,\mathscr{A}_\tau\}\ =\ p(\eta,\zeta_\tau,\Gamma),\quad \mathbf{P}_x\ -\ \text{sanki yəqin}$$

burada $\eta\ge 0$ – ixtiyari $\mathscr{A}_\tau$ – ölçülən sonlu funksiyadır və

$$\mathbf{M}_x(\xi\theta_\tau\psi)=\mathbf{M}_x(\xi\,\mathbf{M}_{\zeta_\tau}\psi)$$

şəklində C. M. x.-nin ifadələri; sonuncu bərabərlikdə ξ,ψ – məhdud təsadüfi kəmiyyətlər, uyğun olaraq $\mathscr{A}_\tau$ və $\sigma(\zeta_t),\ t\ge 0$ σ – cəbrlərinə nəzərən ölçülən funksiyalardır.

C. M. x. ilk dəfə C. Dub tərəfindən (bax, [1]) ifadə olunmuş və vəziyyətləri çoxluğu hesabi olan Markov prosesləri və elə $\tau\ge 0$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün isbat olunmuşdur ki, $\xi_{\tau+0}=\zeta_\tau$ və «$\tau<s$, $\tau>s$ hadisələri $t<s$ olduqda ζ_t-nin qiymətləri üzrə təyin olunur» (bax, [1]). $\mathscr{A}_\tau$ σ – cəbrləri ilə (*)-nun ifadəsi [2]-də verilmişdir və burada τ « gələcəkdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət » kimi ifadə olunmuşdur. C. M. x.-nin ümumi tərifinin digər variantı [3]-də təklif olunmuşdur. C. M. x.-nə malik proses *ciddi Markov prosesi* adlanır. C. M. x. bircins olmayan Markov prosesləri və təsadüfi proseslər üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Doob J. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1945, v. 58, p. 455–73; [2] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149–55; [3] Blumenthal R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 85, p. 52–72; [4] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [5] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975.

CİDDİ MARKOV PROSESİ « строго марковский процесс; strong Markov process » – *ciddi Markov xassəli təsadüfi prosesdir.* Ümumi C. M. p. anlayışı bir-birindən asılı olmayaraq [1] və [2]-də daxil olunmuşdur, xüsusi hallara isə əvvəllər baxılmışdır [hesabi bircins C. M. p. C. Dub (J. Doob), sonra A. A. Yuşkeviç tərəfindən, asılı olmayan artımlı bircins C. M. p. isə C. Hant (J. Hunt) tərəfindən araşdırılmışdır].

Diskret zamanlı ixtiyari Markov prosesi C. M. p.-dir; kəsilməz zamanlı proseslər üçün bu doğru deyildir (bax, [1]). İsbat olunur ki, əgər: 1) $\zeta=\{\zeta_t,\mathscr{A}_t,\mathbf{P}_x\}$ bircins Markov prosesinin bütün trayektoriyaları E metrik fəzasında sağdan kəsilməz olarsa və

2) ζ – Feller prosesidirsə, yəni ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində $F(x) = \mathbf{M}_x f(\zeta_t)$, $x \in E$ funksiyası ixtiyari məhdud f funksiyası üçün E-də kəsilməzdirsə, onda ζ C. M. p.-dir (bax, [1]). Bu nəticə $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrlərini $\mathscr{A}_{t^+} = \bigcap_{u>t} \mathscr{A}_u$ σ – cəbri ilə əvəz etdikdə də doğrudur və bircins olmayan Markov proseslərini də əhatə edir.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149–55; [2] Blumenthal R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 85, p. 53–72; [3] Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 2, с. 187–213; [4] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975.

CONSON – UELÇ ÇEVİRMƏSİ « Джонсона – Уэлча преобразование; Johnson – Welch transformation » – mərkəzilənməyən Styudent t – paylanmasının mərkəzilənməməzlik parametri üçün birtərəfli etibarlılıq sərhədinin approksimasiyasıdır. X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $X \sim N(\delta, 1)$, Y^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı n olan χ^2 – paylanmasına tabe təsadüfi kəmiyyət, $T = \sqrt{n}\, X / Y$ olsun. Onda δ üçün etibarlılıq əmsalı p-yə bərabər δ_p aşağı etibarlı sərhədi, təqribi olaraq

$$\widetilde{\delta}_p = T - \Phi^{-1}(p)\sqrt{1 + T^2/2n}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\Phi^{-1}(p)$ standart normal paylanmanın p – kvantilidir (bax, [1]).

$$\delta_p^* = \begin{cases} (\beta - F_v^{-1}(p))/\alpha, & T < 0 \text{ olduqda,} \\ (\beta - F_v^{-1}(1-p))/\alpha, & T > 0 \text{ olduqda,} \end{cases}$$

approksimasiyası alınmışdır, burada $F_v^{-1}(p)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı υ olan χ – paylanmanın p – kvantilidir. $n \to \infty$ olduqda

$$v \approx n/x^3, \quad \alpha \approx (-\operatorname{sign} T)\sqrt{(1-x)/2},$$
$$\beta \approx \sqrt{n}(1-x^2)x^{-3/2},$$

olduğu alınır, burada $x = T^2/(T^2+2n)$, $\widetilde{\delta}_p - \delta_p = O(n^{-1/2})$ olur, lakin $n \to \infty$ olduqda $\delta_p^* - \delta_p = O(n^{-3/2})$ olur.

Əd.: [1] Johnson N. L., Welch B. L., «Biometrika», 1940, v. 31, p. 369–89; [2] Большев Л. Н., Пагурова В. И., Аппроксимация нецентрального t – распределения, М., ЦЭМИ, 1975 (репринт).

CÜT–CÜT ASILI OLMAMAZLIQ « попарная независимость; pairwise independence » – bax, *Asılı olmamazlıq*.

CÜTLÜYÜN KORRELYASİYA ƏMSALI « парной корреляции коэффициент; paired correlation coefficient » – bax, *Kanonik korrelyasiyalar analizi*.

ÇATILABİLİNƏN SƏRHƏD « достижимая граница; attainable boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

ÇATILABİLİNƏN VƏZİYYƏT « достижимое состояние; accessible / reachable state » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

ÇATILMAYAN SƏRHƏD « недостижимая граница; inattainable boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

ÇATILMAYAN VƏZİYYƏT, Markov zənciri üçün **« недостижимое состояние** цепи Маркова; **nonaccessible state** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

ÇATIM MÜDDƏTİ / DEFEKT « недоскок / дефект / обратное время возвращения; defect » $\eta(t)$, – $\zeta(t)$ semi – Markov prosesinin ixtiyari qeyd olunmuş t anından əvvəlki sonuncu bərpa anı ilə t arasındakı müddətdir (bax, şəkil), yəni

$$\eta(t) = t - \sup_s \{s \le t : \zeta(s) \ne \zeta(t)\}$$

$\times$ – bərpa anıdır.

Ç. m. semi – Markov prosesi ilə birlikdə, $\{\zeta(t), \gamma(t);\ t \ge 0\}$ xəttivari Markov prosesini əmələ gətirir. Xüsusi halda, $G(t) = \mathbf{P}\{\theta_k \le t\}$ paylanma funksiyası və sonlu $\mathbf{M}\theta_k = m$ riyazi gözləməsi ilə təyin olunan

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k\ ,\ n \ge 1$$

bərpa prosesi üçün paylanma funksiyası

$$G^*(t) = \int_0^t (1 - G(s))\, ds/m$$

olan η^* stasionar Ç. m. vardır.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967.

ÇEBIŞEV BƏRABƏRSİZLİYİ « Чебышева неравенство; Chebyshev inequality », Byeneme–Çebışev bərabərsizliyi– ehtimal nəzəriyyəsində *təsadüfi kəmiyyətin* qiymətlərinin onun riyazi gözləməsindən yayınmasının ehtimalını bu təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası ilə qiymətləndirən bərabərsizlikdir.

$\xi(\omega)$ – sonlu riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\xi(\omega)$ və dispersiyası $\mathbf{D}\xi(\omega)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. Ç. b. onu ifadə edir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\{\omega : |\xi(\omega) - \mathbf{M}\xi(\omega)| \ge \varepsilon\}$$

hadisəsinin ehtimalı $\mathbf{D}\xi/\varepsilon^2$ ədədini aşmır və ya

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\sqrt{\mathbf{D}\xi}\} \le 1/\varepsilon^2\ .$$

Bu bərabərsizlik bir-birindən asılı olmadan İ. Byeneme (I. Bienaymé, 1853) və P. L. Çebışev (1866) tərəfindən kəşf olunmuşdur. Müasir ədəbiyyatda bu bərabərsizlik daha çox Ç. b. adlandırılır, bu da ona əsaslanır ki, *böyük ədədlər qanununun* ümumiləşmiş formasının isbatı P. L. Çebışevin adı ilə bağlıdır (Çebışev teoremi).

Ç. b. eynitipli bərabərsizliklərin bütün bir sinfinin ifadəçisidir; bunlardan ən sadəsində hökm olunur ki, riyazi gözləməsi sonlu $\mathbf{M}\xi$ olan, mənfi olmayan ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$\mathbf{P}\{\xi \ge \varepsilon\} \le \mathbf{M}\xi/\varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur (bu bərabərsizlik bəzən Markov bərabərsizliyi adlanır). Bu bərabərsizlikdən ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlər üçün momentlərlə ifadə olunan aşağıdakı bərabərsizliklər alınır:

$$\mathbf{P}\{|\xi| \ge \varepsilon\} \le \mathbf{M}|\xi|^r/\varepsilon^r\ ,$$

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\} \le \mathbf{M}|\xi - \mathbf{M}\xi|^r/\varepsilon^r\ ,\quad r \ge 1$$

bərabərsizlikləri ($r = 2$ olduqda Ç. b.-nin özü), daha ümumi olan x -in müsbət qiymətlərində azalmayan, mənfi olmayan cüt $f(x)$ funksiyası üçün

$$\mathbf{P}\{|\xi| \ge \varepsilon\} \le \mathbf{M}f(\xi)/f(\varepsilon) \qquad (*)$$

bərabərsizliyi belələrindəndir. (*) bərabərsizliyindən bu tipli yeni bərabərsizliklər alınır. Məs.,

$$\mathbf{P}\{\xi \ge \varepsilon\} \le \mathbf{M}\, e^{c\xi}/e^{c\varepsilon}\ ,\quad c > 0$$

eksponensial bərabərsizliyi. Ənənəvi olaraq, bütün bu bərabərsizliklər Çebışev tip bərabərsizliklər hesab olunur və hətta «Ç. b.» də adlandırılır. Ç. b.-ni almaq üçün momentlər üzərinə müəyyən şərtlərlə ümumi prinsip vardır ki, bu da Çebışev çoxhədliləri sistemindən istifadəyə əsaslanır (bax, [4]). İxtiyari təsadüfi kəmiyyətlər üçün Çebışev bərabərsizlikləri dəqiq yaxşılaşmayan qiymətlər verir, lakin bəzi konkret hallarda bu qiymətləri dəqiqləşdirmək mümkün olur. Məs., ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması unimodal, modası μ olarsa və bu moda onun riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşürsə, onda

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mu| \ge \varepsilon\} \le (4/3)(\sigma^2/\varepsilon^2)\ ,$$

$$\varepsilon \geq 2\sigma/\sqrt{3}$$

– Qauss bərabərsizliyi doğrudur, burada $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$.

Ehtimal nəzəriyyəsində Ç. b.-nin əhəmiyyəti onun dəqiqliyi ilə deyil, onun sadəliyi və universallığı ilə təyin olunur. Ç. b. və onun müxtəlif formaları böyük ədədlər qanununun isbatında təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinə tətbiq olunması ilə, təkrar loqarifm qanununa tətbiqi ilə böyük rol oynamışlar. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün Ç. b. iki istiqamətdə ümumiləşdirilmiş və dəqiqləşdirilmişdir. Bunlardan birincisi

$$\mathbf{P}\{|\xi_1 + \ \dots \ + \xi_n \ - \ (\mathbf{M}\xi_1 + \dots + \mathbf{M}\xi_n)| \ \geq \varepsilon\} \leq$$
$$\leq \mathbf{D}\,(\xi_1 + \ \dots \ + \xi_n)/\varepsilon^2$$

Ç. b.-ndən daha da güclü

$$\mathbf{P}\{\max_{1 \leq k \leq n} |\ \xi_1 \ + \ \dots \ + \xi_k - (\mathbf{M}\xi_1 + \ \dots \ + \mathbf{M}\xi_k)| \ \geq \varepsilon\} \leq$$
$$\leq \mathbf{D}\,(\xi_1 + \ \dots \ + \xi_n)/\varepsilon^2$$

bərabərsizliyinə keçidlə bağlıdır. Bu bərabərsizlik A. N. Kolmoqorov tərəfindən isbat olunmuş və onun *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* üçün verdiyi isbatda da istifadə olunmuşdur (bax, *Kolmoqorov bərabərsizliyi*).

İkinci istiqamət Ç. b.-ndə qüvvət üstlü qiymətin eksponensial azalanla əvəz olunmasına həsr olunmuşdur və bu da

$$\mathbf{P}\{|\xi_1 + \ \dots \ + \xi_n| \geq \varepsilon\} \ \leq \ 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2(1 + a/3)}\right\}$$

– Bernşteyn–Kolmoqorov bərabərsizliyinə gətirir, burada $|\xi_i| \leq C$, $\mathbf{M}\xi_i = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{D}(\xi_1 + \ \dots \ + \xi_n)$, $a = C_\varepsilon/\sigma^2$ (bax, *Bernşteyn bərabərsizliyi*). Ç. b.-nin belə dəqiqləşmələri ξ_i toplananlarının məhdudluğuna qoyulan əlavə şərtlərlə alınır.

Burada şərh olunan bərabərsizliklərin bəzilərinin çoxölçülü analoqları alınmışdır (bax, [5]).

Əd.: [1] Чебышев П. Л., «Матем. сб.», 1867, т. 2, с. 1–9; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [4] Карлин С., Стадден В., Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976; [5] Прохоров Ю. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 10, М., 1972, с. 5–24.

ÇEBIŞEV BƏRABƏRSİZLİYİ; çoxölçülü analoqlar **« Чебышева неравенство;** многомерные аналоги; multidimensional analogs of the **Chebyshev inequality »** – X təsadüfi vektorunun onun qiymətləri fəzasının altçoxluğu A-ya daxil olması ehtimalı üçün

$$\mathbf{P}\{X \in A\} \leq \inf\{\mathbf{M}\varphi(X) : \varphi(x) \geq 1,\ x \in A;$$
$$\varphi(x) \geq 0,\ x \notin A\}$$

qiymətinin nəticələridir. Məs., $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ vektorunun kovariasion matrisi B-dirsə, C isə simmetrik, müsbət müəyyən, diaqonal elementləri vahid olan matris və $C^{-1}BC^{-1}$ onun diaqonal matrisidirsə, onda

$$\mathbf{P}\{\max_i \left| X^{(i)} - \mathbf{M}X^{(i)} \right| \geq x\} \leq x^2 \operatorname{tr}(C^{-1}BC^{-1}), \quad x > 0$$

münasibəti doğrudur.

Çebışev bərabərsizliyinin modifikasiyası böyük yayınmalar ehtimalları üçün *Bernşteyn bərabərsizliyidir.* Əgər qiymətləri separabel $(\mathscr{X}, |\cdot|)$ Banax fəzasından olan X_i təsadüfi vektorları asılı olmayandırlarsa və bütün natural $m \geq 2$ qiymətlərində təsadüfi olmayan a_i-lərin hər hansı toplusu üçün $(a_i \in \mathscr{X})$

$$\mathbf{M}\left|X_1 - a_1\right|^m + \ \dots \ + \mathbf{M}\left|X_n - a_n\right|^m \ \leq m!\ B^2 L^{m-2}/2 \qquad (1)$$

olarsa, onda $x \geq 0$ və $X = X_1 + \ \dots \ + X_n$ olduqda

$$p_x = \mathbf{P}\{\,|X| \geq xB + \mathbf{M}|X|\} \leq \exp\{-x^2/(2 + 2xL/B)\}$$

münasibəti doğrudur (bax, [4]). Sonlu sayda toplananların momentlərindən istifadə olunan oxşar qiymətlər vardır. Məs., (1) şərtindən $a_i = 0$ və $m = 3$ qiymətlərində

$$p_x \ \leq \ c'x^{-3}\ L/B \ + \ \exp\{-c''x^2\}, \quad x > 0$$

bərabərsizliyi alınır (bax, [5]), burada c', c'' – mütləq konstantlardır. (2) bərabərsizliyinin Hilbert fəzasında dəqiqləşdirilmələri üçün bax, [4], [6].

Bax, *Burkholder – Qandi – Devis bərabərsizlikləri*, *Kolmoqorov bərabərsizliyi.*

Əd.: [1] Карлин С., Стадден В., Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976; [2] Tong Y. L., Probability inequalities in-multivariate distributions, N. Y., 1980; [3] Olkin I., Pratt J. W., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 1, p. 226–34; [4] Пинелис И. Ф., Саханенко А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 127–31; [5] Пинелис И. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 3, с. 630–37; [6] Юринский В. В., «J. Multivar. Analysis», 1976, v. 6, № 4, p. 473–99.

ÇEBIŞEV TEOREMİ « Чебышева теорема; Chebyshev theorem » – bax, *Böyük ədədlər qanunu*, *Çebışev bərabərsizliyi.*

ÇEKON – CEMİSON TEOREMİ « Чекона – Джемисона теорема; Chacon – Jamison theorem » – bax, *Markov prosesi*; trayektoriyaların daxili xassələri.

ÇENTSOV STATİSTİK QİYMƏTİ paylanma sıxlığının **« Ченцова оценка** плотности распределения; **Chentcov distribution density estimator »** – bax, *Sıxlığı*, *paylanmanın*; müşahidələr üzrə statistik qiymət.

ÇERNOV SƏRHƏDİ « Чернова граница; Chernov boundary » – səhv təsnifat ehtimalının yuxarı sərhədidir. ω_1 və ω_2 statistik çoxluqlarının və hər hansı həlledici $h(x)$ qaydasının verildiyi fərz olunur. $\varphi_1(\omega)$, – ω_1 çoxluğu üçün həlledici $h(x)$ qaydasının xarakteristik funksiyası olsun:

$$\varphi_1(\omega) \ = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\,\omega h)\ p(h/\omega_1)\ dh\,,$$

$j\omega$-nı həqiqi s ədədi ilə əvəz etdikdə $h(x)$ üçün $\varphi_1(s)$ doğuran funksiyası alınır:

$$\varphi_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sh)\, p(h/\omega_1)\, dh,$$

$\mu(s) = -\ln \varphi_1(s)$ olsun. Fərz olunur ki, g təsadüfi kəmiyyətdir və onun paylanma sıxlığı vardır və o, aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$p_g(g = h/\omega_1) = \exp(sh + \mu(s))\, p(h)/\omega_1,$$

g-nin riyazi gözləməsi –

$$\mathbf{M}(g/\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h\, p_g(g = h/\omega_1)\, dh = -\frac{d\mu(s)}{ds},$$

və dispersiyası –

$$\mathbf{D}(g/\omega_1) = -\frac{d^2\mu(s)}{ds^2}$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Xəta ehtimalı ε isə p_g ilə ifadə olunur:

$$\varepsilon = \int_{t}^{\infty} p(h/\omega_1)\, dh =$$

$$= \int_{t}^{\infty} \exp(-\mu(s) - sh)\, p_g(g = h/\omega_1)\, dh =$$

$$= \exp(-\mu(s)) \int_{t}^{\infty} \exp(-sh)\, p_g(g = h/\omega_1)\, dh .$$

Xəta ehtimalı ε üçün yuxarı sərhəd aşağıdakı kimi alınır: $s \geq 0$, $t \leq h$ olduqda

$$\exp(-sh) \leq \exp(-st)$$

bərabərsizliyi doğrudur, odur ki,

$$\varepsilon \leq \exp(-\mu(s) - st) \int_{t}^{\infty} p_g(g = h/\omega_1)\, dh .$$

$\int_{t}^{\infty} p_g(g = h/\omega_1)\, dh < 1$ olduğundan

$$\varepsilon \leq \exp(-\mu(s) - st)$$

bərabərsizliyindən ixtiyari $s \geq 0$ üçün xəta ehtimalı ε üçün axtarılan yuxarı sərhəd alınır.

Əd.: [1] Ф у к у н а г а Г., Введение в статистическую теорию распознования образов, пер. с англ., М., 1979.

ÇEVİRMƏ DÜSTURU « обращения формула; inversion formula » – $f(t)$ *xarakteristik funksiyası* üzrə uyğun *paylanma funksiyası* F-i təyin etmək üçün aşağıdakı şəkildə ifadə edilən düsturdur:

$$F(a+h) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1-e^{-ith}}{it} e^{-ita} f(t)\, dt$$

burada a və $a + h$ F-in kəsilməzlik nöqtələridir, $h > 0$. Əgər f mütləq inteqrallanandırsa, onda F mütləq kəsilməzdir və onun kəsilməz məhdud

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt$$

törəməsi vardır (sıxlıq üçün Ç. d.). Digər çevirmə düsturları üçün bax, [1] – [3]-ə.

Əd.: [1] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] П е т р о в В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

ÇEVRİLMƏSİ, ZAMANIN « обращение времени; time reversal » – bax, *Çevrilmiş Markov prosesi.*

ÇEVRİLMİŞ MARKOV PROSESİ « обращенный марковский процесс; reversed Markov process » – ilkin *Markov prosesindən* alınan elə prosesdir ki, hesablandığı andan onun evolyusiyası əks istiqamətdən başlayaraq cərəyan edir. ζ_t, $t \in (-\infty, \infty)$ – Markov xassəli proses olsun. $\hat{\zeta}_t = \zeta_{-t}$ prosesi keçmiş və gələcəyin simmetrikliyinə görə Markov xassəsinə malik olur və çevrilmiş Markov prosesi adlanır. Bircins Markov prosesləri üçün keçmiş və gələcəyin simmetriyası üst-üstə düşür və bu halda çevrilmiş proses $\hat{\zeta}_t = \zeta_{\xi - t}$, $t \leq \xi$ prosesi kimi anlaşılır, burada ξ, – ζ_t prosesinin qırılma anıdır [və ya elə təsadüfi andır ki, $\xi(\theta_h \omega) = \max\{\xi(\omega) - h, 0\}$, $h > 0$, θ_h – yerinidəyişmə operatorudur]. Belə proses, ümumiyyətlə, Markov prosesi olmaya bilər, $\hat{\zeta}_t$ prosesinin Markov prosesi olması üçün ζ_t prosesinin ciddi Markov prosesi olması kafi şərtdir. Bəzi əlavə fərziyyələrlə $\hat{\zeta}_t$ prosesinə ζ_t prosesinə dual, bircins Markov prosesi kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] C h u n g K. L., W a l s h J. B., «Acta. math.», 1969, t. 123, p. 225–51; [2] S m y t h e R. T., W a l s h J. B., «Invent. math.», 1973, t. 19, p. 113–48; [3] N a g a s a w a M., «Nagoya Math. J.», 1964, v. 24, p. 177–204; [4] J e u l i n T., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 42, H. 3, S. 229–60.

ÇEVRİLMİŞ MARKOV ZƏNCİRİ « обращенная цепь Маркова; reversed Markov chain », verilən zəncirə tərs Markov zənciri, – zaman üzrə evolyusiyası verilən zəncirin evolyusiyasına uyğun əks zaman ərzində baş verən *Markov zənciridir*. Klassik mənada ixtiyari Markov zənciri $X = (X_1, X_2, \ldots)$ üçün $Y_{-n} = X_n$, $n \geq 0$ olduqda $Y = (\ldots, Y_{-1}, Y_0)$ ailəsi uyğun formada Markov xassəsinə malikdir (bax, [1]); Y ailəsi məhz X-ə nəzərən Ç. M. z.-dir.

Ç. M. z.-nə bir qədər başqa məna da verilir. Əgər keçid ehtimalları p_{ij} olan bircins Markov zənciri X sonlu və ya hesabi vəziyyətlər çoxluğu $\mathscr{E} = \{1, 2, \ldots\}$-də verilmişdirsə və $\mu_i > 0$ şərtilə verilən $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ ilkin (başlanğıc) stasionar paylanmasına malikdirsə, onda Y zəncirinin uyğun keçid ehtimalları

$$\hat{p}_{ij} = \mathbf{P}\{Y_{-n} = j / Y_{-n-1} = i\} = \mu_j p_{ij}/\mu_i \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $i, j \in \mathscr{E}$, $n \geq 0$. Bu halda belə keçid ehtimalları olan ixtiyari Markov zənciri X zəncirinə nəzərən Ç. M. z. adlandırılır. Bu ad hər hansı zəncirin keçid ehtimalları p_{ij} (*) ifadələrindən sonuncusu ilə verildikdə də dəyişmir, lakin bu halda μ-nün X üçün $\mu_i > 0$ şərtilə ixtiyari invariant ölçü olduğu fərz olunur. Əgər $p_{ij} = p_{ji}$ olarsa, X zənciri çevrilən zəncirdir.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

ÇƏKİ « вес; weight » – bax, *Kvadratik / standart yayınma*.

ÇƏKİ(si) plan nöqtələrinin **« вес** точек плана; **weighing** of supporting points **»** – *reqression eksperimentin* plan daşıyıcısından olan nöqtələrinin tezliyidir; plan daşıyıcısı – nəzarət olunan dəyişənin bir-birilə üst-üstə düşməyən qiymətlərinin çoxluğudur.

ÇƏKİ MATRİSİ « весовая матрица; weight matrix » reqression eksperimentin – ölçmə xətalarının *kovariasiyaları* matrisinə tərs matrisdir. Ç. m. ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiyməti minimallaşdıran reqressiya uzlaşmamazlıqlarının kvadratik formasını və həmin statistik qiymətin əmsallarını təyin edir.

ÇƏKİLƏMƏ PLANI « взвешивания план; weighted design / strategy » – k sayda əşyanın ikigözlü və birgözlü tərəzilərdə N dəfə çəkilməsi ilə onların çəkilərinin qiymətləndirilməsi üçün aparılan eksperiment planıdır. Tərəzilərdə ölçmə nəticələri $x_n^{\mathsf{T}} = \| x_{n1}, ..., x_{nk} \|$ sətri və matris planı $D = \| x_1, ..., x_N \|^{\mathsf{T}}$ ilə təyin olunur. İkigözlü tərəzilərdə x_{ni} kəmiyyəti i-ci əşyanın sol gözə və ya sağ gözə qoyulmasından və ya n-ci çəkiləmədə iştirak etməməsindən asılı olaraq, uyğun olaraq, -1, $+1$ və ya 0 qiymətlərini alır. Birgözlü tərəzilərdə ölçmələr aparıldığı halda x_{ni} i-ci əşyanın n-ci çəkiləmədə iştirak edib-etməməsindən asılı olaraq 1 və ya 0 qiymətlərini alır. Çəkiləmə modeli

$$y_n = b_0 + b_1 x_{n1} + ... + b_k x_{nk} + \varepsilon_n$$

şəklində olur, burada y_n, – n-ci çəkiləmədə alınan nəticədir, $n = 1, ..., N$; b_0 – tərəzinin əşyasız göstəricisi, b_i, – i-ci əşyanın çəkisidir, $i = 1, ..., k$; ε_n, – n-ci çəkiləmə xətasıdır.

Bütün əşyaların ayrı-ayrılıqda çəkilənmə proseduru ilə müqayisədə əşyaların çəkilərini daha dəqiq qiymətləndirməyə imkan verən birgözlü tərəzilərdə çəkilənmə proseduru qurulmuşdur (bax, [1]). Analoji nəticə ikigözlü tərəzilər üçün də alınmışdır (bax, [2]). İnformasion matrisin hər hansı qabarıq funksionalını minimallaşdıran optimal Ç. p.-ları (bax, [3], [4]), həm də *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması* öyrənilmiş və qurulmuşdur.

Əd.: [1] Yates F., «J. Roy. Statist. Soc. Supp.», 1935, v. 2, p. 181–247; [2] Hotelling H., «Ann. Math. Statist.», 1944, v. 15, p. 297–305; [3] Бродский В. З., Введение в факторные планирование эксперимента, М., 1976; [4] Banerjee K. S., Weighing designs, N. Y., 1975.

ÇƏKİLİ ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU « взвещенный метод наименьших квадратов; weighted least squares method / generalized least squares method » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu.*

ÇƏKİLİ KVADRATİK YAYINMA « взвещенное квадратическое отклонение; weighted quadratic deviation » – bax, *Kvadratik / standart yayınma.*

ÇƏP FIRLANMASI, faktor oxlarının **« косоугольное вращение** факторных осей; **oblique rotation** of factorial axes **»** – bax, *Faktorial oxların fırlanması*.

ÇƏP VİNER PROSESİ « косой винеровский процесс; skew Wiener process » – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

ÇIXIQLAR METODU « вычетов метод; method of residues » – bax, *Modelləşdirilməsi*, *təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*.

ÇIXIŞ EHTİMALININ SIXLIĞI « выхода плотность вероятности; exit rate / probability density » – bax, *Sıxlığı*, *çıxış ehtimalının*.

ÇIXIŞ İNTENSİVLİYİ « выхода интенсивность; exit rate » – bax, *Sıxlığı*, *çıxış ehtimalının*.

ÇIXIŞ SİQNALI « выходной сигнал; output signal » – bax, *Ehtimali avtomat*.

ÇJUN TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « Чжуна закон повторного логарифма; Chung's law of the iterated logarithm » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* empirik ölçülər üçün.

ÇOXALDILMASI, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirlərinin **« укрупнение состояний** цепи Маркова; **aggregation of states** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin çoxaldılması.

ÇOXALTMA FUNKSİYASI « укрупнения функция; aggregation function » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin çoxaldılması.

ÇOXGİRİŞLİ KANAL « множественного доступа канал; multiple access channel » – bir neçə ötürücü və bir qəbulediciyə malik rabitə sistemini təsvir edən *çoxkomponentli kanala* aid misallardan biridir. Aşağıda ikigirişli yaddaşsız diskret stasionar Ç. k.-ın kodlanılması təsvir olunmuşdur (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*). Belə kanal iki giriş əlifbası – $\mathscr{Y}_1$, $\mathscr{Y}_2$, bir çıxış əlifbası – $\widetilde{\mathscr{Y}}$ ($\mathscr{Y}_1$, $\mathscr{Y}_2$, $\widetilde{\mathscr{Y}}$ – sonlu çoxluqlardır) və keçid ehtimalları – $p(\tilde{y}/y_1 y_2)$ ilə verilir. Baxılan kanal üçün N uzunluqlu və (M_1, M_2) həcmli kod – $y^1_{m_1} \in \mathscr{Y}_1^N$, $y^2_{m_2} \in \mathscr{Y}_2^N$, $1 \leq m_k \leq M_k$, $k = 1, 2$ (burada $\mathscr{Y}_k^N$, – $\mathscr{Y}_k$ sonlu çoxluğunun N-ci Dekart qüvvət üstüdür) sözləri toplusu və həm də bütün $\mathscr{Y}^N$ çoxluğunu örtən $C_{m_1 m_2} \subset \mathscr{Y}^N$, $1 \leq m_k \leq M_k$, $k = 1, 2$ kəsişən dekodlama oblastlarının toplusudur. Göründüyü kimi, $C_{m_1 m_2}$ elə $\tilde{y}$-lərin $(\tilde{y} \in \widetilde{\mathscr{Y}}^N)$ çoxluğudur ki, bunların qəbula alınmasının sonunda dekoder qərar verir ki, $y^1_{m_1}$ və $y^2_{m_2}$ kod sözləri (yəni m_1 və m_2 məlumatları) ötürülmüşdür. m_1 və m_2 məlumatlarının ötürülməsində xəta ehtimalı

$$\mathbf{P}_e(m_1, m_2) = \sum_{\tilde{\mathbf{y}} \notin C_{m_1 m_2}} p^{(N)}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \mathbf{y}_{m_1 1}, \mathbf{y}_{m_2 2})$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_N) \in \mathcal{Y}^N$, $\mathbf{y}_k = (y_{k1}, ..., y_{kN})$, $k = 1, 2$ üçün

$$p^{(N)}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \prod_{n=1}^{N} p(\tilde{y} \mid y_{1n}, y_{2n}).$$

Ç. k. üçün kodun xəta ehtimalının orta qiyməti $\mathbf{P}_{\text{or}}$ və maksimal qiyməti $\mathbf{P}_{\max}$ uyğun olaraq

$$\mathbf{P}_{\text{or}} = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{m_1, m_2} \mathbf{P}_e(m_1, m_2),$$

$$\mathbf{P}_{\max} = \max_{m_1, m_2} \mathbf{P}_e(m_1, m_2)$$

düsturları ilə təyin olunur.

Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $M_k \geq 2^{N(R_k - \varepsilon)}$, $k = 1, 2$, $\mathbf{P}_{\text{or.}} < \varepsilon$ şərtlərini ödəyən N uzunluqlu kod vardırsa, onda sürətlər toplusu $R = (R_1, R_2)$ çatılabilinən (rus. достижимый) sürətlər toplusu adlanır. Xəta ehtimalının orta qiymətinə görə kriteri üzrə Ç. k.-ın ötürücülük qabiliyyətli oblastı $\mathscr{R}_{\text{or}}$ bütün çatılabilinən R toplularının çoxluğu kimi təyin olunur. Xəta ehtimalının maksimal qiymətinə görə ötürücülük qabiliyyət oblastı $\mathscr{R}_{\max}$ analoji qayda ilə təyin olunur. Baxılan kanallar şəbəkəsi üçün $\mathscr{R}_{\text{or}}$ oblastı kanalın ötürücülük qabiliyyətli oblastı ilə üst-üstə düşür. Yaddaşsız diskret stasionar Ç. k. üçün $\mathscr{R}_{\text{or}}$ oblastı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathscr{R}_{\text{or}} = \text{co}\left(\bigcup_{p_1(y_1),\, p_2(y_2)} \mathscr{R}(p_1, p_2) \right), \qquad (*)$$

burada co – qabarıq örtükdür, p_1, p_2, – uyğun olaraq, $\mathscr{Y}_1$, $\mathscr{Y}_2$ – də ehtimal paylanmalarıdır və bu ehtimallar $p(\tilde{y} \mid y_1, y_2)$ ehtimalı ilə Y_1, Y_2, $\tilde{Y}$ təsadüfi kəmiyyətlər üçlüyünü $p_1(y_1) p_2(y_2) \times$ $\times p(\tilde{y} \mid y_1, y_2)$ birgə ehtimalı və

$$\mathscr{R}(p_1, p_2) = \{(R_1, R_2): 0 \leq R_1 \leq \mathbf{I}(Y_1; \tilde{Y} \mid Y_2),$$

$$0 \leq R_2 \leq \mathbf{I}(Y_2; \tilde{Y} \mid Y_1),\ R_1 + R_2 \leq \mathbf{I}(Y_1, Y_2; \tilde{Y})\}$$

ilə təyin edir, burada $\mathbf{I}$ – *informasiya miqdarıdır.*

Ümumiyyətlə, $\mathscr{R}_{\max}$ oblastı $\mathscr{R}_{\text{or}}$ oblastı ilə üst-üstə düşmür (birgirişli və birçıxışlı rabitə kanalı halından fərqli olaraq).

Ç. k.-ın yuxarıda baxılan ən sadə modelinin çoxsaylı ümumiləşmələri mövcuddur. Məs., L çıxışlı Ç. k.-dan başqa hər bir girişindəki gücü məhdudlandırılan, diskret zamanlı Qauss Ç. k. üçün kodlanma araşdırılmışdır. Korrelyarlanmış mənbələrli və tərs rabitəli Ç. k.-lara da baxılmışdır. Aydın olmuşdur ki, tərs rabitə, ümumiyyətlə, Ç. k.-ın ötürücülük qabiliyyəti oblastını genişləndirir. Bundan başqa, koderlərdən bəzilərinə digər koderlər tərəfindən verilən məlumatlar məlum olan hallarda da kodlama sxemlərini tədqiq etmək mümkündür (baxışla kodlama).

Kanalın yuxarıda şərh olunmuş modeli sinxron çoxgirişli kanal adlanır. Asinxron çoxgirişli kanal – kanalın girişlərində kod bloklarının sərhədləri bir-birinə nəzərən yerini dəyişir və bu yerdəyişmələr nə kodlama, nə də ki, dekodlama zamanı kəmiyyətcə məlum olmur. Bu halda da ötürücülük oblastı $\mathscr{R}_{\text{or, as.}}$-i hesablamaq mümkündür. Bu oblast qabarıq olmur və (*) düsturuna analoji düsturla verilir; bu halda yeganə fərq ondan ibarət olur ki, $\mathscr{R}_{\text{or, as.}}$-i hesablamaq üçün qabarıq örtük götürmək lazım gəlir.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] Van der Meulen E. C., «IEEE Trans. Inform. Theory» 1977, v. 23, № 1, p. 1–37.

ÇOXGİRİŞLİ QOŞMALIQ CƏDVƏLİ « многовходовая таблица сопряженности; multiway contingence table » – bax, *Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyət.*

ÇOXGİRİŞLİLİK « множественный доступ; multiple access » – çoxsaylı istifadəçilər tərəfindən resursun kollektiv istifadəsinin təşkilidir (bax, *Çoxgirişli kanal*). Ç.-yə ən sadə misal radioverilişidir: burada resurs – radio dalğalarının diapozonu, istifadəçilər – radiostansiyalardır. Resursun istifadəsinin təşkili tezliklər diapozonunun və stansiyalar arasında veriliş vaxtının bölgüsü haqqında əvvəlcədən qərara alınmış razılaşdırılmadan ibarətdir. Daha mürəkkəb hallarda stansiyalar radioverilişi tezlik və ya vaxt bölgüsü aparılmadan verir. Bu halda Ç. informasiyanın münasib surətdə *kodlaşdırılmasından* ibarət olur. Burada ehtimal nəzəriyyəsinin metodları rabitə sisteminin ötürücülük qabilliyyətli oblastının və optimal kodların axtarılması üçün tətbiq olunur.

Ç.-yə aid misalların çoxu kütləvi xidmət sistemləri ilə bağlıdır. Burada resurs – xidmətedici cihaz (və ya cihazlar), istifadəçilər – tələblər, çağırışlar, müştərilərdir, cihazın istifadəsinin tipik təşkili isə tələblərin nizamlandırılması və əvvəlki tələbin xidmətindən sonra növbədəki tələbin xidmətindən ibarətdir. Belə çoxgirişli sistemlər üçün ehtimal nəzəriyyəsi bu sistemlərin müxtəlif parametrlərinin (növbənin uzunluğu, xidmətə başlanma anını gözləmə müddəti və s.) paylanmalarının öyrənilməsində istifadə olunur.

Qeyd olunan misallarda resursun istifadəsinin təşkili vaxt sərf olunmadan və ya resursun öz gücündən istifadə edilmədən baş verir. Lakin bu həmişə belə olmur. Məs., EHM lokal şəbəkələrində resurs – istifadəçiləri EHM ilə birləşdirən ümumi rabitə *kanalıdır*. Bu kanal əksər hallarda EHM-nın verilənləri arasında ötürmələr üçün (əsas iş), həm də istifadəçilərdən hansılarında ötürmə üçün tələb olunan verilənlərin olmasını aydınlaşdırmaq üçün, bu istifadəçilərin nizamlanması və şəbəkənin bütün istifadəçilərini müəyyən olunmuş qayda haqqında və nizamlanmanın digər detalları haqqında xəbərdarlıq üçün (yardımçı iş) istifadə olunur. Resursun bütün işləmə müddətində onun əsas iş müddətinin orta payı resursun effektivliyi adlanır. Ç.-in müxtəlif üsulları üçün resursun effektivliyinin hesablanması araşdırma məsələsidir. Bu məsələdə ilkin verilənlər istifadəçilər tərəfindən resurs üçün tələblərin yaranmasında alınan nişanlanmış nöqtəvi proseslərin ehtimal xarakteristikalarıdır.

Münaqişəli (rus. с конфликтами) Ç. də mövcuddur. Əgər resurs ixtiyari anda xidmət üçün bir istifadəçidən artıq istifadəçi qəbul edə bilmirsə və eyni zamanda resursa iki və ya daha çox tələblər olursa, bu tələblər münaqişəli adlanır. Münaqişəli tələblər resurs istifadəsinə heç bir halda buraxılmır və bu istifadəçilər bu tələbləri təkrar etməlidirlər. Əgər bütün tələblər eyni bir zamandan bir təkrar olunursa, onda bu tələblər yenə də münaqişə yaratmış olurlar. Bu vəziyyətin yaranmaması üçün *təsadufi çoxgirişlilik metodları* tətbiq olunur. Təsadüfi Ç.-də münaqişədə olan tələblər təsadüfi zaman müddətlərindən bir təkrar olunurlar, məs., müxtəlif tələblər üçün tələblər asılı olmayan təsadüfi zaman müddətlərindən bir təkrar olunurlar və bununla da, resursun münaqişəsiz istifadəsinin sıfırdan fərqli ehtimalla təşkili yaranmış

olur, yəni münaqişə aradan qaldırılır. Münaqişənin həlli metodu təsadüfi Ç.-in alqoritminin əsas tərkib hissəsidir.

Əd.: [1] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., M., 1979; [2] Bertsekas D., Gallager R., Data Networks, N. Y., 1987.

ÇOXGİRİŞLİLİK təsadüfi **« множественный доступ** случайный; random **multiple access »** – bax, *Təsadüfi çoxgirişlilik.*

ÇOXXƏTLİ XİDMƏT SİSTEMİ « многолинейная система обслуживания; multichannel queueing system », çoxkanallı xidmət sistemi, – eyni zamanda birdən çox tələbə xidmət oluna bilən (hər kanalda, xətdə, cihazda) növbənin yaranması prosesinin riyazi modelidir. Ç. x. s., adətən, çoxölçülü Markov prosesi ilə təsvir olunur (bax, *Hissəvi xətti proses*). Ç. x. s.-nin əsas növləri gözləməli çoxkanallı *xidmət sistemi* və imtinalarlı *xidmət sistemidir*. İxtiyari tələbin ixtiyari kanala daxil ola bilib-bilməməsindən asılı olaraq, Ç. x. s.-ləri tamgirişli və natamamgirişli Ç. x. s.-lərinə ayrılır. Ç. x. s.-nin əsas tədqiqat metodu xidmət sistemlərinin *statistik modelləşdirilməsi* metodudur.

ÇOXKANALLI XİDMƏT SİSTEMİ « многоканальная система обслуживания; multichannel queueing system » – bax, *Çoxxətli xidmət sistemi.*

ÇOXKASKADLI XİDMƏT SİSTEMİ « многокаскадная система обслуживания; multicascade queueing system » – bax, *Xidmət sistemi* imtinalarlı.

ÇOXKOMPONENTLİ KANAL « многокомпонентный канал; multiterminal channel » – bir neçə ötürücüdən bir neçə qəbulediciyə ötürmə təmin edən rabitə *kanalıdır*. K girişli və L çıxışlı ümumi çoxkomponentli kanalı

$$\{ (\mathscr{X}, S_{\mathscr{X}}),\ (\widetilde{\mathscr{X}}, S_{\widetilde{\mathscr{X}}}),\ Q(x, A),\ V \}$$

rabitə kanalı kimi təyin etmək olar, bu rabitə kanalı üçün giriş siqnallarının ehtimal fəzası K sayda fəzanın düz hasili, yəni

$$(\mathscr{X}, S_{\mathscr{X}}) = (\mathscr{X}_1, S_{\mathscr{X}_1}) \times \ ... \ \times (\mathscr{X}_K, S_{\mathscr{X}_K});$$

çıxış siqnallarının ehtimal fəzası L sayda fəzanın düz hasili, yəni

$$(\widetilde{\mathscr{X}}, S_{\widetilde{\mathscr{X}}}) = (\widetilde{\mathscr{X}}_1, S_{\widetilde{\mathscr{X}}_1}) \times ... \times (\widetilde{\mathscr{X}}_L, S_{\widetilde{\mathscr{X}}_L})$$

kimi ifadə olunur və mümkün ola bilən giriş siqnallarına məhdudiyyətləri verən, $(\mathscr{X}, S_{\mathscr{X}})$ -də ehtimal ölçülərinin altçoxluğu V də düz hasildir: $\mu \in V$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda təmin olunur ki, $\mu_k \in V_k$ münasibəti ödənilsin, burada μ_k, – μ -nün $(\mathscr{X}_k, S_{\mathscr{X}_k})$ -da proyeksiyası, V_k isə $(\mathscr{X}_k, S_{\mathscr{X}_k})$ -da ehtimal ölçülərinin hər hansı altçoxluğudur. İntuitiv olaraq, $1 \le k \le K$ qiymətlərində $\mathscr{X}_k$ – Ç. k.-ın giriş siqnalının k -cı komponentinin qiymətləri çoxluğudur, $\widetilde{\mathscr{X}}_l$, $1 \le l \le L$ isə çıxış siqnalının l -ci komponentinin qiymətləri çoxluğudur.

Diskret yaddaşsız Ç. k.-ın xüsusi halda giriş və çıxış siqnalları sonlu $\mathscr{Y}_k$, $\widetilde{\mathscr{Y}}_k$ çoxluqlarının elementlərinin ardıcıllıqlarıdır. Belə Ç. k. $p(\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_L \mid y_1, ..., y_K)$ keçid ehtimallarının toplusu ilə verilir, burada $\widetilde{y}_l \in \widetilde{\mathscr{Y}}_l$, $y_k \in \mathscr{Y}_k$.

Ç. k. üçün kodlanmanın xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, hər bir giriş komponentinin kodlanması məlumatları Ç. k.-ın bir və ya bir neçə çıxış komponenti üçün təyin olunmuş ayrıca bir koderlə həyata keçirilir. Kanalın *əngələdayanıqlılığı* Ç. k.-ın girişindən onun çıxışına ötürülən informasiyanın maksimal çatılabilinən sürətini təyin edən ötürücülük qabiliyyəti oblastı ilə xarakterizə olunur (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*).

Ç. k.-ın xüsusi halları *genişyayımlı kanal* ($K = 1$), *çoxgirişli kanal* ($L = 1$), *interferens kanaldır* ($K = L = 2$). Koder və dekoderlərin xüsusi təşkilində, yəni kanalın bəzi çıxışlarındakı informasiyadan istifadə edə bilən koder və dekoderlərin təşkilində *çoxtərəfli kanal* alınır.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, M., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., M., 1985.

ÇOXKOMPONENTLİ MƏLUMATLAR MƏNBƏİ « многокомпонентный источник сообщений; multicomponent source » – bir-birindən asılı bir neçə məlumatlar mənbəinin riyazi təsviri üçün istifadə olunan nəzəri – informasion termindir. Aşağıda yaddaşsız diskret stasionar çoxkomponentli məlumatlar mənbəinin tərifi verilmişdir.

M komponentli U mənbəi M sayda sonlu $\mathscr{X}_1$,..., $\mathscr{X}_M$ çoxluqları (mənbənin komponentlərinin əlifbası) və $p(x_1, ..., x_M)$, $x_m \in \mathscr{X}_m$ ehtimal paylanması ilə verilir. Hər bir x_m elementi U mənbəinin m -ci komponentinin elementar məlumatı kimi interpretasiya olunur. Mənbənin stasionarlığı və yaddaşsızlığı onunla ifadə olunur ki, ehtimal paylanması p , məlumatlar bloklarında N uzunluqlu

$$p^{(N)}(x_1, ..., x_M) = \prod_{i=1}^{N} p\,(x_{1n}, ..., x_{Mn})$$

düsturu ilə təyin olunan $p^{(N)}$ ehtimal paylanmasını doğurur, burada $x_m = (x_{m1}, ..., x_{mN}) \in \mathscr{X}_m^N$.

Daha ümumi Ç. m. m.-lərinə də baxmaq olar (qeyri – stasionar, yaddaşlı, məlumatlar fəzası kəsilməz və s.); təriflər adi məlumat mənbəi üçün uyğun təriflərə analojidir.

Ç. m. m. üçün kodlama məsələsinə mənbələr və kanallar şəbəkələri üçün kodlama məsələsinin xüsusi halı kimi baxmaq olar. Bax, *Kodlanma*(sı) əlavə informasiyalı mənbənin.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, M., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., M., 1985.

ÇOXQAT QARIŞMA « кратное перемешивание; multiple mixing », r – qat qarışma – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının endomorfizmi T halında dinamik sistemin aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunan xassəsidir:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=0}^{r} T^{-k_i(n)} A_i \right\} - \prod_{i=0}^{r} \mathbf{P}(A_i) \right] = 0,$$

burada $A_0, ..., A_r$, – $\mathscr{A}$ -nın ixtiyari çoxluqları və $\{ k_i(n),\ n = 1, 2, ... \}$, $i = 0, 1, ..., r$, – $\lim\limits_{n \to \infty} \min\limits_{0 \le i < j \le r} \left| k_i(n) - k_j(n) \right| = 0$ şərtini ödəyən natural ədədlərin ixtiyari ardıcıllıqlarıdır. Kəsilməz zamanlı dinamik sistem üçün Ç. q. analoji təyin olunur. 1 qat qarışma sadə *qarışmadır*; «Ç. q.» termini, adətən, $r \ge 2$ olan çoxqat qarışmaya görə istifadə olunur. r – qat və $(r+1)$ – qat

qarışdırıcı dinamik sistemlər siniflərinin üst-üstə düşüb-düşməməsi məsələsi r -in heç bir qiymətində həll olunmamışdır (aydındır ki, bu siniflərdən birincisi ikincisini daxilinə alır).

Əd.: [1] Р о х л и н В. А., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 1949, т. 13, № 4, с. 329–40; [2] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

ÇOXQAT STOXASTİK İNTEQRAL « кратный стохастический интеграл; multiple stochastic integral » – bax, *Çoxqat Viner inteqralı.*

ÇOXQAT VİNER İNTEQRALI « кратный винеровский интеграл; multiple Wiener integral », ç o x q a t s t o x a s t i k i n t e q r a l, – Viner prosesi üzrə $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ funksiyasının (təsadüfi olmayan) –

$$\mathbf{I}_n(f) = \int \dots \int f(t_1, \dots, t_n)\, d\boldsymbol{w}_{t_1} \dots d\boldsymbol{w}_{t_n}$$

inteqralıdır. İto konstruksiyasının xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, pilləvari funksiyanın inteqralı yalnız elə f funksiyalarının inteqral cəmi ilə üst-üstə düşür ki, bunlar heç olmasa iki arqumenti üst-üstə düşdükdə sıfra bərabər olsun. Ç. V. i. aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $\mathbf{M}\,\mathbf{I}_n(f) = 0$, $n \geq 1$;

2) $\mathbf{M}\,\mathbf{I}_n(f) = \mathbf{M}\mathbf{I}_n(\widetilde{f})$, burada $\widetilde{f}$, – f funksiyasının simmetrizasiyasıdır;

3) $\mathbf{M}\,\mathbf{I}_n(f) \cdot \mathbf{I}_m(g) = 0$, $m \neq n$;

4) $\mathbf{M}\,\mathbf{I}_n(f)\,\mathbf{I}_n(g) = n! \left\langle \widetilde{f},\ \widetilde{g} \right\rangle_n$, burada $\langle \cdot,\ \cdot \rangle_n$, – $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ -da skalyar hasildir;

5) ixtiyari $\eta \in L^2(\mathscr{A})$ təsadüfi kəmiyyəti $\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{I}_n(f_n)$ cəmi şəklində ifadə oluna bilər, belə ki, əgər f_n – simmetrik funksiyalar olarsa, bu ayrılış birqiymətlidir, burada $\mathscr{A}$, – $\boldsymbol{w}$ -nin doğurduğu σ – cəbrdir.

Ç. V. i. stoxastik analizdə, xüsusilə də, *genişləndirilmiş stoxastik inteqral* və *stoxastik törəmənin* konstruksiyalarında istifadə olunur.

Əd.: [1] I t o K., «J. Math. Soc. Jap.», 1951, v. 3, p. 157–69.

ÇOXÖLÇÜLÜ BETA – PAYLANMA « многомерное бета – распределение; multidimensional beta distribution » – X təsadüfi kəmiyyəti üçün aşağıdakı kimi təyin olunan *paylanmadır*. Fərz olunur ki, $H \sim \sigma^2 \chi^2_{m_H}$, $E \sim \sigma^2 \chi^2_{m_E}$ və H və E statistik asılı deyildirlər. $T = H/E$ və $\upsilon = T/(1+T) = H/(E+H)$ üçün sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq

$$f(t) = \frac{t^{(m_H/2)-1}}{B(m_H/2,\, m_E/2)(1+t)^{(m_E+m_H)/2}}, \quad 0 \leq t < \infty$$

$$q(\upsilon) = \frac{1}{B(m_H/2,\, m_E/2)}\, \upsilon^{(m_H/2)-1}(1-\upsilon)^{(m_E/2)-1},$$

$$0 \leq \upsilon \leq 1$$

olsun, burada $B(a,\, b)$ – beta – funksiyasıdır.

Rahatlıq üçün $\upsilon \sim B(m_H/2,\, m_E/2)$ işarələməsindən istifadə olunur və deyilir ki, X təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları $m_H/2$ və $m_E/2$ olan I tip beta – paylanması ilə paylanır; analoji olaraq $m_E T/m_H \sim F(m_H, m_E)$ işarələməsi də istifadə olunur və deyilir ki, T təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları uyğun olaraq, $m_H/2$ və $m_E/2$ olan II tip beta – paylanması ilə paylanır.

Bax, həm də *Dirixle paylanması*.

ÇOXÖLÇÜLÜ BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ « многомерный процесс брауновского движения; multidimensional Brownian process » – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi*.

ÇOXÖLÇÜLÜ MÜŞAHİDƏ « многомерное наблюдение; multidimensional observation » – eyni bir obyektə aid n $(n>1)$ sayda birölçülü müşahidələrin nizamlanmış çoxluğudur. Ehtimali – statistik nöqteyi – nəzərdən Ç. m. *çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətin* realizasiyasıdır.

Ç. m.-nin komponentləri, ümumiyyətlə, müxtəlif şkalalarda ölçülə bilinər.

ÇOXÖLÇÜLÜ NORMAL PAYLANMA « многомерное нормальное распределение; multivariate normal distribution » – bax, *Normal paylanma*.

ÇOXÖLÇÜLÜ PAYLANMA « многомерное распределение; multivariate distribution » – s – ölçülü $\mathbb{R}^s$ Evklid fəzasının Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə ehtimal *paylanmasıdır*. Ç. p., adətən, çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətin və ya $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ təsadüfi vektorunun paylanması kimi anlaşılır və bu halda bu paylanma eyni bir Ω elementar hadisələr fəzasında verilmiş həqiqi $\xi_1(\omega), \dots, \xi_s(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması mənasını daşıyır ($\xi_1, \dots, \xi_s$ təsadüfi kəmiyyətlərinə $\Omega = \mathbb{R}^s$ fəzasında koordinat kəmiyyətləri kimi baxılır). Ç. p. p a y l a n m a f u n k s i y a s ı –

$$F(x_1, \dots, x_s) = \mathbf{P}\{\xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_s(\omega) < x_s\}$$

$x_1, \dots, x_s$ həqiqi dəyişənlərinin funksiyası vasitəsilə birqiymətli təyin olunur.

Birölçülü paylanmalar halında olduğu kimi ən çox yayılmış Ç. p.-lar – diskret və mütləq kəsilməz paylanmalardır. Diskret halda Ç. p. $\mathbb{R}^s$ fəzasında sonlu və ya hesabi $(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ nöqtələri çoxluğunda topalanmış olur, odur ki,

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = x_{i_1}, \dots, \xi_s = x_{i_s}\} = p_{i_1, \dots, i_s} \geq 0,$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_s} \mathbf{P}_{i_1, \dots, i_s} = 1; \quad (x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \in \mathbb{R}^s$$

(bax, məs., *Polinomial / multinomial paylanma*).

Mütləq kəsilməz paylanmalar halında $\mathbb{R}^s$ -də sanki hər yerdə Lebeq ölçüsü üzrə

$$\frac{\partial^s F(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1, \dots, \partial x_s} = p(x_1, \dots, x_s)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $p(x_1, \dots, x_s)$ funksiyası ç o x ö l ç ü l ü p a y l a n m a s ı x l ı ğ ı (ç o x ö l ç ü l ü s ı x l ı q)

adlanır və bu funksiya ixtiyari A üçün (A , – $\mathbb{R}^s$ fəzasının Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrin ixtiyari çoxluğudur)

$$\mathbf{P}\{\xi \in \mathrm{A}\} = \int_{\mathrm{A}} p(x_1,...,x_s)\, dx_1 \ldots dx_s$$

münasibətini ödəyir;

$$p(x_1,...,x_s) \geq 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^s} p(x_1,...,x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = 1\,.$$

Ç. p. verildiyi halda ixtiyari $\xi_i = \xi_i(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin və ya ixtiyari $m < s$ qiymətində $\xi_{i_1},...,\xi_{i_s}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması Ç. p.-ya nəzərən *xüsusi* və ya *marginal paylanma* adlanır. Aydındır ki, marginal paylanmalar verilmiş Ç. p. ilə tam mənası ilə təyin olunur. $\xi_1,...,\xi_s$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda $F(x_1,...,x_s) = F_1(x_1) \ldots F_s(x_s)$ və $p(x_1,...,x_s) = p_1(x_1) \ldots p_s(x_s)$ olur, burada $F_i(x)$ və $p_i(x)$, $i = \overline{1,s}$, – ξ_i təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq, marginal paylanma funksiyaları və paylanmaların sıxlıq funksiyalarıdır.

$\xi_1,...,\xi_s$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ixtiyari funksiyası – $f(\xi_1,...,\xi_s)$-in riyazi gözləməsi bu funksiyanın Ç. p.-ya görə inteqralı ilə təyin olunur; Ç. p. mütləq kəsilməz olduğu halda, riyazi gözləmə

$$\mathbf{M} f(\xi_1,..., \xi_s) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x_1,...,x_s)\, p\,(x_1,...,x_s)\, dx_1 \ldots dx_s$$

inteqralı ilə təyin olunur.

Ç. p.-nın xarakteristik funksiyası $\mathbf{t} = (t_1, ...,t_s)$ vektorunun funksiyasıdır və $\varphi(t) = \mathbf{M} e^{i\mathbf{t}x'}$-ə bərabərdir, burada $\mathbf{t}x' = t_1 x_1 + \ldots + t_s x_s$. Ç. p.-nın əsas xarakteristikaları $\mathbf{M}\xi^{k_1} \ldots \xi^{k_s}$ – qarışıq momentləri və $\mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1)^{k_1} \ldots (\xi_s - \mathbf{M}\xi_s)^{k_s}$ – mərkəzi qarışıq momentləridir, burada $k_1 + \ldots + k_s$ uyğun momentin tərtibidir. Ç. p.-nın riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $\mathbf{M}\xi = (\mathbf{M}\xi_1,..., \mathbf{M}\xi_s)$ vektoru və kovariasion matris təşkil edən 2-ci tərtib mərkəzi qarışıq momentlər çoxluğudur. Əgər $i \neq j$ şərtini ödəyən bütün i, j qiymətlərində $\mathbf{M}(\xi_i - \mathbf{M}\xi_i) \times (\xi_j - \mathbf{M}\xi_j) = 0$ olarsa, onda $\xi_1,...,\xi_s$ cüt–cüt qeyri–korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər adlanır (kovariasion matris bu halda diaqonal matrisdir). Əgər kovariasion matrisin rankı m , s -dən kiçik olarsa, onda Ç. p. *cırlaşan paylanma* adlanır; bu halda Ç. p. $\mathbb{R}^s$-in m – ölçülü hər hansı xətti çoxobrazlısında topalanmış olur.

ξ_1 ,..., ξ_s arasında asılılığın araşdırılması metodları haqqında, bax, *Korrelyasiya* və *Reqressiya* məq.-inə.

ÇOXÖLÇÜLÜ SIXLIQ « многомерная плотность; multivariate density » – bax, *Çoxölçülü paylanma*; *Sıxlıq, ehtimal sıxlığı.*

ÇOXÖLÇÜLÜ STATİSTİK ANALİZ « многомерный статистический анализ; multivariate statistical analysis » – riyazi statistikanın elə bölməsidir ki, bu bölmə məlumatların toplanılması üçün optimal planların riyazi metodlarla qurulmasına, çoxölçülü statistik verilənlərin sistemləşdirilməsi və yenidən işlənilməsinə həsr olunmuş, araşdırılan çoxölçülü əlamətin komponentləri arasında qarşılıqlı əlaqələrin xarakteri və strukturunun aşkar edilməsinə yönəlmiş və elmi – praktiki nəticələrin alınması üçün təxis olunmuşdur. x_1 ,..., x_p göstəricilərindən (əlamətlər, dəyişənlər) ibarət p – ölçülü $\mathbf{x} = (x_1,..., x_p)$ vektoru çoxölçülü əlamət kimi anlaşılır. $x_1,...,x_p$ göstəriciləri kəmiyyət göstəriciləri, qaydalı (və ya ordinal) göstəricilər və təsnif (və ya nominal) göstəriciləri kimi siniflərə ayrılır. Kəmiyyət göstəriciləri – araşdırılan obyektin xassələrinin aşkar olunma dərəcəsini müəyyən şkalada skalyar ölçən göstəricilərdir; qaydalı (və ya ordinal) göstəricilər – analiz olunan obyektləri bu obyektlərdə öyrənilən xassənin aşkar olunma dərəcəsinə görə nizamlamağa imkan verən göstəricilərdir; təsnif (və ya nominal) göstəriciləri obyektlərin araşdırılan çoxluğunu nizamlamayan bircins (analiz edilən xassəyə görə) siniflərə ayırmağa imkan yaradan göstəricilərdir. Araşdırılan çoxluğun n obyektinin hər birində bu göstəricilərin ölçmə nəticələri

$$\{\mathbf{x}_i\}_1^n = \{(x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{pi})\}_1^n \qquad (1)$$

– çoxölçülü müşahidələr ardıcıllığını və ya Ç. s. a. aparmaq üçün çoxölçülü verilənlərin ilkin əsas massivini əmələ gətirir. Ç. s. a.-in əsas hissəsi araşdırılan $\mathbf{x}$ çoxölçülü əlamətinin *çoxölçülü təsadüfi kəmiyyət* kimi və uyğun olaraq, (1) *çoxölçülü müşahidələr* ardıcıllığının – ümumi çoxluqdan seçim kimi interpretasiya olunduğu hallara xidmət edir. Bu halda ilkin statistik verilənlər üzərində yenidən işlənilmə metodlarının seçilməsi və verilənlərin xassələrinin analizi $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ çoxölçülü (birgə) ehtimal paylanma qanununun xüsusiyyətlərinə görə bu və ya digər fərziyyələr əsasında aparılır.

Ç. s. a. məzmununa görə şərti olaraq üç altbölməyə ayrılır: çoxölçülü paylanmalar və onların əsas xarakteristikalarının Ç. s. a.; araşdırılan çoxölçülü əlamətin komponentləri arasında qarşılıqlı əlaqələrin xarakter və strukturunun Ç. s. a.; çoxölçülü müşahidələrin araşdırılan çoxluğunun həndəsi strukturunun Ç. s. a.-i.

Çoxölçülü paylanmalar və onların əsas xarakteristikalarının çoxölçülü statistik analizi yalnız üzərində işlənilə bilinən (1) müşahidələrinin ehtimali təbiətli olduğu, yəni bu müşahidələrin uyğun ümumi çoxluqdan seçim kimi interpretasiya olunduğu halları əhatə edir. Bu altbölmənin əsas məsələsi aşağıdakılardır: araşdırılan çoxölçülü paylanmaların və onların əsas xarakteristikalarının və parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi; istifadə olunan statistik qiymətlərin xassələrinin araşdırılması; analiz olunan çoxölçülü verilənlərin ehtimali təbiəti haqqında müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilərin qurulmasında istifadə edilən bir sıra statistikaların ehtimal paylanmalarının araşdırılması. Əsas nəticələr belə bir xüsusi hal üçün alınmışdır: $\mathbf{x}$ əlaməti paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ –

$$f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \left|\mathbf{V}\right|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \qquad (2)$$

münasibətilə verilən $N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ çoxölçülü normal paylanma qanununa tabedir, burada $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,...,\mu_p)^{\mathrm{T}}$, – $\mathbf{x}$ təsadüfi kəmiyyətinin komponentlərinin riyazi gözləmələrinin vektorudur, yəni $\mu_l = \mathbf{M}x_l$, $l = 1, 2, ..., p$, $\mathbf{V} = \left\| v_{ij} \right\|_{i,\,j=1}^{p}$, – $\mathbf{x}$ təsadüfi vekto-

runun kovariasion matrisidir, yəni $v_{ij} = \mathbf{M}\,(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)$, – $\mathbf{x}$ vektorunun komponentlərinin kovariasiyalarıdır (ranqın $\mathbf{V} = p$ olduğu cırlaşmayan hala baxılır; əks halda, yəni ranqın $\mathbf{V} = p' < p$ olduğu halında bütün nəticələr doğrudur, bu şərtlə ki, bunlar kiçik p' dim. – ölçülü altfəzada götürülür ki, araşdırılan təsadüfi $\mathbf{x}$ vektorunun ehtimal paylanması məhz bu fəzada topalanmışdır).

Odur ki, əgər (1) asılı olmayan müşahidələr ardıcıllığıdırsa və bu ardıcıllıq $N_p(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{V})$ paylanmasından olan təsadüfi seçimi yaradırsa, onda (2)-dəki $\boldsymbol{\mu}$ və $\mathbf{V}$ parametrləri üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{\cdot i} \tag{3}$$

və

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_{\cdot i} - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\hat{\mathbf{x}}_{\cdot i} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \tag{4}$$

düsturları ilə ifadə olunur, belə ki, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ təsadüfi vektoru p – ölçülü $\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu},\ \frac{1}{n}\mathbf{V})$ normal qanununa tabedir və $\hat{\mathbf{V}}$ -dən asılı deyildir, $\hat{\mathbf{Q}} = n\hat{\mathbf{V}}$ matrisinin elementlərinin çoxölçülü paylanmaları Uişart paylanması adlandırılan (bax, [4]) paylanma ilə paylanır ki, bu paylanmanın sıxlıq funksiyası aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$\omega(\hat{\mathbf{Q}} \mid \mathbf{V};\ n) = \begin{cases} \dfrac{|\hat{\mathbf{Q}}|^{(n-p-2)/2} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{V}^{-1}\hat{\mathbf{Q}})\right\}}{2^{(n-1)p/2}\,\pi^{p(p-1)/4}\,|\mathbf{V}|^{(n-1)/2}\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma\{(n-j)/2\}}, \\ \qquad \text{əgər } \hat{\mathbf{Q}} \text{ müsbət müəyyəndirsə,} \\ 0, \qquad \text{əks halda.} \end{cases}$$

Bu sxem çərçivəsində çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətin seçimi xarakteristikalarından cüt-cüt, xüsusi və toplam korrelyasiyalar kimi xarakteristikalar, ümumiləşmiş dispersiya (yəni $|\hat{\mathbf{V}}|$ statistikası), ümumiləşmiş Hotellinq T^2 – statistikası (bax, [5]) kimi statistikaların paylanmaları araşdırılmışdır. Xüsusi halda (bax, [1]) $\mathbf{S}_n$ seçimi matrisi kimi «meylsizlik» üçün düzəliş aparılmış $\hat{\mathbf{V}}$ statistik qiymətini, yəni

$$\mathbf{S}_n = \frac{n}{n-1}\,\hat{\mathbf{V}}$$

qiymətini təyin etdikdə, $\sqrt{n}\ (\,|\mathbf{S}_n|/|\mathbf{V}| - 1)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \to \infty$ olduqda $N_1(0,\ 2p)$ normal paylanmasına yaxınlaşır,

$$\frac{n-p}{p(n-1)}\,T^2 = \frac{n-p}{p\,(n-1)}\,n\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})'\,\mathbf{S}_n^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}) \tag{6}$$

və

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)\,p}\,\tilde{T}^2 = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)\,p} \times$$

$$\times \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2})'\,\mathbf{S}_{n_1+n_2}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2}) \tag{7}$$

təsadüfi kəmiyyətləri isə sərbəstlik dərəcələri sayı uyğun olaraq, $(p,\ n-p)$ və $(p,\ n_1 + n_2 - p - 1)$ olan F – paylanmalarına tabedirlər. (7) münasibətində n_1 və n_2 (1) şəkilli iki asılı olmayan seçimlərin həcmləridir və bu seçimlər eyni bir $\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{V})$ normal paylanmaya tabe ümumi çoxluqdan edilmişdir; (3) və (4) – (5) şəkilli $\hat{\mu}_{n_i}$ və $\mathbf{S}_{n_i}$ statistik qiymətləri i-ci seçim üzrə qurulmuşdur,

$$\mathbf{S}_{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\,[(n_1 - 1)\mathbf{S}_{n_1} + (n_2 - 1)\,\mathbf{S}_{n_2}]$$

isə ümumi seçimi kovariasion matris olub, $\mathbf{S}_{n_1}$ və $\mathbf{S}_{n_2}$ statistik qiymətləri əsasında qurulmuşdur.

Araşdırılan çoxölçülü əlamətin komponentlərinin qarşılıqlı əlaqələrinin xarakteri və strukturunun çoxölçülü statistik analizi Ç. s. a.-in toplam reqressiya, çoxölçülü *dispersion analiz*, *kovariasion analiz*, *faktor analiz* kimi metod və modellərinə və baş komponentlər metodu, kanonik korrelyasiyalar analizinə xidmət edən anlayış və nəticələri özündə birləşdirmişdir. Bu altbölmənin məğzini təşkil edən nəticələr şərti olaraq iki əsas tipə ayrılır.

1) Qeyd olunmuş modellərin parametrləri üçün ən yaxşı statistik qiymətlərin (müəyyən mənada) qurulması və bunların xassələrinin analizi (dəqiqliyi, ehtimali qoyuluşda isə onların paylanmaları, etibarlı oblastların və s. analizi) kimi. Məs., araşdırılan çoxölçülü $\mathbf{x}$ əlamətinin p – ölçülü $\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ normal qanunu ilə paylanmış vektor təsadüfi kəmiyyət kimi interpretasiya olunduğu və uyğun olaraq, q və $p-q$ ölçülü $\mathbf{x}^{(1)}$ və $\mathbf{x}^{(2)}$ – iki alternativ-sütuna ayrıldığı fərz olunur. Bu halda riyazi gözləmələr vektoru $\boldsymbol{\mu}$-nün, nəzəri və kovariasion $\mathbf{V}$ və $\tilde{\mathbf{V}}$ matrislərinin də uyğun olaraq, aşağıdakı ayrılışını təyin edir:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{Vmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{və} \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{Vmatrix} \hat{\mathbf{V}}_{11} & \hat{\mathbf{V}}_{12} \\ \hat{\mathbf{V}}_{21} & \hat{\mathbf{V}}_{22} \end{Vmatrix}.$$

Onda $\mathbf{x}^{(1)}$ altvektorunun şərti paylanması (ikinci altvektorun qeyd olunmuş $\mathbf{x}^{(2)}$ qiymətini almasına nəzərən) $N_q(\boldsymbol{\mu}^{(1)} + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}),\ \boldsymbol{\Xi})$ normal paylanma olur (bax, [1], [2]). Bu halda

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(1)} \mid \mathbf{x}^{(2)}) = \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}) \tag{8}$$

toplam reqressiyasının klassik çoxölçülü modelinin reqression əmsallar matrisi $\mathbf{B}$ və kovariasiyalar matrisi $\boldsymbol{\Xi}$ üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlər $\hat{\mathbf{B}}$ və $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ – uyğun olaraq, qarşılıqlı asılı olmayan statistik qiymətlər olub, aşağıdakı kimi ifadə olunacaqdır:

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{V}}_{12}\,\hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1} \quad \text{və} \quad \hat{\boldsymbol{\Xi}} = \hat{\mathbf{V}}_{11} - \hat{\mathbf{V}}_{12}\,\hat{\mathbf{V}}_{22}^{-1}\,\hat{\mathbf{V}}_{21};$$

burada $\widetilde{\mathbf{B}}$ statistik qiymətinin paylanması $N_{q(p-q)}(\mathbf{B},\ \mathbf{V_B})$ normal qanununa tabedir, $n\hat{\Xi}$ statistik qiyməti isə Ξ və $n-(p-q)$ parametrlərli Uişart paylanma qanununa tabedir ($\mathbf{V_B}$ kovariasion matrisinin elementləri $\mathbf{V}$ matrisinin elementləri terminlərilə ifadə olunur).

Faktor analiz, baş komponentlər və kanonik korrelyasiyalar modellərində statistik qiymətlərin parametrlərinin qurulması və onların xassələrinin araşdırılması üzrə əsas nəticələr müxtəlif kovariasion matrislərin məxsusi (xarakteristik) qiymətlərinin və vektorların ehtimali – statistik xassələrinin analizinə aiddir.

Klassik normal model çərçivəsinə və hətta hər hansı ehtimal modeli çərçivəsinə sığmayan sxemlərdə əsas nəticələr parametrlər üçün modelin hər hansı ekzogen verilmiş funksional keyfiyyəti (və ya adekvatlığı) baxımından ən yaxşı statistik qiymətlərin hesablanması alqoritmlərinin qurulmasına (və onların xassələrinin araşdırılmasına) aiddir.

2) Araşdırılan qarşılıqlı əlaqələrin strukturu haqqında müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilərin qurulması. Çoxölçülü normal model çərçivəsində [(1) şəklində müşahidələr ardıcıllıqları uyğun çoxölçülü normal paylanmalı ümumi çoxluqlardan təsadüfi seçimlər kimi interpretasiya olunur], məs., aşağıdakı hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilər qurulmuşdur.

I. Araşdırılan göstəricilərin riyazi gözləmələri vektoru $\boldsymbol{\mu}$-nün verilmiş, konkret $\boldsymbol{\mu}^*$ vektoruna bərabərliyi haqqında $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ hipotezi; Hotellinq T^2 – statistikasının vasitəsilə, (6) düsturunda $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ əvəzləməsinin aparılması ilə yoxlanılır.

II. İki seçimlə ifadə olunan iki ümumi çoxluqda (eyni, lakin naməlum kovariasion matrislərli) riyazi gözləmələr vektorlarının bərabərliyi haqqında $\boldsymbol{\mu}^{(1)}=\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ hipotezi; T^2 – statistikası ilə yoxlanılır.

III. Hər biri öz seçimi ilə ifadə olunan bir neçə ümumi çoxluqda (eyni, lakin naməlum kovariasion matrislərli) riyazi gözləmələr vektorlarının bərabərliyi haqqında $\boldsymbol{\mu}^{(1)}=\boldsymbol{\mu}^{(2)}=\ldots=\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\boldsymbol{\mu}$ hipotezi

$$U_{p,k-1,n-k}=\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j}(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(j)})(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(j)})'\right|}{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j}(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}})'\right|}$$

statistikası vasitəsilə yoxlanılır, burada $\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}$, – j-ci ümumi çoxluğu ifadə edən n_j həcmli seçimdə p – ölçülü müşahidədir, $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}$ və $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ – uyğun olaraq, hər bir seçim üzrə və $n=n_1+\ldots+n_k$ həcmli birləşdirilmiş seçim üzrə qurulmuş (3) şəkilli statistik qiymətlərdir.

IV. Özlərinin $\{\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}\}_{i=1}^{n}$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ seçimləri ilə ifadə olunan bir neçə normal ümumi çoxluğun ekvivalentliyi haqqında $\boldsymbol{\mu}^{(1)}=\boldsymbol{\mu}^{(2)}=\ldots=\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\boldsymbol{\mu}$ və $\mathbf{V}_1=\ldots=\mathbf{V}_k=\mathbf{V}$ hipotezi;

$$\lambda=\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}\left|n_j\hat{\mathbf{V}}_j\right|^{(n_j-1)/2}}{\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n_j}(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}})'\right|^{(n-k)/2}}$$

statistikası vasitəsilə yoxlanılır, burada $\hat{\mathbf{V}}_j$ – (4) şəklində statistik qiymət olub, j-ci seçimin müşahidələri üzrə qurulmuşdur, $j=1,\ 2,\ldots,k$.

V. $\mathbf{x}$-in araşdırılan göstəricilərinin ilkin p – ölçülü vektorunun ayrıldığı $p_1+p_2+\ldots+p_m=p$ şərtini ödəyən dim. – $p_1,p_2,\ldots,p_m$ ölçülərli uyğun $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\ldots,\mathbf{x}^{(m)}$ altvektor-sütunların qarşılıqlı asılı olmamazlığı haqqında hipotez;

$$\boldsymbol{\psi}=\frac{\left|n\hat{\mathbf{V}}\right|}{\prod\limits_{i=1}^{m}\left|n_i\hat{\mathbf{V}}_i\right|}$$

statistikası vasitəsilə yoxlanılır, burada $\hat{\mathbf{V}}$ və $\hat{\mathbf{V}}_i$ – uyğun olaraq, bütün $\mathbf{x}$ vektoru və onun altvektoru $\mathbf{x}^{(i)}$ üçün (4) şəkilli seçimi kovariasion matrislərdir.

Çoxölçülü müşahidələrin araşdırılan ardıcıllığının həndəsi strukturunun çoxölçülü statistik analizi *diskriminant analiz*, *ehtimal paylanmalarının qarışığı*, *klaster analiz* və taksonomiya, *çoxölçülü şkallanma* kimi model və sxemlərin anlayış və nəticələrini özündə birləşdirir. Analiz olunan elementlər arasında məsafə anlayışı (yaxınlıq ölçüsü, oxşarlıq ölçüsü) bütün bu sxemlərin əsasını təşkil edir. Qeyd etmək lazımdır ki, hər birində $\mathbf{x}$-in göstəricilərinin qiymətləri qeyd olunan real obyektlər analiz olunduğu kimi [bu halda araşdırılmış i-ci obyektin həndəsi obrazı uyğun p – ölçülü fəzada $\mathbf{x}_{\cdot i}=(x_{1i},\ldots,x_{pi})^{\mathrm{T}}$ nöqtəsi olacaqdır], $\mathbf{x}_l$, $l=1,\ 2,\ldots,p$ göstəricilərinin özləri də analiz oluna bilərlər [bu halda l-ci göstəricinin həndəsi obrazı uyğun n – ölçülü fəzada $\mathbf{x}_l=(x_{l1},\ldots,x_{ln})$ nöqtəsi olacaqdır].

Diskriminant analizin metodları və nəticələri (bax, [1], [2], [7]) aşağıdakı məsələnin həllinə istiqamətləndirilmişdir. Ümumi çoxluqların sayının $k\geq 2$ olması məlumdur və tədqiqatçı araşdırmaq üçün hər bir çoxluqdan bir seçimə malikdir («öyrədici seçimlər»). Məlum öyrədici seçimlərə əsaslanan ən yaxşı təsnifedici qayda qurmaq tələb olunur, bu qayda üzrə hər hansı yeni elementin ($\mathbf{x}$ müşahidəsi) özünün ümumi çoxluğundan olması təyin olunur, bu şərtlə ki, bu elementin ümumi çoxluqlardan hansına aid olması məlum olmalıdır. Təsnifedici qayda, adətən, müəyyən əməliyyatlar ardıcıllığı olub, aşağıdakılardan ibarətdir: araşdırılan göstəricilərin skalyar funksiyanın hesablanılması və bu funksiyanın qiymətlərinə görə elementin hansı sinfə daxil ediləcəyi qərarının verilməsi (diskriminant funksiyanın qurulması); elementin siniflərə düzgün aid edilməsi nöqteyi – nəzərindən göstəricilərin informativlik dərəcəsinə görə nizamlandırılması; səhv təsnifatın uyğun ehtimallarının hesablanılması.

Ehtimal paylanmaları qarışıqlarının analizi məsələsi əksər hallarda (lakin həmişə deyil) baxılan çoxluğun «həndəsi strukturunun» tədqiqatı ilə bağlı olaraq da yaranır. Bu halda r-ci bircins sinif anlayışı elə ümumi çoxluğun vasitəsilə formalaşır ki, bu çoxluq hər hansı (bir qayda olaraq, unimodal) $\mathbf{P}(\mathbf{x}\,|\,\theta_r)$ paylanma qanunu ilə təsvir olunur, belə ki, (1) seçimi edilmiş ümumi çoxluğun paylanması

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})=\sum_{r=1}^{k}\pi_r\,\mathbf{P}(\mathbf{x}\,|\,\theta_r)$$

şəklində paylanmalar qarışığı ilə təsvir olunur, burada π_r – ümumi götürülmüş ümumi çoxluğun r-ci sinfinin aprior ehtimalıdır (elementlərinin xüsusi çəkisi). Məsələ ($\{\mathbf{x}_i^{(n)}\}_1$ seçimi üzrə) θ_r, π_r naməlum parametrlərinin və bəzən k-nın da «yaxşı» statistik qiymətləndirilməsindən ibarətdir. Bu isə, xüsusən də, öyrədici seçimlərin olmamasına baxmayaraq, elementlərin təsnifat məsələsini diskriminant analiz sxeminə gətirməyə imkan verir.

Klaster – analizin metod və nəticələri (təsnifi, taksonomiyaları (yunan. taxis – qaydalı düzülüş + nomos – qanun), obrazların «müəllimsiz» tanınması (bax, [2], [6]) aşağıdakı məsələnin həllinə istiqamətlənmişdir. Analiz olunan elementlər çoxluğunun strukturu ya uyğun nöqtələrin koordinatları ilə (yəni $\|x_{ij}\|$ matrisi ilə, $i = 1,..., p;\ j = 1,..., n$) və ya onların qarşılıqlı yerləşmələrinin həndəsi xarakteristikaları toplusu ilə verilir, məs., cüt-cüt məsafələr matrisi $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ ilə. Araşdırılan elementlər çoxluğunun nisbətən azsaylı (əvvəlcədən ya məlum, ya da ki, məlum olmayan) siniflərə elə bölgüsü tələb olunur ki, bir sinfin elementləri bir-birindən az məsafədə olsunlar, bu şərtlə ki, müxtəlif siniflər mümkün olduqca bir-birindən olduqca uzaq olmuş olsunlar və bu siniflər eyni zamanda bir-birindən çox da uzaq hissələrə bölünməsinlər.

Çoxölçülü şkallanma məsələsində (bax, [6]) tədqiq olunan elementlər çoxluğu cüt-cüt məsafələr matrisi $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ vasitəsilə verilir və elementlərdən hər birinə verilmiş (p) sayda koordinatlar elə şəkildə qarşı qoyulur ki, bu əlavə olunmuş köməkçi koordinatların köməyilə ölçülmüş elementlər arasında cüt-cüt qarşılıqlı məsafələr strukturu verilmiş strukturdan orta hesabla çox az fərqlənsin. Qeyd etmək lazımdır ki, klaster – analizin və çoxölçülü şkallanmanın əsas nəticələri və metodları ilkin verilənlərin ehtimali təbiəti haqqında, adətən, hər hansı fərziyyələr edilmədən inkişaf edir.

Çoxölçülü statistik analizin tətbiqi rolu əsas etibarilə aşağıdakı üç problemə xidmət etməkdən ibarətdir.

Analiz olunan göstəricilər arasında asılılıqların statistik araşdırılması problemi. Göstəricilərin məğzinə və araşdırmanın son məqsədlərinə görə statistik qeydə alınmış göstəricilərin araşdırılan toplusu $\mathbf{x}$ vektorunun öngörül (rus. предсказываемых) (asılı) dəyişənlərin q – ölçülü $\mathbf{x}^{(1)}$ altvektoruna və öngörən (rus. предсказывающий) (asılı) dəyişənlərin $(p-q)$ – ölçülü $\mathbf{x}^{(2)}$ altvektoruna bölgüsünün aparıldığı fərz olunur; problem – məqbul həllər sinfi F-dən $\mathbf{x}^{(1)}$-in göstəricilərinin altvektorunun müəyyən mənada ən yaxşı approksimasiyasının (1) seçimi əsasında q – ölçülü vektor $f(\mathbf{x}^{(2)})$ funksiyasının təyin olunmasından ibarətdir. Funksionalın konkret şəklindən və analiz olunan göstəricilərin təbiətindən asılı olaraq approksimasiyanın keyfiyyəti, toplam reqressiya, dispersion, kovariasion və ya konflyuent analizin bu və ya digər sxemləri alınır.

Elementlərin (obyektlərin və ya göstəricilərin) **təsnif problemi** ümumi (ciddi olmayan) qoyuluşda ondan ibarətdir ki, $\|x_{ij}\|$, $i = 1,..., p$, $j = 1,..., n$ matrisi və ya $\|\rho_{ij}\|$, $i, j = 1,..., n$ matrisi şəklində statistik ifadə olunmuş elementlərin analiz olunacaq bütün toplusu müəyyən mənada bircins olan nisbətən az sayda qruplara bölünməlidir. Təsnifat keyfiyyəti kriterisini müəyyən edən funksionalın konkret şəkli və aprior informasiyanın təbiətindən asılı olaraq, diskriminant analiz, klaster – analiz (taksonomiya, obrazların «müəllimsiz» tanınması), paylanmalar qarışığının parçalanması (ayrılması) kimi bu və ya digər sxemlər alınır.

Araşdırılan faktor fəzanın dim. – ölçüsünün kiçildilməsi və informativ göstəricilərin ən yaxşılarının seçilməsi problemi ondan ibarətdir ki, ilkin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ göstəricilərinin məqbul $Z(\mathbf{x})$ çevirmələri sinfindən tapılan, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m)^{\mathrm{T}}$ göstəricilərinin nisbətən az olan $m << p$ sayda elə toplusu müəyyən olunmalıdır ki, bu sinifdə əlamətlərin n – ölçülü sisteminin informativliyinin ekzogen [ekzo – yunan, + genos növ – təbiətli yaranış – xarici səbəblərin doğurduğu; ekzogen – proseslər – müəyyən səbəblər nəticəsində baş verən proseslər] verilmiş hər hansı ölçüsünün yuxarı sərhədi alınsın. Avtoinformativlik ölçüsünü [yəni statistik (1) massivindəki ilkin əlamətlərin özlərinə nəzərən informasiyanın maksimal qorunmasını təmin edən] təyin edən funksionalın konkretləşdirilməsi, məsələn, faktor analizin və baş komponentlərin müxtəlif sxemlərinə gətirir. Xarici informativlik ölçüsünü təyin edən funksionallar, yəni (1) massivindən $\mathbf{x}$-də bilavasitə olmayan digər göstəricilər və ya fenomenlərə nəzərən maksimal informasiyanın əldə olunmasını təmin edən funksionallar, asılılıqların statistik araşdırılması və diskriminant analiz sxemlərində ən informativ göstəricilərin seçilməsi üçün müxtəlif metodlara gətirir.

Ç. s. a.-in əsas riyazi instrumentarisi xətti tənliklər sistemi nəzəriyyəsi və matrislər nəzəriyyəsinin xüsusi metodları (vektorlar və məxsusi qiymətlər haqqında sadə və ümumiləşmiş məsələlərin həlli metodları; matrislərin sadə çevrilməsi və psevdoçevrilməsi; matrislərin diaqonalizasiyası prosedurları və s.) və bəzi optimizasiya alqoritmləridir (koordinatlar üzrə enmə, şaxələr və sərhədlərin, qoşma qradiyentlər, təsadüfi axtarışın müxtəlif variantları və stoxastik approksimasiyanın metodları).

Əd.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Большев Л. Н., «Bull. Int. Stat. Inst.», 1969, № 43, p. 425–41; [4] Wishart J., «Biometrika», 1928, v. 20A, p. 32–52; [5] Hotelling H., «Ann. Math. Stat.», 1931, v. 2, p. 360–78; [6] Kruskal J. B., «Psychometrika», 1964, v. 29, p. 1–27.

ÇOXÖLÇÜLÜ ŞKALLANMA « многомерное шкалирование; multidimensional scaling » – baxılan ümumi çoxluğun obyektləri arasında fərqlərin (yaxınlığın) ölçüləri haqqında verilən informasiya əsasında bu obyektlərin hər birinə onun miqdar göstəricilərini xarakterizə edən vektor (verilmiş dim. – ölçüsü ilə) qarşı qoymaq üçün metodlar toplusudur; bu zaman axtarılan koordinat fəzasının dim. – ölçüsü əvvəlcədən verilir, analiz olunan obyektlərin isə əlavə koordinatlar kimi «əlavə olunması» elə aparılır ki, bunlar arasında qarşılıqlı fərqlərin (yaxınlıqların) strukturu əlavə olunmuş koordinatların köməyilə ölçüldükdə verilən strukturdan orta hesabla çox az fərqlənmiş olsun (bax, [1]). Stimulların fəza təsviri məsələsinin həlli üçün formal aparat verilənlər arasında subyektiv fərqlər haqqında onların analizi əsasında ilk dəfə 1952-də (bax, [2]) işlənilmişdir və metrik çoxölçülü şkallanma adlandırılmışdır. Metod metrik fəzada stimulların real konfiqurasiyalar şəklində fərqləri haqqında verilənlərin inikası üçün zəruri şərtlərə əsaslanır. Bu metod məsafələr matrisindən konfiqurasiyanın ağırlıq mərkəzi ilə nöqtələri birləşdirən skalyar vektorlar matrisinə keçidi yerinə yetirir. Matrisin rankı fəzanın dim. – ölçüsü ilə üst-üstə düşür. Dəqiq məsafələr olmayan psixoloji fərqlərə bu metodun tətbiqinə additiv konstantın seçilməsi ilə nail olunur.

Subyektiv fərqlərin məsafələrlə kifayət dərəcədə üst-üstə düşməməsi haqqındakı mülahizələr fərqləri deyil, onların qaydasını

nəzərə alan psixoloji struktur inikasına yeni yanaşmanın yaranmasına səbəb oldu (bax, [3]). Bu məsələnin həllində iki tələb qoyulur: monotonluq və minimal dim. – ölçülülük. Yanaşma – yaxınlıqlar analizi və ya qeyri–metrik Ç. ş. kimi adlandırılmışdır. Belə Ç. ş.-nın qeyri – xətti funksionalın minimallaşdırılmasına əsaslanan metodları müəyyən kriteri mənasında optimal inikasın alınmasına səbəb olur.

Müxtəlif subyektlərin psixoloji fəzaları arasında münasibətlərin öyrənilməsi üçün individual fərqlərin şkallanma metodları təxis edilmişdir. Ən yayılmış modeldə stimullar arasında yaxınlıqlar qiymətləndirilərkən, bütün subyektlər eyni bir faktora əsaslanır, lakin bunları müxtəlif surətdə nəzərə alır. Model iterativ ən kiçik kvadratlar metodu ilə reallaşdırılmışdır (bax, [4]). Bütün obyektlərin şkalalarının yalnız tərtib dəqiqliyi ilə üst-üstə düşməsi və ya nominal səviyyədə təyin olunması (bax, [5]) haqqında fərziyyələr subyektiv verilənlərin daha dəqiq inikasına gətirir. Uyğun metodların əsasını qeyri – xətti minimizasiya proseduru təşkil edir.

Ç. ş.-ya üstünlüklər analizi də daxildir (bax, [6]). Metodlar bu halda stimulların xassələrini bir neçə subyektin birgə üstünlük analizi yolu ilə aydınlaşdırmaq üçündür. Metodlar stimullar çoxluğunda üstünlüklərin subyektlər tərəfindən nə tərzdə ölçülməsi haqqında fərziyyələrdən asılı olaraq fərqlənilir.

Əd.: [1] Дэйвисон М., Многомерное шкалирование, пер. с англ., М., 1988; [2] Торгерсон У. С., в кн.: Статистическое измерение качественных характеристик, пер. с англ., М., 1972, с. 95–118; [3] Shepard R. N., «Psychometrika», 1962, v. 27, № 2–3, p. 125–40, 219-46; [4] Carroll J. D., Chang J. J., «Psychometrika», 1970, v. 35, № 3, p. 283–319; [5] Терехина А. Ю., Анализ данных методами многомерного шкалирование, М., 1986; [6] Coombs C. H., A theory of data, N. Y., 1964.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ DOLAŞMA « многомерное случайное блуждание; multidimensional random walk » – faza fəzası d –ölçülü Evklid fəzası, xüsusi halda d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$, $d>1$ şəbəkəsi olan *təsadüfi dolaşmadır.* $\mathbb{R}^d$, $d>1$ fəzasında ən sadə Ç. t. d. aşağıdakı kimi təyin olunur. Hissəcik koordinat başlanğıcından hərəkətə başlayaraq koordinat oxlarına paralel istiqamətlərdən biri istiqamətində vahid uzunluqlu addımla yerini dəyişir. Beləliklə, dolaşan hissəciyin mümkün vəziyyətləri koordinatları tamqiymətli olan, $\mathbb{R}^d$ -yə məxsus bütün nöqtələrdir. Ç. t. d.-nı vermək üçün müxtəlif keçidlərə uyğun $2d$ sayda ehtimallar təyin olunmalıdır. Əgər bu ehtimallardan hər biri $d/2$ -yə bərabər olarsa, simmetrik Ç. t. d. alınır. Belə Ç. t. d.-lar üçün aşağıdakı Poya teoremi doğrudur (bax, [1]): $d=2$ olduqda simmetrik Ç. t. d. üçün hissəcik öz əvvəlki vəziyyətinə tez və ya gec sanki yəqin qayıdacaqdır (bir və ya sonsuz say dəfə). $d=3$ olduqda bu ehtimal təqribən yalnız $0{,}35$ -ə bərabər olur ($d>3$ olduqda bu ehtimal daha da kiçik olur).

Ən çox tədqiq olunmuş Ç. t. d.-lar – vəziyyətləri çoxluğu $\mathbb{Z}^d$ və ya $\mathbb{Z}_+^d$ olan (mənfi olmayan, tamqiymətli koordinatları olan nöqtələr çoxluğu) Markov zəncirləridir. Belə Ç. t. d.-lar üçün öyrənilən əsas məsələlər erqodiklik, qayıdışlılıq, stasionar paylanmaların aşkar surətdə hesablanması, bunların asimptotik qiymətlərinin hesablanması və s. kimi məsələlərdir.

$\mathbb{Z}_+^d$ və oxşar oblastlar üçün erqodiklik və qayıdışsızlıq şərtlərinin alınmasında ən universal metod Lyapunov funksiyaları (semimartinqalları majorantlayan) metodudur. Sıçrayışları məhdud olan, maksimal bircinslik xassəli dolaşmalar üçün, yəni oblast daxilində yerinidəyişmələrə nəzərən invariant və oblastın bu üzlərindən yaxındakı üzlər boyu yerinidəyişmələrə nəzərən invariant xassəli dolaşmalar üçün $d=2,3$ qiymətlərində təsnifat tamamilə verilmişdir (bax, [4]). $d>3$ olduqda $\mathbb{Z}_+^d$-də erqodiklik, bir sıra hallarda $\mathbb{Z}_+^{d-1}$-də stasionar ehtimalların hesablanmasına gətirilir. Maksimal bircinslik xassəli dolaşmalar üçün aşkar hesablanmaların çətinliyi baxılan oblastın üzlərinin kodim.–ölçülüyü $\varkappa$ ilə təyin olunur (məs., $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}^d$ üçün $\varkappa=1$, $\mathbb{Z}_+^d$ üçün $\varkappa=d$). 1-ə bərabər kodim. – ölçülük üçün həll Viner – Hopf metodu ilə alınır (faktorizasiya metodu; bax, [5]). $\varkappa=2$ üçün həll Abel inteqralları şəklində ifadə olunur (bax, [5]). Bəzi hallarda daha sadə həllər mümkündür (bax, [5] və daha son nəticələr [3]-də verilir).

$\mathbb{Z}_+^d$-də dolaşmaların maksimal bircinsliyinin ümumi halında aşkar həllər d üzrə induksiya ilə hər addımda $1+K(z)$ şəkilli operator funksiyaların faktorizasiyasından istifadə etməklə alınır, burada $K(z)$ – bütün z, $|z|=1$ üçün kompakt operatordur (bax, [5]).

Asimptotik nəticələr, əsas etibarilə, ümumi nəzəriyyələr çərçivəsində alınır (məs., asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremləri nəzəriyyəsi və s.). $\mathbb{Z}_+^2$ halında spesifik nəticələr də vardır (bax, [5]). Gibbs təsadüfi meydanları nəzəriyyəsinin ideyaları özü-özü ilə kəsişmələrsiz və qarşılıqlı təsirli dolaşmalar üçün yeni nəticələrin və məsələlərin yeni qoyuluşlarının alınmasına böyük təsir göstərmiş oldu (bax, [6]). Digər tərəfdən, çoxölçülü dolaşmalardan Gibbs təsadüfi meydanlarının ifadə olunmasında, korrelyasion bərabərsizliklərin çıxarılışında, transfer – matrislərin spektrinin araşdırılmasında istifadə olunur (bax, [7]). Özü-özü ilə kəsişmələrsiz dolaşmalar nəzəriyyəsinin inkişafı nəticəsində, simlər nəzəriyyəsi ilə bağlı olan, özü-özü ilə kəsişmələrsiz səthlər nəzəriyyəsi yaranmışdır. Təsadüfi mühitdə çoxölçülü dolaşmaların öyrənilməsi də digər bir istiqaməti əhatə edir.

Əd.: [1] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Когэн Дж., Боксма О., Граничные задачи в теории массового обслуживания, пер. с англ., М., 1987; [4] Малышев В. А., Меньшиков М. В., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1979, т. 39, с. 3–48; [5] Малышев В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 13, М., 1976, с. 5–35; [6] Le Call J. -F., «Comm. Math. Phys.», 1986, v. 104, p. 471–528; [7] Chayes J. T., Chayes L., «Comm. Math. Phys.», 1986, v. 105, p. 221–38; [8] Bricmont J., Frohlich J., «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 98, p. 553–78.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « многомерная случайная величина; multidimensional random variable » – qeyd olunmuş p sayda ($p>1$) birölçülü *təsadüfi kəmiyyətlərin* nizamlanmış toplusudur. Beləliklə, Ç. t. k. hər bir komponenti ξ_i təsadüfi kəmiyyəti olan p – komponentli $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_p)^{\mathrm{T}}$ vektoru şəklində ifadə oluna bilər. Ç. t. k.-in realizasiyası *çoxölçülü müşahidədir.*

Ən çox baxılan hal ξ_i komponentlərinin kəsilməz və ya diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu hallardır ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərin aldığı mümkün qiymətlər ədəd oxunda təyin olunur. Belə Ç. t. k.-lərin öyrənilməsi *çoxölçülü statistik analizin predmetidir*. Ç. t. k.-in bütün komponentləri məhz kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda onun paylanması bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının sıxlıq funksiyası ilə verilir. Ç. t. k.-in bütün komponentləri diskret olduğu halda, onun paylanması

$$\mathbf{P}_{i_1,\ldots,i_p} = \mathbf{P}\{\xi = U_{i_1,\ldots,i_p}\}$$

ehtimallar toplusu ilə verilir, burada $U_{i_1,\ldots,i_p} = (U_{1i_1},\ldots,U_{pi_p})$ və U_{ji_j}, – j təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətlərindən biridir. $\mathbf{P}_{i_1,\ldots,i_p}$ qiymətlərinin toplusu çoxgirişli qoşmalıqlar cədvəli kimi adlandırılır.

Ç. t. k.-in praktikada ən çox istifadə olunan əsas ədədi xarakteristikaları – *orta qiymətlər vektoru* və kovariasion matris kimi xarakteristikalar və bu xarakteristikaların dayanıqlı analoqlarıdır.

Əd.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏSADÜFİ PROSES « многомерный случайный процесс; multidimensional random process » – bax, *Təsadüfi proses*.

ÇOXÖLÇÜLÜ VERİLƏNLƏRİN STRUKTUR MODELİ « многомерных данных модель структуры; model of structure of multivariate data » – verilənlərin aşağıdakı kimi təsvir olunan *statistik modelidir*. Üzərində statistik işlənmələr aparılacaq verilənlərin $n \times p$ – ölçülü verilənlər matrisinin $\mathbf{X}$ şəklində verildiyi fərz olunur; n – obyektlərin sayı, p – dəyişənlərin sayıdır. Obyektləri çoxölçülü (p – ölçülü) fəzada nöqtələr kimi təsəvvür etmək olar. Verilənlərin *tədqiqi statistik analizində* bu nöqtələr çoxluğunun strukturunu təsvir etmək üçün, adətən, aşağıdakı modellərdən biri istifadə olunur: (a) ellipsoid konfiqurasiyaya oxşar nöqtələr «buludu» modeli, (b) klaster modeli, yəni bir-birindən olduqca uzaq yerləşən, bir neçə nöqtələr «buludlarının» toplusu; (c) «pozulma» modeli (rus. «модель засорения»), yəni uzaq aşma – enmələrin olduğu nöqtələrin kompakt « b u l u d u »; (ç) dim. – ölçüsü ilkin çoxobrazlının dim.– ölçüsündən daha aşağı olan çoxobrazlı (xətti və ya qeyri – xətti) kimi, nöqtələrin daşıyıcısı modeli, tipik misal – cırlaşmış paylanmadan seçim; (d) tədqiqatçıya nöqtələrin müəyyən şəkildə bir neçə qrupa bölünmüş olduğu və onların bu və ya digər qrupa aid olması haqqında informasiya məlum olduğu halda diskriminant model.

(ç) modeli çərçivəsində, uyğun çoxobrazlı $X_{II} = F(X_I) + \varepsilon$ şəklində funksional ifadə ilə göstərilə bilərsə, reqression modelə də baxmaq olar, burada X_I və X_{II} – ilkin topludan dəyişənlərin iki qrupudur (bu halda X_{II}-dən olan dəyişənlər proqnozlanılacaq dəyişənlər, X_I-dən olan dəyişənlər öngörül dəyişənlər adlanır), ε öngörül xətasıdır.

Aydındır ki, real verilənlər, adətən, bu modellər çərçivəsində yalnız təxmini olaraq təsvir oluna bilinər, hətta ola da bilər ki, verilənlərin strukturu göstərilən modellərin təsvirindən heç birinə, hətta təxmini də olsa belə uyğun gəlməsin.

Verilənlərin tədqiqi statistik analizində nəticələrin analizi və interpretasiyası üsulları seçilmiş modeldən və verilənlər üzərində işlənilmə metodlarından olduqca asılıdır. Lakin nəticələrin analizi üçün bir sıra qaydalar və yanaşmalar seçmək olar ki, bunlar məhz tədqiqi analizin spesifikasını olduqca yaxşı müəyyənləşdirsin. Bu dəyişənlərin çevrilməsi, qalıqların analizi, verilənlərin vizualizasiyası (verilənlərin qrafik inikası), qrafik inikas əsasında verilənlərlə manipulyasiya, aktiv və illüstrativ dəyişənlər və obyektlər aparatının istifadəsi kimi qayda və yanaşmalardır.

Dəyişənlərin çevrilməsi. Adətən, dəyişənlərin elə çevrilmələri istifadə olunur ki, bunlar nəticəsində ya normal paylanma ($p > 1$ çoxölçülü halında çevrilmiş dəyişənlərin çoxölçülü normal paylanması) alınsın, yaxud bütün dəyişənlər və ya bəzi dəyişənlər arasında xətti asılılıq maksimal artmış olsun. Xətti asılılıq göstəriciləri kimi, məs., korrelyasiya əmsallarının kvadratları cəmi istifadə olunur. Sonradan çevrilmiş verilənlərə yaxşı işlənilmiş metodlardan, *faktor analiz*, *xətti reqression analiz* və s. kimi metodlar tətbiq olunur.

Qalıqlar analizi. Üzərində işləniləcək verilənlərin onların qəbul olunan təsvir modelindən sistematik yayınmalarını aşkar etmək üçün istifadə olunur (məs., xəttiləşdirmə çevirməsindən sonra dəyişənlər arasında asılılığın xətti modelinin adekvatlığının yoxlanılması üçün).

Verilənlərin vizualizasiyası. Bu halda fərz olunur ki, bu və ya digər modeli başqa bir modelə gətirdikdə verilənlərin qrafik inikasını və ya qalıqların qrafik inikasını bu və ya digər üsulla almaq olur; odur ki, tədqiqatçı bu təsvirin bilavasitə vizual analizi yolu ilə sadəcə verilənlərin struktur modellərindən hansının olduğunu təyin edə bilər (bax, *Çoxölçülü verilənlərin vizualizasiyası*).

Qrafik inikas əsasında verilənlərlə manipulyasiyalar. Bu aşağıdakı kimi anlaşılır. Əksər hallarda verilənlərin strukturunu, məs., bütün klasterləri bir histoqram və ya səpələnmə diaqramı vasitəsilə tamamilə seçib ayırmaq olmur. Lakin elə hal ola bilər ki, verilənlər iki – birbirindən olduqca ayrılan qruplara bölünmüş olsun. Bu halda verilənlər üzərində işlənilmə üçün effektiv üsullardan biri – verilənlər matrisinin hissələrindən birinin xaric olunması və matrisin qalan hissəsinə verilənlərin yeni matrisi kimi baxaraq araşdırmanın davam etdirilməsidir.

Aktiv və illüstrativ dəyişənlər və obyektlər aparatının istifadəsi. Obyektlərin aktiv və illüstrativ bölgüsü olduqca geniş surətdə istifadə olunur və mövcud seçimin öyrədici və imtahanedici seçimlərə bölgüsünə uyğun gəlir. Nəticələrin interpretasiyasında və məs., *klaster analiz* metodları tətbiq olunarkən onların dayanıqlılığının yoxlanılmasında digər faydalı üsul ilkin dəyişənlər çoxluğunun iki hissəyə – aktiv, yəni üzərində işlənilmə aparılan mərhələdə istifadə olunan hissələrə və illüstrativ, yəni yalnız interpretasiya mərhələsində istifadə olunan hissələrə bölgüsü üsuludur.

Məs., fərz olunur ki, tədqiqatçı dəyişənləri aktiv və illüstrativ hissələrə ayıraraq klaster prosedurlardan hansılarındansa istifadə etmişdir. İnterpretasiya üsullarından biri klasterlərin hər birində illüstrativ dəyişənlərin səpələnməsini və orta qiymətlərini analiz etməkdən ibarətdir. Əgər orta qiymətlər bir-birindən olduqca fərqlənirsə, onda klasterlərin obyektiv varlığına inam çoxalır və bunların interpretasiya olunması üçün əlavə imkan yaranır (təbiidir ki, buna görə aktiv dəyişənlərdən istifadə olunur). Daha incə üsul – seçilmiş klasterlərə öyrədici seçimlər kimi baxaraq, illüstrativ dəyişənlər fəzasında həlledici qaydaların (məs., xətti diskriminant funksiyaların) alınması üsuludur.

Əd.: [1] Tukey J. W., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 1–67; [2] Tukey J. W., Exploratory data analysis, Reading, 1977; [3] Lebart L., Morineau A., Warwick K. M., Multivariate descriptive statistical analysis, N. Y., 1984; [4] Interpreting multivariate data, N. Y., 1981.

ÇOXÖLÇÜLÜ VERİLƏNLƏRİN VİZUALİZASİYASI « многомерных данных визуализация; visualization of multivariate data » – *çoxölçülü müşahidələr* toplusunun analizi metodudur; müşahidələrin bir, iki və üçölçülü fəzaya müəyyən mənada az informasiya itkisi ilə inikasına və sonradan alınan nöqtələr çoxluğunun həndəsi konfiqurasiyasının (birölçülü və ikiölçülü histoqramların, tezlik poliqonlarının, ikiölçülü və üçölçülü səpələnmə diaqramlarının, sıxlıq hüdudunun əyrilərinin, üçölçülü fəzada sıxlıq səthlərinin və s.) vizual analizinə əsaslanır. Belə yanaşmanın effektivliyi ona əsaslanır ki, müstəvi və ya fəzada hər hansı nöqtələr çoxluğunu analiz edən şəxs bu çoxluğa xas olan struktur xüsusiyyətlərini, məs.,

klasterlərin olduğunu, hər hansı əyri xətt ətrafında nöqtələrin qruplaşmasını, aşma – enmələri və anomal müşahidələrin olduğunu yaxşı dərk edə bilir. Ç. v. v. üçün ölçünün kiçildilməsində bütün metodlardan – *baş komponentlər analizi*, *çoxölçülü şkallanma*, *məqsədyönlü proyeksiyalama* metodlarından istifadə edilir. Ç. v. v. – verilənlərin tədqiq məqsədli statistik analizi üçün əsas üsullardan biridir.

ÇOXÖLÇÜLÜ VİNER PROSESİ « многомерный винеровский процесс; multidimensional Wiener process », çoxölçülü Braun hərəkəti prosesi, – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ -dən olan, asılı olmayan artımlarlı kəsilməz bircins $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), ..., X_m(t)),\ t \geq 0$ *təsadüfi prosesdir*. Ç. V. p. çoxölçülü Braun hərəkəti üçün riyazi modellərdən biridir. Belə prosesin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M} \exp\{ i(z,\ \mathbf{X}(t))\} = \exp\{ t[i(a,\ z) - (Bz,\ z)/2]\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, $a \in \mathbb{R}^m$ vektoru aparı vektoru, $\mathbb{R}^m$ -də B operatoru diffuziya operatoru adlanır. B operatoru simmetrik mənfi olmayan operatordur. Sadə çevirmə ilə Ç. V. p. $t \geq 0$ «standart» Ç. V. p. $\boldsymbol{w}(t),\ t \geq 0$ prosesinə çevrilə bilinər və bu proses üçün $a = 0,\ B = I$ (I, – $\mathbb{R}^m$ -də vahidi operatordur). $\mathbf{X}(t),\ t \geq 0$ və $\boldsymbol{w}(t),\ t \geq 0$ prosesləri $\mathbf{X}(t) = ta + B^{1/2}\boldsymbol{w}(t)$ münasibətilə əlaqəlidirlər, burada $B^{1/2}$, – B -nin mənfi olmayan kvadrat köküdür. $\boldsymbol{w}(t),\ t \geq 0$ Ç. V. p.-nin koordinatları asılı deyildirlər və bircins Viner proseslərdir.

Ç. V. p.-nin demək olar ki, bütün trayektoriyaları heç yerdə differensiallanmır (bax, [1]). $m = 2$ olduqda Viner trayektoriyası müsbət radiuslu ixtiyari dairədə sanki yəqin olur (Viner trayektoriyası müstəvidə hər yerdə sıxdır). $m = 3$ olduqda

$$\mathbf{P}\{ \lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{w}(t)| = +\infty\} = 1$$

və bütün $\lambda > 1$ üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln T)^{\lambda/m - 1/2}}{\sqrt{T}} \inf_{t > T} |\boldsymbol{w}(t)| \geq 1 \right\} = 1 .$$

Əd.: [1] Итo К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

ÇOXPARAMETRLİ BRAUN PROSESİ « многопараметрическое броуновское движение; multiparameter Brownian motion » – bax, *Levi meydanı.*

ÇOXTƏRƏFLİ KANAL « многосторонний канал; multi–way channel » – hər biri eyni zamanda məlumatları ötürən və qəbuledən bir neçə terminallı sistemdə informasiya ötürməsini təsvir edən rabitə *kanalıdır*. Aşağıda diskret stasionar yaddaşsız Ç. k. üzrə informasiya ötürmə sxemi verilir.

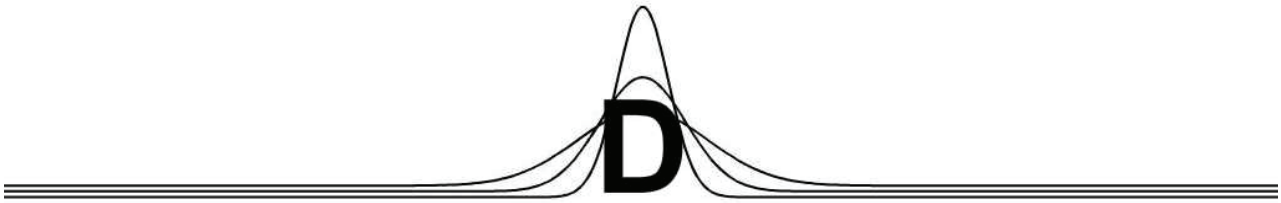
K girişli və K çıxışlı diskret stasionar yaddaşsız *çoxkomponentli kanalın* verildiyi fərz olunur; kanalın giriş əlifbası $\mathcal{Y}_1, ..., \mathcal{Y}_k$, çıxış əlifbası $\widetilde{\mathcal{Y}}_1, ..., \widetilde{\mathcal{Y}}_k$ və keçid ehtimalları $p(\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_k / y_1, ..., y_k)$ verilmişdir. Fərz olunur ki, kanalın k -cı girişi və k -cı çıxışı k -cı terminalla birləşdirilmişdir, $1 \leq k \leq K$. k -cı terminalda $(K-1)$ sayda m_{ki} məlumatı vardır, $1 \leq i \leq K,\ 1 \leq k \leq K,\ i \neq k$ və $1 \leq m_{ki} \leq M_{ki}$ olduqda m_{ki} məlumatı k -cı terminaldan i -ci terminala ötürmə üçün təyin olunmuşdur. N uzunluqlu blok kodu NK sayda kodlandırıcı φ_{nk} funksiyası və K sayda dekodlayıcı ψ_k funksiyaları vasitəsilə verilir. Kodlaşdırıcı funksiya $\varphi_{nk}(\widetilde{y}_{1k}, ..., \widetilde{y}_{n-1,k}, m_{k1}, ..., m_{kN}) \in \mathcal{Y}_k$ k -cı terminaldan ötürüləcək $m_{ki},\ i \neq k$ məlumatlarından asılı olaraq kanalın k -cı girişində ötürülmə üçün n -ci simvolu və n anında k -cı çıxışda qəbul edilmiş $\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_{n-1}$, k simvollarını təyin edir. Dekodlaşdırıcı funksiya $\psi_k(\widetilde{y}_{1k}, ..., \widetilde{y}_{Nk})$ bütün digər terminallardan k -cı terminala göndərilən bütün $m_{1k}, ..., m_{Kk}$ məlumatlarının statistik qiymətlərini – $\hat{m}_{1k}, ..., \hat{m}_{Kk}$ qiymətlərini təyin edir.

Verilmiş kod üçün $\mathbf{P}_e$ xəta ehtimalı $1 - \mathbf{P}_e = \mathbf{P}\{ \hat{m}_{ki} = m_{ki},$ bütün $k \neq i$ qiymətlərində $\}$ bərabərliyi ilə təyin olunur (ötürülən m_{ki} məlumatlarının bir-birindən asılı olmadığı və uyğun məlumatlar çoxluqlarında müntəzəm qanunla paylandıqları fərz olunur). Ç. k.-ın ötürücülük qabiliyyətli oblastı $\mathcal{R}$ bütün elə $R = \{R_{ki}\}$ toplularından ibarətdir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və kifayət qədər böyük N üçün $M_{ki} \geq 2^{N(R_{ki} - \varepsilon)}$ münasibəti bütün $1 \leq i,\ k \leq K,\ i \neq k$ qiymətlərində ödənilsin və $\mathbf{P}_e < \varepsilon$ şərtini ödəyən N uzunluqlu kod vardır. Ç. k. üçün ötürücülük qabiliyyətli oblast $\mathcal{R}$ -in hesablanması yalnız olduqca xüsusi bəzi siniflər üçün aparılmışdır. Ümumi halda $\mathcal{R}$ üçün yalnız yuxarı və aşağı statistik qiymətlər alınmışdır.

Ç. k.-ın araşdırılması haqqında məsələni (xüsusi halda $K = 2$) K. Şennon (C. Shannon) 1961-də daxil etmişdir (ikitərəfli kanal üçün).

Əd.: [1] Van der Meulen E. C., A survey of multi-way channels in information theory. 1961–1976, «IEEE Trans. Inform. Theory», 1977, v. 23, № 1, p. 1–37; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 622–63.

ÇOXZİRVƏLİ PAYLANMA « многовершинное распределение; multimodal distribution » – bax, *Multimodal paylanma.*



DADLİ METRİKASI « Дадли метрика; Dudley's metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

DADLİ ŞƏRTİ « Дадли условие; Dudley's condition » – *təsadüfi prosesin* parametrik çoxluğunun ε *– entropiyası* üzərinə qoyulan məhdudiyyətdir. $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ – parametrik çoxluğu ixtiyari T olan həqiqiqiymətli təsadüfi proses olsun; ixtiyari $t\in T$ üçün $\mathbf{M}\zeta(t)=0$, $\mathbf{M}\,\zeta^2(t)<\infty$ olduğu, T çoxluğunun isə $d(t,s)=[\mathbf{M}(\zeta(t)-\zeta(s))^2]^{1/2}$ psevdometrikasına görə tamamilə məhdud olduğu fərz olunur. $H(\varepsilon,T,d)$, – (T,d)-də ε – şəbəkənin elementlərinin minimal sayının loqarifmi olsun.

$$\int_0^1 (H(\varepsilon,T,d))^{1/2}d\varepsilon$$

inteqralının sonlu olması tələbi D. ş.-dir. D. ş. $\zeta(t)$ ilə eyni kovariasiyalı T-də d – kəsilməz Qauss prosesinin varlığını təmin edir (bax, [1]).

Bəzi əlavə məhdudiyyətlərlə D. ş. $\zeta(t)$-nin asılı olmayan sürətləri ardıcıllığına invariantlıq prinsipinin tətbiqi üçün kafidir (bax, *Yığılma*(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin, həmçinin [2], [3]).

Əd.: [1] Dudley R. M., «J. Funct. Anal.», 1967, v. 1, № 3, p. 290–330; [2] Dudley R. M., «Lect. Notes Math.», 1984, № 1097, p. 1–141; [3] Борисов И. С., «Тр. Ин-та матем.», Новосиб., 1985, т. 5, с. 3–27.

***DAXİL EDİLMİŞ BƏRPA PROSESİ « вложенный процесс восстановления; embedded renewal process »** – *təsadüfi dolaşmaların* tədqiqində mühüm yer tutan pillə indeksi, pillə boyu kimi təsadüfi kəmiyyətlərin əmələ gətirdiyi *bərpa prosesidir* (ola bilsin ki, qırılan proses).

$\xi_1,\xi_2,...$ – paylanma funksiyaları eyni F-ə bərabər olan, qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_0=0,\quad S_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n, \tag{1}$$

n – zaman parametri, S_n – ümumi təsadüfi dolaşma hərəkətində olan hissəciyin $n>0$ anındakı vəziyyəti olsun. Məs., ixtiyari I intervalı (və ya digər bir çoxluq) üçün $\{S_n\in I\}$ hadisəsi hissəciyin I intervalına daxilolma hadisəsi adlanır və verilmiş intervala ardıcıl daxil olmaların araşdırılması $S_1,S_2,...$ ardıcıllığının elementlərindəki mühüm dəyişmələri aşkar etməyə xidmət edir. n zaman parametri olduğundan, « n anı» ifadəsindən istifadə olunur.

$n>0$ anında təsadüfi dolaşmanın *rekord qiyməti* alması, yəni $n>0$ olduqda

$$S_n>S_j,\quad j=0,1,...,n-1 \tag{2}$$

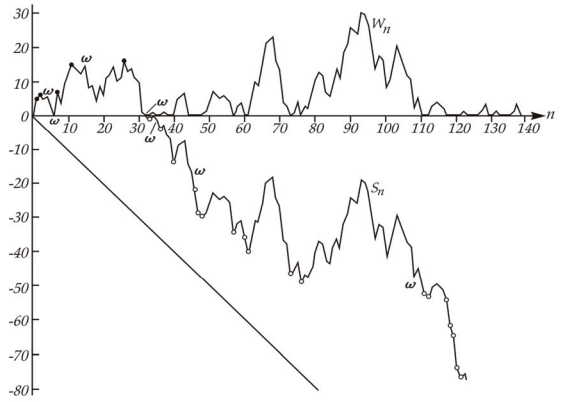
münasibətinin ödənilməsi fərz olunur (bax, [1]). (2) bərabərsizliklərinin k-cı dəfə ödənildiyi an k-cı pillə (üst pillə) indeksi adlanır. k-cı pillə anında S_n-in qiymətinə k-cı pillə boyu deyilir.

(Daxil olunmuş bu təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – məxsusi olduğu hesab olunur).

Alt pillə indeksi, alt pillə boyu kimi pillə təsadüfi kəmiyyətləri analoji qaydada, lakin (2) bərabərsizliklərinə tərs bərabərsizliklərlə təyin olunur; yəni

$$S_n<S_j,\ j=0,1,...,n-1 \tag{3}$$

bərabərsizliklərinin k-cı dəfə ödənildiyi ana k-cı alt pillə indeksi, k-cı pillə anında S_n-in aldığı qiymətə k-cı alt pillə boyu deyilir. (2) və (3) ciddi bərabərsizliklərini uyğun olaraq $\geq$ və $\leq$ bərabərsizlikləri ilə əvəz etdikdə, zəif pillə indeksləri terminləri istifadə olunur. Əgər paylanma funksiyası F kəsilməz olarsa, bu fərq heç bir əhəmiyyət kəsb etmir. Şəkildə zəif pillə nöqtələri ω hərfi ilə işarə edilmişdir.



Şəkil. Təsadüfi dolaşma və onunla bağlı gözləmə prosesi.

$\{S_n\}$ təsadüfi dolaşmasında ξ_n təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi -1, dispersiyası 16-ya bərabərdir. Yuxarı və aşağı pillə nöqtələri uyğun olaraq • və ◦ kimi işarə olunmuşdur. Koordinatları (26, 16) olan beşinci pillə nöqtəsi bütün təsadüfi dolaşmanın ən böyük ehtimallı maksimum nöqtəsidir.

[Rekord qiymətlərin ikinci və üçüncü dəfə alındığı nöqtələr ω ilə işarə olunmuşdur; bu nöqtələr (2) bərabərsizliyində ciddi bərabərsizlik işarəsinin $\geq$ işarəsi ilə əvəz olunması ilə təyin olunur.]

$\{S_n\}$ bütün qrafik üzrə öz riyazi gözləməsi n-i aşır. Əslinə qaldıqda $S_n\leq -n$ şərtilə təyin olunan birinci indeks $n=135$-ə bərabərdir (bu halda $S_{135}=-137$). Qeyd olunan bu hal n pillə anının riyazi gözləməsinin sonsuzluğa bərabər olması faktı ilə uzlaşır.

ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq, (1, 3, 5, 7, 9) və (2, 4, 6, 8, 10) çoxluqlarında müntəzəm paylanmış, qarşılıqlı asılı olmayan η_n və γ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqinə ($\xi_n=\eta_n-\gamma_n$) bərabərdir.

$(S_0, S_1, ...)$ trayektoriyasında pillə nöqtələri – trayektoriyanın əvvəl çatmamış olduğu nöqtələrdir (rekord qiyməti). Şəkildə sonuncu müsbət vəziyyəti $n = 31$ anında olan, mənfi sonsuzluğa gedən təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası təsvir edilmişdir. Bu qrafikdə trayektoriyanın 5 üst və 18 alt nöqtələri uyğun olaraq, • və ◦ kimi işarələnmişdir.

İ l k p i l l ə i n d e k s i. $\mathscr{T}_1$, – $(0, \infty)$ intervalına i l k d a x i l o l m a a n ı n a, $\mathscr{H}_1$ i l k p i l l ə b o y u isə $S_{\mathscr{H}_1}$-ə bərabərdir. $\mathscr{T}_1$ anından sonra təsadüfi dolaşmanın davamı – bütün təsadüfi dolaşmanın ehtimali təkrarıdır. $\mathscr{T}_1 = n$ olduqda, $k > n$ anında ikinci pillə indeksinin a-ya bərabər olması yalnız $\xi_{n+1}, ..., \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır və buna görə də, birinci və ikinci pillə indeksləri arasındakı sınaqların sayı $\mathscr{T}_1$-dən asılı olmayan və onunla eyni qanunla paylanmış $\mathscr{T}_2$ təsadüfi kəmiyyətidir. Analoji mülahizələrdən aşağıdakı ümumi nəticə alınır: k-cı pillə indeksi və k-cı pillə boyu

$$\mathscr{T}_1 + ... + \mathscr{T}_k \quad \text{və} \quad \mathscr{H}_1 + ... + \mathscr{H}_k$$

cəmləri ilə ifadə olunur; bu halda $\mathscr{T}_i$ və $\mathscr{H}_i$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Başqa sözlə, pillə indeksləri və pillə boyları *bərpa prosesi* (mümkündür ki, q ı r ı l a n) təşkil edir.

İntuitiv olaraq aydındır ki, q ı r ı l a n t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r halında S_n cəmləri $-\infty$-a yaxınlaşır və $\{S_n\}$ ardıcıllığı vahid ehtimalla maksimum qiymətini alır.

Ehtiyatları idarəetmə nəzəriyyəsində, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində pillə təsadüfi kəmiyyətləri bəzi proseslərin araşdırılması üçün effektiv surətdə istifadə olunur.

M i s a l. $\xi_1, \xi_2, ...$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmalarının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} e^{ax}, & x < 0 \\ \dfrac{ab}{a+b} e^{-bx}, & x > 0 \end{cases}$$

olsun. Bu təsadüfi dolaşma ilə bağlı bütün paylanmalar dəqiqliklə hesablanılır. $p(x)$ funksiyası iki eksponensial paylanmanın sıxlıq funksiyalarının [$(0, \infty)$ və $(-\infty, 0)$-da topalanmış] kompozisiyası olduğundan bu təsadüfi dolaşma kütləvi xidmət nəzəriyyəsində böyük rol oynayır.

Başqa sözlə, ξ_i təsadüfi kəmiyyətlərini iki – müsbət, üstlü qanunla paylanmış asılı olmayan η_i və γ_i təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqi ilə ifadə etmək olar. Ümumiliyi pozmadan $a \le b$ götürmək olar. Bu halda, üst pillə boyu $\mathscr{H}_1^+$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası ae^{-bx}-ə bərabərdir; $\mathscr{H}_1$ qeyri – məxsusi təsadüfi kəmiyyətdir və bu prosesin q ı r ı l m a e h t i m a l ı kimi interpretasiya olunan $q = 1 - F(\infty)$ ehtimalı (d e f e k t adlanan) $(b-a)/b$ nisbətinə bərabərdir. Üst pillə anı $\mathscr{T}_1$ təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası $b^{-1} f(s)$-ə bərabərdir, burada

$$2f(s) = a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4abs}\,.$$

Bu təsadüfi kəmiyyətin defekti də $(b-a)/b$-yə bərabərdir.

Alt pillə boyu $\mathscr{H}_1^-$-in paylanmasının sıxlıq funksiyası da ae^{ax}-ə bərabərdir. Alt pilə anı $\mathscr{T}_1^-$ təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası isə $a^{-1} f(s)$-ə bərabərdir. $a = b$ olduğu halda, bu doğuran funksiya $1 - \sqrt{1-s}$ doğuran funksiyasına bərabər olur ki, bu da adi təsadüfi dolaşma (və ya metal pulun atılması) nəzəriyyəsindən məlumdur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., 1984.

DAXİL EDİLMİŞ MARKOV ZƏNCİRİ « вложенная цепь Маркова; embedded Markov chain » – $\zeta(t)$ Markov prosesində $\tau_k \le \tau_{k+1}$, $k \ge 0$ şərtini ödəyən τ_k *Markov anlarında* $\mathbf{P}_\zeta$ – sanki yəqin

$$\mathbf{P}_\zeta \{ \zeta(\tau_k + t) \in A \,|\, \mathscr{A}_{\zeta_k} \} = \mathbf{P}_{\zeta_k} \{ \zeta(t) \in A \}$$

münasibətini ödəyən $\zeta_k = \zeta(\tau_k)$, $k \ge 0$ ardıcıllığı ilə yaranan *Markov zənciridir.* Markov müdaxiləsi halında $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin erqodik xassələri D. e. M. z.-nin erqodikliyindən alınır. Xüsusi halda, $(\zeta_k, \tau_k;\ k \ge 0)$ Markov bərpa prosesidirsə, onda $\zeta(t) = \zeta_{\nu(t)}$, $\nu(t) = \max\{k : \tau_k \le t\}$ – semi – Markov prosesidir.

Əd.: [1] К о в а л е н к о И. Н., К у з н е ц о в Н. Ю., Ш у р е н к о в В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2., М., 1973.

DAXİL EDİLMİŞ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « вложенный ветвящийся процесс; embedded branching process » – 1) ümumi və *şaxələnən proses* üçün *Qalton – Vatson prosesidir*; ümumi şaxələnən prosesin hissəciklərinin evolyusiyasını zamana görə deyil, nəsillərə görə təsvir edir.

2) Kəsilməz zamanlı bircins Markov şaxələnən $\zeta(t)$, $t \ge 0$ prosesi üçün $\zeta_n^* = \zeta(n\delta)$, $\delta > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ Qalton – Vatson prosesidir. Qalton – Vatson prosesi D. e. ş. p. olduğu halda, kəsilməz zamanlı bircins Markov şaxələnən prosesinin varlığı şərtlərinin tapılmasından ibarət, şaxələnən prosesin daxiledilmə problemi D. e. ş. p.-in sonuncu anlayışı ilə bağlıdır (bax, [1]). Bu problem indiyə qədər həllini tapa bilməmişdir.

Əd.: [1] A t h r e y a K. B., N e y P. E., Branching process, B. – Hdlb. – N. Y., 1972.

DAXİLETMƏ VƏ XARİCETMƏ METODU « включения и исключения метод; inclusion–exclusion method » – verilən sayda təsadüfi hadisələrin baş vermə ehtimallarının bu hadisələrin kəsişmələrinin ehtimalları ilə ifadə olunması üçün kombinator üsuldur. Məs., $A_1, ..., A_n$ hadisələrindən yalnız r saydasının baş verməsi ehtimalı

$$\mathbf{P}(r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} C_k^r \, p_k \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$p_k = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_k \le n} \mathbf{P}\{A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_k}\}$$

Düsturun sağ tərəfində k üzrə r-dən $r+t$-yə qədər xüsusi cəmlər $\mathbf{P}(r)$ ehtimalının qiymətləndirilməsində yuxarı (t-nin cüt qiymətlərində) və aşağı (t-nin tək qiymətləndə) sərhədləri təyin edir; bu bərabərsizliklər Bonferroni bərabərsizlikləri adlanır (bax, *Bonferroni bərabərsizliyi*). Bəzən D. və x. m. kimi (*) və ona yaxın düsturlar da nəzərdə tutulur.

Əd.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

DAİRƏVİ QANUN « круговой закон; circular law » – elementləri asılı olmayan *təsadüfi matrislərin* normalanmış *spektral funksiyaları* üçün limit qanunudur. n tərtib $H_n = \left\| \xi_{ij} n^{-1/2} \right\|$ kompleks matrisinin elementləri ξ_{ij}, $i,j=1,...,n$, – n-in hər bir qiymətində asılı olmayan təsadüfi elementlər olsun; fərz olunur ki, $\mathbf{M}\xi_{ij}=0$, $\mathbf{M}\left|\xi_{ij}\right|^2=\sigma^2$, $0<\sigma<\infty$, $\operatorname{Re}\xi_{ij}$ və $\operatorname{Im}\xi_{ij}$ kəmiyyətlərinin aşağıdakı şərti ödəyən paylanma sıxlıqları $p_{ij}(x)$ və $q_{ij}(x)$ mövcuddur: hər hansı $\beta>1$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,...,n} \int [\, p_{ij}^{\beta}(x) + q_{ij}^{\beta}(x)\,]\, dx < \infty,$$

hər hansı $\delta>0$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,...,n} \mathbf{M}\left|\xi_{ij}\right|^{2+\delta} < \infty.$$

Onda ixtiyari x və y üçün

$$p \lim_{n\to\infty} \nu_n(x,y) = \nu(x,y)$$

münasibətilə ifadə olunan dairəvi qanun doğrudur, burada

$$\frac{\partial^2 \nu(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \begin{cases} \sigma^{-2}\pi^{-1}, & x^2+y^2<\sigma^2 \text{ olarsa,} \\ 0, & x^2+y^2\ge\sigma^2 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$$\nu_n(x,y) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} F(\operatorname{Re}\lambda_k - x)\, F(\operatorname{Im}\lambda_k - y),$$

λ_k, – H_n matrisinin məxsusi qiymətləridir, $y<0$ olduqda $F(y)=1$, $y\ge 0$ olduqda $F(y)=0$.

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 669–79.

DAR TOPOLOGİYA « узкая топология; narrow topology » – bax, *Zəif topologiya*, *Proxorov teoremi.*

DAR YIĞILMA « узкая сходимость; narrow convergence » – bax, *Zəif yığılma.*

DAR YIĞILMA TOPOLOGİYASI « узкой сходимости топология; topology of narrow convergence » – bax, *Proxorov teoremi.*

DARLİNQ TEOREMİ « Дарлинга теорема; Darling theorem » – asılı olmayan $\xi_1,...,\xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ümumi paylanma funksiyası $F(x)$ asta dəyişən «qalıqlı» paylanma funksiyası olarsa, $S_n=\xi_1+...+\xi_n$, $n\ge 1$ cəmləri üçün *limit teoremidir.* Bu halda klassik nəzəriyyənin limit teoremlərindən fərqli olaraq xətti normalama faydasızdır (P. Levi, P. Lévy, 1934; bax, [1]). $\overline{S}_n = G_n(S_n)$, $G_n(x)=\theta(x)/n$ olsun, burada

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/(1-F(x)), & x\ge 1, \\ [\,\theta(1)(1+x) + \theta(-1)(1-x)\,]/2, & |x|<1, \\ -1/F(x), & x\le -1. \end{cases}$$

D. t.-nə görə, $0<p<1$, $x\to\infty$ olduqda, əgər $(1-F(x))/(1-F(x)+F(-x))\to p$ olarsa, onda $n\to\infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\,\overline{S}_n < x\,\} - q \to \begin{cases} p\exp(-1/(px)), & x>1, \\ -q\exp(1/(qx)), & x<0. \end{cases}$$

münasibəti doğrudur, $q=1-p$.

Əd.: [1] Darling D. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 73, № 1, p. 95–107; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

DARMUA – SKİTOVİÇ TEOREMİ « Дармуа – Скитовича теорема; Darmois – Skitovich theorem » – bax, *Xarakterizasion teoremlər.*

DAŞIYICI(sı) ölçünün **« носитель** меры; **support** of a measure **»** – topoloji fəzada *ölçü* xarakteristikalarından biridir. T topoloji fəzasının $\mu(F)=1$ şərtini ödəyən bütün qapalı $F\subset T$ altçoxluqlarının kəsişməsi S_μ-nün özünün də ölçüsü 1 olarsa, yəni $\mu(S_\mu)=1$ olarsa, T fəzasında *Borel ehtimal ölçüsü* μ daşıyıcısına malikdir, deyilir. Bu halda S_μ, – μ ölçüsünün daşıyıcısı (və ya support) adlanır. $t\in T$ nöqtəsi, yalnız və yalnız, o halda S_μ-yə daxildir ki, onu daxilinə alan ixtiyari açıq U altçoxluğu üçün $\mu(U)>0$ olsun. Separabel metrik fəzada (və ya daha ümumi ixtiyari hesabi bazaya malik topoloji fəzada) hər bir Borel ölçüsü daşıyıcıya malikdir. Hər bir τ – hamar ehtimal ölçülü topoloji fəzada, xüsusilə də, Hausdorf fəzasında hər bir Radon ehtimal ölçüsü Ö. d.-na malikdir. Digər tərəfdən, elə kompakt Hausdorf fəzaları vardır ki, bunlarda ixtiyari Borel ehtimal ölçüsünün Ö. d. yoxdur.

DAŞIYICI(sı) planın **« носитель** плана; **support** design **»** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

DAŞIYICI SİQNAL « несущий сигнал; carrier signal » – bax, *Modulyasiya və demodulyasiya.*

DAŞIYICI TEZLİK « несущая частота; carrier frequency » – bax, *Amplitud modulyasiya.*

DAVAMOLUNMASI, ÖLÇÜLƏRİN « продолжение меры; extension of measure » – ölçülərin bir çoxluqlar sinfindən çoxluqların daha geniş digər sinfinə genişləndirilməsidir. $\mathscr{R}$ – çoxluqların ixtiyari semi – halqası, μ, – $\mathscr{R}$-də σ – sonlu ixtiyari ölçü olsun. Onda $\mathscr{R}$ semi – halqasının doğurduğu $\mathscr{A}(\mathscr{R})$ σ – halqasında elə σ – sonlu $\overline{\mu}$ ölçüsü vardır ki, o yeganədir və bütün $Y\in\mathscr{R}$, Y çoxluqları üçün $\overline{\mu}(Y)=\mu(Y)$ şərti ödənilir (Karateodori teoremi). Bu halda $\overline{\mu}$ ölçüsü ilkin μ ölçüsünün davamı adlanır. Ümumi

halda, əgər iki λ və ν ölçüləri verildikdə, ikinci ölçü birincinin davamı o halda adlanır ki, çoxluq funksiyası kimi baxılan ν funksiyası λ funksiyasının davamı olsun. Ölçünün davamı prosesinin xüsusi halı ölçünün tamamlanması prosesidir. Hər hansı $\mathcal{A}$ σ – halqasında verilmiş λ ölçüsü üçün $Y \in \mathcal{A}$, $\lambda(Y) = 0$ və $Z \subset Y$ münasibətlərindən $Z \in \mathcal{A}$ (və deməli, $\lambda(Z) = 0$) münasibəti alınarsa, λ – tam ölçü adlanır. İxtiyari μ ölçüsü üçün elə ən kiçik tam $\overline{\mu}$ ölçüsü vardır ki, bü ölçü ($\overline{\mu}$) μ ölçüsünün davamıdır. Bu ən kiçik tam ölçünün ($\overline{\mu}$-nün) təyin olunma oblastı $(Y \bigcup Z') \setminus Z''$ tipli bütün mümkün çoxluqlardan ibarətdir; Y – ixtiyari μ – ölçülən çoxluq, Z' və Z'' – ölçüləri sıfra bərabər olan hər hansı μ – ölçülən çoxluqların ixtiyari altçoxluqlarıdır. $\overline{\mu}$ ölçüsünün özü $\overline{\mu}$ $((Y \bigcup Z') \setminus Z'') = \mu(Y)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Belə tərif korrektdir və $\overline{\mu}$ ilkin μ ölçüsünün tamamlanması (adi) adlanır. Ölçünün tamamlanması çoxluqların bu ölçüyə görə birqiymətlilik xassəsi ilə sıx əlaqədardır. μ – əsas bazis çoxluğu X-də hər hansı ölçü və $Z \subset X$ olsun. Əgər:

1) μ ölçüsünün heç olmasa bircə λ davamı tapılarsa ki, Z çoxluğu λ-nın təyin olunma oblastına daxil olsun;

2) μ ölçüsünün iki belə μ_1 və μ_2 davamları üçün $\mu_1(Z) = \mu_2(Z)$ bərabərliyi ödənilsin, onda Z çoxluğu μ ölçüsünə nəzərən birqiymətlilik xassəsinə malikdir, deyilir.

Aşağıdakı hökm doğrudur: μ – ixtiyari σ – sonlu ölçü, $\overline{\mu}$, – μ ölçüsünün adi tamamlanması olarsa, μ ölçüsünə nəzərən birqiymətlilik xassəsinə malik çoxluqlar ailəsi ilə $\overline{\mu}$–ölçülən çoxluqlar ailəsi ilə üst-üstə düşür.

μ, – bazis çoxluğu X-də ixtiyari σ – sonlu ölçü və $(Z_j)_{1 \le j \le m}$, – X çoxluğunun altçoxluqlarının ixtiyari sonlu ailəsidirsə, μ ölçüsünün davamı $\overline{\mu}$ həmişə vardır və $\overline{\mu}$ ölçüsünün təyin olunma oblastı hər bir Z_j, $1 \le j \le m$ çoxluğunu özündə saxlayır.

Əsas bazis çoxluğu X-in altçoxluqlarının hesabi ailəsi üçün analoji hökm, ümumiyyətlə, doğru deyildir.

Əgər ilkin μ ölçüsü çevirmələrin hər hansı qrupuna nəzərən kvaziinvariant (invariant) ölçü olarsa, onda onun həmin çevirmələr qrupuna nəzərən kvaziinvariant (invariant) davamolunmalarına baxmaq təbiidir. İnvariant ölçülərin invariant davamlarının qurulması üçün müxtəlif metodlar işlənilmişdir (bax, [3], burada Ö. d.-na aid bir çox məsələlərin sonsuz kardinal ədədlərin ölçülənliyi haqqında sırf nəzəri çoxluq məsələləri ilə əlaqədar olması göstərilmişdir).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Хараз ишвили А. В., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983.

DAYAQ NÖQTƏSİ, PLANIN « опорная точка плана; supporting point of a design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

DAYANIQLI ALQORİTM « устойчивый алгоритм; stable algorithm » – bax, *Təsadüfi çoxgirişlilik.*

DAYANIQLI ALTFƏZA « устойчивое подпространство; stable subspase » – bax, *Martinqal.*

DAYANIQLI PAYLANMA « устойчивое распределение; stable distribution » – eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan $\{X_k\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqları və $\{A_k, B_k > 0\}$ sabit kəmiyyətlər ardıcıllıqlarından yaradılan

$$Z_n = B_n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n - A_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

normalanmış cəmlərinin mümkün limit *paylanmalarının* sinfi $\mathfrak{S}$-ya aid paylanmadır. Hal-hazırda ciddi dayanıqlı paylanma adlandırılan «D. p.» termini P. Levi tərəfindən daxil olunmuş və ilk dəfə onun tərəfindən öyrənilmişdir ([1], [2]).

D. p.-lar *özü-özünə ayrılan paylanmaların* xüsusi halıdır və bunlar dörd ədədi parametrlərlə təyin olunur. Əsas parametr – D. p.-nın göstəricisi adlanır və o, α ilə işarə olunur, $0 < \alpha \le 2$. Normal paylanmaların $\alpha = 2$ qiymətinə uyğun *Levi kanonik ifadəsində* $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\sigma^2 = 0$ və $H(x) \ge 0$ uyğun olur; $0 < \alpha < 2$ qiymətinə isə $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\sigma^2 = 0$ və $H(x) = c_1 |x|^{-\alpha}$, $x < 0$, $H(x) = c_2 x^{-\alpha}$, $x > 0$ uyğun olur, burada $c_k \ge 0$, $c_1 + c_2 > 0$. Bütün cırlaşmayan D. p.-lar mütləq kəsilməzdirlər. Bəzi istisnalarla ($\alpha = 2$; $\alpha = 1$, $c_1 = c_2$, $\gamma = 0$ halı *Koşi paylanmasına* uyğundur; $\alpha = \frac{1}{2}$, $c_1 c_2 = 0$) nə paylanma funksiyaları G, nə də ki, paylanmanın sıxlıq funksiyaları g elementar funksiyalarla aşkar ifadə olunmur. G D. p.-sının xarakteristik funksiyası f üçün P. Levi, $\alpha = 1$ halında isə P. Levidən asılı olmayaraq A. Ya. Xinçin də aşkar ifadələr tapmışlar ([3]):

$$\log f(t) = it\gamma - \lambda |t|^{\alpha} (1 - i\beta \omega_A(t, \alpha, \beta)), \qquad \text{(A)}$$

burada

$$\omega_A(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \operatorname{sign} t, & \text{əgər } \alpha \ne 1 \text{ olarsa,} \\ -\beta \frac{2}{\pi} \log |t| \operatorname{sign} t, & \text{əgər } \alpha = 1 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$0 < \alpha \le 2$, $|\beta| \le 1$, $\lambda \ge 0$ və $\gamma \in \mathbb{R}^1$.

Analitik nöqteyi – nəzərdən daha rahat olan bir sıra hallarda D. p.-nın parametrizasiyası üçün digər sistem götürülür:

$$\log f(t) = it\gamma - \lambda |t|^{\alpha} \omega_B(t, \alpha, \beta), \qquad \text{(B)}$$

burada

$$\omega_B(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \beta K(\alpha) \operatorname{sign} t\right), & \text{əgər } \alpha \ne 1 \text{ olarsa,} \\ \frac{\pi}{2} + i\beta \log |t| \operatorname{sign} t, & \text{əgər } \alpha = 1 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{sign}(\alpha - 1)$ və parametrlərin dəyişmə oblastları isə (A)-da olduğu kimidir. (B) formasının parametrləri (A)-nın paramertləri ilə: $\alpha_A = \alpha_B$; əgər $\alpha = 1$ olarsa, $\beta_A = \beta_B$,

$\gamma_A = \frac{2}{\pi}\gamma_B$, $\lambda_A = \frac{\pi}{2}\lambda_B$; $\alpha \neq 1$ olarsa,

$$\beta_A = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) tg\left(\frac{\pi}{2}\beta_B K(\alpha)\right),$$

$$\gamma_A = \gamma_B \Big/ \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_B K(\alpha)\right),$$

$$\lambda_A = \lambda_B \Big/ \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_B K(\alpha)\right)$$

münasibətlərilə əlaqəlidirlər.

$G(x, \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ funksiyasının x arqumentinin xətti çevirməsi əsasında parametrizasiya üçün sistemin seçilməsindən asılı olmayaraq D. p.-nı standart şəklə gətirmək, yəni $\gamma = 0$ və $\lambda = 1$ almaq mümkündür. Standart D. p.-ların əsas analitik xassələri aşağıdakılardır: ixtiyari x, α, β qiymətlərində $g(x, \alpha, \beta) = g(-x, \alpha, -\beta)$; əgər $x \geq 0$, $\alpha < 1$ olarsa, onda $g(-x, \alpha, 1) = g(x, \alpha, -1)$; digər hallarda isə $g(x, \alpha, \beta) > 0$; hər bir paylanma sıxlığı $g(x, \alpha, \beta)$ birzirvəlidir; $g(x, \alpha, \beta)$ funksiyaları $\alpha \geq 1$ olduqda, $g(x^{-1/\alpha}, \alpha, \beta)$ funksiyaları $\alpha < 1$ olduqda tam funksiyalar olub, $x > 0$ yarımoxundan analitik olaraq davam olunur.

$\mathfrak{S}$ sinfi ciddi dayanıqlı paylanmaların altsinfi $\mathfrak{M}$-i özündə saxlayır, bu sinif yuxarıda verilən tərifdə əlavə $A_n = 0$ şərti ilə seçilir. G – D. p., yalnız və yalnız, $\alpha \neq 1$, $\gamma = 0$ və ya $\alpha = 1$, $\beta = 0$ olduqda (ixtiyari parametrizasiya sistemi üçün) $C \in \mathfrak{M}$ olur. $\mathfrak{M}$ sinfinin D. p.-ları üçparametrli ailə əmələ gətirir. Bunlar üçün analitik təsbit etmiş parametrizasiya sistemi vardır. Doğrudan da,

$$\log f(t) = -\lambda |t|^{\alpha} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\theta\,\alpha\,\operatorname{sign} t\right) \qquad (C)$$

burada $0 < \alpha \leq 2$, $|\theta| \leq \min\left(1, \frac{2}{\alpha} - 1\right)$, $\lambda > 0$. Bu sistemin $(\alpha, \theta, \lambda)$ parametrləri (B) sisteminin parametrləri ilə $\alpha_C = \alpha_B$ bərabərlikləri ilə əlaqəlidirlər; əgər $\alpha \neq 1$ olarsa, onda $\theta = \beta_B K(\alpha)/\alpha$, $\lambda_C = \lambda_B$; əgər $\alpha = 1$ olarsa, onda $\theta = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\pi}\gamma_B\right)$ və $\lambda_C = \lambda_B\left(\frac{\pi^2}{4} + \gamma_B^2\right)^{1/2}$.

Ciddi D. p.-lar ikilik münasibətilə əlaqəlidirlər. $(x, \alpha, \theta, \lambda) = (x\lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta, 1)$ standartlaşdırılması nəzərə alındıqda bu münasibət aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər $1 \leq \alpha \leq 2$ olarsa, onda ixtiyari məqbul θ-lar üçün

$$x g(x, \alpha, \theta, 1) = x g(x^{-\alpha}, 1/\alpha, \theta^*, 1),$$

burada $1 + \theta^* = \alpha(1 + \theta)$.

Ciddi D. p.-ların Mellin çevirmələrinin və kənar D. p.-ların ikitərəfli Laplas çevirmələrinin ($\beta = 1$ olanlar üçün) aşkar ifadələri vardır (bax, *Dayanıqlı paylanma*; inteqral çevirmələri).

Birölçülü D. p.-ların analitik xassələri olduqca ətraflı öyrənilmişdir. D. p.-ların analitik xassələrini öyrənmək üçün rahat asimptotik ifadələri, differensial tənliklərlə təsviri, inteqral ifadələri və verilmiş D. p.-larla təsadüfi kəmiyyətlərin generasiyası üçün sadə alqoritmlərin qurulması üsullarını [4]-də tapmaq olar. $\mathfrak{S}$ və $\mathfrak{M}$ ailələri uyğun funksional tənliklərin həllərinin çoxluqlarıdır: $F \in \mathfrak{S}$, yalnız və yalnız, o halda olur ki, ixtiyari müsbət b_1 və b_2 ədədlər cütü üçün bütün x qiymətlərində

$$F(b_1 x) * F(b_2 x) = F(bx + a)$$

münasibətini ödəyən $b > 0$ və a ədədlər cütü tapılsın. Əgər $b > 0$, $a = 0$ cütünü seçmək olarsa, onda $F \in \mathfrak{M}$ və bu halda $b_1^{\alpha} + b_2^{\alpha} = b^{\alpha}$, burada $0 < \alpha \leq 2$ – hər hansı ədəd, D. p.-nın göstəricisidir. $\mathbb{R}^1$-də D. p. çoxölçülü paylanmalar və qruplarda paylanmalar (bax, *Dayanıqlı paylanma* qrupda), Banax fəzalarında paylanmalar (bax, *Dayanıqlı paylanma* Banax fəzasında) üçün də təyin olunmuşdur və ümumiləşdirilmişdir, lakin bunların xassələri birölçülü D. p.-ların xassələri ilə müqayisədə az öyrənilmişdir. Ən çox normal paylanma tətbiq olunur. Lakin hal-hazırda (20-ci əsrin 90-cı illəri) astronomiya, fizika, iqtisadiyyat və biologiyanın məsələlərinin çoxsaylı problemləri məlumdur ki, bunlarda D. p. təbii olaraq yaranır (bax, [4]).

$F(x)$, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun. Əgər ixtiyari $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, b_1, b_2 həqiqi ədədləri üçün elə $a > 0$ və b ədədləri varsa ki,

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b)$$

bərabərliyi ödənilsin, onda $F(x)$ dayanıqlı paylanma funksiyası adlanır, $*$ – kompozisiya əməlini ifadə edir. Əgər $f(t)$ – D. p.-nın xarakteristik funksiyasıdırsa, onda ixtiyari $a_1 > 0$ və $a_2 > 0$ üçün elə b və $a > 0$ vardır ki,

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-itb}.$$

D. p.-ların mühüm rolu aşağıdakı nəticə ilə ifadə olunur: $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$\eta_n = \frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \alpha_n, \qquad (*)$$

burada $\beta_n > 0$, α_n – uyğun olaraq müəyyən normalayıcı və mərkəzləndirici sabitlərdir.

Əgər $F_n(x)$ η_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdırsa, $\{F_n(x)\}$ ardıcıllığı üçün $n \to \infty$ olduqda limit paylanmaları yalnız D. p.-lar ola bilər. Əksinə, ixtiyarı D. p. olan $F(x)$ üçün elə (*) tipli təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı vardır ki, $n \to \infty$ olduqda $F_n(x)$, $F(x)$-ə yığılır.

Deməli, D. p.-lar sonsuz bölünən paylanmalardır. Bax, *Dayanıqlı semi – qrup*.

Əd.: [1] Levy P., Calcul des probabilités, 1925; [2] Levy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [3] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М – Л., 1938; [4] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983; [5] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

DAYANIQLI PAYLANMA Banax fəzasında **« устойчивое распределение** в банаховом пространстве; **stable distribution** in a Banach space **»** – Banax fəzasında X təsadüfi elementinin elə *paylanmasıdır* ki, bu paylanma aşağıdakı şərti ödəyir: ixtiyari həqiqi $b_1>0$, $b_2>0$ üçün elə $b>0$ və $a\in B$ vardır ki,

$$\alpha(b_1X) * \alpha(b_2X) = \alpha(bX + a), \qquad (1)$$

burada $\alpha(X)$ – təsadüfi X elementinin paylanması, $*$ – paylanmaların konvolyusionudur. Əgər (1) ödənilərsə, onda $b^\alpha = b_1^\alpha + b_2^\alpha$ bərabərliyi doğrudur, burada $0<\alpha<2$, α, – D. p.-nın göstəricisidir. $\alpha=2$ qiymətinə normal paylanma uyğundur. $0<\alpha<2$ göstəricisinə malik μ D. p.-nın xarakteristik funksionalı

$$\hat\mu(f) = \exp\{if(x_0) - \int_{S_1} |f(x)|^\alpha \Gamma(dx) - iw(f,\alpha)\} \qquad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $f\in B^*$, $S_1=\{x\in B:\|x\|=1\}$, Γ – S_1-də hər hansı sonlu ölçü,

$$\omega(f,\alpha) = \begin{cases} tg\dfrac{\pi\alpha}{2}\displaystyle\int_{S_1} |f(x)|^\alpha \operatorname{sign} f(x)\,\Gamma(dx), & \alpha\neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{S_1} f(x)\ln|f(x)|\,\Gamma(dx), & \alpha=1. \end{cases}$$

İxtiyari Banax fəzasında $\alpha\geq 1$ olduqda (2) düsturu hər bir sonlu Γ ölçüsü üçün D. p. təyin etmir; D. p.-ları təyin edən ölçülərin tam təsviri hələ ki, məlum deyildir.

D. p. üçün sıfır – vahid qanunu ödənilir: əgər μ B-də D. p. olarsa, onda B-nin ixtiyari xətti altçoxluğu sıfra bərabər və ya vahidə bərabər μ – ölçüyə malikdir. Banax fəzasında D. p.-lar birölçülü halda olduğu kimi, konstantlarla normalanmış olduğu halda, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmaları üçün limit paylanmalarıdır. Əgər normalanma üçün xətti operatorlardan istifadə olunarsa, onda limit paylanmaları sinfi operator dayanıqlı paylanmalara qədər genişlənir.

Əd.: [1] Linde W., Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Lpz., 1983; [2] Weron A., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1080, p. 306–64.

DAYANIQLI PAYLANMA; inteqral çevirmələri « устойчивое распределение; интегральные преобразования; stable distribution; integral transforms » – Furye, Mellin çevirmələri və bunların bu paylanmanın sıxlığı g-yə uyğun modifikasiyalarıdır. Bütün bu çevirmələr elementar funksiyalarla ifadə olunur, D. p.-ların sıxlıqlarından fərqli olaraq, bunlar üçün belə ifadələr yalnız bir neçə halda məlumdur.

$\beta=1$ olduqda ikitərəfli Laplas çevirməsi (kənar D. p.-lar) parametrizasiya sistemi (B)-də aşağıdakı kimi ifadə olunur $(\operatorname{Re} s\geq 0)$:

$$\int e^{-sx} g\,dx = \begin{cases} \exp(-s\gamma - \lambda s^\alpha \operatorname{sign}(1-\alpha)), & \alpha\neq 1; \\ \exp(-s\gamma + \lambda s\log s), & \alpha=1; \end{cases}$$

əgər $\alpha<1$ olarsa, onda bu çevirmə birtərəfli Laplas çevirməsinə çevrilir, belə ki, bu halda $x<\gamma$ olduqda $g(x,\alpha,1,\gamma,\lambda)=0$.

Ciddi dayanıqlı paylanmanın sıxlığı $g(x,\alpha,\theta,\lambda)$-nın Mellin çevirməsi ($-1<\operatorname{Re} s<\alpha$ üçün)

$$\int_0^\infty x^s g\,dx = \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-\theta)}{\sin\pi s}\,\frac{\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1-s)}\,\lambda^{s/2}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Ciddi dayanıqlı paylanmanın xarakteristik çevirməsi

$$w_k(t) = \lambda^{it/\alpha}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}(k-it\theta)}{\cos\frac{\pi}{2}(k-it)}\,\frac{\Gamma(1-it/\alpha)}{\Gamma(1-it)}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $k=0,1$. Bu bərabərliyin hər iki tərəfi $-\alpha<\operatorname{Im} t<1$ zolağına analitik davam oluna bilinir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

DAYANIQLI PAYLANMA qrupda **« устойчивое распределение** на группе; **stable distribution on a group »** – lokal kompakt G qrupunda ölçülərin kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t, t\geq 0\}$ semi – qrupuna daxil olan *sonsuz bölünən μ paylanmasıdır. $\{\mu_t, t\geq 0\}$ semi – qrupunun doğuran funksionalı* aşağıdakı xassəni ödəyir: ixtiyari $t>0$ üçün

$$\tau_t(A) = tA + X_t, \qquad (*)$$

burada X_t, – G qrupunun Li cəbri $\mathfrak{G}$-nin hər hansı elementi, $\{\tau_t, t>0\}$, – G qrupunun avtomorfizmlərinin kəsilməz birparametrik qrupudur.

Daha dəqiq, $T=\{\tau_t, t>0\}$ – avtomorfizmlərin kəsilməz birparametrik qrupu olsun, yəni τ_t, – G qrupunun bütün kəsilməz avtomorfizmlərinin $\operatorname{Aut}(G)$ qrupunun elementidir; ixtiyari $t,s>0$ üçün $\tau_t\tau_s=\tau_{ts}$ və $t\to 0$ olduqda $\tau_t(g)\to e$ münasibətinin (e, – G qrupunun vahididir) ixtiyari $g\in G$ üçün ödənildiyi fərz olunur. Əgər τ, – G-nin özünə ölçülən inikasıdırsa, onda ixtiyari ehtimal ölçüsü μ üçün $\tau\mu$ ölçüsü aşağıdakı qayda ilə təyin olunur: ixtiyari $E\subset G$ Borel altqrupu üçün $\tau\mu(E)=\mu(\tau^{-1}(E))$. İxtiyari həqiqi ölçülən f funksiyasının və hər hansı funksional fəzada həqiqi A funksionalı üçün: $\tau(f)(x)=f(\tau(x))$ və $\tau(A)(f)=A(\tau(f))$ qaydaları ilə $\tau(f)$ funksiyası və $\tau(A)$ funksionalını təyin etmək olar. Əgər G qrupunda sonsuz bölünən μ paylanması doğuran funksionalı A olan kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t, t\geq 0\}$ semi – qrupuna daxil olunarsa və G qrupunun avtomorfizmlərinin elə kəsilməz birparametrik T qrupu və $X_t\in\mathfrak{G}$, $t>0$ elementləri olarsa ki, (*) münasibəti ödənilsin, onda μ, – qrupda dayanıqlı paylanma adlanır. Əgər bu münasibətdə bütün $t>0$ üçün $X_t=0$ olarsa, onda μ paylanması G qrupunda ciddi

dayanıqlı paylanma adlanır. Əgər elə $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$, $c \in (0,1)$ ədədi və G qrupunun Li cəbrinin X elementi olarsa ki, $\tau(A) = cA + X$ bərabərliyi ödənilsin, onda doğuran funksionalı A olan kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupuna daxil olan, G qrupunda sonsuz bölünən ehtimal paylanması μ, – G qrupunda semi–dayanıqlı paylanma adlanır. Əgər $X = 0$ olarsa, onda μ ciddi semi–dayanıqlı paylanma adlanır. Avtomorfizmlərin konkret kəsilməz birparametrik T qrupları və (τ, c) verildiyi halda, paylanma T – dayanıqlı və ya (τ, c) – semidayanıqlı adlanır.

Ən güclü nəticələr ciddi dayanıqlı və semidayanıqlı paylanmalar üçün (bundan sonra yalnız bu hala baxılır) alınmışdır. Ciddi dayanıqlılıq və semidayanıqlılıq halında bunların təriflərini bilavasitə ehtimal ölçülərinin öz terminlərilə ifadə etmək olar. G-də bütün ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathscr{M}^1(G)$-dən olan ehtimal ölçüsü μ, yalnız və yalnız, o halda T – dayanıqlıdır ki, $\{\mu_t = \tau_t(\mu), t > 0\}$ ölçülər ailəsi G-də ölçülərin kəsilməz konvolyusion semi – qrupunu əmələ gətirsin, yəni 1) $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$, μ_t-nin tərifinə əsasən isə 2) $\tau_t(\mu_s) = \mu_{ts}$, $t, s > 0$. $\{\mu_t, t > 0\}$ kəsilməz olduğundan $\lim\limits_{t \to 0} \mu_t = \mu_0$ limiti mövcud olmalıdır və 1) – 2) xassələri bütün $t, s \geq 0$ üçün ödənilməlidir. Ölçülərin kəsilməz konvolyusion semi – qrupu μ_t, $t \geq 0$ üçün 2) şərti ödənilərsə, o, T – dayanıqlı semiqrup adlanır. $\{\mu_t, t \geq 0\}$ semi – qrupu, yalnız və yalnız, o halda semidayanıqlıdır ki, $\tau(\mu_t) = \mu_{ct}$, $t \geq 0$ şərtini ödəyən $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ və $c \in (0,1)$ münasibətlərilə təyin olunan τ və c mövcud olsun (bax, [1], [2]).

Evklid fəzasının hərəkətlər qrupu $\mathbb{M}(d)$ və Heyzenberq qrupu $\mathbb{H}_n$ üçün qrupun avtomorfizmlərinin bütün kəsilməz birparametrik qrupları aşkar şəkildə təsvir olunmuşdur (bax, [3], [4]). Özünün əlaqə altqrupu üzrə qrupun əlaqələrinin heç bir sinfində topalanmayan ölçülər – tam ölçülər adlandırılan – yaxşı xassələrə malikdirlər (bax, [5]).

Ölçülərin dayanıqlı və semidayanıqlı kəsilməz konvolyusion semi – qruplar nəzəriyyəsində iki qrup mühüm rol oynayır.

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}(\{\mu_t\}) = \{\tau \in \mathrm{Aut}(G) : \tau(\mu_t) = \mu_t,\ t \geq 0\}$$

qrupuna μ_t ölçülərinin kəsilməz konvolyusion semi – qrupunun invariantlıq qrupu (ciddi mənada) deyilir.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\{\mu_t\}) =$$
$$= \{(\tau, c) : \tau \in \mathrm{Aut}(G),\ c > 0,\ \tau(\mu_t) = \mu_{tc},\ t \geq 0\}$$

qrupuna μ_t ölçülərinin kəsilməz konvolyusion semi – qrupunun ayrılanlıq qrupu (rus. группа разложимости) (ciddi mənada) deyilir. Belə hesab etmək olar ki, $\mathscr{I}$ – elementləri $(\tau, 1)$ şəklində olan $\mathfrak{Z}$ ayrılanlıq qrupunun altqrupudur. $\varphi(\tau, c) = c$ qaydası üzrə $\varphi : \mathfrak{Z} \to \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ inikası təyin olunur. $\mathscr{I}$ və $\mathfrak{Z}$ qrupları aşağıdakı xassələrə malikdirlər: 1) bunlar $\mathrm{Aut}(G)$-də və $\mathrm{Aut}(G) \oplus \mathbb{R}_+^*$-də uyğun olaraq qapalı altqruplardır; 2) μ_t ölçüləri, yalnız və yalnız, o halda tam ölçülərdir ki, $\mathscr{I}$ qrupu $\mathrm{Aut}(G)$-də kompakt olsun; 3) φ $\mathscr{I}$ nüvəsi ilə kəsilməz homomorfizmdir; 4) μ_t hər hansı T qrupuna nəzərən, yalnız və yalnız, o halda dayanıqlıdır ki, $\varphi(\to) = \mathbb{R}_+^*$ olsun. 4) xassəsi ölçülər semi – qrupunun dayanıqlılığının daxili təsvirini müəyyən edir. Doğrudan da, $\{\mu_t, t \geq 0\}$ hər hansı (τ, c) cütünə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda semidayanıqlıdır ki, hər hansı $c > 0$ üçün $\varphi(\mathfrak{Z}) \supset \{c^n, n \in \mathbb{Z}\}$ münasibəti ödənilmiş olsun (ölçülərin semi – qrupu $\varphi(\mathfrak{Z}) = \{c^n, n \in \mathbb{Z}\}$ olduğu halda dayanıqlı deyildir) (bax, [2]).

G – lokal kompakt qrup, $T = \{\tau_t, t \geq 0\}$, – G-də kəsilməz birparametrik qrup, $\{\mu_t, t \geq 0\}$, – G-də ölçülərin kəsilməz konvolyusion elə semi – qrupu olsun ki, $\mu_0 = \omega_K$ şərti ödənilsin, ω_K, – G qrupunun kompakt K altqrupunda Haar ölçüsüdür. $\{\mu_t, t \geq 0\}$, – T – dayanıqlı, K isə T – invariant olsun. Əgər

$$C_K(T) = \{x \in G : \tau_t(x)K \to K,\ t \to 0\},$$
$$C(T) = \{x \in G : \tau_t(x) \to e,\ t \to 0\}$$

işarələmələri qəbul edilərsə, onda: a) $C_K(T)$ G-də qapalı altqrupdur və $C(T)$ ilə K-nın yarımdüz hasilinə izomorfdur; b) $C(T)$ G-də qapalı altqrupdur və birəlaqəli nilpotent Li qrupuna izomorfdur; c) ixtiyari $t \geq 0$ üçün $\mu_t(G \setminus C_k(T)) = 0$; ç) $C(T)$ qrupunda elə T –dayanıqlı, ölçülərin kəsilməz konvolyusion semi – qrupu $\{\nu_t, t \geq 0\}$ vardır ki, ixtiyari $t \geq 0$ üçün $\mu_t = \nu_t \otimes \omega_K$ (bax, [6]).

Bu nəticədən aydındır ki, T – dayanıqlı kəsilməz konvolyusion ölçülər semi – qrupunun öyrənilməsində birəlaqəli nilpotent Li qrupları sinfi ilə kifayətlənmək olar. Analoji müddəa semidayanıqlı kəsilməz konvolyusion ölçülər semi – qrupu üçün də doğrudur (bax, [7]).

Əd.: [1] Hazod W., «Lect. Notes in Math.», 1982, v. 928, p. 183–208; [2] Hazod W., «Lect. Notes in Math.», 1986, v. 1210, p. 304–52; [3] Baldi P., «Lect. Notes in Math.», 1979, v. 706, p. 1–9; [4] Drisch T., Gallardo L., «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1064, p. 56–80; [5] Hazod W., Nobel S., «Lect. Notes in Math.», 1988, v. 1379, p. 90–106; [6] Hazod W., Siebert E., «Semigroup Forum», 1986, v. 33, p. 111–43; [7] Hazod W., Siebert E., «J. Theor. Probab.», 1988, v. 1, p. 211–26.

DAYANIQLI PAYLANMA; sıralarla ifadə **« устойчивое распределение;** представление рядами; serie representation of a **stable distribution »** – *dayanıqlı paylanma* sıxlığının yığılan və asimptotik sıralarla aşkar analitik ifadələridir.

$$\psi(z) = \begin{cases} g(z, \alpha, \beta), & \text{əgər } 1 \leq \alpha \leq 2, \\ z^{-1-1/\alpha} g(z^{-1/\alpha}, \alpha, \beta), & \text{əgər } 0 \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

olsun, g – standartlandırılmış D. p.-nın sıxlığıdır. $\psi(z)$ funksiyası bütün kompleks müstəviyə analitik davam oluna bilinir və $\alpha = 1$, $\beta = 0$ olduğu halda $\psi(z)$ funksiyası $z = \pm 1$ nöqtələrində iki sadə polyuslarla meromorf, digər hallarda tam funksiyadır. *Ciddi dayanıqlı paylanmalar* üçün Makloren

ayrılışında özünün parametrizasiya formaları (α, θ) olduğu halda

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1};$$

a_k əmsalları $0 < \alpha \le 1$ halında

$$a_k = \frac{1}{\pi}(-1)^{k-1} \frac{\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma(1+k)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha(1+\theta)n\right)$$

düsturu ilə təyin olunur. $1 \le \alpha \le 2$ halı üçün a əmsallarının analoji ifadələrini almaq olur.

$g(x, \alpha, \beta)$ sıxlıqları üçün asimptotik ayrılışlar o hallarda məlumdur ki, x D. p.-nın daşıyıcısının hər hansı sərhədinə yaxınlaşır (bu sərhəd $-\infty$, 0, ∞ ola bilər), ətraflı bax, [1]-ə.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

DAYANIQLI PAYLANMA; təsadüfi kəmiyyətlərin generasiyası **« устойчивое распределение;** генерирование случайных величин; **stable distribution;** simulation of random variables **»** – *dayanıqlı paylanmalar* nəzəriyyəsinin bölməsidir, dayanıqlı paylanmaları ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyalarının alınması üçün alqoritmlərə həsr olunmuşdur.

Məs., parametrləri $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ və $\lambda = 1$ olan D. p.-ya malik $Y(\alpha)$ təsadüfi kəmiyyəti asılı olmayan, $(0, 1)$ intervalında müntəzəm qanunla paylanmış ω_1, ω_2 təsadüfi kəmiyyətləri ilə yaranan

$$\left[\frac{\sin(1-\alpha)\pi\omega_1}{\sin\pi\alpha\omega_1}\left(\frac{\sin\pi\alpha\omega_1}{\sin\pi\omega_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \Big/ \left|\log(1-\omega_2)\right|\right]^{(1-\alpha)/\alpha}$$

təsadüfi kəmiyyəti ilə paylanma üzrə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W., «J. Amer. Statist. Assos.», 1976, v. 71, p. 340–44; [2] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

DAYANIQLI PAYLANMA FUNKSİYASI « устойчивая функция распределения; stable function of distribution » – bax, *Dayanıqlı paylanma.*

DAYANIQLI PAYLANMA GÖSTƏRİCİSİ « устойчивого распределения показатель; index of stable distribution » – *dayanıqlı paylanmanın* əsas parametrlərindən biridir (bax, *Dayanıqlı paylanma*).

Dayanıqlı paylanmanın xarakteristik funksiyası $\varphi(t)$-nin loqarifmi –

$$\ln\varphi(t) = i\gamma t - c|t|^{\alpha}\left\{1 + i\beta\frac{t}{|y|}\omega(t,a)\right\} \qquad (1)$$

funksiyasının ifadəsində α parametri dayanıqlı paylanma göstəricisi (dayanıqlılıq parametri və ya xarakteristik göstərici kimi də adlandırılır) adlanır, burada α, β, γ, c sabitlərdir, $-1 \le \beta \le 1$, $0 \le \alpha \le 2$, $c \ge 0$ və

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} tg\dfrac{\pi}{2}\alpha, & \alpha \ne 1 \text{ olduqda,} \\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha = 1 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Dayanıqlılıq göstəricisi $\alpha > 0$ olan bütün dayanıqlı paylanmalar kəsilməzdirlər və belə paylanmaların sıxlıq funksiyalarının hər bir nöqtədə bütün tərtiblərdən törəmələri vardır.

(1)-dən aydındır ki, dayanıqlı paylanmanın sıxlıq funksiyası

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, c) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\exp\{i\gamma t - c|t|^{\alpha} \times$$

$$\times\left(1 + i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t, \alpha)\right)\}dt$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Dayanıqlı paylanmaların sıxlıq funksiyaları aşağıdakı hallar istisna olunmaqla elementar funksiyalar vasitəsilə ifadə olunmur.

1) xarakteristik göstəricisi $\alpha = 2$ olan normal paylanma dayanıqlıdır;

2) xarakteristik göstəricisi $\alpha = 1$ olan Koşi paylanması dayanıqlıdır;

3) paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-1/2x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

düsturu ilə ifadə olunan paylanma xarakteristik göstəricisi $\alpha = 1/2$ olan dayanıqlı paylanmadır;

4) cırlaşmış paylanma xarakteristik göstəricisi $\alpha = 0$ olan dayanıqlı paylanmadır.

Dayanıqlılıq göstəricisi $\alpha > 0$ olan dayanıqlı paylanmanın sıxlıq funksiyası $f(x; \alpha, \beta, \gamma, c)$ üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, c) =$$

$$= \begin{cases} c^{-1/\alpha} f((x-y)c^{-1/2};\ \alpha, \beta, 0, 1), & \alpha \ne 1 \\ c^{-1}\left(f\left(\dfrac{x-y}{c}\right) - \beta\dfrac{2}{\pi}\ln c;\ 1, \beta, 0, 1\right), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Ümumiliyi pozmadan $\gamma = 0$, $c = 1$ qəbul etmək olar. Əgər

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = f(x;\ \alpha,\ \beta,\ 0,\ 1)$$

olarsa, onda

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = f(-x;\ \alpha,\ -\beta).$$

Xarakteristik göstəricisi α $(0 < \alpha < 2)$ olan hər bir dayanıqlı paylanmanın bütün p tərtib $(0 < p < \alpha)$ mütləq momentləri vardır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической стаистике, М., 1985.

DAYANIQLI PROSES « устойчивый процесс; stable process » – zamana görə bircins, asılı olmayan artımlarlı, hər bir intervalda artımının paylanması *dayanıqlı paylanma* olan *təsadüfi prosesdir.* D. p.-lər ailəsi dayanıqlı paylanmalar ailəsi kimi dörd parametrlidir: hər bir D. p. $\zeta(t)$, $\zeta(0) = 0$ üçün

elə həqiqi $\gamma \in (-\infty, \infty)$, $C > 0$, $\alpha \in (0, 2)$ və $\beta \in [-1, 1]$ ədədləri vardır ki,

$$\mathbf{M}\ \exp\{ i\lambda\zeta(t) \} =$$

$$= \exp\left\{ t\left[i\gamma\lambda - C\,|\lambda|^{\alpha}\left[1 - i\beta\,\frac{\lambda}{|\lambda|}\,\omega(\lambda, \alpha) \right] \right] \right\}$$

düsturu doğrudur, burada

$$\omega(\lambda, \alpha) = tg\frac{\pi\alpha}{2},$$

$$\alpha \neq 1, \quad \omega(\lambda, 1) = \frac{2}{\pi}\,\ln|\lambda|.$$

γ parametri $\zeta(t)$ prosesinin *aparısına* uyğundur, α parametri $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^{s} < \infty$, $s \in (0, \alpha)$, $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^{\alpha} = \infty$, $t > 0$ momentlərinin varlığına uyğundur; $\beta = \gamma = 0$ olduqda $\zeta(t)$-nin paylanması *simmetrik paylanmadır* və $\mathbf{M}\exp\{ i\lambda\zeta(t) \} = \exp\{-tC\,|\lambda|^{\alpha}\}$, $|\beta| = 1$ olduqda isə prosesin trayektoriyalarının sıçrayışlarının işarəsi β-nın işarəsi ilə eyni olur. $\gamma = 0$ və $\alpha \neq 1$ olduğu halda $\zeta(kt)$ prosesinin paylanması $k^{1/\alpha}\zeta(t)$ prosesinin paylanması ilə eynidir. $\alpha = 0$ və $\alpha = 2$ limit halları determinik $\zeta(t) = \gamma t$ prosesi və Viner prosesinə uyğundur.

Bax, *Dayanıqlı paylanma.*

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964.

DAYANIQLI SEMİ – QRUP « устойчивая полугруппа; stable semigroup » – uyğun paylanmaları

$$Q_t(x) = G(\lambda_t(x - \beta_t))$$

şəklində ifadə olunan $\{Q(t)\}$ semi – qruplarına deyilir, burada $\lambda_t > 0$, β_t t-dən kəsilməz asılı olan sabitlər, G qeyd olunmuş paylanmadır. Burada G aşağıda verilən mənada dayanıqlı paylanmadır (bax, fəs. VI, §1): $X, X_1, X_2, \ldots$ qarşılıqlı asılı olmayan, eyni G paylanmasına malik təsadüfi kəmiyyətlərdir və $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. G paylanması sıfırda topalanmayandırsa və hər bir n üçün elə $c_n > 0$ və γ sabitləri varsa ki,

$$S_n \overset{d}{=} c_n X + \gamma_n \qquad (*)$$

münasibəti ödənilir, onda G paylanmasına geniş mənada dayanıqlı paylanma deyilir;

Əgər G paylanması üçün (*) münasibəti $\gamma_n = 0$ şərtilə ödənilirsə, G paylanması dar mənada dayanıqlı paylanma və ya ciddi mənada dayanıqlı paylanma adlanır. λ_t və β_t-nin kəsilməzliyi fərz olunduğundan semi – qrup (əgər o mövcuddursa) kəsilməzdir. $t \to 0$ olduqda Q_t paylanması sıfırda topalanmış paylanmaya yaxınlaşır və deməli, $\lambda_t \to \infty$, $\beta \to 0$ olur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

DAYANIQLI STATİSTİK QİYMƏT « устойчивая оценка; robust estimator » – bax, *Robast statistik qiymət.*

DAYANIQLI TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « устойчивое случайное множество; stable random set » – aşağıdakı xassəyə malik $A \subset \mathbb{R}^n$ *təsadüfi çoxluğudur*: ixtiyari natural n ədədi üçün elə müsbət λ_n ədədi və asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi $A_1, \ldots, A_n$ çoxluqları vardır ki, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ çoxluğunun paylanması $\lambda_n A$ çoxluğunun paylanması ilə üst-üstə düşür. D. t. ç. anlayışı *sonsuz bölünən təsadüfi çoxluq* anlayışının xüsusi halıdır.

DAYANIQLI TİPİ, PAYLANMANIN « устойчивый тип распределения; stable distribution type » – bax, *Paylanmalar tipi.*

DAYANIQLI VƏZİYYƏT « устойчивое состояние; stable state », ləngidici vəziyyət – bircins *Markov prosesinin* elə vəziyyətidir ki, x vəziyyətindən çıxış ehtimalının sıxlıq funksiyası sonludur:

$$\lim_{t \downarrow 0} p(t, x, x) = 1,$$

$$q_x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p(t, x, x)}{t} < \infty,$$

burada $p(t, x, x)$, – x vəziyyətindən t müddəti ərzində x-ə keçid ehtimalıdır. Əgər ζ separabel prosesdirsə və D. v. olan x-dən başlayırsa, onda $\tau = \inf\{ t : t \geq 0, \zeta_t \neq x \}$, – x-dən ilk çıxış zamanının paylanması $\mathbf{P}\{ \tau > t \} = \exp(-q_x t)$, $t \geq 0$ olur. $q_x = 0$ olduqda D. v. – uducu vəziyyətdir ($\tau = \infty$ sanki yəqin olur). Əgər vəziyyətlər çoxluğu $\mathscr{E}$ sonlu olarsa və proses stoxastik kəsilməz olarsa, onda bütün vəziyyətlər dayanıqlıdır; $\mathscr{E}$ hesabi çoxluq olduqda bunun olması zəruri deyildir (bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi).

DAYANIQLILIQ(ğı), ehtimal paylanmalarının kompozisiyaya ayrılışlarının **« устойчивость** разложений вероятностных распределений в композицию; **stability** of decompositions of probability distributions **»** – paylanmaların xarakterizasiyasının *dayanıqlılığının* xüsusi halıdır. Ehtimal paylanmalarının ayrılışlarının D. müntəzəm sonsuz kiçilənlik şərtindən istifadə olunmayan limit teoremlərinin əsasını təşkil edir. $\mathfrak{F}$, – $\mathbb{R}^1$-də təyin olunan paylanma funksiyaları çoxluğu və

$$\mathfrak{Y} = \{ \boldsymbol{w} = (F_1, F_2, \ldots) : F_j \in \mathfrak{F},\ \mathscr{I}\boldsymbol{w} = F_1 * F_2 * \ldots \in \mathfrak{F} \}$$

olsun. Qeyd olunmuş $G \in \mathfrak{F}$ üçün $\mathfrak{M}$-nin altçoxluğu $\mathfrak{M}(G) = \{ \boldsymbol{w} : \mathscr{I}\boldsymbol{w} = G \}$ və $\mathfrak{F}$-in altçoxluğu $\mathfrak{F}(\varepsilon, G) = \{ F : L(F, G) \leq \varepsilon \}$ seçilir, burada L – *Levi metrikasıdır.*

$$\alpha(\varepsilon, G) = \sup\{ \Delta(F, G) : F \in \mathfrak{F}(\varepsilon, G) \},$$

burada

$$\Delta(F, G) = \sup\{ \mu(\boldsymbol{w}, \mathfrak{Y}(G)) : \boldsymbol{w} \in \mathfrak{Y}(F) \},$$

$$\mu(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') = \sup\{L(F_j, F_j') : j \geq 1\},$$

$$\mu(\boldsymbol{w}, \mathfrak{Y}(G)) = \inf\{\mu(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') : \boldsymbol{w}' \in \mathfrak{Y}(G)\}$$

olsun. Ayrılışların dayanıqlılığı onu ifadə edir ki, $\varepsilon \to 0$ olduqda

$$\alpha(\varepsilon, G) \to 0 \qquad (*)$$

münasibəti doğrudur. Heç bir əlavə məhdudiyyətlər qoyulmayan bu münasibətdə L metrikasını $\mathfrak{F}$-da zəif topologiya yaradan ixtiyari metrika ilə əvəz etmək olar. (*) xassəsinə əsasən, *sonsuz kiçilənlik şərtini* (bax, [2] və *Lindeberq – Feller teoremi* məq.-nə) əvəz edən – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının zəif yığılması üçün zəruri şərt yaranır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin vurulması sxemində, təsadüfi kəmiyyətlərin maksimumu sxemində və digər sxemlərdə analoji fenomenlər məlumdur. Yu. V. Linnik, [1]-də $F = F_1 * F_2$, $F_i \in \mathfrak{F}$ ayrılışının iki komponentindən $\boldsymbol{w}$-nin seçilməsi ilə bağlı oxşar fenomenin olduğunu qeyd etmişdir.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Разложение вероятностных законов, Л., 1960; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирование независимых случайных величин, М., 1986.

DAYANIQLILIQ ehtimala görə zəif və güclü mənada « **устойчивость** по вероятности в сильном и слабом смысле; **stability** in probability » – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) təsadüfi təyinedici elementlərli differensial tənliklərin.

DAYANIQLILIQ(ğ ı) xidmət sistemlərinin « **устойчивость** систем обслуживания; **stability** of queueing systems » – təyinedici parametrlərin kiçik dəyişikliklərindən *xidmət sistemlərinin* özünün bəzi ehtimal xassələrini azacıq dəyişməsi xassəsidir. Xidmət sistemləri üçün «dayanıqlılıq» termini əvəzinə bəzən xidmət sistemlərinin «kəsilməzliyi» termini istifadə olunur.

Xidmət sistemlərinin D.-nın analizində əksər hallarda (u, f, v) üçlüyünə baxmaq məqsədəuyğundur, burada u – sistemin «giriş» verilənlərini xarakterizə edir (adətən, bunlar idarəedici təsadüfi ardıcıllıqlar, sifarişlərin daxilolunmalarını təyinedici proseslər, onların xidməti və s.), v – sistemin öyrənilən xarakteristikalarıdır (gözləmə müddəti prosesləri, növbənin uzunluqları və s.). Xidmət sisteminin verilməsi $U = \{u\}$ fəzasının $V = \{v\}$ fəzasına $v = f(u)$ inikasını təyin edir. u və v təsadüfi elementlər olduğundan, U və V fəzalarında $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmalarının verildiyi və $\mathbf{Q} = \mathscr{F}(\mathbf{P})$ münasibətini ödəyən f-i doğuran $\mathscr{F}$ inikasının təyin olunduğu nəticəsi alınır. $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}\}$ və $\mathscr{Q} = \{\mathbf{Q}\}$ ehtimallar fəzalarında $\xrightarrow{\mathscr{P}}$, $\xrightarrow{\mathscr{Q}}$ yığılma anlayışları daxil olunur (əksər hallarda bu u və v lokal xarakteristikalarının zəif yığılmasıdır, məs., koordinatların paylanmalarının yığılması, eyni zamanda v-nin stasionar xarakteristikalarına baxılarsa, sonsuz uzaqlaşmış koordinatların paylanmalarının yığılması).

Xidmət sistemlərində D., bir qayda olaraq, $\mathscr{F}$ inikasının kəsilməzliyidir, yəni $r \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}^{(r)} \xrightarrow{\mathscr{P}} \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}^{(r)} = \mathscr{F}(\mathbf{P}^{(r)}) \xrightarrow{\mathscr{Q}} \mathscr{F}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$$

münasibətinin ödənilməsidir.

Əgər $\xrightarrow{\mathscr{P}}$ və $\xrightarrow{\mathscr{Q}}$ yığılmaları metriklənirlərsə, onda $\mathscr{F}$ inikasının kəsilməzliyinin (ε, δ) – statistik qiymətləri d a y a n ı q l ı l ı ğ ı n k ə m i y y ə t i s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r i adlanır. Əgər d və ρ uyğun metrikalardırsa, onda kəmiyyət statistik qiymətləri aşağıdakı formanı ala bilər:

$x \to 0$ olduqda $\varphi(x) \to 0$ olarsa,

$$\rho(\mathbf{Q}^{(r)}, \mathbf{Q}) \leq \varphi(d(\mathbf{P}^{(r)}, \mathbf{P})).$$

Xidmət sistemləri üçün tipik hal: $u = (u_1, u_2, ...)$, $v = (v_1, v_2, ...)$ – koordinatları uyğun olaraq, $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{R}^l$-dən olan təsadüfi ardıcıllıqlar olduğu haldır, bu zaman U_k-ların eyni qanunla paylanmış təsadüfi koordinatlar olduğu və $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{P}\{v_k \in B\} = F_v(B)$ limitinin varlığı fərz olunur. Bu halda sistemin D. onu ifadə edir ki, u_k və $u_k^{(r)}$ koordinatlarının paylanmalarının yaxınlığı $F_v(B)$ və $F_{v^{(r)}}(B)$-nin yaxınlığını doğurur. D. şərtləri araşdırılan proseslərin xassələri ilə təyin olunur və müxtəlif metodlarla tapılır (bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; y e n i l ə ş m ə l ə r m e t o d u, *Dayanıqlılıq teoremi*; s ı n a q f u n k s i y a l a r ı m e t o d u, *Dayanıqlılıq teoremi*; m e t r i k y a n a ş m a). Xidmət sisteminin konkret sinifləri üçün D. analizinin nəticələri aşağıda verilir. Əsas işarələmələrə *Xidmət sistemi* məq.-də bax, məs., τ_k^e, – k və $(k+1)$-ci tələblərin daxil olduğu anlar arasında intervalın uzunluğu, τ_k^s k-cı tələbin xidmət müddəti, $x^+ = \max(0, x)$.

Birkanallı sistemlər. $u = (u_1, u_2, ...)$, $u_k = (\tau_k^e, \tau_k^s)$, $X_k = \tau_k^s - \tau_k^e$, $v = (v_1, v_2, ...)$, v_k k-cı tələbin xidmət başlanılan ana qədər gözləmə müddəti olsun [$\{v_k\}$, – $k \geq 1$ olduqda $v_{k+1} = (v_k + \zeta_k)^+$ rekurrent münasibətilə bağlı ardıcıllıqdır], $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ...)$, – $\{v_k\}$ ardıcıllığına uyğun stasionar ardıcıllıqdır və

$$\mathbf{P}\{\boldsymbol{w}_1 \in B\} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{P}\{v_k \in B\},$$

$$\boldsymbol{w}_k = \left(\sup_{j \geq 1} \sum_{i=k-j+1}^{k} X_i \right)^+.$$

$\{(\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s})\}$, $r \geq 1$ ardıcıllığı ilə idarəolunan xidmət sistemlərinin xarakteristikaları üçün yuxarı indeksləri (r) ilə işarələnən eyni işarələmələrdən istifadə olunur.

Fərz olunur ki, $X = \{X_k\}_{k \geq 1}$ erqodik ardıcıllıqdır, $\mathbf{M}X_1 < 0$; X^r ardıcıllığının sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$ olduqda X-in sonluölçülü paylanmalarına zəif yığılır; $r \to \infty$ olduqda $\mathbf{M}(X_1^{(r)})^+ \to \mathbf{M}(X_1)^+ < \infty$; $x \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}\{v_1^{(r)} > x\} \to 0$ yığılması r üzrə müntəzəm yığılmadır. Onda $\{\boldsymbol{w}_k^{(r)}\}$, $\{v_{n+k}^{(r)}\}_{k \geq 1}$ ardıcıllıqlarının sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$, $n \to \infty$ olduqda uyğun $\boldsymbol{w}$ paylanmalarına zəif yığılır.

$d(F_1, F_2) = \sup_x \left| F_1(x) - F_2(x) \right|$ – müntəzəm metrikada məsafə, $\rho(F_1, F_2) = \int d\,\left|(F_1 - F_2)(x)\right|$, – F_1 və F_2 paylanma funksiyaları arasında variasiya üzrə məsafə;

$$F(x) = \mathbf{P}\{X_1 < x\};$$

$$Q(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt;$$

$$W(x) = \mathbf{P}\{w_1 < x\}$$

olsun.

Birkanallı sistemlər üçün D.-ın kəmiyyətcə qiymətlərinin tapılmasının iki yolu vardır. Birinci yol X_j^r və X_j-nin paylanmalarının yığılmasının «hamarlılığı» ilə bağlıdır (məs., paylanmaların variasiyaya görə yığılması) və bu faktorizasion eyniliklərə əsaslanır. Məs., aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər X və $X^{(r)}$ ardıcıllıqları asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarətdirlərsə, $F(x)$ və $F^{(r)}(x)$ mütləq kəsilməz komponentlərə malikdirlərsə və $-\infty < \mathbf{M}X_1 < 0$ şərti ödənilərsə, onda

$$\rho(W^{(r)}, W) \le C(\rho(F^{(r)}, F) + \rho(Q^{(r)}, Q))$$

münasibəti doğrudur.

İkinci yol $\alpha > 1$ tərtib $\mathbf{M}(X_j^{(r)+})^\alpha$ momentlərinin məhdudluğu ilə bağlıdır ($X_j^{(r)}$ və X_j zəif yığıldığı halda). Belə bir hökm doğrudur: əgər X və $X^{(r)}$ asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət ardıcıllıqlardırsa, r-in bütün qiymətlərində $\mathbf{M}X_1 < 0$, $\mathbf{M}(X_1^{(r)+})^\alpha \le C < \infty$ şərtləri hər hansı $\alpha > 1$ qiymətində ödənilərsə, onda

$$d(W^{(r)}, W) \le C_1[\,d(F^{(r)}, F)]^{1-1/\alpha}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Əgər momentlərin məhdudluğu şərti əvəzinə bütün r-lər üçün və hər hansı $\beta > 0$ qiymətində

$$\mathbf{M}\exp\{\beta X_1^{(r)}\} \le C < \infty$$

şərtinin ödənilməsi tələbi qoyularsa, onda

$$d(W^{(r)}, W) \le C_2\,d(F^{(r)}, F)\left|\ln d(F^{(r)}, F)\right|$$

münasibəti doğrudur. Sonuncu bərabərsizliklər (d metrikasından istifadə olunduqda) digər bir sıra metrikalar üçün, o cümlədən, Levi, Levi – Proxorov, Ki Fan metrikaları üçün də doğrudur (eyni bir ehtimal fəzasında verildiyi halda). X və $X^{(r)}$ ardıcıllıqlarında təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığı fərziyyəsindən imtina olunduğu halda və müxtəlif məhdudiyyətlərli birkanallı sistemlər üçün, o cümlədən, imtinalarlı sistemlər, növbə uzunluğu məhdud sistemlər, gözləmə müddəti məhdud sistemlər üçün analoji qiymətləndirmələr alınmışdır.

Çoxkanallı sistemlər. Xidmət kanallarının sayı m-ə bərabər sistem üçün $u_k = (\tau_k^e, \tau_k^s)$ giriş (idarəedici) ardıcıllığı birkanallı sistemdə olduğu kimidir. Bu halda əsas öyrənilən obyekt $\{\upsilon_1, \upsilon_2, ...\}$ ardıcıllığıdır, burada $\upsilon_k = (\upsilon_{k,1}, ..., \upsilon_{k,m})$ – gözləmə müddəti vektorları olub,

$$\upsilon_{k+1} = R((\upsilon_k + e\tau_k^s - i\tau_k^e)^+), \quad k \ge 1$$

rekurrent münasibətlərini ödəyir, $i = (1, 1, ..., 1)$ və $e = (1, 0, ..., 0)$ – məhz m – ölçülü vektorlardır; $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$ vektoru üçün x^+ ilə $\mathbf{x}^+ = (x_1^+, ..., x_m^+)$ vektoru işarə olunmuşdur; $R(x)$, – x vektorundan koordinatların azalan qaydada yerdəyişməsindən alınmış vektordur. $w = (w_1, w_2, ...)$ ilə $\{\upsilon_k\}$-ya uyğun stasionar ardıcıllıq işarə olunmuşdur.

Çoxkanallı sistemlər üçün D. teoremlərində müəyyən əlavə (birkanallı sistemlərlə müqayisədə) fərziyyələrin (məs., yeniləşmələrin varlığı, bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; y e n i l ə ş m ə l ə r m e t o d u) ödənilməsi tələb olunur.

Birkanallı sistemlər üçün əvvəllərdə verilmiş D.-ın kəmiyyət statistik qiymətlər ($\alpha > 1$ tərtib momentlərin məhdudluğunu istifadə edən), bir qayda olaraq, çoxkanallı sistemlər üçün də doğrudur. Məs., əgər $\{(\tau_k^e, \tau_k^s)\}$ və $\{(\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s})\}$ ardıcıllıqları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olarsa, bütün r-lər üçün və hər hansı $\alpha > 1$ qiymətində $\mathbf{M}(\tau_j^s - m\tau_j^e) < 0$; $\mathbf{M}_j(\tau_j^{(r)s}) \le C < \infty$ şərtləri ödənilərsə, onda

$$\pi(W, W^{(r)}) \le C_1[\,\pi((\tau_1^e, \tau_1^s), (\tau_1^{(r)e}, \tau_1^{(r)s}))\,]^{1-1/\alpha}$$

münasibəti doğrudur, burada π, – Levi – Proxorov metrikasıdır, $W(x) = \mathbf{P}\{w_1 < x\}$.

Əgər momentlərin məhdudluq şərti əvəzinə bütün r-lər üçün və hər hansı $\beta > 0$ qiymətində $\mathbf{M}\exp(\beta\tau_j^{(r)s}) \le C < \infty$ olarsa, onda

$$\pi(W, W^{(r)}) \le C_2\,\pi((\tau_1^e, \tau_1^s), (\tau_1^{(r)e}, \tau_1^{(r)s})) \times \left|\ln \pi((\tau_1^e, \tau_1^s), (\tau_1^{(r)e}, \tau_1^{(r)s}))\right|$$

münasibəti doğrudur.

Analoji bərabərsizliklər imtinalarlı çoxkanallı sistemlər üçün də alınmışdır. Yeniləşmələr metodu da $\{(\tau_j^e, \tau_j^s)\}$ ardıcıllıqlarının asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət olduğu halda xidmət sistemlərinin D. şərtlərini almağa imkan verir.

Kanallar sayı sonsuz sistemlər. Bu halda da idarəedici ardıcıllığın $u_k = (\tau_k^e, \tau_k^s)_{k=-\infty}^{\infty}$ stasionar (dar mənada) ardıcıllığı olduğu fərz olunur. Belə sistemlərin əsas xarakteristikası n-ci tələb daxil olan anda məşğul kanallar sayını ifadə edən q_n ədədidir. $\upsilon = (q^1, q^2, ...)$, – $n \to \infty$ olduqda $\{q_{n+k}\}_{k \ge 1}$ ardıcıllığının limit stasionar ardıcıllığı olsun. Əgər $\mathbf{M}\tau_1^s < \infty$ olarsa, onda belə ardıcıllıq vardır və

$$q^k = I\{\tau_k^s > \tau_k^e\} + I\{\tau_{k-1}^s > \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\} + I\{\tau_{k-2}^s > \tau_{k-2}^e + \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\} + ...$$

münasibəti doğrudur. $I(B)$, – B hadisəsinin indikatorudur.

$q_n^{(r)}$, $q^{(r)n}$, υ^r ilə sistemin $\{(\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s})\}$ ardıcıllığı ilə idarəolunan xarakteristikaları işarə olunmuşdur.

Aşağıdakı müddəa doğrudur. Fərz olunur ki, $\{\tau_j^e\}$ və $\{\tau_j^{(r)e}\}$ ardıcıllıqları metrik tranzitivdirlər; $\{(\tau_j^{(r)e}, \tau_j^{(r)s})\}$ ardıcıllıqlarının

sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$ olduqda $\{(\tau_j^e, \tau_j^s)\}$ ardıcıllıqlarının uyğun paylanmalarına zəif yığılır; $r \to \infty$ olduqda $\mathbf{M}\tau_1^{(r)s} \to \mathbf{M}\tau_1^s < \infty$; tam, ixtiyari $j \geq 0$ qiymətində

$$\mathbf{P}\left\{\tau_0^s - \sum_{k=0}^{j} \tau_k^e = 0\right\} = 0.$$

Onda $\upsilon^{(r)}$ ardıcıllığının sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$ olduqda υ ardıcıllığının uyğun paylanmalarına zəif yığılır. Bu müddəa ümumi halda da, sifarişlər sistemə υ_k^e həcmli partiyalarla daxil olduqda və $\{(\tau_k^e, \upsilon_k^e, \tau_k^s)\}$ ardıcıllığı da stasionar olduğu halda öz qüvvəsində qalır.

Avtonom xidmətli sistemlər. Fərz olunur ki, sifarişlər sistemə ν_k^e həcmli qruplarla daxil olunur və ν_k^s həcmli qruplarla elə xidmət olunur ki, sistem $u = (u_1, u_2, ...)$ ardıcıllığı ilə ifadə olunur, burada $u_k = (\tau_k^e, \nu_k^e, \tau_k^s, \nu_k^s)$, $k \geq 1$. Bu sistemlərin adi sistemlərdən fərqi ondadır ki, sifarişlərə xidmət yalnız $0, \tau_1^s, \tau_1^s + \tau_2^s, ...$ anlarında giriş axınından asılı olmadan və növbənin olmasından asılı olmayaraq başlanır.

$e(t)$, – t anına qədər sistemə daxil olan sifarişlər sayı, $s(t) = \nu_1^s + ... + \nu_{\eta(t)-1}^s$ olsun, $\eta(t)$ – sıçrayışları $\tau_1^s, \tau_2^s, ...$ olan dolaşmanın t səddini ilk keçmə anı olsun; $q(t)$, – t anında növbənin uzunluğudur (xidmətdə olan sifarişlər hesaba alınmadan), $\overline{q}(0) = 0$; $\{q(x),\ x \geq 0\}$ – növbə uzunluğunun dəyişməsinin stasionar prosesidir və $t \to \infty$ olduqda $\{q(t+x);\ x \geq 0\}$ prosesi bu prosesə yığılır. Belə işarələmələr (yuxarıda indeksləri $r \geq 1$ olan), $(\tau_k^{(r)e}, \tau_k^{(r)s}, \nu_k^{(r)e}, \nu_k^{(r)s})$ ardıcıllıqları ilə idarəolunan sistemlər üçün də saxlanılır.

Avtonom xidmətli sistemlər üçün aşağıdakı müddəa doğrudur: əgər

$$\{\xi^k = e(x) - s(k) - e(k-1) + s(k-1);\ k \geq 1\}$$

erqodik ardıcıllıq, $\mathbf{M}\xi' < 0$ olarsa; $\{e^{(r)}(t);\ s^{(r)}(t)\}$ proseslərinin sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$ olduqda

$$\{e(t);\ s(t)\};\ \mathbf{M}[e^{(r)}(1) - e^{(r)}(0)] \to \mathbf{M}[e(1) - e(0)]$$

proseslərinin uyğun paylanmalarına zəif yığılarsa və $r \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}[s^{(r)}(1) - s^{(r)}(0)] \to \mathbf{M}[s(1) - s(0)]$$

olarsa, onda $\{\overline{q}(x)\}$ proseslərinin sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$ olduqda $\{\overline{q}(x)\}$ proseslərinin uyğun paylanmalarına yığılır.

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungstheorie, Bd1, B., 1983; [2] Боровков А. А.., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, M., 1980; [3] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, M., 1978.

DAYANIQLILIQ (ğı) Markov proseslərinin « **устойчивость** марковских процессов; **stability** of Markov processes » – *Markov proseslərinin* parametrlərinin kiçik dəyişikliklərində onların ehtimal xarakteristikalarının kiçik dəyişikliyinə səbəb olması xassəsidir. Markov proseslərinin D.-nın analizinə aid bir sıra məsələlər (əsas etibarilə diffuzion proseslər üçün) adi differensial tənliklər üçün uyğun məsələlərin ehtimali analoqlarıdır (bax, [1], [2]). Məs., Markov prosesi $X(\cdot)$-in

$$dX(t) = b(t, X)dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X)\, d\boldsymbol{w}_r(t) \qquad (1)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli olduğu fərz olunur, burada X, b, σ_r, – $\mathbb{R}^l$-dən vektorlar, $\boldsymbol{w}_r$ – asılı olmayan Viner prosesləridir. Əgər $b(t,x)$ və $\sigma_r(t,x)$ funksiyaları t-yə görə kəsilməz və x-ə görə hər bir məhdud $b(t,0) = 0$, $\sigma_r(t,0) = 0$ oblastında x üzrə Lipşits şərtini ödəyirlərsə, (1) sisteminin D. geniş məsələlər sinfi üçün xətti yaxınlaşma sinfinin D.-ndan alınır (bax, [1]):

$$dX(t) = \operatorname{grad}_x b(t,0)\, X\, dt + \sum_{r=1}^{k} \operatorname{grad}_x \sigma_r(t,0)\, X\, d\boldsymbol{w}_r(t); \qquad (2)$$

burada D. – $|X(0)| \to 0$ olduqda $\sup_{t>0} |X(t)|$ kəmiyyətinin ehtimala görə sıfra yaxınlaşması kimi anlaşılır. Belə növ Markov proseslərinin D.-nı tədqiq etmək üçün Lyapunov düz metodunun analoqları və ümumiləşmələri olan metodlardan istifadə olunur (bax, [1], [2]).

Digər növ Markov proseslərinin D. vəziyyətləri çoxluğu $\{0, 1, 2, ...\}$ olan ayrılmayan hesabi periodik Markov zəncirləri üçün izah olunur. $P = \{p_{i,j}\}$ – belə zəncirin keçid matrisi, τ – qeyd olunmuş bir vəziyyətə qayıdış müddəti (məs., 0 vəziyyətinə), $q_n = (q_n(k))_{k \geq 0}$, – n anında zəncirin vəziyyətinin paylanması olsun. Belə bir hökm doğrudur: əgər keçid matrisləri $P^{(r)}$, $r \geq 1$ olan Markov zəncirləri ardıcıllığı elə olarsa ki, $\{\tau, \tau^{(r)},\ r \geq 1\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi müntəzəm inteqrallanan olsun, onda $r \to \infty$ olduqda

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \left| q_n(k) - q_n^{(r)}(k) \right| \to 0$$

münasibətinin ödənilməsi üçün ixtiyari $i, j \geq 0$ qiymətlərində

$$p_{ij}^{(r)} \to p_{ij} \quad \text{və} \quad q_0^{(r)}(i) \to q_0(i)$$

münasibətlərinin ödənilməsi zəruridir. İxtiyari vəziyyətlər fəzası ilə verilən Harris qayıdışlı Markov zənciri üçün analoji nəticə doğrudur.

Əd.: [1] Хасьминский Р. З., Устойчивость дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, M., 1969; [2] Кушнер Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., M., 1969; [3] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, M., 1978; [4] Аничкин С. А., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, M., 1984, с. 22–27.

DAYANIQLILIQ (ğı) paylanmaların xarakterizasiyalarının « **устойчивость** характеризации распределений; **stability** of characterization of distributions » – paylanmaların xarakterizasiyası modeli ilə bağlı stoxastik modellərin dayanıqlılığının bir

təzahürüdür. Paylanmaların xarakterizasiyalarının D. xarakterizasiyanın keyfiyyətcə və kəmiyyətcə təzahüründə öyrənilir. Sonuncu üçün ehtimal metrikası anlayışından və ya heç olmasa ehtimali məsafədən istifadə olunur. Paylanmaların xarakterizasiyalarının D.-nın bir effekt kimi anlamı baxımından ilk mülahizələr P. Levinin [1] kitabında verilmişdir (teorem 38) ki, burada paylanmaların kompozisiyasının normal qanuna yaxın olması üçün kompozisiyanın komponentlərinin uyğun normal qanunlara yaxınlığı tələb olunur və şərt kimi qoyulur. Bu mülahizələr (hökmün dəqiq ifadəsi və inandırıcı isbatı olmayan) Kramer teoremi ilə sıx bağlıdır; bu teoremə görə, normal qanunun paylanma funksiyası Φ yalnız $\Phi = F_1 * F_2$ kompozisiyası kimi normal qanunlu (o cümlədən, həm də cırlaşmış) paylanma funksiyaları ilə ifadə olunan ayrılış kimi göstərilə bilinər.

N. A. Sapoqov P. Levinin mülahizələrini dəqiqləşdirərək, paylanmaların xarakterizasiyalarının D. mövzusunda ilk nəticəni teorem şəklində ifadə etmişdir (bax, [2]). Bu teorem həm də paylanmaların xarakterizasiyalarının D. məsələsində ilk kəmiyyət statistik qiymət olmuşdur. Bərabərsizlik formasında Sapoqov teoremində hökm olunur ki, ρ – müntəzəm metrika olduqda, kiçik $\varepsilon = \rho(F_1 * F_2, \Phi)$ üçün həmişə elə Φ_1, Φ_2 normal paylanma funksiyaları tapmaq olar ki, $\rho(F_k, \Phi_k) = O(1/\sqrt{\log 1/\varepsilon})$ olsun.

P. Levi və N. A. Sapoqovun ideyaları Yu. V. Linnikin (bax, [3]) işlərində və onun ardıcıllarının işlərində (bax, [4], [5]) istifadə olunmuş və davam etdirilmişdir. Ehtimali məsafələrdən istifadəyə əsaslanan ümumi yanaşma [6]-da verilmişdir, burada xarakterizasiyaların dayanıqlılığı şərtləri şərh olunmuşdur. Əgər $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ – uyğun olaraq bunlarda μ və ν məsafələri verilmiş hər hansı paylanmalar fəzası, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{X}$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{Y}$ – bu fəzalarda ayrılmış altçoxluqlar və $J : \mathscr{X} \to \mathscr{F}$ – hər hansı inikasdırsa, onda $\mathscr{D} = (J\mathscr{A}) \bigcap \mathscr{B}$ və $\mathscr{C} = \mathscr{A} \bigcap (J^{-1}\mathscr{B})$ çoxluqları $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{F}, \mathscr{A}, \mathscr{B})$ modeli çərçivəsində $\mathscr{A}$ və $\mathscr{B}$ çoxluqları ilə xarakterizə olunan çoxluqlardır. Bu çoxluqların xarakterizasiyasının dayanıqlılığı μ və ν məsafələrinin və müəyyən μ – kompakt $\mathscr{X}' \subseteq \mathscr{X}$ çoxluğunun daxil olunması ilə bağlıdır. $\mathscr{C}$ çoxluğu üçün bu onu ifadə edir ki, ixtiyari $x \in \mathscr{X}'$ üçün

$$\mu(x, \mathscr{A}) + \nu(Jx', \mathscr{B}) \to 0 \Leftrightarrow \mu(x', \mathscr{C}) \to 0$$

münasibəti ödənilir. $\mathscr{D}$-nin (μ, ν) – dayanıqlılıqlı xarakterizasiyası üçün kafi şərtlər aşağıdakılardır:

1) $\mathscr{A}$ çoxluğu μ-yə nəzərən qapalıdır;

2) $\mathscr{B}$ çoxluğu ν-yə nəzərən qapalıdır;

3) J inikası μ, ν məsafələri cütünə nəzərən $\mathscr{A}$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində kəsilməzdir.

Yuxarıda qeyd olunan Kramer teoremində bu kafi şərtləri tətbiq etmək üçün $\mathscr{X} = \{(F_1, F_2)\}$, $F_k \in \mathscr{F}$ (burada $\mathscr{F}$, – $\mathbb{R}^1$-də paylanma funksiyaları çoxluğudur), $\mathscr{Y} = \mathscr{F}$, $J(F_1, F_2) = F_1 * F_2$, $\mathscr{A} = \mathscr{X}$, $\mathscr{B} = \{\Phi\}$ götürmək olar, μ və ν-nün məsafələri kimi isə

$$\mu((F_1, F_2)(F_1', F_2')) = L(F_1, F_1') + L(F_2, F_2'), \quad \nu = L$$

metrikasını götürmək olar, burada L – *Levi metrikasıdır*.

Əd.: [1] L é v y P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [2] С а п о г о в Н. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 3, с. 205–18; [3] Л и н н и к Ю. В., Разложения вероятностных законов, Л., 1960; [4] Ч и с т я к о в Г. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 433–50; [5] К а г а н А. М., Л и н н и к Ю. В., Р а о С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [6] З о л о т а р е в В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54.

DAYANIQLILIQ(ğ ı) r e g e n e r a t i v p r o s e s l ə r i n **« устойчивость** р е г е н е р и р у ю щ и х п р о ц е с с о в; **stability** o f r e g e n e r a t i v e p r o c e s s e s **»** – *regenerativ proseslərin* parametrlərinin kiçik dəyişmələrindən onların ehtimal xarakteristikalarının kiçik dəyişikliyinə səbəb olması xassələridir. $V = (V_1, V_2, \ldots)$ – diskret zamanlı regenerativ proses, $S_0 = 0$, $S_1, S_2, \ldots$ – bu prosesin ardıcıl regenerasiya anları, $\theta_j = S_j - S_{j-1}$, $j \geq 1$, $\mathbf{P}\{\theta_1 \geq 1\} = 1$ və $a(k) = \mathbf{P}\{\theta_1 = k\}$, $k \geq 1$ olsun. Natural N və $0 < \alpha < 1$ ədədləri üçün əgər $\{k : a(k) \geq \alpha,\ 1 \leq k \leq N\} = 1$ ən böyük ortaq bölən olarsa, onda $\{a(\cdot)\}$ paylanmaları $\mathfrak{N}(N, \alpha)$ s i n f i n d ə n d i r. V və V' – regenerativ proseslər, periodların regenerasiyasının uyğun paylanmaları – a və a', $\mathfrak{N}(N, \alpha)$ sinfindən olsun; onda:

a) əgər hər hansı $\gamma > 1$ və $0 < g < \infty$ üçün

$$\mathbf{M}\,\theta_1^{\gamma} \leq g, \quad \mathbf{M}(\theta_1')^{\gamma} \leq g$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə, onda

$$\sup_{n \geq 1} d(V_n, V_n') \leq \inf_T \{\max_{n \leq T} d(V_n, V_n') + cT^{1-\gamma}\}$$

münasibəti doğrudur, burada d – vahidlə məhdud və tam variasiya metrikasından güclü olmayan metrikadır, c sabiti isə yalnız g, γ, N, α-dan asılıdır;

b) əgər hər hansı $\mu > 0$ və $0 < g_1 < \infty$ üçün

$$\mathbf{M}\exp(\mu\theta_1) \leq g_1, \quad \mathbf{M}\exp(\mu\theta_1') \leq g_1$$

olarsa, onda elə $0 < \mu_0 \leq \mu$ və $c_1 = c_1(g_1, \mu, N, \alpha)$ sabitləri vardır ki,

$$\sup_{n \geq 1} d(V_n, V_n') \leq \inf_T \{\max_{n \leq T} d(V_n, V_n') + c_1 \exp(-\mu_0 T)\}$$

münasibəti doğrudur, burada μ_0 və c_1 sabitləri aşkar surətdə yazılır.

Regenerativ proseslərin ən zəif D. şərtləri aşağıdakılardır: V' ardıcıllığının V-yə zəif yığılması; V və V' proseslərinin regenerasiya periodlarının qeyri – periodikliyi və müntəzəm inteqrallanalıq.

Qeyd olunan nəticələr hesabi Markov zəncirlərinin birxətli, çoxxətli, çoxfazalı və digər xidmət sistemlərinin D.-nı analiz edərkən istifadə olunmuşdur.

Əd.: [1] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функции, М., 1978.

DAYANIQLILIQ(ğ ı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n **« устойчивость** с т а т и с т и ч е с к о й п р о ц е д у р ы; **stability** o f a s t a t i s t i c a l p r o c e d u r e **»** – ilkin modeldən X yayınmaları olduğu halda *statistik prosedurun* nominal xarakteristikaları az dəyişdirməsi xassəsidir. Əgər prosedurun bu və ya digər xassələri olduqca xususi model çərçivəsində müəyyən olunmuşdursa (məs., seçimi verilənlərin

paylanmasını bir və ya bir neçə parametr dəqiqliyi ilə qeyd edən model), onda statistik prosedurun D. (ilkin modeldən real mümkün olan yayınmalara nəzərən) statistik praktikada prosedurun istifadə olunması üçün zəruri olan ilkin şərtdir. Bir çox hallarda statistik prosedurun D.-nın araşdırılmasında statistik modelləşdirmə metodu və ya digər ədədi metodlarla kifayətlənilir, çünki analitik metodların tətbiq olunma oblastı məhduddur; məs., böyük həcmli seçimlər üçün alınmış nəticələrin kiçik və bir qədər ondan fərqli həcmli seçimlər üçün istifadə oluna bilinməsini aydınlaşdırdıqda.

Bəzi klassik statistik prosedurlar üçün aşağıdakı vəziyyət alınır (bax, [1]). $\bar{x}$ və s^2 – uyğun olaraq, seçimi orta və seçimi dispersiya olarsa, $t_n = \sqrt{n-1}\ \bar{x}/s$ Styudent statistikası normal paylanmalı çoxluğun orta qiyməti haqqında statistik nəticələr üçün istifadə olunur. t_n statistikasına əsaslanan statistik prosedurun D. – sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Styudent paylanmasının normal paylanmadan fərqli paylanmalı çoxluqdan olan seçim nəticəsində yaranan t_n statistikasının paylanmasına yaxınlığını ifadə edir. $n \to \infty$ olduqda, sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Styudent paylanması və t_n -in paylanması eyni bir normal paylanmaya yığılır və buna görə də, böyük həcmli seçimlərdə t_n statistikasına əsaslanan statistik prosedurun D. haqqında mülahizə aparmaq olar. Kiçik həcmli seçimlərdə t_n -ə əsaslanan statistik prosedurun D. eksses yayınmaları ilə müqayisədə asimmetriya yayınmalarına nəzərən kiçik olur.

Normal paylanmalı çoxluğun dispersiyası haqqında statistik nəticələrin alınmasında $\chi_n^2 = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$ statistikasından istifadə olunur. χ_n^2 statistikasına əsaslanan statistik prosedurun D. asimmetriyanın yayınmaları ilə müqayisədə eksses yayınmalarına nəzərən kiçik olur və bu halda asimptotik mülahizələr köməyə gəlir, belə ki, sıfırdan fərqli eksses olduğu halda, $n \to \infty$ olduqda χ_n^2 statistikasının limit paylanması Qauss paylanması olsa da, bu paylanma sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ -ə bərabər xi – kvadrat paylanması üçün limit paylanması olan Qauss paylanmasından fərqlidir. Beləliklə, seçimi dispersiyaya əsaslanan statistik prosedur D. xassəsinə malik deyildir.

Parametrin qiymətləndirilmə məsələsinə keçdikdə, spektral prosedurun D.-nın yoxluğuna misal: $\Phi(x-\theta)$ paylanmalı normal çoxluqdan seçim üzrə kvadratik itki funksiyasına nəzərən θ parametrinin statistik qiyməti $\bar{x}$ seçimi ortasıdır. $F(x)$ -in $\Phi(x)$ -dən olduqca kiçik elə yayınmaları vardır ki, onların ikinci momentləri olduqca böyükdür, odur ki, $F(x-\theta)$ paylanmalı çoxluqdan seçim üzrə təyin edilmiş $\bar{x}$ seçimi ortası θ üçün statistik qiymət kimi məqbul deyildir. Bu modeldə statistik prosedurun D.-na nail olmaq üçün metodlardan biri ondan ibarətdir ki, statistik qiymət qurularkən kənar müşahidələr eliminasiya olunmalıdır. Bu halda təbii olaraq, kəsik orta tipli statistik qiymətlər sinfi yaranır və belə kəsik orta seçimin $X_1 \le ... \le X_n$ qaydalı statistikaları üzrə

$$\overline{X}_\alpha = (X_{(k+1)} + ... + X_{(n-k)}) / (n-2k),$$

$$k = [n\alpha], \quad \alpha < 1/2$$

münasibətilə təyin olunur, burada α – ilkin normal modeldən mümkün ola bilən yayınmalardan asılı olaraq seçilir. α seçilərkən statistik prosedurun D. və onun effektlivliyi arasında kompromiss nəzərə alınmalıdır (bax, *Effektivlik*(y i) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n), belə ki, effektiv statistik prosedurun qurulması maksimal dərəcədə modelin spesifikasına əsaslanır.

Hal-hazırda çox məşhur olan *statistik prosedurun robastlığı* konsepsiyası bu kompromissin realizasiyalarından biri sayılır. Digər bir mümkün yol paylanmadan asılı olmayan statistik prosedurun istifadə olunmasıdır.

Statistik prosedurun D.-nın öyrənilməsinə eksperimental araşdırmalarda başlanılmışdır. 20-ci əsrin 1-ci yarısında ayrı-ayrı nəzəri nəticələr alınmışdır, bunlar arasında $\overline{X}_\alpha$ -dan fərqlənən u n i z o r l a n d ı r ı l m ı ş ortaları qeyd etmək olar ki, bunlar $X_{(1)}, ..., X_{(k)}$ statistikalarının eliminasiya olunması (atılması) əvəzinə (uyğun olaraq, $X_{(n-k+1)}, ..., X_{(n)}$ -lərin) $X_{(k+1)}$ -lə (uyğun olaraq, $X_{(n-1)}$ -lə) əvəz olunur.

Əd.: [1] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Л е м а н Э., Теория статистических оценок, пер. с англ., М., 1991.

DAYANIQLILIQ(ğ ı) s t o x a s t i k m o d e l i n **« устойчивость** с т о х а с т и ч е с к о й м о д е л и; **stability** o f a s t o c h a s t i c m o d e l **»** – stoxastik modelin hər hansı ilkin vəziyyətlərinin kiçik dəyişikliyi sayəsində bu model çərçivəsində nəticənin müəyyən mənada kiçik dəyişilməsi xassəsidir. Ciddi tətbiqi əhəmiyyəti olan stoxastik modelin D. ilə bağlı məsələlərə ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox bölmələrində baxılır (bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı), t ə s a d ü f i t ə y i n e d i c i e l e m e n t l ə r l i d i f f e r e n s i a l t ə n l i k l ə r i n, *Dayanıqlılıq*(ğ ı), x i d m ə t s i s t e m l ə r i n i n, *Dayanıqlılıq*(ğ ı), p a y l a n m a l a r ı n x a r a k t e r i z a s i y a l a r ı n ı n, *Limit teoremləri*). Stoxastik modelin D. effektləri ehtimal metrikalarından istifadə olunmaqla öyrənildiyi kimi, paylanmaların bu və ya digər yığılmaları terminlərilə də öyrənilir. Birinci yol daha münasibdir, çünki, bu halda kəmiyyətcə statistik qiymətlər haqqında məsələləri araşdırmaq olur (bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) s t o x a s t i k m o d e l i n; k ə m i y y ə t i s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r).

DAYANIQLILIQ(ğ ı) s t o x a s t i k m o d e l i n; k ə m i y y ə t i s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r **« устойчивость** с т о х а с т и ч е с к о й м о д е л и; к о л и ч е с т в е н н ы е о ц е н к и; **stability** o f a s t o c h a s t i c m o d e l; q u a n t i t a t i v e e s t i m a t e s **»** – giriş verilənlərini çıxış verilənlərinə çevirmə şəklində verən stoxastik modelin inikasının kəsilməzlik xassəsidir və bu çevirmədə həm giriş, həm də çıxış verilənləri haqqında məlum, əlavə aprior informasiya nəzərə alınır.

D.-ın ümumi məsələsi aşağıdakı kimi ifadə olunur. Stoxastik modelin X giriş verilənləri və Y çıxış verilənlərinin abstrakt metrik fəzaları uyğun olaraq $(\mathscr{X}, \mu)$ və $(\mathscr{Y}, \nu)$, $F: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ – hər hansı inikas olsun (qarşılıqlı birqiymətli olması şərt deyil). $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ və $\mathscr{B} \subset \mathscr{Y}$ – aprior informasiyanı verən, qeyd olunmuş altçoxluqlar olsun. $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, F)$ üçlüyü ilə müxtəlif «təmiz» (və ya kükrəntisiz) modelləri əlaqələndirmək olar. Düz modellər ən tipik modellərdir və bu modellərdə $\mathscr{X} \in \mathscr{A}$ və $\mathscr{B} = \mathscr{Y}$ münasibətinin ödənildiyi hesab olunur; məsələ məqbul sayılan çıxış verilənlərinin çoxluğu $F\mathscr{A}$ -nın tapılmasından, həmçinin verilmiş $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ və $\mathscr{B} \subset \mathscr{Y}$ çoxluqları üzrə $C = \mathscr{A} \bigcap F^{-1}(\mathscr{B})$, $C \subset \mathscr{X}$ çoxluğunun tapılması üçün zəruri olan tərs modellərin (və ya xarakterizasiya modelinin) tapılmasından ibarət olur. D. məsələlərinin bu modellərdə yaranması $\mathscr{A}$ və $\mathscr{B}$ -nin «kiçik» dəyişikliklərinin hansı effekti verəcəyinin araşdırmaq arzusu ilə bağlı olmuşdur.

T ə r i f 1. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sabiti varsa ki,

$$\theta(X') \equiv \mu(X', \mathscr{A}) + \nu(FX', \mathscr{B}) < \delta(\varepsilon), \; X' \in \mathscr{X}$$

olduqda

$$\nu(FX', F\mathscr{A}) < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda düz model – verilən $\mathscr{B}$ m ə h d u d i y y ə t i n d ə $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ ç o x l u ğ u n d a d a y a n ı q l ı m o d e l adlanır.

T ə r i f 2. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sabiti varsa ki,

$$\theta(X') = \mu(X', \mathscr{A}) + \nu(FX', \mathscr{B}) < \delta(\varepsilon)$$

olduqda

$$\mu(X', C) < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin və əksinə, yəni ixtiyari $\delta > 0$ üçün elə $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ varsa ki, $\mu(X', C) < \varepsilon$ olduqda $\theta(X') < \delta$ ödənilsin, onda xarakterizasiya modeli $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ ç o x l u ğ u n d a d a y a n ı q l ı m o d e l adlanır.

Stoxastik modellər onunla səciyyəvidirlər ki, bu modellərdə $\mathscr{X}$ və $\mathscr{Y}$ fəzalarına ya hər hansı təsadüfi obyektlərin (kəmiyyətlərin, funksiyaların, meydanların) fəzaları kimi, ya da ehtimal paylanmalarının fəzaları kimi baxılır. Bu halda μ və ν rolunu ehtimali metrikalar ifadə edir.

Ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilən bir çox sxemlər düz model şəklində izah olunur. Məs., təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmaları üzrə və ola bilər ki, müəyyən məhdudiyyətlərlə (məs., asılı olmamazlıq, eyni qanunla paylanılma) onların cəminin paylanmasının təyin olunmasını ifadə edən təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə sxemi; «təyinedici» təsadüfi kəmiyyətlərin (xidmət müddətləri, tələblər arasında intervallar) paylanmaları üzrə növbələrin uzunluğunun, gözləmə müddətinin paylanmalarının tapılmasını ifadə edən kütləvi xidmət nəzəriyyəsinin düz məsələləri.

Ehtimal nəzəriyyəsində xarakterizasion modellər paylanmaların xassələri üzərinə qoyulan bəzi aprior məhdudiyyətlərə görə, paylanmaların şəklinin müəyyən olunmasında istifadə edilir (məs., kütləvi xidmət nəzəriyyəsinin tərs məsələlərində çıxış axını üzrə xidmət müddətinin paylanmasını təyin etmək tələb olunduqda).

D. məsələlərinin müxtəlif məzmunlu interpretasiyaları ola bilər. Məs., limit teoremləri (məs., *Mərkəzi limit teoremi*, *Puasson teoremi*) müxtəlif cəmləmə sxemlərində D. teoremləri hesab oluna bilinər. Xidmət modellərinin və stoxastik differensial tənliklərin D.-nın əsas xassələri də tərif 1-ə gətirilir. Tərif 2 şəklində ehtimal paylanmalarının xarakterizasiyasının D. məsələləri ifadə oluna bilinir.

D. teoreminin (bu xassənin varlığını ifadə edən hökm şəklində) isbat olunma faktının özü bu modelin xüsusi keyfiyyətlərinin olmasına sübutdur ki, bunlar fərziyyələrin kiçicik dəyişikliklərinin nəticələrdə böyük yayınmalara səbəb olmayacağına zəmanət verir (bax, *Keyfiyyətcə dayanıqlılıq*(ğ ı) s t o x a s t i k m o d e l l ə r i n). Keyfiyyətcə D., əlbəttə ki, modelin iş qabiliyyətliliyinə zəmanət verən fundamental faktdır. Keyfiyyətcə D.-ın özü üçün, ümumiyyətlə, $\mathscr{X}$ və $\mathscr{Y}$ fəzalarına metrika daxil etmək tələb olunmur, kifayətdir ki, bunlarda topologiya verilsin.

Tərif 1 və 2-də $\delta(\varepsilon)$ və $\varepsilon(\delta)$ kəmiyyətlərinin qiymətləndirilməsi yalnız D.-ın isbat olunması halında deyil, həm də ilkin veri lənlərin variasiyalarının mümkün nəticələri də qiymətləndirildiyi halda k ə m i y y ə t c ə d a y a n ı q l ı l ı q anlayışına gətirir.

D. xassələri öyrənilərkən, öyrənilən modellərin tiplərindən asılı olaraq, müxtəlif riyazi texnikadan istifadə olunur. Modellərin keyfiyyətcə D. haqqında və uyğun kəmiyyətcə D. haqqında müddəalar üçün ehtimali metrikalar nəzəriyyəsi güclü bir texniki alət sayılır.

D. kəmiyyətcə statistik qiymətlərin alınmasında bir sıra bir-biri ilə əlaqəli problemlər yaranır. Birincisi $\delta(\varepsilon)$ kəmiyyətinin (və ya $\varepsilon(\delta)$ -nın) məsələnin məzmunlu qoyuluşu ilə diktəolunan μ və ν terminlərilə qiymətləndirilməsidir. İkincisi μ və ν metrikalarının elə seçilməsi problemidir ki, $\delta(\varepsilon)$ -nın qiymətləndirilmə məsələsi [uyğun olaraq, $\varepsilon(\delta)$ -nın] riyazi nöqteyi – nəzərdən daha təbii həll olunsun. Müəyyən situasiyalarda bu iki problem bir-birinə zidd ola bilər və bu halda üçüncü problem yaranır – «təbii» metrikalarla alınmış statistik qiymətlərdən məzmunlu diktəolunan məsələ üçün statistik qiymətlərə keçid. Dördüncü problem həmişə kəmiyyətcə araşdırmalarda yaranır, bu statistik qiymətlərin «keyfiyyət» problemidir, yəni onların bu və ya digər mənada yaxşılaşdırılmayan olmaları problemidir.

Əd.: [1] Z o l o t a r e v V. M., «Bull. Inst. Statist. Inst.», 1977, v. 47, № 2, p. 382–401; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [3] К а л а ш н и к о в В. В., Р а ч е в С. Т., Математические методы построения стохастических моделей обслуживания, М., 1988.

DAYANIQLILIQ(ğ ı) t ə s a d ü f i t ə y i n e d i c i e l e m e n t l ə r l i d i f f e r e n s i a l t ə n l i k l ə r i n **« устойчивость** д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й с о с л у ч а й н ы м и о п р е д е л я ю щ и м и э л е м е н т а м и; **stability** o f d i f f e r e n t i a l e q u a t i o n s w i t h r a n d o m p a r a m e t e r s **»** – hərəkətin dayanıqlılıq nəzəriyyəsinin elə bir bölməsidir ki, burada sağ tərəfi təsadüfi olan differensial tənliklər sistemi üçün bu və digər ehtimal mənasında invariant çoxluqların dayanıqlılığı araşdırılır. Dayanıqlılıq nəzəriyyəsinin ən çox inkişaf etdiyi hal – invariant çoxluğun nöqtə olduğu haldır.

$F(x, t, \omega)$; x, $F \in \mathbb{R}^n$, – x qeyd olunduqda təsadüfi proses olsun və bu proses x -ə görə elə müəyyən hamarlıq xassələrinə malik olsun ki, bu xassələr

$$x'_t = F(x, t, \omega), \; x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

məsələsi üçün yeganə həlli təmin etsin. $X^{(x_0,t_0)}(t, \omega)$, – (1) məsələsinin həlli və $F(0, t, \omega) \equiv 0$ olsun, deməli, $x = 0$ (1) tənliyinin həllidir. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ olarsa ki, $|x_0| \le \delta$ olduqda

$$\sup_{t \ge t_0} \mathbf{P}\{|X^{(x_0,t_0)}(t, \omega)| \ge \varepsilon\} \le \varepsilon$$

münasibəti ödənilsin, onda bu həll – z ə i f m ə n a d a e h t i m a l a g ö r ə d a y a n ı q l ı h ə l l adlanır. Əgər bundan başqa, $t \to \infty$ olduqda, $X^{(x_0,t_0)}(t, \omega) \to 0$ olarsa, $x = 0$ həlli z ə i f m ə n a d a e h t i m a l a g ö r ə a s i m p t o t i k d a y a n ı q l ı h ə l l adlanır.

Əgər bütün $|x_0| \le \delta$ üçün (2) əvəzinə

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \ge t_0} \left| X^{(x_0,t_0)}(t, \omega) \right| \ge \varepsilon\right\} \le \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, $x = 0$ həlli – g ü c l ü m ə n a d a e h t i m a l a g ö r ə d a y a n ı q l ı h ə l l adlanır.

Tətbiqi məsələlərdə vahid ehtimalla D. və həllin hər hansı p tərtib momentlərinin D. (p – d a y a n ı q l ı l ı q adlandırılan) öyrənilir. Differensial tənliklərin determinik halında olduğu kimi, müxtəlif mənalarda ehtimala görə dayanıqlılıq şərtlərini Lyapunov funksiyalarının analoqları terminlərilə – Lyapunov stoxastik funksiyaları adlandırılan terminlərlə də vermək olar. Xüsusilə də, stoxastik differensial tənliklərin dayanıqlılığı araşdırılan halda tətbiq üçün sadə və rahat şərtlər alınır (bax, [1], [2]). Xətti stoxastik differesial tənliklərin D. olduqca ətraflı surətdə araşdırılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, sabit əmsallarlı xətti sistemin ehtimala görə asimptotik D. p kiçik olduğu halda onun eksponensial p – dayanıqlılığını təmin edir. Əksinə, hər hansı p qiymətində xətti sistemin eksponensial p – dayanıqlılığı (yəni hər hansı $A>0$, $\alpha>0$ üçün $\mathbf{M}\left| X^{(x_0,\,t_0)}(t)\right|^p \le A|x_k|^p e^{-\alpha t}$ bərabərsizliyinin ödənilməsi) sistemin ehtimala görə asimptotik D.-na zəmanət verir. Stoxastik differensial tənliklər üçün birinci yaxınlaşma üzrə dayanıqlılıq və qeyri – dayanıqlılıq haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

Tam olan $p>0$ qiymətləri halında eksponensial p – dayanıqlılıq üçün zəruri və kafi cəbri şərtlər alınmışdır.

$$dx/dt = F(y(t,\omega),\,x) \quad (F(y,\,0)\equiv 0)$$

şəklində sistemlərin $x=0$ həllərinin D. ikiölçülü $(X(t),\,Y(t))$ Markov prosesi üçün $x=0$ hipermüstəvisinin D.-na gətirilir və bu da Lyapunov stoxastik funksiyalar metodu ilə analiz oluna bilinər.

Əd.: [1] К у ш н е р Г. Д ж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969; [2] Х а с ь м и н с к и й Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969.

DAYANIQLILIQ PARAMETRİ « устойчивости параметр; parameter of stable », x a r a k t e r i s t i k p a r a m e t r, – bax, *Dayanıqlı paylanma göstəricisi.*

DAYANIQLILIQ TEOREMİ x i d m ə t s i s t e m i n ə z ə r i y y ə s i n d ə **« устойчивости теорема** в т е о р и и с и с т е м о б с л у ж и в а н и я; **stability theorem** i n t h e q u e u e i n g t h e o r y **»** – «idarəedici» təsadüfi proseslər və ya parametrlərin kiçik dəyişikliklərində *xidmət sistemlərindəki* dəyişmələri təsvir edən təsadüfi proseslərin dayanıqlılıq şərtlərini və dayanıqlılıq qiymətlərini (kəsilməzliyinin) verən teoremdir (bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) x i d m ə t s i s t e m l ə r i n i n).

Ən çox öyrənilmiş hal – sistemin işini təsvir edən $v=\{v_n\}$ prosesinin (ardıcıllığının) stasionar «idarəedici» $u=\{u_n\}$ ardıcıllığı ilə $v_{n+1}=f(v_n,\,u_n)$, $n\ge 1$ münasibətlərilə əlaqələndiyi haldır. u_n və v_n vektorları uyğun olaraq $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{R}^l$ fəzalarından qiymətlər alır, $k\ge 1$, $l\ge 1$.

Proseslər üçün D. t.-nin alınması üçün bir neçə yanaşma məlumdur.

I. Y e n i l ə ş m ə l ə r m e t o d u – v prosesinin dayanıqlılıq şərtləri və qiymətlərini almaq üçün metod, bu metod prosesin öz keçmişini qismən «unutqanlığı» xassəsindən istifadə edir (bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; y e n i l ə ş m ə l ə r m e t o d u). Əgər v prosesi regenerar proses olarsa, dayanıqlılıq şərtləri daha sadə şəkil alır (bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) r e g e n e r a t i v p r o s e s l ə r i n).

II. M e t r i k y a n a ş m a – dayanıqlılıq şərtləri və qiymətlərinin alınması üçün ehtimali metrikaların müxtəlif struktur xassələrini istifadə edən yanaşmadır (bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; m e t r i k y a n a ş m a).

III. S ı n a q f u n k s i y a l a r ı m e t o d u (rus. метод пробных функций) – dayanıqlılıq şərtləri və qiymətlərinin Lyapunov tipli köməkçi funksiyaların qurulması vasitəsilə alınması metodudur (bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; s ı n a q f u n k s i y a l a r ı m e t o d u).

Xidmət sistemlərinin dayanıqlılığının müxtəlif metodlarla analiz edilməsinə baxmayaraq, bu metodlarda ümumi cəhətlər çoxdur və bunlar müəyyən mənada bir-birini tamamlayır.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Асимптотические методы в теории масссового обслуживания, М., 1980; [2] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 834–47; [3] З о л о т а р е в В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [4] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [5] К а л а ш н и к о в В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 571–83; [8] Handbuch der Bedienungsheorie, Bd 1, B., 1983.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ; m e t r i k y a n a ş m a **« устойчивости теорема;** м е т р и ч е с к и й п о д х о д; **stability theorem;** m e t r i c a p p r o a c h **»** – xidmət sistemlərinin *dayanıqlılıq* şərtləri və statistik qiymətlərinin alınması üçün ehtimal metrikalarının müxtəlif struktur xassələrindən istifadə edən yanaşmadır. $\{v_n\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^l$-dən olan v_1 təsadüfi kəmiyyəti ilə təyin olunan və

$$v_{n+1}=f(v_n,\,u_n), \quad n\ge 1 \qquad (1)$$

rekurrent münasibətlərilə təyin olunan ardıcıllıq olsun, burada $\{u_n\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^k$-dan olan verilmiş təsadüfi ardıcıllıqdır. $d(X,\,Y)\equiv d(F_X,\,F_Y)$ ilə F_X və F_Y paylanma funksiyaları arasında müntəzəm metrikada məsafə işarə olunmuşdur. Aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər f funksiyası

$$\rho_l(f(u,\,v),\,f(u',\,v')) \le \rho_l(v,\,v') + \rho_k(u,\,u')$$

– Lipşits şərtini ödəyirsə, onda $\{u_n'\}$ ardıcıllığı üzrə (1)-in kömeyilə və v_1' üzrə qurulmuş $\{v_n'\}$ ardıcıllığı üçün

$$d(v_j,\,v_j') \le d(v_1,\,v_1') + \sum_{i=1}^{j-1} d(u_i,\,u_i'), \quad j=2,3,... \qquad (2)$$

bərabərsizlikləri ödənilir, burada ρ_l, ρ_k – uyğun olaraq $\mathbb{R}^l$, $\mathbb{R}^k$-da məsafələrdir. Əgər təsadüfi kəmiyyətlərin hamısı eyni ehtimal fəzasında verilərsə, d metrikası əvəzinə Ki Fan metrikasından istifadə etdikdə, (2) bərabərsizliklər bu halda da doğrudur. Əgər $\{u_n\}$ və $\{u_n'\}$ ardıcıllıqlarındakı təsadüfi kəmiyyətlər küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, (2) bərabərsizlikləri Levi – Proxorov, Dadli, tam variasiya metrikaları üçün də doğrudur.

Metrikaların xassələri məsələnin strukturunu yaxşı «izləyə» bilir (məs., f funksiyası üçün Lipşits şərtinin ödənilməsini). Bu əsas etibarilə zamanın sonlu intervallarında dayanıqlılığın analiz olunmasında aşkar olunur.

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 1, B., 1983; [2] З о л о т а р е в В. М., «Матем. сб», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [3] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986, с. 416.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ; sınaq funksiyaları metodu « **устойчивости теорема;** метод пробных функций; **stability theorem;** test functions method » – xidmət sistemlərinin *dayanıqlılıq* şərtləri və statistik qiymətlərinin Lyapunov funksiyaları tipli köməkçi funksiyaların qurulması ilə alınması metodudur.

Sınaq funksiyaları metodunun əsas nəticələri xidmət sistemini təsvir edən $v = f(u)$ prosesi Markov ardıcıllığı olduğu haldadır, amma daha ümumi fərziyyələrə də baxılmışdır.

$\{\upsilon_n\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^l$-dən olan ardıcıllıqdır, bu ardıcıllıq υ_1 təsadüfi kəmiyyəti və

$$\upsilon_{n+1} = f(\upsilon_n,\, u_n), \quad n \geq 1 \qquad (*)$$

rekurrent münasibətləri ilə təyin olunur, burada $\{u_n\}$ – eyni qanunla paylanmış, qiymətləri $\mathbb{R}^k$-dan olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır. $\{\upsilon_n^{(r)}\}$ ardıcıllıqları hər bir $r = 1, 2, \ldots$ qiymətlərində $\upsilon_1^{(r)}$ təsadüfi kəmiyyəti üzrə qurulur və $\{u_n^{(r)}\}$ ardıcıllığı isə (*)-nun vasitəsilə qurulur. ρ_k, ρ_l ilə uyğun olaraq, $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{R}^l$-də məsafələr işarə olunmuşdur;

$$\varkappa(X,\, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathbf{P}\{\rho_j(X,\, Y) > \varepsilon\} < \varepsilon\}$$

– qiymətləri $\mathbb{R}^j$-dən olan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında Ki Fan metrikasında məsafədir; $j = k, l$; $G(x)$, $x \geq 0$ – elə artan müsbət funksiyadır ki, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/G(n) < \infty$.

Fərz olunur ki, hər bir $N \geq 0$ üçün elə $\delta = \delta(N)$ ədədi və $W_N(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^l$ funksiyası vardır ki, birincisi, bütün $x, y \in \mathbb{R}^l$ üçün $W_N(x, y) \geq N_{\rho_l}(x, y)$ və ikincisi, $\varkappa(u_1,\, u_1^{(r)}) \leq \delta$ olduqda

$$W_N(f(x, u_1), f(y, u_1^{(r)})) - W_N(x, y) \leq \Delta_N(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^l$$

bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilir, burada Δ_N təsadüfi kəmiyyətləri $W_N(x, y) \geq 1$ olduqda

$$\mathbf{M}\,\Delta_N(x,\, y) \leq -1$$

və

$$\sup_{x,\, y} \mathbf{M}\, G\left(\left|\Delta_N(x,\, y)\right|\right) \leq C < \infty$$

münasibətlərini ödəyirlər. Belə bir hökm doğrudur: $r \to \infty$ olduqda $\varkappa(u_1,\, u_1^{(r)}) \to 0$ və $\varkappa(\upsilon_1,\, \upsilon_1^{(r)}) \to 0$ olsun; onda $r \to \infty$ olduqda

$$\sup_{n \geq 1} \varkappa(\upsilon_n,\, \upsilon_n^{(r)}) \to 0$$

münasibəti ödənilir. Levi – Proxorov metrikası və bəzi digər metrikalar üçün analoji münasibətlər ödənilir.

Bu hökmün şərtlərində dayanıqlılıq üçün aşağıdakı kəmiyyəti statistik qiymət doğrudur: $\varkappa(u_1,\, u_1^{(r)}) < \delta_1(\varepsilon)$ olduqda

$$\sup_{n \geq 1} \varkappa(\upsilon_n,\, \upsilon_n^{(r)}) < \varepsilon,$$

burada $\delta_1(\varepsilon) = \delta(N(\varepsilon))$, $N(\varepsilon)$, –

$$\inf_T \{\, T\sqrt{C/N} \;+\; C_1 \sum_{n \geq T} 1/G(n) \,\} = \varepsilon$$

tənliyinin həlli, C_1 isə yalnız C və G-dən asılıdır.

Sınaq funksiyalarının effektiv surətdə tətbiq olunması üçün mühüm addım bu funksiyaların qurulmasıdır. Hissəvi xətti çevirmələrin doğurduqları və xidmət sistemləri nəzəriyyəsində mühüm rola malik olan Markov zəncirləri sinfi üçün sınaq funksiyalarının qurulmasının requlyar metodu vardır. Sınaq funksiyaları metodundan kütləvi xidmət proseslərinin məhdudluğu, çatım anlarının və digər xassələrin qiymətləndirilməsində istifadə etmək olar.

Əd.: [1] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [2] Калашников В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 571–83.

DAYANIQLILIQ TEOREMİ; yeniləşmələr metodu « **устойчивости теорема;** метод обновлений; **stability theorem;** renovations method » – «idarəedici» ardıcıllıqların dəyişmələrinə nəzərən təsadüfi prosesin *dayanıqlılıq* şərtləri və qiymətlərini almaq üçün metoddur və təsadüfi prosesin öz keçmişini qismən «unutqanlığı» xassəsindən istifadə edir (yəni təsadüfi proses müəyyən bir çoxluğa daxil olduqda öz keçmişindən asılı olmur).

Fərz olunur ki, $\upsilon = \{\upsilon_n\}$ prosesi (ardıcıllığı) stasionar «idarəedici» $u = \{u_n\}$ ardıcıllığı ilə

$$\upsilon_{n+1} = f(\upsilon_n,\, u_n), \quad n \geq 1 \qquad (*)$$

münasibətlərilə əlaqəlidir.

A_n, – $[n - L,\, n]$ parçasında υ ardıcıllığı üçün *yeniləşdirici hadisə* olsun. Belə bir hökm doğrudur: əgər indikatorlar ardıcıllığı $\{I(A_n)\}$ stasionardırsa, $\mathbf{P}(A_0) > 0$ olarsa, onda $\boldsymbol{w}_{k+1} = f(\boldsymbol{w}_k,\, u_k)$ bərabərliklərini ödəyən elə $\boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{w}_n\}$ ardıcıllığı vardır ki, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\{\upsilon_{n+k}\} \in B\} \to \mathbf{P}\{\{\boldsymbol{w}_k\} \in B\}$$

münasibəti ödənilir.

Daha sonra, fərz olunur ki, $\{u^{(r)}\}$ – məlum mənada (məs., sonluölçülü paylanmaların zəif yığılması mənada) u prosesinə yığılan stasionar idarəedici proseslər ardıcıllığı; $\{\upsilon^{(r)}\}$ (*) münasibətilə $u^{(r)}$ idarəedici prosesləri üzrə təyin olunan proseslər ardıcıllığı; $\{A_n^r\}$ $\{\upsilon^{(r)}\}$ prosesləri üçün yeniləşdirici proseslər ardıcıllığı; $\{\boldsymbol{w}^{(r)}\}$ $\{\upsilon^{(r)}\}$ üçün limit stasionar proseslər ardıcıllığıdır. Onda, əgər indikatorlar ardıcıllığı $\{I(A_n)\}$ stasionar və $\mathbf{P}(A_0) > 0$ olarsa,

$$\lim_{r \to \infty} \inf\, \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=0}^{k} A_j^{(r)}\right\} \geq \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=0}^{k} A_j\right\}$$

münasibəti ixtiyari $k > 0$ qiymətində ödənilərsə və yeniləşdirici hadisələrin tərifindəki φ_j funksiyaları $(u_1, \ldots, u_{L+j})$-nin paylanmasına nəzərən sanki yəqin kəsilməz olarlarsa, onda $\boldsymbol{w}^{(r)}$-in

sonluölçülü paylanmaları $r \to \infty$ olduqda w-nin paylanmalarına zəif yığılır.

D. t.-də kəmiyyətcə qiymətləndirilmələr də mümkündür, məs.,

$$\sup_{n \geq 1} d\,(\upsilon_n, \upsilon_n^{(r)}) \leq \min_T \max \left\{ \sup_{j \leq T+L} d(\upsilon_j, \upsilon_j^{(r)}), \right.$$

$$\sup_{n \geq T+L} d(\varphi_T(u_{n-T-L}, ..., u_{n-1}), \varphi_T(u^{(r)}_{n-T-L}, ..., u^{(r)}_{n-1})) +$$

$$\left. + 2 \sup_{n \geq 1} \left[\mathbf{P}\left\{ \bigcup_{j=n-T}^{n-1} A_j \right\} + \mathbf{P}\left\{ \bigcup_{j=n-T}^{n-1} A_j^{(r)} \right\} \right] \right\},$$

burada d – Dadli metrikasıdır. Bu qiymət $d(w_1, w_1^r)$ məsafəsi üçün də doğrudur. Digər metrikalarda da analoji qiymətlər almaq mümkündür. $\{u_n\}$ və $\{I(A_n)\}$ ardıcıllıqları stasionar olmadıqları hallarda da oxşar növ qiymətlər almaq olur.

Yuxarıda verilən qiymətlərin birinci iki həddi, öz növbəsində, ehtimal metrikalarının xassələrinin köməyilə qiymətləndirilmədə rahat və münasibdir, lakin sonuncu həddi υ və υ^r proseslərinin calaşdırılması metodu (bax, *Calaşdırı*(ı)*ma*(sı) təsadüfi proseslərin), çatım müddətlərinin qiymətləndirilməsi metodu ilə qiymətləndirilir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, M., 1980; [2] Калашников В. В., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, M., 1980, с. 52–57.

DAYANMA ANI « остановки момент; stopping time » Markov anı, – t-nin bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$ şərtini ödəyən, σ – cəbrlər axını $\{\mathcal{A}_t,\ t \geq 0\}$ olan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş mənfi olmayan $\tau = \tau(\omega)$ (sonlu və sonlu olmayan) təsadüfi kəmiyyətidir. Əgər $t \geq 0$ şərtini ödəyən bütün t-lər üçün $\{\omega : \tau'(\omega) < t\} \in \mathcal{A}_t$ münasibətini ödəyən mənfi olmayan τ' təsadüfi kəmiyyəti varsa, onda τ' təsadüfi kəmiyyəti $\{\mathcal{A}_{t+},\ t \geq 0\}$ axınına nəzərən D. a.-dır, burada $\mathcal{A}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s$. Sağdan kəsilməz $\{\mathcal{A}_t,\ t \geq 0\}$ tam σ – cəbrlər axınına nəzərən D. a.-na misal –

$$\tau_\Gamma(\omega) = \inf\{t \geq 0 :\ \zeta(t;\ \omega) \in \Gamma\}$$

kəmiyyətidir, burada $\zeta(t;\omega)$ təsadüfi prosesi $(M, \mathfrak{B})$ faza fəzasında $\{\mathcal{A}_t,\ t \geq 0\}$ axınına nəzərən proqressiv ölçüləndir və $\Gamma \in \mathfrak{B}$ (adətən, $\inf\{\varnothing\} = +\infty$ olduğu fərz olunur).

Əd.: [1] Делларшери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., M., 1975; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

***DAYANMA ANI** axına nəzərən **« остановки момент** относительно потока; **stopping time** relatively to flow **»** – təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin anlayışlarından biridir: τ – mənfi olmayan, $+\infty$ qiymətini ala bilən, $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət olarsa və bütün $t \geq 0$ üçün $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ olarsa, τ, – $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ axınına nəzərən D. a. adlanır. D. a.-ları Markov anları və ya gələcəkdən asılı olmayan momentlər də adlandırılır.

$[0, \infty)$-da təyin olunmuş hər bir $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi ilə bağlı onunla uzlaşan axın təyin etmək olur. Fərz olunur ki, t anına qədər prosesin trayektoriyaları yalnız $[0, t]$ müddətində müşahidə olunur. Onda təbii olaraq $\mathfrak{F}_t$ σ – cəbri kimi $\{\zeta(s) \in B\}$, $s \leq t$, $B \in \mathfrak{B}$ hadisələrinin doğurduğu σ – cəbr götürülür, burada $(X, \mathfrak{B})$, – $\zeta(t)$ prosesinin faza fəzasıdır. $t \geq 0$ qiymətləri üçün təyin olunmuş $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_t$ σ – cəbrlər toplusu

a) $\mathfrak{F}$ σ – cəbri $\mathbf{P}$ ölçüsünə görə tam σ – cəbrdir (yəni, əgər $A \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(A) = 0$ və $B \subset A$ münasibətlərindən $B \in \mathfrak{F}$ münasibəti ödənilirsə, $\mathfrak{F}$ σ – cəbri $\mathbf{P}$ ölçüsünə görə tam σ – cəbrdir) və ehtimalı sıfra bərabər bütün hadisələr $\mathfrak{F}_0$ σ – cəbrindəndir;

b) $0 \leq s < t$ şərtini ödəyən bütün s və t qiymətlərində $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ münasibəti ödənilir ($\mathfrak{F}_t$ t-nin artması ilə monoton artır);

c) bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$ ($\mathfrak{F}_t$, – t üzrə sağdan kəsilməzdir) şərtlərini ödəyərsə, $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ çoxluğu σ – cəbrlər axını adlanır.

Əgər $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ axını hər hansı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin doğurduğu axındırsa, onda D. a.-ları $\zeta(t)$ prosesinin $[0, \tau]$ parçasında vəziyyəti ilə təyin olunur. Məs., $\zeta(t)$ – kəsilməz təsadüfi proses olarsa, D. a.-ları prosesin hər hansı qapalı çoxluğa çatma anları olur.

τ, – $\{\mathfrak{F}_t\}$ axınına nəzərən D. a. olsun. τ ilə bağlı σ – cəbr, bütün $t \geq 0$ üçün $\{\tau \leq t\} \bigcap A \in \mathfrak{F}_t$ şərtini ödəyən $A \in \mathfrak{F}$ çoxluqlarının σ – cəbri $\mathfrak{F}$ olsun; $\mathfrak{F}_\tau$ σ – cəbri τ anına qədər (τ anı da daxil olmaqla) müşahidə olunan hadisələr çoxluğudur. $\mathfrak{F}_{\tau-}$ σ – cəbri $A_t \in \mathfrak{F}_t$, $A_t \bigcap \{\tau > t\}$ tipli hadisələrin doğurduğu σ – cəbr olsun, onda $\mathfrak{F}_\tau$ σ – cəbri τ anından əvvəlki bütün anlarda baş verən hadisələr σ – cəbridir.

Axına görə D. a.-ları və onlarla bağlı σ – cəbrlərə aid bəzi xassələr aşağıda qeyd olunur.

1) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa, onda $\tau_1 \vee \tau_2$ və $\tau_1 \wedge \tau_2$ təsadüfi kəmiyyətləri də D. a.-larıdır.

2) əgər τ_n $(n = 1, 2, ...)$ – D. a.-larıdırsa, onda $\overline{\lim_{n \to \infty}} \tau_n$ və $\underline{\lim_{n \to \infty}} \tau_n$ kəmiyyətləri də D. a.-larıdır.

3) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa, $\tau_2 < \infty$ olduqda $\tau_1 \leq \tau_2$ olarsa, onda $\mathfrak{F}_{\tau-} \subset \mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_{\tau_2-} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$ münasibəti doğrudur.

4) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa və $\tau_1 \leq \tau_2$ olarsa, onda $\mathfrak{F}_{\tau_1-} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2-}$, $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subset \mathfrak{F}_{\tau_2}$ münasibəti doğrudur.

5) əgər τ_n D. a.-dırsa və $\tau_n \downarrow \tau$ münasibəti ödənilərsə, onda $\mathfrak{F}_t = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$; əgər $\tau_n \uparrow \tau$ olarsa, onda $\mathfrak{F}_{\tau^-} = \bigvee_n \mathfrak{F}_{\tau_n-}$ münasibətləri doğrudur.

6) əgər τ_n D. a.-dırsa və $\tau_n \downarrow \tau$, $\tau_n > \tau$ münasibətləri $\tau < \infty$ olduqda ödənilərsə, onda $\mathfrak{F}_t = \bigcap_n \mathfrak{F}_{\tau_n-}$; əgər $\tau_n \uparrow \tau$, $\tau_n < \tau$ münasibətləri $\tau < \infty$ olduqda ödənilərsə, onda $\mathfrak{F}_{\tau^-} = \bigvee_n \mathfrak{F}_{\tau_n}$ münasibətləri doğrudur.

7) əgər τ_1 və τ_2 D. a.-larıdırsa, onda $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$ üçün

$$A \bigcap \{\tau_2 \le \tau_1\} \in \mathfrak{F}_{\tau_1}, \quad A \bigcap \{\tau_2 < \tau_1\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}$$

münasibətləri doğrudur.

Bu xassələrdən aydındır ki, D. a. ilə bağlı σ – cəbrlər t-nin təsadüfi olmadığı haldakı $\mathfrak{F}_\tau$ σ – cəbrləri kimi olur (bu halda $\mathfrak{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathfrak{F}_s$).

Əgər elə τ_n D. a.-ları ardıcıllığı varsa ki, bu ardıcıllıq üçün $\tau_n < \tau$ və $\tau_n \to \tau$ münasibətləri ödənilir, onda τ-ya ö n g ö r ü l dayanma anı deyilir. Öngörül D. a. olmayan hər bir dayanma anı ö n g ö r ü l m ə z D. a. adlanır.

M i s a l. $\{\mathfrak{F}_t\}, - \{\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}_+, \mathbf{P}\}$ ehtimal fəzasında verilmiş $\zeta(\omega, t) = \mathbf{I}_{\{t > \omega\}}$ təsadüfi prosesinin doğurduğu axın olsun, burada $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathfrak{B}_+$ $\mathbb{R}_+$-in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş Borel σ – cəbri, $\mathbf{P}$, – $\mathfrak{B}_+$-də təyin olunmuş, atomları olmayan hər hansı ehtimal ölçüsüdür. Onda $\tau(\omega) = \omega$ dayanma anıdır, lakin öngörülməz D. a.-dır.

Öngörül D. a.-nın xassələri aşağıdakılardır:

8) əgər τ^* öngörül D. a. və τ D. a.-dırsa, onda $A \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ olduqda

$$A \cap \{\tau^* \le \tau\} \in \mathfrak{F}_{\tau-}, \quad \{\tau^* \le \tau\} \in \mathfrak{F}_{\tau-},$$

$$\{\tau^* = \tau\} = \mathfrak{F}_{\tau-}$$

münasibətləri doğrudur.

9) τ_n öngörül D. a. və $\tau_n \uparrow \tau$ olarsa, onda τ öngörül D. a.-dır; əgər $\tau_n \downarrow \tau$ olarsa və $\tau_n = \tau$ bərabərliyi kifayət qədər böyük n-lər üçün ödənilərsə (belə n, ümumiyyətlə, təsadüfidir), onda τ – öngörül D. a.-dır.

τ – hər hansı D. a., $A \in \mathfrak{F}$ olsun.

$$\tau_A = \begin{cases} \tau, & \omega \in A, \\ +\infty, & \omega \notin A \end{cases}$$

olduğu fərz olunur.

10) τ öngörül D. a.-dırsa, onda τ_A öngörül D. a., yalnız və yalnız, o halda olur ki, $A \in \mathfrak{F}_{\tau-}$ olsun.

Əgər öngörül D. a. τ üçün $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_{\tau-}$ olarsa, onda σ – cəbrlər axını s o l d a n k v a z i k ə s i l m ə z a x ı n adlanır.

Ədd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, Изд. второе, М., 1985.

DAYSON PAYLANMASI « Дайсона распределение; Dyson distribution » – *Viqner paylanmasının* ümumiləşməsidir; ortoqonal invariant Viqner ansamblından (u n i t a r a n s a m b l və b.) fərqli digər invariantlıq xassələrinə malik matrislərin təsadüfi ansambllarında paylanmanın limit spektral sıxlığını xarakterizə edən Viqner paylanmasının ümumiləşməsidir. D. p. üçün səciyyəvi olan keyfiyyət effekti spektral səviyyələrin kənarlaşdırılmasıdır. D. p. Viqner paylanması kimi ağır nüvələrin spektrlərinin təsviri ilə bağlı yaranır.

DEBÜTÜ, ÇOXLUĞUN « дебют множества; debut of a set », $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının ixtiyari altçoxluğu A-nın debütü, – $\omega \in \Omega$ olduqda $D_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$ bərabərliyi ilə verilən D_A funksiyasıdır, bu şərtlə ki, $\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$ boş çoxluq olmasın (yəni əgər verilmiş ω üçün elə $t \in \mathbb{R}_+$ vardır ki, $(t, \omega) \in A$); əgər verilmiş ω üçün bu çoxluq boş çoxluq olarsa, onda $D_A(\omega) = +\infty$ hesab olunur. D. haqqında əsas nəticə ondan ibarətdir ki, əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında $(\mathscr{A}_t)_{t \ge 0}$ σ – cəbrlər axını sağdan kəsilməzdirsə və $\mathscr{A}_t$-yə daxil olan hər bir σ – cəbr $\mathbf{P}$ ölçüsünə görə tam σ – cəbrdirsə, onda $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının ixtiyari proqressiv ölçülən altçoxluğunun debütü $(\mathscr{A}_t)_{t \ge 0}$ axınına nəzərən Markov anıdır. Bax, *Proqressiv ölçülən proses*.

Ədd.: [1] Д е л л а ш е р и К., Емкости и случайные процессы, пер. с англ., М., 1975.

DEFEKT « недоскок; defect », ç a t ı m m ü d d ə t i $\eta(t)$ – semi – Markov prosesi $\zeta(t)$-nin t anından əvvəlki sonuncu bərpa anından sonra keçən müddətdir:

$$\eta(t) = t - \sup\{s \le t : \zeta(s) \ne \zeta(t)\}.$$

D. semi – Markov prosesi ilə birlikdə $(\zeta(t), \eta(t); t \ge 0)$ xətti Markov prosesini əmələ gətirir. Xüsusi halda, paylanma funksiyası $G(t) = \mathbf{P}\{\theta_k \le t\}$, riyazi gözləməsi sonlu $\mathbf{M}\theta_k = m$ olan

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \ge 1$$

bərpa prosesi üçün paylanma funksiyası

$$G^*(t) = \int_0^t (1 - G(s))\, ds/m$$

olan stasionar D. mövcuddur.

DEFEKT a s i m p t o t i k « **дефект** а с и м п т о т и ч е с к и й; a s y m p t o t i c **deficiency** » – bax, *Defekt*(i) k r i t e r i n i n.

DEFEKT(i) d o l a ş m a n ı n, ç a t ı m « **дефект** б л у ж д а н и я, н е д о с к о к; **defect** o f a r a n d o m w a l k / s p e n t w a i t i n g t i m e » – dolaşma prosesindəki hissəciyin sərhədi ilk keçmə anındakı vəziyyətindən əvvəlki vəziyyəti ilə sərhəd arasında məsafəsidir. S_n, $n = 0, 1, \ldots,$ – birölçülü təsadüfi dolaşmanın trayektoriyası, $g(n)$ – verilmiş sərhəd olsun.

$$\gamma_d = g(\eta_g) - S_{\eta_g - 1}$$

kəmiyyəti dolaşma defekti (çatım müddəti) adlanır, burada $\eta_g = \inf\{k \geq 1 : S_k \geq g(k)\}$ – sərhədi ilk keçmə anıdır.

Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \xi_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin sonlu cəmlərinin doğurduğu $S_0 = 0$, $S_1 = \xi_1$, $S_2 = \xi_1 + \xi_2$,..., $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ təsadüfi dolaşması və düzxətli sərhədlər üçün γ_g D. ətraflı surətdə araşdırılmışdır [$\chi_g = S_{\eta_g} - g(\eta_g)$ – təsadüfi *dolaşmanın ekssesi* (*ötüm müddəti*) də]. Düzxətli sərhədlər halında $g(t) = x = \text{const}$ olduqda γ_g, χ_g, η_g funksionalları $\gamma(x)$, $\chi(x)$, $\eta(x)$ ilə işarə olunur. ξ_k toplananları mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda, $\gamma(x) = \gamma_g$, $\chi(x) = \chi_g$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının araşdırılması –

$$\{\gamma(x) \geq u,\ \chi(x) > v\} = \{\chi(x-u) > u + v\}$$

münasibətinə əsasən $\chi(x)$-in, yəni təsadüfi dolaşmanın ekssesinin öyrənilməsinə gətirir. Qeyd olunan münasibət $\mathbf{P}\{\gamma(x) > u,\ \chi(x) > v\}$ ehtimalını $x \to \infty$ olduqda hesablamağa imkan verir (bax, [1] – [3]).

Əgər $a = \mathbf{M}\xi_k < \infty$, $0 < \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_k < \infty$, $\xi_k \geq 0$ olarsa, onda geniş fərziyyələrlə isbat olunur ki, $n \to \infty$, $x \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n,\ \gamma(x) \geq u,\ \chi(x) \geq v\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x\sigma^2 a^{-3}}}\ \varphi\left(\frac{n - x/a}{\sqrt{x\sigma^2 a^{-3}}}\right)\ \frac{1}{a}\ \int_{u+v}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_1^* \geq$$

$$\geq t\}\, dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

münasibəti doğrudur, burada $\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2}\exp(t^2/2)$, ξ_1^* – normalanmış təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [4]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [3] Дынкин Е. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1955, т. 19, с. 247–66; [4] Нагаев А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 410–11.

DEFEKT(i) kriterinin **« дефект критерия; deficiency of a test »** – statistik kriterinin (daha dəqiq, kriterilər ardıcıllığının) digər kriteriyə görə müqayisə xarakteristikası olub, 1-ci və 2-ci növ səhvlərin eyni α və ω ehtimalları ilə alınmasını təmin edən birinci və ikinci kriterilər üçün zəruri olan seçim həcmlərinin fərqi – $d_n = k_n - n$ ilə təyin olunur, burada k_n – birinci kriteri üçün, n – ikinci kriteri üçün seçimin həcmidir. Adətən, elə məsələlər ardıcıllığına baxılır ki, bunlarda α və ω qeyd olunduqda, seçim həcmləri n və k_n qeyri – məhdud artır; əgər bu halda d_n D.-inin limiti $d = \lim d_n$ olarsa, onda d asimptotik defekt adlanır. d_n və d-nin qiymətləri, ümumiyyətlə, tam olmur; seçim həcmi k_n-in tam olmayan qiymətinə «stoxastik interpolyasiya» ilə məna verilir: kriteri $1-\gamma$ və γ ehtimalları ilə $[k_n]$ və ya $[k_n]+1$ sayda müşahidədən istifadə edir, $\gamma = k_n - [k_n]$. İki kriterinin Pitmən asimptotik nisbi effektivliyi 1-ə bərabər olduqda, D.-in asimptotikası daha nümunəvi olur, yəni $k_n/n \to 1$ olur (bax, *Asimptotik effektivlik*(yi) kriterinin). Seçim həcmlərinin nisbətindən fərqə keçmək kriterilərin xassələrindəki fərqləri bu halda aşkar etməyə imkan yaradır.

İlkin hipotezə yaxınlaşan alternativ hipotezlərdə, ən güclü kriterilər ardıcıllığına nəzərən asimptotik effektivliyi 1-ə bərabər asimptotik effektiv kriterilərin D.-nin öyrənilməsi xüsusi maraq doğurur. Bu xassə onu ifadə edir ki, $d_n = o(n)$, lakin, aydın olmuşdur ki, asimptotik effektiv kriterilərin bir çoxunun D. sonludur.

Asimptotik D.-in tapılması asimptotik nisbi effektivliyin tapılmasına deyil, kriteri gücünün daha incə asimptotikasına əsaslanır. Məs., ümumi paylanmaya malik asılı olmayan müşahidələr üzrə $\theta > \theta_0$ alternativinə qarşı $\theta = \theta_0$ hipotezi yoxlanılır və müşahidələrin ümumi paylanmalarının θ-dan ($\theta \in \mathbb{R}$) kifayət qədər asılı $p(x, \theta)$ sıxlığının varlığı fərz olunur. Müşahidələrin sayı n və alternativ hipotez $\theta = \theta_0 + tn^{-1/2}$, $t > 0$ olduqda, kriterinin gücü $\beta_{n,t}$-nin limiti bu alternativ hipotez üçün digər daha güclü kriterinin gücü $\overline{\beta}_{n,t}$-nin limitinə bərabər olarsa, onda kriteri asimptotik effektiv kriteri olur ($\alpha > 0$ qeyd olunduqda). Əgər bu halda $\lim\limits_{n\to\infty} n(\overline{\beta}_{n,t} - \beta_{n,t}) = r(t)$ limiti mövcuddursa, onda asimptotik D. sonludur və o,

$$d = 2r(t(\alpha, \omega))/(u_\alpha + u_\omega)\,\varphi(u_\omega)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, $t(\alpha, \omega) = I^{-1/2}(\theta_0)(u_\alpha + u_\omega)$, $I(\theta) = \mathbf{M}[\partial \ln p(X, \theta)/\partial\theta]^2$ (Fişer informasiyası). Φ və φ uyğun olaraq, standart normal qanunun paylanma funksiyası və paylanmanın sıxlıq funksiyasıdır.

$\beta_{n,t}$ və $\overline{\beta}_{n,t}$ öz ümumi limitlərindən $n^{1/2}$ tərtib hədlərlə fərqlənir. Beləliklə, D.-nin sonlu olması bu hədlərin bərabər olduğunu təxmin edir. Bu xassəli kriterilər 2-ci tərtib asimptotik effektiv kriterilər adlanır. Daha geniş ümumi şərtlərdə asimptotik effektiv kriterilər 2-ci tərtib asimptotik effektiv kriterilərdir. 3-cü tərtib asimptotik kriterilərə $r(t) \equiv 0$, yəni $d = 0$ olan, şərtini ödəyən kriterilərə yalnız elə məsələlərdə təsadüf olunur ki, bu məsələlərdə müntəzəm ən güclü kriterinin varlığı mümkün olsun.

D. anlayışı [1]-də daxil olunmuşdur. D.-in və müxtəlif kriterilər sinifləri üçün onunla bağlı xassələrin öyrənilməsi 20-ci əsrin 70-ci illərinə təsadüf edir (bax, [2] – [4]). [5]-də $\beta_{n,t}$ və $\overline{\beta}_{n,t}$ üçün asimptotik ayrılışın tələb olunmadığı hesablama qaydaları təklif olunmuşdur. Asılı müşahidələr üçün (Markov zənciri) bəzi kriterilərin D.-ləri [6]-da alınmışdır.

Əd.: [1] Hodges J., Lehmann E., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 3, p. 783–801; [2] Pfanzagl J., в сб.: Developments in statistics, v. 3, N. Y. – [a. o.], 1980, p. 1–97; [3] Чибисов Д. М., «Изв. АнУзССР. Сер. физ.-мат. наук», 1982, № 5, с. 18–26; № 6, с. 23–30; [4] Чибисов Д. М., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Warszawa, 16–24, Aug., 1983, v. 2, Warsz., 1984, p. 1063–79; [5] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 2, с. 269–88; [6] Малиновский В. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в. 3, с. 491–504.

DEKODLAMA « декодирование; decoding » – qəbuledən tərəfindən məlumatı verilmiş formada bərpaedən, *kodlamaya* tərs çevirmədir. D. nəzəriyyəsinin problematikasını qəbuledənin təyin etdiyi tələbləri ödəyən D. metodlarının qurulması təşkil edir. Belə tələblərə, məs., *məlumatların bərpası dəqiqliyini*, D.-nın mürəkkəbliyini (bax, *Mürəkkəblik*(y i) k o d l a m a v ə d e k o d l a m a n ı n) və D.-nın gecikməsini aid etmək olar. Dəqiqlik tələbi məlumatın tamamilə (olduğu kimi) bərpası, L sayda məlumat arasında əsl məlumatı özündə saxlayan siyahının göstərilməsi (siyahı D.-sı), ε -dan böyük olmayan $(\varepsilon > 0)$ orta riskli məlumatın bərpası kimi ifadə oluna bilinir. Məs., əgər məlumat X təsadüfi kəmiyyətidirsə, onda belə tələblər: $\mathbf{P}\{\widetilde{X} \neq X\} \leq \varepsilon$ – xətanın ehtimalının ε -dan böyük olmaması; $\mathbf{M}(\widetilde{X} - X)^2 \leq \varepsilon$ – kvadratik orta riskin ε -dan böyük olmaması kimi ifadə oluna bilinər (burada $\widetilde{X}$ – bərpaolunmuş məlumatdır).

Kodlama və D. üçün rabitə kanalı ilə informasiya ötürülməsini və ya verilmiş şərtlərlə onun bərpa dəqiqliyinin saxlanılmasını təmin edən metodların varlığı və ya mövcud olmaması Şennon teoremləri ilə müəyyən olunur. Statistik və qeyri – statistik çoxsaylı müxtəlif D. metodlarından statistik D. metodları kimi doğruyaoxşarlıq maksimumu, aposterior ehtimalın maksimumu üzrə dekodlama metodlarını, *ardıcıl dekodlamanı* və s.-ni qeyd etmək olar. Bunda başqa, çoxsaylı kombinator və cəbri D. metodları: məsafənin minimumu üzrə, majoritar, hədd, Berlekamp alqoritmilə dekodlama və s. metodlar da vardır.

Dekodlamanın fundamental xarakteristikası D.-nı reallaşdıran qurğunun (dekoderin) mürəkkəbliyidir. Lakin konkret məsələdən asılı olaraq mürəkkəblik müxtəlif anlamda yaranır və onun ölçüsü də müxtəlif şəkildə anlaşılır. Məs., $(\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_n)$ hərflər ardıcıllığının (kanalın çıxışında siqnalların) D.-sında – $(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_m)$ bərpaolunan məlumatlar ardıcıllığının alınmasında dekoderin riyazi modeli kimi, adətən, elə funksional elementlərin sxemi götürülür ki, bunların girişinə $(\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_n)$ simvolları daxil olur, çıxışında isə $(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_m)$ alınır; bu halda dekoderin mürəkkəbliyi sxemin elementlərinin sayı ilə təyin olunur. Bu halda D.-nın müxtəlif kodlarının mürəkkəbliyini qiymətləndirmək olur və nisbətən az mürəkkəb olan kodları götürmək olar (məs., azsıxlıqlı kodlar). Mürəkkəblik anlayışına qurğunun yaddaşının tutumu da aiddir ki, ondan D.-da istifadə olunur.

D. nəzəriyyəsinin ideya və nəticələri tətbiqi riyaziyyatın müxtəlif məsələlərində, məs., etibarlı informasiya qurğularının sintezində tətbiq olunur.

Əd.: [1] В а з е н к р а ф т Д ж. – М., Р е й ф ф е н Б., Последовательное декодирование, пер. с англ., М., 1963; [2] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Г а л л а г е р Р., Коды с малой плотностью проверок на четность, пер. с англ., М., 1966; [4] К о л е с н и к В. Д., П о л т ы р е в Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [5] М е с с и Д ж., Пороговое декодирование, пер. с англ., М., 1966.

DEKODLAMA a r d ı c ı l **« декодирование** п о с л е д о в а т е л ь н о е; s e q u e n t i a l **decoding »** – bax, *Ardıcıl dekodla*(n)*ma*.

DEKODLAMA c ə b r i **« декодирование** а л г е б р а и ч е с к о е; a l g e b r a i c **decoding »** – bax, *Cəbri dekodlama*.

DEKODLAMA m ü r ə k k ə b l i y i **« декодирования** с л о ж н о с т ь; c o m p l e x i t y o f **decoding »** – bax, *Mürəkkəblik*(y i) k o d l a m a v ə d e k o d l a m a n ı n.

DEKODLAMA s i y a h ı i l ə **« декодирование** с п и с о ч н о е; l i s t **decoding »** – bax, *Siyahı dekodlaması*.

DEKODLA(N)MA(s ı) b l o k **« декодирование** б л о к о в о е; b l o c k **decoding »** – bax, *Blok dekodla*(*n*)*ması.*

DEKODLA(N)MA d o ğ r u y a o x ş a r l ı q m a k s i m u m u ü z r ə **« декодирование** п о м а к с и м у м у п р а в д о п о д о б и я; m a x i m u m l i k e l i h o o d **decoding »** – *dekodlama* üçün ehtimal modelidir; əgər $\widetilde{y}$ – rabitə kanalı ilə x məlumatını ötürmə nəticəsində alınan siqnal, $p(\widetilde{y}|x)$ – keçid funksiyasıdırsa, onda bərpaolunan məlumat $\widetilde{x} = \arg\max_x p(\widetilde{y}|x)$ bərabərliyindən təyin olunur. Əgər ötürülən bütün məlumatların aprior ehtimalları bərabərdirsə, onda doğruyaoxşarlıq maksimumu üzrə D. səhvinin xətası ehtimalını minimallaşdırır. Konkret blok kodlarının D.-sında doğruyaoxşarlıq maksimumu üzrə yalnız az uzunluqlu blok üçün istifadə oluna bilər, çünki, belə dekodlamanın gücü blokun uzunluğunun çoxalması ilə eksponensial surətdə artır (belə ki, doğruyaoxşarlıq maksimumu üzrə D.-dan istifadə etmək üçün kod sözlərinin yoxlanılması tələb olunur).

Əd.: [1] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974.

DEMODULYASİYA « демодуляция; demodulation » – bax, *Modulyasiya* və *demodulyasiya*.

DEMODULYASİYA k o m p l e k s **« демодуляция** к о м п л е к с н а я; c o m p l e x **demodulation »** – bax, *Kompleks demodulyasiya*.

DEMOQRAFİK STATİSTİKA « демографическая статистика; demographic statistics » – əhalinin və ya onun qruplarının sayını, tərkibini, yerləşdirilməsini və artımını xarakterizə edən məlumatların toplanılması, onların üzərində yenidən işlənilməsi, şərhi və analizi üçün tətbiq olunan statistik metodlarla məşğul olan riyazi statistikanın oblastıdır. «D. s.» termini əhali haqqında ədədi məlumatlar toplusu və bəzən də bu məlumatların toplanılması, onların yenidən işlənilməsi və analizi üzrə praktiki fəaliyyət də adlandırılır.

D. s. əhali haqqında iki tip məlumatlardan istifadə edir: bütün əhalinin sayı və əhalinin ayrı-ayrı demoqrafik və ictimai – iqtisadi qruplarının müxtəlif zaman anlarındakı məlumatlardan, əhalinin və ya onun ayrı-ayrı qruplarında müəyyən zaman intervallarında demoqrafik hadisələr sayı haqqında məlumatlardan. Əhalinin əsas demoqrafik xarakteristikaları cins, yaş, evli olub-olmaması, övladlarının sayı və s. kimi əlamətlər üzrə paylanmalardır. D. s. təhsil, etnik mənsubiyyət, ixtisas kimi sosial xarakteristikalardan da istifadə edir.

Əhali haqqında məlumatların toplanılması və onların araşdırılması sxemi D. s.-nın əsasını təşkil edən demoqrafik hadisələrin xüsusi qayda ilə hesablanılmış tezliklərindən ibarət demoqrafik proseslərin intensivlik göstəricilərilə təyin olunur. İntensivlik göstəriciləri yaşın (ömrün) və ya başqa bir demoqrafik vəziyyətin müddətinin funksiyası kimi anlaşılır, məs., nigahda olma müddəti, sonuncu uşağın doğulmasından sonra keçən müddət, müəyyən bir bölgədə yaşama müddəti. Göstəricilər ya müəyyən bir təqvim dövrü (e n i n ə a n a l i z) və ya hər hansı bir nəsil – keçmişin müəyyən bir dövründə doğulanlar topluları və ya kohortlar (müəyyən əlamətlərinə görə birləşmiş insan qrupu) – müəyyən dövr ərzində müəyyən hər hansı bir vəziyyətə görə birləşmiş insan toplusu, məs., ailə quranlar və ya ayrılanlar üçün nəzərdə tutulur (u z u n u n a a n a l i z). İntensivlik göstəriciləri bir qayda olaraq, τ intervalları üçün hesablanılır; bu intervalların uzunluqları x -lər tamqiymətli illərin sayı ilə intervalın boyuna bərabər addımla götürülür (τ , adətən, 1 və ya 5 il, nadir hallarda

4; 10; 15 il nəzərdə tutulur). Bəzi xüsusi hesablamalarda addımın boyu 1 ay götürülür. Böyük yaş intervalları üçün və ya yaşların bütün şkalası üçün nəzərdə tutulan göstəricilər də tətbiq olunur. Yaş intervalının artması ilə hesablama nəticələri əhalinin yaş tərkibindən daha çox asılı olur, bu asılılığın eliminasiyası (aradan qaldırılması) üçün *standartlaşdırma metodu* tətbiq olunur.

İntensivlik göstəricilərinin iki tipi daha çox istifadə olunur. Demoqrafik hadisənin

$$ {}_{\tau}h_x = {}_{\tau}K_x / P_x \qquad (1) $$

düsturu ilə verilən ehtimalı belə göstəricilərin bir tipidir, burada ${}_{\tau}K_x$, – x-dən $x+\tau$ anına qədər intervalda (məs., bu yaş götürülə bilər) əhalinin baxılan qrupu üçün hadisələr sayı, P_x – onların potensial iştirakçılarının sayıdır. Məs., ölüm ehtimalını müəyyən bir real qrup üçün x-dən $x+\tau$-ya qədər yaş üzrə hesabladıqda D. s.-da bu ehtimal ${}_{\tau}q_x$ ilə işarə olunur; yaş həddi x-dən $x+\tau$-ya qədər olan ölənlərin sayı ${}_{\tau}K_x$ ilə, x yaşına qədər yaşayanların sayı P_x ilə işarə olunur. Ananın yaşı üzrə və ya nigah müddəti üzrə uşağın doğulması analoji təyin olunur. İki və ya daha çox zaman müddətini nəzərə alan mürəkkəb göstəricilərdən daha az isifadə olunur.

Daha sonra

$$ {}_{\tau}K_x = {}_{\tau}K_x \big/ {}_{\tau}T_x \qquad (2) $$

bərabərliyi ilə təyin olunan demoqrafik prosesin əmsalı (intensivlik), məs., ölüm əmsalı, doğum əmsalı digər tip göstəricilərdəndir; burada ${}_{\tau}T_x$, – $(x,\ x+\tau)$ intervalında demoqrafik hadisələri yaşamış potensial iştirakçıların toplusunun yaşadığı insan–zaman həyat sayıdır. Praktik hesablamalarda ${}_{\tau}T_x$ kəmiyyəti təqribi hesablanılır və $(x,\ x+\tau)$ intervalının mərkəzi ilə üst-üstə düşən zaman anında topludakı iştirakçıların sayının intervalın uzunluğu τ-ya hasili ${}_{\tau}T_x$ kimi götürülür. D. s.-da intensivlik göstəricilərinin ehtimalları və əmsallar kimi göstəricilərə bölgüsü bəzən pozulur. «Kiçik yaşda ölüm əmsalı» termini, adətən, ölüm ehtimalı ${}_1q_0$ adlandırılır. «Əmsal» termini kumulyativ xarakteristikalar üçün də istifadə olunur. İki vaxt şkalası – təqvim vaxtı və vəziyyətin müddəti – müəyyən çətinliklər yaradı, belə ki, t-ci ildə, yəni $(t,\ t+1)$ intervalında doğulmuş adam $t+x$-ci ildə ölmüşdürsə, ($x \geq 1$ – illərin tam sayıdır), aydındır ki, burada $x-1$ ilə x arasında yaşda olduğu kimi x-lə $x+1$ arasında yaşda da ölə bilər.

Hesabat sisteminə əsasən əhali haqqında məlumatlar və hadisələr sayı haqqında tam mənada müqayisə həmişə mümkün olmur; buna görə də, zaman daxilindəki demoqrafik hadisələrin və yaş intervallarının müntəzəm paylanmaya malik olması haqqında hipotezlərə əsaslanan təqribi düsturlardan istifadə edilir. $t,\ t+1$ iki təqvim ili ərzində əhalidə ${}_{\tau}k_x^{t,\,t+1}$ əmsalının hesablanması üçün

$$ {}_{\tau}k_x^{t,\,t+1} = ({}_{\tau}K_x^{t} + {}_{\tau}K_x^{t+1}) \big/ 2\ {}_{\tau}S_x^{t+1} $$

standart düsturu məlumdur, burada ${}_{\tau}K_x^{t}$, – t təqvim ilində x, $x+\tau$ yaşları intervalındakı hadisələrin sayı, ${}_{\tau}S_x^{t+1}$, – $t+1$-ci ilin başlanğıcında uyğun qrupdakı əhalinin sayıdır.

Ehtimallar və əmsallarla əlaqələrin nəzəri əsaslandırılması və sonrakı hesablamalar üçün onlara əsaslanan yaşların sonsuz kiçik intervallarında prosesin intensivlik (güc) ölçüsü kimi

$$ \varkappa = \lim_{\tau \to 0} {}_{\tau}k_x = \lim_{\tau \to 0} {}_{\tau}h_x / \tau $$

kəmiyyəti istifadə olunur. Məs., ölüm gücü μ_x (x-dən $x+\Delta x$ yaş intervalında ölüm ehtimalı) ən yüksək tərtibdən kiçilən dəqiqliklə $\mu_x \Delta x$-ə bərabər olur.

x, $x+\tau$ müddətli sonlu intervalda demoqrafik hadisələrin sayı ilkin toplunun sayını dəyişdirən, yəni tərketmə prosesləri kimi digər demoqrafik proseslərin intensivliyindən asılıdır. Məs., yaşlar intervalında fərd ölə də bilər, verilən ərazini tərk (tərketmə prosesi) edə də bilər; belə ki, ölüm növbəti emiqrasiyanı, emiqrasiya isə baxılan ərazidə ölümü istisna edir. Buna görə də, (1)-də hesablanan h ehtimalı digər bu tipli tərketmə proseslərinin intensivliyinin verildiyi şərtində şərti ehtimal və ya asılı ehtimaldır. Prosesin məxsusi intensivliyinin qiymətləndirilməsi üçün tam və ya xalis ehtimaldan istifadə olunur. Bu halda, demoqrafik hadisələrin potensial iştirakçıları toplusunun bircinsliyi haqqında hipotez də daxil olunur və buna görə də, tam ehtimalları ${}^0h^1$ və ${}^0h^2$ olan iki tərketmə (ölüm və ya emiqrasiya nəzərdə tutulur) prosesi üçün ümumi tərketmə ehtimalı ${}^0h = {}^0h^1 + {}^0h^2 - {}^0h^1\,{}^0h^2 = h^1 + h^2$ ədədinə bərabər götürülür. Sonsuz kiçik yaş intervalları üçün göstəricilərdən istifadə edərək

$$ {}_{\tau}h_x^i = \int_0^{\tau} \varkappa_{x+\zeta}^i \exp\left(- \int_0^{\zeta} (\varkappa_{x-\eta}^1 + \varkappa_{x+\eta}^2)\, d\eta \right) d\zeta $$

və

$$ {}_{\tau}^0h_x^i = \int_0^{\tau} \varkappa_{x+\zeta}^i \exp\left(- \int_0^{\zeta} \varkappa_{x+\eta}^i\, d\eta \right) d\zeta \qquad (3) $$

düsturlarını yazmaq olar. $0 < \zeta < \tau$ olduqda $\chi_{x+\zeta}^i$-nin sabit olması hipotezi qəbul olunarsa, onda

$$ {}_{\tau}^0h_x^i = 1 - (1 - {}_{\tau}h_x^i)\, {}_{\tau}K_x^i \big/ ({}_{\tau}K_x^1 + {}_{\tau}K_x^2) $$

olur.

Bu fərziyyələrlə şərti və xalis intensivlik əmsalları üst-üstə düşür, əmsallardan istifadə olunduqda isə bilavasitə xalis ehtimal üçün

$$ {}_{\tau}^0h_x^i = 1 - \exp(-\tau_x k_x^i) $$

ifadəsi alınır.

x, $x+\tau$ yaşlarında hadisələrin müntəzəm paylanmaya tabe olduqları haqqında hipotezlə əmsallardan ehtimallara keçid üçün digər düstur –

$$ {}_{\tau}h_x = \tau\, {}_{\tau}k_x \,/\, (1 + (\tau/2)\, {}_{\tau}k_x) $$

şəklindədir.

Doğum prosesi tərketmə prosesi deyildir; uşağın doğulması təkrarlanan hadisədir, hətta doğum ehtimalı (1) 1-dən böyük ola bilər. Bu halda (3) bərabərlikləri əvəzinə

$$ {}_{\tau}f_x = \int_0^{\tau} \varphi_{x+\zeta} \exp\left(- \int_0^{\zeta} \varkappa_{x+\eta}\, d\eta \right) d\zeta\ , $$

$$_{\tau}f_x = \int_0^{\tau} \varphi_{x+\zeta}\, d\zeta$$

bərabərlikləri doğrudur, burada $_{\tau}f_x$ – doğum ehtimalı, φ – doğum intensivliyi, $\varkappa_x$ – tərketmə proseslərinin toplam intensivliyidir. Əgər $_{\tau}\varphi_x$ doğum əmsalı, $_{\tau}k_x$ isə tərketmə proseslərinin intensivliyi əmsalıdırsa, onda təqribi olaraq

$$_{\tau}f_x = {}_{\tau}\varphi_x[\,1 - \exp(-\tau_{\tau}k_x)\,]\,/\,{}_{\tau}k_x\,,$$

$$_{\tau}f_x = \tau_{\tau}\varphi_x$$

götürülür.

Doğuma təkrarlanmayan proses kimi də baxmaq olar ki, buna görə «doğulma növbəliyi» göstəricisi daxil edərək, i-ci uşağın doğulmasına $i-1$ sayda uşaq olan toplunu tərketmə kimi baxmaq olar.

İntensivlik göstəricilərinin sıraları demoqrafik proseslərin – demoqrafik cədvəllərin, yenidənyaranma prosesinin kumulyativ xarakteristikalarının ədədi modellərinin qurulması üçün və nəhayət, əhalinin proqnozu üçün istifadə olunur.

Demoqrafik cədvəl demoqrafik prosesi (proseslər qrupunu) yaş şkalasının bütün diapazonunda xarakterizə edir. Bu məqsədlə, bir qayda olaraq, ilkin qeyd olunmuş sayı 10^m, $m = 3, 4$ və ya 5 olan model nəslə (kohorta) baxılır və intensivlik göstəriciləri sırası əsasında demoqrafik hadisələrin, nəslin (kohortun) fərdlərinin bu və ya digər demoqrafik vəziyyətdə sayının riyazi gözləmələri, vəziyyətlərdə olma müddətlərinin xarakteristikaları və s. hesablanılır. Bu zaman proses Markov prosesi kimi interpretasiya olunur.

Real nəsil və ya kohort üçün qurulmuş cədvəllərə (məs., kohort cədvəllər) praktikada az təsadüf olunur. Ən çox aparılan hesablamalar müəyyən təqvim dövründə, yalnız müxtəlif real nəsillər üçün əhalinin qeyd olunmuş yaş ehtimallarının sırasına əsaslanır. Bu halda deyilir ki, cədvəl hipotetik nəsil (kohort) üçün nəzərdə tutulmuşdur. Hipotetik nəsil metodu müəyyən bir dövr üçün əhalidə demoqrafik prosesin səviyyəsini kompleks surətdə qiymətləndirməyə imkan verir. Demoqrafik cədvəllər bir və ya bir neçə proses üçün xalis (xalis cədvəllər və ya göstəricilər) ehtimallardan istifadə edildiyi kimi şərti ehtimallardan (birləşdirilmiş cədvəllər və ya göstəricilər) istifadə olunaraq qurulur. Ən sadə cədvəllər tərketmə (ölüm cədvəlləri və xalis evlilik cədvəlləri) modeli üçün və yalnız hadisələrin sayı qeyd olunan (ümumi cədvəllər) modellər üçün cədvəllərdir, məs., doğum cədvəlləri.

Növbəti addım özündə çox əlaməti əks etdirən hadisə cədvəllərinin: ölüm səbəblərini əks etdirən ölüm sayı üçün, ölüm nəzərə alınmaqla nigah və emiqrasiya üçün cədvəllərin – çoxələmətli cədvəllərin tərtib olunmasıdır; ölüm nəzərə alınmaqla tərtib olunan doğum cədvəlləri də bu cədvəllərdəndir. Çoxvəziyyətli cədvəllər daha mürəkkəb quruluşa malikdir: məs., evlilik vəziyyətini və ölüm nəzərə alınmaqla boşanma vəziyyətini əks etdirən cədvəllər «nigahda deyildir» vəziyyətindən «nigahdadır» vəziyyətinə keçid də nəzərə alınmaqla tərtib olunur və əksinə. İnsanın həyatında baş verən demoqrafik hadisələrin demək olar ki, bütün spektrini özündə əks etdirən çoxstatuslu cədvəllər mövcuddur. Çoxregional ölüm cədvəlləri bu tipə aiddir və onlar açıq subəhalilərin qapalı sistemində miqrasiya və ölümü əks etdirməklə tərtib olunur.

Çoxsaylı demoqrafik cədvəllərin statistik surətdə yenidən işlənilməsi doğum və ölümün yaş göstəricilərinin universal və tipik asılılığının analitik və ya ədədi formada təsvir edilməsi üçün çoxsaylı səylər üçün əsas olmuşdur. Əhali qrupları üçün tipik cədvəllər (ВМГ, 1988) daha universal, lakin az dəqiq tipik cədvəllər də mövcuddur (ВМГ, 1955).

Müasir D. s.-da bir qayda olaraq demoqrafik hadisələrin tezliklərinin uyğun ehtimallardan yayınması nəzərə alınmır. $_{\tau}K_x$ kəmiyyətlərinin binomial paylanma qanununa tabe olduğu haqqında hipotezə əsaslanaraq demoqrafik göstəricilərin doğruluğunu qiymətləndirmək üçün səylər edilmişdir. Belə qiymətləndirmələr onu göstərir ki, əhalisi az olan bir sıra ölkələr və regionlar üçün göstəricilərin çoxu o qədər də doğru olmur. Belə göstəricilərin dinamik sıraları isə fərqli olaraq az dəyişkənliyilə səciyyəvidir və bu da binomial paylanma haqqında hipotezi şübhə altına alır. Yaş göstəricilərinin təsadüfi dəyişmələrini müəyyən dərəcədə aradan qaldırmaq məqsədilə D. s.-da yaş sıralarını çəkili ortalar metodu ilə nizamlama geniş surətdə tətbiq olunur; bundan başqa polinomlarla approksimasiya, splayn funksiya və ya xüsusi tip funksiyalarla approksimasiyadan da istifadə olunur.

Demoqrafik cədvəllər hesablanılarkən demoqrafik hadisələrin potensial iştirakçıları toplusunun bircinsliyi hipotezi aşkar və ya qeyri – aşkar surətdə qəbul olunur, lakin, bir qayda olaraq, bu həqiqətdə belə olmur. Topluların bircins olmasına nail olunma onların sayının olduqca azalmasına gətirir və bununla da, göstəricilərin stoxastik xətaları artır. Bir sıra latent (məs., genetik) strukturların təsirini aradan qaldırmaq, ümumiyyətlə, mümkün olmur.

Ədd.: [1] Б о я р с к и й А. Я., Курс демографической статистики, М., 1945; [2] В е н е ц к и й И. Г., Математические методы в демографии, М., 1971; [3] Курс демографии, 3 изд., М., 1985; [4] Демографический энциклопедический словарь, М., 1985; [5] S h r y o c k H. S., S i e g e l J. S., The methods and materials of demography, 4 ed., v. 1–2, Wash., 1980; [6] Model life tables for developing countries, N. Y., 1982.

DENDOQRAM « дендограмма; dendogram » – *təsnifatın iyerarx prosedurlarında* obyektlərin birləşmələrinin və ya bölgülərinin, yaxud obyektlər qruplarının ardıcıllığını təsvir edən qrafdır.

DESİL « дециль; decile » – *kvantilin* xüsusi halı olub, $\alpha = m/10$ tərtib K_{α} kvantilidir; $m = 1, 2, ..., 9$. Əgər D. yeganə olarsa, o, paylanma funksiyasının növü haqqında mülahizə yürütmək üçün yaxşı xarakteristikalardan biri sayılır. $K_{9/10} - K_{1/10}$ kəmiyyəti interdesil genişlik adlanır və səpələnmə dərəcəsini xarakterizə edir.

DESİMASİYA « децимация; decimation », seyrəklənmə, *zaman sırasının* $p>1$ tərtib seyrəklənməsi, – $X(t\Delta)$, $t = 0, 1, ..., N-1$ ardıcıllığının Δ addımlı seçiminin

$$Y(t\Delta) = X(tp\Delta),\ t = 0, 1, ..., [(N-1)/p],\ p>1$$

kimi ifadə olunan dəyişilmiş şəklidir, burada $[\cdot]$ – ədədin tam hissəsini ifadə edir. $Y(t\Delta)$ sırasının Naykvist tezliyi (bax, *Diskretizasiya problemi*) $(2p\Delta)^{-1}$-ə bərabərdir. Tezliklərin bir-biri üzərinə yığılmamasının qarşısını almaq üçün D. $\lambda \geq (2p\Delta)^{-1}$ üçün $\varphi(\lambda) = 0$ ötürücü funksiyalı filtrdən və digər tezliklər üçün $\varphi(\lambda) \neq 0$ olan ötürücü funksiyalı filtrdən keçməzdən əvvəl yerinə yetirilməlidir (bax, *Xətti filtr*). D.-nı bir neçə mərhələ ilə aparmaq olar (kaskad desimasiya). p tərtib ters desimasiya ilkin $X(t)$ sırasından

$$pX(0),\ 0,\ ...,0,\ pX(\Delta),\ 0,\ ...,\ 0,\ pX(t\Delta), ...;$$

$$t = 0, 1, ..., N-1$$

şəklində alınan ardıcıllıqdır.

Tərs D. müxtəlif ardıcıllıqların zaman hesablamalarının uzlaşdırılması məqsədilə tətbiq olunur. Tezliklərin bir-birinin üzərinə yığılmaması üçün tərs D.-dan əvvəl $X(t\Delta)$ sırası $\lambda \geq (2\Delta)^{-1}$ olduqda $\varphi(\lambda)=0$ ötürücü funksiyalı filtrdən, digər hallarda isə $\varphi(\lambda)\neq 0$ ötürücü funksiyalı filtrdən keçirilir.

Sürətli Furye çevirməsinin alqoritmlərinin müxtəlif variantları zaman üzrə D. və tezlik üzrə D.-dır.

Əd.: [1] Отнес Р., Эпоксоп Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982.

DETERMİNİK XAOS NƏZƏRİYYƏSİ « детерминированного хаоса теория; deterministic choas theory » – bax, *Erqodik nəzəriyyə.*

DETERMİNİK KANAL « детерминированный канал; deterministic channel » – çıxış siqnalı giriş siqnalı ilə birqiymətli təyin olunan rabitə *kanalıdır*. Xüsüsi halda, diskret stasionar yaddaşsız D. k. giriş simvolları çoxluğu Y -in çıxış simvolları çoxluğu $\widetilde{Y}$ -də elə φ inikası ilə verilir ki, girişdə $(y)\in Y$ siqnalı çıxışda $\varphi(y)\in\widetilde{Y}$ siqnalına ötürülür. Belə kanalın ötürücülük qabiliyyəti $C=\log_2 M$ düsturu ilə təyin olunur, M φ funksiyasının qiymətləri sayıdır. *Çoxkomponentli determinik kanallar* analoji təyin olunur. Toplayıcı *çoxgirişli kanal* ətraflı tədqiq olunmuşdur.

DETERMİNİK – TAKTLI İNTERVAL « детерминированный тактовый интервал; deterministic tact interval » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

DEVİS BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Дэвиса неравенства; Davis inequalities » – bax, *Burkholder – Qandi – Devis bərabərsizlikləri.*

DƏQİQ AŞAĞI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələrin **« точная нижняя грань** случайных событий; **greatest lower bound** of random events **»** – bax, *Kəsişmə*(si) / *hasil*(i) təsadüfi hadisələrin.

DƏQİQ ENDOMORFİZM « точный эндоморфизм; exact endomorphism » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının $\bigcap T^{-n}\mathscr{A}=\mathfrak{N}$ şərtini ödəyən T endomorfizmidir, burada $T^{-n}\mathscr{A}$, – $\mathscr{A}$ σ – cəbrinin T^n inikasında $A\in\mathscr{A}$ çoxluğunun tam proobrazlarından ibarət σ – altcəbridir, $\mathfrak{N}$, – 0 və 1 ölçülü çoxluqların σ – cəbridir. Əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ Lebeq fəzası olarsa, onda D. e.-in tərifini ölçülən bölgülər terminlərilə ifadə etmək olar; buna görə $\mathscr{A}$ σ – cəbrini Ω fəzasının ayrı-ayrı nöqtələrə bölgüsü ilə, $\mathfrak{N}$ σ – cəbrini isə ona uyğun trivial bölgü ilə əvəz etmək lazımdır. Dar mənada stasionar, Kolmoqorovun sıfır – vahid qanununa tabe olan X_n, $n\geq 0$ təsadüfi ardıcıllığının realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmə D. e.-dir. Bu növ ən sadə D. e. birtərəfli *Bernulli yerinidəyişməsidir.* D. e. termini [1]-də K – avtomorfizm (bax, K – *sistem*) anlayışı ilə analoji daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Рохлин В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 4, с. 499–530; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

DƏQİQ PLAN « точный план; exact design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

DƏQİQ YUXARI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələrin **« точная верхняя грань** случайных событий; **least upper bound** of random events **»** – bax, *Birləşmə*(si) / *cəm*(i) təsadüfi hadisələrin.

DƏQİQ ZOLAQ « точная полоса; exact band » – bax, *Etibarlı zolaq.*

DƏSTƏSİZ ÖLÇÜ « беспучковая мера; bundleless measure » – bax, *İnteqral həndəsə.*

DƏYƏR « цена; value » – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*, *İdarəolunan diffuzion proses*.

DƏYƏR(i) modelin **« цена** модели; **value** of a model **»** – bax, *İdarəolunan Markov zənciri*, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

DƏYƏR(i) oyunun **« цена** игры; **value** of a game **»** – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*.

DƏYƏR FUNKSİYASI « ценности функция; value function » – $(f,\psi)=\int f(x)\psi(x)dx$ skalyar hasilinə nəzərən $Af=g$ stasionar xətti *kinetik köçürtmə tənliyinə* qoşma $A^*\varphi=\psi$ tənliyi üçün *qoşma köçürtmə məsələsinin* həllidir. $(g,\varphi)=(f,\psi)=I_\psi(f)$ eyniliyindən alınır ki, $g(x)=\delta(x-x_0)$ olduqda kinetik tənliyin həlli f_0 üçün $\varphi(x_0)$-in qiyməti $I_\psi(f_0)$-a bərabərdir. Mənbələrin sıxlığı $g(\cdot)$ ixtiyari olduqda, kinetik tənliyin xəttiliyi üzrə $\varphi(x)$-lər x nöqtəsi ətrafında $I_\psi(\cdot)$ funksionalına əlavəni təyin edir, yəni x nöqtəsində [$I_\psi(\cdot)$-yə nəzərən] hissəciyin dəyərini təyin edirlər. D. f. kükrəntilər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır, bunlardan hesablanmaların sürətlə aparılması üçün, o cümlədən, Monte – Karlo metodunda dəyərlilik üzrə modelləşdirmə üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [2] Спанье Дж., Гелбард Э., Метод Монте – Карло и задачи переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1972; [3] Марчук Г. И. [и др.], Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976.

DƏYİŞƏN FƏRQLƏR METODU « переменных разностей метод; variate-difference method » – ilk dəfə $Y_t=f(t)+X_t$, $t=0,\pm1,\ldots$ zaman sırası modelinin, $f(t)$ *trendinin* hamar xarakterli olduğu halında, X_t təsadüfi həddinin dispersiyasını qiymətləndirmək məqsədilə təklif edilmiş metoddur, burada X_t – qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdir və $\mathbf{M}X_t=0$, $\mathbf{D}X_t=\sigma^2$. Sonralar bu metod trendin hamarlılıq dərəcəsini təyin etmək məsələsi ilə bağlı istifadə olunmuşdur. D. f. m.-nun tətbiq olunması o fakta əsaslanır ki, əgər $f(t)$ dərəcəsi r-dən kiçik t olan çoxhədli olarsa, onda $\Delta^r f(t)=0$ olur, burada [$\Delta f(t)=f(t)-f(t-1)$, $\Delta^r f(t)=\Delta(\Delta^{r-1}f(t))$] və $\mathbf{M}\Delta^r Y_t=0$. Bununla yanaşı, σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət

$$V_r=\sum_{t=1}^{T-r}(\Delta^r Y_t)^2\Big/(T-r)C_{2^r}^r$$

düsturu ilə təyin olunur, burada T – zaman sırasının uzunluğudur. İxtiyari trend üçün

$$\mathbf{M}\, V_r = \sigma^2 + \sum_{t=1}^{T-r} (\Delta^r f(t))^2 \Big/ (T-r)\, C_{2^r}^r$$

düsturu doğrudur ($\mathbf{D}\, V_r$-in hesablanması haqqında bax, məs., [1]-ə). V_r tutarlı statistik qiymətdir və geniş fərziyyələrlə $(0,\ 1)$ parametrlərli asimptotik olaraq normal qanunla paylanır.

Hamarlama yolu ilə trendin seçilməsi üçün çoxhədlinin münasib dərəcəsinin seçilməsi haqqında məsələ [fərz olunur ki, bu r dərəcəsi hər hansı ağlabatan $(m\ ,\ q)$ intervalında dəyişir, $0 \le m < q$] aşağıdakı hipotezlərdən birinin seçilməsi məsələsinə gətirilir:

$$H_q : \Delta^q f(t) \neq 0;$$

$$H_{q-1} : \Delta^q f(t) = 0,\ \Delta^{q-1} f(t) \neq 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_{m+1} : \Delta^{m+2} f(t) = 0,\ \Delta^{m+1} f(t) \neq 0;$$

$$H_m : \Delta^{m+1} f(t) = 0.$$

Bu məsələnin həlli üçün kriteri $(V_r - V_{r+1}) \big/ V_{r+1}$ kimi statistikaya əsaslanır.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

DƏYİŞƏN KOD, ZAMAN ÜZRƏ « переменный во времени код; time–varying code » – bax, *Konvolyusion kod.*

DƏYİŞƏNİŞARƏLİ ÖLÇÜ « знакопеременная мера; signed measure » – bax, *Yük.*

DINKİN DÜSTURU « Дынкина формула; Dynkin's formula » – bax, *Markov prosesi*; rezolvent, *İnfinitezimal operator.*

DİAQNOSTİK YOXLAMA Boks və Cenkinsə görə **« диагностическая проверка** по Боксу и Дженкинсу; Box–Jenkins **diagnostic checking »** – *qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta proses* modelinin (ARSO – modelləri) keyfiyyətini yoxlamadır və bu yoxlama ARSO – modelinin müşahidələrdən alınmış məlum x_t, $t = 1, 2, \ldots, n$ zaman sırası şəklinə salınmasında son mərhələdən ibarətdir. Yoxlamanın məqsədi yeni şəklə salınmış modelin yararlılığını onun tərtibi seçildikdən və parametrləri qiymətləndirildikdən sonra təyin etməkdən ibarətdir (bax, *Parametrik model*; spektral sıxlığın identifikasiyası). Boks və Cenkinsə görə D. y.-dan parametrik modelin tərtibinin seçilməsində də, (bax, [4], [5]), xüsusilə, sürüşən orta operator olduğu halda istifadə olunur.

Boks və Cenkinsə görə D. y. (bax, [1]) əsas etibarilə qalıq prosesi

$$\hat{a}_t = (x_t - \bar{x}) - \sum_{j=1}^{p} \hat{\varphi}_j (x_{t-j} - \bar{x}) - \sum_{j=1}^{q} \hat{\theta}_j\, \hat{a}_{t-j}\ ,\quad t = 1, \ldots, n$$

üçün tətbiq olunur, burada $\hat{\varphi}_i$, $\hat{\theta}_j$ yeni şəklə salınan modelin parametrlərinin statistik qiymətləri, $\bar{x}$ – bütün müşahidələrin ədədi ortasıdır; $\bar{x}$, – x_t sırasının sabit olan $\mathbf{M}\, x_t$ orta qiymətinin statistik qiyməti kimi götürülür. Bu yoxlamanın məqsədi – $\hat{a}_t$-nin xassələrinin qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının xassələrindən fərqlilik dərəcəsini müəyyən etməkdən ibarətdir. $t < 1$, $t \le q$ olduqda x_t, $\hat{a}_t$ qiymətləri xüsusi bir üsulla təyin olunur. Əgər qalıq sırası $\hat{a}_t$-nin seçimi korrelyasion funksiyası $r_{aa}(k)$ bütün $|k| > 0$ qiymətlərində sıfırdan olduqca fərqlənmirsə, onda model yararlı sayılır. Bu halda modelin yararlılıq kriterisi

$$\chi^2 = n\,(n+2) \left[\sum_{k=1}^{K} r_{aa}^2 (k) \Big/ (n-k) \right]$$

kəmiyyəti ola bilər ki, o, təqribi olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı $K - p - q$ olan χ^2 – paylanmasına malik olmalıdır (bax, [2]).

Boks və Cenkinsə görə D. y.-da ikinci mərhələ $\hat{a}_t$ qalıq sırasının spektral funksiyasının statistik qiymətinin dispersiyaya görə normalanmış $\hat{a}_t$ ardıcıllığının analizindən ibarətdir. $\hat{a}_t$ – bəyaz küy olduğu halda, bu funksiyanın qiymətləri $(1 - \varepsilon)$ ehtimalı ilə $K_\varepsilon \big/ \sqrt{Q}$ enli zolağın içərisində olur ($Q = (n-2)/2$ və $Q = (n-1)/2$ – uyğun olaraq, cüt və tək n-lər üçün).

$\varepsilon = 0{,}01$; $0{,}05$ və $0{,}10$ qiymətlərinə $K_\varepsilon = 1{,}63$; $1{,}36$ və $1{,}22$ qiymətləri uyğun olur.

$q \neq 0$ və (və ya) analiz olunan sıranın spektrində şiş uclu maksimum olduqda Boks və Cenkinsə görə D. y.-ya parametrlərin statistik qiymətlərinin korrelyasion matrisinin analizini də daxil etmək məqsədəuyğundur, çünki o, yalnız parametrik modelin tərtibinin seçilmə kriterilərinin əsasında seçilmiş modelin yararsızlığını müəyyən edə bilir (bax, [3]).

Boks və Cenkinsə görə D. y. qaydalarından biri kimi, baxılan mərhələdə yeni şəklə salınan modelin tərtibindən böyük tərtibə malik yenidən təyin olunmuş modelin bir sıra məlum müşahidələrinə gətirilmə də ola bilir. Boks və Cenkinsə görə D. y.-nı iqlim dəyişmələrini özündə əks etdirən modellərin keyfiyyətini yoxlamaq məqsədilə istifadə etmək olar (bax, [1]).

m – ölçülü zaman sırası halında diaqnostik yoxlamaya $\hat{a}_t = [\hat{a}_{1t}, \ldots, \hat{a}_{mt}]$ qalıq vektorunun korrelyasion matrislərinin və matrisin xüsusi korrelyasion funksiyasının qurulması və analizi daxildir (bax, [4]).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] Kendall M., Stuart A., The advanced theory of statistics, 4 ed., v. 3, L., 1983; [3] Привальский В. Е., Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры), М., 1985; [4] Lutkeohl H., «J. Time Series Analysis», 1985, v. 6, № 1, p. 35–52; [5] Tsay R., Tiao G., «Biometrika», 1985, v. 72, № 2, p. 299–315.

DİAQRAM METODU « диаграмм метод; diagram method » turbulentlik nəzəriyyəsində – hidrodinamika tənliklərinin həllərinin kükrəntilər nəzəriyyəsinin formal sırasına qarşılıqlıtəsir konstantlarının qüvvət üstləri üzrə – Reynolds ədədi üzrə ayrılışının ayrı-ayrı hədlərinin Feynman diaqramı şəklində qrafik təsvirinə əsaslanan metoddur. Diaqramın xassələri turbulent axının axtarılan kəmiyyətlərini

naməlumlar kimi özündə saxlayan qapalı inteqral tənliklərin alınması məqsədilə, sıranın hissəvi cəmlənməsinə imkan yaradır.

Əd.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967; [2] Гледзер Е. Б., Монин А. С., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 3, с.111–59.

DİAQRAM TEXNİKASI « диаграммная техника; diagram expansion techniques » – Qauss vektorlarının funksionallarının momentləri və semiinvariantlarının qraflar üzrə cəmlər şəklində təsviridir. Əsas etibarilə Evklid kvant meydan nəzəriyyəsində istifadə olunur. Obrazlı təfəkkür və hesablamaların əsas elementidir və aşağıdakı düstura əsaslanır. $\zeta(x)$, – $\mathbb{R}^d$-də verilmiş, riyazi gözləməsi sıfra bərabər kəsilməz Qauss meydanı olsun. Onda ixtiyari $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ məhdud oblastı üçün

$$\mathbf{M} \int_{\Lambda} \zeta^{n_1}(x_1) \dots \zeta^{n_k}(x_k)\, dx_1 \dots dx_k =$$

$$= \sum_{G} \int \Pi_l \, \mathbf{M}\,[\, \zeta(x_{i(l)})\ \zeta(x_{j(l)})\,]\, dx_1 \dots dx_k$$

bərabərliyi doğrudur, burada cəmləmə təpələri $x_1, \dots, x_k$, tilləri sayı $(n_1 + \dots + n_n)/2$ sayda olan düyünlərli bütün qraflar (diaqramlar) üzrə aparılır, hər bir i-ci təpədən isə n_i sayda til çıxır; $x_i(l)$, $x_j(l)$, – l tilinin təpələridir. D. t.-nın ehtimali aspektləri [1] – [3]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [2] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [2] Малышев В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 111–86.

DİFFERENSİAL ENTROPİYA « дифференциальная энтропия; differential entropy » – paylanmasının sıxlıq funksiyası olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün *entropiya* anlayışının formal analoqudur. D. e. nisbi entropiya və ya kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin entropiyası kimi də adlandırılır. Paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olan, $x \in \mathbb{R}^n$, n – ölçülü ξ təsadüfi kəmiyyətinin D. e.-sı

$$h(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\ \log\ p(x)\, dx$$

düsturu ilə təyin olunur.

D. e. diskret təsadüfi kəmiyyətlərin entropiyasının xassələrindən çoxuna malikdir, lakin o, mənfi qiymətlər də ala bilir və koordinat sisteminin dəyişilməsinə nəzərən invariant deyildir. D. e. anlayışı müxtəlif nəzəri – informasion xarakteristikaların, ilk növbədə, informasiya miqdarının hesablanmasında səmərəlidir.

Əd.: [1] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М., «Тр. 3-го Всесоюзн. Матем. съезда», 1958, т. 3, с. 300–20; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

DİFFERENSİAL OPERATOR, TƏSADÜFİ ƏMSALLARLI; spektral nəzəriyyə **« дифференциальный оператор со случайными коэффициентами;** спектральная теория; **differential operator with random coefficients / random differential operator;** spectral theory of **»** – $\mathbb{R}^n$-də

$$A = A_\omega = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x, \omega)\, D_x^\alpha, \qquad (1)$$

şəklində təsadüfi operatordur, burada $x \in \mathbb{R}^n$, $D_x = c^{-1}\partial/\partial x$, α – multiindeks [yəni $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_j – tam ədədlərdir, $\alpha_j \ge 0$], $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, ω, – Ω ehtimal fəzasının nöqtəsidir, Ω-da n – ölçülü T_x zamanı ilə hər hansı dinamik sistem verilmişdir; $\Omega \to \Omega$, belə ki, $a_\alpha(x+z, \omega) = a_\alpha(x, T_z(\omega))$, $x, z \in \mathbb{R}^n$) bütün ω-lar üçün ödənilir, yəni a_α əmsalları təsadüfi bircins meydan əmələ gətirir (bax, [1], [2], [6], [8], [9], [13] – [15], [17]). Bu sonuncu müddəa

$$U_z\, A_\omega U_{-z} = A_{T_z}(\omega) \qquad (2)$$

operator münasibətilə eynigüclüdür və A operatorunun bütün funksiyaları üçün də ödənilir, məs., A özü-özünə qoşma operatordursa, onun spektral proyektorları üçün $\omega \in \Omega$ təsadüfi parametrindən asılı ixtiyari B_ω operatorunun nüvəsi (ümumiləşmiş) $K_B = K_B(x, y, \omega)$ terminlərilə (2) şəklində münasibət aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$K_B(x + z, y + z, \omega) = K_B(x, y, T_z\,\omega),$$
$$x, y, z \in \mathbb{R}^n. \qquad (2')$$

Əgər B_ω $(2')$ düsturunu və $K_B(0, 0, \cdot) \in L'(\Omega)$ münasibətini ödəyən, K_B nüvəsinə malik təsadüfi inteqral operatoru olarsa, onda Birkhofun erqodik teoreminə görə

$$\mathrm{tr}_R\, B = \mathbf{M}_x\{\, K_B(x, x, \omega)\,\} =$$

$$= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^n} \int_{|x_j| \le L/2} K_B(x, x, \omega)\, dx \qquad (3)$$

təsadüfi izi təyin olunmuşdur. Erqodik halda ($\{T_x\}$ sistemi erqodik olduqda) $\mathrm{tr}_R\, B$ təsadüfi olmur (bütün ω-lar üçün ω-dan asılı olmur). Fərz olunur ki, (1) operatorunun əmsalları a_α-lar öz törəmələri ilə demək olar ki, bütün ω-lar üçün məhduddurlar və A müntəzəm elliptik operatordur. Onda erqodik halda A_ω təsadüfi operatorunun spektri $\sigma(A_\omega)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$-də təsadüfi olmur. $L^2(\Omega)$-da A operatorunun təsirini təyin etmək olar, buna görə differensiallanma dinamik sistemin generatorları ilə əvəz olunmalıdır, yəni

$$A\, u(\omega) = \left(\sum_{|a| \le m} a_\alpha(x, \omega)\, D_x^\alpha \right) \quad \text{və} \quad (T_x\,\omega)\big|_{x=0}.$$

Əgər $\sigma_\Omega(A)$ bu operatorun spektri olarsa, onda o, demək olar ki, bütün ω-lar üçün $L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$-də A_ω spektri ilə üst-üstə düşür, burada Γ, – $\{T_x\}$ dinamik sisteminin periodlarının şəbəkəsidir (bax, [4]).

Fərz olunur ki, bundan başqa A_ω operatoru formal olaraq özü-özünə qoşma operatordur. Onda spektri

$$N(\lambda) = \lim_{V\to\infty} N_V(\lambda)/|V| \qquad (4)$$

normalanmış paylanma funksiyası ilə xarakterizə etmək olar, burada V, – $\mathbb{R}^n$-də hamar sərhədi olan məhdud oblastdır, $N_V(\lambda)$, – V-də, hansısa özü-özünə qoşma sərhəd şərtlərilə, A_ω operatorunun məxsusi qiymətlərinin adi paylanma funksiyasıdır, $|V|$, – V oblastının həcmidir, $V\to\infty$ isə onu ifadə edir ki, V oblastı homotetik böyüyərək, bütün fəzanı doldurur. Erqodik halda $N(\lambda)$ funksiyası təsadüfi olmur. $\sigma(A_\omega)$ spektri $N(\lambda)$ funksiyasının artım nöqtələrinin çoxluğu ilə üst-üstə düşür. Bundan başqa, $N(\lambda) = \mathrm{tr}_R E_\lambda$, burada E_λ, – A_ω operatorunun spektral proyektorudur. $N(\lambda)$ funksiyası üçün diskret spektrin adi məxsusi qiymətləri üçün Kurant prinsipinə analoji variasion prinsip mövcuddur (bax, [1]).

$\lambda\to+\infty$ olduqda $N(\lambda)$ funksiyasında asimptotika tapılır. Bu asimptotika adi spektral nəzəriyyədə Veyl düsturu ilə verilir:

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n}\,\mathbf{M}_x\,\mathrm{mes}\,\{\xi\colon \xi\in\mathbb{R}^n,$$
$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,\omega)\,\xi^\alpha < \lambda\} + O(\lambda^{(n-1)/m}) =$$
$$= c\lambda\, n/m + O(\lambda^{(n-1)/m})$$

(bax, [1], [6], [11]). Bir sıra modellər hallarında spektrin aşağı sərhədində $N(\lambda)$-nın asimptotikasını tapmaq mümkün olur, bu sərhəd əksər hallarda fluktuasion sərhəd adlanır; bu asimptotika artıq modelin seçilməsindən olduqca asılı olur (bax, məs., [10], [12] – [14], [16] – [18]).

(4) tipli limitə keçiddən bir sıra mühüm spektral invariantların alınmasında istifadə etmək olar (bax, [1], [2]).

Bəzi hallarda daha ümumi, eyni zamanda $V\to\infty$, $\lambda\to\infty$ (və ya $\lambda\to 0$) limit keçidini ifadə edən və ortalanma nəzəriyyəsi ilə sıx bağlı asimptotikalar da tapmaq olur (bax, [3]).

Ümumi özü-özünə qoşma olmayan, təsadüfi elliptik differensial matris (yəni vektor – funksiyalar fəzasında təsir edən) operatorlar üçün indeks nəzəriyyəsini qurmaq olur, erqodik halda bu indeks həqiqi ədəd olub, $\mathrm{ind}_R A = \mathrm{tr}_R N_A - \mathrm{tr}_R N_{A^*}$ düsturu ilə verilir, burada A^*, – A operatoruna formal qoşma operatordur, N_A və N_{A^*}, – $\ker A$ və $\ker A^*$-da uyğun olaraq ortoqonal proyeksiyalama operatorlarıdır (matris operatoru halında tr_R izi (3)-ə analoji düsturla, lakin matris izinin götürülməsi əlavə olunmaqla alınır).

Təsadüfi potensiallı Şrödinger operatoru (bax, *Şrödinger tənliyi* təsadüfi potensiallı) təsadüfi əmsallarlı D. o.-un mühüm xüsusi bir halıdır, bu zaman bir sıra hallarda (xüsusilə də, birölçülü halda) olduqca dəqiq və incə nəticələr alınmışdır (bax, [5], [6], [8], [9]).

Əd.: [1] Гусев А. И., «Матем. сб.», 1977, т. 104, № 2, с. 207–26; [2] Гусев А. И., Шубин М. А., в сб: Предельные теоремы для случайных процессов, К., 1977, с. 93–107; [3] Козлов С. М., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 5, с. 185–86; [4] Козлов С. М., Шубин М. А., «Матем. сб.», 1984, т. 123, № 4, с. 460–76; [5] Молчанов С. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1978, т. 42, № 1, с. 70–103; [6] Пастур Л. А., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 1, с. 3–64; [7] Федосов Б. В., Шубин М. А., «Матем. сб.», 1978, т. 106, с. 108–40, 455–83; [8] Carmona R., «Acta Applicandae Math.», 1985, v. 4, № 1, p. 65–91; [9] Carmona R., Random Schrödinger operators, Ĕcole d' ete de probabilités XIV, Saint Flour, 1984, p. 123; [10] Donsker M. D., Varadhan S. R. S., «Communs Pure and Appl. Math.», 1975, v. 28, № 4, p. 525–65; [11] Богородская Т. Е., Шубин М. А., «Труды семинара им. И. Г. Петровского», 1986, в. 11, с. 98–117; [12] Гренкова Л. Н., Молчанов С. А., «Функциональный анализ и его прилож.», 1988, т. 22, № 2, с. 73–74; [13] Пастур Л. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 25, М., 1987, с. 3–67; [14] Pastur L. A., «Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys.», 1987, v. 6, p. 1–112; [15] Cycon H. L., Froese R. G., Kirsch W., Simon B., Schrödinger operators: with applications to guantum mecha-nics and global geometry, B. – [a. o.], 1987, p. 319; [16] Kirsch W., Martinelli F., «Communs. Math. Phys.», 1983, v. 89, p. 27–40; [17] Martinelli F., Scoppola E., Introduction to the mathematical theory of Anderson localization, Bologna, 1987; [18] Simon B., «J. Stat. Phys.», 1987, v. 46, № 5/6, p. 911–18.

DİFFERENSİALLANMASI, SİSTEMİN « дифференцирование системы; differentiation system » – elə çoxluqlar sistemidir ki, bunlar üzrə mütləq kəsilməz hesabi – additiv çoxluq funksiyalarının differensiallanması mümkündür; bu differensiallanma nəticəsində bu funksiyaların Radon – Nikodim törəmələri alınır. Daha dəqiq, (Ω, S, μ) – ölçülü fəza, P, – Ω-da μ – ölçülü çoxluqların hər hansı sistemi olsun. Əgər hər hansı mütləq kəsilməz (μ ölçüsünə nəzərən) hesabi – additiv Φ funksionalı üçün

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(Z_n)}{\mu(Z_n)} = \Phi'_P(x)$$

bərabərliyi sanki hər yerdə ödənilərsə, P, – Ω-da differensiallanma sistemidir, deyilir, burada x, – Ω-nın ixtiyari nöqtəsi, f, – Φ funksionalının Radon – Nikodim törəməsi (yəni $f = \frac{d\Phi}{d\mu}$), $(Z_n)_{n\in N}$ ailəsi isə x nöqtəsinə topalaşan (μ ölçüsü mənada), P sistemindən olan çoxluqların ixtiyari ardıcıllığıdır.

P çoxluqlar sisteminin Ω-da differensiallanma sistemi olması üçün aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi zəruri və kafidir:

1) $Y\in S$ ixtiyari çoxluq olduqda, Y-in demək olar ki, hər bir nöqtəsi Y üçün (P sisteminə nəzərən) sıxlıq nöqtəsidir;

2) ixtiyari mütləq kəsilməz (μ ölçüsünə nəzərən) hesabi – additiv Φ funksionalı üçün

$$\overline{\Phi'_P}(x) < +\infty, \quad x\in\Omega$$

bərabərsizliyi Ω-da sanki hər yerdə doğrudur; Φ'_P, – Φ funksionalının P sisteminə nəzərən yuxarı törəməsidir.

Differensiallanma sistemlərinin mühüm xüsusi halı 1) şərtini ödəyən Vitali sistemləridir. 1) şərtinin özü çox vaxt sıxlıq nöqtələri haqqında teorem adlandırılır.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [3] Харазишвили А. Б., Топологические аспекты теории меры, К., 1984.

DİFFERENSİALLANMASI, TƏSADÜFİ PROSESİN « дифференцирование случайного процесса; differentiation of a random process » – bax, *Təsadüfi proses*.

DİFFUZ ÖLÇÜ « **диффузная мера; diffuse measure** » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

DİFFUZİON PROSES « **диффузионный процесс; diffusion process** » – realizasiyaları kəsilməz, doğuran operatoru differensial operator olan *ciddi Markov prosesidir.* Bu, tərifin ümumi ideyasıdır və bu tərifdən digər konkret təriflər doğuran operatorun güclü *infinitezimal operator* və ya klassik differensial operator və ya bircins sərhəd şərtlərli bu və ya digər mənada xətti differensial operator kimi qəbul olunmasından və proses oblastın xaricinə çıxdığı ana qədər və ya onun kəsildiyi ana qədər bütün realizasiyaların kəsilməz olmaları tələbindən asılı olaraq alınır. Xüsusi halda, $\mathbb{R}^r$ fəzasında klassik D. p. realizasiyaları kəsilməz, infinitezimal operatoru

$$A_t f(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

düsturu ilə verilən Markov prosesi kimi təyin olunur. $b_i(t, x)$ apar ı əmsalları, $a_{i,j}(t, x)$ (müsbət müəyyən matrisi təşkil edən) – diffuziya əmsalları adlanır.

Diffuzion proseslərin keçid ehtimalları və sıxlıq funksiyaları üçün Kolmoqorov düz (Fokker – Plank tənliyi də adlandırılan) və tərs tənlikləri ödənilir. Keçid ehtimalının sıxlıq funksiyası $p(s, x, t, y)$ -in Lebeq ölçüsünə nəzərən varlığı fərz olunduqda klassik D. p. aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} b_i(s, x) \frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial x_i \partial y_j} = 0$$

Kolmoqorov tərs tənliyi;

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i(t, y) p(s, x, t, y)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (a_{ij}(t, y) p(s, x, t, y))$$

Kolmoqorov düz tənliyi.

Düz tənlik $t = s$ olduqda $\delta(y - x)$ başlanğıc şərtilə, tərs tənlik $s < t$ olduqda sonuncu $\delta(x - y)$ şərtilə həll olunur.

[1], [2]-də tərifin digər variantları da şərh olunmuşdur – birölçülü halda zamana görə bircins, kəsilməz realizasiyalarlı ciddi Markov prosesləri araşdırılır ki, bu zaman bunların infinitezimal operatorları ümumiləşmiş differensial operatorlar olur.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [2] Ито К., Маккин Г. П., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения, К., 1968.

DİFFUZİON PROSES əksedici sərhədli « **диффузионный процесс** с отражением на границе; **diffusion process** with form reflection the boundary » – bax, *Markov prosesi*; sərhəd şərti.

DİFFUZİON PROSES idarəolunan « **диффузионный процесс** управляемый; controlled **diffusion process** » – bax, *İdarəolunan diffuzion proses*.

DİFFUZİON PROSES qrupda « **диффузионный процесс** на группе; **diffusion process** on a group » – qiymətləri proyektiv və ya sonluölçülü Li qrupundan olan kəsilməz Markov prosesi $\zeta = \zeta(t)$ -dir; bu prosesin $G \times \mathscr{B}$ fəzasında ($\mathscr{B} = \mathscr{B}(G)$ G -də Borel σ – cəbridir) təyin olunmuş keçid ehtimal ölçülərinin ailəsi $\{\mu_{s,t} | 0 \le s \le t, (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$ güclü $\tau(C)$ operator topologiyasında (G -də kəsilməz finit funksiyalar fəzası C -yə görə) differensiallanan, G -də təsir edən infinitezimal operatoru A

$$A \equiv \frac{\partial^-}{\partial s} T(s, t)\Big|_{t=s} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} [T(s-h, s) - E]$$

münasibətilə ifadə olunan, ehtimal operatorları $T(s, t) = T_{\mu_{s,t}}$ ikiparametrik

$$T(s, t) f(g) = \mu_{s,t}(g, f) = \int_G f(h) \mu_{s,t}(g, dh);$$

semi – qrupunu (xemiqrupunu) doğurur; A operatorunun təyin olunma oblastı, $s \ge 0$ olduğu halda, G -də kompakt daşıyıcılarlı və iki dəfə kəsilməz differensiallanan funksiyaların C_0^2 fəzasını özündə saxlayır.

$T(s, t)$ xemiqrupu

$$\frac{\partial^-}{\partial s} u + A u = 0 \qquad (1)$$

evolyusion tənliyini ödəyir, burada $u \equiv u(s, g; t) = T(s, t) f(g)$ və $\lim_{s \uparrow t} u(s, g, t) = f(g)$ bütün $f \in C$ üçün ödənilir, (1)-in həlli D. p.-in infinitezimal operatoru A verildiyi halda $T(s, t)$ -ni bərpa etməyə imkan verir.

(1) tənliyinin həlli aşağıdakı metodlarla:

1) Banax fəzalarında ümumi şəkilli xemiqrupların evolyusion tənlikləri üçün işlənilmiş, texnikaya əsaslanmış nəzəri–operator metodu; 2) A operatorunun C -də sıx C_0^2 altfəzasına daralmasından istifadə edən analitik metod; 3) ζ üçün stoxastik differensial tənliyin həllini C^∞ çoxobrazlısında nəzərdə tutan və ya $\mathfrak{g}$ Li cəbrində lokal D. p.-lərin bu cəbrin Li qrupuna eksponensial inikasının köməyilə ζ -nın multiplikativ stoxastik inteqral kimi qurulmasını birbaşa nəzərdə tutan ehtimal metodu ilə həyata keçirilir.

Klassik metodlara əsaslanan analitik metodlar belə bir faktdan istifadə edir: infinitezimal A operatorunun C_0^2 altfəzasına daralması A^d (ζ prosesinin doğuran operatoru adlandırılan) 2-ci tərtib elliptik differensial operatordur:

$$A_m^{\partial} \equiv \sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}^{[m]}(s,\,g)\,D_g^i D_g^j \;+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} b_i^{[m]}(s,\,g)D_g^i \;+ c(s,\,g)\;. \qquad (2)$$

Burada $A_m^{\partial} = \hat{p}_m(A^{\partial})$, $\hat{p}_m$, – G-də solinvariant differensial $\mathscr{D}(G)$ operatorlarının cəbrinin Li qrupunda m – dim. – ölçülü differensial $\mathscr{D}(G_m)$ operatorlarının cəbrinə kanonik proyeksiyasıdır,

$$G = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} G_m, \quad \mathfrak{g} = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}_m,$$
$$C_0^k(G) = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} C_0^k(G_m)$$
$$\mathscr{D}(G) = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}(G_m)$$

– uyğun obyektlərin sonluölçülü $(G_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Li qrupunun və $(\mathfrak{g}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Li cəbrinin proyektiv limitləridir, $C_0^k(G_m)$ – kompakt daşıyıcılarlı k dəfə kəsilməz differensiallanan funksiyaların fəzasıdır, $(D^i)_{1\le i\le m}$, – $G_m = p_m(G)$ Li qrupunun $\mathfrak{g}_m = d\,p_m(\mathfrak{g})$ Li cəbrinin bazisi, $\mathbb{N}$ – müsbət tam ədədlər çoxluğudur.

ζ prosesinin infinitezimal

$$(a_{ij}^{[m]},\; B_i^{[m]},\; c\,)_{1\le i,\,j\le m,\,m\in\mathbb{N}}$$

xarakteristikaları onun doğuran A^{∂} operatorunu birqiymətli təyin edir və uyğun olaraq diffuziya əmsalı, aparı əmsalı və qırılma ehtimalının sıxlığıdır; aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$a_{ij}^{[m]} = A_m^{\partial}(\Delta_i\Delta_j), \quad B_i^{[m]} = A_m^{\partial}(\Delta_i), \quad c = A_m^{\partial},$$

burada $\Delta_i(g,\,h) = x^i(h) - x^i(g)$, $(x^i(h))_{1\le i\le m}$, – $g\in G$ elementinin N_g ətrafında $p_m(h)\in G_m$ elementinin lokal koordinatlarıdır, $p_m : G \to G_m$, –

$$G = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} G_m$$

qrupunun proyektiv sisteminin kanonik proyeksiyasıdır.

Hölder və infinitezimal xarakteristikaların İto mənada lokal məhdudluğu və bütün $m\in\mathbb{N}$ qiymətlərində $\left\|a_{ij}^{[m]}(s,\;t)\right\|$ matrislərinin ciddi müsbət müəyyənliyi şərtlərində $H=[0,\infty)\times G$ layında

$$\frac{\partial}{\partial s}\,u^{[m]} + A_m^{\partial}u^{[m]} = 0 \qquad (3)$$

parabolik tənliyinin (Kolmoqorov tərs tənliyinin) yeganə fundamental elə $u^{[m]}(s,\;g,\;t,\;h)$ həlli vardır ki,

$$u^{[m]}(s,\;g;\;t) = \int_{G_m} u^{[m]}(s,\,g,\,t,\,h)\;f(h)\;d_0^{[m]}h,$$

$$\lim_{s\uparrow t}\;u\,(s,\,g;\,t) = f(g),$$

bütün $f\in C$ üçün $(s,\;g)\in H$ üzrə hamar həldir, burada $d_0^{[m]}h$ – hər hansı $s_0\ge 0$ üçün G-də $a_{ij}(s_0,\;h)$ ilə doğurulmuş $d_0^{[m]}r(h)$ Riman metrikasına nəzərən G_m-də həcm elementidir. (3) tənliyinin fundamental həlli standart tərzdə $G = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} G_m : u^{[m]} = \hat{p}_m(u) = u\circ p_m$ qrupuna bütün $m\in\mathbb{N}$ üçün köçürülür və bu həll G-də ζ prosesinin $\mu_{s,t}(g,\,\Gamma) = \int_{\Gamma} u(s,\;t,\;h)\,d_0 h$ keçid ehtimal ölçüsünün sıxlığıdır. Li qruplarında və hamar çoxobrazlılarda 2-ci növ kəsilməsi olmayan stoxastik kəsilməz Markov proseslərinə alternativ metodları tətbiq etdikdə

$$L(u)=0\,, \quad L \;\equiv A^{\partial} + A^{\Sigma} + \frac{\partial}{\partial s} \qquad (4)$$

inteqro – differensial tənliyinin fundamental həllinin varlığı və yeganəliyini isbat etmək olur, burada A^{Σ} operatoru prosesin sıçrayışlarını ifadə edir və

$$A_m^{\Sigma} f(g) \;=\; \int_{G_m\setminus\{g\}} \left\{ f(h) \;- f(g) \;- \frac{\rho(g,\,h)}{1+\varphi\,(g,\,h)}\times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(h)\;D^i h(g) \right\} \frac{1+\varphi(g,\;h)}{\varphi(g,\,h)}\;\eta\,(s,\,g;\,dh)\,. \qquad (5)$$

$A^{\partial} + A^{\Sigma}$ operatoru qiymətləri hamar çoxobrazlılar və Li qruplarından olan proseslərə sonsuz bölünən qanunlar üçün kanonik Levi – Xinçin ifadəsini ümumiləşdirir, bu halda (4) tənliyinin fundamental həlli ζ prosesinin $\mu_{s,t}$ keçid ehtimal ölçülərinin sıxlığıdır.

Li qrupunda D. p.-nin təsnifatı uyğun doğuran operatorların xassələrinə əsaslanır.

Əgər ζ D. p.-nin xemiqrupunun operatorları $T(s,\;t)$, G-nin elementlərinə bütün sol l_g yerinidəyişmələri ilə kommutasiya olunurlarsa, ζ D. p. asılı olmayan (sağ invariant) artımlarlı (və ya sol invariant) proses adlanır. ζ D. p., yalnız və yalnız, onun doğuran operatoru A^{∂}, $\mathscr{D}(G)$-də yerləşdiyi halda solinvariantdır. Solinvariant ζ D. p.-nin xemiqrupunun $T(s,\;t)$ operatorları ilə G qrupunun kompakt altqrupu K-nın elementlərinə bütün r_g – sağ yerinidəyişmələri kommutasiya olunurlarsa, solinvariant ζ D. p., – kompakt invariant (və ya K–sağ invariant) proses adlanır. Solinvariant D. p., yalnız və yalnız, onun doğuran operatoru $\mathscr{D}_k(G)$-də yerləşdiyi halda K – sağinvariantdır, burada $\mathscr{D}_k(G)$, – $\mathscr{D}(G)$-dən olan bütün K – sağinvariant operatorların altcəbridir və $\mathscr{D}_k(G)$ isə $\mathscr{D}(G/K)$-ya izomorfdur, burada G/K, – G fəzasının K üzrə əlaqəli sol siniflərinin bircins G – fəzasıdır.

Solinvariant və K – sağinvariant D. p.-lər, seriyalar sxemində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin klassik

nəzəriyyəsini ümumiləşdirən, Li qruplarında ehtimal ölçülərinin üçbucaq sistemləri üçün limit teoremləri ilə bilavasitə əlaqədidirlər.

$(G, \mathscr{B})$ -də ehtimal ölçülərinin

$$(\mu_{nk})_{1\le k\le k_n}, \quad n\in\mathbb{N} \tag{6}$$

üçbucaq sisteminin verildiyi fərz olunur. $T_n(s,\ t)$, – (6) infinitezimal sisteminin doğurduğu xemiqrup, $T(s,\ t)$ – doğuran operatoru A_m^{∂} və ya $A_m^{\partial}+A_m^{\Sigma}$ olan xemiqrup olsun; $T_n(s,\ t)$ xemiqruplar ardıcıllığının ixtiyari sonluölçülü G_m Li qrupunda differensiallanan yeganə $T(s,\ t)$ xemiqrupuna $\tau(C)$ topologiyasında yığılması haqqında limit teoremləri alınmışdır, burada

$$T_n(s,\ t)f(g)=\int\limits_G f(g^h)\,\mu_{s,t}^{(n)}(dh), \tag{7}$$

$\mu_{s,\,t}^{(n)}=\mu_{nk}*\ldots*\mu_{nl}$, $0\le s<t\le 1$, $t_{nk}\le s<t_{nk+1}$, $t_{nl}\le t<t_{nl+1}$, $1\le k<l\le k_n$ və $0=t_{n0}<t_{n1}<\ldots<t_{nk_n}=1$, – $[0,\ 1]$ parçasının ixtiyari Δ_n bölgüsüdür,

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{1\le k\le k_n}\Delta t_{nk}=0,$$

bütün s -lər üçün $\mu_{s,s}^{(n)}=\varepsilon_e$,

$$\varepsilon_e(r)=\begin{cases}1, & e\in\Gamma,\\ 0, & e\notin\Gamma.\end{cases}$$

$T(s,t)$ xemiqrupu sıxlığı u olan $\mu_{s,t}$ ölçülərinin ailəsi ilə təyin olunur və u müvafiq (3) və ya (4) tənliklərinin fundamental həllidir. Qeyd olunan teoremlərdə (6) sisteminin infinitezimal xarakteristikaları $(a_{ij}^{(n)},\ b_i^{(n)},\ \eta^{(n)})_{1\le i,\,j\le m,\,n\in\mathbb{N}}$ üzərinə qoyulan tələblər klassik tələblərə uyğundur. Burada (6) sisteminin doğuran operatoru A^{∂} olan solinvariant D. p.-ə yığılması halında

$$a_{ij}^{(n)}(t_{nk})=\frac{1}{2\Delta t_{nk}}\int\limits_{\mathbb{N}_e}x^i(g)\,x^j(g)\,\mu_{nk}(dg),$$

$$b_i^{(n)}(t_{nk})=\frac{1}{\Delta t_{nk}}\int\limits_{\mathbb{N}_e}x^i(g)\,\mu_{nk}(dg),$$

$$\eta^{(n)}(t_{nk})=\int\limits_{G\setminus\mathbb{N}_e}\mu_{nk}(dg)$$

və (6) sisteminin doğuran operatoru $A^{\partial}+A^{\Sigma}$ olan 2-ci növ kəsilməsi olmayan stoxastik kəsilməz Markov prosesinə yığılması halında

$$\eta^{(n)}(t_{nk})=\frac{1}{\Delta t_{nk}}\int\frac{\varphi(e,g)}{1+\varphi(e,g)}\,\mu_{nk}(dg),$$

$$b_i^{(n)}(t_{nk})=\int\limits_G\frac{\rho(e,g)}{\varphi(e,g)}\,x^i(g)\,\eta^{(n)}(t_{nk},dg),$$

bu halda (5) və (2)-də A^{Σ} və A^{∂} operatorları üçün $g=e$ götürülməlidir.

Ölçülərin kompaktozimal üçbucaq sistemi üçün (bax, [6]) $T_n(s,\ t)$ xemiqruplarının ardıcıllıqlarının $T(s,\ t)=T_{\mathscr{R}}(s,\ t)\times$ $\times\,T_K(s,\ t)$ şəklində $T(s,\ t)$ xemiqrupuna yığılması isbat olunmuşdur, burada $T_{\mathscr{R}}$, – $\mathscr{R}$ -in G/K -ya homeomorf C^{∞} çoxobrazlısında G – solinvariant və K – sağinvariant diffuzion $\zeta_{\mathscr{R}}$ prosesinin xemiqrupudur, T_K, – K -da ω_K Haar ölçüsü ilə doğurulmuş, K üzərində xemiqrupdur. Beləliklə, (7) sistemi üçün ixtiyari $(s,\ t)$, $0\le s\le t\le 1$ qiymətlərində $\mu_{s,t}^{(n)}=$ $=\mu_{nk}*\ldots*\mu_{nl}$, $C(G)$ -yə nəzərən $\mu_{st}=\mu_{st}^{\mathscr{R}}*\omega_K$ ölçüsünə zəif yığılır, burada $\mu_{st}^{\mathscr{R}}$, – $T_{\mathscr{R}}$ xemiqrupunu doğuran, $\mathscr{R}$ -də $\zeta_{\mathscr{R}}$ prosesinin keçid ehtimalı ölçüsüdür və bu ölçü limit prosesi ζ -nın «radial» $\zeta_{\mathscr{R}}=F(\zeta)$ komponentinin ehtimal paylanmasını təsvir edir, ω_K, – ζ prosesinin individual polyar $g=$ $=F(g)\,\bar{k}(g)$ ayrılışında $\zeta_K=\bar{k}(\zeta)$ «bucaq» komponentinin ehtimal paylanmasıdır, burada $\bar{r}:C\to\mathscr{R}$, $\bar{k}:G\to K$, – C^{∞} sinfinin funksiyalarıdır və bu funksiyalar G Li qrupunun $G=\mathscr{R}K$ İvasava ayrılışını reallaşdırır. $\zeta_k^{(n)}\bar{k}=(\zeta^{(n)})$ paylanmasının ω_K -ya yığılmasının isbatı kompakt qruplarda harmonik analizin metodları ilə həyata keçirilir (bax, [6]).

Əd.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Компактные группы Ли, пер. с франц., М., 1986; [2] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [3] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [4] Собко Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 3, с. 549–57; [5] Собко Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 802–04; [6] Собко Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 1, с. 44–55.

DİFFUZİON PROSES şaxələnən « **диффузионный процесс** ветвящийся; **diffusion** branching **process** » – hər bir hissəciyi yerini digərlərindən asılı olmadan verilmiş G oblastında *diffuzion prosesin* qanunauyğunluqlarına tabe olaraq dəyişərək evolyusiya edən *şaxələnən prosesdir.* Bir qayda olaraq fərz olunur ki, hər bir hissəciyin yaşama müddəti üstlü qanunla paylanır və hissəcik ömrünün sonunda təsadüfi sayda varislər törədir və bu varislər yarandığı nöqtədən hərəkətini başlayaraq yerlərini dəyişirlər. G oblastının sərhədinə çatan hissəciklər yox olur (itir).

$G\subset\mathbb{R}^r$ – açıq məhdud çoxluq, $\lambda>0$ – hissəciyin məhv olma intensivliyi, $F(s)$ – bilavasitə varislər sayının doğuran funksiyası olsun; proses $t=0$ anında bir hissəciklə $x\in G$ nöqtəsindən başlayır, $\zeta_{x,1}(t),\ldots,\zeta_{x,\,Z_x(t)}(t)$, – t anındakı bütün $Z_x(t)$ hissəciklərinin vəziyyətləri olsun; hissəciklər diffuziya əmsallarının vahidi matrisli ilə r – ölçülü Braun hərəkəti edir.

$$H(t,x,s(\cdot))\ =\ \mathbf{M}\prod_{i=1}^{Z_x(t)}s\,(\zeta_{x,i}(t))$$

doğuran funksionalı (bir neçə tip hissəcikli şaxələnən prosesdə hissəciklər sayının birgə paylanmasının doğuran funksiyasının analoqu) başlanğıc şərti $H(0,\ x,\ s(\cdot))=s(x)$ və sərhəd şərtləri $\lim\limits_{x\to\partial G}H(t,\ x,\ s(\cdot))=0$ olan

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} + \lambda(F(H) - H)$$

parabolik tənliyini ödəyir.

$\mathbf{M} Z_x(t)$ üçün analoji düstur

$$\mathbf{M} Z_x(t) \sim K e^{(\lambda(m-1)-\alpha_1)t} \varphi_1(x), \quad x \in G, \quad t \to \infty, \qquad (*)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $K > 0$ – sabit, $m = F'(1)$ – bir hissəciyin bilavasitə varisləri sayının orta qiymətidir, $\alpha_1 > 0$ – minimal məxsusi qiymət, $\varphi_1(x) > 0$, –

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + d\varphi = 0, \quad \lim_{x \to \partial G} \varphi(x) = 0$$

məsələsinin α_1 -ə uyğun məxsusi funksiyasıdır.

(*) münasibətinin sağ tərəfindəki $\lambda(m-1) - \alpha_1$ kəmiyyətinin mənfi, sıfra bərabər və müsbət olmasından asılı olaraq D. ş. p. uyğun olaraq kritikaltı, kritik və ya kritiküstü şaxələnən proses adlanır.

Əgər G məhdud oblast olarsa, onda hissəciklər toplusunun G oblastı üzrə yayılması ilə əlaqədar yeni effektlər yaranır (bax, *Şaxələnən təsadüfi dolaşma*).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Ivanoff B. G., «J. Multivar. Anal.», 1981, v. 11, № 3, p. 289–318.

DİFFUZİYA ƏMSALLARI « диффузии коэффициенты; diffusion coefficients » – diffuzion prosesin *doğuran operatorunun* ikinci tərtib ikiindeksli əmsallarıdır (bax, *Doğuran operator*(u) diffuzion prosesin). Əgər diffuzion (və ya kvazidiffuzion) proses

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))\, dw(t)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidirsə, onda belə prosesin (hər hansı ortonormal bazisdə) D. ə. $b(t,x) = \sigma(t,x)\,\sigma^*(t,x)$ opeatorunun matrisinin (burada * – qoşma operator işarəsidir) elementləri ilə (bu bazisdə) üst-üstə düşür, burada $w(t)$, – d_1 – ölçülü $\mathbb{R}^{d_1}$ Evklid fəzasında Viner prosesi, $a(t,x)$ və $\sigma(t,x)$ – uyğun olaraq ($\mathbb{R}^d$ -də) vektorqiymətli və ($\mathbb{R}^{d_1}$ -dən $\mathbb{R}^d$ -yə) operatorqiymətli funksiyalardır.

D. ə.-nın fiziki mənası aşağıdakı kimidir: $\Delta t \downarrow 0$ olduqda t -dən $t + \Delta t$ -yə qədər müddətdə diffuzion prosesin $x(t + \Delta t) - x(t)$ artımının $\theta \in \mathbb{R}^d$ istiqamətinə proyeksiyasının kvadratının ortası $x(t) = x$ olduqda (əgər qeyd olunan artımın ikinci momenti yoxdursa, onda kəsik artım götürülür), $o(\Delta t)$ tərtib kəmiyyət dəqiqliyi ilə $(b(t,x)\theta, \theta)\Delta t$ kvadratik forması ilə üst-üstə düşür.

Bax, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Riçardson üçdə dörd qanunu*, *Diffuzion proses.*

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

DİFFUZİYA VEKTORU « диффузии вектор; diffusion vector » – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi.*

DİXOTOMİK TƏSADÜFİ PROSES « дихотомический случайный процесс; binary random process » – bax, *Binar təsadüfi proses.*

DİK YÜKSƏLİŞ METODU « крутого восхождения метод; steepest ascent » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması.*

DİLATASİYA « дилатация; dilatasion » – bax, *Minkovski əməlləri.*

DİNAMİK PROQNOZ « динамический прогноз; dynamical forecasting » – bax, *Statistik proqnozu*, *havanın.*

DİNAMİK PROQRAMLAMA; həssas kriterilər **« динамическое программирование;** чувствительные критерии; **dynamic programming;** sensitive criteria **»** – diskontlanmış gəlirləri öz aralarında çəki ilə müqayisələndirilən gəlirlərlə *idarəolunan Markov zəncirlərində* optimallıq kriteriləridir, diskontlama əmsalı 1-ə yaxınlaşdıqda çəkilər sonsuzluğa yaxınlaşır. İdarələrinin sonlu çoxluqları $A(x)$, keçid ehtimalları $p(y|x,a)$, cari gəlir funksiyası $a \in A(x)$, $x \in X$ ilə verilən, vəziyyətləri çoxluğu X sonlu olan bircins idarəolunan Markov zəncirinin verildiyi fərz olunur. Başlanğıc vəziyyəti x və strategiyası π olan diskontlanmış gəlir

$$v_\beta^\pi(x) = \mathbf{M}_x^\pi \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} r(x_{t-1}, a_t), \quad 0 < \beta < 1 \qquad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur, $\mathbf{M}_x^\pi$, – $\mathbf{P}_x^\pi$ ölçüsünə uyğun riyazi gözləmədir, $x \in X$.

İxtiyari σ strategiyası üçün

$$\lim_{\beta \uparrow 1} \frac{v_\beta^\pi(x) - v_\beta^\sigma(x)}{(1-\beta)^n} \geq 0, \quad x \in X$$

münasibəti ödənildiyi halda π strategiyası n – optimal strategiya adlanır, $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ (bax, [2]).

$$g_0^\pi(x, N) = \mathbf{M}_x^\pi \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} r(x_{t-1}, a_t), \; x \in X, \; N = 1, 2, \ldots$$

$$g_{n+1}^\pi(x, N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} t g_n^\pi(x, t), \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

olsun, odur ki,

$$g_n^\pi(x, N) = \mathbf{M}_x^\pi \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} C_{N+n-t}^n r(x_{t-1}, a_t).$$

İsbat olunur ki (bax, [3]), π strategiyasının n – optimallığı, $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{N \to \infty} [g_{n+1}^\pi(x, N) - g_{n+1}^\sigma(x, N)] \geq 0, \; x \in X$$

şərtinə ekvivalentdir (σ ixtiyari strategiyadır). Xüsusi halda (-1) optimallıq bir addıma orta gəlir kriterisinə görə optimallıq

ilə üst-üstə düşür. Stasionar φ strategiyası üçün (1) funksiyasının analitik davamı $\beta=1$ nöqtəsi ətrafında Loran sırasına ayrılır:

$$v_\beta^\varphi = h_{-1}^\varphi(x)/(1-\beta) + h_0^\varphi(x) + h_1^\varphi(x)(1-\beta) + \\ + h_2^\varphi(x)(1-\beta)^2 + \dots, \quad x\in X.$$

$$v_\beta(x) = \sup_\pi v_\beta^\pi(x), \quad x\in X$$

dəyəri üçün

$$v_\beta(x) = h_{-1}(x)/(1-\beta) + h_0(x) + h_1(x)(1-\beta) + \\ + h_2(x)(1-\beta)^2 + \dots$$

analoji ayrılışı doğrudur.

$\{h_{-1}, h_0, h_1, \dots\}$ vektorlar ardıcıllığı bütün φ-lər üzrə $\{h_{-1}^\varphi, h_{-0}^\varphi, \dots\}$ ardıcıllığının leksikoqrafik supremumudur və φ yalnız və yalnız $h_m^\varphi = h_m$ olduğu halda n – optimaldır, $m=-1, 0, 1, \dots, n$. 1-ə kifayət qədər yaxın bütün β-lar üçün eyni zamanda optimal stasionar φ strategiyası vardır (bax, [1]); bu strategiya ixtiyari $n\geq -1$ üçün n – optimaldır. İxtiyari $n\geq 0$ qiymtində $h_{-1}, h_0, \dots, h_n$ vektorları $n+1$ tənlikdən ibarət aşağıdakı sistemi ödəyir;

$$\left.\begin{aligned} h_{-1}(x) &= \sup_{a\in A_{-1}(x)} P^a h_{-1}(x), \\ h_0(x) &= \sup_{a\in A_0(x)} [r(x,a) + P^a(h_0 - h_{-1})(x)], \\ h_m(x) &= \sup_{a\in A_m(x)} P^a(h_m - h_{m-1})(x),\ m=1,2,\dots,n, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

burada $x\in X$,

$$P^a f(x) = \sum_{y\in X} f(y)\, p(y\mid x,\ a),$$

$A_{-1}(x)=A(x)$, $A_m(x)$, – $A_{m-1}(x)$ çoxluğunun elə altçoxluğudur ki, $h_{m-1}(x)$ üçün tənlikdə bu çoxluqda supremum alınır.

(2) sistemi $h_{-1}, h_0, \dots, h_{n-2}$ vektorlarını birqiymətli təyin edir (bax, [5]).

Həssas kriterilərə hesabi və semi – Markov modelləri üçün də baxılır.

M i s a l. $X=\{x, y\}$, $A(x)=\{a, b\}$, $A(y)=c$, $p(y\mid\cdot,\cdot)=1$, $p(x\mid\cdot,\cdot)=0$, $r(x,a)=r(y,c)=1$, $r(x,b)=0$ olsun. Bu halda randomlanılmayan iki stasionar strategiya vardır: $\varphi(x)=a$, $\varphi(y)=c$ və $\psi(x)=b$, $\psi(y)=c$. Onda

$$v_\beta(x) = v_\beta^\varphi(x) = 1+\beta+\beta^2+\dots = (1-\beta)^{-1},$$

$$v^\psi(x) = \beta+\beta^2+\dots = (1-\beta)^{-1}-1.$$

φ və ψ strategiyalarının hər ikisi bir addıma orta gəlir kriterisinə görə optimaldır, lakin aydındır ki, sonlu zaman parçasında φ üstün strategiya olmur. Bu da özünü onda əks etdirir ki, φ ixtiyari $n\geq -1$ qiymətlərində n – optimal, ψ isə yalnız (-1) – optimal strategiyadır.

Əd.: [1] B l a c k w e l l D., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 719–26; [2] V e i n o t t A. F., «Ann. Math. Statist.», 1969, v. 40, p. 1635–60; [3] S l a d k y K., «Kybernetika», 1974, v. 10, p. 350–67; [4] Ю ш к е в и ч А. А., Ч и т а ш в и л и Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [5] D e k k e r R., H o r d i j k A., «Math. Operation Research», 1988, v. 13, p. 395–420.

DİNAMİK PROQRAMLAMA s t o x a s t i k **« динамическое программирование** с т о х а с т и ч е с к о е; s t o c h a s t i c **dynamic programming »** – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma*.

DİNAMİK RİÇARDSON ƏDƏDİ « динамическое число Ричардсона; Richardson dynamical number » – bax, *Riçardson ədədi.*

DİNAMİK SİSTEM « динамическая система; dynamical system » – bax, *Erqodik nəzəriyyə.*

DİNAMİK SİSTEM x a l i s n ö q t ə v i s p e k t r l i **« динамическая система** с ч и с т о т о ч е ч н ы м с п е к т р о м; **dynamical system** w i t h p u r e p o i n t s p e c t r u m **»** – *erqodik nəzəriyyə* üçün mühüm dinamik sistemlər sinfidir. $\{S^t\}$, – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının erqodik (bax, *Erqodiklik)* birparametrik çevirmələr qrupu və $\{U^t\}$ – bu qrupa qoşma unitar operatorlar qrupu olsun. X a l i s n ö q t ə v i s p e k t r l i d i n a m i k s i s t e m onunla təyin olunur ki, $\{U^t\}$ qrupu məxsusi funksiyaların tam sisteminə malikdir. Bu halda hər bir məxsusi qiymət 1-ə bölünəndir və bunların çoxluğu Abel qrupu əmələ gətirir. Belə D. s. inteqrallanan D. s. nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Hamilton sisteminin Arnold – Liuvill mənada inteqrallananlığı halında xalis nöqtəvi spektrli D. s. demək olar ki, hər bir erqodik komponentdə yaranır. Baxılan D. s. üçün spektr metrik invariantların tam sistemini əmələ gətirir (bax, *İzomorfizmi*, *dinamik sistemlərin* m e t r i k).

Xalis nöqtəvi spektrli D. s. doğuran stasionar təsadüfi proses

$$\zeta(t) = \sum a_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \sum b_s \sin(\omega_s t + \varphi_s)$$

şəklində ifadə olunur, burada a_s, b_s – sabitlərdir, φ_s fazaları isə təsadüfidir. Stasionarlıq və erqodiklik şərti fazaların birgə paylanması üzərinə ağır məhdudiyyətlər qoyur (bax, [2]).

Əd.: [1] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Я г л о м А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.

DİNAMİK SİSTEM; k i ç i k s t o x a s t i k k ü k r ə n t i l ə r **« динамическая система;** м а л ы е с т о х а с т и ч е с к и е в о з м у щ е н и я; **dynamical system;** s m a l l s t o c h a s t i c p e r t u r b a t i o n s o f **»** – kiçik təsadüfi kükrəntilərin təsirinə məruz qalan aşağıdakı dinamik sistem modelləri öyrənilir:

1) $\dot\zeta_t^\varepsilon = b(\zeta_t^\varepsilon, \varepsilon\psi_t)$, ψ_t – qeyd olunmuş təsadüfi prosesdir;

2) $\dot\zeta_t^\varepsilon = b(\zeta_t^\varepsilon) + \varepsilon\dot\psi_t$;

3) Ümumi dinamik sistemlər.

1) – 2) sistemləri üçün böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi, böyük yayınmaların inteqral və lokal asimptotikaları tipli limit teoremləri müəyyən olunur (bax, [1], [2], [4], [5]). 2) sistemi

üçün, bəzi hallarda $\dot{\zeta}_t = b(\zeta_t),\ \ \zeta_0 = x$ limit tənliyinin həllinin yeganə olmadığı hal üçün, limit sistemini dəqiq ifadə etmək mümkün olur (bax, [3]).

Əd.: [1] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуация в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [2] Вентцель А. Д., Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов, М., 1986; [3] Веретенников А. Ю., «Матем. заметки», 1983, т. 33, № 6, с. 929–31; [4] Скороход А. В., Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений, К., 1987; [5] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969.

DİNAMİK SİSTEM(i) statistik mexanikanın **« динамическая система** статистической механики; **dynamical system** of statistical mechanics **»** – Nyuton tənlikləri tipli hərəkət tənlikləri üçün Koşi məsələsinin həlli boyunca zaman yerinidəyişmələri ilə verilən hissəciklər sayı sonsuz (sərbəstlik dərəcəsi) sistemin faza fəzası M -də $\{S_t\}$ çevirmələrinin birparametrik qrupuna verilən addır. Tənliklər sistemi sonsuz olduğundan bütün M -də birqiymətli həll, ümumiyyətlə, olmur. Başlanğıc verilənlərin «massiv» çoxluğu M'-də ($M' \subset M$) Koşi məsələsinin birqiymətli həllinin varlığı haqqında qeyri – trivial sual yaranır və bu halda M -də (hissəciklərin vəziyyətləri sistemi) ehtimal ölçülərinin «geniş» sinfi üçün $\mu(M') = 1$ olduğu nəzərdə tutulur. Ümumi halda ossilyator sistemləri (harmonik və qeyri – harmonik) adlanan sistemlərdə belə M' çoxluğu (olduqca mürəkkəb şərtlərilə seçilən) qurulmuşdur. (bax, [1], [2]). $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında qarşılıqlı təsirin cüt potensialı U -nun təsiri altında hərəkət edən hissəciklərin «kəsilməz» sistemləri üçün belə çoxluq, yalnız $d = 1, 2$ qiymətlərində qurulmuşdur (U üzərində müəyyən şərtlərlə) (bax, [2] – [6]). M -də topalanmış ehtimal ölçüləri sinfinə *Gibbs təsadüfi meydanlarının* geniş sinfinə müvafiq Gibbs ölçüləri də daxildir.

D. s.-in invariant ölçüləri haqqında məsələ mühüm rol oynayır. Burada «təbii» namizədlər qarşılıqlıtəsir potensialı U -ya müvafiq olan bərabərçəkili paylanmalar adlandırılan Gibbs təsadüfi meydanlarıdır. Potensialı U olan ixtiyarı Gibbs paylanması üçün $\mu(M') = 1$ xassəsinə malik $M' \subset M$ çoxluğunu ixtiyarı $d \geq 1$ üçün qurmaq olur (bax, [7], [8]). Potensialı U olan hər bir bərabərçəkili Gibbs paylanması invariant olur. Bu halda konkret bərabərçəkili paylanma nəzərdə tutularaq, statistik mexanikanın bərabərçəkili dinamik sistemindən söhbət gedir.

Statistik mexanikanın D. s.-nin bütün invariant ölçüləri çoxluğunun təsviri məsələsinə hər hansı aprior sinifdə baxmaq təbii olardı. Belə bir sinif kimi bir sıra məhdudiyyətləri ödəyən və Gibbs təsadüfi meydanları ilə verilən, M -də μ ölçüləri sinfinə baxılmışdır. Bu sinifdə invariant ölçülər çoxluğu bərabərçəkili Gibbs paylanmaları ilə invariantdır. Burada U qarşılıqlıtəsirinin cırlaşmayan olması şərti mühümdür. Bərabərçəkili olmayan invariant ölçülər olan hallar vardır.

Bərabərçəkili D. s.-in erqodiklik xassələri haqqında və ya daha geniş surətdə, $t \to \pm\infty$ olduqda $\mu_t = \mu_0 S_t$ ölçüsünün eyniölçülü Gibbs paylanmasına yığılması haqqında məsələ ümumi halda çox çətindir. Hal-hazırda bu məsələ yalnız ideal qaz və ona yaxın sistemlər üçün araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Lanford O., Lebowitz J., Lieb E., «J. Stat. Phys.», 1977, v. 16, № 6, p. 453–61; [2] Fritz J., «J. Stat. Phys.», 1983, v. 33, № 4, p. 397–412; [3] Lanford O., «Comm. Math. Phys.», 1968, v. 9, № 3, p. 176–91; 1969, v. 11, № 4, p. 257–92; [4] Dobrushin R. L., Fritz J., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 55, № 3, p. 275–92; [5] Dobrushin R. L., Fritz J., «Comm. Math. Phys.», v. 57, № 1, p. 67–81; [6] Marchioro C., Pellegrinotti A., Pulvirenti M., Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory, v. 2, Amst. – Oxf. – N. Y., 1981, p. 733–46; [7] Синай Я. Г., «Вестн. МГУ. Матем., мех.», 1974, т. 29, № 1, с. 152–58; [8] Presutti E., Pulvirenti M., Tirorri B., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 47, № 1, p. 81–95; [9] Гуревич Б. М., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 5, с. 45–82; [10] Gurevich B. M., Suhov Yu. M., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 49, № 1, p. 63–96; 1977, v. 54, № 1, p. 81–96; v. 56, № 3, p. 225–36; 1982, v. 84, № 3, p. 333–76.

DİOFANT YAXINLAŞMALARI; erqodik məsələlər **« Диофантовы приближения;** эргодические задачи; **Diophantine approximation;** ergodic problems **»** – bax, *Erqodik məsələlər*(i) Diofant yaxınlaşmalarının.

DİRAK ÖLÇÜSÜ « Дирака мера; Dirac measure » – bax, *Atomik ölçü*, *Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası*.

DİRİXLE FƏZASI « Дирихле пространство; Dirichlet space » – bax, *Markov prosesi* Dirixle forması.

DİRİXLE FORMASI « Дирихле форма; Dirichlet form » – bax, *Markov prosesi* Dirixle forması.

DİRİXLE MƏSƏLƏSİ stoxastik **« Дирихле задача** стохастическая; stochastic **Dirichlet problem »** – bax, *Potensial nəzəriyyə* Markov prosesi üçün.

DİRİXLE PAYLANMASI « Дирихле распределение; Dirichlet distribution » –

$$\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 + \ldots + x_k = 1,\ x_i > 0\}$$

çoxluğunda topalanmış, birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_k)}\ x_1^{\alpha_1 - 1} \ldots x_k^{\alpha_k - 1},$$

$$\alpha_i > 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

olan $X_1, \ldots, X_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kəsilməz birgə ehtimal *paylanmasıdır*. D. p. bəzən çoxölçülü beta–paylanma da adlandırılır, belə ki, Dirixle paylanmalı X vektorunun hər bir X_i komponentinin marginal paylanması parametrləri α_j və $a_0 - \alpha_j$ olan *beta – paylanma* ilə üst-üstə düşür; $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$. $r_1, \ldots, r_k$ – mənfi olmayan tam ədədlər olduqda D. p.-nın $\mathbf{M}(X_1^{r_1} \ldots X_k^{r_k})$ şəkilli momentləri

$$\frac{\Gamma(\alpha_0) \prod_{i=1}^{k} \Gamma(\alpha_i + r_i)}{\Gamma(\alpha_0 + r_0) \prod_{i=1}^{k} \Gamma(\alpha_i)}$$

nisbətinə bərabərdir, burada $r_0 = \sum_{i=1}^{k} r_i$. Xüsusi halda X_i təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, α_i/α_0 və $\alpha_i(\alpha_0-\alpha_i)/\alpha_0^2(\alpha_0+1)$ nisbətinə, X_i və X_j -nin kovariasiyası isə $i \neq j$ olduqda, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -\alpha_i\alpha_j/\alpha_0^2(\alpha_0+1)$ nisbətinə bərabərdir.

Əd.: [1] Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

DİSKONTLAMA « дисконтирование; discounting » – dəyərsizlənmə, qiymətdən düşmə kimi anlaşılan anlayışdır (bax, *Variasion bərabərsizliklər* stoxastik idarəetmədə).

DİSKONTLAMA ƏMSALI « дисконтирования коэффициент; discount rate » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

DİSKRET ANSAMBL « дискретный ансамбль; discrete ansamble », diskret ehtimal paylanması – sonlu m elementli $X = \{x_1, ..., x_m\}$ çoxluğu ilə bu çoxluqda verilmiş ehtimal paylanması $p(x)$ -dən ibarət $\{X, p(x)\}$ cütünə deyilir; $x_i \in X$, $i = 1, 2, ..., m$ xəbər (məlumat) kimi anlaşılır və bunlar bəzən elementar hadisələr kimi də adlandırılır. $p(x_i)$ – elementar hadisənin ehtimalı, $\mathbf{P}(A)$ isə A, $A \subseteq X$ hadisəsinin ehtimalıdır. Aydındır ki, $p(x_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} p(x_i) = 1$, $\Pr(A) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{x_i \in A} p(x_i)$ ədədi p ehtimalı ilə verilmiş X çoxluğundan təsadüfi qaydada A çoxluğundan məlumatın seçilməsi ehtimalıdır. $\stackrel{\Delta}{=}$ simvolu sol və sağ tərəflərin tərifə görə bərabər olmasını ifadə edir. $\Pr(A)$ ədədi A çoxluğunun ehtimalı kimi də adlandırılır.

Ehtimal paylanması haqqında informasiya olduğu halda və ya paylanmanın dəqiq təsviri rol oynamadığı halda ansambl sadəcə X ilə işarə olunur.

$X = \{x_1, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ – iki sonlu çoxluq olsun. Elementləri bütün nizamlanmış, mümkün (x_i, y_j) cütlərindən ibarət çoxluq X və Y çoxluqlarının hasili adlanır və XY kimi işarə olunur; $x_i \in X$, $y_j \in Y$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Bu tərifə əsasən XY və YX tamamilə müxtəlif çoxluqlardır. $X = Y$ olduqda, hasil X^2 kimi işarə olunur. İkidən artıq çoxluğun hasili analoji təyin olunur. $X_1 X_2 \ldots X_n$ hasilinin elementləri bütün n uzunluqlu elə $(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)})$ ardıcıllıqlarıdır ki, birinci $x^{(1)}$ elementi X_1 çoxluğuna, ikinci $x^{(2)}$ elementi X_2 çoxluğuna və s. daxildir. Əgər bütün çoxluqlar X çoxluğu ilə üst-üstə düşərsə, belə hasil X^n kimi işarə olunur.

XY – iki sonlu X və Y çoxluqlarının hasili olsun. Bu çoxluqda hər bir (x_i, y_j) cütünə qarşı $p(x_i, y_j)$ ehtimalı qoyulmuşdur və XY -də $p(x, y)$ birgə ehtimal paylanması verilmişdir; $x_i \in X$, $y_j \in Y$. Aydındır ki,

$$p_1(x_i) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{y_j \in Y} p(x_i, y_j), \quad i = 1, ..., m, \tag{1}$$

$$p_2(y_j) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{x_i \in X} p(x_i, y_j), \quad j = 1, ..., n. \tag{2}$$

münasibətləri ilə X və Y çoxluqlarında uyğun olaraq $p_1(x)$ və $p_2(x)$ ehtimal paylanmaları təyin olunur. Beləliklə, $\{XY, p(x, y)\}$ ansamblının verilməsi, iki X və Y ansamblarının birgə verilməsi kimi anlaşılır.

Əgər XY çoxluğunda ehtimal paylanması $p(x, y)$ bütün $x_i \in X$ və $y_i \in Y$ elementləri üçün

$$p(x_i, y_i) = p_1(x_i)\, p_2(y_i) \tag{3}$$

şərtini ödəyirsə, X və Y statistik asılı olmayan ansamblar adlanır. Əks halda, ansamblar statistik asılıdır, deyilir.

Diskret mənbə. *Diskret mənbə* elə bir qurğudur ki, o, hər bir vahid zaman (məs., hər bir dəqiqə) ərzində X diskret çoxluğundan bir xəbər (məlumat) seçir. Bir qayda olaraq, X çoxluğu hər bir zaman anı üçün eyni götürülür, lakin bəzi hallarda hər bir an üçün özünün xəbərlər çoxluğu da ola bilər.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1928.

DİSKRET AYRILIŞ(ı) Karunen–Loev **« дискретное разложение** Карунена–Лоэва; Karhunen–Loéve **discrete decomposition »** – bax, *Karunen – Loev ayrılışı* diskret.

DİSKRET BƏYAZ KÜY « дискретный белый шум; discrete white noise », tamamilə təsadüfi ardıcıllıq, – qarşılıqlı asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış (və ya stasionar təsadüfi ardıcıllıqların korrelyasion nəzəriyyəsi baxımından cüt-cüt qeyri – korrelyar və eyni σ^2 dispersiyalı), orta qiymətləri sıfra bərabər $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərindən ibarət $\zeta(t)$, $t = 0, 1, 2, ...$ stasionar ardıcıllığıdır. D. b. k. – korrelyasion funksiyası: $\tau = 0$ olduqda $B(\tau) = \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\zeta(t) = \sigma^2$ və $|\tau| > 0$ olduqda $B(\tau) = 0$ spektral sıxlığı $f(\lambda) = \sigma^2/2\pi$ isə sabit olan stasionar təsadüfi ardıcıllıqdır; $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

DİSKRET BÖLÜNƏNLİK XASSƏSİ, VERİLƏNLƏRİN HİSSƏSİNİN « дискретной разделимости свойство порции данных; the property of discrete separability of data portion » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

DİSKRET EHTİMAL PAYLANMASI « дискретное вероятностное распределение; discrete probability distribution » – bax, *Diskret ansambl.*

* **DİSKRET FURYE ÇEVİRMƏSİ « дискретное преобразование Фурье; discrete Fourier transform »** – aşağıdakı münasibətlərlə təyin olunan çevirmədir:

$$a(n_1, ..., n_k) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \ldots \sum_{j_k=0}^{N_k-1} x(j_1, ..., j_k)\, W_{N_1}^{n_1 j_1} \cdot \ldots \cdot W_{N_k}^{n_k j_k}$$

(düz çevirmə) və

$$x(j_1,...,j_k) =$$

$$= \frac{1}{N_1 \dots N_k} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_k=0}^{N_k-1} a(n_1,...,n_k)\, W_{N_1}^{-n_1 j_1} \cdot \dots \cdot W_{N_k}^{-n_k j_k}$$

(tərs çevirmə), burada $j_l = 0, ..., N-1$, $n_l = 0, ..., N_l - 1$, $l = 1, ..., k$, $W_n = \exp\{-2\pi i / N\}$; $k > 1$ olduqda çevirmə çoxölçülü, $k = 1$ olduqda isə birölçülü D. F. ç., x və a kompleks olduqda kompleks, x həqiqi olduqda isə həqiqi D. F. ç. adlanır.

Birölçülü halda yuxarıdakı münasibətləri $A = W_{N\times N}$ vektor formasında yazmaq olar, burada $A_n = (a(1), ..., a(N-1))^{\mathsf{T}}$, $x_N = (x(1), ..., x(N-1))^{\mathsf{T}}$, W_N, – $(n+1)$-ci sətir və $(j+1)$-ci sütündakı elementləri W_N^{nj} olan, $n, j = 0, ..., N-1$, $(N\times N)$ – matrisdir. D. F. ç.-ni hesablamaq üçün effektiv alqoritmlərdən istifadə etmək olar (bax, *Sürətli Furye çevirməsi*, *Vinoqrad metodu*).

***DİSKRET MƏNBƏ « дискретный источник; discrete sourse »** – bax, *Diskret ansambl.*

DİSKRET MODULYASİYA « дискретная модуляция; digital modulation » – bax, *Modulyasiya və demodulyasiya.*

DİSKRET ÖLÇÜ « дискретная мера; discrete measure » – bax, *Atomik ölçü.*

DİSKRET PAYLANMA « дискретное распределение; discrete distribution » – sonlu və ya hesabi sayda birnöqtəvi $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ... \in \mathscr{A}$ çoxluqlarında topalanmış, $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında ehtimal *paylanmasıdır.* D. p. $p_i > 0$, $i = 1, 2, ...$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ şərtlərini ödəyən p_i ədədləri toplusu ilə tam mənası ilə təyin olunur; bu halda $A \in \mathscr{A}$ hadisəsinin ehtimalı

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

D. p. atomik paylanmanın xüsusi halıdır, bu halda atomlar birnöqtəvi çoxluqlardır.

Əgər $i \neq j$, $A_i A_j = \varnothing$ şərtlərini ödəyən sonlu və ya hesabi sayda elə $A_1, A_2, ... \in \mathscr{A}$ hadisələri varsa ki, $p_i = \mathbf{P}(A_i) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = 1$ olsun və $X(\omega)$ A_i çoxluğunda sabit olsun, yəni $X(\omega) = x_i$, $\omega \in A_i$ olsun. Onda $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən $X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti diskret təsadüfi kəmiyyət adlanır. D. p.-ya malik təsadüfi kəmiyyət diskret təsadüfi kəmiyyət adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətin D. p.-nın xüsusi halı *şəbəkəvari paylanmadır.*

Ən çox yayılmış D. p.-lardan – *binomial paylanma*, *həndəsi paylanma*, *hiperhəndəsi paylanma*, *polinomial paylanma*, *Puasson paylanması* kimi paylanmaları qeyd etmək olar.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., M., 1987.

DİSKRET PAYLANMA FUNKSİYASI « дискретная функция распределение; discrete distribution function » – bax, *Lebeq ayrılışı*.

DİSKRET RENORMQRUP « дискретная ренормгруппа; discrete renormalization group » – bax, *Renormalizasion qrup.*

DİSKRET SEÇİMİ, PROSESİN « дискретная выборка процесса; discrete sample of a process » – bax, *Diskretizasiya problemi*.

***DİSKRET TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « дискретная случайная величина; discrete random variable »** – *diskret paylanmaya* malik təsadüfi kəmiyyətdir, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən sonlu və ya hesabi sayda qiymətlər alan $\xi(\omega)$ *təsadüfi kəmiyyətinə* deyilir. $\xi(\omega)$ sonlu və ya hesabi sayda $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ qiymətlərini alan elə funksiya olsun ki, $\xi(\omega): \Omega \to \mathbb{R}^1$. Onda $\xi(\omega)$, yalnız və yalnız, hər bir n qiymətində

$$\{\omega: \xi(\omega) = x_n\} \in \mathscr{F} \qquad (1)$$

münasibəti ödənildiyi halda $\mathscr{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən funksiyadır.

Doğrudan da, $\xi(\omega)$ funksiyası (1) münasibətini ödəyərsə, $\xi(\omega)$ $\mathscr{F}$ – ölçülən funksiyadır, çünki hər bir həqiqi $x \in \mathbb{R}^1$ üçün

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \bigcup_{x_i < x} \{\omega: \xi(\omega) = x_i\} \in \mathscr{F}.$$

Digər tərəfdən, əgər $\xi(\omega)$ $\mathscr{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən funksiyadırsa, onda məlumdur ki (bax, [1], teorem 1, səh. 54), hər bir həqiqi x üçün $\{\omega: \xi(\omega) = x\} \in \mathscr{F}$.

Beləliklə, əgər $\xi(\omega)$ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $x_1, ..., x_n, ...$ həqiqi qiymətlərini alan diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda n -in hər bir qiymətində

$$\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x_n\} = p_n, \quad n = 1, 2, ... \qquad (2)$$

ehtimalı təyin olunmuşdur. (2) ehtimallar toplusu diskret təsadüfi kəmiyyətin paylanması adlanır.

$\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x_n\} = p_n$, $n = 1, 2, ...$ ehtimallarını təyin etmək üçün verilən ixtiyari bir qayda diskret $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu adlanır.

Paylanma qanunu hər hansı bir düstur vasitəsilə verilə bilinər (bax, *Binomial paylanma*, *Həndəsi paylanma*, *Mənfi binomial paylanma*, *Polinomial paylanma* və s.).

Bu halda p_n ehtimalları $\xi(\omega)$-nın x_n qiymətini alması üçün müəyyən olunmuş bir düstur vasitəsilə ifadə olunur. $\xi(\omega)$-nın ala biləcəyi bütün müxtəlif qiymətləri və uyğun olaraq hər bir qiyməti alması ehtimalı cədvəl şəklində də verilə bilinər:

$\xi(\omega)$ -nın mümkün qiymətləri	x_1	x_2	⋯	x_n	⋯
$\mathbf{P}\{\xi(\omega) = x_i\}$	p_1	p_2	⋯	p_n	⋯

Bu cədvəl $\xi(\omega)$ D. t. k.-nin ehtimallarının paylanma cədvəli adlanır.

$\xi(\omega)$ D. t. k. üçün

$$p_n \geq 0, \quad \sum p_n = 1$$

münasibəti həmişə doğrudur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

DİSKRETİZASİYA PROBLEMİ « дискретизации проблема; discretization problem » – funksiyanın zaman və amplitud üzrə kvantlanması problemidir. Kəsilməz zamanlı $\{\zeta(t),\ t \in (-\infty; +\infty)\}$ stasionar təsadüfi prosesinin bir-birindən eyni zaman intervallarındakı $k\Delta,\ k = 0, \pm 1, \ldots$ zaman anlarında hesablanan qiymətlər ardıcıllığı $\{\zeta_\Delta(k) = \zeta(k\Delta)\}$, – $\zeta(t)$ prosesinin Δ diskretizasiya addımlı diskret seçimi adlanır. Bu seçim riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = \mathbf{M}\zeta_\Delta(k)$ və kovariasion funksiyası $B_\Delta(\tau) = B(\tau\Delta),\ t = 0, \pm 1, \ldots$ olan stasionar təsadüfi ardıcıllıqdır, burada $B(\tau)$, – $\zeta(t)$ prosesinin kovariasion funksiyasıdır. $\zeta(t)$ stasionar prosesinin spektral sıxlığı $f(\lambda)$ ilə $\zeta_\Delta(k)$ ardıcıllığının spektral sıxlığı

$$f_\Delta(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi j/\Delta)$$

münasibətilə bağlıdır və bu münasibət tezliklərin bir-biri üzərinə yığılması effektini ifadə edir. Tezliklərin sonlu $-\pi/\Delta < \lambda < \pi/\Delta$ zolağında Furye inteqralı ilə verilən, təsadüfi olmayan $\zeta(t)$ funksiyaları üçün

$$\zeta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t/\Delta - k)}{\sin(t/\Delta - k)} \zeta(k\Delta) \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan Kotelnikov–Şennon düsturundan istifadə olunur. Stasionar təsadüfi proseslər üçün tətbiqi məsələlərdə $\zeta(t)$ prosesinin qiymətinə ən yaxşı yaxınlaşmanın

$$\zeta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t)\ \zeta(k\Delta)$$

xətti kombinasiyası vasitəsilə alınması məsələsinə 1949-da A. M. Yaqlom tərəfindən baxılmışdır. O, belə xətti kombinasiyanın bütün t-lər üçün zəruri və kafi şərtlərinin varlığının olduğunu göstərmişdir. Bu şərt

$$\mathbf{M}|\zeta(t) - \zeta^*(t)|^2 = 0 \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Spektri $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ zolağında topalanmış $\zeta(t)$ prosesləri üçün (1) düsturu doğrudur, bu halda, sonsuz cəm kvadratik orta limit kimi anlaşılır. Bundan başqa, (2) şərtindən aydındır ki, $\zeta(t)$ prosesinin spektrinin elə iki nöqtəsi yoxdur ki, bu nöqtələr arasında məsafə $2\pi/\Delta$-ya bölünən olsun. $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ zolağının sərhəd tezliyi π/Δ – Naykvist tezliyi adlanır.

Spektri $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$ tezliklər zolağında topalaşmayan $\zeta(t)$ prosesinin diskretizasiyasında tezliklərin bu zolağa yığılması halı baş verir.

Əgər $\zeta(t)$ stasionar siqnalına asılı olmayan $\varepsilon(t)$, $-\infty < t < \infty$, $\operatorname{cov}(\varepsilon(t), \zeta(t)) = 0$ olan stasionar küyü fonunda baxılırsa, δ intervallı amplitud üzrə $\zeta(t) + \varepsilon(t)$ funksiyasının diskretizasiyası, $\mathbf{M}\varepsilon^2(t) - (\mathbf{M}\varepsilon(t))^2$ kəmiyyətinin δ kəmiyyəti ilə müqayisədə kiçik olması şərti ödənilərsə, $\varepsilon(t)$ əngəllərinin aradan qaldırılmasına səbəb olur. Lakin bu $\zeta(t)$-nin təhrifinə səbəb olur və bunlar diskretizasiya küyləri adlanır. Diskretizasiya küyləri $Y(t)$ ilə işarə olunur. Riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, dispersiyası $\mathbf{D}\zeta(t) = \sigma^2$ olan normal stasionar təsadüfi proses $\zeta(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ üçün diskretizasiya küylərinin kovariasion funksiyası

$$B_Y(t) \approx \frac{\delta^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left\{-\frac{4n^2\pi^2(1 - B\zeta(t))}{(\delta/\sigma)^2}\right\},$$
$$-\infty < t < \infty$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər $\delta = o(\sigma)$ olarsa, onda $B_Y(t) \approx \sigma^2/12$ olur. Əgər $\zeta(t)$-nin spektral sıxlığı eni $2h$ olan aşağıtezlikli zolaqda müntəzəm, digər tezliklər üçün sıfra bərabər olarsa, onda diskretizasiya küylərinin spektral sıxlığı

$$f_h(\lambda) \approx \frac{\delta^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{3\delta^2}{2\sigma^2 n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \exp\left\{-\frac{3\delta^2\lambda^2}{8n^2\pi^2h^2\sigma^2}\right\},$$
$$-\infty < \lambda < \infty$$

düsturu ilə təyin olunur.

$Y(t)$-nin diskretizasiya küyləri və $\zeta(t)$ prosesinin qarşılıqlı kovariasion funksiyası

$$B_{\zeta Y}(t) \approx 2B_\zeta(t) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left\{-\frac{2\pi k^2}{(\delta/\sigma)^2}\right\},$$
$$-\infty < t < \infty$$

düsturu ilə ifadə olunur. Sonuncu düsturdan aydındır ki, $(\delta/\sigma) < 1$ olduqda $B_{\zeta Y}(t) \approx 10^{-8} B_\zeta(t)$.

Əd.: [1] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, кн.1, М., 1966; [2] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [3] Яглом А. М., «Успехи матем. наук» 1949, т. 4, в. 4, с. 173–78.

DİSKRETLƏNƏN TƏSADÜFİ MEYDAN « дискретизируемое случайное поле; discretizable random field » – bax, *Renormalizasion qrup*.

DİSKRİMİNANT ANALİZ « дискриминантный анализ; discriminant analysis » – müşahidələrin (obyektlərin) verilmiş bir neçə sinifdən (qruplar, kateqoriyalar, populyasiyalar) birinə mənsubluğunu təyin edən təsnif qaydalarının müəyyən olunmasına həsr olunan, statistik analizin bölmələrindən biridir. Təsnifatlandırılması tələb olunan ilkin müşahidələrin

verilənlərin X matrisi şəklində verildiyi fərz olunur. Bu müşahidələrin k sayda $D_1, ..., D_k$ siniflərindən olan müşahidələrin qarışığından ibarət ümumi çoxluqdan olduğu da fərz olunur, belə ki, i-ci sinfə uyğun olan ehtimal paylanmaları qanunu $\mathbf{P}_i(X)$, $i = 1,...,k$ paylanmalarının toplusudur. $\mathbf{P}_i(X)$ paylanmalarının ya məlum olduğu və ya onların müşahidəçiyə məlum olan *öyrədici seçimlərlə* (rus. обучающие выборки) – $X_{j_1}, X_{j_2}, ..., X_{jn_j}$ seçimlərilə statistik olaraq qiymətləndirilə bilinəcəkləri fərz olunur, $j = 1, 2, ..., k$, $X_{jl} \in D_j$ ($\{X_{jl}\}$, $l = 1, ..., n$ seçiminin bütün müşahidələri eyni bir D_i ümumi çoxluğundan olarsa, $\{X_{jl}\}$, $l = 1, ..., n$ – öyrədici seçim adlanır). X-dən olan müşahidələrin D_j siniflərindən (paylanma qruplarından) birinə aid olmasının təsnif qaydası S-i müəyyən etmək tələb olunur, bu şərtlə ki, itkilər müəyyən mənada minimal olsun. Öyrədici seçimlər X seçiminin hissəsi də ola bilər.

D. a.-də təsnif keyfiyyətinin funksionalının ümumi şəkli

$$Q(S) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{k} c_{ij} q_j \mathbf{P}_S(i \mid j)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada c_{ij}, q_j və $\mathbf{P}_S(i \mid j)$ – uyğun olaraq obyektin j-ci sinifdən i-ci sinfə təsnifindən itkiləri, j-ci sinfin obyektlərinin xüsusi çəkisi (aprior ehtimal) və təsnifedici S qaydasından istifadədə obyektlərin j-ci sinifdən i-ci sinfə səhv təsnifi ehtimalıdır.

Bir çox real məsələlərdə obyektlərin düzgün təsnif olunmaması nəticəsində yaranan c_{ij} itkilərini və bəzən də, müxtəlif siniflərə mənsub obyektlərin üzə çıxmasının aprior q_j ehtimallarını qiymətləndirmək çətin olur. Bu hallarda *Beyes yanaşmasından* istifadə etmək olar ki, bu yanaşmaya görə X müşahidəsi aposteriori ehtimalı və loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyası $\ln(q_i \mathbf{P}_i(X))$ bütün $i = 1, 2, ..., k$ qiymətlərində maksimal olan uyğun j nömrəli sinfə aid olunmalıdır. Beləliklə, «cari» X müşahidəsinin i siniflərindən birinə aid olunması haqqında qərar $d_j(X) = \ln(q_j \mathbf{P}_j(X))$ funksiyasının qiymətlərinə əsasən qəbul edilir. $d_j(X)$ funksiyaları və bu funksiyaların təyin etdiyi $d_{ij}(X) = d_i(X) - d_j(X)$ səthləri – diskriminant funksiyalar adlandırılır. Beləliklə, axtarılan təsnif qaydası S, $d_j(X) = \arg\max\limits_{1 \le i \le k} d_i(X)$ olduğu halda, uyğun $S: X \in D_j$ diskriminant funksiyalar sistemi ilə təyin olunur. Beyes yanaşmasına əsaslanan təsnif qaydası səhv təsnifin orta qiyməti –

$$Q_t(S) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{k} q_j \mathbf{P}_S(i \mid j)$$

kəmiyyətini minimallaşdırır.

Diskriminant funksiyaların qurulmasında Beyes yanaşmasından başqa loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyalarının nisbəti ideyasına bilavasitə əsaslanmayan yanaşma da tətbiq olunur. Bu halda $\{d(X; \theta)\}$ parametrik ailəsindən elə $d_i(X) = d_i(X; \theta)$ funksiyalar sistemini seçməyə cəhd edilir ki, bu sistemdə analiz olunan siniflər arasındakı bu və ya digər ölçü maksimallaşır, məs.:

$$\widetilde{Q}_S(\theta) =$$

$$= \sum w_{ij} \frac{[\,\hat{\mathbf{M}}_i\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\} - \hat{\mathbf{M}}_j\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\}\,]^2}{\hat{q}_i \hat{\mathbf{D}}_i\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\} + \hat{q}_j \hat{\mathbf{D}}_j\{d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j)\}}$$

burada $\theta \in \Theta$, $d_{ij}(X; \theta_i, \theta_j) = d_i(X; \theta_i) - d_j(X; \theta_j)$, $\hat{q}_i$ – aprior q_i ehtimalının statistik qiymətidir, məs., $\hat{q}_i = n_i / n$. Bu münasibətdə w_{ij} «çəkiləri» bütün mümkün sinif cütləri arasında i və j nömrəli siniflərin fərqlənilməsinin düzgünlüyünün nisbi mühümlüyünü nəzərə alır, yəni w_{ij} məhz c_{ij} kəmiyyətlərinin analoqlarıdır, $\hat{\mathbf{M}}_i\{\xi(X)\}$ və $\hat{\mathbf{D}}_i\{\xi(X)\}$ uyğun olaraq $\xi(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləmə və dispersiyasının uyğun statistik qiymətləridir və bu kəmiyyətlər hesablanılarkən fərz olunur ki, X-in arqumenti i-ci sinfə aiddir, yəni bu statistik qiymətlər uyğun öyrədici seçim üzrə qiymətləndirilmişdir. Xüsusi halda, məlum Fişer xətti diskriminant funksiyası, $k = 2$ halı üçün, təsvir olunan sxemin həllidir.

A. Vald (A. Wald) Fişer diskriminant funksiyasının optimallığını göstərmişdir. O, Beyes mənada, $\mathbf{P}_1(X)$ və $\mathbf{P}_2(X)$ bir-birindən yalnız orta qiymətlər vektoru ilə fərqlənən çoxölçülü normal paylanmalar olduğu halda da diskriminant funksiyanın optimallığını göstərmişdir.

Əd.: [1] Fisher R. A., «Ann. of Eugenics», 1936, v. 7, p. 179–88; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

DİSKRİMİNANT FUNKSİYA « дискриминантная функция; discriminant function » – statistik təsnifat və obrazların müəyyən edilməsi məsələlərində *həlledici qaydanın* verilmə formalarından biridir. $X = (x_1, ..., x_p)^{\mathrm{T}}$ çoxölçülü müşahidəsinin verildiyi fərz olunur və onun k sayda verilmiş $H_1, ..., H_k$ siniflərindən birinə aid edilməsi tələb olunur. k sayda $g_i(X)$ D. f.-larının daxil edildiyi fərz olunur, $i = 1, ..., k$ və həlledici qayda müəyyən edilmişdir: əgər $l = \arg\max\limits_{1 \le i \le k} g_i(X)$ olarsa, onda $X \in H_i$.

Əgər $\varphi_i(X) = a(X)\, g_i(X) + b(X)$ şəklində D. f.-lar toplusundan $g_i(X)$ D. f. əvəzinə istifadə edilərsə, həlledici qayda dəyişmir, burada $a(X) > 0$ və $b(X)$, – X-in ixtiyari funksiyasıdır. Buna görə də, ümumiyyətlə, məs., $b(X) = -g_k(X)$, $a(X) \equiv 1$ qəbul edərək $k-1$ sayda D. f. təyin etmək kifayətdir.

Xüsusi halda, $k = 2$ olduqda, yalnız $g(X) = g_1(X) - g_2(X)$ D. f.-ndan istifadə edərək, $X \in H_1$ olduğunu qəbul etmək olar, bu şərtlə ki, $g(X) > 0$ olsun, $g(H) \le 0$ olduqda isə $X \in H_2$ olduğunu qəbul etmək olar. $g(X)$ D. f.-sının həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, bu funksiya H_2 sinfinə uyğun oblastdan H_1 sinfinə uyğun p–ölçülü fəza oblastını ayıran səthin tənliyini təyin edir. Bu və ya digər mənada optimal D. f.-ların qurulması (qiymətləndirilməsi) *diskriminant analizin* məsələlərindən biridir.

Tarixi olaraq, D. f.-ya aid ilk misal 1936-da Fişer tərəfindən xətti D. f. kimi iki sinfin ayrılması üçün təklif olunmuşdur və bu siniflər

öyrədici seçimlərlə (bax, *Diskriminant analiz*) verilir və bu funksiya aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$g(X) = X^{\mathsf{T}} S^{-1}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \\ - \frac{1}{2}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^{\mathsf{T}} S^{-1}(\overline{X}_1 + \overline{X}_2) + c,$$

burada S^{-1} – kovariasion matrisin seçimi statistik qiymətidir və fərz olunur ki, o, hər iki sinif üçün eynidir; $\overline{X}_i$, – H_i sinfi üçün orta qiymətlər vektorunun statistik qiyməti; c – siniflərin aprior ehtimallarından asılı olaraq seçilən sabitdir.

Əd.: [1] Fisher R. A., «Ann. Eugenics», 1936, v. 7, 179–88; [2] Андерсон T., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., M., 1963.

DİSKRİMİNANT MODEL « дискриминантная модель; discriminant model » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli.*

DİSKRİMİNƏDİCİ EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « дискриминирующих экспериментов планирование; design of discriminating experiments », hipotezləri yoxlama üçün, modeli seçmə üçün eksperimentin planlaşdırılması, – paylanmanın növü haqqında hipotezlərin yoxlanılmasında kriterilərin gücünün funksionallarının maksimizasiyası üçün *eksperimentlərin planlaşdırılması* metodlarıdır. Aşağıda *reqression eksperiment* modellərindən birinin seçilməsi və xətti hipotezlərin lokal gücünün maksimizasiyası üçün alınan nəticələr şərh olunmuşdur. Planlaşdırılan $y_1,...,y_N$ ölçmələrinin

$$H_i : y_j = \eta_i(x_j, \theta^i) + \varepsilon_j, \quad j = 1,...,N \qquad (*)$$

modellərindən biri ilə təsvir olunduğu fərz olunur, $i = 0, 1$ (sadəlik naminə), $\theta^i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$, ε_j – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, $\mathbf{M}\varepsilon_j = 0$, $\hat{\mathbf{D}}\varepsilon_j = \sigma^2$, $\xi = (x_1,..., x_N)$ – reqression eksperimentin planıdır. $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin normal qanunla paylandığı da fərz olunarsa, ξ planı üçün

$$\sigma^{-2} T_i(\xi, \theta^i) = \sum_{j=1}^{N} (\eta_i(x_j, \theta^i) - \eta_{1-i}(x_j, \theta^{*1-i}))^2$$

kəmiyyəti H_i modeli doğru olduğu halda H_{1-i}-yə adekvat F – kriterinin (və ya χ^2 – kriterinin, σ^2 məlum olduğu halda) qeyri – mərkəzilik parametridir. Burada θ^{*1-i}, – H_{1-i} modeli ilə $L^2(\xi)$-də ən yaxşı $\eta_i(\cdot, \theta^i)$ yaxınlaşmasını təyin edir. H_i modelində diskriminasiyanın gücü artan T_i funksiyasıdır ki, bu $T_i(\xi, \theta^i)$-ni maksimallaşdıran planın axtarılmasının zəruriliyini sübut edir.

Eksperimentin ardıcıl planlaşdırılmasına baxılır və fərz olunur ki, H_i modelində onun statistik proyeksiyası ξ^* planına zəif yığılır və bu plan isə T_i-dən daha ümumi olan və robast qiymətləndirmə və xətaların ümumi paylanmalarında istifadə olunan

$$\Gamma_i(\xi, \theta^i) = \\ = \min_{\theta^i \in \Omega_{1-i}} \int F\left(\sum_{j=1}^{N} (\eta_i(x_j, \theta^i) - \eta_{1-i}(x_j, \theta^i))\right) \xi(dx)$$

funksionalının maksimumunu təmin edir.

Belə planların asimptotik optimallığı haqqında nəticələr «*Ardıcıl planlaşdırılması, eksperimentin*» məqaləsində verilmiş nəticələrə analojidir. Alqoritm induktiv verilir. Ölçmələrin $x_1, ..., x_n$ nöqtələrində aparıldığı və yeganə

$$\hat{\theta}_{in} = \arg \min_{\theta^i \in \Omega_i} \sum_{j=1}^{n} F(y_j - \eta_i(x_j, \theta^i)), \quad i = 0, 1$$

statistik qiymətlərinin tapıldığı fərz olunur.

$$x_{n+1} = \arg \max_{x \in X} F(\eta_0(x, \hat{\theta}_{0n}) - \eta_1(x, \hat{\theta}_{1n}))$$

tapılır və x_{n+1} nöqtəsində $(n+1)$-ci ölçmə aparılır. Bu prosedurun aparılması ekvivalentlik teoreminə əsaslanır (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*). Bəzi fərziyyələr ödənilmədiyi halda prosedurun modifikasiyaları tətbiq olunur.

Ölçmələrin ilkin seriyasında

$$\min_{\theta \in \Omega_i} \int F(\eta_1(x, \theta^1) - \eta_0(x, \theta^0)) \xi(dx), \quad i = 0, 1$$

funksionalını maksimizasiyalayan ξ^* planını götürmək məqsədəuyğundur.

ξ^*-nun maksimum plan olması üçün zəruri və kafi lokal şərtlər alınmışdır və bu şərtlər $\eta_0(\cdot) - \eta_1(\cdot)$ tipli funksiyalarla sıfırın müntəzəm yaxınlaşması nəzəriyyəsinə əsaslanır.

Misal: $\eta_0(\cdot)$ və $\eta_1(\cdot)$ k və $k+d$ dərəcəli $[-1, 1]$ parçasında birölçülü çoxhədlilərdir, $\eta_1(x) = \sum_{m=0}^{k+d} \theta_m x^m$, $F(y) = y^2$, $\Omega_1 = \left\{\theta: \sum_{m=1}^{d} \theta_{n+m}^2 \geq 1\right\}$. İsbat olunmuşdur ki, ξ_l planı $T_{k+d}(x)$ Çebışev çoxhədlisinin ekstremum nöqtələrində yeganə maksimum plandır və ξ^*-nun sərhəd nöqtələrinin eyni çəkiləri ξ^*-nun daxili nöqtələrinin çəkilərindən iki dəfə azdır (bax, [2]). k və $k+d$ dərəcəli r – ölçülü çoxhədlilərin diskriminasiyası üçün maksimum plan uyğun birölçülü planların düz hasilidir, $d = 1, 2$. Daşıyıcısı kiçik çoxölçülü maksimum planlar (bax, [2]) digər Ω_1 və reqressiya funksiyaları (məs., triqonometrik polinom üçün) üçün də tapılmışdır.

Əgər H_i modeli üçün π_i aprior çəkiləri və θ^i, $i = 1, ..., m$ üçün F_{0i} paylanmaları vardırsa, belə ki,

$$\eta_i(x, \theta^i) = f_i^{\mathsf{T}}(x)\, \theta^i$$

olduğu da nəzərə alınarsa, onda $\eta(\cdot) = \sum \theta^i f_i(\cdot)$ modeli üçün bloklu informasion M matrisi təşkil olunur və θ^i üçün ən

kiçik kvadratlar statistik qiymətlərin kovariasiyaları matrisinin alt matrisi $M_{(i)}$ və

$$\theta_0^i = \int \theta^i F(d\theta^i), \quad D_0^i = \int (\theta^i - \theta_0^i)(\theta^i - \theta_0^i)^{\mathsf{T}} F(d\theta^i)$$

aprior momentləri tapılır. Onda (*) kriterisinin Beyes variantı

$$\sum \pi_{0i} \operatorname{tr}[\, M_{(i)}(\xi)(D_0^i + \theta_0^i(\theta_0^i)^{\mathsf{T}})\,]$$

ifadəsilə təyin olunur.

Maksimum və Beyes planlarının axtarışı üçün müxtəlif iterasiya prosedurları tapılmışdır (bax, məs., [1]).

Plan və reqressiya funksiyaları üzərinə qoyulan təbii şərtlər və xətaların paylanma sıxlıqlarının requlyarlığı halında reqression eksperiment lokal asimptotik normallıq xassəsinə malik olur, odur ki, normallıq halında optimal kriterilər böyük seçimlər üçün asimptotik optimal olur (bax, [3]). (*) Qauss xətti reqression eksperimenti üçün $0<\alpha<1$, α səviyyəli H_0 hipotezinin ψ meylsiz kriterisi gücünün ikinci tərtib törəmələri matrisi $D_\Phi(\xi)$ -yə baxılır. F –kriteri meylsiz olduğundan, onun gücü H_0 hipotezində sabitdir və H_0 hipotezində onun qradiyenti sıfra bərabərdir. Əgər $\Phi(\cdot)$ «*Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*» məqaləsindəki şərtləri ödəyərsə, ξ_l isə $\Phi(D_\Phi(\xi))$ -ni minimallaşdırarsa, onda ξ^* (Φ, Φ) – p l a n adlanır. (Φ, Φ) – planların və Φ -ə müəyyən mənada qoşma, H_0 hipotezində sıfra bərabər olan, θ^1 parametrlərinin ən kiçik kvadratlar statistik qiymətlərinin kovariasiyalar matrisinin funksiyasını minimallaşdıran planların ikilik xassəli olduğu isbat olunmuşdur (bax, [4]). Əgər $\operatorname{tr} D_F(\xi_l)$ maksimaldırsa və D_F vahid matrisə bölünəndirsə, onda ξ^* və F – kriteridən təşkil olunmuş prosedur bütün planlar və H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün meylsiz kriterilər arasında $D(\cdot)$ matrisinin Şuruya görə maksimumunu təmin edir. Əgər θ^1 növ effektlərinin ziddiyyətlər bazisidirsə, balanslanmış bloklu planlar belə planlardandır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983, гл.16; [2] М а л ю т о в М. Б., в кн.: Планирование оптимальных экспериментов, M., 1975; [3] Р у с а с Д ж., Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., M., 1975; [4] M u l l e r - F u n k U., P u k e l s h e i m F., W i t t i n g H., «Linear Algebra Appl.», 1985, v. 67, p. 190–34.

DİSPERSİON ANALİZ « дисперсионный анализ; analysis of variance » – eksperimentin nəticələrinə müxtəlif faktorların təsirinin öyrənilməsi üçün statistik metoddur. D. a. ilk dəfə R. Fişer tərəfindən [1]-də aqronomik təcrübələrdən alınan nəticələrin araşdırılması üçün təklif olunmuşdur. O, D. a.-i müxtəlif qruplara aid dispersiyanı ayırmaq metodu kimi təyin etmişdir. Sonralar bu metod ümumi xətti model terminologiyasında ifadə olunmuşdur və buna əsasən də, D. a.-in bir çox məsələlərinə, qiymətləndirmə və reqressiya modellərində hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinə eyni bir nöqteyi – nəzərdən baxılmışdır. Ətraflı tarixi xülasə [2]-də verilmişdir. D. a. müxtəlif sahələrdə – iqtisadiyyat, biologiya və texnikanın bir çox məsələlərinin həllində müasir baxımla tətbiq olunur.

D. a.-in hər bir məsələsinin əsasını eksperimentin planı, yəni aparılan ölçmələrin baxılan faktorların müəyyən kombinasiyaları ilə uzlaşdırılması qaydası, D. a.-in modeli, yəni hər bir faktorun və faktorların hər bir kombinasiyasının effektlərinin və təsadüfi xətaların cəminə bərabər riyazi münasibəti ifadə edən model təşkil edir. Qarşıya çıxan məsələlər bu effektlərin qiymətləndirilməsi və bunlar üçün irəli sürülmüş statistik hipotezlərin yoxlanılması ilə bağlı olur.

Qeyd olunmalıdır ki, D. a.-in planlaşdırılan eksperimentlərin üzərində yenidən işlənilməsi üçün və məhz bu hallar üçün daha effektlə istifadə olunmasına baxmayaraq, onun standart prosedurları öncədən planlaşdırılması nəzərdə tutulmayan eksperimentlərin də üzərində yenidən işlənilməsi üçün, məs., seçimlərlə bağlı araşdırma məsələlərində geniş tətbiq olunur. Bu halda modellərin formalaşdırılması və yenidən işlənmədən alınan nəticələri interpretasiya məsələləri olduqca mürəkkəbləşir.

D. a. məsələlərinin təsnifatı ən əvvəl analiz olunacaq faktorların xüsusiyyətlərinə əsaslanır: müxtəlif modellər, o cümlədən, sabit faktorlarlı model (I model), təsadüfi faktorlarlı model (II model və ya k o m p o n e n t a n a l i z modeli) və qarışıq modellər; bundan əlavə faktorlarının bir hissəsi kəmiyyət (reqression) dəyişənləri olan, digər hissəsi isə kəmiyyətlə xarakterizə olunmayan modellər də mövcuddur. Belə modellərin analizi metodları *kovariasion analizin* xüsusi bir oblastına ayrılır. Bundan başqa, D. a. məsələləri analiz olunan faktorların sayına görə (birfaktorlu, ikifaktorlu analiz və s.) və eksperimentin istifadə olunan planının növünə görə fərqlənir. Məs., fərz olunur ki, araşdırmaya p sayda faktor daxil olunmuşdur və i-ci faktorun m_i sayda qradasiyası (səviyyəsi) vardır; onda eksperimentin şərtlərinin müxtəlif birləşmələrinin sayı $m = m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_p$ -yə bərabərdir. Əgər bu şərtlərdən hər birinə heç olmazsa bir müşahidə uyğun olarsa, belə sxem, – t a m p – p l a n adlanır. Əgər eksperimentdə şərtlər çoxluqlarının q saydasının müqayisə olunması tələb olunursa, onda, adətən, müşahidələr nəticələri bir-birinə yaxın bloklarla qruplaşdırılır. Bu halda hər bir blokda elə müşahidələr varsa ki, onlar bütün şərtlər çoxluqlarının q saydasının hamısına uyğun olur, onda belə sxem, – t a m b l o k p l a n, bir hissəsinə uyğun olduğu halda sxem, – n a t a m a m b l o k p l a n adlanır.

Nəzərə alınmayan faktorların təsirinin azaldılması məqsədilə, blokların daxilində müşahidələrin yerləşdirilməsi üçün müəyyən bir təsadüfi mexanizmdən istifadə olunur. Eksperimentlərin belə planları t ə s a d ü f i və ya r a n d o m l a n m ı ş planlar adlanır (bax, [3], [4]).

Misal kimi təbii mühitdə insan orqanizmində qazabənzər azotun yaranması ilə əlaqədar alınmış məlumatlara nəzər salmaq olar.

M i s a l 1. Y – insanın nəfəs verdiyi azotun miqdarını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət (litrlə), $\mu = \mathbf{M}Y$ nəfəsvermədəki azotun orta miqdarı olsun. y -in realizasiyaları tərkibində zülalları faizlə xarakterizə olunan dörd qidalanma rejimi (faktor A) üçün araşdırılır. Y_{ij}, $i = 1,...,q$ (burada $q = 4$), $j = 1, ..., n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, uyğun y_{ij} realizasiyası isə i-ci pəhrizli yoxlanılan şəxsin nəfəs verdiyi azotun miqdarı olsun. $\mathbf{M}Y_{ij} = \mu + \alpha_i$; burada α, – i-ci pəhrizin effekti, n_i, – i-ci pəhrizli müşahidə olunanların sayı, $i = 1, ..., q$, $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$. Bu halda uyğun riyazi model

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij}, \; i = 1, ..., 4, \; j = 1, ..., n_i \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunur, burada Y_{ij}, – i-ci pəhrizli j-ci müşahidə olunan üçün alınmış nəticələr, ξ_{ij} – təsadüfi xətadır. Əgər

məsələnin qoyuluşunda dəqiq olaraq dörd pəhriz qeyd olunmuşdursa, (D_1 – zülalsız, D_2 – 23% zülallı, D_3 – 32% zülallı, D_4 – 67% zülallı pəhrizlər), onda sabit effektli (faktor) birfaktorlu D. a. modeli – I model alınır. Bütün differensial effektlərin sıfra bərabər olması, yəni $\alpha_i = 0$ olması hipotezi H_0 yoxlanılır.

M i s a l 2. Misal 1-in şərtlərində pəhrizdəki zülalların miqdarının təsadüfi seçildiyi (məs., təsadüfi ədədlər cədvəlindən istifadə edilməklə) və bu ədədlərin 0; 23; 32; 67 olduğu fərz olunur. Bu halda təsadüfi effektli (faktor) bir faktorlu D. a. modeli, – II model alınır.

M i s a l 3. Misal 1-in şərtlərində yalnız pəhrizin deyil (4 səviyyəli faktor A), müşahidə olunan şəxsin cinsinin də (2 səviyyəli faktor B) təsirinin qiymətləndirilməsi tələb olunur.

Bu hala uyğun model

$$Y_{ikj} = \mu + \alpha_i + \beta_k + \gamma_{ik} + \xi_{ikj},$$

$$i = 1, ..., 4, \quad k = 1, 2, \quad y = 1, ..., n_{ik} \qquad (2)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada n_{ik} – faktor A-nın i-ci səviyyəsində və faktor B-nin k-cı səviyyəsində müşahidə olunanların sayı, ξ_{ikj} təsadüfi xətalardır. D. a.-in ikifaktorlu modeli alınır: əgər bütün n_{ik}-lar sıfırdan fərqli olarsa, onda bu, eksperimentin tam ikifaktorlu planı olur. I model və ya II modelin seçilməsi Misal 1, 2-də olduğu kimi eksperimentin şərtlərilə təyin olunur. Burada yoxlanılacaq hipotezlər

$$H_1: \alpha_1 \equiv \varnothing; \quad H_2: \beta_k \equiv \varnothing; \quad H_3: \gamma_{ik} \equiv \varnothing$$

münasibətlərilə təyin oluna bilinər. Bu hipotezlər, uyğun olaraq, əsas effektlərin olmaması hipotezləri (H_1, H_2) və qarşılıqlı təsirin olmaması (H_3) hipotezi adlandırılır.

İrəli sürülən hipotezlərin yoxlanılması məsələsi yalnız müşahidələrdəki xətaların ehtimal strukturu haqqında əlavə fərziyyələrin olunması ilə həll oluna bilər. Adətən, fərz olunur ki, bu xətalar riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası sabit σ^2-na bərabər normal qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və buna görə hesablamalarda ən kiçik kvadratlar metodu nəzəriyyəsindən istifadə etmək olar. Bir qədər yüngül fərziyyələr uyğun olaraq aparılan müşahidələrin sayının kifayət qədər çox olmasını zəruri edir, bu halda asimptotik nəzəriyyənin nəticələrindən istifadə özünü doğruldur.

Baxılan fərziyyələrdə irəli sürülmüş hipotezlərin yoxlanılması üçün kriterilərin statistikaları daxil olmuş model çərçivəsində nəzəri olaraq asılı olmamazlıq şərti və yoxlanılan hipotezin doğru olduğu halında qeyri – mərkəzilik parametrlərinin sıfra bərabər olması şərti ödənilən müşahidələrin kvadratik formalarının münasibətləri şəklində ifadə olunur. Mülahizələrin bu mərhələsində istifadə olunan ən mühüm riyazi nəticələrdən biri K o k r e n t e o r e m i d i r (bax, [5], [7], [8]); bu teoremə görə: ümumi xətti model şərtlərində əgər müşahidələrin kvadratik formaları – $S_1, ..., S_q$ uyğun olaraq, $\nu_1, ..., \nu_q$ ranqlarına malik olarsa və $S = \sum_{i=1}^{q} S_i$ kəmiyyətinin paylanması $\sigma^2 \chi^2(\nu)$ kəmiyyətinin paylanması ilə eyni olarsa, onda $S_1, ..., S_q$ formaları asılı olmayandırlar və onlar $\sigma^2 \chi^2(\nu_i)$ kəmiyyəti paylandığı qanunla paylanmışlar, burada $\nu = \sum_{i=1}^{q} \nu_i$. Beləliklə, $F = (S_i/\nu_i)(S_j/\nu_j)$ tipli statistika – $F(\nu_i, \nu_j)$ Fişer paylanmasına tabedir.

Misal 1-in modeli üçün məsələ

$$S = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

kvadratlar cəminin μ və α_i, $i = 1, ..., 4$ dəyişənləri üzrə minimizasiyasına gətirilir və bu halda əlavə məhdudiyyət – effektlərin çəkili cəminin sıfra bərabər, yəni

$$\sum_{i=1}^{4} n_i \alpha_i = 0$$

olması məhdudiyyəti də qoyulur ki, bu da statistik qiymətin yeganəliyini təmin edir. Ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətlər aşağıdakı kimidir:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mu} = \bar{y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_j} y_{ij}, \quad n = \sum_{i=1}^{4} n_i, \\ \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \bar{y}_{..}, \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Birfaktorlu D. a.-in tipik proqramı $\hat{\mu}$ və $\hat{\alpha}_i$ (və ya $\hat{\mu}_i = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i$) statistik qiymətlərini, SS kvadratik formaların qiymətlərini, onların ranqları ν-nü, dispersiya mənbəindən hər biri üçün MS kvadrat ortalarını səviyyələrarası (və ya qruplararası) və səviyyədaxili (qrupdaxili) MS – kvadratlar ortalarını hesablamağa imkan verir.

Səviyyələrarası dispersiya üçün

$$SS_B = \sum_{i=1}^{4} n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2; \quad \nu_B = 3, \quad MS_B = SS_B / \nu_B, \qquad (4)$$

səviyyədaxili dispersiya üçün

$$SS_R = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2;$$

$$\nu_R = n - 4; \quad MS_R = SS_R / \nu_R \qquad (5)$$

olduğu alınır. MS_R kəmiyyəti σ^2 dispersiyasının adi meylsiz statistik qiymətini təyin edir: $\sigma^2 : MS_R = S^2$. (4) və (5) formalarının asılı olmamazlığı Kokren teoremi vasitəsilə təyin olunur.

Bəzən bütün kvadratların cəmi

$$SS_T = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2; \quad \nu_T = n - 1 \qquad (6)$$

hesablanılır. $H_0 : \alpha_i \equiv 0$ hipotezinin yoxlanılması kriterisinin statistikası da F – n i s b ə t statistikası adlanır; bu statistika üçün eksperiment nəticəsində alınan realizasiya da F – nisbət adlanır və o,

$$F = MS_B \,/ MS_R \qquad (7)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Kritik zona adi qaydalarla $F(\nu_B, \nu_R)$ Fişer paylanması üçün cədvəllərin köməyi ilə təyin olunur.

M i s a l 4. Misal 1-in şərtlərilə $n_1 = ... = n_4 = 9$ olduğu halda alınmış eksperimental məlumatlar aşağıda verilmişdir (bax, [6], [5]):

I modelinin parametrlərinin statistik qiymətləri ən kiçik kvadratlar metodu ilə (3) düsturu vasitəsilə tapılır:

$$\hat{\mu} = 4{,}6284\,;\ \hat{\alpha}_1 = -0{,}5321\,;\ \hat{\alpha}_2 = -0{,}0032\,;$$
$$\hat{\alpha}_3 = 0{,}1193\,;\ \hat{\alpha}_4 = 0{,}4158\,.$$

(5) və (6) kvadratik formaları

$$SS_B = 4{,}2321\,;\ \nu_B = 3\,;\ MS_B = 1{,}4107\,;$$
$$SS_R = 14{,}0569\,;\ \nu_R = 32\,;\ MS_R = 0{,}4393\,;$$
$$SS_T = 18{,}2890\,;\ \nu_T = 35$$

qiymətlərini alır; odur ki F – nisbət $F = 3{,}21$ qiymətini alır və $F(3;\ 32)$ üçün Fişer paylanması cədvəllərindən aydın olur ki, H_0 hipotezi $\alpha < 0{,}05$ olan 1-ci növ səhv ehtimalı ilə inkar olunur. Analiz olunan pəhrizlərin sonrakı müqayisələrini çoxluqların müqayisəsi metodunu tətbiq etməklə aparmaq olar.

n_1	n_2	n_3	n_4
4,079	4,368	4,169	4,928
4,859	5,668	4,709	5,608
3,540	3,752	4,416	4,940
5,047	5,848	5,666	5,291
3,298	3,802	4,123	4,674
4,679	4,844	5,059	5,038
4,870	3,578	4,403	4,905
4,648	5,393	4,496	5,208
3,847	4,374	4,688	4,806
		ortalar	
4,0963	4,6252	4,7477	5,0442

Misal 2 halında fərz olunur ki, faktorların istifadə olunan səviyyələri riyazi gözləməsi μ, dispersiyası σ_a^2 olan normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda model kimi (1) münasibəti götürülür, lakin α_i effektlərinə reqressiyanın qeyri – parametrik statistik qiymətləri kimi – riyazi gözləmələri sıfra bərabər, ξ_{ij} xətalarından asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılır. Burada α_i kəmiyyətlərinin statistik qiymətləri əvəzinə σ_a^2 dispersiyasının statistik qiymətinə baxılır, odur ki, ən kiçik kvadratlar metodu əsasında μ, dispersiyanın komponentləri σ^2 və σ_a^2 kəmiyyətləri qiymətləndirilməlidir (buradan da uyğun texnikanın digər k o m p o n e n t a n a l i z adı alınmışdır), H_0 hipotezi isə $\sigma_a^2 = 0$ münasibətinə gətirilir ki, bu da araşdırılan faktorun (pəhrizin) dispersiyaya heç bir təsir etməməsini ifadə edir. Birfaktorlu komponent analiz halında σ_a^2 statistik qiyməti

$$\sigma_a^2 = (MS_B - MS_R)/k\,,$$

$$k = \frac{1}{q-1}\left[\sum_{i=1}^{q} n_i - \sum_{i=1}^{q} n_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{q} n_i\right]$$

münasibətləri ilə təyin olunur, burada q – araşdırılan faktorun səviyyələrinin sayıdır (qeyd olunan misalda $q = 4$), H_0 hipotezini yoxlamaq üçün isə sabit faktorlarlı modeldə olduğu kimi (7) düsturu ilə verilən F – nisbət statistikasından istifadə olunur. Faktorların sayı çox olduqda hesablama düsturları olduqca mürəkkəb olur (bax, [5], [7]).

D. a.-in müxtəlif sxemləri ilə ətraflı şərh [7]-də verilmişdir. Tətbiqi proqramlar paketinin xüsusi araşdırmaları ilə [5]-ə müraciət etmək olar.

D. a.-in müasir modelləri real eksperimental sxemlərin geniş sahəsini əhatə edir, lakin bir çox nəzəri problemlər hələ də həllini tapmamışdır.

D. a.-in qeyri – parametrik və robast prosedurlarının yenidən işlənilməsinə böyük diqqət yetirilir (bax, [8], [9]).

Əd.: [1] F i s h e r R. A., Statistical methods for research workers, 13 ed., L., 1958; [2] S c h e f f e H., «Ann. Math. Stat.», 1956, v. 27, p. 251–71; [3] Ф и ш е р Р. А., Математика дамы, дегустирующей чай, пер. с англ., в сб.: Современные проблемы математики, М., 1981, с. 46–58; [4] Н а л и м о в В. В., Теория эксперимента, М., 1971; [5] А ф и ф и А., Э й з е н С., Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ, пер. с англ., М., 1982; [6] C i s s i k J. H., J o h n s o n R. E., R o k o s c h D. K., «J. Appl. Physiology», 1972, v. 32, p. 155–59; [7] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [8] Х о л л е н д е р М., В у л ф Д. А., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [9] S c h r a d e r R. M., M c K e a n J. M., «Commun. Statist.», 1977, v. A6, № 9, p. 879–94.

DİSPERSİON ANALİZ; q a r ı ş ı q m o d e l « **дисперсионный анализ;** с м е ш а н н а я м о д е л ь; m i x e d m o d e l **analysis of variance** », II n ö v d i s p e r s i o n a n a l i z, – ölçmə xətalarının kovariasion matrisi qiymətləndiriləcək əmsallarlı (d i s p e r s i y a n ı n k o m p o n e n t l ə r i olan) matrislərin xətti forması olduğu halda *reqression eksperimentin* sxemidir. Bu sxem R. Fişer tərəfindən (bax, [1]) dispersiyanın qiymətləndirilməsi məqsədilə balanslanmış planda dispersion analizin statistik qiyməti (ANOVA) üçün təklif olunmuşdur. Balanslanmayan planda bu statistik qiymətlər, ümumiyyətlə, tutarlı statistik qiymətlər olmur.

Adətən, ölçmələrin N – vektor modeli –

$$y = X\beta + \sum_{i=1}^{l} \sigma_i U_i \Phi_i \qquad (*)$$

modelinə baxılır.

Burada X, U_i – məlum matrislərdir, $\beta \in \mathbb{R}^d$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$ – naməlum parametrlər, Φ_i – asılı olmayan m_i – vektorlar, $\operatorname{cov}\Phi_i = \mathbf{I}_{m_i}$ – vahidi matrislərdir, $i = 1, ..., l$. Bu modeldə

$$\mathbf{M}\, y = X\beta, \quad \operatorname{cov} y = \sum_{i=1}^{l} d_i G_i$$

götürülür, burada $G_i = U_i U_i^{\mathrm{T}}$, $d_i = \sigma_i^2$ – dispersiyanın əmsallarıdır.

Φ_i üçün əlavə requlyarlıq və normallıq şərtlərində (*) ölçmələrinə uyğun ölçülər ailəsinin lokal asimptotik normallığı, böyük həcmli seçimlər və xüsusi tip normalanma olduğu halda $(\beta, d_1, ..., d_l)$ üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik

qiymətlərinin lokal asimptotik minimakslığı doğrudur. Daha ümumi paylanmalar ailəsi və onların asimptotik normallığı üçün maksimal doğruyaoxşarlıq tipli ədədi statistik qiymətlərin təyin olunmasının iterasion prosedurlarının yığılması araşdırılmışdır.

Ən geniş yayılmış statistik qiymətlər orta ölçmələrə nəzərən invariant (MINQUE və bunların Beyes analoqları), y vektoru üzrə biraddımlı kvadratik meylsiz statistik qiymətlərdir, bu şərtlə ki, belə statistik qiymətlər mövcud olsun. Xüsusi hallar üçün orta qiymətlərin statistik qiymətlərinin və dispersiya əmsallarının kovariasion matrisinin funksiyasını optimallaşdıran qarışıq modellərin optimal planlar nəzəriyyəsi inkifaş etdirilmişdir.

Əd.: [1] F i s h e r R., «Trans. Roy. Soc. Edinburgh», 1918, v. 52, p. 399–433; [2] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., M., 1980; [3] R a o C. R., K l e f f e J., Estimation of variance components and applications, Amst., 1988.

DİSPERSİON METOD ədədlər nəzəriyyəsində « **дисперсионный метод** в теории чисел; **dispersion method** in the number theory » –

$$\alpha+\beta=n \qquad (1)$$

şəklində bəzi binar tənliklərin (binar additiv məsələlərin) həlli üçün metoddur, burada α və β – ədədi silsilələrdə olduqca sıx və yaxşı paylanmış natural ədədlər ardıcıllıqlarına aiddirlər.

D. m. Yu. V. Linnik tərəfindən 1958–61-ci illərdə işlənilmişdir və buna görə də, Linnik dispersion metodu da adlandırılan bu metod elementar nəzəri – ehtimali anlayışları (xüsusi halda, dispersiya anlayışı və Çebışev tipli bərabərsizlikləri) İ. M. Vinoqradov və A. Veylin (A. Weil) analitik və cəbri ideyaları ilə özündə birləşdirir.

(1) tənliyi

$$\nu D'+\beta=n \qquad (2)$$

şəklində tənliklərə gətirilir, burada ν, D' – bir-birindən asılı olmadan $\nu\in(\nu)$, $D'\in(D)$ düzbucaqlı oblastından bəzi qiymətləri alırlar, burada (ν) və (D) – bəzi intervallardır, ν – sadə ədədlərdir, D' üzərinə müxtəlif əlavə şərtlər qoyula bilinər. F – bu tənliyin həlləri sayının işarə olunduğu fərz olunur.

İxtiyari $D\in(D)$ üçün

$$\nu D+\beta=n$$

tənliyinin varlığı fərz olunur, $A(n, D)$ ilə bu tənliyin hansısa evristik mülahizələrə görə tapılmış həllərinin sayı işarə olunmuşdur. Onda (2) tənliyinin gözlənilən həllərinin (hipotetik) sayı

$$S=\sum_{D'\in(D)}A(n, D')$$

düsturu ilə ifadə olunur. $F-S=V$ fərqinin statistik qiyməti

$$V=\sum_{D'\in(D)}\left(\sum_{\nu D'+\beta=n}1-A(n, D')\right) \qquad (3)$$

cəmi ilə ifadə olunur. (3)-ə Koşi bərabərsiziliyini tətbiq etdikdə

$$V^2\le D_0V' \qquad (4)$$

bərabərsizliyi alınır, burada D_0, – (D) intervalının uzunluğu,

$$V'=\sum_{D'\in(D)}\left(\sum_{\nu D'+\beta=n}1-A(n, D')\right)^2 \qquad (5)$$

isə (2) tənliyinin həlləri sayının dispersiyasıdır.

(5)-in sağ tərəfindəki cəmləmə bütün $D\in(D)$ üzrə aparılarsa, onda (2)-də D' üzərinə qoyulan bütün əlavə şərtlər götürülür. Bununla yanaşı bu halda dispersiya yalnız arta bilər. Buna görə də,

$$V'\le\sum_{D\in(D)}\left(\sum_{\nu D+\beta=n}1-A(n, D)\right)^2=$$
$$=\sum_1-2\sum_2+\sum_3$$

bərabərsizliyi alınır.

$\sum_1$, $\sum_2$ və $\sum_3$ cəmlərini bəzi hallarda asimptotik olaraq hesablamaq mümkün olur. Əsas çətinlik doğuran D. m.-un əsas cəmi $\sum_1$-in hesablanmasıdır. $\sum_1$ cəminin asimptotik hesablanılması – bəzi funksiyaların kəsri hissələrinin verilmiş seqmentdən olması sayının hesablanması üzrə Vinoqradov metodunun köməyilə, həmçinin cəbri həndəsənin vasitəsilə alınmış triqonometrik cəmlərin yeni qiymətlərindən istifadə olunmaqla aparılır. $\sum_2$ və $\sum_3$ cəmlərinin asimptotikası elementar cəmləmə yolu ilə aparılır. Nəticədə dispersiya çox böyük olmadıqda (3) və (4)-dən (2) tənliyinin həllərinin sayı üçün asimptotika alınır.

(2) şəklində bütün tənliklərin həllərinin sayının birləşdirilməsi (1) tənliyinin həllər sayı üçün asimptotik düstura gətirir.

D. m.-un baxılan sxemi

$$\alpha-\beta=l$$

şəklində tənliklərin həlli üçün də tətbiq olunur, l – sıfırdan fərqli, tam, verilmiş ədəddir.

Bu metodun köməyilə Yu. V. Linnik və b.-ları (bax, [3]) bir sıra klassik binar additiv problemləri həll etmişlər, belə ki, D. m.-un yaranmasına qədər bunlar yalnız evristik və ya hipotetik mülahizələrə əsaslandırılma yolu ilə həll olunurdu. Məs., belə problemlərə aid: bölənlərin additiv problemi ($\alpha=x_1, x_2,..., x_k$, $k=\text{const}$, $\beta=xy$); bölənlərin Titçmarş problemi ($\alpha=p$ sadə, $\beta=xy$); Hardi – Litlvud problemini qeyd etmək olar ($a=p$ – sadə, $\beta=x^2+y^2$).

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [2] Б р е д и х и н Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89–130; [3] Б р е д и х и н Б. М., Л и н н и к Ю. В., Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 5–22.

DİSPERSİON NİSBƏT PAYLANMASI « дисперсионного отношения распределение; variance ratio distribution » – bax, *Fişer F – paylanması*.

DİSPERSİYA « дисперсия; variance », təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası – ξ təsadüfi kəmiyyətinin ikinci tərtib mərkəzi momentinə deyilir; ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsindən yayınma ölçüsü $\mathbf{D}\xi$-ni ifadə edir (aydındır ki, riyazi gözləmənin varlığı fərz olunur). D. təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikalarından biridir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası

$$\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2 \qquad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur.

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2;$$

əgər c həqiqi ədəddirsə, onda

$$\mathbf{D}(c\xi) = c^2\,\mathbf{D}\xi,$$

məs., $\mathbf{D}(-\xi) = \mathbf{D}\xi$, D.-nın əsas xassələrindən biridir.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası anlayışı yalnız $\mathbf{M}\xi$ riyazi gözləməsinin varlığı halında məna kəsb edir ($\mathbf{M}\left|\xi\right| < \infty$); bu halda $\mathbf{D}\xi$ sonlu, ya da sonsuz (yəni dispersiya mövcud deyil) ola bilər. Müasir ehtimal nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi elementar hadisələr fəzası üzrə Lebeq inteqralı kimi təyin olunur. Lakin ξ təsadüfi kəmiyyətinin müxtəlif funksiyalarının riyazi gözləmələrini həqiqi ədədlər çoxluğunda bu təsadüfi kəmiyyətin paylanması vasitəsilə ifadə edən düsturlar mövcuddur və bunlar ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiq olunduğu sahələrdə mühüm rol oynayır.

a) ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, \ldots$ qiymətlərini uyğun olaraq $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$ ehtimalları ilə alırsa ($\sum_k p_k = 1$), onun dispersiyası

$$\mathbf{D}\xi = \sum_k (x_k - \mathbf{M}\xi)^2 p_k$$

düsturu;

b) paylanma funksiyası $F(x)$ olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası, ümumi halda

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2\, dF(x)$$

düsturu (burada inteqral Lebeq – Stiltyes və ya Riman – Stiltyes mənada anlaşılır);

c) paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası

$$\mathbf{D}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2\, p(x)\, dx$$

düsturu ilə hesablanır.

D. təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən yayınma ölçüsünü ifadə edən yeganə ölçü deyildir. Bu prinsiplə digər yayınma ölçülərini də təyin etmək olar. Məs., $\mathbf{M}\left|\xi - \mathbf{M}\xi\right|$, $\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^4$ və s., həmçinin *kvantillərə* əsaslanan yayınma ölçüləri bu prinsiplə təyin olunur. D. anlayışının əsas mühüm rolu onun limit teoremləri üçün istifadəsi ilə izah olunur. Əgər çoxlu sayda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin riyazi gözləmə və dispersiyası məlum olarsa, onda bu cəmin paylanma qanunu uyğun parametrlərlə normal qanuna yaxın olur. Beləliklə, D.-nın ən mühüm xassələri $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin D.-sı $\mathbf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ üçün aşağıdakı ifadə ilə bağlıdır:

$$\mathbf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}\xi_i + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

burada

$$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathbf{M}\{(\xi_i - \mathbf{M}\xi_i)(\xi_j - \mathbf{M}\xi_j)\}$$

– ξ_i və ξ_j təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyasıdır. Əgər $\xi_1, \ldots, \xi_n$ cüt-cüt asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ olur. Buna görə də, cüt-cüt asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\mathbf{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbf{D}\xi_1 + \ldots + \mathbf{D}\xi_n \qquad (2)$$

olur. Lakin (2) bərabərliyi ödənilərsə, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu hökm etmək olmaz. Lakin, bir qayda olaraq, (2) düsturu təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığına əsaslanır. Başqa sözlə, (2)-nin doğru olması üçün $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, yəni $\xi_1, \ldots, \xi_n$-lərin cüt-cüt korrelyar olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olması kafidir.

D. anlayışı iki istiqamətdə tətbiq olunur. Birincisi, ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərilə əlaqədar sahələrdə tətbiqdir ki, burada təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimala görə yığılması müəyyən olunur. Əgər $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ elə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdırsa ki, $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{D}\xi_n \to 0$ şərtini ödəsinlər, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \mathbf{M}\xi_n| > \varepsilon\} \to 0$$

münasibəti (ehtimala görə yığılma) doğrudur (bax, *Çebışev bərabərsizliyi*), yəni n-in böyük qiymətlərində ξ_n təsadüfi kəmiyyəti təsadüfi olmayan $\mathbf{M}\xi_n$ kəmiyyəti ilə üst-üstə düşür. Bu mülahizələr əsasında böyük ədədlər qanunu ilə riyazi statistikada tutarlı statistik qiymətlərin varlığı isbat olunur və təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimala görə yığılması müəyyən edilir. D. anlayışının limit teoremlərində digər tətbiqi normalanma anlayışı ilə bağlı limit teoremləri oblastında istifadə olunur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin normalanması üçün ξ ilə onun riyazi gözləməsinin fərqi ξ-nin kvadratik orta yayınması $\sqrt{\mathbf{D}\xi}$-yə bölünür, yəni $\widetilde{\xi} = (\xi - \mathbf{M}\xi)\big/\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ kəmiyyəti götürülür. Təsadüfi kəmiyyətlərin normalanması yığılan paylanma qanunları ardıcıllığının alınması üçün zəruridir, xüsusi halda, 0 və 1 parametrlərli normal qanuna yığılma üçün, ikincisi, D. anlayışının riyazi statistikada seçimlər üzərində yenidən işlənilmə üçün də zəruri şərtlərdən biri kimi sayılır. Təsadüfi kəmiyyətə stoxastik eksperimentin realizasiyası kimi baxdıqda hesablama şkalasının ixtiyari dəyişikliyi ξ təsadüfi kəmiyyətinin $\widetilde{\xi} = \sigma\xi + a$ təsadüfi kəmiyyətinə çevrilməsinə səbəb olur, a – ixtiyari həqiqi ədəd, σ – müsbət ədəddir. Buna görə də, ξ təsadüfi kəmiyyətinin yalnız yeganə nəzəri paylanma qanunu $F(x)$-in deyil, qanunlar tipinin, yəni $F((x-a)/\sigma)$ tipli heç olmasa iki a və σ parametrlərindən asılı paylanma qanunları ailəsinin araşdırılması məqsədəuyğun sayılır.

Əgər $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$ olarsa, onda $\mathbf{M}\widetilde{\xi} = a$, $\mathbf{D}\widetilde{\xi} = \sigma^2$ olur. Beləliklə, nəzəri qanunun parametrlərinin mənası odur ki, $a = \mathbf{M}\widetilde{\xi}$, $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\widetilde{\xi}}$. Bu parametrlərin seçim üzrə təyin olunma qaydası da bununla izah olunur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

DİSPERSİYA(sı) empirik paylanmanın « **дисперсия** эмпирического распределения; **sample variance / variance** of empirical distribution » – bax, *Seçimi dispersiya.*

DİSPERSİYA; statistik qiymət « **дисперсия;** оценка; estimator of **variance** » – ümumi çoxluğun dispersiyasının *statistik qiymətidir.* $x_1,...,x_n$ dispersiyası σ^2 olan, dördüncü momentə malik ümumi çoxluqdan seçimdirsə, onda

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$$

σ^2 parametri üçün kvadratik statistik qiymətlər sinfində ən yaxşı, yəni ikinci dərəcəli çoxhədlilər olan statistika olub, meylsiz statistik qiymətdir. Burada, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

DİSPERSİYA(sı) təsadüfi çoxluğun « **дисперсия** случайного множества; **variance** of random set » – metrikası ρ olan vektor fəzanın təsadüfi altçoxluğu A-nın qiymətlərinin «səpələnmə» dərəcəsinin xarakteristikasıdır,

$$\mathbf{D}_\rho A = \mathbf{M}\rho^2(A,\ \mathbf{M}A)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\mathbf{M}A$, – A *təsadüfi çoxluğunun* riyazi gözləməsidir.

Əd.: [1] Лященко Н. Н., «Зап. научн. семин. Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР», 1979, т. 85, с. 113–28.

DİSSİPASİYA(sı) turbulentlik enerjisinin « **диссипация** энергии турбулентности; turbulent energy **dissipation** » – kinetik turbulentlik enerjisinin səpələnməsi prosesidir, yəni mayedə daxili (özlü) sürtünmə nəticəsində enerjinin istiliyə keçməsi prosesidir. Mayenin vahid kütləsində vahid zaman ərzində istiliyə keçən enerji miqdarına bərabər, bu prosesin sürətinin ölçüsü də dissipasiya adlanır.

Əd.: [1] Математическая физика. Энциклопедия, М., 1998, с. 188.

DİSSİPATİV MARKOV ZƏNCİRİ « диссипативная цепь Маркова; dissipative Markov chain » – bütün vəziyyətləri ya qayıdışsız və ya sıfır qayıdışlı hesabi Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı).

Əd.: [1] Баруча – Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

DİZYUNKT SPEKTRAL TİPİ, ÖLÇÜLƏRİN « дизъюнктный спектральный тип мер; disjoinct spectral type of measure » – bax, *Sinqulyarlığı, ölçülərin*.

DİZYUNKT TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI « дизъюнктных случайных событий последовательность; sequence of disjoinct random variables » – bax, *Uyuşmayan / dizyunkt təsadüfi hadisələr.*

DLR – ŞƏRTİ « ДЛР – условие; DLR – condition » – *Gibbs təsadüfi meydanları* sinfini uyğun potensial vasitəsilə müəyyən edən şərtdir. Asılı olmayaraq [1] və [2]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1968, т. 2, № 4, с. 31–43; [2] Lanford O., Ruelle D., «Comm. Math. Phys.», 1969, v. 13, № 3, p. 194–215; [3] Preston Ch., Random Fields, B. – [a. o.], 1976; [4] Ruelle D., Thermodynamic formalism. Reading (Mass.), 1978.

DOC PLANI « Доджа план; Dodge plan » – bax, *Statistik nəzarət*, *keyfiyyətə.*

DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİYASI « правдоподобия функция; likelihood function » – X təsadüfi seçiminin hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyası $p(x,\theta)$-dır (θ parametrinin funksiyası kimi baxılan); x arqumenti X-in müşahidəsində stoxastik eksperimentin nəticəsi olub, qeyd olunmuş fərz olunur. $\ln p(x,\theta)$ funksiyası loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyası adlanır. μ ölçüsünü ona ekvivalent digər σ – sonlu ölçü ilə əvəz etdikdə, D. f. (loqarifmik D. f.) θ-dan asılı olmayan vuruq qədər (toplanan qədər) dəyişir. μ ölçüsü əvəzinə θ parametrinin hər hansı qeyd olunmuş θ_0 qiymətinə müvafiq olan, X təsadüfi seçiminin paylanması $\mathbf{P}_{\theta_0}$ götürülərsə, statistik nəticələrdə bu xüsusi hal kimi mühüm rol oynayır; bu halda $\frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mathbf{P}_{\theta_0}}(x)$ doğruyaoxşarlıq nisbəti adlanır. Əgər X təsadüfi seçimi iki komponentə ayrılarsa, yəni $X=(Y,\ Z)$ olarsa, onda Z altseçiminin marginal paylanması vasitəsilə alınan D. f. marginal doğruyaoxşarlıq funksiyası adlanır, Z komponentinin qeyd olunmuş z qiymətində Y-in şərti paylanması vasitəsilə alınan D. f. – şərti doğruyaoxşarlıq funksiyası adlanır.

«D. f.» anlayışını R. Fişer [1]-də daxil etmişdir.

Bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ « отношение правдоподобия; likelyhood ratio » – statistik qərarlar (həllər) nəzəriyyəsində istifadə olunan elə $Y_n = \frac{q_n}{p_n}$ statistikasıdır ki, bu statistikanın asimptotikası əsasında $(X_1, ..., X_n)$ təsadüfi vektorunun əsl sıxlıq funksiyasını təyin etmək olur, burada fərz olunur ki, $X_1, ..., X_n, ...$ hər hansı təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $p_n = p_n(X_1, ..., X_n)$ və $q_n = q_n(X_1, ..., X_n)$, – $(X_1, ..., X_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının sıxlıq funksiyalarıdır. Lakin bu funksiyalardan hansı birinin əsl sıxlıq funksiyası olduğu məlum deyildir. Bu məsələnin həlli üçün

$$Y_n = \frac{q_n(X_1, ..., X_n)}{p_n(X_1, ..., X_n)}$$

statistikalarına baxılır. Aydındır ki, kifayət qədər güclü requlyarlıq şərtləri ödənilərsə və əsl sıxlıq funksiyaları p_n-lərdirsə, onda $X_1, ..., X_n$ kəmiyyətlərinin müşahidə olunan qiymətləri orta mənada p_n-lərin nisbətən böyük qiymətlər aldığı nöqtələr ətrafında qruplaşacaqdır. Bu halda, aydındır ki, Y_n kəmiyyəti p_n-in, yaxud q_n-in əsl sıxlıq funksiyası olmasından asılı olaraq,

ya kiçik və ya böyük olacaqdır. Beləliklə, Y_n-in asimptotikası bu halda qərar qəbul etməyə imkan yaradır.

p_n-lərin ciddi müsbət və kəsilməz olduğu fərz olunur. Əgər əsl sıxlıq funksiyaları p_n-lərdirsə, onda X_{n+1} təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş $X_1,...,X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinə nəzərən şərti paylanma sıxlığı p_{n+1}/p_n nisbətinə bərabərdir və deməli,

$$\mathbf{M}(Y_{n+1} \mid X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)}{p_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)} \cdot \frac{p_{n+1}(x_1, ..., x_n, y)}{p_n(x_1, ..., x_n)}\, dy. \qquad (*)$$

Burada inteqralaltı ifadədə p_{n+1} funksiyaları ixtisar olunur; ikinci kəsrin məxrəci isə y-dən asılı deyildir. q_{n+1}-in inteqralı isə q_n sıxlığını verir. Beləliklə, (*)-dakı inteqral q_n/p_n nisbətinə bərabər olur və buna görə də,

$$\mathbf{M}(Y_{n+1} \mid X_1, ..., X_n) = Y_n$$

olduğundan D. n. Y_n martinqal əmələ gətirir.

Bax, *Doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi*, *Monoton doğruyaoxşarlıq nisbəti.*

Əd.: [1] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ monoton **« правдоподобия отношение** монотонное; monoton **likelihood ratio »** – bax, *Monoton doğruyaoxşarlıq nisbəti.*

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ təsadüfi proseslər üçün **« правдоподобия отношение** для случайных процессов; **likelihood ratio** for random processes **»** – bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ KRİTERİSİ « отношения правдоподобия критерий; likelihood ratio test, LRT », D. n. k. – evristik *maksimal doğruyaoxşarlıq prinsipindən* istifadə edilməklə qurulmuş *statistik kriteridir*; bu kriteri doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasına əsaslanır və bu statistika – ilkin hipotezi təşkil edən paylanmalar çoxluğunda *doğruyaoxşarlıq funksiyalarının* supremumunun bütün baxılan paylanmalar çoxluğunda doğruyaoxşarlıq funksiyalarının supremumuna nisbətinə bərabərdir. D. n. k. Yu. Neyman və E. Pirson tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1], [2]).

X paylanması $\mathbf{P}_\theta$ naməlum $\theta \in \Theta$ parametrindən asılı və hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən sıxlıq funksiyasına malik olan təsadüfi seçim olsun. X üzərində müşahidə nəticəsi x üzrə $H_1 : \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Θ_0 və Θ_1, – Θ-nın boş olmayan kəsişməyən, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ şərtinin ödəyən altçoxluqlarıdır. D. n. k. $\varphi(\cdot)$

$$\lambda(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} p(x, \theta) \Big/ \sup_{\theta \in \Theta} p(x, \theta) \qquad (1)$$

doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasına əsaslanır və ümumi qəbul edilmiş (1) statistikasının kiçik qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etmir. D. n. k. (1)-dəki işarələmə ilə əlaqədar bəzən λ – kriteri də adlanır. $\Theta_i = \{\theta_i\}$, $i = 0, 1$ olduğu iki hipotezin müqayisəsi (yoxlanılması) halında (1) statistikası

$$p(x, \theta_0) / \max\{p(x, \theta_0);\ p(x, \theta_1)\} =$$

$$= \min\{1;\ p(x, \theta_0)/p(x, \theta_1)\}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur və D. n. k. bu məsələdə ən güclü Neyman – Pirson kriterisi ilə üst-üstə düşür.

Mühümlük ölçüsü α-ya bərabər $\varphi(x)$ D. n. k. üçün $\{x : \lambda(x) < \lambda_\alpha\}$ kritik oblastının səddi λ_α-nı təyin etməkdən ötrü və $\beta(\theta; \varphi) = \mathbf{M}\varphi(X)$ güc funksiyasını hesablamaq üçün (1) doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasının paylanmasını hesablamağı bacarmaq zəruridir. Əsas etibarilə normal paylanma ilə bağlı bəzi konkret $\{\mathbf{P}_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ ailələri üçün doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasını aşkar şəkildə almaq olur, λ_α sədləri və güc funksiyasının qiymətləri üçün isə cədvəllər tərtib olunmuşdur. Lakin ümumi halda bu istiqamətdə yalnız asimptotik nəticələr alınmışdır.

X ümumi paylanması $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin toplusu $X^{(n)} = (X_1, ..., X_n)$ olan n – həcmli seçim olsun. $X^{(n)}$ seçiminin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_n(x^{(n)};\ \theta) = \prod_{1 \le i \le n} p(x_i, \theta),$$

(1) statistikası isə

$$\lambda_n(x^{(n)}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} p_n(x^{(n)}, \theta) \Big/ \sup_{\theta \in \Theta} p_n(x^{(n)}, \theta) \qquad (2)$$

düsturları ilə ifadə olunur. Əgər Θ_0 çoxluğu $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $r = k - m > 0$ parametrik çoxluğunun m – ölçülü altçoxluğudursa, onda $L_n = -2\ln\lambda_n(X^{(n)})$ təsadüfi kəmiyyəti H_0 hipotezi şərtilə (bütün $\theta \in \Theta_0$ üçün) $n \to \infty$ olduqda asimptotik olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı r-ə bərabər mərkəzi χ^2 paylanmasına malikdir və buna görə də, D. n. k. asimptotik *oxşar kriteridir.* D. n. k.-nin güc funksiyasını hesabladıqda, adətən, birbirinə yaxınlaşan H_{1n} alternativlərinə baxılır:

$$\theta \in \Theta_{1n} = \{\theta = \theta_0 + \lambda/\sqrt{n};\ \theta_0 \in \Theta_0,\ \lambda \in \mathbb{R}^k \setminus \Theta_0\}$$

burada, əvvəldəki kimi, Θ_0, – $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ çoxluğunun altçoxluğudur. Onda L_n statistikası asimptotik olaraq mərkəzi olmayan, sərbəstlik dərəcəsi sayı r-ə bərabər χ^2 paylanmasına malik olur və bu halda qeyri – mərkəzilik parametri hər hansı aşkar şəkildə yazılan, λ parametrinin kvadratik forması olur; bu kvadratik formanın əmsalları $\theta_0 \in \Theta_0$-dan asılıdır. Bu nəticə A. Vald tərəfindən alınmışdır və bu nəticənin xüsusi halları və onların dəqiqləşdirilmələri, ümumiləşmələri də ona məxsusdur (bax, [3] – [6]). Doğruyaoxşarlıq nisbəti statistikasının asimptotikasının araşdırılmasında və D. n. k. haqqında uyğun nəticələrin alınmasında böyük irəliləyiş statistik məsələlərə asimptotik

yanaşma ilə bağlıdır (bax, [6] – [9]); bundan başqa, (2) statistikasının paylanması üçün asimptotik ayrılış alınmışdır (bax, [10] – [11]).

(1) statistikasını [və uyğun olaraq (2)] aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\lambda(x) = p(x, \hat{\theta}_0) \big/ p(x, \hat{\theta}),$$

burada $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$, – $\{\mathbf{P}_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ ailəsi üçün θ parametrinin maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir, $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}_0(x)$, – $\{\mathbf{P}_\theta;\ \theta \in \Theta_0\}$ ailəsi üçün ilkin hipotez şərtində θ parametrinin maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir. Beləliklə də, D. n. k. statistikasının qurulması $\hat{\theta}_0$ və $\hat{\theta}$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərinin hesablanması ilə bağlı olur. Lakin D. n. k.-nə asimptotik ekvivalent bir sıra kriterilər vardır ki, hesablanma baxımından daha sadədir, məs., *Vald kriterisi*, *Rao kriterisi*, $C(\alpha)$ *statistik kriterisi* və s. (bax, [6]).

Statistik nəticənin alınması üçün əsas olan maksimal doğruyaoxşarlıq prinsipi özü-özlüyündə elə ciddi formal üstünlüklərə malik olmasa da, bununla belə, onun əsasında alınan D. n. k. bir sıra hallarda, əsas etibarilə, asimptotik xassələrə malik olur (bununla yanaşı elə misallar vardır ki, D. n. k. hətta məqbul kriteri belə olmur). Məsələlərin geniş sinfi üçün D. n. k.-nin ümumi xassələri – meylsizlik, invariantlıq (nisbətən münasib çevirmələr qrupuna nəzərən), tutarlılıq kimi xassələr müəyyən olunmuşdur. D. n. k. – asimptotik ən orta güclü kriteridir (informasion matrisin doğurduğu ellipsoidlərdə güc funksiyasının ortalanması şərtində) (bax, [3]); asimptotik müntəzəm ən güclü invariant kriteridir (nisbətən münasib xətti çevirmələr qrupuna nəzərən). D. n. k. Bahadur asimptotik optimal kriterisidir (bax, [12]), *asimptotik minimaks kriteri* və *asimptotik Beyes kriterisidir* (hamar aprior paylanmaların geniş sinfi üçün) (bax, [13]).

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, pt 1, p. 175–240; pt 2, p. 263–94; [2] Neyman J., Pearson E. S., «Phil. Trans. Roy. Soc. London», 1933, v. A 231, p. 289–337; [3] Wald A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, № 3, p. 426–82; [4] Wilks S. S., «Ann. Math. Statist.», 1938, v. 9, № 1, p. 60–62; [5] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [6] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56; [7] Le Cam L., в кн.: Proceedings of the 3-ed Berkeley symposium mathematical statistics and probability, v. 1, Berk. – Los. Ang., 1956, p .129–56; [8] Le Cam L., «Univ. Calif. Publs. Statist.», 1960, v. 3, № 2, p. 37–98; [9] Русас Дж., Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [10] Chibisov D. M., van Zwett W. R., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 3, с. 417–39; [11] Pfanzagl J., в кн.: Developments in statistics, N. Y., 1980, v. 3, p. 1–97; [12] Bahadur R. R., Some limit theorems in statistics, Phil., 1971 (SIAM); [13] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [14] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ gücləndirilmiş **« правдоподобия принцип** усиленный; strong **likelihood principle »** – bax, *Ən böyük doğruyaoxşarlıq prinsipi.*

DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ zəif **« правдоподобия принцип** слабый; weak **likelihood principle »** – bax, *Ən böyük doğruyaoxşarlıq prinsipi.*

DOĞRUYAOXŞARLIQ TƏNLİYİ « правдоподобия уравнение; likelihood equation » – *maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinin* tapılması üçün tənlikdir.

DOĞUM ANI « рождения момент; birth time » – bax, *Qırılma anı*.

DOĞUM VƏ ÖLÜM PROSESİ « рождения и гибели процесс; birth–and–death process » – vəziyyətləri çoxluğu $\{0, 1, 2, ...\}$ olan *Markov prosesidir* və $h \to 0$ şərtində, h müddəti ərzində n vəziyyətindən $n+1$ və $n-1$ vəziyyətlərinə uyğun olaraq, $\lambda_n h + o(h)$ və $\mu_n h + o(h)$ ehtimalları ilə keçid mümkündür; digər keçidlərin ehtimalı $o(h)$-a bərabərdir. Artım əmsalları λ_n-lərin və ölüm əmsalları μ_n-lərin xüsusi olaraq seçilməsindən asılı olaraq xüsusi hallar alınır və bu da müxtəlif real proseslərin: radioaktiv çevrilmələr, telefon stansiyalarının fəaliyyəti, bioloji populyasiyaların evolyusiyası və s. kimi proseslərin təsviri üçün məqbul olur. D. və ö. p.-ndən tətbiqi sahələrdə istifadə olunmasına səbəb keçid ehtimalları üçün tənliklərin sadəliyidir və bunları əksər hallarda aşkar şəkildə tapmaq olur. D. və ö. p.-nin xüsusi halları – *sırf artım prosesi*, *Yul prosesidir*. Əgər $\lambda_n = n\lambda + \nu$, $\mu_n = n\mu$ olarsa, onda D. və ö. p. – *immiqrasiyalı şaxələnən proses* olur və bu halda n – hissəciklərin sayıdır; hər bir hissəcik $h \to 0$ müddəti ərzində $\mu h + o(h)$ ehtimalı ilə yox olur (itir); $\lambda h + o(h)$ ehtimalı ilə iki hissəyə ayrılır, bundan başqa, bir hissəcik $\nu h + o(h)$ ehtimalı ilə xaricdən immiqrasiya edir. Əgər $\nu = 0$ olarsa, *binar şaxələnən proses* olur. Əgər $\nu = 0$ olarsa, onda belə immiqrasiyalı proses xətləri sayı sonsuz telefon sisteminin təsviri məqsədilə tətbiq oluna bilinər. Bu halda sistemin vəziyyəti məşğul xətlərin sayıdır. Artım əmsalı $\lambda_n = \nu$ daxil olan çağırışları, μ isə danışıq müddətini xarakterizə edir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982.

DOĞURAN FUNKSİONAL(ı) ölçülərin kəsilməz konvolyusion semiqrupunun **« порождающий функционал** непрерывной сверточной полугруппы мер; **generating functional** of a continuous convolution of measures semigroup **»** – lokal kompakt G qrupunda, kompakt daşıyıcıya malik sonsuz differensiallanan bütün f funksiyalarının fəzası $D(G)$-də

$$Af := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\int_G f(x) \mu_t(dx) - f(e) \right]$$

qaydası ilə verilən xətti A funksionalıdır, burada $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$, – G qrupunda ölçülərin hər hansı kəsilməz konvolyusion semi–qrupudur. A funksionalını $\mathcal{E}(G)$ requlyar funksiyalar [yəni elə kəsilməz məhdud g funksiyalarının ki, ixtiyari $f \in D(G)$ üçün $fg \in D(G)$ şərti ödənilsin] fəzasına birqiymətli davam etdirmək olar.

A D. f. birqiymətli olaraq, kəsilməz konvolyusion $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ semi – qrupunu təyin edir. Kəsilməz konvolyusion semi – qruplar sinfində yığılmanı D. f. vasitəsilə təsvir etmək olur. μ_t və $\mu_t^{(n)}$,

$t \geq 1$ D. f.-ları A və A_n olan kəsilməz konvolyusion semi – qruplar olsun. $\mu_t^{(n)}$ ardıcıllığı μ_t -yə $n \to \infty$ olduqda, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, ixtiyari $f \in \mathscr{E}(G)$ üçün $n \to \infty$ olduqda $A_n f \to A f$ münasibəti ödənilsin (bax, [1] – [3]).

Müşayiətedici sonsuz bölünən qanunlar haqqında analoji klassik nəticə aşağıdakı müddəadır. ν_n , – G qrupunda ehtimal ölçüləri ardıcıllığı, k_n , – $k_n \nearrow \infty$ şərtini ödəyən, tam müsbət ədədlər ardıcıllığı, $\{ \mu_t, t \geq 0 \}$ – D. f. A olan kəsilməz konvolyusion semi – qrup olsun. Onda aşağıdakı müddəalar ekvivalentdirlər:

1) $\nu_n^{[k_n t]} \to \mu_t, \ t \geq 0$ (diskret semi – qrupların yığılması);

2) $\exp [t k_n (\nu_n - \delta_e)] \to \mu_t , \ t \geq 0$ (müşayiətedici qanunların yığılması);

3) $\mathscr{E}(G)$ –də $k_n (\nu_n - \delta_e) \to A$ (D. f.-nın yığılması). Bu nəticə qruplarda dayanıqlı paylanmaların cazibə oblastlarının təsvirində olduqca mühümdür və qruplarda ehtimal paylanmaları üçün limit teoremlərini uyğun Li cəbrlərində, yəni sonluölçülü vektor fəzalarında analoji məsələlərə gətirməyə imkan yaradır (bax, [2], [4]).

Əd.: [1] Hazod W., «Теория вероятн. и ее примен.», 1995, т. 40, в. 4, с. 929–34; [2] Siebert E., «Adv. Math.», 1981, v. 39, p. 111–54; [3] Khokhlov Yu. S., in: Probability measures on groups X, N. Y., 1991, p. 239–47; [4] Hazod W., Scheffler H.-P., «J. Theor. Probab.», 1993, v. 6, № 1, p. 175–86.

DOĞURAN FUNKSİYA ehtimali « **производящая функция** вероятностная; probability **generating function** » – bax, *Doğuran funksiya*(sı) ədədi ardıcıllığın.

DOĞURAN FUNKSİYA eksponensial « **производящая функция** экспоненциальная; exponential **generating function** » – bax, *Doğuran funksiya*(sı) ədədi ardıcıllığın.

DOĞURAN FUNKSİYA(sı) ədədi ardıcıllığın « **производящая функция** числовой последовательности; **generating function** of a sequence of numbers », $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ ardıcıllığının doğuran funksiyası –

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

qüvvət sırasıdır, burada z – ya formal dəyişən, ya da kompleks və ya həqiqi ədəddir. z -in formal dəyişən kimi götürüldüyü hal kombinator məsələlərin hesablanılması üçün xarakterikdir. $F(z)$ funksiyasının əmsalları a_n -lərin asimptotik xassələrini araşdırarkən, z simvolu kompleks və ya həqiqi ədəd kimi interpretasiya olunur. $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ əmsallarının şəklindən, onların arasında əlaqədən və ola bilsin ki, kombinator interpretasiyanın varlığından asılı olaraq D. f. anlayışını sonradan konkretləşdirmək mümkündür.

Misallar. 1) $b_0, b_1, ..., b_n, ...$ – bəzi kombinator obyektləri hesablayan ədədlər ardıcıllığı olsun;

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$$

funksiyası eksponensial doğuran funksiya adlanır.

2) Əgər X ixtiyari tərtib mütləq momentləri sonlu olan təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M} X^n \frac{z^n}{n!}$$

sırası X təsadüfi kəmiyyətinin momentlərinin doğuran funksiyası adlanır.

3) Əgər X tam qiymətlər alan, mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda

$$F_X(z) = \mathbf{M} z^X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} \{X = n\} z^n$$

bərabərlikləri ilə ehtimali doğuran funksiya və ya sadəcə, X təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası təyin olunur. X təsadüfi kəmiyyətinin D. f. onun xarakteristik funksiyası $\varphi_X(t)$ ilə

$$\varphi_X(t) = F_X(e^{it})$$

münasibətilə bağlıdır.

Təsadüfi kəmiyyətin bir çox xarakteristikaları onun D. f. terminlərində sadə şəkildə ifadə olunur. Məs.,

$$\mathbf{P}\{X = n\} = \frac{1}{n!} F_X^{(n)}(0), \quad \mathbf{M} X = F_X'(1),$$

$$\mathbf{D} X = F_X''(1) + F_X'(1) - F_X'^2(1)$$

$$\mathbf{M} X(X-1) \ldots (X - k + 1) = F_X^{(k)}(1).$$

4) $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ koordinatları mənfi olmayan tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi vektor olsun.

$$F_{X_1, ..., X_k}(z_1, ..., z_k) = \mathbf{M} z_1^{X_1} \ldots z_k^{X_k}$$

funksiyasına X təsadüfi vektorunun doğuran funksiyası deyilir.

Doğuran funksiyalar metodu A. Muavr (A. Moivre) və P. Laplas (P. Laplace) kimi alimlərin yaşadığı dövrlərdən məlum olub, ehtimali doğuran funksiyalarla bağlıdır və tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin xassələrinin öyrənilməsi üçün əsas metodlardan biridir.

Əd.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторным анализе, М., 1978; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

DOĞURAN FUNKSİYA(sı) momentlərin « **производящая функция** моментов; moment **generating function** » – bütün momentləri sonlu olan və uyğun artım şərtlərinə tabe olan X *təsadüfi kəmiyyətinin* funksional xarakteristikasıdır. Ümumi halda, D. f. $s = 0$ qiymətini də daxilinə alan s qiymətlərinin hər hansı baxılan Δ intervalında $\varphi(s) = \mathbf{M} \exp(sX)$ ikitərəfli Laplas – Stiltyes çevirməsi ilə üst-üstə düşür. $\varphi(s)$ funksiyası $s \neq 0$ olduqda mövcud olmaya da bilər, buna görə də, momentlərin D. f. anlayışı $\operatorname{mes} \Delta > 0$ fərziyyəsi ilə uyğunlaşdırılır. «Momentlərin

D. f.» adı $\mathbf{M}X^k = \varphi^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots$ bərabərlikləri ilə bağlıdır, burada törəmələr birtərəfli törəmələr kimi anlaşılır. Əgər $X \geq 0$ (və ya $X \leq 0$) şərti vahid ehtimalla ödənilərsə, onda momentlərin D. f. $s \geq 0$ (uyğun olaraq, $s \leq 0$) olduqda mövcuddur.

Bax, *Moment*, *Doğuran funksiya*(sı) tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətin.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, M., 1984.

DOĞURAN FUNKSİYA(sı) tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətin **« производящая функция** целочисленной случайной величины; **generating function** of an integervalued random variables **»** – Laplas – Stiltyes *inteqral çevirməsinin* xüsusi halıdır. Əgər X təsadüfi kəmiyyəti yalnız tam, mənfi olmayan qiymətlər alırsa,

$$\varphi(z, X) = \mathbf{M}z^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}\{X = k\}$$

funksiyası X -in doğuran funksiyası adlanır, burada z – kompleks ədəddir, $|z| \leq 1$.

X təsadüfi kəmiyyətinin D. f. onun xarakteristik funksiyası $f_X(t)$ ilə

$$f_X(t) = \varphi(e^{it}, X), \quad t \in \mathbb{R}^1$$

bərabərliyi ilə bağlıdır.

D. f. şaxələnən proseslər nəzəriyyəsində, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində və ehtimal nəzəriyyəsinin digər bölmələrində geniş surətdə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, M., 1984; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, M., 1971.

DOĞURAN FUNKSİYA(sı) təsadüfi kəmiyyətin **« производящая функция** случайной величины; **generating function** of a random variable **»** – bax, *Doğuran funksiya*(sı) ədədi ardıcıllığın.

DOĞURAN FUNKSİYA(sı) təsadüfi vektorun **« производящая функция** случайного вектора; **generating function** of a random vector **»** – bax, *Doğuran funksiya*(sı) ədədi ardıcıllığın.

DOĞURAN OPERATOR « производящий / инфинитезимальный оператор, генератор; generator / infinitesimal operator » – operatorların birparametrik semi – qrupunun sıfırda törəməsidir. Daha dəqiq, T_t, – $X : T_t T_s = T_{t+s}, \; t, \; s \geq 0$ Banax fəzasında məhdud xətti operatorların semi – qrupu olsun. A doğuran operatoru

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} \qquad (*)$$

münasibətilə elə $f \in X$ olan f -lər üçün təyin olunur ki, bu f -lər üçün (*)-nun sağ tərəfindəki limit güclü yığılma mənada vardır (bunların çoxluğu D_A ilə işarə olunur). Əgər T_t semi – qrupu operator norması mənada kəsilməzdirsə, onda D. o. A – məhduddur və $T_t = e^{tA}$ ifadəsi doğrudur. Bax, *İnfinitezimal operator*, *Hille – İosida teoremi.*

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, M., 1962; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, M., 1984.

DOĞURAN OPERATOR(u) diffuzion prosesin **« производящий оператор** диффузионного процесса; **generator** of a diffusion process **»** – prosesin *infinitezimal operatorunun* C_b^2 fəzasına daralması olan

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - c(x)$$

– ikinci tərtib differensial operatordur (bax, *Diffuzion proses*).

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, M., 1963.

DOĞURAN OPERATOR(u) prosesin **« производящий оператор** процесса; **generator** of a process **»** – *infinitezimal operator* terminində bəzən sinonim kimi istifadə olunan termindir. Məs., əgər elə φ funksiyası varsa ki,

$$f(X_t) - \int_0^t \varphi(X_s) ds$$

– $(X_t, \; \mathbf{P}_x)$ Markov prosesinin və $\mathbf{P}_x$ ehtimallarından ixtiyari birinin doğurduğu σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən martinqaldır, onda f funksiyası $(X_t, \mathbf{P}_x)$ Markov prosesinin doğuran operatoru A -nın təyin olunma oblastındandır, bu halda $Af = \varphi$ götürülür. Doğuran operator belə tərifi ilə infinitezimal operatorun genişlənməsidir.

DOĞURUCU « образующая; generator » – bax, *Erqodik nəzəriyyə.*

DOLAŞMA « блуждание; random walk » – bax, *Təsadüfi dolaşma*.

DOLDURULMA « заполнение; fulling » – bax, *Minkovski əməlləri.*

DOMİNAR VEKTOR « доминирующий вектор; dominating vector » – bax, *Optimal ehtiyatda saxlama.*

DOMİNAR VEKTORLAR ARDICILLIĞI « доминирующих векторов последовательность; sequence of dominating vectors » – bax, *Optimal ehtiyatda saxlama.*

DOMİNARLANAN AİLƏSİ, PAYLANMALARIN « доминированное семейство распределений; dominated family of distributions » – bax, *Mütləq kəsilməz paylanma*, *Sıxlıq*, *ehtimal sıxlığı.*

DONSKER – PROXOROV İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ « Донскера – Прохорова принцип инвариантности; Donsker – Prokhorov invariance principle » – bax, *İnvariantlıq prinsipi* təsadüfi proseslər üçün.

DÖBLİN ŞƏRTİ « Деблина условие; Doeblin condition » – vəziyyətləri çoxluğu sonsuz *Markov zəncirinin* keçid ehtimalları üzərinə qoyulan şərtdir ki, bu şərt ödənildikdə

zəncirin evolyusiyası sonlu Markov zəncirlərinin evolyusiyasına olduqca oxşar olur (bax, *Erqodik teoremlər* Markov prosesləri üçün). Şərt 1937-də V. Döblin (W. Doeblin) tərəfindən daxil olunmuşdur. Özünün müasir formasında $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verilmiş hər hansı bircins Markov zəncirinin keçid ehtimalları $p(n, x, \Gamma)$-ların aşağıdakı tələbi ödədiyi fərz olunur: $\nu(\Gamma) \le \gamma$ bərabərsizliyinin ödənildiyi hər bir halda $\mathscr{B}$-də elə sonlu ν ölçüsü və elə natural m və ε, $\gamma > 0$ vardır ki, $p(m, \cdot, \Gamma) \le 1 - \varepsilon$ münasibəti ödənilir.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997.

DÖBLİN TEOREMİ « Деблина теорема; Doeblin theorem » – bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətlər üçün.

DÖBLİN UNİVERSAL QANUNU « Деблина универсальный закон; Doeblin universal law » – bax, *Natamam cazibə oblastı.*

DUAL MARKOV PROSESİ « дуальный марковский процесс; двойственный марковский процесс; **dual Markov process »**, ikili Markov prosesi – digər (ilkin) Markov prosesi ilə ikilik şərtlərilə bağlı *Markov prosesidir.* $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ və $\hat{\zeta} = (\hat{\zeta}_t, \hat{\mathscr{A}}_t, \hat{\mathbf{P}}_x)$ – eyni vəziyyətlər fəzası $(\mathscr{E}, \mathscr{A})$-də iki bircins Markov prosesi, ν isə $\mathscr{E}$-də σ – sonlu hər hansı ölçü olsun.

Əgər ζ və $\hat{\zeta}$ proseslərinin keçid funksiyaları

$$\nu(dx)\, p(t, x; dy) = \nu(dy)\, \hat{p}(t, y; dx) \qquad (*)$$

münasibətini ödəyirlərsə, onda ζ və $\hat{\zeta}$ prosesləri ν ölçüsünə nəzərən *dual proseslər* adlanır (və ya $\hat{\zeta}$ prosesi ζ prosesi üçün ν ölçüsünə nəzərən *dual Markov prosesi* adlanır).

Əgər (*) münasibəti ödənilərsə və ζ ilə $\hat{\zeta}$ proseslərinin rezolventləri r_λ və $\hat{r}_\lambda$ ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirsə (yəni $r_\lambda(x, \cdot) << \nu(\cdot)$ və $\hat{r}_\lambda(x, \cdot) << \nu(\cdot)$ münasibətləri bütün $\lambda > 0$, $x \in \mathscr{E}$ qiymətlərində ödənilərsə), ζ ilə $\hat{\zeta}$ prosesləri ν ölçüsünə nəzərən güclü dual proseslər adlanır. D. M. p. anlayışı ehtimali potensial nəzəriyyəsinin (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) bazis anlayışlarından biridir; D. M. p.-nin tədqiqi ilkin Markov prosesinin çevrilmiş zaman ərzində nə qaydada cərəyan etməsinin araşdırılması ilə ekvivalentdir. Xüsusi halda, bəzi fərziyyələr əsasında ilkin Markov prosesində zamanı çevirmə əməlinə istinadən D. M. p. qurmaq mümkündür. Hətta, əgər $\hat{\zeta}$ prosesi ζ prosesi üçün ν ölçüsünə nəzərən D. M. p.-dirsə, onda kifayət qədər geniş şərtlərlə ümumi $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{A}})$ fəzasında ζ və $\hat{\zeta}$ proseslərini yeganə bir proses kimi elə reallaşdırmaq mümkündür ki, $\mathbf{P}_x$ ölçüləri prosesin gələcəyinin, $\hat{\mathbf{P}}_x$ ölçüləri isə prosesin keçmişə hərəkətinin cərəyanlarını ifadə etmiş olsun; bu halda $\widetilde{\Omega}$ fəzasında prosesi təyin edən ölçü, ümumiyyətlə, yalnız σ – sonlu ölçü olur.

Əd.: [1] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [2] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov process and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Smythe R. T., Walsh J. B., «Invent. Math.», 1973, v. 19, p. 113–48; [4] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 264–78; [5] Mitro J. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 47, H. 2, S. 139–56, Bd 48, H. 1, S. 97–114; [6] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

DUAL ÖNGÖRÜL PROYEKSİYA « дуальная предсказуемая проекция; dual predictable projection » – kompensator mənasında anlaşılır.

Bax, *Kompensator.*

DUB BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Дуба неравенства; Doob inequalities » – $\zeta^* = \{\zeta_t^*, t \ge 0\}$ *təsadüfi prosesi* üçün

$$\mathbf{P}\{\zeta_T^* \ge a\} \le \frac{1}{a^2}\, \mathbf{M}\,|\zeta_t|, \quad a > 0,$$

$\mathbf{M}|\zeta_T|^p < \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}(\zeta_T^*)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{M}|\zeta_t|^p, \quad p > 1$$

bərabərsizlikləridir, burada $\zeta_t^* = \sup\limits_{s \le t} |\zeta_s|$, $\zeta = (\zeta_t, t \ge 0)$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalara malik müntəzəm inteqrallanan martinqal, T – Markov anıdır və $T < \infty$.

Əgər ζ ($\zeta_0 = 0$) martinqalı, kvadratik variasiyası $[\zeta, \zeta] = ([\zeta, \zeta]_t, t \ge 0)$ və kvadratik xarakteristikası $\langle\zeta\rangle = (\langle\zeta\rangle_t, t \ge 0)$ olan lokal kvadratik inteqrallanan martinqal olarsa, bu halda

$$\mathbf{P}\{\zeta_T^* \ge a\} < \frac{1}{a^2}\, \mathbf{M}\,[\zeta, \zeta]_T \quad \frac{1}{a^2}\, \mathbf{M}\langle\zeta\rangle_T$$

Kolmoqorov – Dub bərabərsizliyi doğrudur.

Əd.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

DUB MƏRKƏZLƏNDİRİCİ FUNKSİYASI « Дуба центрирующая функция; Doob centering function » – bax, *Dub mərkəzləndirici sabitləri.*

DUB MƏRKƏZLƏNDİRİCİ SABİTLƏRİ « Дуба центрирующие константы; Doob centering constants » – $\{\xi_n\}$ *təsadüfi kəmiyyətlər* ardıcıllığı üçün

$$\mathbf{M}\ \mathrm{arctg}\,(\xi_n - c_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

qaydası ilə təyin olunan c_n sabitləridir. D. m. s.-lərindən təsadüfi sıraların mahiyyət etibarilə yığılmasının araşdırılmasında və asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslərin qurulmasında istifadə olunur. D. m. s.-nin mühüm xassəsi ondan ibarətdir ki, əgər $\{\xi_n - a_n\}$ ardıcıllığı a_n ədədlərinin müəyyən seçimində sanki hər yerdə yığılırsa, onda $a_n = c_n$ götürmək olar. Əgər $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi prosesdirsə, onda

$$\mathbf{M}\ \mathrm{arctg}\ (\zeta(t) - f(t)) = 0$$

qaydası ilə təyin olunan $f(t)$ funksiyası – Dub m ə r k ə z - l ə n d i r i c i f u n k s i y a s ı adlanır.

Əd.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] И т о К., Вероятностные процессы. пер. с япон., в. 1, М., 1960.

DUB – MEYER AYRILIŞI « Дуба – Мейера разложение; Doob – Meyer decompozition » – X submartinqalı üçün $X = M + A$ ayrılışıdır, burada M – lokal martinqal, A – sıfırdan başlayan artan öngörül prosesdir. Ayrılış vardır və yeganədir. Məs., əgər Y kvadratik inteqrallanan martinqaldırsa, onda Y^2 submartinqaldır və $Y^2 = M + A$ (bu halda A prosesi m a r t i n q a l ı n k v a d r a t i k v a r i a - s i y a s ı adlanır və o, $\langle Y \rangle$ kimi işarə olunur). Stoxastik inteqralın martinqal üzrə tərifində D. – M. a.-nın tətbiqi bu bərabərliyə əsaslanır. Diskret zaman halı üçün D. – M. a. C. Dub tərəfindən [1]-də alınmışdır; «adi» şərtlərdə (baxılan proseslərin trayektoriyaları sağdan kəsilməzdir, soldan limitləri vardır; submartinqalla bağlı azalmayan σ – cəbrlər ailəsi sağdan kəsilməz və tamamlanmışdır) kəsilməz zaman halı üçün P. A. Meyer tərəfindən [2]-də isbat olunmuşdur. D. – M. a. «adi» şərtlərsiz belə doğrudur (bax, [3] – [4]).

Əd.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] М е й е р П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Г а л ь ч у к Л. И., «Матем. сб.», 1981, т. 115, № 2, с. 163–78; [4] L e n g l a r t E., «Lect. Notes Math.», 1980, v. 784, p. 500–46.

DUBLLAMA / BİRDƏFƏLİK EHTİYATDA SAXLAMA « дублирование / однократное резервирование; doubling / single redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

DUBLLAŞDIRMA t e x n i k a d a « **дублирование** в т е х н и к е; **doubling** i n e n g i n e e r i n g » – əsas elementlə yanaşı bu elementin funksiyalarını onun imtina anında yerinə yetirəcək dubllaşdırıcı elementin daxil olunmasıdır. Dubllaşdırıcı elementin imtinaya məruz qalmasından asılı olaraq dubllaşdırma – y ü k l ə n m i ş və y ü k l ə n m ə m i ş dubllaşdırma kimi iki növə ayrılır. D.-lı s i s t e m i n i m t i n a s ı əsas və dubllaşdırıcı elementlərin imtinası vəziyyətidir. D.-lı sistemin xarakteristikaları semi – Markov prosesləri, daxil olunmuş Markov zəncirləri, təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri metodları ilə araşdırılır. Məs., yüklənməmiş dubllaşdırmalı bərpa olunan sistemin imtinasız işləmə müddəti ζ təsadüfi kəmiyyəti $\zeta = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada ξ_n – elementin imtinasız işləmə müddəti, $\nu \geq 1$ isə birinci imtinasız işləmə müddətinin nömrəsidir ki, bu müddətdə bərpanın sona çatmadığı nəzərdə tutulur.

DÜYÜN / DAYAQ NÖQTƏSİ PLANIN « узел плана; supporting point of a design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

DÜYÜNLƏR MODELİ « узлов модель; site model » – bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi.*

DÜZ TƏNLİYİ, KOLMOQOROVUN « прямое уравнение Колмогорова; forward Kolmogorov's equation », F o k k e r – P l a n k t ə n l i y i – bax, *Diffuzion proses*, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Stoxastik differensial həndəsə.*

DÜZBUCAQLI PAYLANMA « прямоугольное распределение; rectangular distribution » – bax, *Müntəzəm paylanma.*

DÜZƏLDİCİ STRATEGİYA « уравнивающая стратегия; equalizing strategy » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin.*

DÜZƏLİŞ, KƏSİLMƏZLİK ÜÇÜN « поправка на непрерывность; correction for continuity » – *binomial paylanmanın* normal paylanma ilə daha yaxşı approksimasiya olunması üçün istifadə olunan, $c = 0{,}5$ -ə bərabər sabitdir.

ξ_n – parametrləri n və p olan $(0 < p < 1)$ binomial paylanma qanununa tabe təsadüfi kəmiyyət olsun. Əgər $p = \text{const}$ və $n \to \infty$ olarsa, onda Muavr – Laplas teoreminə əsasən ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması normal paylanma ilə approksimasiya olunur, yəni

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leq x\} = \sum_{k=0}^{x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \Phi\left[\frac{x - np + c}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right], \qquad (1)$$

burada c – ixtiyari sabitdir. $n - \xi_n$ təsadüfi kəmiyyəti də binomial qanunla paylanır, lakin bu təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının parametrləri n və $1-p$ -yə bərabərdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları arasında

$$\mathbf{P}\{\xi_n \leq x\} + \mathbf{P}\{n - \xi_n \leq n - x - 1\} = 1$$

münasibəti doğrudur. Bu münasibət və (1)-dən

$$\Phi\left[\frac{x - np + c}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + \Phi\left[-\frac{x - np + (1-c)}{\sqrt{np(1-p)}}\right] = 1 \qquad (2)$$

olduğu alınır.

z -in bütün həqiqi qiymətlərində $\Phi(z) + \Phi(-z) \equiv 1$ eyniliyi doğru olduğundan təbii olaraq, c sabitini elə seçmək olur ki, (2) bərabərliyi təqribi deyil, dəqiq olsun, yəni

$$\Phi\left[\frac{x - np + c}{\sqrt{np(1-p)}}\right] - \Phi\left[\frac{x - np + (1-c)}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \equiv 0$$

şərtindən $c = 0{,}5$ olduğu alınır. (1) düsturunda $c = 0{,}5$ sabiti riyazi statistikada Φ normal paylanmasının approksimaedici funksiyasının kəsilməzliyi üçün düzəliş, bəzən də approksimaedici paylanmanın kəsilməzliyi üçün *Yeyts düzəlişi* adlanır.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Д ж о н с о н Н., Л и о н Ф., Статистика и планирование эксперимента в технике и науке, пер. с англ., 2 изд., т. 1–2, М., 1980–81.

***DÜZGÜN DƏYİŞƏN FUNKSİYA « правильно меняющаяся функция; property (regularty) changing function »** – ehtimal nəzəriyyəsində geniş surətdə tətbiq olunan Karamata (K a r a m a t a J.) tərəfindən 1930-da daxil olunmuş anlayışdır.

U $(0, \infty)$ -da elə monoton funksiya olsun ki, $t \to \infty$ olduqda x nöqtələrinin hər yerdə sıx çoxluğu A -da

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \to \psi(x) \leq \infty \qquad (1)$$

münasibətini ödəsin. Onda $\psi(x) = x^{\rho}$ doğrudur, burada $-\infty \leq \rho \leq \infty$. Bu şərtlərdə, ρ sonlu olduqda U funksiyası sonsuzluqda düzgün dəyişən funksiya adlanır.

D. d. f.-nın bu tərifi monoton olmayan funksiyalar üçün də istifadə oluna bilinər.

$$U(x) = x^{\rho} L(x) \qquad (2)$$

olsun. $U(tx)/U(t)$ nisbəti x^{ρ}-ya, yalnız və yalnız, $t \to \infty$ olduqda ixtiyari $x > 0$ üçün

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1, \qquad (3)$$

münasibəti ödənildikdə yığılır. Bu xassəli funksiyalar asta dəyişən funksiyalar adlanır.

$(0, \infty)$-da təyin olunmuş müsbət L funksiyası (onun monoton olması zəruri deyildir), yalnız və yalnız, (2) münasibətini ödədiyi halda sonsuzluqda asta dəyişən funksiya adlanır.

U funksiyası, yalnız və yalnız, o halda ρ üstlü ($-\infty < \rho < \infty$) düzgün dəyişən funksiya adlanır ki, o, (2) şəklində ifadə olunsun, bu şərtlə ki, L asta dəyişən funksiya olmalıdır.

$U(x^{-1})$, yalnız və yalnız, sonsuzluqda düzgün dəyişən funksiya olarsa, U – sıfırda düzgün dəyişən funksiya adlanır.

İki asta dəyişən funksiyanın cəmi asta dəyişən funksiyadır.

F_1 və F_2, –

$$1 - F_i(x) = \frac{1}{x^{\rho}} L_i(x)$$

münasibətini ödəyən paylanma funksiyaları olsun; L_i asta dəyişən funksiyalardır. Onda $G = F_1 * F_2$ kompozisiyası düzgün dəyişən «qalığa» malikdir, belə ki,

$$1 - G(x) \sim \frac{1}{x^{\rho}} \left(L_1(x) + L_2(x) \right).$$

Əgər $1 - F(x) \sim x^{-\rho} L(x)$ olarsa, onda

$$1 - F^{*r}(x) \sim r x^{-\rho} L(x)$$

münasibəti doğrudur.

Asta dəyişən funksiyalara misallar:

a) $\lim_{t \to \infty} U(t)$ limiti mövcud olan və sıfra bərabər olmayan $U(t)$ funksiyası;

b) ixtiyari β üçün $U(t) = (\log t)^{\beta}$ funksiyası;

c) bütün β-lar üçün $U(t) = [\log \log (t+1)]^{\beta}$ funksiyası.

$\lim_{t \to +\infty} c(t) \neq 0$, $\lim_{z \to +\infty} \alpha(z) = 0$ limitləri varsa,

$$U(t) = c(t) \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha(z)}{z} \, dz \right\}$$

düsturu asta dəyişən funksiyanın ümumi şəkildə ifadəsidir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., 1984; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, изд. второе, М., 1985.

DÜZGÜN STATİSTİK QİYMƏT « правильная оценка; proper estimator » – bax, *Ekvivariant statistik qiymət.*

DVORETSKİ LEMMASI « Дворецкого лемма; Dvoretzky lemma » – bax, *Banax fəzası* l_p^n-ni özündə müntəzəm saxlayan.

DVORETSKİ PROSEDURU « Дворецкого процедура; Dvoretzky procedure » – bax, *Stoxastik approksimasiya.*

DVORETSKİ – ROCERS TEOREMİ « Дворецкого – Роджерса теорема; Dvoretzky – Rodgers theorem » – bax, *Banax fəzası* l_p^n-ni özündə müntəzəm saxlayan.

EDCVORT SIRASI « Эджворта ряд; Edgeworth serie » –

$$f(x) = \varphi(x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_{k,k+2}\varphi^{(k+2)}(x) + ... + b_{k,3k}\varphi^{(3k)}(x)}{n^{k/2}} \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunan sıradır. Burada $f(x)$, – $(s_n - \mathbf{M}s_n)/\sqrt{\mathbf{D}s_n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlığıdır ($s_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $\xi_1, ..., \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir),

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

standart normal paylanmanın sıxlığıdır və

$$\varphi^k(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{d x^k} .$$

$b_{k,\,k+2l}$ əmsalları n-dən asılı olmayıb, $\lambda_3, ..., \lambda_{k-l+3}$-ə görə çoxhədlilərdir və burada $\lambda_j = \varkappa_j/\sigma^j$, σ^2 – dispersiya, $\varkappa_j$, – ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin j-ci tərtib semiinvariantıdır. Məs., E. s. ayrılışında ilk hədlər aşağıdakı şəkildədir:

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{3!} \lambda_3 \varphi^{(3)}(x) + \\ + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{4!}\lambda_4 \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!}\lambda_3^2 \varphi^{(6)}(x)\right] - \\ - \frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{1}{5!}\lambda_5 \varphi^{(5)}(x) + \frac{35}{7!}\lambda_3\lambda_4 \varphi^{(7)}(x) + \frac{280}{9!}\lambda_3^3 \varphi^{(9)}(x)\right] + ...$$

$b_{k,k+2l}$ əmsalları mərkəzi momentlərlə də ifadə oluna bilinirlər. (*) sırasını F. Ecvort [1]-də daxil etmişdir. Bu sıraların asimptotik xassələri H. Kramer (H. Cramèr) tərəfindən araşdırılmışdır və o, isbat etmişdir ki, olduqca geniş şərtlərlə (*) sırası vasitəsilə $f(x)$-in, birinci atılmış qalıq həddi tərtibi ilə, asimptotik ayrılışı alınır.

Ədd.: [1] E d g e w o r t h F. Y., «Proc. Comb. Phil. Soc.», 1905, v. 20, p. 36–65; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

EDCVORT – KRAMER AYRILIŞI « Эджворта – Крамера разложение; Edgeworth – Kramér expansion » – riyazi gözləməsi sonlu a, dispersiyası σ^2 və mərkəzi momentləri $\alpha_k = \mathbf{M}(X_i - a)^k$, $3 \le k \le m+2$, ümumi paylanma funksiyası $F(x)$ olan xətti normalanmış $(X_1 + ... + X_n - an)/\sigma\sqrt{n}$ cəmləri ardıcıllığının $F_n(x)$ *paylanma funksiyalarının* asimptotik sıraya ayrılışıdır;

$$F_n(x) = \Phi(x) + \\ + Q_1(x)\, n^{-1/2} + ... + Q_m(x)\, n^{-m/2} + R_m(x,\, n), \qquad (1)$$

burada Φ – standart normal qanunun paylanma funksiyası,

$$Q_k(x) = -\Phi'(x) \sum H_{k+2s-1}(x), \\ \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{q_r!}\left(\frac{\gamma_{r+2}}{(r+2)!\,\sigma^{r+2}}\right)^{q_r}, \qquad (2)$$

burada cəmləmə $q_1 + 2q_2 + ... + kq_k = k$ bərabərliyi ilə əlaqələnən tam mənfi olmayan q_r-lər üzrə aparılır, H_υ Hermit çoxhədliləri, γ_r, – F paylanmasının semiinvariantları və $s = q_1 + ... + q_k$.

Məs.,

$$Q_1(x) = \Phi'(x)\,\frac{\alpha}{6}\,(1 - x^2),$$

$$Q_2(x) = \\ = \Phi'(x)\left\{\frac{1}{24}(3 - \alpha_4)(x^3 - 3x) - \frac{\alpha_3^2}{72}(x^5 - 10x^3 - 15)\right\}.$$

Əgər hər hansı $m+2 \le r < m+3$ üçün $\mathbf{M}\left|X_j - a\right|^r < \infty$ və $\lim\limits_{t\to\infty} \sup \left|\mathbf{M}\exp(itX_1)\right| < 1$ olarsa, onda

$$R_m(x,\, n) \le \frac{\sigma(\sqrt{n}(1 + |x|))}{(1 + |x|)^r}\, n^{-(r-2)/2} \qquad (3)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $u \to 0$ olduqda $\delta(u) \to 0$ olur.

$r = 3$ halında F-in şəbəkəvari olmaması şərti $\left|R_1(x, n)\right| < \\ < \delta(n)\, n^{-1/2}$ qiymətləndirilməsini təmin edir. $m = \infty$ halında (1) formal ayrılışı hələ P. L. Çebışevə məlum idi. F. Ecvort bu ayrılışı olduqca gec ala bilmişdi. (1) formal ayrılışının asimptotik xassəsini Q. Kramer [2]-də tədqiq etmişdir.

X_j təsadüfi toplananları eyni qanunla paylanmadıqda və $\mathbb{R}^d$-dən qiymətlər aldıqda, $d > 1$ olduqda (bax, [4]) E. – K. ayrılışının ümumiləşmələri məlumdur (bax, [3]). F şəbəkəvari paylanma olduqda və ya əsas parametri $0 < \alpha \le 2$ olan dayanıqlı $G_\alpha(x)$ qanununun cazibə oğlastından olduqda (bax, [5]) E. – K. a.-nın analoqları vardır. E. – K. a.-nın bu analoqlarında α_k momentləri əvəzinə

$$\mu_k = \int x^k \, d\,(F(x) - G_\alpha(x))$$

psevdomomentlərindən istifadə olunur.

Əd.: [1] E d g e w o r t h F., «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1905, v. 20, p. 36–65; [2] C r a m é r H., «Camb. Tracts Math. And Math. Phys.», 1937, № 36 (rus. per. – Случайные величины и распределения вероятностей, M., 1947); [3] П е т р о в В. В., Сумм независимых случайных величин, M., 1972; [4] Ш и г а н о в И. С., в. сб: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, M., 1980, с. 116–21; [5] З о л о т а р е в В. M., в кн.: Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962, с. 49–50.

EFFEKTİV STATİSTİK QİYMƏT « эффективная оценка; efficient estimator » – meylsiz *statistik qiymətdir*, E. s. q.-in dispersiyası *Kramer – Rao bərabərsizliyinin* sağ tərəfi ilə eynidir (üst-üstə düşür). E. s. q. qiymətləndirilən parametr üçün k a f i s t a t i s t i k a d ı r.

Əgər E. s. q. vardırsa, onu maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə təyin etmək olur. Bir çox hallarda Kramer – Rao bərabərsizliyinin aşağı sərhədini təyin etmək mümkün olmadığından, statistikada əksər hallarda baxılan parametr üçün bütün meylsiz statistik qiymətlər sinfindən minimal dispersiyaya malik olan statistik qiymət E. s. q. kimi götürülür.

Bax, *Asimptotik effektiv statistik qiymət.*

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., M., 1975; [2] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, M., 1979; [3] Р а о С., Линейные статистические методы и их применение, пер. с англ., M., 1968.

EFFEKTİVLİK(y i) i k i n c i t ə r t i b s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r i n **« эффективность** о ц е н о к в т о р о г о п о р я д к а; s e c o n d o r d e r **efficiency** o f e s t i m a t o r s **»** – asimptotik effektiv statistik qiymətlərin risk funksiyalarının asimptotik ayrılışında ikinci həddə görə bunların və ya statistik qiymətlərin müqayisəsi üçün digər kriterilərin *asimptotik effektiv statistik qiymətlərinin* optimallıq xassəsidir. Asimptotik effektiv statistik qiymətlərin «ikinci tərtib» xassələrinə görə müqayisəsi problemi ilk dəfə [1]-də R. Fişer tərəfindən qoyulmuşdur. $\xi_1, ..., \xi_n$ eyni qanunla paylanmış, paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x, \theta)$ θ-ya görə kifayət qədər hamar olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $I(\theta) = \mathbf{M}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\xi_1, \theta) \right)^2$ f sıxlıq funksiyasının Fişer informasiya miqdarı, $I_{\theta_n}(\theta)$ isə $\theta_n = \theta_n(\xi_1, ..., \xi_n)$ statistik qiymətinin paylanma sıxlığının informasiya miqdarı olsun. Əgər $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} I_{\theta_n}(\theta) = I(\theta)$ olarsa, θ_n statistik qiyməti (Fişerə görə) asimptotik effektiv statistik qiymət olur, asimptotik effektiv statistik qiymətlər sinfində isə ən effektiv ikinci tərtib statistik qiymət – bütün θ qiymətlərində $\lim\limits_{n\to\infty} (n I(\theta) - I_{\theta_n}(\theta))$ kəmiyyətinin minimal olmasını təmin edən statistik qiymətdir.

Statistik qiymətlərin kifayətlilik kriterisi kimi müasir araşdırmalarda, adətən, risk funksiyası götürülür və hesab olunur ki, risk funksiyası qiymətləndirmə dəqiqliyilə sıx bağlı, həmçinin hesablama üçün ən sadə kəmiyyətdir. Statistik qiymətlərin geniş sinifləri üçün, o cümlədən, maksimal doğruyaoxşarlıq və Beyes statistik qiymətləri üçün risk funksiyasının asimptotik ayrılışları [2] – [6]-da tədqiq olunmuşdur. Aydın olmuşdur ki, statistik qiymətlərin ikinci tərtib E.-nin təsviri üçün Fişerin nəzərdə tutduğu məsələ statistik qiymətlərin dar bir sinfi üçün həll oluna bilinər. $n \to \infty$ olduqda meyli $o(n^{-1})$ tərtibdən olan statistik qiymətlər sinfi belələrindəndir (bax, [6]). [7] – [10]-da $f(T_1, ..., T_p)$ şəklində statistik qiymətlərin xüsusi sinfi «əyilmiş» eksponensial paylanmalar ailəsi halında öyrənilmişdir, burada T_i seçimin kafi statistikalarıdır və bu halda 2-ci tərtib statistik qiymətlərin E.-ni təsvir etmək olur (əyilməmiş eksponensial ailələr üçün belə sinif yeganə statistik qiymətə gətirir). Hər iki halda 2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. riskini qeyd olunmuş statistik qiymətlər sinifləri ilə kifayətlənmədikdə ixtiyari kompaktda və ya hətta bütün fəzada müntəzəm yaxşılaşdırmaq olur.

2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. probleminin məqbul həlli məqbulluq və minimakslığın uyğun surətdə modifikasiya olunmuş Vald kriterilərindən istifadə etməklə alına bilinir.

$$R_n(\theta_n, \theta) = \mathbf{M}_\theta \left| \sqrt{n}\,(\theta_n - \theta) \right|^\alpha, \ \alpha > 0$$

olsun, burada $\theta \in \Theta = (\theta_-, \theta_+)$, $-\infty \le \theta_- \le \theta_+ \le \infty$. 2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. nəzəriyyəsində Θ -dan olan kompaktlarda $n \to \infty$ olduqda müntəzəm olaraq

$$R_n(\theta_n, \theta) = R_0(\theta) - n^{-1} p(\theta) + o(n^{-1}) \qquad (1)$$

ayrılışı mümkün olan asimptotik effektiv statistik qiymətlərlə kifayətlənilir, burada

$$R_0(\theta) = \gamma_\alpha \mathbf{I}^{-\alpha/2}(\theta),$$

$$\gamma_\alpha = 2^{\alpha/2} \pi^{-1/2} \Gamma((\alpha + 1)/2),$$

$p(\cdot)$ funksiyası lokal Hölder funksiyaları sinfi $C^\beta(\Theta)$, $0 < \beta \le 1$ sinfindəndir. Əgər p qapalı $[\theta_-, \theta_+]$ intervalında kəsilməz funksiya olarsa, onda $\theta \in \Theta$ üzrə müntəzəm (1) ayrılışı mümkün statistik qiymətlərlə kifayətlənmək olur.

(1) münasibətini ödəyən θ_n statistik qiyməti üçün: elə θ_n^* və $\alpha > 0$ yoxdursa ki, $n \to \infty$ olduqda

$$R_n(\theta_n^*, \theta) \le R_n(\theta_n, \theta) - n^{-1} \alpha\, \theta(\theta) + o(n^{-1})$$

münasibəti ödənilsin, onda θ_n i k i n c i t ə r t i b q – y a x ş ı l a ş m a y a n s t a t i s t i k q i y m ə t, $q \ge 0$, $q \ne 0$, $q \in C^\beta(\Theta)$, əgər baxılan şəkildə ixtiyari q funksiyası üçün θ_n, q – yaxşılaşmayan statistik qiymətdirsə, onda o, i k i n c i t ə r t i b m ə q b u l s t a t i s t i k q i y m ə t adlanır.

2-ci tərtib statistik qiymətlərin E. nöqteyi – nəzərindən

$$\theta_n = \hat{\theta}_n + n^{-1} g(\hat{\theta}_n)\, \chi\{ |g(\hat{\theta}_n)| < n^{1/2} \} \qquad (2)$$

şəkilli ikinci tərtib statistik qiymətlərin tam sinfi ilə kifayətlənmək olur, burada $g \in C^\beta(\Theta)$, $\hat{\theta}_n$ isə asimptotik effektiv statistik qiymətdir. Əgər $\hat{\theta}_n$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidirsə, onda (2)-də g funksiyasını

$$g(\theta) = T^{-1}(\theta) \left(2 \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \omega(\theta) + \frac{(\alpha + 1)\, M_{3,1}(\theta)}{6 I(\theta)} \right) \qquad (3)$$

şəklində ifadə etmək məqsədəuyğundur, burada $\omega(\theta) > 0$,

$M_{ij}(\theta) = \mathbf{M}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} \ln f(\xi_1, \theta)\right)^j$. (2), (3) bərabərlikləri ilə təyin olunan statistik qiymətlərin qeyd olunmuş formada ifadəsində və $\theta_{n,\omega}$ işarələnmələrində ikinci tərtib q – yaxşılaşmayanlıq və məqbulluq şərtləri ən sadə şəkildə ifadə olunur. $\theta_{n,\omega}$ statistik qiymətlərinin ayrılışında $p(\theta)$ funksiyası

$$\gamma_\alpha\left(2\alpha\omega^{-1}(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} I^{-(2+\alpha)/2}(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} \omega(\theta) + p_0(\theta)\right) \qquad (4)$$

şəklində olur, burada $p_0(\theta)$ funksiyası yalnız $f(x, \theta)$ sıxlıq funksiyasından asılıdır. Məs., əgər $f(x, \theta) = f(x-\theta)$, $f(\cdot)$ cüt funksiya olarsa, onda

$$p_0(\theta) = \frac{\alpha I^{-\alpha/2}(\theta)}{24}\left(\frac{4(\alpha+1) M_{4,1}(\theta)}{I^2(\theta)} + (\alpha+2)\left(\frac{M_{1,4}(\theta)}{I^2(\theta)} - 3\right)\right)$$

olur.

$$\lambda(\theta) = \omega^2(\theta) I^{-(2+\alpha)/2}(\theta), \quad \nu(\theta) = q(\theta)\omega^2(\theta)$$

olsun. Fərz olunur ki, ixtiyari $\theta_0 \in (\theta_-, \theta_+)$ üçün

$$\Phi_\pm(\theta) = \pm\int_{\theta_0}^{\theta} \lambda^{-1}(u)du, \quad \Phi_\pm = \lim_{\theta\to\theta_1} \Phi_\pm(\theta),$$

$$\Psi_\pm(\theta) = \begin{cases} \int_{\theta_0}^{\theta} \nu(u)du \int_{\theta}^{\theta_\pm} \lambda^{-1}(v)dv, & \text{əgər } \Phi_\pm < \infty \text{ olarsa,} \\ \int_{\theta_0}^{\theta} \lambda^{-1}(u)du \int_{\theta}^{\theta_\pm} \nu(v)dv, & \text{əgər } \Phi_\pm = \infty \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$$\Psi_\pm = \lim_{\theta\to\theta_\pm} \Psi_\pm(\theta), \quad \Phi = \min(\Phi_-, \Phi_+),$$

$$\Psi = \max(\Psi_-, \Psi_+)$$

kəmiyyətləri təyin olunmuşdur. Onda: 1) $\theta_{\varepsilon,\omega}$, yalnız və yalnız, o halda ikinci tərtib məqbul statistik qiymətdir ki, $\Phi = \infty$ olsun; 2) $\theta_{\varepsilon,\omega}$, yalnız və yalnız, o halda ikinci tərtib q – yaxşılaşmayan statistik qiymətdir ki, $\max(\Phi, \Psi) = \infty$ olsun. Məs., $\hat{\theta}_n$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti, yalnız və yalnız, o halda ikinci tərtib məqbul statistik qiymətdir ki,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} I^{(2+\alpha)/2}(u) \exp\left\{ \frac{\alpha+1}{6} \int_{\theta_0}^{u} \frac{M_{3,1}(v)}{\mathrm{I}(v)} dv\right\} du$$

inteqralı $\theta_\pm$ nöqtələri ətrafında dağılır (bax, [11], [12]).

M i s a l. ξ_i riyazi gözləməsi $\theta \in \Theta = (-a, a)$, dispersiyası σ^2 olan Qauss təsadüfi kəmiyyətləri olsun [[3]-ə $M_{3,1}(\theta) = p_0(\theta) = 0$ olduğu fərz olunur]. Θ -dan olan kompaktlarda

$$R(\theta_{n,\omega}, \theta) = \gamma_\alpha\left(\sigma^\alpha - \frac{\alpha\pi^2\sigma^{2+\alpha}}{2na^2} + o(n^{-1})\right)$$

müntəzəm ayrılışı mümkün olan, $\omega = \cos\frac{\pi\theta}{2\alpha}$, $|\theta| < \alpha$ funksiyasına müvafiq $\theta_{n,\omega}$ statistik qiyməti ikinci tərtib məqbul statistik qiymətdir və deməli, həm də ikinci tərtib minimaks statistik qiymətdir (1 – yaxşılaşmayan, yəni $q = 1$).

Çoxölçülü halda məqbulluq və ikinci tərtib q – yaxşılaşmayanlıq üçün oxşar şərtlər vardır (bax, [12]).

Əd.: [1] F i s h e r R., «Proc. Cambr. Philos. Soc.», 1925, v. 22, p. 700–25; [2] L i n n i k Y. V., M i t r o f a n o v a N. M., «Sankhya, Ser. A», 1965, v. 27, № 1, p. 73–82; [3] Ч и б и с о в Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 4, с. 689–702; [4] Г у с е в С. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 16–33; [5] Б у р н а ш е в М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 3, с. 509–39; [6] P f a n z a g l J., W e f e l m e y e r W., «J. Multivar Anal.», 1978, v. 8, № 1, p. 1–29; [7] R a o C., «Sankhya, Ser. A», 1963, v. 25, № 2, p. 189–206; [8] E f r o n B., «Ann. Statist.», 1975, v. 3, № 6, p. 1189–242; [9] G h o s h J., S u b r a m a n y a m K., «Sankhya, Ser. A», 1974, v. 36, № 4, p. 325–58; [10] E g u c h i S., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 3, p. 793–803; [11] G h o s h J., S i n h a B., «Ann. Statist.», 1981, v. 9, № 6, p. 1334–38; [12] Л е в и т Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 2, с. 309–38.

EFFEKTİVLİK (y i) r e s u r s u n « **эффективность** p e c y p c a; r e s o u r c e **efficiency** » – bax, *Çoxgirişlilik*.

EFFEKTİVLİK (y i) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n « **эффективность** статистической процедуры; **efficiency** o f a s t a t i s t i c a l p r o c e d u r e » – verilmiş sinif üçün *statistik prosedurların* optimal prosedurla müqayisəsində istifadə edilən anlayışdır. Riyazi statistikada statistik prosedurun optimallıq anlayışı itki funksiyasının seçimindən bilavasitə asılı prosedur riski (risk funksiyası) terminlərilə ifadə olunur. Buna görə də, ola bilər ki, eyni bir statistik prosedur hər hansı bir mənada olduqca effektiv və ya hər hansı mənada hətta optimaldır və digər mənada isə az effektlidir.

Statistik prosedurun E. o qədər də dəqiq təyin olunmuş anlayış deyildir; onun daha dəqiq mənası riyazi satistikanın konkret: məs, *statistik hipotezlərin yoxlanılması və statistik qiymətləndirmə* kimi məsələlərində alınır.

Əd.: [1] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] V o i n o v V. G., N i k u l i n M. S., Unbiased, Estimators and Their Applications, v. 1, Univariate Case, Dordrecht, 1993; [3] G r e e n w o o d P. E., N i k u l i n M. S., A Guide to Chi-squared Testing, N. Y., 1996.

EFFEKTİVLİYİ, PROQNOZUN m e t e o r o l o g i y a d a « **полезность прогноза** в м е т е о р о л о г и и; **efficiency / utility** o f m e t e o r o l o g i c a l **forecast** », m e t e o r o l o j i p r o q n o z u n e f f e k t i v l i y i, – istehlakçının (və ya istehlakçılar toplusunun) qəbul edilən təsərrüfat qərarlarının əsaslandırılması hesabına müəyyən iqtisadi nəticəni almasını təmin edən meteoroloji proqnoz keyfiyyətidir. Tək-tək edilmiş proqnozların iqdisadi qiymətlərindən fərqli olaraq, P. e. statistik anlayış olub, uyğun proqnoz informasiyasının təkrar-təkrar istifadə olunmasında alınan orta «uduşu» xarakterizə edir. Ən mühümü p o t e n s i a l P. e.-dir, bu halda fərz olunur ki, proqnoz optimal surətdə istifadə olunur (bax, [1]). Potensial P. e.-nin kəmiyyət ölçüsü kimi $\lambda_0 = (R_- - R_+)/R_-$ ölçüsüz vuruğunu götürmək olar, burada R_+ və R_- – istehlakçının orta

meteoroloji itkiləridir (bax, *Meteoroloji itkilər funksiyası*); bunlar proqnoz olub-olmadığı hallarda istehlakçının uyğun olaraq optimal strategiyaya riayət etməsini ifadə edən itkilərdir.

Əgər təsadüfi proqnozlar faydalı informasiya daşımırsa, onda λ_0 göstəricisi həmişə sıfra bərabərdir, ideal proqnozlar üçün isə λ_0 vahidə bərabərdir. $\lambda_0 = 0$ şərti hətta təsadüfi olmayan proqnozlar üçün də ödənilə bilinər, lakin bu o hallarda olur ki, bu proqnozların metodiki uğuru konkret təsərrüfat məsələsinin xüsusiyyətləri ilə təyin olunan hər hansı sədd hüduduna çata bilmir. Beləliklə, proqnozun metodiki cəhətdən uğurlu olması onun təsərrüfat nöqteyi – nəzərindən effektiv olması kimi anlaşılmamalıdır. P. e. və onun uğurluluğu arasında birqiymətli əlaqə olmadığından elə hallar mümkün olur ki, iki müxtəlif uğurluluqlu meteoroloji proqnozdan istehlakçı nöqteyi – nəzərincə, uğurluluğu formal olaraq aşağı olan proqnoz daha effektiv hesab olunur.

Əd.: [1] Ж у к о в с к и й Е. Е., Метеорологическая информация и экономические решения, Л., 1981; [2] О м ш а н с к и й М. А., «Журнал геофизики», 1933, т. 3, в. 4, с. 489–99; [3] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339–49; [4] T h o m p s o n J. C., в кн.: Weather forecasting and weather forecasts; models, systems and users, v. 2, Boulder (Colo.), 1976, p. 525–78.

EFFEKTİVLİYİ SAXLAMA ƏMSALI « эффективности сохранения коэффициент; efficiency preservation coefficient » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin.*

EHTİMAL « вероятность; probability » – bu və ya digər müəyyən şərtlər kompleksi yerinə yetirilməklə istənilən dəfə təkrarlana bilən eksperimentdə baş verə bilən hər hansı bir hadisənin baş verməsinin mümkünlüyü dərəcəsinin ədədi xarakteristikasıdır. «E.» anlayışı elmi idrak kateqoriyası kimi təsadüfi hadisə, təsadüfi proseslər arasında kütləvi proseslərə xas olan xüsusi tip əlaqələri əks etdirir. E. kateqoriyası ehtimali və statistik qanunauyğunluqların xüsusi sinfinə əsaslanır.

E.-ın ədədi qiyməti bəzi hallarda (sonlu nəticələri olan eksperimentdə baş verə bilən hadisələr üçün) ehtimalın «klassik» tərifinə əsasən hesablanır: eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisənin ehtimalı bu hadisənin baş verməsi üçün əlverişli elementar hadisələr sayının bütün mümkün ola bilən «bərabərimkanlı» elementar hadisələr sayına nisbətinə bərabərdir.

Digər daha mürəkkəb hallarda E.-ın ədədi qiymətini təyin etmək üçün s t a t i s t i k y a n a ş m a tələb olunur. Statistik yanaşmada müəyyən şərtlər kompleksi ödənilməklə təkrarən aparılan eksperimentlər seriyasında hər hansı hadisənin baş vermə sayının aparılan eksperimentlərin sayına nisbəti kimi təyin olunan, tezlik adlanan (hər hansı bir qeyd olunmuş p ədədindən n -in kifayət qədər böyük qiymətlərindən çox az fərqlənən) statistik ehtimaldan istifadə olunur. Klassik və ya statistik üsulla təyin olunmuş E.-a əsasən ehtimal nəzəriyyəsinin qaydalarına uyğun olaraq yeni E.-lar hesablamaq olur.

Riyazi anlamda E. təsadüf və zərurət arasında keyfiyyətcə özünəməxsus əlaqəni ifadə edir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin şərhində E.-ın elə xassələri aksiom şəklində formalaşdırılmışdır ki, bu aksiomların qəbul olunması elmin bu sahəsinin müasir inkişaf mərhələsi üçün bir zərurətə çevrilmişdi. Bununla belə bu aksiomlar, E.-a nə klassik, nə də ki, statistik yanaşma «ehtimal» anlayışının real məzmununu tam mənasında təyin etmir; bunlar özlüyündə E.-ın mahiyyətinin daha da açıqlanması üçün yalnız məlum yaxınlaşmalardır. Belə ki, verilmiş müəyyən şərtlər ödənilməklə baş verə biləcək ixtiyari bir hadisə birqiymətli təyin olunmasa da, bu şərtlər daxilində bu hadisənin müəyyən bir E.-ı vardır. Verilmiş şərtlər daxilində bu hadisənin E.-nın varlığı müddəası bir h i p o t e z d i r. Eksperimentdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı dedikdə, eksperimentlər seriyasındakı sınaqlar sayının kifayət qədər böyük qiymətlərində bu hadisənin tezliyindən çox az fərqli olan qeyd olunmuş bir ədəd (p, $0 \le p \le 1$) nəzərdə tutulur; bu hipotez isə hər dəfə xüsusi yoxlanılmalı və əsaslandırılmalıdır.

E. ilə tezliyin əlaqəsi haqqında mülahizələrdə nəzərə alınmalıdır ki, eksperimentlər seriyasındakı sınaqlar sayı n -in kifayət qədər böyük sonlu qiymətlərində hadisənin tezliyi $k_n(A)/n$ [$k_n(A)$, – A hadisəsinin n sınaqda baş vermə sayıdır] bir qayda olaraq, p ehtimalından çox az fərqlənir.

n -in böyük qiymətlərində $k_n(A)/n$ -in p -dən hansısa olduqca böyük fərqi demək olar ki, az müşahidə olunur. Məs., düzgün metal pulun atılması eksperimentində «gerb» və «şəbəkə» üzləri ilə düşmə hadisələrinin E. $1/2$ -ə bərabərdir. $n = 10$ olduqda, on dəfə «gerb» və ya on dəfə «şəbəkə» üzü ilə düşmə hadisələri çox az ehtimallıdır.

Lakin bu halda «gerb» üzü ilə düşmə hallarının sayının hökmən beş dəfə olacağını hökm etməyə də kifayətedici dəlil yoxdur; hətta «gerb» üzü ilə düşmə hallarının sayının 4 və ya 5, yaxud da 6-ya bərabər olacağını da hökm etməyə heç bir əsas yoxdur. Lakin $n = 100$ olduqda risk etmədən əvvəldən hökm etmək olar ki, düşən «gerb»lər sayı $40 – 60$ arasında olacaqdır (bax, *Böyük ədədlər qanunu*).

Riyazi anlamda E. adi mənada sözlərlə ifadə olunan «mümkündür», «ehtimal olunur», «ehtimalı çoxdur» kimi «problematik» mülahizlərin dəqiqləşdirilməsinə, hadisənin E.-nı qiymətləndirilməsinə xidmət edir. Bu cür qiymətləndirilmələrdə nəzərə alınmalıdır ki, hər hansı əslində ya doğru, ya yalan mülahizəyə tətbiqi baxımdan bu mülahizənin E.-nın qiyməti yalnız müvəqqəti və ya subyektiv məna daşıyır, yəni məsələyə subyektiv münasibəti ifadə edir.

Buna görə də, bu və ya digər mülahizələrin etibarlılıq dərəcəsinin qiyməti kimi E.-dan istifadə belə bir nəticəyə gətirməməlidir ki, E. yalnız hər hansı hadisənin baş verməsinin subyektiv inamlılığını ifadə edir. Riyazi olaraq E.-ın belə anlaşılması yanlışdır. Elmi araşdırmalarda, adətən, E.-ı $0{,}003$ olan hadisə nəzərə alınmır (bu *Üç siqma qaydası* ilə təyin edilmiş normadır). Riyazi statistikada hər hansı bir araşdırmada baş verən xətaların nəzərə alınmaması üçün *mühümlük ölçüsü* adlanan ehtimaldan istifadə olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan riyazi modellər üç anlayışa: elementar hadisələr fəzası adlanan Ω, Ω -nın altçoxluqlarından (hadisələrdən) təşkil olunmuş sinif və bu sinifdə təyin olunmuş çoxluq funksiyası – *ehtimal paylanması* $\mathbf{P}$ anlayışlarına əsaslanır. Bu halda A hadisəsi üçün $\mathbf{P}$ funksiyasının qiyməti $\mathbf{P}(A)$, A hadisəsinin e h t i m a l ı adlanır.

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

EHTİMAL k v a n t f i z i k a s ı n d a **« вероятность в квантовой физике; probability** i n q u a n t u m p h y s i c s **»** – ən ümumi və ən mühüm anlayışdır, bu anlayışın daxil olunması zəruriliyi onunla əsaslandırılmışdır ki, fiziki obyektlərin atom və subatom səviyyəsində müşahidə nəticələri statistik xarakter daşıyır. Məs., təsadüfi zaman anlarında radioaktiv parçalanma, mütləq sıfra yaxın temperaturda (yəni istilik fluktuasiyaları olmadığı halda) kristal şəbəkənin atomlarının kvant fluktuasiyaları ilə yaranan işıq səpələnməsi kimi prosesləri qeyd etmək olar. Bu nöqteyi – nəzərdən, kvant nəzəriyyəsində mikroobyektlərlə bağlı baş verə biləcək proseslər mahiyyət etibarilə ehtimali xarakterlidir və bunlar keçid ehtimalları, orta qiymətlər, dispersiyalar, korrelyasiyalar və s. terminlərlə ifadə olunur.

Lakin prinsipial mühüm cəhət odur ki, ayrılıqda götürülmüş hər bir eksperimentin nəticəsinə adi təsadüfi kəmiyyət kimi baxmaq olar, amma bununla belə baxılan mikroobyekt üzərində bütün mümkün ola bilən eksperimentlərin statistik nəticələrinin bu mikroobyektin vəziyyətini xarakterizə edən çoxluğun «klassik» təsvirini hər hansı elementar nəticələr fəzası terminlərilə vermək mümkün deyildir. Başqa sözlə, mikroobyektin vəziyyətini klassik statistik mexanikada olduğu kimi hər hansı «faza fəzası» $(\Omega,\ \mathfrak{U})$-da $\mathbf{P}(d\omega)$ ehtimal paylanması ilə vermək mümkün olmur ki, bu fəza $\omega\in\Omega$ «əsl vəziyyətinin» qeyri – dəqiqliyini və ya nə cür ola biləcəyi haqqında bilginin natamamlığını əks etdirə bilsin.

Kvant statistikliyi o mənada əsl statistiklik hesab olunur ki, o, ilkin xarakter daşıyır və ölçmələrin dəqiqliyinin artırılması və olduqca ətraflı olması hesabına prinsipial surətdə aradan qaldırılmır (bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*). Riyazi nöqteyi – nəzərdən bu vəziyyət onunla ifadə olunur ki, kvantmexaniki obyektin ehtimali təsviri elementar nəticələr fəzasının klassik aksiomatikasında bütünlüklə qurula bilinmir və bu halda digər analitik vasitələrin cəlb olunması tələb olunur (bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*; *Cəbri*, *müşahidənənlərin*).

Kvant mexanikasına «gizli parametrlərin» daxil edilməsinin qeyri – mümkünlüyü haqqında tezis, yəni kvant ehtimallarının klassik ehtimalın təsvirinin bu və ya digər formaya gətirilə bilməsi haqqında tezis N. Bor (N. Bohr) tərəfindən irəli sürülmüşdür və 20-ci əsrin 30-cu illərində dərin fiziki – fəlsəfi müzakirə mövzusu olmuşdur (bax, [1]). Bu vəziyyətin de facto qəbul edilməsi determinizm doqmatlarından imtina və fiziki təfəkkürün statistik kateqoriyalarının daxil edilmə istiqamətində maddənin kinetik nəzəriyyəsinin qurulmasından sonra növbəti prinsipial addım olmuşdur. C. Neyman (J. Neumann) [2] əsərində «gizli parametrlər probleminə» riyazi status vermək üçün ilk cəhd göstərmişdir, lakin bu problem yalnız 20-ci əsrin 60-cı illərində əsaslı surətdə aydınlaşdırılmışdır.

Kvant mexanikasında vəziyyətlər və müşahidə olunan kəmiyyətlər H sisteminin Hilbert fəzasında $\hat{S},\ \hat{X}$ operatorları ilə təsvir olunurlar (bax, *Sıxlıq operatoru*, *Müşahidələnən*); klassik statistik mexanikada vəziyyətlər $S(d\omega)$ ehtimal paylanmaları ilə, müşahidələnənlər klassik sistemin Ω faza fəzasında $X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərilə təsvir olunurlar. Gizli parametrlər problemində klassik və kvant vəziyyətləri və müşahidələnənləri arasında $S(d\omega)\to\hat{S},\quad X(\omega)\to\hat{X}$ uyğunluğunun mümkünlüyü və ya qeyri – mümkünlüyü müəyyənləşdirilir; bu uyğunluq müəyyənləşdiyi halda o, kvant mexanikasının statistik öngörmələrini saxlamış və bəzi fiziki əsaslandırılmış şərtləri ödəmiş olardı.

C. Neyman mülahizəsini tənqidi analizə məruz edən C. Bell göstərmişdir ki (bax, [3]), *Qlison teoremindən* elə bir müddəa alınır ki, onu aşağıdakı formada ifadə etmək olar: hər hansı Ω faza fəzasında klassik müşahidələrin hər hansı $X(\omega)$ çoxluğu ilə Hilbert fəzası H-da dim. – ölçüləri 2-dən böyük bütün kvant müşahidələnənlərinin çoxluğu $\hat{X}$ arasında elə qarşılıqlı birqiymətli $X(\omega)\to\hat{X}$ uyğunluğu yoxdur ki, bu uyğunluq müşahidələnənlərin funksional hesablanmasını saxlaya bilsin, yəni $X(\omega)\to\hat{X}$ münasibətindən ixtiyari çoxhədli üçün $f(X(\omega))\to f(\hat{X})$ münasibəti alınmış olsun. Anoloji nəticə S. Koxen (S. Kochen) və E. Şpekker (E. Specker) tərəfindən, Qlison teoremindən istifadə olunmayaraq alınmışdır. Buradan qismən müşahidələnmə sxemi üzrə gizli parametrlərin daxil edilməsinin qeyri – mümkünlüyü alınır, məsələn, bu vəziyyət «makroskopik» müşahidə olunan kəmiyyətlər və sistemin faza fəzasının bəzi funksiyaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olan statistik mexanikada reallaşır. Lakin bu nəticə gizli parametrlərli daha dəqiq nəzəriyyəni istisna etmir və bu nəzəriyyədə eyni bir kvant müşahidələnəni $\hat{X}$, müxtəlif çoxsaylı üsullarla ölçülə bilinir və $X(\omega)\to\hat{X}$ uyğunluğu, beləliklə, qarşılıqlı birqiymətli olmur. Bununla belə C. Bell göstərmişdir ki, hətta belə olduqca geniş sinifdə belə, «Eynşteyn lokallığı» adlandırılan təbii tələbi yerinə yetirmək mümkünlüyü mövcud deyildir. Aşağıda Bell şərtinin riyazi mahiyyətini əks etdirən ayırılma şərti verilir (bax, [4]). $\hat{X}_1,\ ...,\ \hat{X}_n$ və $\hat{Y}_1,\ ...,\ \hat{Y}_m$

$$\hat{X}_i\hat{Y}_j=\hat{Y}_j\hat{X}_i,\quad i=1,\ ...,\ n,\quad j=1,\ ...,m \qquad (1)$$

kommutativlik şərtini ödəyən kvant müşahidələnlərinin iki toplusu olsun. Belə hesab etmək olar ki, $\{\hat{X}_i\}$ və $\{\hat{Y}_j\}$ topluları verilən kvant sisteminin iki müxtəlif altsistemlərinə aiddirlər. Əgər (1) şərtini ödəyən ixtiyari iki $\hat{X}_1,\ ...,\ \hat{X}_n$ və $\hat{Y}_1,\ ...,\ \hat{Y}_m$ müşahidələnənləri üçün və ixtiyari kvant vəziyyəti $\hat{S}$ üçün elə $X_1(\omega),\ ...,\ X_n(\omega),\quad Y_1(\omega),\ ...,Y_m(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri və hər hansı $(\Omega,\ \mathfrak{U})$ ölçülən fəzasında $S(d\omega)$ ehtimal paylanması tapılarsa ki,

$$\mathrm{tr}\ S\ X_iY_j=\int\limits_{\Omega}X_i(\omega)\,Y_j(\omega)\,S(d\omega)\equiv\mathbf{M}_S\,X_iY_j$$

münasibəti ödənilsin, onda verilən $n,\ m$ qiymətləri üçün $S(d\omega)\to\hat{S},\ X(\omega)\to\hat{X}$ uyğunluğu (qarşılıqlı birqiymətli olmaya da bilər) b ö l ü n ə n l i k ş ə r t i n i ödəyir, deyilir. Bu onu ifadə edir ki, gizli parametrlərli bölünənlik nəzəriyyəsi verilən kvant sisteminin altsistemləri arasında korrelyasiyalar toplularını yaratmalıdır. Lakin təsadüfi kəmiyyətlərin korrelyasiyaları üçün elə bərabərsizliklər vardır ki, bunlar kvant nəzəriyyəsində ödənilmir. Məs., $X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ Y_1(\omega),\ Y_2(\omega)$, – $[-1,\ 1]$ parçasında qiymətlər alan, ixtiyari $(\Omega,\ \mathfrak{U},\ \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun; onda

$$\left|\mathbf{M}_{\mathbf{P}}\,X_1Y_1\ +\ \mathbf{M}_{\mathbf{P}}X_1Y_2\right|\ +\ \left|\mathbf{M}_{\mathbf{P}}X_2Y_1\ -\ \mathbf{M}_{\mathbf{P}}X_2Y_2\right|\le 2 \qquad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Gizli parametrlərli bölünənlik nəzəriyyəsində (2) bərabərsizliyi $\mathrm{tr}\,\hat{S}\hat{X}_i\hat{Y}_j$ kvant korrelyasiyaları üçün ödənilməlidir. Lakin spini $1/2$-ə bərabər iki hissəciyin spin dəyişənlərinin korrelyasiyasının konkret misalında aydın olur ki, (2)-nin sol tərəfindəki kəmiyyətin kvant analoqu $2\sqrt{2}$ qiymətini alır. Beləliklə, kvant sisteminin altsistemləri arasında korrelyasiyalar çoxluğunun strukturunun gizli parametrlərli nəzəriyyə ilə, bölünənlik şərtini ödəməklə, yaranması mümkün deyildir.

Bell bərabərsizliyi eksperimental olaraq yoxlanılmışdır və aydın olmuşdur ki, bu yoxlama kvant nəzəriyyəsi ilə yaxşı uzlaşır.

Əd.: [1] Б о р Н., Избранные научные труды, т. 2, М., 1971; [2] Н е й м а н Д ж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [3] B e l l J., «Rev. Mod. Phys.», 1966, v. 38, p. 447–52; [4] Х о л е в о А. С., Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры, М., 1985.

EHTİMAL, APOSTERİORİ « вероятность a posteriori; a posteriori probability » – bax, *Aposterior ehtimal*.

EHTİMAL APRİORİ « вероятность a priori; a priori probability » – bax, *Aprior ehtimal*.

EHTİMAL, ƏLAQƏLİK EHTİMALI təsadüfi qrafın **« вероятность связности** случайного графа; **probability of connectedness** of a randomgraph **»** – bax, *Təsadüfi qraf*.

EHTİMAL FƏZASI « вероятностное пространство; probability space » – boş olmayan Ω çoxluğu, Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş Borel meydanı olan $\mathscr{A}$ sinfi (yəni hesabi sayda nəzəri – çoxluq əməllərinə görə qapalı sinif) və $\mathscr{A}$ -da $\mathbf{P}$ paylanmasından (*ehtimal ölçüsü*) ibarət $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ toplusudur. «E. f.» anlayışı A. N. Kolmoqorov tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur. Ω -nın elementləri – elementar hadisələr, Ω çoxluğunun özü elementar hadisələr fəzası adlanır. Ω çoxluğunun $\mathscr{A}$ – ya daxil olan altçoxluqları hadisələr (təsadüfi hadisələr) adlanır. Bəzən tam E. f.-ları, yəni $B\in\mathscr{A},\ A\subset B,\ \mathbf{P}(B)=0\Rightarrow A\in\mathscr{A}$ münasibətlərilə təyin olunan E. f.-ları ilə kifayətlənmək olur. Əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ixtiyari E. f.-dırsa, onda $A\in\mathscr{A}$ və $N\subset M,\ \mathbf{P}(M)=0$ şərtlərilə verilən $A\cup N$ tipli çoxluqlar sinfi $\overline{\mathscr{A}}$ Borel meydanı əmələ gətirir və $\overline{\mathscr{A}}$ -da təyin olunan $\overline{\mathbf{P}}$ funksiyası $\overline{\mathbf{P}}(A\cup N)=\mathbf{P}(A)$ düsturu ilə təyin olunaraq, $\overline{\mathscr{A}}$ -da paylanmadır. Onda $(\Omega, \overline{\mathscr{A}}, \mathbf{P})$ fəzası tam E. f.-sıdır və bu fəza – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ fəzasının tamamlanması adlanır.

Bəzən yalnız mükəmməl E. f. ilə də kifayətlənilir və bu fəzalar belə təyin olunur: ixtiyari $\mathscr{A}$ – ölçülən f funksiyası və ədəd oxunda ixtiyari E çoxluğu üçün $f^{-1}(E)\in\mathscr{A}$ olarsa, elə B Borel çoxluğu var ki, $B\subset E$ və $\mathbf{P}(f^{-1}(E))=\mathbf{P}(f^{-1}(B))$. Mükəmməl E. f.-ları çərçivəsində ümumi sxemdə yaranan bəzi «patoloji» hallar (şərti ehtimallarla əlaqədar, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin tərifi ilə əlaqədar) olmur. Bu və ya digər tələbləri ödəyən E. f.-nın varlığı məsələsi o qədər də sadə deyildir. Bu tipli nəticələrdən biri uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında fundamental Kolmoqorov teoremidir: T çoxluğunun elementlərinin hər bir nizamlanmış $t_1, ..., t_n$ toplusunda $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının Borel çoxluqlarında $\mathbf{P}_{t_1, ..., t_n}$ paylanmasının təyin olunduğu fərz olunur və fərz olunur ki, aşağıdakı uzlaşma şərti ödənilir:

$$1)\quad \mathbf{P}_{t_1, ..., t_n}(I_{y_1, ..., y_n}) = \mathbf{P}_{t_{\alpha 1}, ..., t_{\alpha n}}(I_{y_{\alpha 1}, ..., y_{\alpha n}})$$

bərabərliyi bütün $(y_1, ..., y_n)\in\mathbb{R}^n$ üçün və $1, ..., n$ ədədlərinin ixtiyari yerdəyişməsi $\alpha_1, ..., \alpha_n$ üçün doğrudur, burada

$$I_{y_1, ..., y_n} = \{ x=(x_1, ..., x_n) : x_i \le y_i,\ i=1, ..., n \};$$

$$2)\quad \mathbf{P}_{t_1, ..., t_n}(I_{y_1, ..., y_{n-1}}, \infty) = \mathbf{P}_{t_1, ..., t_{n-1}}(I_{y_1, ..., y_{n-1}}).$$

Onda $\mathbb{R}^T = \{ x=\{x_t\},\ t\in T,\ x_t\in\mathbb{R}^1 \}$ hasilinin altçoxluqlarının minimal Borel meydanı $\mathscr{A}$ -da elə $\mathbf{P}$ paylanması vardır ki, T çoxluğunun ixtiyari sonlu $t_1, ..., t_n$ altçoxluğu və ixtiyari n – ölçülü B Borel çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}_{t_1, ..., t_n}(B) = \mathbf{P}\{ t_1(x), ..., t_n(x)\in B \}$$

bərabərliyi doğrudur; $t(x)=x_t$ koordinat funksiyalarının $\mathscr{A}$ – ölçülən funksiyalar olduğu fərz olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

* **EHTİMAL FƏZASI** təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu **« вероятностное пространство** порожденное (или индуцированное) случайной величиной; **probability space,** generated by random variable **»** – $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\xi=\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlər aldığı fəza ilə doğurulan, $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\xi)$ ehtimal fəzasına deyilir; $\mathbb{R}^1$ – ədəd oxu, $\mathscr{B}$, – $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun $(a, b] = \{x\in\mathbb{R}^1 : a < x \le b\}$ tipli bütün mümkün ola bilən intervallarından təşkil olunmuş ədədi çoxluqlar (Borel çoxluqları) sinfi, σ – cəbridir;

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\{ \omega : \xi(\omega)\in\mathbf{B} \},\quad \mathbf{B}\in\mathscr{B}$$

münasibətilə təyin olunan $\mathbf{P}_\xi$, – $\mathscr{B}$ σ – cəbrində təyin olunmuş mənfi olmayan çoxluq funksiyasıdır (ehtimaldır).

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

EHTİMAL FƏZASI METODU « вероятностного пространства метод; probability space method » – bax, *Bir ehtimal fəzası metodu.*

EHTİMAL; İNTEQRAL EHTİMALI « вероятности интеграл; error function » – bax, *İnteqral ehtimalı*.

EHTİMAL; KEÇİD EHTİMALI « вероятность перехода; transition probability » – faza fəzası $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ olan Markov zənciri və ya prosesinin s anındakı x vəziyyətindən t anında hər hansı E çoxluğuna keçid ehtimalı:

$$\mathbf{P}\{ \zeta_t\in E \mid \zeta_s = x \} = p(s, x; t, E),$$
$$s\le t,\quad x\le\mathscr{E},\quad E\in\mathscr{B}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan *şərti ehtimaldır.* Adətən, $p(s, x; t, E)$ *keçid funksiyası* da adlandırılır və K. e. bu funksiyanın qiyməti kimi anlaşılır. t diskret olduqda, $p(s, x; s+n, E)$ n addıma keçid ehtimalı, bir addıma K. e. isə sadəcə K. e. adlanır. n addıma K. e. bir addıma keçid ehtimalları vasitəsilə *Kolmoqorov – Çepmen tənlikləri* ilə ifadə olunur.

$\mathscr{E}$ fəzası sonlu və hesabi olduqda

$$p(s, x; t, E) = \sum_{y\in E} p(s, x; t, y)$$

olduğundan K. e.-nı nöqtəvi çoxluqlar üçün vermək kifayətdir; bu halda $p(s, i; t, j) = p_{ij}(s, t),\ i\in\mathscr{E},\ j\in\mathscr{E}$ işarələməsindən istifadə edilir. Əgər proses zamana görə *bircins prosesdirsə*, onda

K. e. yalnız zamanın artımından asılı olur, yəni $p(s, x; t, E) = p(t-s, x, E)$ və analoji olaraq, $p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t-s)$ olur. s və t -nin ixtiyari qiymətlərində

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t), \quad i, j = 1, 2, ..., N.$$

Bu düstur *keçid ehtimalları* tənlikləri adlanır;

$(X, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasından $(Y, \mathscr{G})$ ölçülən fəzasına daha geniş mənada K. e. elə $p(x, E)$, $x \in X$, $E \in \mathscr{G}$ funksiyasıdır ki, 1) $p(x, E)$ hər bir E üçün x üzrə $\mathscr{A}$ – ölçüləndir; 2) $p(x, \cdot)$ – hər bir x üzrə $(Y, \mathscr{G})$ -də ehtimal ölçüsüdür.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984; [2] Ширяев А. Н., Вероятность. М., 1980.

EHTİMAL; UDUM EHTİMALI, Markov zəncirində «**вероятность поглощения** в цепи Маркова; **absorbtion probability** in a Markov chain» – sistemin faza fəzasının elə altçoxluğuna düşməsi ehtimalıdır ki, sistem bu altçoxluqdan 1 ehtimalla çıxa bilmir, yəni 1 ehtimalla orada qalır (udulur). $\{X_t\}_{t=0, 1, 2, ...}$ – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi $\mathscr{E}$ olan Markov zənciri, C_α – bu zəncirin mühüm vəziyyətlər sinfindən biri olsun (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Xüsusi halda, C_α yalnız bir vəziyyətdən ibarət ola bilər, bu halda bu vəziyyət udum vəziyyətidir. C_α sinfindən i vəziyyətindən çıxan sistemin U. e. $\pi_{i\alpha}$, tərifə görə

$$\pi_{i\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{i\alpha}^{(n)}, \quad i \in \mathscr{E}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\pi_{i\alpha}^{(n)}$, – n -ci addımda U. e.-dır;

$$\pi_{i\alpha}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{əgər} \quad i \in C_\alpha; \\ 0, & \text{əgər} \quad i \in \mathscr{E} \setminus C_\alpha \end{cases} \quad \text{olarsa,}$$

və $n \geq 1$ qiymətlərində

$$\pi_{i\alpha}^{(n)} = \mathbf{P}_i\{X_t \in \mathscr{E} \setminus C_\alpha,\ 0 \leq t < n \text{ olduqda, } X_n \in C_\alpha\}.$$

R – zəncirin mühüm olmayan vəziyyətlərinin sinfi olsun. $\mathscr{E} \setminus R$ mühüm vəziyyətlər sinfi olduğundan və bu siniflər bir-birilə əlaqəli olmadıqlarından, onda

$$\pi_{i\alpha} = \begin{cases} 1, & i \in C_\alpha, \\ 0, & i \in \mathscr{E} \setminus (C_\alpha \cup R). \end{cases} \tag{1}$$

Tam ehtimal düsturundan və U. e. $\pi_{i\alpha}$ üçün $i \in R$ olduqda Markov xassəsindən

$$\pi_{i\alpha} = \sum_{j \in \mathscr{E}} p_{ij}\, \pi_{j\alpha}, \quad i \in R \tag{2}$$

münasibətləri alınır. Əgər R çoxluğu ($\mathscr{E}$ çoxluğu da) sonlu olarsa, onda (2) sisteminin (1) «sərhəd şərtlərində» yeganə həlli vardır. R sonsuz olduğu halda məhdud həll, yalnız və yalnız, o halda yeganədir ki, hər bir $i \in R$ başlanğıc vəziyyətində sistemin R sinfini heç vaxt tərk etməyəcəyi ehtimalı sıfra bərabər olsun. İxtiyari halda U. e.-ları (1), (2) tənliklərinin mənfi olmayan minimal həllidir.

U. e. ilə yanaşı, əksər hallarda, udulma anına qədər orta müddətə baxılır, yəni i başlanğıc vəziyyətindən çıxan sistemin mühüm vəziyyətlər çoxluğu $\mathscr{E} \setminus R$ -ə daxil olması üçün addımlar sayının riyazi gözləməsi m_i kəmiyyətlərinə baxılır. m_i ədədləri

$$m_i = 1 + \sum_{j \in \mathscr{E}} p_{ij}\, m_j, \quad i \in R, \tag{3}$$

tənliklər sisteminin «sərhəd şərtləri»

$$m_i = 0, \quad i \in \mathscr{E} \setminus R \tag{4}$$

olduğu halda mənfi olmayan (sonlu və ya sonsuz) minimal həllidir.

(1), (2) sisteminin sonlu və ya məhdud yeganə həlli haqqında yuxarıda qeyd olunanlar (3), (4) tənlikləri üçün də doğrudur.

Misal (oyunçunun iflas olması haqqında). $\mathscr{E} = \{0, 1, ..., n\}$, $p_{00} = p_{nn} = 1$, $p_{i,i-1} = q$ və $p_{i,i+1} = p$, $0 < i < n$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$ olsun, digər keçid ehtimallarının sıfra bərabər olduğu fərz olunur. Burada 0 və n vəziyyətləri uducu vəziyyətlərdir, mühüm olmayan vəziyyətlər sinfi $R = \{1, 2, ..., n-1\}$ çoxluğudur. (1), (2) sistemi 0 vəziyyətində udum ehtimalları $\pi_i = \pi_{i0}$ üçün (ilkin kapitalı i -yə bərabər oyunçunun müflis olma ehtimalları) həlli

$$\pi_i = \begin{cases} (r^i - r^n)/(1 - r^n), & p \neq 1/2 \quad \text{olduqda,} \\ (n - i)/n, & p = 1/2 \quad \text{olduqda,} \end{cases} \quad (r = q/p)$$

münasibəti ilə təyin olunan

$$\pi_0 = 1, \ \pi_i = q\pi_{i-1} + p\pi_{i+1}, \ i = 1, 2, ..., n-1, \ \pi_n = 0$$

sisteminə çevrilir. Udum müddətlərinin orta qiymətləri üçün (3), (4) sisteminin həlli –

$$m_i = \frac{1}{q-p}\left(i - n\,\frac{1 - r^i}{1 - r^n}\right), \quad p \neq 1/2 \quad \text{olarsa,}$$

$$m_i = i(n - i), \quad p = 1/2 \quad \text{olarsa}$$

bərabərliklərilə təyin olunur. $n \to \infty$ olduqda limitdə və bütün mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu $\mathscr{E}$ -də yeganə uducu vəziyyəti 0-a bərabər olan təsadüfi dolaşma alınır. Burada $R = \{1, 2, ...\}$ sonsuz çoxluqdur və (1), (2) və (3), (4) sistemlərinin minimal həlləri aşağıdakı münasibətlərlə təyin olunur:

$$\pi_i = \begin{cases} 1, & p \leq 1/2 \quad \text{olarsa,} \\ r^i, & p > 1/2 \quad \text{olarsa,} \end{cases}$$

$$m_i = \begin{cases} i/(q-p), & p < 1/2, \quad i \geq 0 \quad \text{olarsa,} \\ +\infty, & p \geq 1/2, \quad i \geq 1 \quad \text{olarsa.} \end{cases}$$

U. e.-ları və ya udum müddətlərinin orta qiymətləri üçün tənliklərdən Markov zəncirində i vəziyyətindən j vəziyyətinə k

vəziyyətindən əvvəl keçid ehtimalı π_{ij}^{k}-nın və ya i-dən j vəziyyətinə keçənə qədərki müddətlərin orta qiymətləri m_{ij}-lərin hesablanması üçün istifadə olunur və s. Bu məqsədlə i və k uyğun vəziyyətləri (və ya yalnız j) uducu vəziyyətlərlə əvəz olunmalıdır. m_{ij}-nin və sonlu zəncirlərdə bir vəziyyətdən digər vəziyyətə keçid müddətinin dispersiyasının hesablanmasında fundamental matrisdən istifadə olunur (bax, *Markov zənciri*; fundamental matris).

Kəsilməz zaman halı üçün (2) və (3) tənliklərinin analoqları «*Markov prosesi*; vəziyyətləri çoxluğu sonlu» məqaləsində verilmişdir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

EHTİMAL KOMBİNATORİKASI « вероятностная комбинаторика; probabilistic combinatorial analisys » – diskret riyaziyyatın elə bölməsidir ki, burada ehtimal nəzəriyyəsinin metodları konfiqurasiyaların xassələrinin, bunların varlığı, qurulması alqoritmlərinin araşdırılması, təsnifatı və hesablanması məsələləri də daxil olunmaqla öyrənilməsində tətbiq olunur. Ehtimal metodları *kombinator analiz* məsələlərinin həllində ən effektiv surətdə istifadə olunur. Bu halda kombinator konfiqurasiyalar çoxluğunda bir qayda olaraq, müntəzəm ehtimal paylanması verilir və təsadüfi seçilmiş kombinator konfiqurasiya ilə mümkün qiymətləri təyin olunan müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının xassələri araşdırılır. Belə yanaşma kombinator analizdə asimptotik nəticələrin alınmasında olduqca səmərəli olur.

E. k.-nda alınmış asimptotik xarakterli nəticələrə aid bəzi misallar aşağıda şərh olunmuşdur.

1. Mənfi olmayan tamqiymətli təsadüfi matrislər. Tamqiymətli mənfi olmayan elementlərinin cəmi N-nə bərabər $(n\times m)$ – ölçülü matrislər sinfində müntəzəm paylanma verilmişdir. Təsadüfi seçilmiş matrisdə elementləri sıfır olan sətir və sütunların sayı – $\xi(N; n, m)$ təsadüfi kəmiyyəti $n=\alpha m$, $0<\alpha\leq 1$ və $m\to\infty$ olduqda və $N/m - \ln m\to\gamma$ limitinin varlığı halında λ parametrli Puasson paylanmasına malikdir; əgər $\alpha=1$ olarsa, $\lambda=2e^{-\gamma}$, $0<\alpha<1$ olduqda isə $\lambda=e^{-\gamma}$ olur.

Əgər η_1 – təsadüfi matrisdə sıfır elementli sətirlərin sayı, η_2 isə sıfır elementli sütunların sayıdırsa, onda qeyd olunan şərtlərlə $\alpha=1$ olduğu halda (η_1, η_2) ikiölçülü təsadüfi vektoru asimptotik olaraq $(e^{-\gamma}, e^{-\gamma})$ parametrlərli, komponentləri asılı olmayan ikiölçülü Puasson paylanmasına yaxınlaşır; $0<\alpha<1$ olduğu halda isə birinci komponentin paylanması asimptotik olaraq cırlaşan paylanma, ikinci komponent isə $e^{-\gamma}$ parametrli Puasson paylanması ilə paylanır. Qeyd olunmuş şərtlərdə yuxarıda göstərilən Puasson limit paylanması N vahidi olan sıfır sətirli və sıfır sütunlu $(n\times m)$ – ölçülü təsadüfi $(0, 1)$ – matrisləri üçün də mövcuddur. Əgər $(n\times m)$ – matrisinin elementləri birbirindən asılı olmayaraq bərabərehtimalla $0, 1, ..., s-1$ qiymətlərini alırsa, onda $s>1$, $\lambda>0$, $m=\lambda s^n$ olduqda, sıfır elementli sətir və sütunların sayı λ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır.

2. Mənfi olmayan təsadüfi matrislərin permanentləri. Elementləri bərabərehtimallı $(n\times m)$ – ölçülü təsadüfi $(0, 1)$ – matrisi A ilə bağlı

$$E_{nm}=\{\operatorname{per}A=0\},$$

$H_{nm}=\{A$-nın ya sıfır elementli sətri və ya $m-n+1$ sayda sıfır elementli sütunu vardır$\}$

hadisələr olarsa, onda $m\to\infty$ olduqda bütün $n\leq m$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{H_{nm}\mid E_{nm}\}\to 1$$

münasibəti müntəzəm olaraq ödənilir, burada $\operatorname{per}A$, – A matrisinin permanentidir.

N sayda vahidi olan elementləri bərabərehtimallı təsadüfi n tərtib $(0, 1)$ – matrisi üçün $N=N(n)>n^{2/3+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ olduqda, $\gamma>0$ ixtiyari, $n\to\infty$ olarsa,

$$\mathbf{P}\{\,|\operatorname{per}A/\mathbf{M}(\operatorname{per}A)-1|>\gamma\}\to 1$$

münasibəti doğrudur, burada $\mathbf{M}(\operatorname{per}A)$, – $\operatorname{per}A$-nın orta qiymətidir. Əgər $N=n\ln n+cn+o(n)$ və $P(n, N)=\mathbf{P}\{\operatorname{per}A>0\}$ olarsa, onda $n\to\infty$ olduqda $P(n, N)\to$ $\to\exp\{-2e^{-c}\}$ münasibəti doğrudur. Əgər

$$N=N_r=n\ln n+(r-1)n\ln\ln n+n\omega(n)+o(n)$$

olarsa və $n\to\infty$ olduqda $\omega_n\to\infty$ münasibəti ixtiyari zəif surətdə ödənilərsə və $P(n, N_r, r)=\mathbf{P}\{\nu(A)\geq r\}$ olarsa, onda $P(n, N_r, r)\to 1$ olur, burada $\nu(A)$, – $A(0, 1)$–matrisinin n sayda qeyri – kollinear vahidlərindən ibarət toplulara uyğun cüt-cüt əvəzləmələrin maksimal sayıdır.

3. Təsadüfi ziddiyyətli əvəzləmələr. S_n, – $N=\{1, 2, ..., n\}$ çoxluğunda təsir edən n dərəcəli bütün əvəzləmələrin toplusu olsun. $N(s, s')=\{i: s(i)=s'(i),\ 1\leq i\leq n\}$ çoxluğuna s və s' əvəzləmələrinin ziddiyyətsizliyi çoxluğu deyilir. $N(s, s')=\varnothing$ olduqda s və s' ziddiyyətli əvəzləmələr adlanır və bu münasibət simvolik olaraq $s\uparrow s'$ kimi yazılır. Əgər Π_i, – s_i, $1\leq i\leq k$ əvəzləməsinə uyğun əvəzləmə matrisidirsə, onda

$$M_n(s_1, ..., s_k)=\left|\{s: s\uparrow s_1, ..., s\uparrow s_k,\ s\in S_n\}\right|=$$
$$=\operatorname{per}(I-(\Pi_1\vee ...\vee\Pi_k)),$$

burada $\vee$ – matrislərin elementləri üzrə dizyunksiya əməli işarəsidir.

$s\in S_n$ təsadüfi bərabərehtimallı əvəzləmə, $s_1, ..., s_k\in S_n$ qeyd olunmuş, cüt-cüt ziddiyyətli əvəzləmələr, $A_\nu(i)=\{s(i)=s_\nu(i)\}$ isə təsadüfi hadisə olsun, $1\leq\nu\leq k$, $1\leq i\leq n$. Onda

$$\xi_n(s_1, ..., s_k)=|\{i: A_1(i)\cup ...\cup A_k(i)\},\ 1\leq i\leq n|$$

təsadüfi kəmiyyəti $n\to\infty$ və məhdud k qiymətində $\lambda=k$ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır. Onda, məs., $(k\times n)$ –

ölçülü latın düzbucaqlılarının sayı $L(k, n)$ üçün $n \to \infty$ olduqda və məhdud k qiymətində

$$L(k, n) = (n!)^k e^{-\binom{k}{2}}(1 + o(1))$$

asimptotik düsturu alınır.

4. Təsadüfi əvəzləmələrin tsikllər. n dərəcəli əvəzləmələr çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur və ξ_n – təsadüfi seçilmiş əvəzləmədə tsikllərin sayıdır. $(\xi_n - \ln n)/\sqrt{\ln n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \to \infty$ olduqda $(0, 1)$ parametrlərli normal paylanmaya yaxınlaşır. l uzunluqlu tsikllərin sayına bərabər $\varkappa_{nl}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \to \infty$ olduqda $\lambda = 1/l$ parametrli Puasson paylanmasına yaxınlaşır. Əgər $\nu^{(n)}$ və $\tilde{\nu}^{(n)}$, – n dərəcəli əvəzləmədə uyğun olaraq, tsikllərin minimal və maksimal uzunluqlarıdırsa, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\nu^{(n)} = k\} = (1 - e^{1/k}) \exp\left\{-\sum_{j=1}^{k-1} j^{-1}\right\} + o(1).$$

$(\lambda + 1)^{-1} \le x < y < \lambda^{-1}$ münasibətini ödəyən ixtiyari qeyd olunmuş x və y ədədləri üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{x \le \frac{\tilde{\nu}^{(n)}}{n} < y\right\} \to \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{(-1)^k}{k!} \{J_k(y, 1) - J_k(x, 1)\},$$

münasibəti doğrudur, burada

$$J_0(m, n) = 1,$$

$$J_k(m, n) = \int \dots \int \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}, \quad k \ge 1,$$

$x_i \ge m$, $\sum_i x_i < n$ inteqrallama oblastıdır.

Əgər Q_n, – n dərəcəli təsadüfi əvəzləmənin tərtibidirsə, onda $n \to \infty$ olduqda $\left(\ln Q_n - \frac{1}{2}\ln^2 n\right)\left(\frac{1}{3}\ln^3 n\right)^{-1/2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, $(0, 1)$ parametrlərli normal paylanmaya yaxınlaşır.

5. Təsadüfi ağaclar. Zirvələri $X = \{x_1 x_2 \dots x_n\}$ çoxluğunun nişanlanmış elementləri olan, n^{n-2} sayda n zirvəli sərbəst ağacdan ibarət çoxluqda müntəzəm paylanma verilmişdir. Əgər ν_n – təsadüfi ağacın zirvə uclarının sayıdırsa, onda $(\nu_n - ne^{-1})/\sqrt{n(e-2)e^{-1}}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \to \infty$ olduqda $(0, 1)$ parametrlərli normal paylanmaya yaxınlaşır. Əgər θ_n qeyd olunmuş zirvə ucuna nəzərən təsadüfi seçilmiş ağacın hündürlüyüdürsə, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\theta_n < x\sqrt{2n}\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2x^2}(1 - 2k^2x^2)$$

münasibəti doğrudur.

$(\eta_n + 1)$ – təsadüfi köklü ağac meşəsində ($(\tilde{\eta}_n + 1)$ isə köksüz ağac meşəsində) ağacların sayı olsun. Onda $n \to \infty$ olduqda η_n ($\tilde{\eta}_n$) təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\lambda = 1$ parametrli ($\lambda = 1/2$ parametrli) Puasson paylanmasına yaxınlaşır. Əgər d_n, – köksüz ağac meşəsindəki n sayda qeyd olunmuş zirvəli təsadüfi ağacın iki qeyd olunmuş zirvə ucları arasındakı məsafədirsə, onda bütün $u = d_n/\sqrt{n} = o(n^{1/6})$ ədədləri üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{x_i + 1 = u\sqrt{n}\} = \frac{u}{\sqrt{n}} e^{-u^2/2}(1 + o(1))$$

olduğu alınır.

$d(x_i)$, – i zirvə ucuna müvafiq olan şaxələrin sayı, $\chi_i = d(x_i) - 1$, $1 \le i \le n$ olsun; $[x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \dots x_n^{\varkappa_n}]$ simvolu – **ağacın ilkin spesifikasiyası** adlanır. Ağacın hər bir ilkin $[x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \dots x_n^{\varkappa_n}]$ spesifikasiyasına qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq kimi n müxtəlif oyuqda $n-2$ sayda müxtəlif əşyanın yerləşməsi sxemini qarşı qoymaq olar; i-ci oyuqda $\varkappa_i$ sayda əşyanın olması nəzərdə tutulur, $1 \le i \le n$. Bu şərhdən aydındır ki, təsadüfi ağacın «şaxələnməsinin» ehtimal paylanmaları müxtəlif oyuqlarda müxtəlif əşyaların təsadüfi yerləşməsi sxemi ilə tamamilə təsvir olunur.

6. Təsadüfi qraflar. n sayda nişanlanmış təpəyə və N sayda tilə malik $\Gamma_{n,N}$ qraflar çoxluğunda hər bir qrafa $\binom{n}{2}^{-1}$ ehtimalı qarşı qoyulmaqla müntəzəm ehtimal paylanması verilir. Əgər $N = \left[\frac{1}{2} n \ln n + cn\right]$, c – sabitdir, $P(n, N)$, – $\Gamma_{n,N}$ qrafının hər hansı bir k üçün $n-k$ təpədən bir ədəd əlaqəli təpəni və k sayda izolə olunmuş nöqtəni özündə saxlaması ehtimalıdırsa, onda $n \to \infty$ olduqda $P(n, N) \to 1$ münasibəti ödənilir. Eyni şərtlərlə əlaqəlilik ehtimalı $P_0(n, N)$ üçün $n \to \infty$ olduqda $P_0(n, N) \to \exp\{e^{-2c}\}$ münasibəti alınır.

Əgər ζ_n, – $\Gamma_{n,N}$ təsadüfi qrafının ən böyük komponentini ifadə edən təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $n - \zeta_n$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \to \infty$ olduqda, $\lambda = e^{-2c}$ parametrli Puasson paylanmasına yaxınlaşır. $\xi(n, N) - 1$ təsadüfi kəmiyyətinin də $n \to \infty$ olduqda limit paylanması eyni paylanmadır, burada $\xi(n, N)$ təsadüfi qrafın əlaqəlilik komponentlərinin sayıdır.

7. Təsadüfi inikaslar. X n – çoxluğunun özünə bütün $n^n\sigma$ inikaslarının çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur. Təpələri X çoxluğunun nişanlanmış elementləri olan təsadüfi istiqamətləndirilmiş $\Gamma(X, \sigma)$ qrafına baxılır və $x' = \sigma(x)$, $x, x' \in X$ olduqda x və x', (x, x') qövsü ilə birləşir. Əgər ζ_n $\Gamma(x, \sigma)$ qrafının tsiklik təpələrinin sayıdırsa, onda $n \to \infty$ olduqda bütün $u = o(n^{1/6})$ üçün

$$\mathbf{P}\{\ \zeta_n/\sqrt{n}\ = u\} = u e^{-u^2/2}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ (1 + o(1))$$

olur.

$\Gamma(X,\ \sigma)$-nın komponentləri sayı $\varkappa_n$ üçün $n \to \infty$ olduqda $\left(\varkappa_n\ -\ \frac{1}{2}\ln n\right)\left(\ \frac{1}{2}\ \ln n\right)^{-1/2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $(0,\ 1)$ parametrlərli normal paylanma olur.

Əgər σ təsadüfi inikası üçün p_n, – proobrazların sayı, s_n – qeyd olunmuş $x \in X$ elementinin obrazları sayıdırsa, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\ p_n = k\} \to \frac{k^{k-1}}{e^k\ k!},\quad k = 1,\ 2\ ,...$$

$$\mathbf{P}\{\ s_n/\sqrt{n}\ = u\} = u e^{-u^2/2}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ (1 + o(1))$$

münasibətləri doğrudur. $\Gamma(X,\ \sigma)$ qrafında $x \in X$ təpəsinə daxil olan qövslərin sayı r, – x təpəsinin tam təkrarlılıq sayı adlanır. σ təsadüfi inikası üçün $\Gamma(X,\ \sigma)$ qrafında təpələrin sayı $\mu_r(n)$ n müxtəlif oyuqda n müxtəlif əşyanın təsadüfi yerləşməsi sxemində r sayda əşya yerləşən oyuqların sayına bərabərdir.

8. Çoxluğun təsadüfi bölgüləri. X n – çoxluğunun k sayda bloka bölgülərinin sayı – ikinci növ Stirlinq ədədi $\sigma(n,\ k)$-ya bərabərdir. n – çoxluğun ümumi bölgülərinin sayı Bell ədədi B_n-ə bərabərdir. Bütün B_n bölgülərinin çoxluğunda müntəzəm paylanmanın təyin olunduğu fərz olunur; ξ_n təsadüfi bölgüdəki blokların sayı olsun. $n \to \infty$ olduqda $(\ \xi_n - n/\ln n)(\sqrt{n}/\ln n)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $(0,\ 1)$ parametrlərli normal paylanmaya yaxınlaşır. Əgər $\varkappa_n(l)$ təsadüfi bölgüdəki l –ölçülü blokların sayıdırsa və r, – $re^r = m$ tənliyinin həllidirsə, onda $n \to \infty$ olduqda $(\ \varkappa_n(l) - r^l/l!\ )\ /\sqrt{r^l/l!}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $(0,\ 1)$ parametrlərli normal paylanmaya yaxınlaşır. $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$ münasibətini ödəyən ixtiyari $i_1,\ i_2\ ,\ ...,\ i_k$ üçün k – ölçülü $(\varkappa_n(i_1) - \lambda_{i_1})/\sqrt{\lambda_{i_1}}$, ..., $(\ \varkappa_n(i_k) -$ $- \lambda_{i_k})/\sqrt{\lambda_{i_k}}$) təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $n \to \infty$ olduqda dispersiyaları 1-ə bərabər, asılı olmayan komponentlərli lokal normal paylanmaya yaxınlaşır, burada $\lambda_l = r^l/l!$. n-in böyük qiymətləri üçün

$$\mathbf{P}\{\ \varkappa_n(l) > 0\} \ge 1 - l!/r^l\ ,\quad re^r = n$$

bərabərsizliyi doğrudur. Deməli, əgər ν_n təsadüfi bölgünün ən kiçik blokunun ölçüsüdürsə, onda $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}\{\nu_n = 1\} \to 1$ münasibəti alınır. Ən böyük blokun ölçüsü μ_n üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\ \overline{\mu}_n < x\} - e^{-e^{-[x]+\delta}} \to 0$$

münasibəti bütün məhdud x-lər üçün müntəzəm ödənilir; $\overline{\mu}_n = \mu_n - [\ er - \ln\sqrt{2\pi er}\ - \ln(e-1)]$, $re^r = n$, δ isə $er\ -\ \ln\sqrt{2\pi er}\ -\ \ln(e-1)$ ədədinin kəsr hissəsidir.

9. Çoxluqların təsadüfi örtükləri. X n – çoxluğunun $X = X_1 \cup\ ...\ \cup X_k$ sonlu birləşməsi örtük, $X_1, ..., X_k$ – örtüyün blokları adlanır. n – çoxluğun bütün örtükləri çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur; ξ_n – təsadüfi örtükdəki blokların sayını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\ (\ \xi_n - (\ 2^{n-1} - 1/2))/2^{n/2-1}\ = x\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^{n-1}}}\ e^{-x^2/2}\ (1 + o(1))$$

və $\alpha 2^{-n/6} \to 0$, $\beta 2^{-n/6}$ şərtini ödəyən bütün α və β-lar üçün

$$\mathbf{P}\{\ \alpha \le (\xi_n - (2^{n-1} - 1/2))\ /2^{n/2-1} \le \beta\} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\ ,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\ du$$

asimptotik bərabərliyi doğrudur.

Əgər $X = X_1 \cup ... \cup X_k$ örtüyündən ixtiyari blok xaric olunduqdan sonra qalan digər bloklar örtük yaratmırsa, bu blok minimal blok adlanır. n – çoxluğun minimal örtükləri çoxluğunda müntəzəm paylanmanın verildiyi fərz olunur; ξ_n – təsadüfi minimal örtüyün blokları sayı olsun. Onda $n \to \infty$ olduqda:

a) n cüt olarsa, $\mathbf{P}\left\{\ \widetilde{\xi}_n - \frac{n}{2} = \pm j\right\} \to \frac{2^{-j^2}}{1 + 2C_0}$,

$j = 0, 1\ , ...,$

b) n tək olarsa, $\mathbf{P}\left\{\ \widetilde{\xi}_n - \frac{n \pm 1}{2} = \pm j\right\} \to \frac{2^{-j(j+1)}}{2C_1}$,

$j = 0, 1\ , ...,$ doğrudur, burada

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\infty}\ \frac{1}{2^{j^2}}\ ,\quad C_1 = \sum_{j=0}^{\infty}\ \frac{1}{2^{j(j+1)}}\ .$$

X n – çoxluğunun $2^n - 1$ sayda bütün boş olmayan altçoxluqları sinfində müntəzəm paylanma verildiyi fərz olunur; $X_1, X_2\ , ...\ ,$ – təsadüfi çoxluqlar ardıcıllığı olsun. $X = X_1 \cup ...$ $\cup X_{\chi_n}$ münasibətini təmin edən minimal χ_n ədədinə X n – çoxluğunun örtük indeksi deyilir. $|\ y\ | = o(\ \log_2\sqrt{n}\ )$ olan ixtiyari y-lər üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\ \chi_n \le [\ \log_2 n\ ] + y\ \} = e^{-2^{-[y]+\delta_n}}(1 + o(1))$$

bərabərliyi doğrudur, burada $[\ \log_2 n\ ]$ və $\delta_n = \{\ \log_2\ n\ \}$ – uyğun olaraq $\log_2 n$-in tam və kəsr hissələridir.

10. Kombinator konfiqurasiyaların varlığının isbatı üçün ehtimal metodu. Kombinator konfiqurasiyaların varlığının isbatı üçün nəzəri – ehtimal metodları konstruktiv metodlar tətbiq olunmamaqla istifadə edilir. Belə yanaşmaya aid aşağıda bir misal şərh olunur.

n təpəli $G_n(p)$ təsadüfi qrafında təpələrin hər bir cütü p ehtimalı ilə digər cütlərdən asılı olmayaraq birləşir, q ehtimalı ilə birləşmə baş vermir; $p + q = 1$. $G_n(p)$ qrafının tamamlayıcı $\overline{G}_n(p)$ qrafında iki təpə til ilə, yalnız və yalnız, o halda birləşir ki, belə birləşmə $G_n(p)$-də yoxdur. Əgər $\upsilon_n(p, k)$ və $\upsilon_n(q, k)$ uyğun olaraq, $G_n(p)$ və $\overline{G}_n(p)$ qraflarında k təpəli tam altqrafların sayıdırsa, onda bunların orta qiymətləri

$$\mathbf{M}\,\upsilon_n(p, k) = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}, \quad \mathbf{M}\,\upsilon_n(q, k) = \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$$

düsturları ilə təyin olunur. Onda $k > \max\left\{\left[\frac{2\ln n}{\ln(1/p)}\right], \left[\frac{2\ln n}{\ln(1/q)}\right]\right\}$ olarsa, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\,\upsilon_n(p, k) = o(1), \quad \mathbf{M}\,\upsilon_n(q, k) = o(1)$$

olduğu alınır; $[z]$, – z-in tam hissəsidir.

Bu bərabərliklərdən aşağıdakı teorem alınır.

R e n y i t e o r e m i (A. Реньи). $0 < p < 1$ münasibətini ödəyən hər bir qeyd olunmuş p və hər bir $n > n_0(p)$ üçün elə $G_n(p)$ qrafı vardır ki, bu qrafda təpələrinin sayı $2\ln n / \ln(1/p)$-ni aşan tam altqraf yoxdur və elə tamamlayıcı $\overline{G}_n(p)$ qrafı vardır ki, bu qrafda təpələrinin sayı $2\ln n / \ln(1/q)$-nü aşan tam altqraf yoxdur ($p + q = 1$).

Əd.: [1] Э р д е ш П., С п е н с е р Д ж., Вероятностные методы в комбинаторике, пер. с англ., М., 1976; [2] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] С а ч к о в В. Н., Введение в комбинаторные методы дискретной математики, М., 1982; [4] К о л ч и н В. Ф., Случайные отображения, М., 1984.

EHTİMAL METODLARI ədədlər nəzəriyyəsində **« вероятностные методы** в теории чисел; **probabilistic methods** in number theory **»** – ədədlər nəzəriyyəsinin bir çox sahələrində aşkar və ya qeyri – aşkar formada tətbiq olunur. Ədədlərin metrik nəzəriyyəsinin müddəaları *sıfır – vahid qanunu* şəklində ifadə olunur və bu nəzəriyyədə diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin *limit teoremləri* isbat olunur, diofant yaxınlaşmaların *erqodik məsələləri* həll olunur. XX əsrin I yarısında ədədlərin metrik nəzəriyyəsi sahəsində E. Borel (E. Borel) və A. Ya. Xinçinin apardığı işlər ehtimal nəzəriyyəsinin özünün inkişafına səbəb olmuşdur. Ədədlərin additiv nəzəriyyəsində natural ədədin hər hansı bir çoxluqdan olan müəyyən sayda toplananların cəmi şəklində ifadələrinin sayı, toplananların sayının çoxalması nəzərə alınmaqla, limit teoremləri ilə ifadə olunur (ədədlər nəzəriyyəsinin toplananları sayının çoxalması nəzərə alınan ədədlər üçün *additiv məsələləri*), toplananların sayı az olduğu halda Yu. V. Linikin inkişaf etdirdiyi *erqodik metod və dispersion metoddan* istifadə olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsinin imkanları haqqında ən tam təsəvvürə *ehtimali ədədlər nəzəriyyəsini* öyrənməklə nail olmaq olar. Bununla yanaşı, *psevdotəsadüfi ədədlərin qurulması* məsələlərini, *təsadüfi proseslərin arifmetik modelləşdirilməsi*, *qrupların statistik nəzəriyyəsi* kimi sahələri də qeyd etmək lazımdır.

Əd.: [1] К у в и л ю с Й. П., Вероятностные методы в теории чисел., 2 изд., Вильнюс, 1962; [2] Л и н н и к Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [3] Л и н н и к Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [4] П о с т н и к о в А. Г., Вероятностная теория чисел, М., 1974; [5] E l l i o t t P. D. T. A., Probabilistic number theory, v. 1–2, N. Y., – [a. o.], 1979–80.

EHTİMAL METRİKALARININ MÜQAYİSƏSİ « вероятностных метрик сравнение; comparesion / ordering of probabilistic metrics » – bu və ya digər topoloji mənada anlaşılan *ehtimal metrikalarının* nizamlanmasıdır. Əgər μ və ν – təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu $\mathscr{X}$-də verilmiş metrikalardırsa, onda $\mu \precsim \nu$ « μ metrikası ν-dən güclü deyildir» münasibəti $\mathscr{X}$-dən olan ixtiyari $X_0, X_1, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\nu(X_n, X_0) \to 0 \Rightarrow \mu(X_n, X_0) \to 0$$

münasibətinin ödənilməsi anlamını daşıyır. Əgər bununla yanaşı, $\mathscr{X}$-dən olan elə $\eta_0, \eta_1, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı varsa ki, $n \to \infty$ olduqda $\mu(\eta_n, \eta_0) \to 0$, lakin $\nu(\eta_n, \eta_0) \not\to 0$ münasibətləri ödənilir, onda $\mu \prec \nu$ olur, bu simvolik yazı ilə « μ metrikası ν-dən zəifdir» hökmü işarə olunmuşdur.

$\mu \precsim \nu$ və $\nu \precsim \mu$ olduğu halda metrikalar ekvivalentdir: $\mu \sim \nu$. İxtiyari ehtimal metrikaları cütünü qeyd olunan anlamda nizamlamaq mümkün olmur. Məs., *orta metrika* $\varkappa_1$ və *müntəzəm metrika* ρ bir-birilə müqayisə olunmur. Bununla belə, istifadə olunan metrikalardan bir çoxunu belə nizamlamaq mümkün olur. Məs., sadə metrikalardan – *tam variasiya metrikası* σ, *Levi metrikası* L, λ metrikası (bax, «*Ehtimal metrikası*; s t r u k t u r »), *Levi – Proxorov metrikası* π, *müntəzəm metrika* ρ, *müntəzəm kvadratik metrika* ρ_0,

$$\lambda_0(X, Y) = \sup\{|f_X(t) - f_Y(t)| : t \in \mathbb{R}^1\}$$

və

$$\varepsilon^2(X, Y) = \sup\left\{\frac{1}{4r}\int_0^r |f_X(t) - f_Y(t)|^2\,dt : r > 0\right\}$$

(burada f_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır) metrikaları arasında aşağıdakı əlaqələr doğrudur:

$$L \sim \lambda \sim \pi \prec \rho \sim \rho_0 \sim \varepsilon \prec \lambda_0 \prec \sigma \qquad (*)$$

Təsadüfi kəmiyyətlərin yaxınlaşması ilə bağlı ehtimal metrikaları arasında ciddi nizamlanma da ola bilər, yəni $\mu \prec\prec \nu$ « μ metrikası ν-dən ciddi mənada güclü deyildir» münasibəti aşağıdakı mənada anlaşılır:

$\mathscr{X}$-dən olan ixtiyari $X_0, X_1, \ldots, \eta_0, \eta_1, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqları üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\nu(X_n, \eta_n) \to 0 \Rightarrow \mu(X_n, \eta_n) \to 0$$

implikasiyası doğrudur.

Bu zaman $\mu \prec \nu$ və $\mu \sim \nu$ münasibətlərinə analoji olaraq $\mu \prec\prec \nu$ və $\mu \approx \nu$ münasibətləri təyin olunur. (*) münasibətindəki metrikalar güclü mənada aşağıdakı kimi nizamlanmışdır:

$$L \prec\prec \pi \prec\prec \sigma, \quad L \prec\prec \rho \prec\prec \sigma,$$
$$\rho_0 \prec\prec \rho, \quad \rho \prec\prec \lambda_0, \quad \rho_0 \approx \varepsilon.$$

Əgər μ, ν $\mathscr{X}$-də sadə metrikalardırsa, onda ixtiyari $\mu \prec \nu$ münasibətinin nəticəsi belə ifadə olunur: ixtiyari μ – kompakt $K \subset \mathscr{X}$ çoxluğu üçün elə azalmayan $\psi(x, K)$ funksiyası vardır ki, $\psi(+0, K) = 0$, K-da $\mu \le \psi(\nu, K)$ bərabərsizliyi ödənilir.

$\mu \prec\prec \nu$ münasibətinə $\mathscr{X}'$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı çoxluğu çərçivəsində baxıldıqda, bu çoxluqda μ metrikası sonlu olduqda, bu münasibət $\mu \le \psi(\nu)$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür, $\psi(u)$ funksiyası isə bu çoxluqda azalmır və $\psi(+0) = 0$.

Təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən bir $\mathscr{X}'$ çoxluğunda μ metrikası $\mu \prec\prec \nu$ münasibəti $\mu \le \psi(\nu)$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür; $\psi(u)$ bu çoxluqda azalmayan funksiyadır və $\psi(+0) = 0$.

Əd.: [1] С е н а т о в В. В. «Матем. сб.», 1977, т. 102, № 3, с. 425–34; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования случайных величин, M., 1986.

EHTİMAL METRİKASI « вероятностная метрика; probabilistic metric » – bir ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu $\mathscr{X}$-də xüsusi şəkildə təyin olunmuş *kvazimetrikadır*. $\xi \in \mathscr{X}$ və $\eta \in \mathscr{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}_{\xi\eta}$-ların çoxluğunda təyin olunmuş,

(1) $\mu(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(\xi = \eta) = 1$,

(2) $\mu(\xi, \eta) = \mu(\eta, \xi)$,

(3) $\mu(\xi, \eta) \le \mu(\xi, \gamma) + \mu(\gamma, \eta)$

(ü ç b u c a q b ə r a b ə r s i z l i y i)

xassələrini ödəyən hər bir mənfi olmayan $\mu(\xi, \eta)$ funksionalına $\mathscr{X}$-də e h t i m a l m e t r i k a s ı deyilir.

Bəzən $\mathscr{X}$-in $\mu(\xi, \eta) < \infty$ şərti ödənilən altçoxluqlarındansa, bəzi ξ, η cütləri üçün $\mu(\xi, \eta) = \infty$ qiymətini götürmək daha münasib olur, məs., (2) və (3) münasibətlərində $\mu(\xi, \eta) = \infty$ onu ifadə edir ki, onların sağ tərəfləri də sonsuzluq olmalıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində E. m. sadəlik üçün m e t r i k a kimi də adlanır. Əgər $\mu(\xi, \eta)$-nın qiymətləri yalnız ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları $\mathbf{P}_\xi$ və $\mathbf{P}_\eta$ ilə təyin olunursa, E. m. s a d ə, digər hallarda m ü r ə k k ə b E. m. adlanır. Sadə metrikalar üçün (1) şərti

$$\mu(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_\xi = \mathbf{P}_\eta$$

şəklində olur.

Sadə metrikalar üçün $\mu(\xi, \eta)$ yazılışından başqa $\mu(\mathbf{P}_\xi, \mathbf{P}_\eta)$ yazılışından da tez-tez istifadə olunur (bu zaman $\mathbf{P}_\xi$, $\mathbf{P}_\eta$ paylanmaları əvəzinə onları birqiymətli təyin edən xarakteristikalardan, məsələn, paylanma funksiyalarından istifadə etmək olar).

E. m. stoxastik modellərin dayanıqlılığının araşdırılmasında mühüm vasitə sayılır (bax, *Limit teoremləri*, *Mərkəzi limit teoremləri* və s.).

Ki-Fan metrikası, *indikator metrikası*, *Levi metrikası*, *müntəzəm metrika*, *Forte – Murye metrikası*, *müntəzəm kvadratik metrika* (bunlardan son dördü sadə E. m.-dır) E. m.-ya aid misallardır.

E. m. stoxastik modellərin dayanıqlılığının tədqiqində mühüm vasitədir (bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı), e h t i m a l p a y l a n m a l a r ı n ı n k o m p o z i s i y a y a a y r ı l ı ş ı və *Dayanıqlılıq*(ğ ı), p a y l a n m a l a r ı n x a r a k t e r i z a s i y a l a r ı n ı n, *Limit teoremləri*, *Mərkəzi limit teoremləri*). Bunlar metrik məsafələr metodunun əsas elementi kimi və onu təşkil edən minimal metrikalar metodu kimi daxil olunurlar. E. m. haqqında əsas məlumatlar və müvafiq biblioqrafiyaları [1] və [2] (fəs. 1)-də tapmaq olar. E. m.-nın xassələri haqqında həmçinin *İdeal metrika*, *Ehtimal metrikalarının müqayisəsi*, *Minimal metrika*, *Kantoroviç metrikası*, *Ştrassen teoremi*, *Ehtimal metrikası*; s t r u k t u r məqalələrinə bax.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 264–87; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, M., 1986.

EHTİMAL METRİKASI; b i r c i n s l i k **« вероятностная метрика; probabilistic metric;** h o m o g e n i t y o f **»** *s* t ə r t i b l i – *ehtimal metrikasının*

$$\mu(T_c(X), T_c(Y)) = c^s \mu(X, Y)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan xassəsidir, burada T_c – təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətləri fəzasının ölçülən qarşılıqlı birqiymətli çevirmələr qrupu olub, müsbət ədədlərin hasil üzrə qrupuna izomorfdur, yəni a, $b > 0$ üçün $T_a T_b = T_b T_a = T_{ab}$. T_c çevirmələri limit teoremlərində normalayıcı çevirmələr rolunu oynayır. Əgər U fəzasında kommutativ $\cup$ semi – qrup əməli təyin olunmuşdursa, onda təsadüfi kəmiyyətlərin «ümumiləşmiş cəmləməsinin» $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ sxemində normalayıcı çevirmələr elə seçilir ki, ixtiyari $x, y \in U$ üçün

$$T_c(x \cup y) = T_c(x) \cup T_c(y)$$

bərabərliyi ödənilir. $T_c(x) = cx$ toplama əməli, $T_c(x) = |x|^c \operatorname{sign} x$ vurma əməli və $(x \cup y = \max(x, y))$ maksimum əməli üçün T_c rolunu birinci və ya ikinci çevirmə ifadə edə bilər.

EHTİMAL METRİKASI; r e q u l y a r l ı q **« вероятностная метрика;** р е г у л я р н о с т ь; **probabilistic metric;** r e g u l a r i t y o f **»** – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı $\cup$ binar əməlinin təyin olunduğu və bu əmələ nəzərən də kommutativ semi – qrup olan $\mathscr{X}$ çoxluğunda *ehtimal metrikasının* bir xassəsidir. Bu xassə ondan ibarətdir ki, ixtiyari $X, Y, Z \in \mathscr{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\mu(X \cup Z, Y \cup Z) \le \mu(X, Y) \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilir. (1) xassəsi μ ehtimal metrikasının s e m i a d d i t i v l i k xassəsinə ekvivalentdir: yəni ixtiyari $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathscr{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\mu(X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2) \le \mu(X_1, Y_1) + \mu(X_2, Y_2) \qquad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu xassə induksiya ilə ixtiyari sonlu sayda «toplananlara» şamil olunur. Yuxarıda verilmiş «geniş» anlamda requlyarlıqdan başqa, bu xassə «dar» anlamda da ifadə olunur, bu halda sonuncu birincidən onunla fərqlənir ki, (1) bərabərsizliyində X və Y təsadüfi kəmiyyətləri Z ilə asılı olmayan

kəmiyyətlər fərz olunur. «Dar» mənada requlyarlığa onun özünün uyğun ekvivalent semi – additivlik xassəsi (2)-dəki «cəmlərdə» toplananların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərlə ifadə olması ilə təyin olunur. «Dar» mənada requlyarlıq, adətən, sadə ehtimali metrikalara tətbiqdə istifadə olunur. Əgər hər hansı mürəkkəb μ metrikası geniş və ya dar mənada requlyarlıq xassəsinə malik olarsa, onda ona uyğun $\hat{\mu}$ *minimal metrikası* da həmin anlamda requlyarlıq xassəsinə malik olur.

Məs., *Ki – Fan metrikası* və Ki – Fan metrikasına nəzərən minimal olan *Levi – Proxorov metrikası* toplama əməlinə ($X \amalg Y = X + Y$) nəzərən və maksimum əməlinə [$X \amalg Y = \max(X, Y)$] nəzərən geniş mənada requlyar metrikadır. *Levi metrikası* və *müntəzəm metrika* bu əməllərə nəzərən dar mənada requlyar metrikalardır. *İndikator metrikası* və bu metrikaya nəzərən minimal – *tam variasiya metrikası* xüsusi yer tutur. Bu metrikaların hər ikisi $\mathscr{X}$-də ixtiyari binar $\amalg$ semi – qrup əməlinə nəzərən geniş mənada requlyar (və deməli, dar mənada) metrikadır.

E. m.-nın requlyarlıq xassəsi əksər hallarda ona ekvivalent yarıadditivlik xassəsi formasında istifadə olunur. $\amalg$ əməlinin kommutativ xassəli olması tələbi (1)-dən (2)-yə keçid üçündür.

Bu şərtdən azad olmaq üçün (1)-in «sağtərəfli requlyarlıq» şərtinə ona analoji olan

$$\mu(Z \amalg X, Z \amalg Y) \le \mu(X, Y)$$

«soltərəfli requlyarlıq» şərti əlavə edilir. (1) münasibətini ödəyən sadə və mürəkkəb ehtimal metrikalar (1)-də bərabərsizliyin bərabərliklə əvəz olunması ilə alınır və bunlar mövcuddur.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

EHTİMAL METRİKASI; структур **« вероятностная метрика;** структура; **probabilistic metric;** structure of **» –** *ehtimal metrikalarını* ifadə etmək üçün bu və ya digər ümumi konstruksiyadır. Ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan belə konstruksiyaların sayı çox deyildir. E. m.-nın müəyyən bir üsulla qurulması, onun digər bir üsulla qurulması mümkünlüyünü istisna etmir. Hətta eyni bir üsulla müxtəlif E. m. ifadələri də alına bilinər.

Aşağıda ən çox yayılmış bəzi strukturlar şərh olunmuşdur. Burada $\mathscr{X}$, – qiymətləri müəyyən (U, d) metrik fəzasından olan, eyni bir ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğudur.

I. λ **– struktur.** $w(X, Y; t)$, – $\mathscr{P}_2 \times (0, \infty)$-da mənfi olmayan funksional olsun, burada $\mathscr{P}_2 = \{\mathbf{P}_{XY}\}$, – $\mathscr{X}$ çoxluğundan olan təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanmaları çoxluğudur. $w(X, Y; t)$ funksionalı aşağıdakı xassələrə malikdir: t, t_1, t_2 – ixtiyari müsbət ədədləri üçün,

a) $w(X, Y; t) = 0 \Leftarrow \mathbf{P}\{X = Y\} = 1$

(axırıncı şərt w funksionalının $\mathbf{P}_{XY}$-dən deyil, marginal $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}_Y$ paylanmalarından asılı olduğu halda $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ şərti ilə əvəz olunur);

b) $w(X, Y; t) = w(Y, X; t)$;

c) $w(X, Y; t_1) \le w(X, Y; t_1 + t_2)$;

ç) $w(X, Y; t_1 + t_2) \le w(X, Z; t_1) + w(Z, Y; t_2)$.

Onda

$$\mu_1(X, Y) = \inf\{\max(w(X, Y; t), t) : t > 0\} \ge$$
$$\ge \mu_2(X, Y) = \sup\{\min(w(X, Y; t), t) : t > 0\} \qquad (1)$$

funksionalları $\mathscr{X}$-də E. m.-larıdır. Əgər ixtiyari (X, Y) cütü üçün $w(X, Y; t)$ t-nin kəsilməz funksiyası olarsa, bu funksio-nallar üst-üstə düşür. Hər bir ehtimal metrikası μ w-nın rolunda götürülərsə, onda onun köməyilə (1) funksionallarını qurmaq olar, bu halda $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

(1) şəklində E. m.-larının qeyri – trivial ifadələrinə misallar: $\lambda(X, Y)$ ($U = \mathbb{R}'$) metrikası, uyğun funksionalı

$$w(X, Y; t) = (1/2)\max(|f_X(u) - f_Y(u)| : |u| \le 1/t),$$

burada f_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır;

Ki-Fan metrikası, uyğun funksionalı

$$w(X, Y; t) = \mathbf{P}\{d(X, Y) \ge t\};$$

Levi – Proxorov metrikasıdır ki, uyğun funksionalı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$w(X, Y; t) = \sup\{\mathbf{P}\{X \in A\} - \mathbf{P}\{Y \in A^t\} : A \in \mathfrak{B}\}$$

burada $\mathfrak{B}$, – U-nun Borel çoxluqları sistemidir və

$$A^t = \{x : d(x, y) < t, y \in A\}.$$

II. ζ **– struktur.** $\mathfrak{Y} = \{g\}$, – (U, g)-də kəsilməz və məhdud həqiqi və ya kompleks funksiyalar çoxluğu olsun.

$$\zeta(X, Y; \mathfrak{Y}) = \sup\{|\mathbf{M}(g(X) - g(Y))| : g \in \mathfrak{Y}\} \qquad (2)$$

– $\mathscr{X}$-də sadə E. m.-dır. *Tam variasiya metrikası*, ζ_s *ideal metrikaları* (xüsusi halda *orta metrika*), *müntəzəm metrika*, *Forte – Murye metrikası*, *Kantoroviç metrikası*, *Dadli metrikası* ζ strukturlu E. m.-larıdır. Dadli metrikası üçün $\mathfrak{Y}$ (U, d)-də həqiqi funksiyalar çoxluğudur ki, bu funksiyalar üçün

$$\sup\{|g(x) - g(y)| / \min(1, d(x, y)) : x, y \in U\} \le 1$$

şərti ödənilir.

III**. İnteqral strukturu** aşağıdakı kimi, ümumiyyətlə, bir-birinə daxil olmayan konstruksiyaların bir neçəsini birləşdirir:

1. $\mu(X, Y) = \mathbf{M}d^p(X, Y)^{\min(1, 1/p)}$, $p > 0$,

$\mathscr{P}_2$-də funksionaldır və mürəkkəb E. m.-dır.

2. $$\mu(X, Y) = \int_U g(x) \left|\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_Y\right| (dx) \qquad (3)$$

inteqralı sadə E. m.-dır və o, g çəkili tam variasiyalı metrika adlanır, burada $g(x) \ge 0$, – U-da hər hansı ölçülən funksiyadır. Belə metrikaya misal, $g(x) = \|x\|^s$ halına uyğun s tərtib mütləq psevdomomentdir, burada $\|\cdot\|$, – U Banax fəzasında normadır.

3. $$\mu(X, Y) = \sup\left\{\left|\int g(x, A)(\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_Y)(dx)\right| : A \in \mathfrak{A}\right\}, \qquad (4)$$

funksionalı sadə E. m.-dır, burada $\mathfrak{A}$, – U-nun Borel çoxluqlarının hər hansı sistemidir. $g(x,\ A) = I(x \in A)\, g(A)$ olduqda mühüm xüsusi hal alınır, yəni bu halda

$$\mu(X,\ Y) = \sup\{\,|g(A)|\ |\mathbf{P}_X(A) - \mathbf{P}_Y(A)|:\ A \in \mathfrak{A}\}$$

olur, burada $g(A)$, – $\mathfrak{A}$-da hər hansı funksiyadır.

Bu metrika (3)-də təyin olunan metrika kimi tam variasiya metrikasının ümumiləşməsidir.

4. **Müntəzəm kvadratik metrika** (4)-ə oxşar, lakin onunla üst-üstə düşməyən struktura malikdir.

5. Sadə E. m.-ları

$$\mu^2(X, Y) = -\iint \upsilon(x, y)\,(\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_Y)(dx)\,(\mathbf{P}_X - \mathbf{P}_Y)(dy)$$

şəkilli funksionallarla ifadə oluna bilir, burada υ, – $U \times U$-da həqiqi funksiya olub, aşağıdakı xassələrə malikdir: ixtiyari $x_j \in U$, $\xi_j \in \mathbb{R}^1$ üçün

$$\upsilon(x, x) = 0,\ \ \upsilon(x, y) = \upsilon(y, x),$$

$$\sum_{i<j} \upsilon(x_i, x_j)\,\xi_i\,\xi_j \le 0,\quad \xi_1 + \ldots + \xi_n = 0.$$

Sadə E. m.-larının bu sinfində

$$\mu(X,\ Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$$

xassəsi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki,

$$\mathbf{M}\,\upsilon(X,\ Y)\,h(X)\,h(Y) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{M}\,h(X) = 0$$

münasibəti ödənilsin.

IV. Hausdorf strukturu. $S_{XY}(A, B)$ $\mathscr{B}_2 \times \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$-da təyin olunmuş, mənfi olmayan funksiya olsun, $\mathfrak{A}$, – $\mathfrak{B}$-nin hər hansı altçoxluğudur. Onda

$$\tau(A,\ B) = \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x, y),\ \sup_{y\in B}\inf_{x\in A} d(x, y)\right\}$$

$\mathfrak{A}$-da Hausdorf psevdometrikası adlanır. Əgər

$$\mu(X,\ Y) = \max\{\Delta(S_{XY})\ \Delta(S_{YX})\}$$

olarsa, E. m. μ Hausdorf strukturuna malikdir, deyilir, burada

$$\Delta(S_{XY}) = \sup_{A\in\mathfrak{A}}\inf_{B\in\mathfrak{A}}\{\tau(A,\ B),\ S_{XY}(A, B)\}.$$

Levi – Proxorov metrikası belə metrikadır; bu metrika üçün $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ və

$$S_{XY}(A,\ B) = \mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in B) \qquad (5)$$

və $S_{XY}(A, B)$ (5) bərabərliyi ilə verildikdə Levi metrikasıdır və $\mathfrak{A} \in \{(-\infty,\ x):\ x \in \mathbb{R}^1\}$.

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101 (143), № 3, с. 416–54; [2] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 284–94; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 264–87; [4] Рачев С. Т., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 625–53; [5] Рачев С. Т., «Lect. Notes Math.», 1983, Bd 982, S. 172–90.

EHTİMAL MƏSAFƏSİ « вероятностное расстояние; probabilistic distance » – *ehtimal metrikası* anlayışının genişlənmiş ifadəsidir. E. m. $d(X, Y)$ ehtimal metrikası tipli funksionaldır. Lakin E. m.-nin ehtimal metrikasından fərqi ondan ibarətdir ki, E. m. üçün yalnız bir xassənin:

$$\mathbf{P}\{X = Y\} = 1 \ \text{ olduqda, } \quad d(X, Y) = 0 \qquad (*)$$

şərtinin ödənilməsi tələb olunur. Ehtimal metrikaları halında olduğu kimi E. m.-ləri X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları $\mathbf{P}_X$, $\mathbf{P}_Y$ cütü ilə təyin olunan sadə ehtimal məsafələri $d(X, Y)$ və mürəkkəb ehtimal məsafələri adlanan digər E. m.-lərinə ayrılır. Sadə E. m.-ləri üçün (*) münasibəti $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ olduqda

$$d(X,\ Y) = 0$$

şəklində ifadə olunur. Sadə E. m.-inə misal *informasion məsafə*, *Hellinger məsafəsidir.*

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ « вероятностей теория; probability theory » – təsadüfi hadisə və proseslərin riyazi modellərini öyrənən riyazi elmdir. E. n. stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən hadisələrin ehtimallarına əsasən bu hadisələrlə müəyyən surətdə bağlı digər təsadüfi hadisələrin ehtimallarını təyin etməyə imkan verir. Təsadüfi hadisə və proseslərin öyrənilməsi stasionar şəraitdə kütləvi təsadüfi hadisə və proseslərin *tezliklərinin statistik dayanıqlılığı* adlanan qanunauyğunluğa malik olmasına əsaslanır. Bu qanunauyğunluq eksperimental olaraq təsdiq olunmuş bir faktdır və onun mahiyyəti aşağıdakı mülahizələrə əsaslanır. Müəyyən şərtlər kompleksi S ödənilməklə təkrarən aparılması mümkün olan stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi A hadisəsi baş verə də bilər, baş verməyə də bilər. Əgər S şərtlər kompleksi n dəfə ödənilməklə eksperimentlər aparılırsa, onda n sayda sınaq aparılmışdır, deyilir. $k_n(A)$, – A hadisəsinin n sınaqda baş verməsi sayı olsun. $k_n(A)/n$ nisbətinə A hadisəsinin *tezliyi* deyilir (bəzi ədəbiyyatda bu nisbət nisbi tezlik də adlanır). Sınaqların sayı n kifayət qədər böyük olduqca hadisənin tezliyi $k_n(A)/n$ müəyyən bir p $(0 \le p \le 1)$ ədədindən çox az fərqlənir. Bu ədəd A hadisəsinin *statistik ehtimalı* adlanır və $\mathbf{P}(A)$ ilə işarə olunur. Hadisənin tezliyinin qeyd olunmuş xassəsi dayanıqlılıq xassəsi, bu xassəli A hadisəsi stoxastik dayanıqlı hadisə adlanır. Məs., düzgün metal pulu n dəfə atdıqda «gerb» üzü sınaqların təxminən yarısında düşür və buna görə də, «gerb» üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalının $1/2$-ə bərabər olduğu qəbul oluna bilər. Statistika göstərir ki, doğulan oğlan uşaqlarının sayı qızların sayından çoxdur və oğlan doğulması doğulan uşaqların $51-52$ faizini təşkil edir; deməli, oğlan doğulması ehtimalı $1/2$-dən çoxdur.

Hər bir sınaqda müşahidə oluna bilən (mümkün hadisələr) hadisələrdən Ω – yəqin hadisəsini və $\varnothing$ – qeyri – mümkün hadisəsini qeyd etmək lazımdır: Ω hər bir sınaqda hökmən baş verən hadisə, $\varnothing$ heç bir sınaqda baş verməyən hadisədir. Müşahidə oluna bilən $A_1, \ldots, A_r$ hadisələrinə əsaslanaraq yeni hadisələr təyin etmək olur: bu hadisələrin birləşməsi və kəsişməsi hadisələri. Yalnız və yalnız $A_1, \ldots, A_r$ hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən B hadisəsinə $A_1, \ldots, A_r$ hadisələrinin birləşməsi deyilir. Yalnız və yalnız $A_1, \ldots, A_r$

hadisələrindən hamısı baş verdikdə baş verən C hadisəsinə $A_1, ..., A_r$ hadisələrinin k ə s i ş m ə s i deyilir.

Hadisələrin birləşməsi simvolik olaraq

$$B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$$

kimi, kəsişməsi isə

$$C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$$

kimi işarə olunur.

A verilmiş eksperimentdə müşahidə olunan ixtiyari hadisə olsun. Hər bir ω elementar hadisəsi eksperimentin nəticəsi haqqında tam informasiya verdiyindən, ω-nın baş verib-verməməsinə əsasən A hadisəsinin baş verib-verməməsini həmişə söyləmək olur: əgər $\omega \in A$ olarsa, onda A hadisəsi b a ş v e r m i ş d i r, deyilir. A, – Ω-nın qeyd olunmuş altçoxluğudur. Beləliklə, bütün Ω çoxluğu yəqin hadisəyə uyğundur ($\omega \in \Omega$ həmişə ödənilir), $\varnothing$ boş çoxluğu isə qeyri – mümkün hadisəyə uyğundur ($\omega \notin \varnothing$ həmişə doğrudur).

E. n.-də öyrənilən riyazi modellərdə $\mathbf{P}(A)$ ehtimalı aksiomatik olaraq daxil olunur. Fərz olunur ki, A h a d i s ə l ə r i hər hansı $\Omega = \{\omega\}$ e l e m e n t a r h a d i s ə l ə r f ə z a s ı n ı n σ – cəbr təşkil edən altçoxluqları sinfi $\mathscr{A}$-nın elementləridir ($\mathscr{A}$ sinfi $\varnothing$ və Ω-nı özündə saxlayan, inkar əməli və sonlu və ya hesabi sayda birləşmə, kəsişmə, iki hadisənin fərqi əməlinə görə qapalı sinifdir; bax, *Cəbri, hadisələrin*). $\mathbf{P}$ ehtimalı $A \in \mathscr{A}$ münasibətini ödəyən bütün hadisələr üçün təyin olunmuşdur və üç aksiomu (K o l m o q o r o v a k s i o m l a r ı) ödəyir:

A1. $\mathbf{P}(A) \geq 0$ ($\mathbf{P}$-nin müsbət olması),

A2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ($\mathbf{P}$-nin normalanmış olması),

A3. $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ olarsa,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

($\mathbf{P}$-nin hesabi – additivliyi).

$\mathscr{A}$-da təyin olunmuş $\mathbf{P}$ ehtimalı A1, A2, A3 aksiomlarını ödəyərsə, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ üçlüyü *ehtimal fəzası* adlanır.

Bu aksiomatika 1933-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif olunmuşdur və hal-hazırda E. n.-nin məntiqi əsaslandırılması üçün ən geniş yayılmış məntiqi sxem sayılır. Real təsadüfi hadisələrin tezlikləri (nisbi tezlikləri) müsbətlik, normalanmış olma və hesabi additivlik xassələrini ödədiyindən və hadisənin tezliyi ehtimala yaxın olduğundan $\mathbf{P}(A)$ ehtimalının da bu xassələri ödəməsi tələbi təbiidir. Hesabi additivlik xassəsinin ödənilməsi tələbi tam riyazi nəzəriyyənin yaradılması üçün zəruridir. Ehtimal fəzası qurularkən $\mathbf{P}$ ehtimalını müxtəlif üsullarla vermək olar. Məs., Ω sonlu fəza olarsa, ehtimal fəzası da sonlu olur; onda $\mathscr{A}$ cəbrdir. Bu halda $\mathbf{P}$ ehtimalı aşağıdakı şərtləri ödəyən e l e m e n t a r e h t i m a l l a r – $p(\omega)$, $\omega \in \Omega$ vasitəsilə təyin olunur:

$$p(\omega) \geq 0, \quad \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

$\mathscr{A}$, – Ω-nın bütün altçoxluqlarından təşkil olunmuş sinif olsun; $A \in \mathscr{A}$ hadisəsinin ehtimalı cəm ilə təyin edilir:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad (1)$$

Elementar ehtimallar uyğun real təsadüfi hadisələrin statistik hesablanan tezliklərinə əsasən təyin olunur (məs., demoqrafiya məsələlərində ölüm həddi cədvəlinin tərtibində olduğu kimi). Bir çox hallarda ω elementar hadisələri müəyyən simmetriklik şərtini ödəyir. Bu halda bütün $p(\omega)$-lar bir-birinə bərabər götürülür və (1) ifadəsinin xüsusi halı olaraq e h t i m a l ı n k l a s s i k t ə r i f i alınır:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

burada $N(A)$, – $A \subset \Omega$ çoxluğunun elementləri (A hadisəsi üçün əlverişli elementar hadisələrin) sayıdır.

$\mathbf{P}$ ehtimalı digər mühüm üsulla da verilir. Ω hər hansı məhdud Evklid fəzası, $m(\Omega)$ bu oblastın Lebeq ölçüsü olarsa (birölçülü və ikiölçülü fəzalarda bu ölçü uyğun olaraq uzunluq və sahədir) və ixtiyari $\omega \in \Omega$ nöqtələrinin hamısı «eyniimkanlı» olarsa, onda hər bir $A \in \mathscr{A}$ çoxluğuna

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \qquad (2)$$

ehtimalı qarşı qoyulur. Bu halda (2) düsturu ilə təyin edilən ehtimal – h ə n d ə s i e h t i m a l adlanır.

A1 – A3 aksiomları ilə təyin olunan $\mathbf{P}$ ehtimalı Ω-nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathscr{A}$ σ – cəbrində normalanmış ölçüdür. Beləliklə, formal baxımdan E. n.-nə ölçü nəzəriyyəsinin hissəsi kimi baxmaq olardı. Lakin E. n. və ölçü nəzəriyyəsinin əsas problemləri müxtəlifdir. E. n.-ində əsas spesifik anlayış – a s ı l ı o l m a m a z l ı q anlıyışı bu nəzəriyyənin yalnız özünəməxsus anlayışıdır.

A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən *şərti ehtimalı* $\mathbf{P}(A \mid B)$

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \cap B) / \mathbf{P}(B), \quad \mathbf{P}(B) > 0 \qquad (3)$$

düsturu ilə təyin olunur. Bu ehtimal tezliklərə xas olan bütün xassələri ödəyir. Əgər

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A) \qquad (4)$$

olarsa, onda A hadisəsi B hadisəsindən a s ı l ı o l m a y a n (və ya e h t i m a l i a s ı l ı o l m a y a n) hadisə adlanır (bax, *Asılı olmamazlıq*). (3) və (4)-dən A və B hadisələrinin a s ı l ı o l m a m a z l ı q ş ə r t i (simmetriklik) alınır:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \qquad (5)$$

(5) asılı olmamazlıq şərtindən A və B hadisələrinin asılı olub-olmadıqlarını yoxlamaqdan daha çox bu hadisələr asılı olmayan hadisələr olduğu hallarda $\mathbf{P}(A \cap B)$ ehtimalını hesablamaq məqsədilə istifadə edilir. A və B-nin asılı olmamazlığını postulat kimi qəbul etmək üçün, adətən, bir-birindən səbəbli asılı olmayan real təsadüfi hadisələrin tezliklərinin

$$\frac{k_n(A \cap B)}{n} \approx \frac{k_n(A)}{n} \cdot \frac{k_n(B)}{n}$$

n -in böyük qiymətləri üçün təqribi bərabərliyini ödəməsi xassəsindən istifadə olunur. Buna görə də, uyğun A və B hadisələri ehtimali riyazi modeldə ehtimali asılı olmayan hadisələr sayılır. Daha ümumi halda, əgər ixtiyari $A_i \in \mathcal{A}_i$ hadisələri üçün

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_r) = \mathbf{P}(A_1)\ \mathbf{P}(A_2) \ldots \mathbf{P}(A_r)$$

şərti ödənilərsə, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r$ hadisələr σ – cəbrləri asılı olmayan σ – cəbrlər adlanır; uyğun $A_1, \ldots, A_r$ hadisələri də asılı olmayan hadisələr adlanır.

Asılı olmamazlıq anlayışı və şərti ehtimallar sınaqlarla əlaqədar hallara baxılarkən xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Sadə hallarda sınaq müəyyən şərtlər kompleksi ödənilməklə eksperimentdə, yalnız və yalnız, biri baş verəcək və ya baş verməyəcək bütün mümkün ola bilən cüt-cüt uyuşmayan $\{A_i\}$ hadisələr çoxluğudur (bax, *Monoqrafiyalar*, [1]; [2]; [3]). A_i sınağın nəticəsi adlanır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında sınağa $\Omega = \sum_i A_i$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (cüt-cüt uyuşmamazlıq) şərtlərilə təyin olunan bölgü uyğun götürülür. Belə ki, sınağın nəticəsi bir-birilə uyuşmayan və heç olmazsa biri hökmən baş verən A_i hadisəsidir.

Əgər $\mathbf{S}$ sınağının hər bir nəticəsi $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n$ sınaqlarının uyğun $A_{k_1}^{(1)}, A_{k_2}^{(2)}, \ldots, A_{k_n}^{(n)}$ nəticələrinin birgə baş verməsi kimi ifadə olunursa, yəni

$$C = A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{k_n}^{(n)} \qquad (6)$$

olarsa, onda $\mathbf{S}$ sınağı $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n$ sınaqlarından təşkil olunmuşdur, deyilir; C, – $\mathbf{S}$ sınağının nəticəsidir. Bəzən

$$\mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)}),\ \mathbf{P}(A_{k_2}^{(2)} \mid A_{k_1}^{(1)}),\ \ldots,\ \mathbf{P}(A_{k_n}^{(n)} \mid A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{k_{n-1}}^{(n-1)}) \quad (7)$$

ehtimalları müəyyən mülahizələrə görə məlum olur və (7) ehtimalları ilə (3) düsturuna əsasən (6) münasibətilə təyin olunan ixtiyari C hadisəsinin ehtimalını təyin etmək olur.

Mürəkkəb sınaqlar praktik baxımdan iki mühüm növə ayrılır: a) mürəkkəb sınağı təşkil edən sınaqlar asılı olmayan sınaqlardır, yəni (7) ehtimalları uyğun olaraq, $\mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)}),\ \mathbf{P}(A_{k_2}^{(2)}), \ldots, \mathbf{P}(A_{k_n}^{(n)})$ şərtsiz ehtimallarına bərabərdir; b) ixtiyari $\mathbf{S}_i$ sınağının nəticəsinin ehtimalı yalnız $\mathbf{S}_{i-1}$ (özündən əvvəlki) sınağının nəticəsindən asılı ifadə olunur, yəni (7) ehtimalları uyğun olaraq

$$\mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)}),\ \mathbf{P}(A_{k_2}^{(2)} \mid A_{k_1}^{(1)}),\ \mathbf{P}(A_{k_3}^{(3)} \mid A_{k_2}^{(2)}),\ \ldots, \mathbf{P}(A_{k_n}^{(n)} \mid A_{k_{n-1}}^{(n-1)})$$

şərti ehtimallarına bərabərdir. Bu halda sınaqlar *Markov zənciri* ilə bağlı sınaqlardır, deyilir. Belə mürəkkəb sınaqla bağlı bütün hadisələrin ehtimalları başlanğıc ehtimallar adlanan $\mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)})$ və keçid ehtimalları adlanan

$$\mathbf{P}(A_{k_2}^{(2)} \mid A_{k_1}^{(1)}),\ \mathbf{P}(A_{k_3}^{(3)} \mid A_{k_2}^{(2)}),\ \ldots,\ \mathbf{P}(A_{k_n}^{(n)} \mid A_{k_{n-1}}^{(n-1)})$$

ehtimalları ilə tam mənası ilə təyin olunur.

Bir çox hallarda sınaqların nəticələri hər hansı ədədi qiymətlərlə ifadə olunur; bu halda təsadüfi kəmiyyətdən söhbət gedir. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası verilmişdirsə, onda $\xi = \xi(\omega)$ *təsadüfi kəmiyyəti* ω elementar hadisəsinin ölçülən funksiyasıdır, yəni $\xi(\omega)$ elə funksiyadır ki, əgər $\mathbf{B}$ ixtiyari Borel funksiyası olarsa, onda $\{\omega: \xi(\omega) \in \mathbf{B}\} \in \mathcal{A}$, yəni $\{\omega: \xi(\omega) \in \mathbf{B}\}$ təsadüfi hadisədir, $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^1$. $\{\omega: \xi(\omega) \in \mathbf{B}\}$ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimalı ($\mathbf{B}$ -nin funksiyası) $\mathbf{P}_\xi(\mathbf{B})$ $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu adlanır.

Paylanma qanunu $\mathbf{P}_\xi(\mathbf{B})$ -ni *paylanma funksiyası* $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) < x\}$, $x \in (-\infty, \infty)$ vasitəsilə həmişə təyin etmək olur.

Paylanmaların mühüm sinfi – *mütləq kəsilməz paylanmalar* sinfidir. Mütləq kəsilməz paylanmalar ehtimal sıxlığı (paylanmanın sıxlıq funksiyası) $p_\xi(x)$ vasitəsilə verilir: $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^1$ ixtiyari Borel çoxluğu olarsa,

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{B}} p_\xi(x)dx;$$

$$p_\xi(x) \geq 0 \quad \text{və} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1.$$

Paylanmaların digər sinfi *diskret paylanmalar* sinfidir; bu paylanmalar təsadüfi kəmiyyətin aldığı sonlu və ya hesabi sayda həqiqi qiymətlər – $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ və $\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x_k\} = p_k$ ehtimallar toplusu ilə verilir; bu halda

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{B}) = \sum_{x_k \in \mathbf{B}} \mathbf{P}_k\{\xi = x_k\}.$$

Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty) \qquad (8)$$

olan, limit teoremlərində yaranan *normal paylanma* və paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0,\ \alpha > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

olan *üstlü paylanma* mütləq kəsilməz paylanmalara misaldır.

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \qquad (9)$$

düsturu ilə ifadə olunan *binomial paylanma* – diskret paylanmadır, burada ξ, – n sayda asılı olmayan Bernulli sınaqlarında müsbət nəticələr sayı, p – bir sınaqda müsbət nəticənin ehtimalıdır və $0 \leq p \leq 1$, $p + q = 1$.

Bir çox hallarda təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanması əvəzinə onun ədədi xarakteristikaları ilə kifayətlənmək olur. Bunlardan ən çox istifadə olunan riyazi gözləmə və dispersiya kimi ədədi xarakteristikalardır (bax, *Momentlər*, *Semi – invariant*).

İki və ya ikidən çox təsadüfi kəmiyyətlər eyni zamanda öyrənildikdə *birgə paylanma* anlayışından istifadə olunur. Bu paylanma $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $\mathbf{P}_{\xi_1, \ldots, \xi_n}\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{B}\}$ ehtimalları ilə verilir, burada $\mathbf{B}$, – $\mathbb{R}^1$-in Borel çoxluğudur, $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^n$. İxtiyari seçilmiş $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^1$ Borel çoxluqları üçün

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_i\in\mathbf{B}_i\}\right\}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\{\xi_i\in\mathbf{B}_i\}$$

bərabərliyi ödənilərsə, $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ – *asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər* adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanması məlum olduqda, bu təsadüfi kəmiyyətlərlə təyin olunan ixtiyari təsadüfi hadisənin ehtimalını, məs., $\{a<\xi_1+...+\xi_n<b\}$ hadisənin ehtimalını, bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin birölçülü paylanmasını (*marginal paylanmanı*) hesablamaq, təyin etmək olur.

E. n.-nin ilkin limit teoremlərinə misal binomial paylanmanın (9) düsturu ilə verilən ehtimalının qiymətinin n -in böyük qiymətləri üçün hesablanmış

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}}\ e^{-x^2/2}$$

təqribi qiyməti ilə əvəz olunmasıdır, burada $x=(m-$ $-np)\Big/\sqrt{np(1-p)}$.

Qeyd etmək lazımdır ki, yalnız limit teoremlərini əhatə edən biliyə malik olduqda E. n.-nin mahiyyəti dərindən dərk olunur. Məs., *Bernulli teoremi* onu ifadə edir ki, asılı olmayan sınaqlarda müşahidə oluna bilinən hər hansı təsadüfi hadisənin tezliyi bir qayda olaraq, bu hadisənin ehtimalından az fərqlənir, *Muavr – Laplas teoremi* isə bu və ya digər yayınmaların ehtimallarını qiymətləndirmək üçün istifadə edilir. Analoji olaraq, təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyası kimi ədədi xarakteristikalarının məğzi böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi ilə aydın olur (bax, *Böyük ədədlər qanunu*, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu*, *Limit teoremləri*, *Mərkəzi limit teoremi*).

$\xi_1, ..., \xi_n, ...$ riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\xi_k=a$, dispersiyaları $\mathbf{D}\xi_k=\sigma^2$ olan eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər;

$$S_n=\frac{\xi_1+...+\xi_n}{n}$$

olsun. Böyük ədədlər qanununa görə ixtiyari $\varepsilon>0$ qiymətində $\{|S_n-a|\le\varepsilon\}$ hadisəsinin ehtimalının limiti $n\to\infty$ olduqda 1-ə bərabərdir və beləliklə, bir qayda olaraq S_n orta qiymət a -dan az fərqlənir. Mərkəzi limit teoremi bu nəticəni dəqiqləşdirir və onu ifadə edir ki, S_n -in a -dan yayınmaları təqribi olaraq riyazi gözləməsi 0, dispersiyası σ^2/n olan normal paylanmaya tabedir. Beləliklə, S_n -in a -dan bu və ya digər yayınmalarının n -in böyük qiymətlərində ehtimallarını hesablamaq üçün (birinci yaxınlaşmada) ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasına xas olan bütün məlumatlar olmadan belə keçinmək olar; yalnız dispersiyanın məlum olması kifayətdir. Yaxınlaşmanın dəqiqliyini artırmaq istədikdə daha yüksək tərtib momentlərdən istifadə olunur.

Bu mühakimələr müəyyən dəyişikliklərlə müxtəlif qanunlarla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər (toplananlar *Lyapunov teoremi*), sonluölçülü və bəzi sonsuzölçülü vektor fəzalarında verilmiş *təsadüfi vektorlar* üçün də tətbiq olunur. Asılı olmamazlıq şərti ξ_n təsadüfi kəmiyyətlərinin bu və ya digər mənada zəif «asılılıq» şərtilə əvəz oluna bilinər.

Qruplarda paylanmalar, arifmetik funksiyaların qiymətlərinin paylanmaları və s. üçün limit teoremləri məlumdur.

Riyazi statistika və statistik fizikada tətbiqlərdə kiçik ehtimallı $\{|S_n-a|>\varepsilon\}$ tipli hadisələrin ehtimallarını nisbətən böyük dəqiqliklə approksimə etmək zərurəti yarandıqda normal qanunla approksimasiya böyük düzəlişlər edilməsinə gətirir (bax, *Böyük yayınmalar ehtimalları*).

XX əsrin 20-ci illərində aşkar olunmuşdu ki, hətta eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı sxemində belə təbii olaraq limit paylanmaları normal paylanmadan fərqli ola bilir. Məs., əgər ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti hər hansı təsadüfi dəyişkən sistemin ilkin vəziyyətə qayıtma müddəti, ξ_2 – ilkin və ikinci qayıtma anları arasındakı müddət və s. olarsa, onda olduqca ümumi şərtlərlə $\xi_1+...+\xi_n$ cəminin, yəni n -ci qayıtma anına qədər müddətin paylanmasının $n^{-1/\alpha}$ (α 1-dən kiçik sabitdir) vuruğuna hasili müəyyən limit paylanmasına yığılır. Beləliklə, n -ci qayıtma anına qədərki müddət kobud mənada dedikdə, $n^{1/\alpha}$ kimi artır, yəni n -dən sürətlə artır (böyük ədədlər qanununun tətbiq olunması mümkün olduqda bu artma n tərtiblə olardı). Bu mülahizənin doğruluğu *Bernulli dolaşmasında* aydın görünür (bu halda digər paradoksal qanun – *Arksinus qanunu* da təbii olaraq isbat olunur).

Limit teoremlərinin isbatında əsas etibarilə *xarakteristik funksiyalar* metodu, Laplas çevirmələri metodu, doğuran funksiyalar metodu kimi metodlardan istifadə olunur. Bəzi hallarda kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi metodlarından da istifadə etmək zəruri olur.

Limit teoremlərinin əksəriyyətinin yaranması mexanizmi yalnız təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi ilə bağlı tam mənada dərk olunur.

XX əsrin ortalarında bir sıra fiziki və kimyəvi tədqiqatlarla bağlı birölçülü və çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlərlə yanaşı *təsadüfi proseslər* – zaman etibarilə cərəyan edən və ehtimal qanunları ilə idarə olunan (C. Dub) ixtiyari proseslər öyrənilməyə başlandı. Təsadüfi prosesə misal hissəciyin Braun hərəkətidir. E. n.-də təsadüfi prosesə, adətən, birparametrli $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi kimi baxılır. Əksər hallarda t parametri zamanı ifadə edir, lakin prosesin parametri, məs., ixtiyari dəyişən olduğu halda, adətən, təsadüfi proses (stoxastik proses) əvəzinə *təsadüfi funksiya*, əgər t fəza nöqtəsidirsə, *təsadüfi meydan* termini işlədilir. t tamqiymətli olarsa, təsadüfi funksiya *təsadüfi ardıcıllıq* (və ya *zaman sırası*) adlanır. Təsadüfi kəmiyyət paylanma qanunu ilə xarakterizə olunduğu kimi təsadüfi proses sonluölçülü paylanmaları ilə $\zeta(t_1), \zeta(t_2), ..., \zeta(t_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmaları toplusu ilə xarakterizə oluna bilinir; $t_1, t_2, ..., t_n$ n -in ixtiyari qiyməti üçün mümkün zaman anlarıdır. Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin iki xüsusi istiqamətində: *Markov prosesləri* və *stasionar təsadüfi proseslərlə* bağlı sahələrində ən maraqlı konkret nəticələr alınmışdır; bununla yanaşı *martinqalların* da xüsusi səylə araşdırılmasına başlanıldı.

Tarixi baxımdan əvvəlcə Markov prosesləri tədqiq olunmağa başlanmışdı. Əgər ixtiyari t_0 və t_1 ($t_0<t_1$) zaman anlarında $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin $t\le t_0$ şərtini ödəyən bütün t -lər üçün qiymətləri məlum olarsa, $\zeta(t_1)$ təsadüfi kəmiyyətinin şərti ehtimalı yalnız $\zeta(t_0)$ -dan asılı olaraq təyin olunur (bu Markov xassəli təsadüfi proseslər bəzən keçmişi təsirsiz proseslər adlanır). Markov prosesləri klassik fizikada baxılan determinik proseslərin təbii ümumiləşmiş halıdır. Determinik proseslərdə sistemin t_0 anındakı vəziyyəti prosesin gələcək vəziyyətini birqiymətli təyin edir; Markov proseslərində

isə sistemin t_0 anındakı vəziyyəti prosesin gələcək (sonrakı) vəziyyətinin paylanma ehtimalını $t > t_0$ olduqda birqiymətli təyin edir və t_0 anına qədər prosesin nə cür cərəyan etməsinin bu paylanmaya heç bir təsiri olmur.

Kəsilməz determinik proseslərin öyrənilməsi sistemin vəziyyətini təsvir edən funksiyalar üzrə diferensial tənliklərə gətirdiyi kimi, kəsilməz Markov proseslərinin öyrənilməsi prosesin ehtimal paylanması üzrə differensial və ya inteqro – differensial tənliklərə gətirir.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin ikinci geniş bir istiqaməti stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsidir. Təsadüfi prosesin stasionarlığı – onun ehtimal qanunauyğunluqlarının zaman etibarilə dəyişməz olmasıdır; bu xassə proses üzərinə ciddi məhdudiyyətdir və yalnız bu şərt bir sıra mühüm nəticələr almağa imkan yaradır. Bu nəzəriyyənin böyük bir sahəsində geniş mənada stasionarlığı fərz etməklə kifayətlənmək olur; geniş mənada stasionarlıq $\mathbf{M}\zeta(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t)\zeta(t+\tau)$ riyazi gözləmələrinin t -dən asılı olmamazlığıdır. Bu fərziyyədən $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$$

spektral ayrılışının mümkünlüyü nəticəsi alınır, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlarlı təsadüfi funksiyadır. Stasionar proseslər üçün ən yaxşı xətti interpolyasiya (kvadratik orta anlamda), ekstrapolyasiya və filtrasiya üsulları inkişaf etdirilmişdir.

Son zamanlar təsadüfi proseslərin kifayət qədər geniş bir sinfi üçün effektiv həll olunan ən yaxşı qeyri – xətti filtrasiya məsələləri, interpolyasiya və ekstrapolyasiya məsələləri araşdırılmışdır (bax, *Təsadüfi proses*; p r o q n o z l a m a, *Təsadüfi proses*; f i l t r a s i y a). Uyğun analitik aparatın əsas hissəsini *stoxastik differensial tənliklər*, *stoxastik inteqral və martinqallar* təşkil edir. $\zeta(t)$ martinqalının səciyyəvi xassəsi – prosesin $s < t$ anına qədər vəziyyəti məlum olduqda $\zeta(t)$-nin şərti riyazi gözləməsinin $\zeta(s)$-ə bərabər olmasıdır.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün limit teoremlərinin klassik problemlərilə sıx bağlıdır. Təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanma qanunları araşdırıldıqda alınan limit paylanmaları təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində uyğun xarakteristikaların dəqiq paylanma qanunlarıdır. Bu fakt bir çox limit teoremlərini uyğun təsadüfi proseslərin köməyilə isbat etməyə imkan yaradır.

Sonda qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda göstərilmiş aksiomatika çərçivəsində təsadüfi proseslərlə bağlı anlayışların məntiqi cəhətdən qüsursuz tərifləri nəzəri – çoxluq xarakterli çoxlu çətinliklər yaradır (məs., təsadüfi proseslərin kəsilməzliyinin, differensiallananlığının və s. ehtimallarının təyin olunması ilə bağlı olan; bax, *Separabel proses*). Buna görə də, xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi üzrə monoqrafiyalarda işin çox hissəsi nəzəri – çoxluq konstruksiyaların inkişafının analizinə həsr olunur.

Tarixi məlumat. E. n. 17–ci əsrin ortalarında yaranmışdır. E. n.-ə aid ilk tədqiqatlar B. Paskal (B. Pascal), P. Ferma (P. Fermat), X. Hüygens (Ch. Huygens) tərəfindən qumarda müxtəlif təsadüfi hadisələrin ehtimallarının hesablanması ilə bağlı aparılmışdır. Ya. Bernullinin (J. Bernoulli) iki nəticəsi olan asılı olmayan sınaqlar sxemi üçün böyük ədədlər qanununu isbat etməsi E. n.-də mühüm əhəmiyyət kəsb etmiş oldu (1713-də çap olunmuşdur).

E. n. tarixinin sonrakı (ikinci) mərhələsi (18-ci əsr və 19-cu əsrin başlanğıcı) A. Muavr (A. Moivre), P. Laplas (P. Laplace), K. Qauss (C. Gauss) və S. Puasson (S. Poisson) kimi alimlərin adları ilə bağlıdır. Bu dövrdə E. n. təbiətşünaslıq və texnikada (əsasən müşahidələrin xətaları nəzəriyyəsində geodeziya və astronomiya, atıcılıq nəzəriyyələrində) xüsusilə aktual tətbiqləri ilə səciyyəvidir.

Hal-hazırda Laplas (1812) və Puasson (1837) teoremləri kimi məlum olan ilkin limit teoremləri bu dövrə aiddir; elə bu ərəfədə A. Lejandr (A. Legendre, 1806) və K. Qauss (1808) ən kiçik kvadratlar metodunu işləmişlər.

E. n.-nin üçüncü mərhələsi (19-cu əsrin 2-ci yarısı) əsas etibarilə P. L. Çebışev, A. M. Lyapunov və A. A. Markov kimi alimlərin adları ilə bağlıdır. E. n. Rusiyada (18-ci əsr) da inkişaf mərhələsi keçmişdir; bu ərəfədə Rusiyada çalışan L. Eyler (L. Euler), N. Bernulli (N. Bernoulli) və D. Bernulli (D. Bernoulli) kimi alimlər bir sıra əsərlər yazmışlar.

E. n.-nin inkişafının ikinci mərhələsində E. n.-nin riyazi statistika məsələlərinin araşdırılmasında M. V. Ostroqradskinin işlərini, E. n.-nin sığorta məsələlərinə, statistika və demoqrafiyaya tətbiqi ilə bağlı V. Ya. Bunyakovskinin işlərini qeyd etmək lazımdır. 19-cu əsrin ikinci yarısından Rusiyada E. n. sahəsindəki araşdırmalar dünyada aparıcı yer tutur. P. L. Çebışev və onun davamçıları A. M. Lyapunov və A. A. Markov E. n.-də bir sıra ümumi məsələləri qoymuş və onları həll etmişlər; bu məsələlər Bernulli və Laplas teoremlərinin ümumiləşdirilmiş hallarıdır. P. L. Çebışev olduqca sadə üsulla, kifayət dərəcədə ümumi fərziyyələrlə böyük ədədlər qanununu isbat etmişdir (1867). O, ilk dəfə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi üçün mərkəzi limit teoremini ifadə etmiş və bu teoremin isbat metodlarından birini vermişdir. A. M. Lyapunov bu teoremi digər metodla isbat etmişdir (1901).

1907-ci ildə A. A. Markov ilk dəfə asılı sınaqların bir növünü araşdırmışdır (*Markov zəncirləri*).

19-cu əsrin ikinci yarısında Qərbi Avropada riyazi statistika sahəsində [Belçikada – A. Ketle (A. Quételet), İngiltərədə – F. Qalton (F. Galton)] və statistik fizikada [Avstriyada – L. Boltsmann (L. Boltzmann)] araşdırmalar geniş surətdə inkişaf etmişdi və bu araşdırmalar P. L. Çebışev, A. M. Lyapunov və A. A. Markovun əsas nəzəri işləri ilə yanaşı E. n.-nin problemlərinin əsaslı tədqiqatı üçün dördüncü (müasir) inkişaf mərhələsinin əsasını qoymuş oldu. Bu mərhələ E. n.-nin geniş tətbiqi ilə səciyyəvidir. Bu mərhələdə Fransada E. Borel (E. Borel), P. Levi (P. Lévy), M. Freşe (M. Fréchet), Almaniyada – R. Mizes (R. Mises), ABŞ-da – N. Viner (N. Wiener), V. Feller (W. Feller), C. Dub (J. Doob), İsveçdə – Q. Kramer (H. Cramér) kimi alimlərin faydalı araşdırmaları ilə yanaşı S. N. Bernşteynin bu sahədəki fəaliyyəti xüsusilə qeyd olunmalıdır; S. N. Bernşteynin fəaliyyəti ilə E. n.-nin yeni mərhələsinin təməli qoyulur, o, Çebışev, Lyapunov və Markovun klassik limit teoremlərini olduqca ümumiləşdirmiş və E. n.-nin təbiət elmlərinə geniş tətbiqi məsələlərini qoymuşdu. [A. Ya. Xinçin və A. N. Kolmoqorov E. n. məsələlərinə həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin metodlarını tətbiq etməyə başladılar]. Sonralar (30-cu illər) onlar (və Ye. Ye. Slutski) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin əsaslarını qoymuşlar. Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi sahəsində A. V. Skoroxodun xidmətini də qeyd etmək lazımdır. V. İ. Romanovski, N. V. Smirnov, Yu. V. Linnik və L. N. Bolşev E. n.-nin riyazi statistikada tətbiqinin xüsusi inkişafına nail oldular.

Əd: **Ehtimal nəzəriyyəsinin tarixi.** История математики, т. 2–3, M., 1970–72; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, M., 1978.

Elmin klassikləri. B e r n o u l l i J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер. – Б е р н у л л и Я., О законе больших чисел, M., 1986); M o i v r e A. de, Doctrine

of Chances, 3 ed., L., 1756 (переизд. – N. Y., 1967); Laplace [P. S.], Théorie analytique des probabilités, 3 éd., P., 1886; Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2–3, М. – Л., 1947–48; Liapounoff A., Nouvelle forme du théoréme sur la limite de probabilité, СПБ, 1901; Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М. – Л., 1946.

Dərsliklər və məlumat kitabları. Гнеденко Б. В., Курс теория вероятностей, 6 изд., М., 1988; Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, М., 1985; Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; Ширяев А. Н., Вероятность, 2 изд., М., 1989; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

Monoqrafiyalar. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; Феллер В., Введение в терию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ cəbri strukturlarda « **вероятностей теория** на алгебраических структурах; **probability theory** on algebraic structures » – ehtimal nəzəriyyəsinin yeni, intensiv inkişaf edən bölməsidir; burada bəzi cəbri əməllər verilmiş strukturlardan qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmaları öyrənilir. E. n.-nin cəbri strukturlara yayılmasına riyaziyyatçıların ehtimal qanunauyğunluqlarının tətbiqinin təbii sərhədlərini müəyyən etmək arzusu ilə yanaşı, hesablama riyaziyyatı sahəsində, rabitə nəzəriyyəsi, astronomiya, kvant mexanikası və s. sahələrdəki qoyulan məsələlərin artması ilə bağlı məsələlərin həlli də qruplarda, xətti fəzalarda və digər cəbri strukturlarda ehtimal münasibətlərinə baxılması da səbəb olmuşdur. Həqiqi oxla müqayisədə xassələrinə görə heç də zəngin olmayan cəbri strukturlara keçid yalnız yeni riyazi aparatın olmasını deyil, həmçinin yeni ideyaları da tələb edir. Bu sahədə araşdırmalarda ən effektiv metodlardan biri – təsvirlər nəzəriyyəsinə əsaslanan Furye analizi sayılır (bax, *Furye çevirməsi* qrupda ehtimal paylanmaları).

Ehtimal ölçüsünün bu və ya digər cəbri strukturda verildiyini qeyd etmək üçün strukturun adına «stoxastik» sözü əlavə olunur (məs., stoxastik qrup, stoxastik xətti cəbr, stoxastik semi – qrup və s.).

Klassik ehtimal nəzəriyyəsinin əsas bölmələrindən biri limit teoremləri nəzəriyyəsidir. Cəbri strukturlarda (məs., qruplarda) analoji nəzəriyyənin qurulması üçün, qrupda *sonsuz bölünən paylanma* kimi fundamental anlayış, bununla sıx bağlı olan ölçülərin *konvolyusion semi – qrupu* anlayışının daxil olunması və bunlar arasında əlaqəni öyrənmək zəruriliyi yaranmışdır (bax, *Sonsuz bölünən paylanma*; qrupda; daxilolma problemi). Seriyalar sxemi üçün, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin $\mathbb{R}^1$-də paylanmalarının yığılmasının isbatında mühüm nəticə sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyası üçün *Levi – Xinçin kanonik ifadəsidir*. Lokal kompakt qruplarda limit teoremləri nəzəriyyəsində bu nəticəyə analoq ölçülərin konvolyusion semi – qruplarının kanonik ifadəsi, daha dəqiq, onları *doğuran funksionalların* kanonik ifadəsidir. Bu kanonik ifadə üçün (ψ_1, ψ_2, η) üçlüyünü ifadə edən elementlər terminlərilə *ölçülərin infinitezimal sistemindən* olan ehtimal paylanmalarının kompozisiyaları ardıcıllığının verilmiş sonsuz bölünən paylanmaya yığılma şərtlərini yazmaq olur (məs., *Mərkəzi limit teoremi*, qruplarda). Kompakt qruplarda *limit teoremləri* nəzəriyyəsində bir çox nəticələr alınmışdır. Burada əsas anlayışlardan biri *idempotent ölçü* anlayışıdır. Ölçülərin infinitezimal sistemi həmişə verilmir. Əksər hallarda ehtimal paylanmaları eyni olan paylanmaların ardıcıl kompozisiyaları hallarına baxılır. Bu da $\mathbb{R}^1$-də *operator dayanıqlı paylanma* anlayışına, daha ümumi, qrupda *dayanıqlı paylanma* anlayışına gətirir. Burada əsas məsələlərdən biri operator dayanıqlı paylanma və qrupda dayanıqlı paylanmanın *cazibə oblastının* təsviri problemidir.

$\mathbb{R}^1$ halında olduğu kimi, lokal kompakt qrupda *Qauss paylanması və Puasson paylanması* kimi bəzi mühüm ehtimal paylanmaları bir sıra xüsusi xassələrə malikdir. Bu ehtimal paylanmalarının onlara xas bəzi xüsusiyyətlərinə görə fərqləndirilməsi qruplarda *xarakterizasion teoremlər* nəzəriyyəsinə gətirir (bax, *Ehtimal paylanmalarının arifmetikası* Abel qruplarında).

Klassik ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan anlayışların hamısı ixtiyari qruplar üçün yaranır. Buna görə də, bu anlayışlara analoji anlayışların təyin olunduğu qruplar siniflərini xarakterizə etmək mühüm əhəmiyyət kəsb edir (bax, *Ehtimali xarakterizasiya*(sı), qrupların).

Qrupda yaxşı xassələrli bütün Borel ehtimal ölçülərinin çoxluğu kompozisiya əməlinə görə topoloji semi – qrup əmələ gətirir. Bircins fəzalarda da ehtimal paylanmaları üçün analoji nəticə doğrudur. Digər tərəfdən, funksiyalar nəzəriyyəsinin bir sıra məsələlərində mahiyyətcə ehtimal məsələləri yaranan funksiyaların bəzi topoloji semi – qrupları əmələ gəlmişdir. Bu da ehtimal ölçülərinin $\mathbb{R}^1$-də semi – qrupu anlayışını ifadə edən bəzi ümumi konstruksiyaların baxılmasına səbəb olmuşdur (bax, *Ümumiləşmiş stoxastik konvolyusiya*, *Hiperqrup*, *Xüsusi semi – qrupların hesabı / arifmetikası*).

Fizika, astronomiya, kvant fizikası, çoxölçülü statistik analizin bəzi məsələləri qruplarda və bircins fəzalarda statistik məsələlərə baxılması zərurətinə gətirir, bu məsələnin həlli üçün klassik riyazi statistikanın analoji nəticələrini inkişaf etdirən yeni ideyalar və metodların daxil olunması tələb olunur.

Əd.: [1] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [3] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [4] Ruzsa I. Z., Szekeli G. J., Algebraic Probability Theory, N. Y., 1988; [5] Bloom W. R., Heyer H., Harmonic analysis of probability measures on hypergroups, B., 1955.

EHTİMAL OLUNAN YAYINMA « **вероятное отклонение; semiinterquartile range / probable / deviation error** », orta yayınma, – *ehtimal paylanmasının* səpələnmə xarakteristikasıdır. Kəsilməz paylanmaya malik simmetrik ξ təsadüfi kəmiyyətinin E. o. y.-sı B

$$\mathbf{P}\{|\xi - m| < B\} = \mathbf{P}\{|\xi - m| > B\} = 1/2$$

şərti ilə təyin olunur, burada m, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin medianıdır (bu halda ξ-nin riyazi gözləməsi vardırsa, $m = \mathbf{M}\xi$ olur). Normal paylanma üçün E. o. y. ilə kvadratik yayınma σ (yəni standart səpələnmə ölçüsü) arasında sadə əlaqə vardır:

$$\Phi(B/\sigma) = 3/4,$$

$\Phi(x)$, – $(0, 1)$ parametrlərli normal paylanma funksiyasıdır. Təqribi olaraq, $B = 0{,}674496\sigma$.

EHTİMAL ÖLÇÜSÜ « **вероятностная мера; probability measure** », ehtimal paylanması, paylanma, ehtimal, – boş olmayan Ω elementar hadisələr fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş, hesabi sayda nəzəri-çoxluq əməllərinə görə qapalı $\mathcal{A}$ sinfində (Borel meydanı olan) təyin olunan, mənfi olmayan həqiqiqiymətli elə $\mathbf{P}$ funksiyasına deyilir ki,

$\mathbf{P}(\Omega)=1$ və $i\neq j$ olduqda $A_i\cap A_j=\varnothing$ olarsa,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_i)\quad\text{(hesabi additivlik)}.$$

M i s a l l a r.

1) $\Omega=\{\text{G},\text{Ş}\}$, $\mathscr{A}=\{\{\text{G}\},\{\text{Ş}\},\varnothing,\Omega\}$, $\mathbf{P}(\{\text{G}\})=\mathbf{P}(\{\text{Ş}\})=1/2$. Bu ölçü bir düzgün metal pulun bir dəfə atılması eksperimentinə uyğun təyin edilmişdir;

2) $\Omega=\{0,1,2,...\}$, $\mathscr{A}$, – Ω-nın bütün altçoxluqlarından ibarət sinifdir.

$$\mathbf{P}(\{k\})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad\lambda>0\quad(\textit{Puasson paylanması}).$$

3) $\Omega=\mathbb{R}^1$; $\mathscr{A}$, – $\mathbb{R}^1$-in Borel altçoxluqlarından ibarət sinifdir, $A\in\mathscr{A}$,

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{A}}e^{-x^2/2}\,dx\quad(\textit{normal paylanma});$$

4) $\Omega=C_0[0,1]$, – sıfırda sıfra bərabər, $[0,1]$-də kəsilməz həqiqi $x(t)$ funksiyalarının fəzası, $\mathscr{A}$ – müntəzəm yığılma topologiyasına nəzərən Ω-nın Borel altçoxluqlarının sinfi, $\mathbf{P}$, – aşağıdakı düsturla birqiymətli təyin olunan ölçüdür:

$$\mathbf{P}\{x:\,a_i<x(t_i)<b_i,\;\;i=1,...,n\}=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\prod_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})^{-1/2}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_n}^{b_n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}\right\}dx_1\dots dx_n,$$

burada n – ixtiyari natural ədəd və $0=t_0<t_1<\dots<t_n<1$ (V i n e r ö l ç ü s ü).

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд. М., 1974; [2] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988.

EHTİMAL ÖLÇÜSÜ q r u p d a «**вероятностная мера** н а г р у п п е; **probability measure** o n a g r o u p» – verilmiş G qrupunun altçoxluqlarının hər hansı bir $\mathscr{B}$ σ – cəbrində verilmiş *ehtimal ölçüsüdür.* Adətən, fərz olunur ki, $\mathscr{B}$ σ – cəbri elədir ki, $(G,\mathscr{B})$ *ölçülən qrupdur*. Əgər G topoloji qrupdursa, $\mathscr{B}$ kimi Borel σ – cəbri götürülür. Əgər μ_1 və μ_2, G ölçülən qrupunda ehtimal ölçüləridirsə, onda

$$\mu_1*\mu_2(B)=\int_G\mu_1(Bx^{-1})\,d\mu_2(x)=$$

$$=\int_G\mu_2(x^{-1}B)\,d\mu_1(x),\;B\in\mathscr{B},\qquad(*)$$

bərabərliyi μ_1 və μ_2 *ehtimal ölçülərinin kompozisiyası* adlanan, G-də ehtimal ölçüsü $\mu_1*\mu_2$-ni təyin edir. Əgər μ_1 və μ_2 G topoloji qrupunda τ – hamar E. ö.-ləri (Radon ölçüləri) olarsa, $\mu_1*\mu_2$ kompozisiyası (*) bərabərliyi ilə təyin olunur; τ – hamar ölçüdür (Radon ölçüsü). Əgər μ_1 və μ_2 E. ö.-ləri lokal kompakt G qrupunda λ Haar ölçüsünə görə mütləq kəsilməzdirlərsə (sağinvariant), onda $\mu_1*\mu_2$ kompozisiyası da λ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir və onun paylanmasının sıxlıq funksiyası bütün λ – sanki $y\in G$-lər üçün

$$f(y)=\int_G f_1(yx^{-1})f_2(x)\,d\lambda(x)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada f_1 və f_2 – uyğun olaraq μ_1 və μ_2 ehtimal ölçülərinin sıxlıq funksiyalarıdır.

Topoloji qrupda τ – hamar E. ö.-lərinin çoxluğu $\mathscr{M}^1(G)$-də kompozisiya əməli – ölçülər fəzasının zəif topologiyasında kəsilməz əməldir. τ – hamar μ_1 və μ_2 ölçülərinin kompozisiyasının daşıyıcısı $S_{\mu_1*\mu_2}$, – S_{μ_1} və S_{μ_2} daşıyıcılarının qrup hasilinin qapanmasıdır, yəni $S_{\mu_1*\mu_2}=S_{\mu_1}S_{\mu_2}$. $\mathscr{M}^1(G)$ çoxluğu – vahidi δ_e olan topoloji semi – qrupdur, burada δ_e, – G qrupunun vahiddə cırlaşan paylanmasıdır.

Əgər $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ ehtimal fəzası və $X_1,X_2:\Omega\to G$ $(G,\mathscr{B})$ – ölçülən qrupunda asılı olmayan təsadüfi elementlərdirsə (və ya metriklənə bilinən G topoloji qrupunda asılı olmayan separabelqiymətli təsadüfi elementlərdirsə), onda $X_1\cdot X_2$ hasilinin paylanması $\mathbf{P}_{X_1X_2}$, – $\mathbf{P}_{X_1}$ və $\mathbf{P}_{X_2}$ paylanmalarının kompozisiyasıdır, yəni $\mathbf{P}_{X_1X_2}=\mathbf{P}_{X_1}*\mathbf{P}_{X_2}$.

E. ö. üçün ədəd oxunda və ya sonluölçülü Evklid fəzasında məlum nəticələrin məzmunlu ümumiləşməsi, əsasən, lokal kompakt qruplar və sonsuzölçülü Banax fəzaları üçün alınmışdır (hətta bəzi daha ümumi lokal qabarıq fəzalar üçün də). Lokal kompakt qruplar halı üçün (kommutativ və qeyri – kommutativ) *sonsuz bölünən ehtimal paylanmaları, ehtimal ölçülərinin konvolyusion semi – qrupları* öyrənilmişdir.

Ümumi qruplarda E. ö.-nə baxıldıqda topoloji vektor fəzalarında olmayan effektlər yaranır. Topoloji qrupların geniş sinfində idempotent ölçülərin, o cümlədən, Haar ölçülərinin varlığı ilə bağlı xüsusi misallar mövcuddur. Topoloji G qrupunda μ Radon E. ö. əgər $\mu=\mu*\mu$ şərtini ödəyirsə, o, i d e m p o t e n t ölçü adlanır. Əgər idempotent μ E. ö. üçün S_μ daşıyıcısı S_μ-də kompakt altqrupdursa və μ-nün S_μ-yə daralması S_μ kompakt qrupunun Haar ölçüsüdür.

Qruplarda idempotent ölçülərin araşdırılmasına gətirən tipik müddəa asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin müxtəlif yığılma növlərinin ekvivalentliyi haqqında Levi teoreminin ümumiləşməsidir. G metriklənə bilinən topoloji qrup, (X_k), – G-də separabelqiymətli asılı olmayan təsadüfi elementlər ardıcıllığı və $S_n=X_1\dots X_n$ olsun. S_n ardıcıllığı G-də hər hansı S təsadüfi elementinə, yalnız və yalnız, S-ə ehtimala görə yığıldığı halda sanki yəqin (vahid ehtimalla) yığılır, əgər $\mathbf{P}_S$ Radon paylanmasıdırsa və idempotent bölünənlərə malik deyildirsə, onda $S_n\to S$ yığılması $\mathbf{P}_{S_n}\Rightarrow\mathbf{P}_S$ zəif yığılmasına sanki yəqin ekvivalentdir. Əgər $\mathbf{P}_S$-in idempotent böləni vardırsa,

onda sonuncu müddəa ödənmir. Aşağıdakı misalda bu aydın olur.

M i s a l. G metriklənə bilinən kompakt, heç olmasa iki elementi olan qrup, $X_1, X_2, \ldots$ G-də asılı olmayan elə təsadüfi elementlər ardıcıllığıdır ki, X_1-in paylanması Haar ölçüsüdür və $\prod_{k=2}^{\infty} X_k$ sanki yəqin yığılmır. Onda $\mathbf{P}_{S_n} = \lambda$, lakin S_n – sanki yəqin yığılmır.

Əd.: [1] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., M., 1965; [2] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локальных компактных группах, пер. с англ., M., 1981; [3] P a r t h u s a r a t h y K. R., Probability measure on metric spaces, N. Y., 1967.

EHTİMAL PAYLANMALARININ ARİFMETİKASI « **вероятностных распределений арифметика; arithmetic of probability distributions** » – ehtimal *paylanmalarının* konvolyusion semi – qrupunda ayrılışları (faktorizasiyanı) öyrənən ehtimal nəzəriyyəsi bölməsidir.

E. p. a.-nın əsas teoremlərindən biri paylanmaların ayrılışı (faktorizasiyası) haqqında *Xinçin teoremidir*, $\mathbf{I}_0$ sinfinin (bax, *Sonsuz bölünən paylanma*; a y r ı l ı ş) və ayrılmayan paylanmaların təsviri problemləri bu teoremlə bağlıdır.

E. p. a.-da araşdırılan digər istiqamətlər: müxtəlif siniflərdən (sonsuz bölünən, sonsuzluqda sürətlə azalan, sferik simmetrik; dekart hasilləri və s.) olan paylanmaların faktorizasiyasının öyrənilməsi; dəyişənişarəli ölçülərin kompozisiyası şəklində ifadə olunmalarının öyrənilməsi; Abel qruplarında *ehtimal paylanmalarının arifmetikasının* qurulması; kompozisiya əməlinin daha ümumilərilə (bax, *Ümumiləşmiş stoxastik konvolyusiya*, *Hiperqrup*) əvəz olunması halında ümumiləşmiş və s. kimi məsələlərdir.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложения случайных величин и векторов, M., 1972; [2] Л и в ш и ц Л. З., О с т р о в с к и й И. В., Ч и с т я к о в Г. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 12, M., 1975, с. 5–42; [3] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., M., 1979; [4] О с т р о в с к и й И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30.

EHTİMAL PAYLANMALARININ ARİFMETİKASI, A b e l q r u p l a r ı n d a « **вероятностных распределений арифметика** н а а б е л е в ы х г р у п п а х; **arithmetics of probability distributions** o n A b e l i a n g r o u p », t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t l ə r i n a y r ı l ı ş ı n ə z ə r i y y ə s i, – asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi ξ-nin paylanması məlum olduğu halda ξ_1 və ξ_2-nin mümkün olan paylanmalarını müəyyən etmək üçün ehtimal nəzəriyyəsi bölməsidir. Təsadüfi kəmiyyətlərin aldığı qiymətlər həqiqi $\mathbb{R}$ ədəd oxundan olduğu halda, klassik nəzəriyyənin inkişafında H. Kramer (H. Cramér), P. Levi (P. Lévy), A. Ya. Xinçin, D. A. Raykov, Yu. V. Linnik, İ. V. Ostrovskiy, R. Kuppens (R. Cuppens), Q. R. Çistyakov (bax, [1], [2]) kimi alimlərin böyük xidmətləri olmuşdur. Klassik nəzəriyyədə bu məqsədlə xüsusi inkişaf etdirilmiş güclü analitik apparatdan istifadə edilmə səciyyəvidir. Bu onunla əlaqədardır ki, baxılan paylanmaların xarakteristik funksiyaları ən mühüm hallarda davam oluna bilinir (tam analitik funksiyaların kompleks müstəviyə davam olunması kimi). Təsadüfi kəmiyyətlər lokal kompakt Abel qruplarında qiymət aldıqları hallarda bu metodları, bir qayda olaraq, bilavasitə tətbiq etmək olmur, çünki xarakterlər qrupu – xarakteristik funksiyaların təyinolunma oblastı – təbii analitik struktura malik olmur. Bununla belə, qruplarda harmonik analizdən, Pontryaginin ikilik nəzəriyyəsindən və ayrılış məsələlərində kompleks analizdən istifadə edilməsi üçün xüsusi qaydalar E. p. a.-nın klassik əsas teoremlərinin qruplar üçün analoqlarını almağa imkan yaratmışdır.

G – lokal kompakt separabel Abel metrik qrupu, $\mathscr{M}^1(G)$, – G-də paylanmaların kompozisiyaya görə semi – qrupu olsun. Əgər elə $\mu_2 \in \mathscr{M}^1(G)$ paylanması varsa ki, $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ paylanması $\mu = \mu_1 * \mu_2$ şəklində ifadə olunsun, onda $\mu_1 \in \mathscr{M}^1(G)$ paylanması μ p a y l a n m a s ı n ı n b ö l ə n i adlanır. Cırlaşmayan μ paylanmasının cırlaşan paylanmalar və μ-nün yerinidəyişmələrindən başqa bölənləri yoxdursa, μ a y r ı l m a y a n p a y l a n m a adlanır.

Ayrılmayan paylanmaların, qeyri – trivial idempotent bölənləri olmayan $\delta \in \mathscr{M}^1(G)$ paylanmalarının sinfi $\mathbf{I}_0$-la işarə olunur.

Həqiqi ədəd oxunda paylanmalar üçün A. Ya. Xinçin paylanmalar arifmetikasının əsas iki teoreminin qruplarda analoqlarını isbat etmişdir: 1) hər bir $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ paylanması üç paylanmanın kompozisiyası kimi ifadə oluna bilər, yəni $\mu = m_K * \nu * \delta$, burada m_K, – μ-nün maksimal idempotent böləni, ν ayrılmayan paylanmaların sonlu və ya hesabi kompozisiyası, $\delta \in \mathbf{I}_0$; 2) $\mathbf{I}_0$ sinfinin paylanmaları sonsuz bölünən paylanmalardır (bax, [3]).

Kramer teoreminə əsasən, $\mathbb{R}^d$-də ixtiyari Qauss paylanması yalnız Qauss paylanması olan bölənlərə malikdir, yəni bölən Qauss paylanması $\mathbf{I}_0$ sinfindəndir. Digər tərəfdən, çevrə fırlanmaları qrupu T-də ixtiyari Qauss paylanmasının Qauss bölənləri olmayan bölənləri vardır. Ümumi halda, G qrupunda ixtiyari Qauss paylanmasının yalnız Qauss bölənlərinin olması üçün zəruri və kafi şərt – G qrupunun T qrupuna topoloji izomorf altqrupuna malik olmamasıdır. G qrupunda ixtiyari Qauss paylanmasının Qauss paylanması olmayan bölənlərinin olması üçün G qrupunun T-yə topoloji izomorf olması zəruri və kafidir. Bu nəticələrə, müəyyən mənada, qrupların ehtimali xarakteristikası kimi baxmaq olar (qrupların baxılan sinfində).

γ, – G qrupunda Qauss paylanması, onun daşıyıcısı $\sigma(\gamma)$, – sonlu dim. – ölçülü əlaqələndirici altqrup olsun. Onda γ paylanmasının yalnız Qauss bölənlərinin olması, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, γ sonluölçulu xətti fəzada Qauss paylanmasının kəsilməz monomorf obrazı olsun (bax, [4]).

Raykov teoreminə əsasən $\mathbb{R}$-də *Puasson paylanması* π-nin yalnız Puasson bölənləri vardır, yəni $\pi \in \mathbf{I}_0$. Qruplarda bu hal, ümumiyyətlə, belə olmur. $x \in G$ nöqtəsində topalanmış ölçü ilə doğurulmuş Puasson paylanmasının yalnız Puasson bölənlərinin olması üçün zəruri və kafi şərt x elementinin ya sonsuz tərtibdən olması, ya da 2-ci tərtib element olmasıdır (bax, [5]).

Həqiqi ədəd oxunda Qauss və Puasson paylanmalarının kompozisiyası da $\mathbf{I}_0$ sinfindəndir. Qrupda, ümumiyyətlə, $\mathbf{I}_0$ sinfinə aid olmayan həm Qauss, həm də Puasson paylanmaları mövcud olduğundan, onların kompozisiyalarının $\mathbf{I}_0$ sinfinə aid olması üçün kompozisiyalardan hər birinin vuruqlarının $\mathbf{I}_0$ sinfindən olması zəruridir. Qrupların geniş sinfi üçün bu zəruri şərt, həm də kafi şərtdir. π – Puasson paylanması, γ, – G qrupunda Qauss

paylanması, γ paylanmasının daşıyıcısı $\sigma(\gamma)$ sonlu dim. – ölçülü əlaqələndirici altqrup olsun; əgər $\pi,\ \gamma\in \mathbf{I}_0$ olarsa, $\pi * \gamma\in \mathbf{I}_0$ (bax, [4]).

Ümumiləşmiş Puasson prosesi üçün $\mu = e(F)$ paylanmasının $\mathbf{I}_0$ sinfinə aid olması şərtləri F ölçüsünün xassələrindən asılıdır. F -in diskret ölçü olduğu fərz olunur. Həqiqi ədəd oxunda iki Puasson paylanmasının kompozisiyası $\mathbf{I}_0$ sinfinə aiddir. Qruplar üçün bu nəticənin analoqu aşağıdakı kimi ifadə olunur. Daşıyıcısı $\sigma(F) = \{x_1,\ x_2\}$ olan, G qrupunda ümumiləşmiş Puasson paylanması $\mu = e(F)$ -in $\mathbf{I}_0$ sinfinə aid olması üçün ya hər iki – x_1 və x_2 elementlərinin sonsuz tərtibdən olması, ya da ki, elementlərdən birinin sonsuz tərtibdən, ikincisinin isə 2-ci tərtibdən olması zəruri və kafidir. Əgər F ölçüsü G -də elə ölçüdürsə ki, onun daşıyıcısı $\sigma(F)\subset\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ isə asılı olmayan çoxluqdursa, onda $\mu = e(F)\in$ $\in \mathbf{I}_0$ olur (bax, [6]), burada $2x_0 = 0$. Əgər ixtiyari $A\subset G$ Borel çoxluğunun altçoxluğu $\{x_i\}_{i=1}^n$ üçün $k_1 x_1 + \ ... \ + k_n x_n = 0$ (k_i tam ədədlərdir) bərabərliyindən $k_1 = ... = k_n = 0$ olduğu alınarsa, A asılı olmayan çoxluq adlanır.

F ölçüsü diskret olmadığı halda, əgər F ölçüsü G qrupunda sonludursa və F^{*n} və F^{*m} konvolyusiyaları ixtiyari $n\neq m$ qiymətlərində cüt-cüt sinqulyar deyildirlərsə, onda $\mu = e(F)\in \mathbf{I}_0$. Qüvvət üstlü cüt-cüt sinqulyar konvolyusiyalara malik ölçüyə misal – nöqtələrdən ibarət asılı olmayan çoxluqda topalanmış ixtiyari sonlu ölçüdür.

$\mu\in \mathscr{M}^1(G)$ paylanmasının $\mathbf{I}_0$ sinfindən olmamasının ümumi şərti aşağıdakı kimi ifadə olunur. Əgər G 2 modulu üzrə çıxıqlar qrupuna izomorf olmayan kompakt qrupdursa, $\mu\in \mathscr{M}^1(G)$ və μ paylanmaları $\mu(E)\geq \alpha m_G(E)$, $0<\alpha<1$ şərtini ixtiyari Borel çoxluğu E üçün ödəyirlərsə, onda $\mu\notin \mathbf{I}$ (m_G, – G -də Haar paylanmasıdır).

Linnik teoreminə əsasən, əgər γ, – $\mathbb{R}$ -də cırlaşmayan Qauss paylanmasıdırsa, F isə sonlu ölçüdürsə və $\gamma * e(F)\in \mathbf{I}_0$ olarsa, onda F ölçüsü diskretdir, onun daşıyıcısı $\sigma(F)$ isə arifmetik xarakterli xüsusi şərtləri ödəyir. Qruplar halında bu teoremin hətta zəif bir analoqu belə yoxdur.

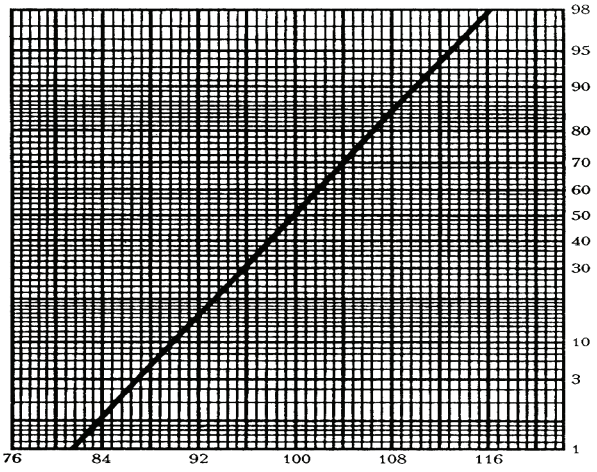
G qrupunun T -yə topoloji izomorf olmayan, qeyri – trivial sıfır komponentinə malik olduğu, G qrupunun özünün isə $\mathbb{R}+D$ şəkilli qrupa topoloji izomorf olmadığı fərz olunur, burada D – diskret qrupdur. Onda G -də elə Qauss paylanması γ və kəsilməz sonlu F ölçüsü vardır ki, $\gamma * e(F)\in \mathbf{I}_0$. Əgər bu zaman sıfır komponenti sonlu dim. – ölçüyə malikdirsə, onda ixtiyari $\gamma\in \mathbf{I}_0$ Qauss paylanması üçün belə kəsilməz sonlu ölçü vardır.

$\mathbf{I}_0$ sinfi həqiqi oxda bütün sonsuz bölünən paylanmalar sinfində zəif topologiyada sıxdır və bu sinifdə bazisdir, lakin bu o anlamdadır ki, ixtiyari sonsuz bölünən paylanma $\mathbf{I}_0$ sinfindən olan paylanmaların sonlu və ya sonsuz kompozisiyaları kimi ifadə oluna bilir. Aşağıda bu nəticələrin doğru olduğu qruplar təsvir olunmuşdur: 1) $\mathbf{I}_0$ sinfinin bütün sonsuz bölünən paylanmalar sinfində zəif topologiyada sıx olması üçün ya G qrupunun diskret olması, ya da 2 modulu üzrə çıxıqlar qrupunda izomorf olması zəruri və kafidir; 2) G qrupunda ixtiyari sonsuz bölünən paylanmanın $\mathbf{I}_0$ sinfindən olan paylanmaların sonlu və ya sonsuz kompozisiyası şəklində ifadə olunması üçün G qrupunun $\mathbb{R}^n + D$ tipli qrupa topoloji izomorf olması zəruri və kafidir; D, – $p > 2$ olduqda sonlu p tərtib elementləri olmayan diskret qrupdur.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Островский И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30; [3] Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 115–46; [4] Feldman G. M., Fryntov A. E., «J. Multiv. Ann.», 1983, v. 13, № 1, p. 148–66; [5] Рухин А. Л., «Лит. матем. сб.», 1970, т. 10, № 3, с. 537–43; [6] Фельдман Г. М., Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах, Киев,1990.

EHTİMAL PAYLANMASI « вероятности распределение; probability distribution » – bax, *Paylanma*(sı) ehtimalın.

EHTİMAL VƏRƏQİ normal **« вероятностная бумага** нормальная; normal **probability paper »** – xüsusi qayda ilə qraflanmış vərəq elə qurulmuşdur ki, *normal paylanma funksiyasının* qrafiki onun üzərində düzxətt kimi



Çəkilmiş düzxətt – orta qiyməti 100-ə, standart yayınması 8-ə bərabər olan normal paylanma funksiyasının qrafikidir.

təsvir olunur. Bu təsvir şaquli oxda şkalanın dəyişməsi nəticəsində alınır (şəkil). Empirik paylanma funksiyasının normal paylanmalar ailəsindən olması hipotezinin yoxlanılması üçün sadə qayda normal paylanma funksiyasının qrafikinin «düzxətt» kimi təsvir olunması xassəsinə əsaslanır: əgər ehtimal vərəqində qurulmuş empirik paylanma funksiyasının qrafiki düzxətdən çox az fərqlənirsə, onda araşdırılan paylanmanın təqribən normal paylanma olduğunu fərz etmək olar.

Bu metodun üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, araşdırılan paylanmanın normal paylanmalar ailəsinə mənsubluğunu hipotetik paylanmanın parametrlərinin ədədi qiymətlərini bilmədən də müəyyən etmək olur.

Əd.: [1] Арлей Н., Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; [2] Dixon W. J., Massey F. J., Introduction statistical analysis, N. Y. – Toronto – L., 1951.

EHTİMALI, SƏHV TƏSNİFİN « вероятность ошибочной классификации; probability of misclassification » – *diskriminant analizdə* təsnif qaydalarının keyfiyyətini xarakterizə edən əsas göstəricilərdən biridir. X obyektini $D_1,...,D_k$ siniflərindən birinə aid edən təsnif qaydası S-in verildiyi fərz olunur: əgər $\max(d_1(X), ..., d_k(X)) = d_j(X)$ olarsa, $S: X \in D_j$, burada $d_j(X)$, – j-ci sinfə uyğun diskriminant funksiyasıdır. Onda i-ci D_i sinfindən olan obyektin j-ci D_j sinfinə S. t. e.

$$\mathbf{P}\{i \mid j\} = \int_{R_{ij}} p_i(X)\, dX$$

ifadəsilə təyin olunur, burada $p_i(X)$, – i-ci sinif üçün X-in paylanma sıxlığı, $R_{ij} = \{X: \max(d_1(X), ..., d_k(X)) = d_j(X)\}$.

Praktikada $p_i(X)$ paylanma sıxlıqları, adətən, məlum olmadıqlarından $\mathbf{P}\{i \mid j\}$ kəmiyyətləri üçün aşağıdakı statistik qiymətlərdən istifadə olunur:

a) *öyrədici seçim* elementlərinə, yəni diskriminant funksiyaların özlərinin qiymətləndirildiyi müşahidələr üzrə, təsnif qaydalarını tətbiq etdikdə alınan, uyğun səhv aidolunmaların tezliyi üzrə $\hat{\mathbf{P}}\{i \mid j\}$ statistik qiymətindən; bu, – S. t. e.-nın azalmaya meylli statistik qiyməti olacaqdır;

b) sınaq seçimində səhv aidolunmalar tezliyi üzrə $\hat{\hat{\mathbf{P}}}\{i \mid j\}$ statistik qiymətindən; bu statistik qiymət – S. t. e. üçün meylsiz statistik qiymət olur.

Bundan başqa, S. t. e.-nın meylsiz statistik qiymətini sürüşən sınaq (imtahan) prosedurundan istifadə etməklə də almaq olar. Əgər paylanma sıxlıqları $p_i(X)$ çoxölçülü normal paylanma sıxlıqları olarsa, S. t. e.-nın parametrik meylsiz statistik qiyməti vardır (bax, *Mahalanobis məsafəsi*).

EHTİMALİ AVTOMAT « вероятностный автомат; probabilistic automation », t ə s a d ü f i a v t o m a t – hər bir taktda işləmə qaydası yalnız bu taktdakı yaddaşın vəziyyətindən asılı olan və statistik olaraq təsvir olunan, taktlar üzrə yaddaşlı informasiyanı başqa şəklə salan diskret stasionar avtomatdır. E. a. ixtiyari (boş olmayan) giriş əlifbası X, çıxış əlifbası Y və vəziyyətlər əlifbası Z-lə: $Z \times Y$ – ölçülən fəzası, $\mu(\cdot \mid z, x)$, $z \in Z$, $x \in X$ ehtimal ölçüsü ilə verilir. Bu obyektlər toplusu E. a.-nın işləmə qaydasını təyin edir. Belə ki, ixtiyari $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ giriş sözünə uyğun olaraq, $\bar{z} = (z_0, ..., z_n)$ və $\bar{y} = (y_1, ..., y_n)$ (çıxış sözü) təsadüfi vektorları elə şərtlə qarşı qoyulur ki, ölçülən $A \subset Z$ çoxluqları üçün

$$\mathbf{P}\{z_0 \in A\} = \mu_0(A) \quad \text{və}$$

$$\mathbf{P}\{(z_n, y_n) \in A \mid z_0, ..., z_{n-1}; x_1, ..., x_n\} = \mu(A \mid z_{n-1}, x_n), \quad n \geq 1$$

bərabərliyi ölçülən $A \subset Z \times Y$ olan A-lar üçün 1 ehtimalla ödənilsin. x_i, z_i, y_i kəmiyyətləri uyğun olaraq i anında (i-ci taktda) g i r i ş s i q n a l ı, a v t o m a t ı n v ə z i y y ə t i, ç ı x ı ş s i q n a l ı adlanır. X, Y, Z sonlu çoxluqları ilə verilən E. a. – s o n l u E. a.; $X \times Y \times Z$ hesabi çoxluğu ilə verilən E. a. – h e s a b i E. a. adlanır. Sonlu və hesabi E. a.-ları

$$\mu_0(i) = \mathbf{P}\{z_0 = i\}$$

və

$$\mu(a', j \mid a, i) = \mathbf{P}\{z_n = a', y_n = j \mid z_{n-1} = a, x_n = i\}$$

paylanmaları ilə verilir.

X birnöqtəvi çoxluq olarsa, E. a. a v t o n o m E. a. adlanır. Avtonom E. a. nəzəriyyəsi Markov zəncirləri çərçivəsini aşmır. Adətən, vəziyyətlərinin əlifbasını dəyişdirməklə nəzəri məsələlərin həllində E. a. çıxışsız E. a.-na gətirilir, bu E. a. üçün isə y_n-lər təyin olunmurlar, $\mu(\cdot \mid z, x)$ ölçüləri ölçülən Z fəzasında verilirlər. Çıxışsız avtonom E. a.-nın vəziyyətləri bircins Markov zənciri əmələ gətirirlər.

E. a. anlayışı yaddaşlı informasion kanal anlayışına ekvivalentdir. E. a. nəzəriyyəsində avtomatlar nəzəriyyəsinin əsas məsələlərinə analoji bir çox məsələlər həll olunur.

E. a.-nın cəbri nəzəriyyəsi də işlənilmişdir (bax, [1]).

E. a. nəzəriyyəsi etibarsız elementlərdən ibarət etibarlı qurğuların sintezinə və əksinə, təsadüfi təbiətli qurğuların sintezinə də xidmət edir.

Əd.: [1] Б у к а р а е в Р. Г., Вероятностные автоматы, Казань, 1970; [2] Ш е н н о н К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 432–63; [3] R a b i n M. O., «Inform. and Control», 1963, v. 6, № 3, p. 230–45; [4] Б а к а е в А. А., К о с т и н а Н. И., Я р о в и ц к и й Н. В., Имитационные модели в экономике, К., 1978; [3] Л о р е н ц А. А., Синтез надежных вероятностных автоматов, Рига, 1975.

EHTİMALİ BOREL ÖLÇÜSÜ « вероятностная борелевская мера; probability Borel measure » – bax, *Borel ölçüsü.*

EHTİMALİ DOĞURAN FUNKSİYA « вероятностная производящая функция; probability generating function » – bax, *Doğuran funksiya.*

EHTİMALİ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ « вероятностная теория чисел; probabilistic number theory » – ədədlər nəzəriyyəsinin geniş mənada elə bölməsidir ki, bu bölmədə ehtimal nəzəriyyəsinin ideya və metodları istifadə olunur (bax, *Ehtimal metodları ə d ə d l ə r n ə z ə r i y y ə s i n d ə*).

Dar mənada E. ə. n. arifmetik funksiyaların, yəni natural ədədlər çoxluğu $\mathbb{N}$-də və ya onun ümumiləşmələrində verilmiş funksiyaların qiymətlərinin paylanmasının statistik nəzəriyyəsi anlaşılır. Bu nəzəriyyənin araşdırdığı obyektin nəzəri – ədədi olmasına baxmayaraq, E. ə. n.-ni nəticələrinin ifadə olunması metodları və mülahizələrinə görə, elə ehtimal nəzəriyyəsi sahəsinə də aid etmək olar.

Arifmetik funksiyaların əksəriyyəti additiv və ya multiplikativ funksiyalardır (yəni bunlar üçün $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ və $g(m_1 m_2) = g(m_1) \cdot g(m_2)$ xassələri ödənilir).

$$m = \prod_{p^\alpha \| m} p^\alpha \in \mathbb{N}$$

arqumenti üçün (burada p – sadə ədəd, α – natural ədəddir və $p^\alpha \| m$ simvolu onu ifadə edir ki, p^α ədədi m-i bölür, lakin $p^{\alpha+1}$ isə m-i bölmür) $f(m)$ a d d i t i v a r i f m e t i k

funksiyası və $g(m)$ multiplikativ arifmetik funksiyası uyğun olaraq, aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$f(m) = \sum_{p^{\alpha} \| m} f(p^{\alpha})$$

və

$$g(m) = \prod_{p^{\alpha} \| m} g(p^{\alpha}) .$$

Hətta m natural ədədlər ardıcıllığında ardıcıl qiymətlər aldıqda belə, $f(p^{\alpha})$ və ya $g(p^{\alpha})$-nın ən sadə seçilməsinə baxmayaraq, $f(m)$ və $g(m)$-in qiymətləri olduqca xaotik mənzərə ilə ifadə olunur. Məs., həqiqi additiv arifmetik funksiyalar sinfində yalnız $a \ln m$ funksiyaları (a sabitdir) monotondurlar. Həqiqi arifmetik $h(m)$ funksiyalarının qiymətlərinin paylanması araşdırılan klassik tədqiqatlarda, adətən, ya funksiyanın özü və ya onun orta qiyməti araşdırılır. Birinci halda elə daha sadə $\Psi_1(m)$ və $\Psi_2(m)$ funksiyaları axtarılır ki, ya bütün m-lər üçün və ya da heç olmasa m ədədlərinin sonsuz çoxluğu üçün bunlar $\Psi_1(m) \le h(m) \le \Psi_2(m)$ münasibətini ödəsinlər. Məs., əgər $\omega(m) = \sum_{p|m} 1$, – m ədədinin bütün müxtəlif sadə bölənlərinin sayıdırsa, onda $m > 1$ olan bütün m-lər üçün $\omega(m) \ge 1$, $m \ge m_0$ olduqda isə $\omega(m) \le 2(\ln \ln m)^{-1} \ln m$,

$$\liminf_{m \to \infty} \omega(m) = 1 \quad \text{və} \quad \limsup_{m \to \infty} \omega(m)(\ln m)^{-1} \ln \ln m = 1$$

olur.

İkinci halda

$$E_n(h) = n^{-1} \sum_{m=1}^{n} h(m)$$

kəmiyyəti araşdırılır. Bu misalda $E_n(\omega) = (1 + o(1)) \ln \ln n$ olur. (burada və daha sonra $n \to \infty$ limit keçidi işarələməsi qeyd olunmur). Ümumi halda, hər iki məsələnin həlli, $h(m)$ haqqında, onun dəyişiklikləri haqqında çox informasiya almağa xidmət edə bilmir, böyük yayınmalara da olduqca nadir hallarda rast gəlinir. Məsələ – arqumentin qiymətlərinin əksəriyyəti üçün $h(m)$ funksiyasının qiymətlərinin dəyişdiyi sərhədlərin tapılması məsələsilə əvəz olunur. Belə məsələ ehtimal terminologiyasında ifadə olunur.

$\Omega_n = \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{A}_n$, – Ω_n-nin bütün altçoxluqlarından təşkil olunmuş cəbr, $\mathbf{P}_n$, – Ω_n-də müntəzəm ölçü olsun [$\mathbf{P}_n\{...\}$, – $m \le n$ natural ədədlərinin elə tezliyidir ki, bu ədədlər mötərizədəki nöqtələr əvəzinə yazılmış şərtləri ödəsin]. $\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n\}$ ehtimal fəzasında $h(m)$, $m \le n$ funksiyası təsadüfi kəmiyyət, $E_n(h)$ – bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi olur.

$$\mathbf{P}_n\{ | h(m) - C_n | > D_n \} = o(1)$$

münasibətini ödəyən C_n və D_n ardıcıllıqlarının təyin olunması böyük ədədlərin ehtimali qanununa uyğun olur. Bu, $f(m)$ additiv arifmetik funksiyalar olduğu hal üçün aşağıda şərh olunur.

$$A_n = \sum_{p \le n} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n^2 = \sum_{p^{\alpha} \le n} \frac{f^2(p^{\alpha})}{p^{\alpha}},$$

$$\sup_f \frac{1}{n B_n^2} \sum_{m=1}^{n} (f(m) - A_n)^2 = \varkappa_n$$

olsun. Onda

$$\left| \varkappa_n - 3/2 \right| \le C \ln^{-1} n, \qquad (1)$$

burada C – mütləq konstantdır.

Deməli, elə n_0 mütləq sabiti vardır ki, $n \ge n_0$ olduqda ixtiyari additiv arifmetik $f(m)$ funksiyası üçün, ixtiyari $t > 0$ və $2nt^{-2}$-dən çox olmayan sayda ədədlərdən başqa bütün $m \le n$ qiymətlərində

$$\left| f(m) - A_n \right| < t B_n$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Xüsusi halda, əgər t böyük ədəd olarsa, onda $m \le n$ arqumentlərinin çoxu üçün

$$\left| \omega(m) - \ln \ln n \right| < t \sqrt{\ln \ln n}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Bu müddəa bir qədər zəif formada 1917-də Q. Hardi (G. Hardy) və S. Ramanucan (S. Ramanujan) tərəfindən isbat olunmuşdur. Böyük ədədlər qanununun ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərtlər 1979-da tapılmışdır. $f_n(m)$ additiv arifmetik funksiyalar ardıcıllığı, bəzi C_n sabitləri və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}_n\{ | f_n(m) - C_n | \ge \varepsilon \} = o(1)$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, hər hansı $\lambda_n = o(1)$ ardıcıllığı üçün

$$\sum_{p^{\alpha} \le n} \frac{\min\{1, (f_n(p^{\alpha}) - \lambda_n \ln p^{\alpha})^2\}}{p^{\alpha}} = o(1) \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənilsin.

Verilmiş n qiymətində $p \le n$, $1 \le m \le n$ olduqda, $f_n^{(p)}(m)$ təsadüfi kəmiyyətlərini aşağıdakı kimi təyin etmək olar: $f_n^{(p)}(1) = 0$ və əgər $p^{\alpha} \| m$ olarsa, $f_n^{(p)}(m) = f(p^{\alpha})$ olduğu fərz edilməlidir, yəni $f_n^{(p)}(m) = f(p^{\alpha})$ bərabərliyi

$$n^{-1}([n/p^{\alpha}] - [n/p^{\alpha+1}]) \sim p^{-\alpha}(1 - p^{-1})$$

ehtimalı ilə ödənilir. Onda

$$f(m) = \sum_{p \le n} f_n^{(p)}(m)$$

olur, lakin (1) bərabərsizliyindən aydındır ki, $f_n^{(p)}(m)$ təsadüfi kəmiyyətləri asılıdırlar (əks halda (1)-də $3/2$ əvəzinə vahid olardı). Bununla belə, hər hansı ehtimal fəzasında verilmiş asılı olmayan X_p təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $S_n = \sum_{p \le n} X_p$ ilə X_p-lərin müəyyən bir paralelizmi müşahidə olunur, belə ki,

$$\mathbf{P}\{X_p = f(p^\alpha)\} = p^{-\alpha}(1-p^{-1}), \quad \alpha \geq 0.$$

XX əsrin 70-ci illərində aydın olmuşdu ki, additiv arifmetik $f(m)$ funksiyasının özü deyil, $f(m) - \lambda \ln m$ fərqi λ-nın uyğun bir surətdə seçilməsilə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi ilə daha yaxşı approksimə olunur. Bu (2) şərtində də əks olunur.

Həqiqi arifmetik $h(m)$ funksiyalarının qiymətlərinin paylanmalarının daha dəqiq xarakterizasiyası üçün $\mathbf{P}_n\{h(m) \in E\}$ ehtimallarının asimptotik qiymətlərini hesablamaq lazımdır; E – ixtiyari Borel çoxluğudur. Asimptotik qanunlar arasında ən maraqlıları – inteqral və lokal tipli qanunlardır.

İnteqral qanunlar. C_n və D_n-in müəyyən qiymətlərində

$$F_n(C_n + D_n x) = \mathbf{P}_n\{h(m) < C_n + D_n x\}$$

paylanma funksiyasının asimptotikası araşdırılır.

a) additiv arifmetik funksiyaların $h(m) = f(m)$ olduğu halında $F_n(C_n + D_n x)$ paylanma funksiyasının hər hansı $F(x)$ paylanma funksiyasına onun bütün kəsilməzlik nöqtələrində yığılma şərtləri axtarılır (zəif yığılma). Bu halda məlum olur ki, əgər $F(x)$ cırlaşmayan paylanma olarsa, onda D_n hökmən ya 0-dan fərqli və ya sonsuz limitə yığılır.

Limit sonlu olduğu halda $F_n(C_n + x)$ funksiyasını araşdırmaqla kifayətlənmək olar. Xüsusi halda, $C_n = 0$ olduqda 1939-da P. Erdöş (P. Erdos) və A. Vintner (A. Wintner) üç sıra haqqında nəzəri – ehtimali teoremin analoqunu almışlar:

$F_n(x)$ paylanma funksiyasının limit funksiyası, yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki,

$$\sum_{|f(p)|\geq 1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|<1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|<1} \frac{f^2(p)}{p} \tag{3}$$

sıraları yığılsınlar,

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} < \infty \tag{4}$$

olarsa, limit qanunu diskret, əks halda kəsilməz qanundur.

C_n ixtiyari olduğu halda, XX əsrin 70-ci illərində, $F_n(C_n + x)$-in yığılması araşdırılmışdır. $D_n \to \infty$ halı tamamilə araşdırılmamışdır. $C_n = A_n$, $D_n = B_n$ olduqda nəticələr ən sadə şəkildə ifadə olunur.

Əgər hər bir qeyd olunmuş $\varepsilon > 0$ üçün

$$B_n^{-2} \sum_{\substack{p^\alpha \leq n, \\ |f(p^\alpha)|>\varepsilon B_n}} \frac{f^0(p^\alpha)}{p^\alpha} \to 0 \tag{5}$$

(L i n d e b e r q şərtinə analoq; bax, *Lindeberq – Feller teoremi*) olarsa, onda

$$F_n(A_n + B_n x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du = \Phi(x) \tag{6}$$

münasibəti doğrudur.

Əgər (5) ödənilərsə, onda B_n Karamata mənada $\ln n$-in asta dəyişən funksiyası olur. Bundan əlavə, əgər B_n belə funksiya olarsa, onda (6) münasibətinin doğruluğu üçün (5) zəruri şərt olur.

Güclü additiv arifmetik funksiya üçün [yəni elə f funksiyası üçün ki, ixtiyari $\alpha \geq 1$ qiymətində $f(p^\alpha) = f(p)$ olsun] (6) münasibəti $|f(p)| \leq 1$ şərti ilə R. Erdöş və M. Kas (M. Kac) tərəfindən isbat olunmuşdur. $f^p(m)$ toplananlarının asılılığı çox vaxt yeni nəticələrin alınmasına səbəb olur: məs., $B_n \sim \sqrt{\ln n}$ olan elə additiv arifmetik funksiyalar vardır ki, bunlar üçün (6) münasibəti ödənilir, lakin (5) şərti ödənilmir.

B_n, – $\ln n$-in asta dəyişən funksiyası olsun. $F_n(A_n + B_n x)$ funksiyasının dispersiyası 1-ə bərabər limit paylanmasına yığılması üçün $V(-\infty) = 0$, $V(+\infty) = 1$ şərtlərini ödəyən elə bir azalmayan $V(u)$ funksiyasının varlığı zəruri və kafidir ki, ola bilər ki, $u = 0$ qiymətindən başqa, bütün u-lar üçün

$$B_n^{-2} \sum_{\substack{p^\alpha \leq n, \\ f(p^\alpha) < u B_n}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \to V(u)$$

münasibəti ödənilsin.

Limit paylanmasının varlığı halında ona uyğun xarakteristik funksiya

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu)\, u^{-2} dV(u) \right)$$

düsturu ilə təyin olunur.

M i s a l.

$$\mathbf{P}_n\left\{ \sum_{p\| m} \ln^\rho p < x \ln^\rho n \right\}, \quad \rho > 0, \ \rho \neq 1$$

paylanma funksiyaları xarakteristik funksiyası

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \left(\frac{e^z}{z} \exp\left(\int_0^1 \frac{e^{itu^\rho} - 1}{u}\, e^{-uz}\, du \right) \right) dz$$

olan, sonsuz bölünən paylanma olmayan qanuna yığılır. Məlumdur ki, $F_n(C_n + D_n x)$ üçün cırlaşmayan limit paylanması mövcud olarsa, $D_n \to \infty$ olduqda, $D_n = O(\ln^A n)$ statistik qiyməti doğrudur, $A > 0$ hər hansı sabitdir, limit qanunu isə bu halda ya mütləq kəsilməz və ya sinqulyar olur.

Limit qanununa yığılma sürəti də araşdırılmışdır. Məs., sıfra bərabər olmayan güclü additiv arifmetik $f(m)$ funksiyası üçün

$$\max_{p\leq n} |f(p)| B_n^{-1} = \mu_n = o(1)$$

şərtilə

$$F_n(A_n + B_n x) = \Phi(x) + O(\mu_n)$$

bərabərliyi doğrudur. $\omega(n)$ funksiyası üçün bu növ yaxşılaşmayan ilk statistik qiymət A. Renyi (A. Rényi) və P. Turan (P. Turán) tərəfindən alınmışdır. Additiv arifmetik funksiyaların bəzi

sinifləri üçün asimptotik ayrılışlar və böyük yayınmalar üçün teoremlər almaq mümkündür. Əgər $x = o(\sqrt{\ln\ln n})$ olarsa, $\omega(m)$ funksiyası üçün $x \le 0$ olduqda $F_n(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n})$, $x > 0$ olduqda isə $1 - F_n(\ln\ln n + x\sqrt{\ln\ln n})$ funksiyaları

$$e^{K_n(x)}\,\Phi(-|x|)\left(1 + O\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{\ln\ln n}}\right)\right)$$

ifadəsinə bərabər olurlar, burada qiymətləndirmə x -ə görə müntəzəmdir,

$$K_n(x) = \frac{x^2}{2} + (\xi - (1+\xi)\ln(1+\xi))\ln\ln n,$$
$$\xi = x(\ln\ln n)^{-1/2}.$$

b) multiplikativ arifmetik $g(m)$ funksiyaları üçün asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin vurulma nəzəriyyəsilə analoji olaraq digər normalama da mümkündür.

$$G_n(x) = \mathbf{P}_n\{|C_n g(m)|^{1/D_n}\ \operatorname{sgn} g(m) < x\}$$

ardıcıllığının $F(x)$ -ə zəif yığılması $G_n(\pm 0)$ -in $F(\pm 0)$ -a yığılması ilə birgə araşdırılır. Bu məsələ additiv arifmetik funksiyaların paylanmalarına gətirilmişdir. Əgər

$$\sum_{g(p)\ne 0}\frac{1}{p} < \infty$$

şərti ödənilməzsə, onda $G_n(x)$ funksiyası $x = 0$ nöqtəsində cırlaşan paylanmaya yığılır. Əks halda yığılma, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, $\mathbf{P}\{\ln|g^*(m)| < \ln|C_n| + xD_n\}$ zəif yığılsın. Burada $g^*(m)$, – $g(m)$-dən $g(p^\alpha) = 0$, 1-lə əvəz edildikdə alınan multiplikativ arifmetik funksiyadır. Multiplikativ arifmetik funksiyalar üçün limit qanunlarına yığılma tezliyi, asimptotik ayrılışlar, böyük yayınmalar, çoxölçülü limit teoremləri də araşdırılır.

Lokal teoremlər. Arifmetik $h(m)$ funksiyaları və onun qiymətləri çoxluğundan olan a ədədləri üçün $\mathbf{P}_n\{h(m) = a\}$ ehtimallarının yığılması araşdırılır. Tamqiymətli additiv arifmetik $f(m)$ funksiyaları üçün lokal teoremlər müxtəlif paylanmalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün uyğun teoremlərlə olduqca oxşardır. Məs., $\mathbb{Z}$ -də topalanmış hər hansı $p(k)$ paylanması üçün

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\mathbf{P}_n\{f(m) = k\} - p(k)\right| = o(1)$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, (4) şərti ödənilsin və bu halda $p(k)$ ehtimallarını

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\,e^{itk} = \prod_p\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\exp(itf(p^\alpha))}{p^\alpha}$$

eyniliyindən təyin etmək olar. $\mathbf{P}_n\{f(m) = k\}$ ehtimallarının standart normal paylanmanın $\Phi'(x)$ sıxlıq funksiyasının qiymətlərilə approksimasiyası üçün arifmetik şərtlər zəruridir. Məs., əgər

$$\sum_{f(p)=k}\frac{1}{p} = \infty$$

şərtini təmin edən k -lar üçün d ən böyük ortaq böləndirsə, onda $|f(p)| \le K$ və $B_n \to \infty$ şərtlərini ödəyən güclü additiv arifmetik $f(m)$ funksiyaları üçün

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|B_n\,\mathbf{P}_n\{f(m) = k\} - \Phi'\left(\frac{k - A_n}{B_n}\right)\right| = o(1) \qquad (7)$$

qiyməti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $d = 1$ və ya $d = 2$ və $f(2)$ tək ədəd olsun.

Olduqca ümumi şərtlərlə, sadə ədədlərdə lokal münasibətlər

$$\left(\sum_{p\le n} 1\right)^{-1}\sum_{\substack{p\le n,\\ f(p)=k}} 1 = \lambda_k + r_k(n)$$

(7) müddəasını verir, burada $\lambda_k \ge 0$, $\sum_k \lambda_k = 1$ və $\sum_k |r_k(n)| \to 0$ yığılması isə olduqca sürətli olur.

Yığılma sürəti araşdırılmışdır. Asimptotik ayrılışlar və böyük yayınmalar üçün lokal teoremlər alınmışdır. $k = \ln\ln n + o(\ln\ln n)$ olduqda $\omega(m)$ üçün

$$\mathbf{P}_n\{\omega(m) = k\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\ln\ln n}}\left(\frac{e\ln\ln n}{k}\right)^k(1 + o(1))$$

olur. k böyük yayınmalar zonasından kənarda qiymətlər aldıqda $\mathbf{P}_n\{\omega(m) = k\}$ üçün asimptotik qiymətlər də məlumdur.

Gücləndirilmiş yığılma. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının 1 ehtimalla yığılmasına analoji yığılmalarda spesifik vəziyyətlər yaranır: məsələlər $\{\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P}_n\}$ ehtimal fəzaları ardıcıllığı terminologiyasında ifadə olunur, belə ki, $A \in \mathbb{N}$ çoxluğunun asimptotik sıxlığı adlanan $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\{m \in A\}$, $A \in \mathbb{N}$ limiti həmişə mövcud olmur. Bundan başqa, asimptotik sıxlıq funksiyası ehtimalın kəsilməzlik aksiomunu ödəmir. Lakin $h_k(m)$ ardıcıllığının $h(m)$ -ə gücləndirilmiş yığılmasını, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün,

$$\lim_{x\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}_n\{\max_{x\le k\le n}|h_k(m) - h(m)| \ge \varepsilon\} = 0$$

münasibəti şəklində ifadə etmək olar. Onda belə yığılma $h_k(m) \overset{\mathbf{P}_n}{\Rightarrow} h(m)$ kimi işarə olunur.

Məs.,

$$f_k(m) = \sum_{p^\alpha \| m,\ p\le k} f(p^\alpha)$$

olsun. $f_k(m) \overset{\mathbf{P}_n}{\Rightarrow} f(m)$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, (3) sıraları yığılsın (üç sıra haqqında teoremin digər forması). Additiv arifmetik funksiyaların ayrı-ayrı sinifləri üçün təkrar loqarifm qanununa analoji qanunlar öyrənilmişdir.

Funksional limit teoremləri. Kəsik additiv arifmetik funksiyaların qiymətləri üzrə ya sınıq xətlər və ya pilləvari funksiyalar

qurulur və belə arifmetik proseslərə (bax, *Arifmetik modelləşdirilmə*(s i) t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n) uyğun $C_{[0,1]}$ və ya $D_{[0,1]}$ fəzalarında ölçülərin yığılması araşdırılır. Məs., additiv arifmetik $f(m)$ funksiyası üzrə aşağıdakı model qurulur. $B_n \to \infty$ olduqda

$$y_n(t) = \max\{ z;\ B_z^2 \le t B_n^2 \},\quad 0 \le t \le 1,$$

$$W_n(m,t) = B_n^{-1}(f_{y_n(t)}(m) - A_{y_n(t)})$$

olduğu fərz olunur. $D_{[0,1]}$ fəzasının Borel çoxluqları σ – cəbri $\mathscr{B}$ -də

$$\mathbf{P}_n(B) = \mathbf{P}_n\{ W_n(m,t) \in B\},\quad B \in \mathscr{B}$$

ölçüsü təyin olunur. $\mathbf{P}_n$ ölçüləri ardıcıllığının asılı olmayan artımlarlı müəyyən bir prosesə uyğun ölçüyə zəif yığılması tamamilə araşdırılmışdır. Xüsusi halda, $\mathbf{P}_n$ standart Viner ölçüsünə, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, (5) şərti ödənilsin. Arifmetik proseslərin Braun hərəkətinə yığılma sürəti öyrənilmişdir.

Müxtəlif ümumiləşmələr. $f_1(m + a_1) + ... + f_s(m + a_s)$ funksiyalarının paylanması araşdırılır, burada $f_i(m)$ – additiv arifmetik funksiyalar, a_i – tam mənfiolmayan ədədlərdir, $1 \le i \le s$. a_i -lər n -dən asılı olduğu halda arqumentlərin yerinidəyişmələrinin təsiri olduqca mühüm olur. $f_1(m + a_1) + ... + f_s(m + a_s)$ funksiyalarının qiymətlərinin birgə paylanması, həmçinin $f(P(m))$, $f(P(p_m))$ paylanması araşdırılmışdır, burada $P(m)$, – $m \ge 1$ olduqda müsbət qiymətlər alan tamqiymətli çoxhədli, p_m , – m -ci sadə ədəd və ya $f(a_m)$ -dir, burada a_m – ədədi silsilələrdə «yaxşı» paylanmaya malik natural ədədlər ardıcıllığıdır (bax, [1]). Sərbəst multiplikativ semi – qruplarda verilən additiv funksiyalar üçün E. ə. n. analoji qaydada təyin olunur (bax, [8]).

Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin bəzi metodları. a) M o m e n t l ə r m e t o d u. $F_n(C_n + D_n x)$ paylanma funksiyasının limit funksiyasına yığılması haqqında

$$\mu_k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n(C_n + D_n x) = \frac{1}{nD_n^k} \sum_{m=1}^{n} (f(m) - C_n)^k ,$$

$$k = 1, 2, ...$$

momentləri üzrə mühakimələr yürütmək olar. Əgər, məs., isbat etmək olarsa ki, $\mu_k(n)$ bütün təkqiymətli k -lar üçün sıfra və bütün cütqiymətli k -lar üçün $(k - 1)!!$ -ə yığılır, onda $F_n(C_n + D_n x)$ paylanma funksiyası $\Phi(x)$ normal qanununa yığılır.

b) Ş ə b ə k ə və k ə s i m m e t o d u (bax, [2]). Arifmetik funksiyaların paylanması məsələlərinə ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqində əsas çətinlik ondan ibarətdir ki, natural ədədlər çoxluğunun asimptotik sıxlığı hesabi additivliyə malik deyildir. Bu çətinliklə qarşılaşmamaq üçün şəbəkə və kəsim – nəzəri – ədədi metodundan istifadə olunur. $r = r(n) \to \infty$, $\ln r = o(\ln n)$ ardıcıllığını götürərək, iki – $\{\Omega, \mathfrak{A}_n, \mathbf{P}_n\}$ və $\{\Omega, \mathfrak{A}_n, \mathbf{Q}_n\}$ ehtimal fəzaları ardıcıllıqları qurulur, burada Ω – elementar hadisələr fəzasıdır və $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ – natural ədədlər çoxluğudur, Q_p , – p -yə bölünən natural ədədlər çoxluğu olsun. Təsadüfi hadisələr sistemi $\mathfrak{A}_n$, – $p \le r$ olduqda bütün Q_p çoxluqlarını və Ω -nı özündə saxlayan minimal çoxluqlar cəbridir. $\mathbf{P}_n$ ölçüsündən başqa elə $\mathbf{Q}_n$ ehtimal ölçüsü daxil olunur ki, bütün $p \le r$ qiymətlərində $\mathbf{Q}_n(Q_p) = 1/p$ olsun. Şəbəkə metodu ilə E. ə. n.-nin əsas fundamental lemması isbat olunur: $\mathbf{P}_n(A) - \mathbf{Q}_n(A) = o(1)$ münasibəti bütün $A \in \mathfrak{A}_n$ hadisələri üzrə müntəzəm ödənilir.

$f(m)$ – güclü additiv arifmetik funksiya olsun və $f^{(p)}(m)$, – m -in p -yə bölünən, yaxud bölünməyən olmasından asılı olaraq ya $f(p)$ -yə, yaxud sıfra bərabər olur. $f^{(p)}(m)$, $p \le r$ funksiyaları $\{\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathbf{Q}_n\}$ fəzasına görə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. İxtiyari B Borel çoxluğu üçün bu halda

$$\mathbf{P}_n\left\{ \sum_{p \le r} f^{(p)}(m) \in B \right\} = \mathbf{Q}_n\left\{ \sum_{p \le r} f^{(p)}(m) \in B \right\} + o(1)$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci toplananın öyrənilməsi məqsədilə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün limit teoremlərini tətbiq etmək olar. Additiv arifmetik $f(m)$ funksiyalarının geniş sinfi üçün $\mathbf{P}_n\{f(m) \in B\}$ ehtimalı $\mathbf{P}_n\{ r(m) \in B\}$ ehtimalı ilə approksimasiya olunur.

c) X a r a k t e r i s t i k f u n k s i y a l a r v ə ç e v i r m ə l ə r m e t o d u. Additiv arifmetik $f_n(m)$ funksiyalarının və multiplikativ arifmetik $g_n(m)$ funksiyalarının paylanmaları –

$$F_n(x) = \mathbf{P}_n\{ f_n(m) < x\} \quad \text{və} \quad G_n(x) = \mathbf{P}_n\{ g_n(m) < x\}$$

funksiyalarının öyrənilməsini uyğun olaraq

$$\int_{\mathrm{R}} e^{itx}\, dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{it f_n(m)}$$

xarakteristik funksiyalarının və

$$\int_{\mathrm{R}} |x|^{it} \operatorname{sgn}^k x\, dG_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left| g_n(m)\right|^{it} \operatorname{sgn}^k g_n(m)$$

$$k = 0, 1;\ 0^{it} = 0$$

xarakteristik çevirmələrinin (Mellin çevirmələrinin) öyrənilməsinə gətirmək olur. Hər iki halda n və $t \in \mathbb{R}^1$ parametrlərindən asılı kompleksqiymətli multiplikativ arifmetik $h(m) = h_{n,t}(m)$ funksiyalarının orta qiymətləri $E_n(h)$ -dan istifadə olunur; $\left| h(m)\right|$ ya 1 və ya 0-a bərabər olur. Bu istiqamət 20-ci əsrin 60-cı illərində inkişaf etməyə başlamışdır. $E_n(h)$ -ın öyrənilməsi üçün Dirixle doğuran sıralar metodu, inteqral tənliklər metodu və digər nəzəri-ədədi metodlardan istifadə olunur.

Dirixle doğuran sıralar metodu ilə araşdırmada

$$Z(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} + \frac{h(p^2)}{p^{2s}} + ... \right)$$

Dirixle sırasına baxılır, burada $s=\sigma+i\tau$ – kompleks dəyişəndir, $\sigma>1$.

Kontur inteqrallaması nəticəsində

$$\sum_{m=1}^{n} h(m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=\delta}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{s}Z(s)\frac{ds}{s},$$

$$\delta=1+1/\ln n$$

şəklində eynilik alınır. Bu halda məsələ $\sigma=1$ düzxətti ətrafında $Z(s)$ funksiyasının öyrənilməsinə gətirilir. İsbat etmək olur ki, elə $\lambda=\lambda_n(t)$ kəmiyyəti vardır ki,

$$\mathbf{M}_n(h)=\frac{n^{i\lambda}Z(\delta+i\lambda)}{(1+i\lambda)\,\zeta(\delta)}+o(1)$$

ifadəsi doğrudur, burada $\zeta(s)$ – Riman zeta – funksiyasıdır. $h(m)$ üçün bəzi fərziyyələrlə isbat olunmuşdur ki, $o(1)$ qiyməti $t\in[-T,T]$ üzrə müntəzəmdir və bu da $F_n(x)$ və $G_n(x)$ üçün limit teoremlərinə gətirir.

İnteqral tənliklər metodu ilə $E_n(h)$-ın araşdırılmasında $h(m)$ üçün olduqca ümumi fərziyyələrlə göstərmək olur ki, $x(u)=E_{e^u}(h)$ funksiyası

$$x(u)=u^{-1}\int_0^u K(u-v)\,x(v)dv+o(1)$$

tipli inteqral tənlikləri ödəyir, burada $K(v)$ hər hansı hissəvi sabit funksiyadır. Ardıcıl yaxınlaşmalar metodu əksər hallarda həllin asimptotik ayrılışını almağa imkan verir ki, bu da limit teoremlərini dəqiqləşdirməyə səbəb olur.

d) Poliadik analizin tətbiqi. Tam ədədlər halqası $\mathbb{Z}$-də a nöqtəsində bazisi çıxıqlar siniflərinin çoxluğu $\{\alpha\in\mathbb{Z};\ \alpha\equiv a(\mathrm{mod}\,m)\}$, $m=1,2,\ldots$ olan topologiya daxil olunur. Alınan topoloji halqa bikompakt topoloji $\mathfrak{S}$ halqasına kimi tamamlanır; $\mathfrak{S}$-nın elementləri poliadik ədədlər adlanır. Tamamlandırılmış normalanmış Haar ölçüsü $\mathbf{P}$ σ-da ehtimal rolunu oynayır. Sonrakı mərhələdə $h(m)$, $m\in\mathbb{N}$ arifmetik funksiyası $h(x)$, $x\in\mathfrak{S}$ funksiyasına qədər davam olunur. $h(x)$ funksiyası üçün ehtimali mülahizələr tətbiq oluna bilinir. Məs., $f(m)$ additiv arifmetik funksiyası

$$f(x)=\sum_{p^k\| x}f(p^k)$$

funksiyasına qədər bütün $x\in\mathfrak{S}$ üçün $\mathbf{P}$ – sanki yəqin, yalnız və yalnız, o halda davam oluna bilinir ki, (3) sıraları yığılsınlar. Bu halda $\mathbf{P}_n\{f(m)<u\}$ paylanmaları $\mathbf{P}\{x:f(m)<u\}$ paylanmasına zəif yığılır. Asimptotik paylanmalar, arifmetik funksiyaların orta qiymətləri haqqında digər bir çox məsələlər onların $\mathfrak{S}$-da davam olunmasına gətirilir.

Əd.: [1] Барбан М. Б., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 1, с. 51–102; [2] Кубилюс Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [3] Кубилюс Й. П., в кн.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 81–118; [4] Манставичюс Э., «Лит. матем. сб.», 1980, т. 20, № 3, с. 39–52; [5] Новоселов Е. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, с. 307–64; [6] Постников А. Г., Вероятностная теория чисел, М., 1974; [7] Постников А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971; [8] Юшкис З., «Лит. матем. сб.», 1964, т. 4, с. 565–603; [9] Babu G. J., Probabilistic methods in the theory of arithmetic functions, Delhi, 1978; [10] Elliott P. D. T. A., Probabilistic number thery, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1979–80; [11] Elliott P. D. T. A., Arithmetic functions and integer products, N. Y. – [a. o.], 1985; [12] Galambos J., «Ann. Inst. Henri Poincaré», Sect. B, 1970, v. 6, № 4, p. 281–305; [13] Hildebrand A., «Astérisque», 1987, № 147–48, p. 95 – 106; [14] Narkiewicz W., Teoria liczb, Warsz., 1977; [15] Philipp W., «Mem. Amer. Math. Sos.», 1971, № 114; [16] Schwarz W., «Jahresber. Deutsch. math. Ver.», 1977, Bd 78, № 3, S. 147–67; [17] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, пер. с англ., М., 1963.

EHTİMALİ HƏLLİ, DİFFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN « вероятностное решение дифференциальных уравнений; probabilistic solution of differential equation » – bu və ya digər differensial tənliyin həllinin uyğun sayılan təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləmələrinin vasitəsilə yazılışıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi və 2-ci tərtib xüsusi törəməli elliptik və parabolik differensial tənliklər arasında əlaqə çoxdan məlum idi. Muavr – Laplas teoremindən aydındır ki, məlum ehtimalların limiti istilikkeçirmə tənliyinin həllidir. Ehtimal nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin inkişafında təsadüfi dolaşmalarla əlaqədar müxtəlif növ riyazi gözləmələrin limitlərinin hesablanılması mühüm rol oynamışdır və bu sahədə xeyli işlər görülmüşdür, alınmış nəticələr isə differensial tənliklərin həllinə gətirmişdir ki, bununla da onların həllərinin tapılmasına səbəb olmuşdur (bax, [1] – [5]). Həmçinin məlumdur ki, kəsilməz zamanlı təsadüfi proseslərlə əlaqədar bəzi ehtimallar differensial tənlikləri ödəyir (bax, [6], [7]). Stoxastik inteqrallar və differensial tənliklər nəzəriyyəsi yaranana qədər (bax, [8], [9]) ehtimal nəzəriyyəsi və differensial tənliklər nəzəriyyəsi arasında əlaqə yalnız birtərəfli istifadə olunurdu və yalnız o halda ki, differensial tənliklər nəzəriyyəsinin hər hansı bir faktı ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunmuş olsun. [9]-da, əksinə, sırf ehtimali metodlarla, əvvəllər məlum olmayan nəticə – cırlaşmış parabolik tənliklərin həllinin varlığı nəticəsi alınmışdır.

Elliptik tənliyin ehtimali həll sxemi aşağıda verilir. $\mathbb{R}^d$ – qeyd olunmuş ortonormal bazisə malik d dim. – ölçülü Evklid fəzası olsun, bu fəzada qiymətləri $\mathbb{R}^d$-dən olan $b(x)$ funksiyası, qiymətləri $\mathbb{R}^{d_1}$-in xətti operatorlar (matrislər) çoxluğundan olan $\mathbb{R}^d$-də $\sigma(z)$ funksiyası təyin olunmuşdur, burada d_1 – hər hansı tam ədəddir. $\boldsymbol{w}_t$ – hər hansı ehtimal fəzasında təyin olunmuş d_1 – ölçülü Viner prosesi olsun. $y\in\mathbb{R}^d$ qeyd olunur və fərz olunur ki, başlanğıc şərti $x_0=y$ olan

$$d\,x_t=b\,(x_t)\,dt+\sigma(x_t)\,d\boldsymbol{w}_t,\quad t>0 \qquad (1)$$

İto stoxastik tənliyinin həlli vardır; bu həll x_t^y ilə işarə olunur. $D\in\mathbb{R}^d$ hər hansı oblast, τ^y ilə x_t^y-in D-dən ilk çıxış anı olsun. L differensial operatoru

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{d}a^{ij}(x)\,u_{x^ix^j}(x)+\sum_{i=1}^{d}b^i(x)\,u_{x^i}(x) \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\left\|a^{ij}(x)\right\|=\frac{1}{2}\,\sigma(x)\,\sigma^*(x)$ və

«$*$» transponirlənmə işarəsidir. Əgər $u(x)$ funksiyası $\overline{D}$ -də kifayət qədər hamar olarsa,

$$Lu + f = 0 \text{ bərabərliyi } D\text{-də}, \tag{3}$$

$$u = \varphi \text{ bərabərliyi } \partial D\text{-də} \tag{4}$$

və bəzi texniki xarakterli şərtlər ödənilərsə, onda $y \in \overline{D}$ olduqda

$$u(y) = \mathbf{M}\left[\int_0^{\tau^y} f(x_t^y)\,dt + \varphi(x_{\tau^y}^y) \right] \tag{5}$$

doğrudur.

(5) düsturu (3), (4) məsələlərinin ehtimali ifadəsidir. (3), (4) məsələlərinin həllinin olub-olmadığı haqqında məlumat olmadıqda, aydındır ki, bu düsturun mənası ola bilər və o, (3), (4) məsələlərinin ehtimali həllini verir. Əgər u funksiyasını (5) düsturu ilə verdikdə və u kifayət qədər hamar funksiya olarsa, bir qayda olaraq, asanlıqla isbat olunur ki, u , – (3), (4) məsələlərinin həllidir. Bu mühüm faktdır. Bir sıra hallarda başlanğıc y şərtinə əsasən (1)-in həllinin differensiallananlığı haqqında teoremin köməyilə (5)-in sağ tərəfinin hamarlığını isbat etmək olur.

Bəzi xətti tənliklər (bax, [14]) xüsusi törəmələrli İto tənliklərinin (bax, [15]), hətta bəzi qeyri – xətti tənliklər (bax, [13]) sistemlərinin həlləri üçün də ehtimali ifadələr vermək mümkündür.

Əd.: [1] Philips H. B., Wiener N., «J. Math. and Phys.», 1923, v. 2, p. 105–24; [2] Courant R., Friedrichs K., Lewy H., «Math. Ann.», 1928, Bd 100, S. 32–74 (рус. пер. – «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 125–60); [3] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Отд. Матем. и естеств. наук», 1933, с. 363–72 (рус. пер. – в его кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 141–48); [4] Хинчин А. Я., Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, B., 1933 (рус. пер. – Асимптотические законы теории вероятностей, М. – Л., 1936); [5] Петровский И. Г., «Math. Ann.», 1934, Bd 109, S. 425–44; [6] Bachelier L., Calcul des probabilities, P., 1912; [7] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 415–58, (рус. пер. – Колмогоров А. Н., кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105); [8] Itô K., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 4; [9] Гихман И. И., «Укр. Матем. ж.», 1950, т. 2, № 4, с. 37–63; 1951, т. 3, № 3, с. 317–39; [10] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [11] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [12] Stroock D. W., Varadhan S. P. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [13] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [14] Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л., «Докл. АН СССР», 1980, т. 250, № 3, с. 521–24; [15] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1982, в. 8, с. 153–68.

EHTİMALİ XARAKTERİZASİYA(sı) qrupların **«вероятностная характеризация** групп; **probabilistic characterization** of groups **»** – müəyyən qruplar sinfinin və ya qrupların hansısa xarakteristikalarının bu siniflərdə verilmiş ehtimal ölçülərinin, onların kompozisiyalarının, birparametrli semi – qrup ölçülərinin və s. xassələrinin köməyilə təsviridir. Bu mövzu onunla əlaqədar yaranmışdır ki, $\mathbb{R}^1$-də doğru olan ehtimali nəticələr və anlayışların hamısı ixtiyari qruplar üçün doğru olmur. Buna görə də, təbii və maraqlıdır ki, hər hansı limit teoreminin doğru olduğu, hər hansı paylanmanın səciyyəvi xüsusiyyəti ödənilən və ya hər hansı ehtimal anlayışının təyin oluna bilindiyi qruplar təsvir olunsun.

Qrupların limit teoremlərilə xarakterizasiyası. G – lokal kompakt qrup, μ isə G -də elə ixtiyari Borel ölçüsü olsun ki, onun daşıyıcısı bütün G -ni doğursun. Əgər ehtimal ölçüləri sinfində $\{\mu^{*n}\}$ ardıcıllığının limit nöqtələri vardırsa, onda G kompakt qrupdur. G , – topologiyası hesabi bazisə malik olan kompakt qrup olsun. Əgər: a) $\mathscr{M}^1(G)$ ailəsindən hər bir μ ölçüsü üçün elə $x \in G$ tapılarsa ki, $\mu^* \varepsilon_x \in \mathscr{H}$; b) $\mathscr{H}$ -dan olan ixtiyari $\{\mu_j\}$, $j \geq 0$ ardıcıllığı üçün $\{\nu_n\}$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda yığılarsa (burada $\nu_n = \mu_1 \ldots \mu_n$), G -də bütün ehtimal ölçüləri ailəsi $\mathscr{M}^1(G)$ -nin alt çoxluğu $\mathscr{H}$ tam çoxluq adlanır. Onda əgər G kompakt qrupu üçün $\mathscr{M}^1(G)$ -də tam altçoxluq varsa, bu halda G qrupu tamamilə əlaqəsizdir, yəni qrup vahidinin əlaqələyici komponenti vahidlə üst-üstə düşür.

Tamamilə əlaqəsiz kompakt qrup sıfırölçülüdür və əksinə, onda yuxarıda qeyd olunan xarakterizasiya sıfırölçülü kompakt qrupun ehtimali xarakterizasiyasıdır (bax, [1], [2]).

Kompaktlıq xassəsinə müəyyən mənada əks olan xassəli qrup xarakterizasiyaları mövcuddur. Trivial vahidi altqrupdan başqa kompakt altqrupları olmayan G qrupu qeyri–periodik qrup adlanır. $X_1, X_2, \ldots$ asılı olmayan G – qiymətli təsadüfi elementlər ardıcıllığı, $Y_n = X_1 X_2 \ldots X_n$ olsun. Onda G qrupu, yalnız və yalnız, o halda qeyri – periodik qrupdur ki, Y_n paylanmalarının zəif yığılması $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ardıcıllıqları ixtiyari olduqda onların sanki hər yerdə yığılması ilə ekvivalent olsun (bax, [1]).

G qrupunu tamamilə istifadə edən kompakt çoxluqların artan ardıcıllığı olarsa, G qrupu σ–kompakt qrup adlanır. Əgər bütün $x \in G$ üçün

$$\lim_{n \to \infty} \| \mu_n - \varepsilon_x \mu_n \| = 0$$

münasibəti doğru olarsa, lokal kompakt G qrupunda ehtimal ölçüləri ardıcıllığı $\{\mu_n\}$ asimptotik bərabər paylanmalı (soldan) ardıcıllıq adlanır, $\| \cdot \|$ – ölçünün variasiyasını ifadə edir. G qrupu, yalnız və yalnız, o halda σ – kompakt qrupdur ki, G -də heç olmazsa bircə soldan asimptotik bərabərehtimallı ardıcıllıq olsun. Analoji xarakterizasiya sağdan asimptotik bərabərehtimallı ardıcıllıq üçün də vardır.

Paylanmaların xarakterizasiyası. Ehtimal nəzəriyyəsində əsas məsələsi bəzi səciyyəvi xüsusiyyətlərinə görə paylanmaların təsviri olan bölmə çoxdan yaranmışdır. Nəticələrin əksəriyyəti normal qanunun xarakterizasiyası üçün alınmışdır. Ən tipik nəticə Darmua – Skitoviç teoremidir. Nəticələrin digər hissəsi, normal qanunun normal komponentlərə ayrılışı haqqında Levi – Kramer teoremilə əlaqədar alınmışdır. Bu teoremlər vektor halı üçün də doğru olduğundan kommutativ qrupları təsvir etmək məsələsi də təbii olaraq yarandı ki, bunlar üçün qrupda normal paylanmanın müəyyən surətdə tərifi ilə bu teoremlər doğru olur (bax, *Qauss paylanması* lokal kompakt Abel qrupunda).

Məlumdur ki, $\mathbb{R}^1$-də ixtiyari sonsuz bölünən paylanmanı ehtimal ölçülərinin kəsilməz birparametrli semi – qrupuna daxil etmək olur. Qruplar halında bu nəticə həmişə mövcud olmur,

buna görə də, bu müddəanın doğru olduğu qrupların təsviri problemi yaranır.

Bu qrupların xarakterizasiyası hələ ki, tamamilə alınmamışdır, lakin geniş bir qruplar sinfi (kökləri – kompakt qruplar) üçün bu problem müsbət həll olunmuşdur; bu qruplar üçün kəsilməz birparametrli semiqruplara daxilolunma problemi müsbət həll olunur. Kökləri – kompakt qruplar Li cəbri yalnız həqiqi köklərin olmasını təmin edən qruplardır; məs., qeyd olunan xassəli bütün kompakt qruplar, kompakt doğurulmuş Abel qrupları, nilpotent kompakt doğurulmuş lokal kompakt qruplar, əlaqəli həllolunan Li qrupları (bax, *Sonsuz bölünən paylanma qrupda*; *daxilolma problemi*).

Riyazi gözləmə və dispersiya anlayışlarının limit teoremləri nəzəriyyəsi və statistikada mühüm rolu aydındır.

Bu anlayışların G – qiymətli təsadüfi kəmiyyətlər üçün analoqlarının məğzinin də bu dərəcədə önəmli olacağını gözləmək təbii olardı. G qrupu kompakt olduqda bu anlayışlar təyin olunmuşdur və bunların əsasında kompakt qruplarda limit teoremlərinin çox saylı ümumi və son ifadələri alınmışdır (bax, [1], [3], [4]). Aydın olmuşdur ki, $\mathscr{M}^1(G)$ -də, vahidin olduqca kiçik ətrafını və bütün cırlaşmış ölçüləri özündə saxlayan ölçülər semi – qrupunda ixtiyari kompakt qrup üçün riyazi gözləmə təyin etmək mümkün olmur. Buna görə də, riyazi gözləmənin varlığı da qrupların xarakteristik xassələrindəndir. Yalnız $SO(2)$ qrupu və $SU(2)$ qrupu, iki elementli qrup və bu qrupların düz hasili belə qruplardandır.

Dispersiyalar yalnız trivial altqrupdan başqa altqrupu olmayan ətrafa malik olan kompakt qruplar üçün təyin oluna bilinir. Belə kompakt qruplar ya sonlu qruplar, ya da Li qruplarıdır.

Əd.: [1] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 195; с. 1274–77; [3] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, с. 723–35; [4] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, с. 524–27.

EHTİMALİ KODLAMA « вероятностное кодирование; probabilistic coding » – bax, *Kodlanma*(sı) məlumatlar mənbəinin.

EHTİMALİ PROQNOZU, HAVANIN « вероятностный прогноз погоды; probabilistic weather forecast » – prediktant (yəni öngörü kəmiyyətlər toplusu) əvəzinə bəzi hava təzahürlərinin (yəni bu və ya digər meteoroloji obyektlərin) ehtimalları istifadə olunan *hava proqnozudur.* H. e. p.-nun son nəticəsi (ehtimal formasında proqnoz) uyuşmayan hadisələrin tam qrupunu təşkil edən havanın vəziyyətlərinin müəyyən toplusunun ehtimallarının statistik qiymətlərinin təyin edilməsindən ibarətdir. H. e. p.-da paylanması təyin olunan təsadüfi kəmiyyət diskret və ya kəsilməz ola bilər.

Y – havanın öngörü şərtlərini xarakterizə edən *prediktant*, X – başlanğıc şərtləri xarakterizə edən və proqnoz tərtib olunan anda müşahidələrin məlum məlumatları ilə təyin olunan *prediktor* olsun. X və Y -in (adətən, çoxölçülü vektorlar hesab olunan) təsadüfi kəmiyyətlər olduğu və bu təsadüfi kəmiyyətlərin birgə ehtimal paylanmasının – çoxölçülü $F(x, y)$ paylanma funksiyasının varlığı fərz olunur. Bu halda $X = x$ olduğu fərz olunarsa, Y təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanma funksiyası $F(y \mid x)$ -i təyin etmək olar. *Statistik hava proqnozunun* əsas məsələsi istifadə olunan an prediktorun X üçün verilmiş qiymətində Y prediktantının $F(y \mid x)$ şərti paylanma funksiyasına uyğun şərti riyazi gözləməsi $\mathbf{M}[Y \mid X = x] = \overline{Y}(x)$ -in qiymətləndirilməsi məsələsidir; bu məsələnin həlli üçün atmosfer proseslərinin müxtəlif stoxastik – dinamik modelləri geniş istifadə olunur. X kəmiyyətinin müşahidələrinin proqnoz qiymətlərinin ən tam xarakteristikası yalnız $\overline{Y}(x)$ kəmiyyətinin verilməsi ilə deyil, H. e. p.-nun məğzini təşkil edən bütün şərti ehtimal paylanmasının – $F(y \mid x)$ -in verilməsi ilə təyin olunur. Belə proqnoz simvolik olaraq $\mathscr{P}_y(x) = \hat{F}(y \mid x)$ şəklində ifadə olunur, burada $\hat{F}(y \mid x)$, – X və Y kəmiyyətləri üzərində aparılan müşahidələrin nəticələri arxivi ilə təyin olunan $F(y \mid x)$ funksiyasının empirik statistik qiyməti, $\mathscr{P}_y$ y -in qiymətindən asılı proqnoz operatorudur.

Aydındır ki, H. e. p. *havanın kateqorik proqnozundan* daha məzmunludur və o, praktik olaraq istifadə olunma üçün daha geniş imkanlara malikdir, çünki bu proqnozun verilməsi üçün yalnız $\overline{Y}(x)$ -in verilməsi çox vaxt kifayət etmir.

X və Y üzərində aparılan real müşahidələrin məlumatlarının analizi bu proqnozun keyfiyyət statistik qiymətini almağa imkan verir (bax, *Ehtimali proqnozu*, *havanın*; *keyfiyyətin statistik qiyməti*); bu statistik qiymət H. e. p.-nun optimizasiyasında istifadə olunur. H. e. p.-nun ən sadə forması havanın n sayda mümkün fazalarına uyğun sonlu sayda (məs., n sayda) qiymət alan diskret Y kəmiyyəti üçün proqnoz halıdır. Bu halda proqnoz $R = (r_1, ..., r_n)$ vektorunun göstərilməsi ilə təyin olunur, burada r_i – havanın i -ci fazasının öngörül ehtimalıdır və $r_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. Əgər X prediktoru da sonlu sayda (məs., n sayda) qiymət alırsa, onda X prediktorunun j -ci qiymətinin müşahidə edildiyi şərtilə havanın i -ci fazasının şərti ehtimalı – $\mathscr{P}_{i|j}$ -nin statistik qiyməti kimi $\pi_{ij} = n_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n} n_{ij}$ tezliyi götürülür, burada n_{ij}, – Y -in i -ci qiymətinin X -in j -ci qiyməti ilə birlikdə müşahidələri hallarının sayıdır. Y kəsilməz prediktant olduğu hallarda, adətən, Y kəmiyyəti üçün yalnız bəzi verilmiş diskret dərəcələrinin ehtimali proqnozuna baxılır; X -in verilmiş qiymətində Y -in şərti paylanmasının kvantillərinin və ya etibarlı intervallarının proqnozu müəyyən ehtimal topluları üçün də mümkündür.

Prediktorlar və prediktantların birgə tərtib olunmuş empirik cədvəllərinə (yəni π_{ij} tezlikləri üçün cədvəllərə) əsaslanan və prediktor vəziyyətlərinin çoxsaylı olduğu, müşahidə nəticələrinin isə kifayət dərəcədə böyük olmadığı halda sadə H. e. p. olduqca dəqiq olmur; real olaraq belə proqnoz yalnız prediktorlar az saylı olduqda, azsaylı ardıcıllıqlar verildiyi və kifayət qədər geniş müşahidələr arxivi olduğu halda özünü doğruldur. H. e. p.-nun digər metodları – ortoqonal funksiyalar sistemləri üzrə ayrılışlar istifadə olunan şərti ehtimal paylanmaları haqqında müəyyən hipotezlərə, sonlu Markov zəncirləri aparatına, Beyes teoreminə, kəsilməz paylanmaların normal approksimasiyasına əsaslanır.

H. e. p.-nu analoqlar qrupu üzrə (bax, *Analoqlar metodu*) ehtimalların qiymətləndirilməsi vasitəsilə də almaq olur. Meteoroloji Φ hadisələrinin proqnozu üçün binar Y prediktantlarından istifadə olunur, bu prediktantlar Φ hadisəsi baş verdikdə 1, əks halda 0 qiyməti alır. $\mathbf{P}\{\Phi \mid X = x\} = \mathbf{M}(Y \mid X = x)$ olduğundan Φ hadisəsinin şərti ehtimalının qiymətləndirilməsi üçün reqression analizdən istifadə etmək olur.

Praktikada hava proqnozu üçün subyektiv H. e. p.-lardan da istifadə olunur, bu proqnozlarda ehtimal üçün qiymətlər

proqnozist tərəfindən onun şəxsi təcrübəsi, onda olan informasiya əsasında verilir. H. e. p. digər statistik hava proqnozları kimi dinamik proqnozlarla birlikdə bunların interpretasiyası üçün də istifadə oluna bilinər.

Əd.: [1] Груза Г. В., Рапькова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983.

EHTİMALİ PROQNOZU, HAVANIN; keyfiyyətin statistik qiyməti **« вероятностный прогноз погоды;** оценка качества; **probabilistic weather forecast evolution »** – istehlakçını *havanın ehtimali proqnozu* ilə məlumatlandıran prediktantın ehtimal paylanma funksiyasının hesablanacaq dəqiqliyi üçün statistik qiymətdir (ölçüdür). H. e. p.-nun keyfiyyət statistik qiyməti proqnoz üçün baxılan metodla bağlı kifayət dərəcədə müşahidə nəticələrinin olduqca geniş çoxluğunun verilənləri əsasında təyin olunur. Bu zaman uzlaşma kriterilərindən və havanın müxtəlif vəziyyətləri üçün müşahidə tezlikləri ilə bu vəziyyətlərin ehtimali proqnozu ilə verilən «nəzəri ehtimallar» arasındakı fərqin mühümlüyü haqqında hipotezləri yoxlama metodlarından istifadə olunur. Keyfiyyətin statistik qiyməti üçün eyni zamanda öngörül ehtimalların trivial iqlim proqnozuna müvafiq ehtimallardan fərqlənmə dərəcəsi və proqnozdan proqnoza onların dəyişkənliyi də nəzərə alınmalıdır.

H. e. p.-nun keyfiyyət statistik qiymətinin təyin edilmə qaydası dörd ardıcıl mərhələdən ibarətdir. Birinci mərhələdə qiymətləndirmə məqsədi (və ya ilkin nöqteyi – nəzər) təyin edilir; ikinci mərhələdə verilmiş məqsəd (və ya nöqteyi – nəzər) üçün proqnozun arzu olunan xassələri müəyyən olunur; üçüncü mərhələdə proqnozun keyfiyyət ölçüsü təyin olunur, yəni elə kəmiyyət – statistik qiyməti götürülür ki, bu kəmiyyət proqnozun arzu olunan xassəyə nə dərəcədə malik olduğunu təyin etməyə imkan versin; nəhayət, dördüncü mərhələdə alınmış statistik qiymətlərin nəticələrinin statistik mühümlüyü haqqında nəticələr çıxarılır. Adətən, iki əsas məqsədə baxılır.

Bunlardan birincisi – istehlakçı üçün ən mühüm olanı, praktik həllərin proqnoztik informasiyası əsasında qəbul olunan nəticələrin analiz ilə bağlıdır; proqnozist üçün mərkəzi rol oynayan ikinci məqsəd proqnozun mükəmməllik dərəcəsinin təyin olunması ilə bağlıdır, lakin bu halda proqnozun nə cür istifadə olunacağı qaydalarına proqnozun təsirinin olmadığı nəzərdə tutulur.

Buna uyğun olaraq iki qrup statistik qiymətlər müəyyən olunur: proqnoztik informasiyanın praktiki dəyərini müəyyənləşdirən iqtisadi statistik qiymətlər və proqnoz müddəti keçdikdən sonra müşahidələrin verilənləri ilə proqnozun uyğunluq dərəcəsini əks etdirən nəzəri statistik qiymətlər.

Proqnozların qiymətləndirilməsinə iqtisadi yanaşmada verilmiş istehlakçı üçün proqnozun müəyyən faydalılıq ölçüsü əsas götürülür, bu da istehlakçıdan asılı olduğuna görə universal olmaya bilər. Keyfiyyətin nəzəri qiyməti də müxtəlif cür təyin olunur, bu isə proqnozun hansı xassəsinin ən mühüm olması və bu xassənin nə cür ölçülməsi ilə müəyyən olunur.

Məs., n sayda qiymət alan prediktantın ehtimali proqnozu məsələsinə baxılır (havanın n sayda $\Phi_1, ..., \Phi_n$ mümkün fazalarına uyğun).

$$R = (r_1, r_2, ..., r_n), \quad r_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} r_j = 1$$

– veriləcək ehtimal proqnozuna uyğun vektor olsun (burada r_j, – Φ_j fazasının proqnozlanan ehtimalıdır). Real (məs., Φ_j fazasına uyğun) baş vermiş havanın vəziyyəti $D^i = (d_1, ..., d_n)$ ilə işarə olunur, burada $d_i = 1$ və $j \neq i$ olduqda $d_j = 0$. Onda qiymətləndirilmə qaydası (R, D) vektorlar cütü çoxluğunda verilmiş, hər bir proqnoza və proqnozlanan kəmiyyət üçün alınmış qiymətə $S(R, D^i) = S_i(R)$ qiymətini qarşı qoyan funksionaldan ibarətdir. Proqnozun keyfiyyət statistik qiymətləri üçün belə qaydalar kifayət qədər verilmişdir. H. e. p.-nun ən uğurlu hesab olunan ilk kəmiyyət ölçüsü, –

$$PS(R, D) = 1 - \frac{1}{2}(R - D, R - D) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (r_j - d_j)^2$$

Brayer göstəricisidir. Qrup üzrə proqnozlara görə ortalanmış Brayer göstəricisi verilmiş proqnoz metodunun dəqiqliyini ölçür. Brayer göstəricisi daha çox havanın nizamlanmamış fazaları üçün istifadə olunur; baş vermiş hadisənin ehtimalına uyğun komponent yerini dəyişmədikdə bu göstəricinin qiyməti R vektorunun komponentlərinin yerdəyişməsindən asılı olmur. Nizamlanmış fazalar üçün (məs., üç faza olduğu halda: temperatur normadan «aşağı», «norma ətrafında» və «normadan yuxarı») $D = (0, 0,1)$ vektoru ilə verilən $R_1 = (0,4, 0,1, 0,5)$ proqnozu $R_2 = (0,1, 0,4, 0,5)$ proqnozuna nisbətən daha uğursuz sayılır. Belə hallarda

$$RPS(R, D) = 1 - (R' - D', R' - D')/(N - 1)$$

kriterisinə üstünlük verilir, burada $r'_j = \sum_{k=1}^{j} r_k$; $d'_j = \sum_{k=1}^{j} d_k$.

Aydındır ki, RPS göstəricisi öngörül və müşahidə olunan paylanma funksiyalarının uyğunluğunu, PS isə öngörül və müşahidə olunan diskret ehtimallar toplusunun uyğunluğunu qiymətləndirir.

Əd.: [1] Груза Г. В., Рапькова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983; [2] Murphy A. H., Epstein E. S., «J. Appl. Met.», 1967, v. 6, № 5, p. 748–55.

EHTİMALİ PROSES « вероятностный процесс; random / stochastic process » – bax, *Təsadüfi proses*.

EHTİMALLARI, BÖYÜK YAYINMALARIN « вероятности больших уклонений; large deviations probabilities » – bax, *Böyük yayınmalar ehtimalları*.

EHTİYATDA SAXLAMA « резервирование; redundancy » – texniki sistemin imtinasız işləmə ehtimalını sistemə müxtəlif növ əlavələr edliməsi hesabına artırmaq üçün metoddur. Əlavələrin növündən asılı olaraq E. s. aşağıdakı tiplərə ayrılır: 1) Sıradan çıxan elementlərin əsas funksiyalarını yerinə yetirən ehtiyatda olan əlavə elementlər daxil olunmaqla səciyyələnən struktur tip; 2) sistemin iş qabiliyyətini itirməsilə bağlı hər bir fasilə onun tamamilə sıradan çıxmasına səbəb olmadığı müvəqqəti ehtiyatda saxlama; 3) informasion ehtiyatda saxlama tipi – bu halda həddindən artıq informasiyanın yığıldığı nəzərdə tutulur və onun bir hissəsinin itkisi sistemin imtinasına səbəb olmur; 4) funksional ehtiyatda saxlama tipi – bu halda sistemin bəzi sıradan çıxan elementlərinin öz funksiyalarını digər, sıradan çıxmayan elementlərə verməsini nəzərdə tutan tip. Ehtiyatda saxlama xüsusiyyətli sistemlərin riyazi işləmə modelini qurmaq üçün yeni vəziyyətlər fəzası $X = \{x\}$ daxil olunur və imtina vəziyyətləri çoxluğu X_0 yenidən təyin olunur, $X_0 \subset X$. Ehtiyatın təsirindən asılı olaraq ehtiyatlar üç

növə ayrılır: yüklənmiş, sadələşmiş, yüklənməmiş. Ehtiyat elementlərin sayından asılı olaraq: birdəfəlik (dublanma) və çoxqat E. s. təyin olunur. Əgər sistem bütünlüklə ehtiyatda saxlanılırsa, belə E. s. ümumi E. s., əgər sistemin ayrı-ayrı elementləri ehtiyatda saxlanılırsa, belə E. s. – ayrılan E. s. adlanır. Ehtiyat elementin işləyəcəyi yerin olunub və ya qeyd olunmamasından asılı olaraq E. s. qeydolunan və ya sürüşən E. s. adlanır.

Əd.: [1] Вопросы математической теории надежности, M., 1983; [2] Козлов Б. А., Ушаков И. А., Справочник по расчету надежности аппаратуры радио-электроники и автоматики, M., 1975; [3] Надежность технических систем, M., 1985; [4] Черкасов Г. Н., Надежность технических систем с временной избыточностью, M., 1974.

EHTİYATDA SAXLAMA çoxqat « **резервирование** многомерное; multiple **redundancy** » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

EHTİYATDA SAXLAMA müvəqqəti « **резервирование** временное; temporary **redundancy** » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

EHTİYATDA SAXLAMA optimal « **резервирование** оптимальное; optimal **redundancy** » – bax, *Optimal ehtiyatda saxlama.*

EHTİYATDA SAXLAMA ümumi « **резервирование** общее; general **redundancy** » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

EHTİYATDA SAXLAMA; STRUKTUR TİP EHTİYATDA SAXLAMA « **резервирование структурное; structured redundancy** » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

EKSKURSİYA (sı) Braun hərəkətinin « **экскурсия** брауновского движения; Brownian **excursion** » – bax, *Braun ekskursiyası.*

EKSKURSİYA (sı) Markov prosesinin « **экскурсия** марковского процесса; **excursion** of a Markov process » – $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ *Markov prosesinin* trayektoriyasının hər hansı təsadüfi $[\alpha, \beta]$ parçasındakı t qiymətlərində ($t = \alpha$ qiyməti ola bilər ki, istisna olunmaqla) ζ_t-nin Markov prosesi vəziyyətlərinin əvvəlcədən nəzərdə tutulan Γ çoxluğundan xaricdə yerləşən ixtiyari maksimal hissəsidir (maksimallıq o mənada anlaşılır ki, trayektoriyanın böyük zaman parçalarındakı hissələri qeyd olunan xassəyə malik olmurlar). Başqa sözlə, ζ faza fəzası $(E, \mathscr{B})$-də Markov prosesi, $\Gamma \in \mathscr{B}$ olsun. Təsadüfi $\{t : \zeta_t \in \Gamma\}$ çoxluğunun qapanmasının tamamlayıcısı hesabidən çox olmayan kəsişməyən (α, β) intervallarının ailəsinə ayrılır və əgər (α, β) belə intervallardan biridirsə, onda $\zeta_t : [\alpha, \beta) \to E$ inikası – ζ Markov prosesinin Γ çoxluğundan ekskursiyasıdır; bu Markov prosesinin E.-nın başlanğıc və son anları uyğun olaraq α və β nöqtələridir. Bu E.-ya uyğun yerinidəyişmiş ekskursiya – $Y_t^\alpha = X_{t+\alpha} : [0, \beta - \alpha) \to E$ inikası kimi təyin olunur.

Markov prosesinin E.-nın araşdırılması Markov proseslərinin trayektoriyalarının incə xassələrini müəyyənləşdirməyə və onun hər hansı vəziyyətlər çoxluğundan ilk dəfə çıxdığı andan sonra, onun davamının mümkün tiplərini təsvir etməyə imkan yaradır (bax, [4], [7]). Markov prosesinin qeyd olunmuş vəziyyətdə E.-sı, ilk növbədə Viner prosesinin E., xüsusilə intensiv surətdə öyrənilmişdir (bax, [1], [2]). K. İto [3]-də standart Markov prosesinin $a \in E$ vəziyyətlərindən E.-nı aşağıdakı kimi təsvir etmişdir. Fərz olunur ki, bu vəziyyət $\Gamma = \{a\}$ üçün olduğu kimi $E \setminus \{a\}$ çoxluğu üçün də requlyar olsun (yəni ζ_t trayektoriyası t-nin olduqca kiçik $t > 0$ qiymətlərində $\{a\}$ və $E \setminus \{\alpha\}$ çoxluqlarında $\mathbf{P}_a$ – sanki yəqin olur və fərz olunur ki, $A(t)$, $-a$ nöqtəsində lokal zaman vaxtıdır. Aydın olmuşdur ki, bütün yerinidəyişmiş E.-ların çoxluğu $\{Y^\alpha\}$-nı hər hansı $\widetilde{\Omega}$ fəzasına daxil etmək olar və bu fəzanın ölçülən strukturlu olduğu, burada aşağıdakı xassələrə malik σ – sonlu ν ölçüsünün verildiyi fərz olunur: a) əgər $D \subset [0, \infty] \times \widetilde{\Omega}$ ölçüləndirsə və $\lambda = (l \times \nu)(D) < \infty$ olarsa [burada l, – $[0, \infty]$-da Lebeq ölçüsüdür], onda $\{Y^\alpha : (A(\alpha), Y^\alpha) \in D\}$ çoxluğunun elementlərinin sayı λ parametrli Puasson paylanma qanununa tabedir; b) kəsişməyən D_i çoxluqlarının ixtiyari sonlu toplusu üçün $\eta(D_i)$ kəmiyyətləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

E. anlayışının ümumiləşmələri də mümkündür (bax, [5]); bir çox tipli E.-ları idarə edən ehtimal mexanizmini təsvir etmək mümkün olmuşdur (bax, [5], [6]). [5]-də E.-nın texniki hesablanılması aparatı işlənilmişdir.

Əd.: [1] Ито K., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., M., 1968; [2] Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. франц., M., 1972; [3] Itô K., «Proc. Sixth Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1972, v. 3, p. 225–40; [4] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 3, с. 409–36; [5] Maisonneuve B., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 3, p. 399–411; [6] Getoor R. K., Sharpe M. J., «Adv. in Math.», 1982, v. 45, p. 259–309; [7] Blumenthal R. M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983, Bd 63, № 4, S. 433–44.

EKSKURSİYA (sı) Viner prosesinin « **экскурсия** винеровского процесса; **excursion** of a Wiener process » – 0-dan başlayan $w(t)$ standart *Viner prosesinin* iki qonşu sıfır arasındakı trayektoriya hissəsidir. Z, – $w(t)$, $t \geq 0$ trayektoriyasının sıfırları çoxluğu olsun. $[0, \infty)$-da Z-ə tamamlayıcı bütün açıq Z_n, $n = 1, 2, \ldots$ intervallarını hər yerdə sıx $\{t_i\}$ ardıcıllığının köməyilə nömrələmək olar, belə ki, Z_1 minimal indeksli $t_i \notin Z$ nöqtəsini özündə saxlayan intervaldır, Z_2 minimal indeksli $t_i \notin Z \cup Z_1$ nöqtəsini özündə saxlayan intervaldır və s., $Z_n = (a_n, b_n)$ olsun. Viner prosesinin normalanmış müt lə q ekskursiyası

$$e_n(t) = \frac{|w(a_n + t(b_n - a_n))|}{\sqrt{b_n - a_n}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

prosesidir. $t \in Z_n$ olduqda $\varepsilon_n = \operatorname{sign} w(t)$ olsun. Z təsadüfi çoxluğu, e_n təsadüfi prosesləri və ε_n təsadüfi kəmiyyətləri küllüyyatca asılı olmayandırlar və $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -1\} = 1/2$. e_n prosesi Markov prosesidir və onun keçid ehtimalının sıxlığı

$$p(0,\ 0;\ t,\ y) = \frac{2y^2}{\sqrt{2\pi t^3 (1-t)^3}}\ e^{-y^2/2t(t-1)},$$

$$0 < t < 1, \quad y > 0,$$

$$p(s,\ x;\ t,\ y) = \left(\frac{1-s}{1-t}\right)^{3/2} \frac{y}{x\sqrt{2\pi(t-s)}} \times$$

$$\times\ [e^{-(y-x)^2/2(t-s)} - e^{-(y+x)^2/2(t-s)}]\ e^{-y^2/2(1-t)+x^2/2(1-s)}$$

$$0 < s < t < 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

düsturları ilə təyin olunur.

$(a_n,\ b_n)$ intervallarının asılı olduğu və $\{t_i\}$-dən də asılılığı hesab olunur. Viner prosesinin E.-nın uclarının əvvəldən seçilmiş t nöqtəsinin daxilinə alması ehtimalının birgə sıxlıq funksiyası

$$p(a, b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{a(b-a)^3}},\ 0 < a < t < b < \infty$$

düsturu ilə ifadə olunur, uyğun xüsusi sıxlıq funksiyaları

$$p_1(a) = \frac{1}{\pi\sqrt{a(t-a)}}, \qquad p_2(b) = \frac{1}{\pi b}\sqrt{\frac{t}{b-t}}$$

düsturları ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Л е в и П., Стохастические процессы и брауновское движение, пер. с франц., М., 1972; [2] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968.

EKSPERİMENT XƏTASI « эксперимента ошибка; experiment error » – bax, *Sistematik xəta*, *Təsadüfi xəta.*

EKSPONENSİAL AİLƏSİ, PAYLANMALARIN « экспоненциальное семейство распределений; exponential family of distributions » – ω abstrakt parametrindən asılı və hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən

$$p(x, \omega) = \frac{d\,\mathbf{P}_w}{d\,\mu} =$$

$$= C(\omega)\ h(x) \exp\{C_1(\omega)\,\varphi_1(x) + \ ... \ + C_m(\omega)\,\varphi_m(x)\} \quad (*)$$

sıxlıq funksiyaları ilə verilmiş, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ ölçülən fəzasında $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\omega\}$ paylanmalar ailəsidir, burada $x \in \mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega$, $C(\omega) > 0$, $C_1(\omega), ..., C_m(\omega)$, – Ω-da təyin olunmuş funksiyalar, $h(x) \geq 0$, $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$, – $\mathfrak{X}$-də təyin olunmuş ölçülən funksiyalardır.

m – P. e. a.-nin (*) şəklində ifadə oluna bilinməsini təmin edən minimal tam ədəd olsun. (*) ifadəsi, yalnız və yalnız, $\mathfrak{X}$-də təyin olunmuş $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ funksiyaları və Ω-da təyin olunmuş $C_1(\omega), ..., C_m(\omega)$-lar xətti asılı olmadıqları halda minimaldır. Bu halda $\theta_j = C_j(\omega),\ j = 1, ..., m$ olduqda P. e. a.-nin parametrizasiyası $(\theta_1, ..., \theta_m)$ k a n o n i k p a r a m e t r i z a s i y a, m isə P. e. a.-nin r a n q ı adlanır. $\Theta = \{(\theta_1, ..., \theta_m) : \omega \in \Omega\}$ kanonik parametrik çoxluğunun mühüm rolu vardır. Əgər Θ çoxluğu $\mathbb{R}^m$ fəzasının müəyyən bir ətrafını daxilinə alırsa, onda P. e. a. tam paylanmalar ailəsidir (bax, *Tam ailəsi*, *paylanmaların*).

P. e. a.-nin statistik məsələlərdə müstəsna rolu onunla izah olunur ki, requlyarlıq tipli kifayət qədər ümumi şərtlərlə yalnız P. e. a.-ndən olan seçimlər üçün qeyri – trivial kafi statistikalar mümkün olur. Beləliklə, analitik nöqteyi – nəzərdən P. e. a.-ni

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\ \omega) = R\,(T(x_1, ..., x_n);\ \omega)\ r(x_1, ..., x_n)$$

funksional tənliklərinin yeganə həlləri (requlyarlıq tipli şərtlərdə) kimi xarakterizə etmək olar, burada T – qeyri – trivial statistikadır (bax, [1]).

(*) P. e. a.-ndən olan $x_1, ..., x_n$ seçimləri üçün statistik nəticələri $T = (t_1, ..., t_m)$ statistikasına əsaslandırmaq olar, belə ki, bu statistikanın dim. – ölçüsü seçimin həcmi n-in artması ilə artmır, burada $t_j(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i),\ j = 1, ..., m$.

Tətbiqi məsələlərdə çox təsadüf edilən ailələr P. e. a. olur. Məs.,

$$p(x;\ a,\ \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-(x-a)^2/2\sigma^2\}$$

normal paylanma sıxlığı funksiyalarının ailəsi P. e. a.-dir və bu halda (*) ifadəsində $\omega = (a, \sigma^2)$, $m = 2$, $\varphi_1(x) = x^2$, $C_1(\omega) = -1/2\,\sigma^2$, $\varphi_2(x) = x$, $C_2(\omega) = a/\sigma^2$ olur.

Xüsusi halda, Kramer – Rao bərabərsizliyində bərabərlik işarəsi yalnız P. e. a. üçün mümkün olur. Ranqı 1-ə bərabər olan P. e. a. üçün birtərəfli alternativə qarşı sadə hipotezin müntəzəm ən güclü kriteriləri vardır.

P. e. a.-nin sistematik öyrənilməsinə XX əsrin 30-cu illərindən başlanmışdır. İlk ciddi riyazi nəticələr J. Darmua (G. Darmois), B. Kupmen (B. Koopman) və E. Pitmen (E. Pitman) tərəfindən alınmışdır. Lakin kafi statistikalar nəzəriyyəsində P. e. a.-nin rolu R. Fişerə (R. Ficher) daha əvvəl məlum idi. P. e. a. maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə alınan statistik qiymətlərlə bağlı statistik məsələlərdə müəyyən mənada ekstremal rola malikdir.

Əd.: [1] К а г а н А. М., Л и н н и к Ю. В., Р а о С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [2] Л и н н и к Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] B a r n d o r f f - N i e l s e n O., Information and exponential families in statistical theory, N. Y., 1978.

EKSPONENSİAL AVTOREQRESSİV MODEL « экспоненциальная авторегрессионная модель; exponential autoregressive model / EXPAR – proses » – bax, *Qeyri – xətti avtoreqressiv proses.*

EKSPONENSİAL AVTOREQRESSİV PROSES « экспоненциальный авторегрессионный процесс; exponential autoregressive process / EXPAR – proses », EXAR – p r o s e s, – bax, *Qeyri – xətti avtoreqressiv proses.*

EKSPONENSİAL BƏRABƏRSİZLİK « экспоненциальное неравенство; exponential inequality » – bax, *Çebışev bərabərsizliyi.*

EKSPONENSİAL ÇEVİRMƏ(si) təsadüfi trayektoriya uzunluğunun « **экспоненциальное преобразование** случайного пробега; **exponential transformation** of random path » – köçürtmə məsələlərinin *statistik modelləşdirilməsinin* çəki modifikasiyasıdır və bu aşağıdakı kimi anlaşılır: hissəciyin sərbəst hərəkəti trayektoriyasının uzunluğu fiktiv mühit üçün zəiflənmə əmsalı $\sigma' = \sigma - c\cos\upsilon$ ilə realizə olunur, burada υ – trayektoriyanın baxılan hissəsinin istiqaməti və seçilmiş w istiqaməti arasındakı bucaqdır. Bu zaman hissəciyin «çəkisi» $\sigma(\sigma - c\cos\upsilon)^{-1} \times \times \exp(-lc\cos\upsilon)$ kəmiyyətinə vurulur; bu əməliyyat nəticəsində uyğun funksionalların statistik qiymətləri yaxşılaşır, bu şərtlə ki, c kəmiyyəti məqbul tərzdə təyin olunmalıdır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Михайлов Г. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1981, т. 21, № 6, с. 1435–44.

EKSPONENSİAL p – DAYANIQLILIQ « экспоненциальная p – устойчивость; exponential p – stability » – bax, *Dayanıqlılıq*(ğı) təsadüfi təyinedici elementlərli differensial tənliklərin.

EKSPONENSİAL DOĞURAN FUNKSİYA « экспоненциальная производящая функция; exponential generating function » – bax, *Doğuran funksiya.*

EKSPONENSİAL PAYLANMA « экспоненциальное распределение; exponential distribution » – bax, *Üstlü paylanma.*

EKSSES(i) dolaşmanın « **эксцесс** блуждания; **excess / overshoot** of a walk », çatım – qeyd olunmuş sərhədlə hissəciyin bu sərhədi ilk dəfə aşdıqdan sonra olduğu vəziyyəti arasındakı məsafədir. S_t, $t \geq 0$ – birölçülü *təsadüfi dolaşmanın* trayektoriyası və $f = f(t)$ – verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır (sərhəd). Onda təsadüfi dolaşmanın ekssesi

$$\chi_f = S_\eta - f(\eta)$$

təsadüfi kəmiyyəti kimi təyin olunur, burada $\eta = \eta_f = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq f(t)\}$ – sərhədi ilk aşma müddətidir (çatım müddətidir).

Düzxətli sərhədlər halı üçün və $S_0 = 0$, $S_1 = X_1, ...,$ $S_k = X_1 + ... + X_k$ təsadüfi dolaşması üçün dolaşma E. daha çox öyrənilmişdir, burada $X_1, ..., X_k$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\chi(x)$, $\eta(x)$, – $f(t) = x = \text{const}$ düzxətli sərhədi üçün χ_f, η_f təsadüfi kəmiyyətlərinin işarələri olsun. Onda $|z| < 1$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\mu < 0$ olduqda aşağıdakı münasibətlər doğrudur (bax, [1], [2]):

$$1 - \mathbf{M}(z^{\eta(0+)} e^{i\lambda\chi(0+)};\ \eta(0+) < \infty) = A_+(z, \lambda), \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{i\mu u}\, d_u\, \mathbf{M}(z^{\eta(u)} e^{i\lambda\chi(u)};\ \eta(u) < \infty) =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda - \mu}\left(1 - \frac{A_+(z, \lambda)}{A_+(z, \mu)}\right), \qquad (2)$$

burada

$$A_+(z, \lambda) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\, \mathbf{M}\left(e^{i\lambda S_k};\ S_k > 0\right)\right\},$$

əgər faktorizasiya funksiyasının müsbət komponenti $A(z, \lambda) = 1 - z\,\mathbf{M}e^{i\lambda X_1}$ olarsa (bax, *Faktorizasion eyniliklər*).

Əgər χ^* ilə $S_1, S_2, ...$ cəmlərindən ilk müsbət olmayan cəm, η^* ilə isə onun baş verdiyi an işarə olunarsa, onda (bax, [1], [2])

$$1 - z\mathbf{M}\, e^{i\lambda X_1} = (1 - \mathbf{M}(z^{\eta(0+)} e^{i\lambda\chi(0+)};\ \eta(0+) < \infty)) \times$$
$$\times (1 - \mathbf{M}(z^{\eta^*} e^{i\lambda\chi^*};\ \eta^* < \infty)) \qquad (3)$$

bərabərliyi doğrudur. İlk müsbət $\chi(0+)$ cəmi pillə boyu adlanır; $\eta(0+)$ *pillə anı* ilə $\chi(0+)$ birlikdə pillə cütü əmələ gətirir. (1) – (3) düsturlarından $\chi(x)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının əsas xassələrini müəyyən etmək olur. Dolaşma E. $\chi(x)$, yalnız və yalnız, o halda məxsusi təsadüfi kəmiyyətdir ki ($\eta(x) < \infty$ sanki yəqin),

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\, \mathbf{P}\{X_k > 0\}$$

dağılan sıra olsun; bu sıranın dağılması üçün $0 \leq \mathbf{M}X_1 \leq \infty$ şərtinin ödənilməsi kafidir (bax, [1]).

Elə A, B, C sabitləri vardır ki (bax, [4]), $t \geq 0$ üçün əgər $\mathbf{M}X_1^* > 0$ olarsa,

$$A\Psi(t) \leq \mathbf{P}\{\chi(0+) > t\} \leq B\Psi(t)$$

münasibəti; əgər $\mathbf{M}X_1 = 0$, $0 < \mathbf{D}X_1 < \infty$ olarsa,

$$A\,\Phi(t) + B\Psi(t) \leq \mathbf{P}\{\chi(0+) > t\} \leq C\Phi(t)$$

münasibəti ödənilir, burada

$$\Psi(t) = \mathbf{P}\{X_1 > t\}, \quad \Phi(t) = \int_t^\infty \Psi(u)\, du.$$

Əgər X_1-in paylanması arifmetik paylanma deyildirsə və $\mathbf{M}\chi(0+) < \infty$ olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda (bax, [1])

$$G(t) \equiv \lim_{u\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(u) < t\} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{M}\chi(0+)} \int_0^t \mathbf{P}\{\chi(0+) > x\}\, dx$$

limiti vardır. Bu limit arifmetik halda da, u səviyyəsi $\chi(0+)$ kəmiyyətinin paylanmasının şəbəkə addımına tam bölünən olaraq dəyişir. $G(t)$, – sonsuz uzaqlaşmış baryerə çatım kəmiyyəti $\chi(\infty)$-un paylanma funksiyası adlanır. $\mathbf{P}\{\eta(u) = n,\ \chi(u) < x\}$ ehtimalının $u = u(n) \to \infty$ olduğu halda asimptotikası öyrənilmişdir (bax, [3], [5]). İxtiyari $u \geq 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur (bax, [6], [10]):

$$\mathbf{M}\,\chi^k(u) \le \frac{k+2}{k+1}\,\mathbf{M}\left|X_1\right|^{k+1} \Big/ \mathbf{M}\,X_1, \qquad \text{əgər} \quad \mathbf{M}\,X_1 > 0,$$

$$\mathbf{M}\,\chi^k(u) \le \frac{k+2}{k+1}\,\mathbf{M}\left|X_1\right|^{k+2} \Big/ \mathbf{M}\,X_1^2, \quad \text{əgər} \quad \mathbf{M}\,X_1 \ge 0$$

olarsa,

burada A – mütləq konstantdır. Dolaşmanın E.-i əyrixətli sərhədlər halı (bax, [3], [13]), asılı olmayan artımlarlı proseslər (bax, [6], [7]), Markov zəncirləri (bax, [9]) üçün də öyrənilmişdir.

Dolaşma E. $\chi(u)$-nun $n \to \infty$ olduqda limit paylanması semi – Markov təsadüfi dolaşmaları üçün [8], [11], [12]-də öyrənilmişdir.

Dolaşma E. təsadüfi dolaşmalar üçün sərhəd məsələləri ilə bağlı araşdırmalarda mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; 1964, т. 5, № 2, с. 253–89; [4] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 3, с. 498–515; 1972, т. 17, в. 1, с. 143–47; [5] Нагаев А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 410–11; [6] Могульский А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 2, с. 350–57; 1976, т. 21, в. 3, с. 486–96; [7] Печерский Е. А., Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 3, с. 431–44; [8] Шуренков В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29 в. 2, с. 248–63; [9] Пресман Э. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 4, с. 861–900; [10] Lorden G., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 2, p. 520–27; [11] Kesten H., «Ann. Probab.», 1974, № 2, p. 355–86; [12] Jacod J., «Ann. Inst. H. Poincaré B», 1971, v. 7, № 2, p. 83–129; [13] Walk H., «Stoch. Proc. Appl.», 1989, v. 32, № 2, p. 289–304.

EKSSES(i) paylanmanın **« эксцесс** распределения; **excess** of a distribution **»** – *unimodal paylanmanın* sıxlığının qrafikinin moda ətrafında dikzirvəli və ya yastı olduğunu ifadə edən xarakteristikadır. E.-in ən çox istifadə olunan ölçüsü – *eksses əmsalıdır*. E.-in digər göstəriciləri də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Əgər E. əmsalı sıfra bərabər, müsbət və ya mənfi olarsa, paylanmanın E. uyğun olaraq normal, müsbət və ya mənfi olur. Paylanmanın E.-i müsbət (mənfi) olduqda, sıxlığın qrafiki moda ətrafında normal sıxlığın qrafiki ilə müqayisədə daha yüksək və şiş (uyğun olaraq daha alçaq və yastı) zirvəli olur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

EKSSES ƏMSALI « эксцесса коэффициент; coefficient of excess » – paylanma ekssesinin ən sadə, ən çox istifadə olunan ölçüsüdür və

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada μ_4 – dördüncü mərkəzi moment, σ^2 – paylanmanın dispersiyasıdır. Normal paylanma üçün $\gamma_2 = 0$. $\gamma_2 > 0$ olduqda eksses müsbət, $\gamma_2 < 0$ olduqda eksses mənfidir.

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{ns^4} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^4 - 3$$

kəmiyyətinə seçimi eksses əmsalı deyilir, burada $X_1, \ldots, X_n$ – eyni paylanma sıxlığına malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\overline{X}$ və s^2 – seçimi orta və seçimi dispersiyadır. Seçimi E. ə. $H_0 : \gamma_2 \ne 0$ hipotezinin yoxlanılması kriterilərində istifadə olunur ki, bu hipotezdə X_i təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının normal paylanmadan fərqliliyi alınır.

α – EKSSESSİV FUNKSİYA « α – эксцессивная функция; α – excessive function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

EKSSESSİV FUNKSİYA Markov zənciri üçün **« эксцессивная функция** для цепи Маркова; **excessive function** for a Markov chain **»** – klassik anlamda mənfi olmayan superharmonik funksiyanın analoqudur; ehtimali potensial nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zənciri üçün). $(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında, keçid ehtimalları $p(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ olan bircins Markov zəncirinin verildiyi fərz olunur. Əgər $0 \le f \le \infty$ şərtini ödəyən f funksiyası $\mathscr{B}$ – ölçülən funksiya və $\mathbf{P}f \le f$ münasibətini ödəyərsə,

$$\mathbf{P}f(\cdot) = \int_E f(y)\, p(\cdot, dy)$$

düsturu ilə təyin olunan f funksiyasına bu zəncir üçün eksessiv funksiya deyilir (məs., vəziyyətləri çoxluğu $1, 2, \ldots$ olan zəncir üçün $f \ge 0$ funksiyasını $f_i = f(i)$ qəbul edərək $\{f_1, f_2, \ldots\}$ ardıcıllığı ilə eyniləşdirmək olar; onda $\mathbf{P}f \le f$ bərabərsizliyi $\sum_j p_{ij} f_j \le f_i$, $i \ge 1$ bərabərsizliklər sisteminə gətirilir, burada p_{ij}, – i vəziyyətindən j vəziyyətinə bir addıma keçid ehtimalıdır).

E. f.-ya aid misallar: mənfi olmayan konstantlar və $\pi_\Gamma(x)$ və $\varphi_\Gamma(x)$ funksiyalarıdır, burada $\pi_\Gamma(x)$ (uyğun olaraq $\varphi_\Gamma(x)$) $x \in E$ vəziyyətindən çıxaraq $\Gamma \in \mathscr{B}$ çoxluğunda sonsuz dəfə (uyğun olaraq heç olmazsa bir dəfə) olma ehtimalıdır. Bu misallardan birinci ikisində E. f.-lar zəncir üçün harmonik funksiyalardır. $0 \le \upsilon \le \infty$ şərtini ödəyən, $\mathscr{B}$ – ölçülən ixtiyari υ funksiyasının potensialı $R\upsilon = \sum_{n \ge 0} \mathbf{P}^n \upsilon$ E. f.-ya aid bir misaldır. Qayıdışlı Markov zəncirləri üçün bütün E. f.-lar məhz konstantlardır.

İxtiyari E. f. f harmonik funksiya və hər hansı $\upsilon \ge 0$ funksiyasının potensialının cəmi kimi ifadə olunur və bu ayrılış (Riss ayrılışı) $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n f < \infty$ (bax, [2]) olduğu halda yeganədir.

Markov prosesləri üçün E. f. anlayışının tərifi çətin olur. Məs., E – metriklənən kompaktda Borel çoxluğu, $\mathscr{B}$ – onun bütün Borel altçoxluqlarının çoxluğu olsun. $(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, dy)$, $t \ge 0$, $x \in E$ ilə bircins Markov zəncirinin verildiyi fərz olunur. Əgər universal ölçülən f, $0 \le f \le \infty$ funksiyası (yəni $\mathscr{B}$-nin tamamlanmasına nəzərən $\mathscr{B}$-də ixtiyari sonlu ölçüyə nəzərən ölçülən funksiya) bütün $t \ge 0$ üçün $\mathbf{P}_t f \le f$ və

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathbf{P}_t f = f$$

şərtlərini ödəyərsə,

$$\mathbf{P}_t f(\cdot) = \int_E f(y)\, p(t, \cdot, dy)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan f funksiyasına bu proses üçün E. f. deyilir.

Əd.: [1] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., M., 1997; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potential, Ch. IX–XI: Théorie discrète du potentiel, P., 1983.

EKSSESSİV FUNKSİYA Viner prosesinin hissəsi üçün « **эксцессивная функция** для части винеровского процесса; **excessive function** for a part of the Wiener process » – bax, *Viner prosesi*; prosesin hissəsinin eksessiv funksiyaları.

α – EKSSESSİV ÖLÇÜ « **α – эксцессивная мера; α – excessive measure** » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

EKSSESSİV ÖLÇÜ Markov zənciri üçün « **эксцессивная мера** для цепи Маркова; **excessive measure** for a Markov chain » – *ekssessiv funksiya* anlayışına ikili anlayışdır. $(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında keçid ehtimalları $p(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ olan bircins Markov zəncirinə baxıldığı fərz olunur. Əgər $\mathscr{B}$-də verilmiş μ ölçüsü σ – sonlu və $\mu\mathbf{P} \le \mu$ olarsa,

$$\mu\mathbf{P}(\cdot) \equiv \int_E p(x, \cdot)\, \mu(dx)$$

eyniliyi ilə təyin olunan μ ölçüsünə bu zəncir üçün ekssessiv ölçü deyilir (məs., vəziyyətləri çoxluğu $1, 2, \ldots$ olan Markov zənciri üçün μ ölçüsünü $\mu_i = \mu(\{i\})$ qəbul edərək, $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ ardıcıllığı ilə eyniləşdirmək olar, onda $\mu\mathbf{P} \le \mu$ bərabərsizliyi $\sum_{i \ge 1} p_{ij}\, \mu_i \le \mu_j$, $j \ge 1$ bərabərsizliyinə çevrilir, burada p_{ij}, – i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalıdır).

Zəncirin ixtiyari stasionar paylanması E. ö. təyin edir.

Markov prosesləri və qeyri – bircins zəncirlər halında E. ö.-nün tərifi çətinləşir. Məs., $(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verilən və keçid funksiyası $p(t, x, dy)$, $t \ge 0$, $x \in E$ olan bircins Markov zənciri üçün E. ö. kimi $\mathscr{B}$ σ – cəbrində və ya onun hər hansı genişlənməsində təyin olunmuş, $\mu\mathbf{P}_t \le \mu$, $t \ge 0$ və $t \downarrow 0$ olduqda $\mu\mathbf{P}_t \to \mu$ şərtini ödəyən

$$\mu\mathbf{P}_t(\cdot) = \int_E p(t, x, \cdot)\, \mu(dx)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan σ – sonlu μ ölçüsü anlaşılır.

Bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

Əd.: [1] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., M., 1997; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel, Ch. IX–XI: Théorie discrète du potentiel, P., 1983.

EKSTRAPOLYASİYA(sı) təsadüfi proseslərin « **экстраполяция** случайных процессов; **extrapolation** of a random process » – bax, *Təsadüfi proses*; proqnozlanma, ekstrapolyasiya.

EKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « экстремальных экспериментов планирование; design of extremal experiments » – reqressiya funksiyası $\mathbf{M}y(x)$-in lokal ekstremumunun axtarılması üçün aparılacaq eksperimentlərin şərtlərinin seçilməsidir; $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Bu halda eksperiment təsadüfi $y(x)$ meydanının qiymətinin hesablanmasından ibarətdir. E. e. p. alqoritmlərinin ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma_k s_k, \qquad (*)$$

burada $k \ge 0$ – iterasiyanın nömrəsi, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ – addımların uzunluğu adlanan mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətlər; $s_0, s_1, \ldots$, – n – ölçülü təsadüfi vektorlar (hərəkətlərin istiqamətləri); $x^{(0)} \in X$ başlanğıc yaxınlaşmadır. (*) nöqtələri ardıcıllığının $g(x) = \mathbf{M}y(x)$ reqressiya funksiyasının lokal ekstremum nöqtəsinə yığılması və yığılma sürətinin araşdırılması üçün stoxastik approksimasiya və adaptiv idarəetmə nəzəriyyələrinin nəticələri istifadə oluna bilinər (bax, [1]).

E. e. p. alqoritmlərinin keyfiyyəti, adətən, asimptotik deyil, lokal (biraddımlı) xassələrlə xarakterizə olunur.

E. e. p. alqoritmlərində, adətən, aşağıdakılar nəzərə alınır:

1) eksperimental verilənlərin statistik analizinin təkrar-təkrar aparılması (eyni zamanda reqressiya funksiyasının xətti və ya kvadratik modelinin qurulması üçün xətti reqression analizin aparılması);

2) alqoritmin hər bir iterasiyasında eksperimentin planının spesifik olaraq seçilməsi (planın seçilməsi üçün kriterilər: ortoqonallıq, rotabellik, kompozisionluq, müxtəlif mənalarda $D-$, $Q-$, $A-$ optimallıq və s. kimi kriterilər nəzərdə tutulur). (bax, [1] – [3] və *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*);

3) qurulmuş reqression modellərə və xüsusi optimallıq kriterilərinə uyğun hərəkət istiqamətinin seçilməsi (hərəkət istiqaməti – verilmiş nöqtədə reqressiya funksiyasının qradiyentinin statistik qiymətidir; bax, [2], [3]);

4) seçilmiş istiqamət üzrə aparılmış bir neçə ölçmədən sonra addımın uzunluğunun təsadüfi kəmiyyət kimi seçilməsi (bax, [2] – [4]). E. e. p. üçün alqoritmlərdən ən çox istifadə olunanı simpleks metod (bax, [2], [3], [6]) və dik yüksəliş metodudur (bax, [2] – [5]).

Simpleks metodun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, $k > n$ qiymətlərində $x^{(k)}$ nöqtələri təpələri $x^{(0)}, \ldots, x^{(k-1)}$ nöqtələrindən bəziləri olan çoxüzlünün bu çoxüzlünün hər hansı bir üzünə nəzərən inikasından alınır. Simpleks metodun sadə variantı 20-ci əsrin 60-cı illərində təklif olunmuş ardıcıl simpleks metodudur. Bu metodda requlyar simplekslərin [yəni $(n+1)$ təpəli düzgün çoxüzlülərin] $y(x^{(i)})$ təsadüfi kəmiyyətinin ən əlverişsiz (minimum axtarılarsa, ən böyük; maksimum axtarılarsa, ən kiçik) qiymətlərinə bərabər uyğun təpələrə qarşı üzlərə görə güzgü əksolunmasından istifadə olunur.

Simplekslərin ölçüləri addımın nömrəsi artdıqca, adətən, azaldılır, belə ki, bu ölçülər sabit qaldıqda axtarışın əvvəlində hərəkətin yüksək sürəti və sonda ekstremumun tapılması dəqiqliyini eyni zamanda təyin etmək mümkün olmur.

Maksimum axtarışı üçün dik yüksəliş metodunun standart variantının mahiyyəti aşağıdakı kimidir.

$x^{(k)}$ nöqtəsindən s_k hərəkət istiqamətini seçmək məqsədilə N sayda ölçmə seriyası $(N > n)$ aparılır [yəni X çoxluğunun xüsusi qaydada təyin olunmuş nöqtələrində $y(x)$ təsadüfi meydanının qiymətləri hesablanır]. Ölçmələrin aparıldığı nöqtələr $x^{(k)}$-nın elə kiçik ətrafında tapılır ki, bu ətrafda reqressiya funksiyası $\eta(x)$-in x-dən xətti asılılığı təxminən ödənilir. Xətti reqressiyanın parametrləri (o cümlədən, $\nabla\eta(x^{(k)})$ qradiyentinin komponentləri) ən kiçik kvadratlar metodu ilə qiymətləndirilir. Əgər reqressiya funksiyasının statistik qiyməti sabitdən olduqca fərqlənirsə, onda bu statistik qiymət s_k kimi götürülür, əks halda əlavə ölçmələr aparılır və reqressiya funksiyası üçün x-ə görə kvadratik modelin parametrləri qiymətləndirilir. Bu halda $x^{(k+1)}$ kimi kvadratik reqressiyanın statistik qiymətinin ekstremum nöqtəsi götürülür. $\nabla x^{(k)}$ – qradiyentinin statistik qiyməti istiqamətindəki addımın uzunluğu γ_k-nı təyin etmək üçün qeyd olunmuş istiqamətdə bir-birindən eyni məsafədə yerləşən $\{z_j\}$, $j = 1, 2, ...$ nöqtələr ardıcıllığı seçilir və $y(z_j)$, $j = 1, 2, ...$ kəmiyyətləri o vaxta qədər hesablanılır ki, $y(z_j) < y(z_{j-1})$ bərabərsizliyi ödənilsin; bu halda $x^{(k+1)} = z_j$ qəbul olunur. Addımın uzunluğu və hərəkət istiqamətlərinin seçilməsi üçün müxtəlif üsullar da mümkündür.

Əgər ölçmələrin aparılması üçün ya 2^n sayda tam faktor plan [yəni ölçmələr $x^{(k)} + (\pm a_1, \pm a_2, ..., \pm a_n)^{\mathrm{T}}$ tipli 2^n sayda nöqtədə aparılır] seçilərsə və ya bu plandan kəsri replikalar seçilərsə, onda dik yüksəliş metodu – Boks – Uilson metodu adlanır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983; [2] Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, M., 1987; [3] Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экспериментальных экспериментов, M., 1965; [4] Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В., Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий, 2 изд., M., 1976; [5] Дамбраускас А. П., Симплексный поиск, M., 1979.

EKSTREMAL QİYMƏTLƏR PAYLANMASI « экстремальных значений распределение; distribution of extreme values » – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusunda ən böyük $\xi_{(nn)}$ və ya ən kiçik $\xi_{(1n)}$ qiymətinin paylanmasıdır; bu paylanma *qaydalı statistikalar* paylanmasının xüsusi halıdır.

Əgər ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ məlumdursa, onda

$$F_{nn}(x) = \mathbf{P}\{\xi_{(nn)} < x\} = F^n(x),$$

$$F_{1n}(x) = \mathbf{P}\{\xi_{(1n)} < x\} = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Ekstremal qiymətlərin medianları – $\overline{m} = m(\xi_{(nn)})$ və $\underline{m} = m(\xi_{(1n)})$ xarakteristikalarını $F(\overline{m}) = 1 - F(\underline{m}) = 1/2^n$ tənliyindən tapmaq olur. E. q. p.-nın mühüm xarakteristikaları xarakteristik ekstremumlar: $F(u_n) = 1 - 1/n$ tənliyindən təyin olunan xarakteristik ən böyük qiymət – u_n və $nF(u_1) = 1$ tənliyindən təyin olunan xarakteristik ən kiçik qiymət – u-dur.

u_n-dən kiçik olmayan $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin orta sayı u_1-dən böyük olmayan kəmiyyətlərin orta sayı ilə üst-üstə düşür və 1-ə bərabərdir. Xarakteristik ekstremumlar uyğun olaraq ilkin paylanmanın $(n-1)/n$ və $1/n$ tərtibli kvantilləri ilə üst-üstə düşür. Bu xarakteristikalar müşahidələrin ekstremal nəticələrinin qəbul edilib-edilməməsi üçün Şovene kriterisinin əsasını təşkil edir (bax, [1]).

$\xi_1^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}$ ümumi paylanma funksiyası $F^{(n)}(x)$ olan və özünün ən böyük xarakteristik qiyməti ilə mərkəzlənmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun, yəni $F^{(n)}(0) = 1 - 1/n$. Onda $\lim\limits_{n\to\infty} (F^{(n)}(x))^n = \varphi(x) = \exp(e^{-ax})$ münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(y/an)) = e^{-y}$$

şərti zəruri və kafidir, burada $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $F^{(n)}(1/a_n) = 1 - 1/ne$ (bax, [2]);

$$\lim_{n\to\infty} (F^{(n)}(x))^n = \Phi(x) = \begin{cases} \exp(-r/(x+r))^k, & x \geq -r, \\ 0, & x < -r \end{cases}$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F^{(n)}(x)}{1 - F^{(n)}(cx)} = c^k,$$

$$\inf\{x: F^{(n)}(x) > 0\} = -r < \infty;$$

şərti zəruri və kafidir, burada $c > 0$, $k > 0$;

$$\lim_{n\to\infty} (F^{(n)}(x))^n = \Psi(x) =$$

$$= \begin{cases} \exp(-((w-x)/w)^k), & x \leq w, \\ 1, & x > w \end{cases}$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{x\to -0} \frac{1 - F^{(n)}(cx + w)}{1 - F^{(n)}(x + w)} = c^k,$$

$$\sup\{x: F^{(n)}(x) < 1\} = w > 0$$

şərti zəruri və kafidir, burada $c > 0$, $k > 0$.

$\Delta(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ – limit paylanma funksiyaları bütün mümkün olan halları əhatə edir.

$$F_{(nn)}(x) = 1 - F_{(1n)}(-x)$$

olduğuna əsasən, alınmış nəticələrdən ən kiçik qiymət üçün limit teoremlərini almaq olur.

Əd.: [1] Г у м б е л ь Э., Статистика экстремальных значений, пер. с англ., М., 1965; [2] G n e d e n k o B., «Ann. Math.», v. 44, № 3, p. 423–53.

EKSTREMAL STATİSTİK MƏSƏLƏ « экстремальная статистическая задача; extremal statistical problem » – $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathfrak{X}$, $y \in Y$, $f_n : \mathfrak{X}^n \times Y \to \mathbb{R}^1$ olduqda, $X_1, X_2, ..., X_n$ seçiminin elementləri və y parametrinin funksiyası f_n-i minimallaşdıran $y(f_n) \in Y$ parametrinin qiymətinin, yəni

$$y(f_n) = \arg \min_{y \in Y} f_n(X_1, X_2, ..., X_n; y)$$

kəmiyyətinin tapılması məsələsidir.

Tətbiqi statistikanın bir çox məsələləri, xüsusi halda K. Qaussun (C. Gauss, 1795) adı ilə bağlı ən kiçik kvadratlar metodu E. s. m.-lərə gətirir. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin statistikasında E. s. m. mühüm rola oynayır.

E. s. m.-lərin asimptotik halları müəyyən olunmuşdur.

Əd.: [1] О р л о в А. И., в кн.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях, М., 1982, с. 4–12.

EKVİVALENT ADDİTİV FUNKSİONALLAR « эквивалентные аддитивные функционалы; equivalent additive functionals » – bax, *Markov prosesi*; a d d i t i v f u n k s i o n a l.

EKVİVALENT BÖLGÜLƏR « эквивалентные разбиения; equivalent partitions » – bax, *Ölçülən bölgü.*

EKVİVALENT ÖLÇÜLƏR « эквивалентные меры; equivalent measures » – eyni bir spektral tipə aid (Hellinger tipinə) *ölçülərdir.* Daha dəqiq, E – əsas bazis fəza, S, – E-nin hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr (hər hansı σ – halqa) və $\mathcal{M}$, – S-də təyin olunmuş bütün mümkün ölçülər sinfi olsun. $\mathcal{M}$-də $\mu \equiv \lambda$ binar münasibətinə baxılır, bu münasibət belə anlaşılır; μ və λ ölçülərindən hər biri digərinə nəzərən mütləq kəsilməzdir (yəni $\mu << \lambda$ və $\lambda << \mu$). Bu münasibət $\mathcal{M}$-də ekvivalentlik münasibətidir və deməli, $\mathcal{M}$ sinfi bu münasibətlə bir-birilə kəsişməyən boş olmayan altsiniflərə ayrılır; bunlar bu altsiniflərə daxil olan ölçülərin s p e k t r a l t i p l ə r i adlanır. σ – sonlu μ və λ ölçüləri üçün $\mu \equiv \lambda$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\mu << \lambda$ olsun və

$$\left\{ x \in E : \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = 0 \right\}$$

çoxluğunun μ – ölçüsü sıfra bərabər olsun. Verilən spektral tipdə bu tipin hər hansı kanonik ifadəsinin seçilib ayırd olunması məsələsinə olduqca tez-tez baxılır. Məs., eyniliklə sıfra bərabər olmayan ixtiyari σ – sonlu ölçü elə ehtimal ölçüsünə ekvivalentdir ki, bu ölçü ilə əməliyyat aparmaq asan olur. Bir ölçüdən digər ona ekvivalent ölçüyə keçmək əvvəlki ölçünün bir çox xassələrini özündə saxlayır, lakin bu zaman bir sıra mühüm xassələr pozula bilinər. Məs., həqiqi ədəd oxu $\mathbb{R}^1$-də verilən klassik σ – sonlu Lebeq ölçüsündən ona ekvivalent hər hansı ehtimal ölçüsünə keçdikdə Lebeq ölçüsünün $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunda bütün izometrik çevirmələri qrupuna nəzərən invariantlıq xassəsi ödənilmir (itir). Bu halda alınan ehtimal ölçüsü qeyd olunan qrupa nəzərən kvazi – invariantlıq xassəsinə malik olur ki, bu xassə invariantlıq xassəsilə müqayisədə olduqca zəifdir.

Qeyd olunmuş spektral tipin bütün ölçülərinə xas olan ixtiyari xassə, adətən, bu tipin öz xassəsi kimi anlaşılır.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

***EKVİVALENT TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « эквивалентные случайные величины; equivalent random variables »** – $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş və

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 0$$

münasibətini ödəyən $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinə deyilir. $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ E. t. k.-lərdirsə, onda

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \mathbf{P}\{\omega : \eta(\omega) < x\} = F_\eta(x)$$

münasibəti bütün x-lər üçün ödənilir ($x \in \mathbb{R}^1$). $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni paylanma funksiyasına malik olması simvolik olaraq $\xi \overset{d}{=} \eta$ kimi işarə olunur. $\xi \overset{d}{=} \eta$ olarsa, $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin E. t. k. olduğunu hökm etmək olmaz.

Misal. 1) $\xi(\omega)$ – mütləq kəsilməz və 0-a nəzərən simmetrik paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olsun, yəni $\xi(\omega)$-nın paylanmasının sıxlıq funksiyası bütün x-lər ($x \in \mathbb{R}^1$) üçün $p(-x) = p(x)$ bərabərliyini ödəyir. $\eta(\omega) = -\xi(\omega)$ olsun. $\xi(\omega)$ simmetrik təsadüfi kəmiyyət olduğundan aydındır ki, $F_\xi = F_\eta$, yəni $\xi \overset{d}{=} \eta$. $\xi(\omega)$ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduğundan bu təsadüfi kəmiyyətin hər bir x qiymətini alması ehtimalı sıfırdır: $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} = 0$. Beləliklə,

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\} = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = -\xi(\omega)\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = 0$$

deməli, $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğuna baxmayaraq onlar E. t. k. deyildirlər.

2) $\xi(\omega)$ – diskret, 0-a nəzərən simmetrik təsadüfi kəmiyyət və $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} < 1$ olsun (əgər $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = 1$ olarsa, bu trivial haldır). Onda $\xi(\omega)$-nın sonlu və ya hesabi ədədi $\{..., -x_2, -x_1, x_0 = 0, x_1, x_2, ...\}$ çoxluğunda

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}\{\xi(\omega) = 0\},$$

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{P}\{\xi(\omega) = x_j\} = \mathbf{P}\{\xi(\omega) = -x_j\}, \quad j = 1, 2, ...$$

ehtimalları ilə qiymətlər aldığını fərz etmək olar; $0 < x_1 < x_2 < ...$ və

$$\mathbf{P}_0 + 2\sum_j \mathbf{P}_j = 1.$$

$\eta(\omega) = -\xi(\omega)$ olsun. Onda aydındır ki, $\xi \overset{d}{=} \eta$, lakin $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} > 0$, yəni $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ E. t. k. deyildir.

3) ξ, η, γ eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\xi \overset{d}{=} \eta \not\Rightarrow \xi\gamma \overset{d}{=} \eta\gamma$. $\xi \overset{d}{=} \eta$ və $g(x)$ funksiyası $(x \in \mathbb{R}^1)$ $\mathscr{B}^1$ – ölçülən funksiya olarsa, onda $g(\xi)$ və $g(\eta)$ funksiyaları da təsadüfi kəmiyyətlərdir və $g(\xi) \overset{d}{=} g(\eta)$. Onda bu fakt $\xi \overset{d}{=} \eta \Rightarrow \xi\gamma \overset{d}{=} \eta\gamma$ hipotezinin ixtiyari γ təsadüfi kəmiyyəti üçün irəli sürülməsinə səbəb ola bilər.

Ümumi halda belə hipotezin əsassız olduğu subut edilir.

ξ simmetrik təsadüfi kəmiyyət (bax, mis. 1) və $\eta = -\xi$; $\gamma = \eta$, yəni $\gamma = -\xi$ olsun. Onda $\xi\gamma = -\xi^2$, $\eta\gamma = \xi^2$ olur. Beləliklə, $\xi\gamma$ təsadüfi kəmiyyəti müsbət olmayan qiymətlər aldığı halda, $\eta\gamma$ mənfi olmayan qiymətlər alır. Deməli, $\xi\gamma \overset{d}{=} \eta\gamma$ bərabərliyini yazmaq olmaz. $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1$ isə trivial hal kimi maraq doğurmur.

Əd.: [1] С т о я н о в Й., Контрпримеры в теории вероятностей. М., 1999; [2] Л о э в М., Теория вероятностей. М., 1962.

EKVİVALENT YIĞILAN ARDICILLIQLARI, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « эквивалентно – сходящиеся последовательности случайных величин; equivalently conversing sequence of random variables » – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət.*

EKVİVALENT YÜKLƏR « эквивалентные заряды; equivalent charges » – bax, *Mütləq kəsilməzliyi, ölçülərin.*

EKVİVARİANT STATİSTİK QİYMƏT « эквивариантная оценка; equivariant estimator » – parametri qiymətləndirmə məsələsinin qrup strukturunu dəyişməyən *statistik qiymətdir.* $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ – ölçülən $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ fəzasında ehtimal ölçüləri ailəsi, G, – $\mathfrak{X}$-də elə çevirmələr qrupu olsun ki, $g\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ və $g\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ bərabərlikləri bütün $g \in G$ üçün ödənilsin; Θ-da çevirmələr qrupu $\overline{G}$, – $\mathbf{P}_\theta(A) = \mathbf{P}_{\bar{g}\theta}(gA)$ eyniliyilə bütün $A \in \mathfrak{A}$ və $g \in G$-lər üçün ödənilərək təyin olunur.

Əgər $\hat{\theta}(gX) = \bar{g}\hat{\theta}(X)$ bütün $g \in G$-lər üçün ödənilərsə, θ parametrinin statistik qiyməti $\hat{\theta}(X)$ G q r u p u n a n ə z ə r ə n e k v i v a l e n t s t a t i s t i k q i y m ə t adlanır, burada X – qiymətləri $\mathfrak{X}$-dən olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Ekvivariant qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin ən mühüm nəticələri G-yə nəzərən invariant itki funksiyası L olduğu hala, yəni bütün $\bar{g} \in G$-lər üçün $L(\theta, \hat{\theta}) = L(\bar{g}\theta, \bar{g}\hat{\theta})$ olduğu hala aiddir. Bəzən «E. s. q.» termini əvəzinə «d ü z g ü n s t a t i s t i k q i y m ə t» termini də istifadə olunur.

Əd.: [1] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

ELAYZİNQ « элайзинг; aliasing » – bax, *Tezliklərin üst-üstə düşməsi / Tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzinq*.

ELEMENTAR ÇOXLUQ « элементарное множество; elementary set » – bax, *Hasil*(i) ö l ç ü l ə r i n.

ELEMENTAR EHTİMAL « элементарная вероятность; elementary probability » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*.

ELEMENTAR HADİSƏ « элементарное событие; elementary event » – ehtimal modelinin ilkin anlayışıdır. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının tərifində boş olmayan Ω çoxluğu elementar hadisələr fəzası, bu çoxluğun ixtiyari $\omega \in \Omega$ nöqtəsi – e l e m e n t a r h a d i s ə adlanır. Qeyri – formal yanaşmada Ω çoxluğu hər hansı *stoxastik eksperimentin* bütün mümkün olan, bir-birini inkar edən, ayrılmayan nəticələri çoxluğunu təsvir edir və ω – E. h. elementar nəticəyə uyğundur: eksperiment, yalnız və yalnız, bir elementar nəticə ilə sona çatır, Ω çoxluğunun nöqtəsi ω E. h. və $\mathscr{A}$ çoxluqlar sinfinin elementi $\{\omega\}$ hadisəsi arasında prinsipial fərq vardır.

Bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*, *Ehtimal fəzası*, *Təsadüfi hadisə*, *Cəbri*, *hadisələrin*.

ELEMENTAR HADİSƏLƏR FƏZASI « элементарных событий пространство; space of elementary events » – bax, *Fəzası*, *ölçülərin*

ELEMENTAR ÖLÇÜ « элементарная мера; elementary measure » – heç olmasa bir elementar hissəyə (erqodik komponentə) malik, kvaziinvariant (invariant) *ölçüdür.*

(X, G, S, μ) – kvaziinvariant (invariant) ölçülü fəza olsun, başqa sözlə, X – əsas bazis çoxluq, G – bu çoxluğun çevirmələrinin hər hansı qrupu, S, – X çoxluğunun hissələrinin hər hansı G – kvaziinvariant σ – halqası və μ, – S σ – halqasında verilən hər hansı G – kvaziinvariant (G – invariant) ölçü olsun. Daha sonra, Y, – X-də sanki G – invariant (μ-yə nəzərən) ixtiyari μ – ölçülən çoxluq olsun. Onda

$$\mu_Y(Z) = \mu(Z \cap Y), \qquad Z \in S$$

bərabərliyi ilə təyin olunan μ_Y funksiyası, S σ – halqasında G – kvaziinvariant (G – invariant) ölçüdür. Bu ölçü μ ölçüsünün Y çoxluğuna uyğun hissəsi (komponent hissəsi) adlanır. μ ölçüsünün hissəsi μ_Y trivial olmazsa (yəni eynilik kimi sıfra bərabər olmazsa) və erqodik olarsa (yəni metrik tranzitivlik xassəsinə malik olarsa), onda μ_Y e l e m e n t a r ö l ç ü adlanır. Erqodiklik xassəsi belə anlaşılır: əgər ixtiyari μ – ölçülən $Z \subset Y$ çoxluğu və ixtiyari g üçün $g \in G \Rightarrow \mu(g(Z) \Delta Z) = 0$ münasibəti $\mu(Z) = 0 \vee \mu(Y \setminus Z) = 0$ dizyunksiyasını doğurarsa, μ erqodik xassəyə malikdir, deyilir.

Praktikada əsas etibarilə elementar kvaziinvariant (invariant) ölçülərə təsadüf olunur. Lakin elementar olmayan invariant ölçülər vardır. Bundan başqa, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Evklid fəzasında bu fəzanın bütün hərəkətləri qrupuna invariant, $\mathbb{R}^n$-də klassik Lebeq ölçüsünün davamı olan, lakin elementar olmayan ölçü qurmaq olur.

Əd.: [1] Х а р а з ш и в и л и А. Б., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983.

ELFİNQ EKVİVALENTLİK TEOREMİ « Элфинга теорема эквивалентности; Elfing equivalence theorem » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

ELLİPTİK QANUN « эллиптический закон; elliptic law » – n – tərtib $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|$ təsadüfi matrislərinin normalanmış *spektral funksiyaları* üçün limit qanunudur; bu matrisin vektorları (ξ_{ij}, ξ_{ji}), $i \geq j$, $i, j = 1, ..., n$ asılı olmayan təsadüfi vektorlar fərz olunur. Fərz olunur ki, $n = 1, 2, ...$ qiymətlərinin hər birində (ξ_{ij}, ξ_{ji}), $i \geq j$, $i, j = 1, ..., n$ eyni ehtimal fəzasında verilmiş stoxastik asılı olmayan təsadüfi vektorlardır və bu matrisin elementləri üçün

$$\mathbf{M}\xi_{ij} = 0, \quad \mathbf{M}\left|\xi_{ij}\right|^2 = n^{-1}, \quad \mathbf{M}\xi_{ij}\xi_{ji} = n^{-1}\rho,$$

$$i \neq j, \quad 0 < \left|\rho\right| < 1$$

şərtləri ödənilir, $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ təsadüfi matrisinin təsadüfi elementləri ξ_{ij}, ξ_{ji} -lərin xəyali və həqiqi hissələrinin ikiölçülü ehtimal sıxlıqları $p_{ij}(x_s)$, $s = 1, ..., 4$ mövcuddur, hər hansı $\beta > 1$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,...,n} \int \rho_{ij}^{\beta}(x_s) \prod_{s=1}^{4} dx_s < \infty, \quad s = 1, ..., 4,$$

hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,\, j=1,\ldots,n} \mathbf{M}\left| \xi_{ij}\sqrt{n} \right|^{2+\delta} < \infty$$

şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari x və y üçün

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(x, y) = \lambda(x, y)$$

münasibəti 1 ehtimalla ödənilir, burada

$$\nu_n(x, y) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} F(\operatorname{Re}\lambda_k - x)\, F(\operatorname{Im}\lambda_k - y),$$

$y < 0$ olduqda $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda $F(y) = 0$, λ_k, – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləridir, $\lambda(x, y)$ – elliptik paylanma qanunudur və onun sıxlığı

$$p(x, y) = \pi^{-1}[1 - (a^2 + b^2)^2]^{-1}$$

düsturu ilə ifadə olunur, bu şərtlə ki, x və y dəyişənləri

$$(bx - ay)^2(1 - a^2 + b^2)^{-2} +$$
$$+ (ax + by)^2(1 + a^2 + b^2)^{-2} < a^2 + b^2$$

bərabərsizliyini ödəsinlər,

$$a = \operatorname{Re}\sqrt{\rho}, \quad b = \operatorname{Im}\sqrt{\rho}.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–104.

ELLİPTİK TƏNLİK; Monte–Karlo metodu ilə həll **« эллиптическое уравнение;** решение методом Монте–Карло; Monte–Carlo solution method for an **elliptic equation »** – sərhəd məsələsinin həlli $u(\cdot)$ -nun şərti riyazi gözləmə şəklində, yəni $u(x) = \mathbf{M}_x F(W)$ ifadəsinə əsaslanan, *Monte – Karlo metodunun* alqoritmlərinin toplusudur, burada W – müvafiq təsadüfi prosesin x nöqtəsindən başlayan təsadüfi trayektoriyası, F – bu trayektoriyanın funksionalıdır. Məs., $\Delta u(x) = 0$, $x \in G$ Laplas tənliyi üçün; $u(x)|_{\partial G} = \varphi(x)$ Dirixle məsələsi üçün; $W(t)$ Braun hərəkəti prosesinin trayektoriyası olacaqdır, $F(W) = \varphi(W(\tau))$, burada τ – trayektoriyanın ∂G üzərinə ilk çıxış anıdır. Oxşar ifadələr Laplas, Puasson, Helmholts, bi, poli-, və metaharmonik və həm də istilikkeçirmə tənliklərinin müxtəlif sərhəd məsələsi üçün doğrudur. Hesablamalarda Braun hərəkəti təqribi olaraq şəbəkə üzrə dolaşma ilə əvəz oluna bilinər (bu da məsələnin fərqlər metodu ilə həllinə gətirir). *Sferalar üzrə dolaşma metodu* daha effektiv sayılır, bu metodla $F(W)$ -nin hesablanmasında trayektoriyanın əhəmiyyətsiz hissələrini nəzərə almamaq olur. Oblastın sərhədində dolaşma alqoritmləri də işlənilmişdir, bunlar da potensial nəzəriyyəsi və elastiklik nəzəriyyəsi məsələlərinin həllində çox münasib sayılır (bax, [6]). İkinci tərtib ümumi elliptik tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həlli metodları diffuzion proseslərin statistik modelləşdirilməsi əsasında qurulmuşdur. Elliptik tənliklərin həlli üçün Monte – Karlo metodunun xüsusi cəhəti – həllin axtarılan funksionallarının hesablanmasının mümkünlüyüdür, məs., həll və onun qeyd olunmuş nöqtədə törəmələri kimi funksionalın və bu halda həllin statistik qiymətinin detalları ilə qurulması tələb olunmur.

Əd.: [1] Елепов Б. С., [и др.], Решение краевых задач методом Монте – Карло, Новосиб., 1980; [2] Ермаков С. М., Некрутkин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [3] Браун Д ж., в кн.: Современная математика для инженеров, пер. с англ., М., 1959, с. 275–301; [4] Muller M., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 569–89; [5] Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К., Ченцов Н. Н., в кн.: Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования, Новосиб., 1982, с. 69–82; [6] Сабельфельд К. К., Симонов Н. А., «Докл. АН СССР», 1984, т. 275, № 4, с. 802–05.

EMİQRASİYA şaxələnən prosesdə **« эмиграция** в ветвящемся процессе; **emigration** in branching process **»** – bax, *Şaxələnən proses*, emiqrasiyalı.

EMPİRİK BEYES HƏLLEDİCİ FUNKSİYASI « эмпирическая бейесовская решающая функция; empirical Bayesian decision function / rule » – bax, *Beyes yanaşması* empirik.

EMPİRİK BEYES STATİSTİK QİYMƏTİ « эмпирическая бейесовская оценка; empirical Bayesian estimator » – empirik *Beyes yanaşması* çərçivəsində *statistik qiymətdir*, yəni baxılan (cari) eksperimentin nəticələrindən asılı olduğu kimi, qiymətləndirilən parametrin aprior paylanması haqqında informasiya daşıyan əvvəl aparılmış araşdırmaların da nəticələrindən asılı olan *həlledici funksiyadır.*

Misal. $f(x, \theta) = \theta^x e^{-\theta}/x!$, $x = 0, 1, ...$ Puasson paylanmasının θ parametrinin *Beyes statistik qiyməti*, kvadratik itki funksiyası verildiyi halda, bir müşahidə üzrə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\theta_G(x) = \frac{(x + 1)\, f_G(x + 1)}{f_G(x)},$$

burada x – müşahidələrin nəticəsidir,

$$f_G(y) = \int_0^\infty f(y,\ \theta)\ G(\alpha\theta),$$

G – aprior paylanmadır. Fərz olunur ki, G naməlumdur, lakin əvvəlki k sayda eksperimentlərdən analoji müşahidələrin seriyası $x_1, ..., x_k$ statistikə məlumdur və bu seriyanı müşahidələrin $f_G(\cdot)$ şərtsiz paylanmaya malik seçimdən olduğu kimi izah etmək olar. Bu halda $k \to \infty$ olduqda $f_G(x+1)$ və $f_G(x)$ tutarlı statistik qiymətlərini təklif etmək olar (məs., $\hat{f}_G(y)$-i $x_1, ..., x_k$ sırasında y nəticələrinin sayına bərabər götürərək).

$$\hat{\theta}_G(x) = (x+1)\ \hat{f}_G(x+1) \big/ \hat{f}_G(x)$$

– E. B. s. q. sanki hər yerdə Beyes statistik qiymətinə yığılır və beləliklə, $k \to \infty$ olduqda $\theta_G(x)$ Beyes statistik qiymətinin tutarlı statistik qiymətidir; E. B. s. q. ilə qurulmuş risk Beyes riskinə yığılır.

Əd.: [1] Роббинс Г., «Математика», 1966, т. 10, в. 5, с. 122–40; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

EMPİRİK BEYES YANAŞMASI « эмпирический бейесовский подход; empirical Bayesian approach » – bax, *Beyes yanaşması* empirik.

EMPİRİK KOVARİASİON MATRİS « эмпирическая ковариационная матрица; empirical covariance matrix » – bax, *Təsadüfi matris.*

EMPİRİK MOMENT « эмпирический момент; empirical moment » – bax, *Empirik paylanma.*

EMPİRİK ORTA QİYMƏT (i) təsadüfi çoxluğun **« эмпирическое среднее значение** случайного множества; **empirical mean value** of a random set **»** – bax, *Orta qiymət* (i) təsadüfi çoxluğun.

EMPİRİK ORTOQONAL FUNKSİYALAR « эмпирические ортогональные функции; empirical orthogonal functions », – $X(\mathbf{r})$ təsadüfi meydanının empirik ortoqonal funksiyaları, – meydanın hansısa qeyd olunmuş N sayda nöqtəsində $x(\mathbf{r}_k)$, $k = 1, ..., N$ qiymətlərinin **b** empirik korrelyasion matrisinin ortonormalanmış məxsusi $\{\varphi_j(\mathbf{r}_k)\}$, $k = 1, ..., N$ vektorlarının nizamlanmış çoxluğudur və bu çoxluq müşahidə verilənlərinə görə aşağıdakı düsturun köməyilə qiymətləndirilir:

$$b = \|b_{ik}\|, \quad b_{ik} = b(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{r}_k) = \overline{x(\mathbf{r}_i)\ x(\mathbf{r}_k)},$$

burada xətt işarəsi baxılan seçim üzrə orta qiymət mənasında, $x(\mathbf{r})$ isə baxılan meydan ilə onun seçim üzrə ortalanmış qiymətlərindən yayınması kimi anlaşılır. Beləliklə, E. o. f. olan $\varphi_j(\mathbf{r}_k)$ –

$$\sum_{k=1}^{N} b_{ik}\,\varphi_j(\mathbf{r}_k) = \lambda_j \varphi_j(\mathbf{r}_i), \quad i, j = 1, ..., N$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\varphi_j(\mathbf{r}_k))^2 = 1, \quad j = 1, ..., N$$

münasibətləri ilə təyin olunur, burada $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N \geq 0$. E. o. f. N – ölçülü Evklid fəzasında ortonormalanmış bazis əmələ gətirirlər. E. o. f.-ın digər bazislərdən üstünlüyü aşağıdakı kimi izah olunur.

$$x(\mathbf{r}_k) = \sum_{j=1}^{N} a_j \psi_j(\mathbf{r}_k), \quad k = 1, ..., N$$

– $\{x(\mathbf{r}_k),\ k = 1, ..., N\}$ vektorunun hər hansı $\psi_j(\mathbf{r}_k)$ bazisi üzrə ayrılışı olsun. Onda, əgər $\psi_j(\mathbf{r}_k) = \varphi_j(\mathbf{r}_k)$ olarsa, (*) ayrılışında yalnız $m < N$ sayda toplananları saxladıqda seçim üzrə orta kvadratik xəta belə approksimasiya nəticəsində minimal olur. Bu halda a_j əmsalları – baş komponentlər adlanır; a_j-lər aşağıdakı münasibətləri ödəyirlər:

$$\overline{a_j\, a_k} = \lambda_j \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \text{ olduqda} \\ 0, & j \neq k \text{ olduqda} \end{cases}$$

odur ki, (*) ayrılışı bu halda komponentləri qeyri – korrelyar ayrılış olur, bu halda approksimasiya xətası

$$\delta^2(m) = \lambda_{m+1} + ... + \lambda_N$$

düsturu ilə təyin olunur.

E. o. f. E. Lorensin [5] və A. M. Obuxovanın [1] işlərindən başlayaraq meteorologiyada geniş istifadə olunur. Belə ki, bu işlərdə $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N$ fəzanın N sayda nöqtələridir (bax, [2], [3]).

Tətbiqdə, adətən, m-in N-lə müqayisədə çox da böyük olmayan qiymətlərində $\delta^2(m)$ kəmiyyəti çox böyük olmur. Məs., $N \approx 10$ olduqda $\delta^2(1)$ əksər hallarda $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \sum_{j=1}^{N} b_{jj}$ cəminin 50%-ni təşkil edir (bu cəm meydanın ümumi dispersiyası adlanır), $\delta^2(3)$ isə bu cəmin yalnız 10%-ni təşkil edir. Belə hallarda b korrelyasion matrisinin ilk məxsusi qiymətləri bir-birindən olduqca fərqlənir və j nömrəsi artdıqca sürətlə azalırlar. İlkin baş komponentlər a_j-lərin az sayı ilə bütün N sayda nöqtələrdə $x(\mathbf{r}_k)$ meydanını kompakt və kifayət dərəcədə dəqiq təsvir etmək olur, bu da E. o. f.-nın praktiki cəhətdən münasib olduğunu sübut edir. Bundan başqa, məhz belə hallarda E. o. f. $\varphi_j(\mathbf{r}_k)$ və λ_j ədədləri sonuncu seçimlə ən etibarlı surətdə qiymətləndirilirlər.

E. o. f. anlayışı məhdud G oblastında müşahidə olunan kəsilməz $x(\mathbf{r})$ meydanı üçün də təyin olunur. Yuxarıda qeyd olunan faktlar bu halda da doğrudur (uyğun dəyişikliklərlə bu halda məxsusi funksiyaların sayı sonlu deyil, hesabi olur).

Əgər $x(\mathbf{r})$ meydanına korrelyasion funksiyası $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ilə ehtimal paylanmasına malik $X(r)$ təsadüfi meydanının realizasiyası kimi baxılarsa, onda aydındır ki, $\varphi_j(\mathbf{r})$ və λ_j, – G oblastında təsir edən, nüvəsi $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ olan inteqral operatorun məxsusi funksiyaları və məxsusi qiymətlərinin seçimi statistik qiymətləri olacaqdır. Bu mülahizədən aydın olur ki, (*) ayrılışı *Karunen – Loev ayrılışının* seçimi analoqudur.

Ədd.: [1] О б у х о в а А. М., «Изв. АН СССР. Сер. Геофиз.», 1960, № 3, с. 432–39; [2] Естественные состовляющие метеорологических полей, Л., 1970; [3] Ф о р т у с М. И., «Метеорология и гидрология», 1980, № 4, с. 113–19; [4] Г л у х о в с к и й А. Б., Ф о р т у с М. И., «Изв. АН СССР Сер. Физика атмосферы и океана», 1982, т. 18, № 5, с. 451–59; [5] L o r e n z E. N., «MIT Statist. Forecasting Proj.» Sci. Rep., № 1, Camb. (Mass)., 1956.

EMPİRİK ÖLÇÜ « эмпирическая мера; empirical measure » – bax, *Təsadüfi ölçü*, *Yığılma*(s ı) e m p i r i k ö l ç ü l ə r i n və e m p i r i k p r o s e s l ə r i n.

EMPİRİK PAYLANMA « эмпирическое распределение; empirical distribution », s e ç i m i n p a y l a n m a s ı – əsl paylanmanı qiymətləndirmək üçün seçim üzrə təyin olunan *ehtimal paylanmasıdır*. $\xi_1, ..., \xi_n$ paylanma funksiyası $F(x)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $x_1, ..., x_n$ bu təsadüfi kəmiyyətlərin müşahidələr nəticələrində aldığı uyğun qiymətlər, $\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n$ uyğun variasion sıra olsun. Hər bir x_i, $i = 1, ..., n$ nöqtəsinə $1/n$ ehtimalını qarşı qoyan diskret paylanmaya $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinə uyğun e m p i r i k p a y l a n m a deyilir (x_i nəticələri arasında təkrarlananları ola bilər, məs., x^* qiyməti l dəfə təkrar olunarsa, bu halda təkrarlanan x^* qiymətindən qonşu nöqtəyə keçdikdə empirik paylanma funksiyasının aldığı artım l/n -ə bərabər olur). Fərz olunur ki, $x_1, ..., x_n$ qiymətləri elə nömrələnmişdir ki, $x_i < x_{i+1}$. Aydındır ki, $x_k < x \le x_{k+1}$ şərtini ödəyən ixtiyari x üçün $\xi < x$ bərabərsizliyini ödəyən sınaqların sayı k -ya bərabər olacaqdır. Beləliklə, $x_k < x \le x_{k+1}$, $k = 1, 2, ..., n-1$ olduqda, empirik paylanma funksiyası

$$F_n^*(x) = \frac{k}{n}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Araşdırılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin ala biləcəyi bütün qiymətlər çoxluğu ü m u m i ç o x l u q (rus. – «генеральная совокупность») adlandırılır. Nəticələri asılı olmayan n sayda aparılmış müşahidələrdə ξ təsadüfi kəmiyyəti müşahidə olunmuş $x_1, ..., x_n$ qiymətlər toplusuna n h ə c m l i s e ç i m, hər bir sınaq nəticəsində ξ -nin alınmış hər bir x_i qiymətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin m ü m k ü n q i y m ə t l ə r i deyilir. Seçimin elementləri ümumi çoxluğun elementləri olacaqdır. Bu baxımdan $x_1, ..., x_n$ qiymətləri müşahidə olunan ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə eyni qanunla paylanmış $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq $1, 2, ..., n$ -ci sınaqda aldığı qiymətlərdir. n həcmli seçimdəki $x_1, ..., x_n$ qiymətləri s e ç i m i q i y m ə t l ə r adlanır. n həcmli bir və ya bir neçə seçim əsasında çıxarılan nəticələr ümumi çoxluğu elmi əsaslarla xarakterizə etməyə imkan verir.

Beləliklə, ξ_i, – i -ci sınaqda (ixtiyari n həcmli sınaqlar seriyasında) müşahidə oluna bilən təsadüfi kəmiyyətdir və ξ_i -lərin ($i = 1, ..., n$) paylanma qanunları ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu ilə eynidir, yəni i -nin ixtiyari qiymətində

$$\mathbf{P}\{ \xi < x \} = \mathbf{P}\{ \xi_i < x \} = F(x).$$

$$F(x) = \mathbf{P}\{ \xi < x \} \approx \frac{k}{n} = F_n^*(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunan $F_n^*(x)$ funksiyasını $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyası üçün statistik qiymət kimi götürmək təbiidir. (1) münasibətindəki k kəmiyyəti n sayda aparılan müşahidədə $x_k < x$ şərti ödənilən k -ların sayıdır, $k = 1, 2, ..., n$. (1) münasibətilə təyin olunan $F_n^*(x)$ funksiyasına ξ təsadüfi kəmiyyətinin e m p i r i k p a y l a n m a f u n k s i y a s ı deyilir.

Beləliklə,

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le \xi_{(1)}, \\ k/n, & \xi_{(k)} < x \le \xi_{(k+1)}, \\ 1, & x > \xi_{(n)}. \end{cases} \quad 1 \le k \le n-1$$

münasibətilə təyin olunan empirik paylanma funksiyası həmişə pilləvari funksiyadır, onun sıçrayışları $x_1, ..., x_n$ kəmiyyətləri ilə təyin olunur və bu sıçrayışların qiymətləri $x_k < x_{k+1}$ olduqda $1/n$ -ə bərabər olur. $\xi_1, ..., \xi_n$ -lərin qeyd olunmuş qiymətlərində $F_n^*(x)$ funksiyası adi paylanma funksiyasının bütün xassələrini ödəyir. Doğrudan da, $F_n^*(x)$ soldan kəsilməz, monoton azalmayan funksiyadır; $x \le x_1$ olduqda ixtiyari x üçün $\xi < x$ bərabərsizliyi ödənilən sınaqların sayı sıfra, $x > x_n$ olduqda $\xi < x$ bərabərsizliyi ödənilən sınaqların sayı n -ə bərabər olur; $x_k < x \le x_{k+1}$ olduqda isə $F_n^*(x) = \frac{k}{n}$ olduğundan (2) – empirik paylanma funksiyasının ifadəsidir. Beləliklə, $\xi_1, ..., \xi_n$ seçiminə uyğun E. p. həqiqi x parametrindən asılı $F_n^*(x)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ailəsi ilə verilir. x -in qeyd olunmuş qiymətində

$$\mathbf{M}\, F_n^*(x) = F(x),$$

$$\mathbf{D} F_n^*(x) = F(x)[1 - F(x)]/n$$

və

$$\mathbf{P}\{F_n^*(x) = k/n\} = C_n^k [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k}$$

empirik paylanmanın uyğun riyazi gözləməsi, dispersiyası və k/n qiymətində ehtimalıdır. Böyük ədədlər qanununa əsasən hər bir x qiymətində $n \to \infty$ olduqda $F_n^*(x) \xrightarrow{\mathbf{P}} F(x)$ münasibəti ödənilir. Odur ki, $F_n^*(x)$ – paylanma funksiyası $F(x)$ -in meylsiz və tutarlı statistik qiymətidir. E. p. funksiyası $F(x)$ -ə 1 ehtimalla x üzrə müntəzəm yığılır və ya əgər

$$D_n = \sup \left| F_n^*(x) - F(x) \right|$$

olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{ \lim_{n \to \infty} D_n = 0 \} = 1$$

(Q l i v e n k o – K a n t e l l i t e o r e m i).

D_n kəmiyyəti E. p. funksiyası $F_n^*(x)$ ilə $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının yaxınlıq ölçüsünü xarakterizə edir. A. N. Kolmoqorov (1933) $F(x)$ kəsilməz funksiyası üçün limit paylanmasını almışdır:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n}D_n < z\} = K(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2}, \quad z>0.$$

Əgər $F(x)$ naməlum olarsa, bu funksiyanın verilmiş $F_0(x)$ kəsilməz funksiya olduğu haqqında hipotezin yoxlanılması üçün D_n tipli statistikalara əsaslanan kriterilər tətbiq olunur (bax, *Kolmoqorov kriterisi*, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*).

E. p.-nın momentləri və ixtiyari digər xarakteristikaları seçimi (empirik) momentlər və xarakteristikalar adlanır, məs.,

$$\mathbf{M}^*\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$, – seçimi orta və ya seçimi riyazi gözləmə,

$$\mathbf{D}^*\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbf{M}^*\xi)^2$$, – seçimi dispersiya və ya empirik dispersiya,

$$\mathbf{m}_r^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r$$, – r – tərtib seçimi moment,

$$\sigma_\xi^* = \sqrt{\mathbf{D}^*\xi} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbf{M}^*\xi)^2}$$

– seçimi kvadratik orta yayınma E. p.-nın seçimi ədədi xarakteristikalarıdır.

Seçimi xarakteristikalar əsl paylanmanın uyğun xarakteristikalarının statistik qiymətləridir.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

EMPİRİK PAYLANMA FUNKSİYASI « эмпирическая функция распределения; empirical distribution function / e. d. f. » – bax, *Empirik paylanma.*

EMPİRİK PROSES « эмпирический процесс; empirical process » – bax, *Yığılma*(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin.

EMPİRİK REQRESSİYA ƏYRİSİ « эмпирическая линия регрессии; empirical regression line / curve » – naməlum, əsl reqressiya əyrisinin *statistik qiymətidir.*

EMPİRİK TƏSİR FUNKSİYASI « эмпирическая функция влияния; empirical influence function » havanın statistik proqnozunda – çoxölçülü arqumentin funksiyasıdır, onun qiymətlərilə hava proqnozunda reqressiya əmsallarının kəmiyyətləri təyin olunur; havanın proqnozu isə öngörül kəmiyyətin zaman üzrə dəyişikliyini təsvir edən dinamik sistemlərə görə seçilmiş prediktorlar sisteminə əsaslanır (prediktorların qiymətlərini verilən proqnoz təyin edir).

Məs., atmosferin verilən bir nöqtəsində hər hansı meteoroloji meydanın qiyməti X -in proqnozu olunmalıdır, belə ki, hidro- və termodinamika tənliklərindən aydındır ki, X -in zaman üzrə dəyişikliyi, ilk növbədə, müşahidəsi mümkün olan $y_1 = y_1(x, y, z, t)$, $y_2 = y_2(x, y, z, t)$ meydanlarının və Yer səthində verilən $y_3 = y_3(x, y, t)$ meydanının təsirilə əlaqəlidir və dX/dt törəməsinin y_1, y_2, y_3 meydanlarından asılılığını ilk yaxınlaşmada xətti hesab etmək olar. Bu halda hətta X üçün dinamik tənlik yazmadan, hökm etmək olar ki, qeyd olunmuş τ müddəti ərzində X -in qiymətinin dəyişikliyini aşağıdakı düsturla ifadə etmək olar:

$$\delta_\tau X = \iiint G_\tau^{(1)}(\mathbf{x}^{(3)}) y_1(\mathbf{x}^{(3)})\, dV + \iiint G_\tau^{(2)}(\mathbf{x}^{(3)})\, y_2(\mathbf{x}^{(3)})\, dV + \iint G_\tau^{(3)}(\mathbf{x}^{(2)}) y_3(\mathbf{x}^{(2)}) dS, \qquad (*)$$

burada $\mathbf{x}^{(3)} = (x, y, z)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x, y)$, $G_\tau^{(1)}(\mathbf{x}^{(3)})$, $G_\tau^{(2)}(\mathbf{x}^{(3)})$ və $G_\tau^{(3)}(\mathbf{x}^{(2)})$ – nəzəri təsir funksiyalarıdır, bu funksiyalar $\delta_\tau X$ artımının y_1, y_2, y_3 meydanlarından asılılığını təyin edirlər, $dV = dx\,dy\,dz$ və $dS = dx\,dy$ – həcm və sahə elementləridir. (*) düsturunun sağ tərəfindəki inteqrallar ədədi hesablamalarda cəmlərlə əvəz olunur və bu cəmlər hər hansı üçölçülü və ya ikiölçülü (üçüncü inteqral olduğu halda) şəbəkənin düyünləri üzrə götürülür. Bu zaman $\delta_\tau X$ kəmiyyəti üçün – X -in bir addıma dəyişikliyi üçün – cəbri düstur alınır ki, bu düsturun sağ tərəfinə uyğun şəbəkənin düyünlərində y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətləri, bu düyündə təsir funksiyalarından birinin qiymətlərinə mütənasib olan əmsallarla xətti olaraq daxil olur. Buna görə də, uyğun şəbəkənin düyünlərində y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətlərini prediktorlar kimi seçmək təbiidir, bundan sonra isə prediktorlardakı ədədi əmsallar dinamik tənliklərdən istifadə etmədən reqressiya əmsallarının qiymətləri kimi (yəni X -in qiymətlərinin dəyişiklikləri və y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətləri haqqında daha ilkin müşahidələrin empirik verilənləri əsasında ən kiçik kvadratlar metodu ilə) təyin olunmalıdır. y_1, y_2, y_3 meydanlarının qiymətlərində bu qayda ilə alınan əmsallar E. t. f. adlanır.

E. t. f.-nın istifadəsi metodu EHM-da çox sadə reallaşır, lakin meteoroloji meydanların gözlənilən qiymətlərinin proqnozlarının yüksək dəqiqliyini təmin etmir, bu da onunla bağlıdır ki, hidro- və termodinamika tənlikləri, adətən, olduqca böyük dim. – ölçülü (bir neçə yüz tərtibdən) reqressiya tənliklərinə gətirir və proqnozun daha əvvəl söylənilməsilə dinamik sistemlərin qeyri – xətti hədlərinin təsiri sürətlə artır ki, bunlar (*) düsturunda nəzərə alınmamışdır. Lakin E. t. f. ilə iş təcrübəsi reqressiya tənliklərinə əsaslanan statistik hava proqnozunun digər metodlarında geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Белов П. Н., Численные методы прогноза погоды. Л., 1975.

ENDOMORFİZM dəqiq **« эндоморфизм** точный; exact **endomorphism »** – bax, *Dəqiq endomorfizm*.

ENDOMORFİZM sıfır modulu üzrə **« эндоморфизм** по модулю нуль; **endomorphism** mod 0 **»** – bax, *Endomorfizm*(i) ölçülü fəzanın.

ENDOMORFİZM(i) ölçülü fəzanın **« эндоморфизм пространства с мерой; endomorphism of a measure space »** – *ölçülü* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *fəzasının* özünə ölçülən və ölçünü dəyişməz saxlayan inikasıdır. Başqa sözlə, əgər $T : \Omega \to \Omega$ inikası:

1) $T\Omega = \Omega$;

2) ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün $T^{-1}A \in \mathscr{A}$, $\mathbf{P}(T^{-1}A) = \mathbf{P}(A)$ şərtlərini ödəyərsə, onda T inikası $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ölçülü fəzasının endomorfizmidir.

1) şərtini $T\Omega \in \mathscr{A}$ şərti ilə əvəz etdikdə sıfır modulu üzrə endomorfizm (endomorfizm mod 0) alınır; münasib bilinən sıfır ölçülü çoxluğu fəzadan xaric etdikdə endomorfizm alınır. Dar mənada stasionar təsadüfi X_n, $n \geq 0$ ardıcıllığının realizasiyaları fəzasında sola yerinidəyişmə ehtimal fəzasının endomorfizminə bir misaldır.

ENERGETİK NORMA « энергетическая норма; energy norm » – bax, *Markov prosesi*; enerji.

ENERGETİK SPEKTR « энергетический спектр; energy spectrum » – bax, *Spektral sıxlıq*, *Stasionar təsadüfi proses.*

ENERJİ « энергия; energy » – bax, *Markov prosesi*; enerji.

ENERJİ SƏVİYYƏSİ « энергии уровень; energy level » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

ENERJİSİ, HİSSƏCİYİN « энергия частицы; energy of a particle » şaxələnən prosesdə – bax, *Şaxələnən proses*, enerjili.

ENİNƏ KORRELYASİON FUNKSİYA « поперечная корреляционная функция; transverse correlation function » – bax, *Bircins və izotrop təsadüfi meydan.*

ENQSET DÜSTURU « Энгсета формула; Engset formula » – N sayda tələblər mənbələri daxil olunmuş, itkilərli, qapalı n – xətli *xidmət sistemində* k sayda xəttin məşğul olmasının stasionar ehtimalı p_k -nın

$$p_k = \frac{(N-k)!}{k!} \frac{\lambda^k}{\mu^k} p_0, \quad 0 \leq k \leq n$$

münasibətilə verilən ifadəsidir, burada λdt – daxil olacaq tələb xətdə və ya növbədə olmadıqda, dt müddəti ərzində tələbin ola biləcəyi ehtimalı, μ – xətdə tələbə xidmət parametridir. T. Enqset (T. Engset) tərəfindən 1918-də müəyyən olunmuşdur; sonradan mənbədə tələbin baş vermə müddəti və xidmət müddəti kəmiyyətlərinin ixtiyari paylanmalara malik sistemləri halları üçün ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungstheorie, unter der Leitung von B. W. Gnedenko und D. König. Bd 2, B., 1984.

ENLİKLƏ – İMPULSAL MODULYASİYA « шипотно – импульсная модуляция; pulse width modulation » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

ENMƏ « выброс отрицательный; negative outlier » – bax, *Aşma – enməsi*, *təsadüfi proses və meydanın*.

ENTROPİK GÜC « энтропийная мощность; entropy power » – ehtimal sıxlığı

$$p_\xi(x) = p_\xi(x_1, ..., x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin nəzəri – informatik xarakteristikasıdır. E. g. anlayışı K. Şennon (C. Shannon) tərəfindən daxil olunmuşdur. İnformasiya nəzəriyyəsində əsas bərabərsizliklərin çıxarılışında geniş istifadə olunur. Sonlu differensial entropiyalı ξ təsadüfi kəmiyyətinin E. g. – $N(\xi)$

$$N(\xi) = \frac{1}{(2\pi e)^{n/2}} \frac{2}{n} \exp\, h(\xi)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $h(\xi)$, – ξ -nin differensial entropiyasıdır və

$$h(\xi) = -\int p(x) \log\, p(x) dx,$$

$p(x)$ isə ξ -nin ehtimal sıxlığıdır.

Əgər $\left\| r_{ij} \right\|$, $i, j = 1, ..., n$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin kovariasion matrisidirsə, onda

$$N(\xi) \leq \det \left\| r_{ij} \right\|;$$

xüsusi halda, ξ birölçülü təsadüfi kəmiyyət olarsa,

$$N(\xi) \leq \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$$

olur; bu bərabərsizliklərdə bərabərlik münasibəti, yalnız və yalnız, ξ Qauss təsadüfi kəmiyyəti olduğu halda ödənilir. Beləliklə, kovariasion matrisi verilən Qauss təsadüfi kəmiyyəti maksimal E. g.-nə malikdir.

ξ və η – entropik gücləri uyğun olaraq, $N(\xi)$ və $N(\eta)$ olan (təyin olunmuş) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $N(\xi + \eta) \geq N(\xi) + N(\eta)$ bərabərsizliyi doğrudur; bu bərabərsizlikdəki bərabərlik münasibəti, yalnız və yalnız, ξ və η mütənasib kovariasion matrislərli Qauss təsadüfi kəmiyyətləri olduğu halda ödənilir.

Əd.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [2] Blackman N. M., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1965, v. IT-11, № 2, p. 267–71; [3] Costa M. H. M., Cover T. M., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1984, v. IT-30, № 6, p. 837–39.

ENTROPİK KRİTERİ « энтропийный критерий; entropy criterion » – bax, *Məqsədyönlü proyeksiyala(n)ma.*

ENTROPİYA « энтропия; entropy » – təsadüfi kəmiyyətin qeyri – müəyyənlik dərəcəsinin nəzəri – informatik ölçüsüdür və paylanma qanunu $p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, ...$ ehtimallar toplusu ilə verilən ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti üçün $(\mathfrak{X} = \{x_k,\ k = 1, 2, ...\})$

$$H(\xi) = -\sum_k p_k \log\, p_k$$

bərabərliyi ilə təyin olunan kəmiyyətdir ($0 \cdot \log 0 = 0$ qəbul edilir). Ölçü vahidinin bit (ikilik vahidi) və ya nat (natural vahid) seçilməsindən asılı olaraq loqarifm uyğun olaraq 2 və ya e əsasına görə götürülür. Əgər $N = |\mathfrak{X}|$

olarsa, ixtiyari diskret təsadüfi kəmiyyətin E.-sı mənfi deyildir və $H(\xi) \le \log N$, ξ müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olduğu halda $H(\xi) = \log N$ olur. $H(\xi) \ge 0$ və $H(\xi) = 0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, p_k-lardan birindən başqa hamısı sıfra bərabər olduğu halda ödənilir.

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{r} p_i \ln p_i \le -r \cdot \frac{p_1 + \ldots + p_r}{r} \times$$

$$\times \ln\left(\frac{p_1 + \ldots + p_r}{r} \right) = \ln r$$

olduğundan E. özünün maksimal qiymətini $p_1 = \ldots = p_r = \frac{1}{r}$ olduğu halda alır. İxtiyari $f(x)$, $x \in \mathfrak{X}$ funksiyası üçün $H(f/(\xi)) \le H(\xi)$ bərabərsizliyi doğrudur.

ξ və η paylanma qanunları uyğun olaraq

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \mathfrak{X} = \{x_k;\ k = 1, 2, \ldots\}$$

və

$$q_j = \mathbf{P}\{\eta = y_j\}, \ j = 1, 2, \ldots, Y = \{y_j;\ j = 1, 2, \ldots\}$$

ehtimallar topluları ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər, $p_{k|j} = \mathbf{P}\{\xi = x_k \mid \eta = \eta_j\}$ isə şərti ehtimal paylanması olsun. ξ təsadüfi kəmiyyətinin η təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən **şərti entropiyası** $H(\xi|\eta)$, –

$$H(\xi|\eta) = -\sum_j q_j \sum_k p_{k|j} \log p_{k|j}$$

kəmiyyətinə deyilir.

İxtiyari diskret ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

a) $H(\xi|\eta) \le H(\xi)$, bu xassədə bərabərlik işarəsi ξ və η, yalnız və yalnız, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda ödənilir; b) $H(\xi\eta) = H(\xi|\eta) + H(\eta) = H(\eta|\xi) + H(\xi)$. Diskret zamanlı və qiymətlər fəzası diskret olan $\zeta = \{\zeta_k,\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ **stasionar təsadüfi prosesinin entropiyası** –

$$\overline{H}(\zeta) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} H(\zeta^{(n)}) \qquad (*)$$

limitinə deyilir, burada $\zeta^{(n)} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Aydındır ki, (*) münasibətinin sağ tərəfindəki limit həmişə vardır və

$$\overline{H}(\zeta) = \lim_{n \to \infty} H(\zeta_n | \zeta^{n-1})$$

bərabərliyi doğrudur.

(Ω, S_Ω) – ixtiyari ölçülən fəza, μ və ν – bu fəzada təyin olunmuş elə ölçülərdir ki, μ ölçüsü ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdür. Onda μ **ölçüsünün** ν **ölçüsünə nəzərən entropiyası** $H(d\mu|d\nu)$ –

$$H(d\mu|d\nu) = \int_\Omega \log \frac{d\mu}{d\nu}\, \nu(d\omega)$$

bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqrala deyilir, burada $d\mu/d\nu$ – Radon – Nikodim inteqralıdır. **Ölçünün ölçüyə nəzərən entropiyasının** xüsusi halı – *differensial entropiyadır.*

İnformasiya nəzəriyyəsində E.-nın mühüm ümumiləşmələrindən biri də $H_W(\xi)$, W – *entropiya anlayışı və epsilon – entropiyalar* – $H_\varepsilon \xi$ (ε – entropiya)-dır. Təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – müəyyənliyinin ölçüsü kimi E.-dan istifadə edilməsi təbiidir, belə ki, informasiya ötürmə sistemlərinin əsas xarakteristikaları bu kəmiyyətlə ifadə olunur.

$H(\xi)$, $H_W(\xi)$ və $H_\varepsilon(\xi)$ kəmiyyətləri informasiya ötürmə nəzəriyyəsinin əsas teoremi – *Şennon teoreminin* bir çox ifadələrində istifadə olunur.

Əd.: [1] Биллингский П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [4] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963.

ENTROPİYA alqoritmik « **энтропия** алгоритмическая; algorithmic **entropy / Kolmogorov complexity entropy** » – bax, *Alqoritmik entropiya*.

ENTROPİYA(sı) **bölgünün** « **энтропия** разбиения; **entropy of a partition** » – μ ehtimal ölçülü (Ω, μ) ölçülən fəzasının sonlu və ya hesabi sayda ölçülən, müsbət ölçülü P_i çoxluqlarına $\mathscr{D}$ bölgüsü üçün

$$\mathscr{E}(\mathscr{D}) = -\sum_i \mu(D_i) \ln \mu(D_i)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan kəmiyyətlərdir (və ya ∞-dur), burada $\mathscr{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$, D_i, – $\mathscr{D}$ bölgüsünün atomlarıdır (boş olmayan çoxluqlardır) və $\Omega = \bigcup_i D_i$, $i \ne j$ olduqda $D_i \cap D_j = \varnothing$.

Bölgünün elementləri sıfır ölçülü çoxluqlar olarsa və ya müsbət ölçülü çoxluq təşkil edərsə, onda $\mathscr{E}(\mathscr{D}) = \infty$ götürülür.

ENTROPİYA differensial « **энтропия** дифференциальная; differential **entropy** » – bax, *Differensial entropiya*.

ENTROPİYA(sı) **dinamik sistemin** « **энтропия** динамической системы; **entropy of a dynamical system** », **metrik entropiya** – dinamik sistemin nəzəri – informasion mənşəli ədədi xarakteristikasıdır. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının endomorfizmi T üçün $h(T)$ entropiyası aşağıdakı kimi təyin olunur. $\xi = \xi(\omega)$, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, sonlu qiymətlər alan ixtiyari təsadüfi kəmiyyət, $\xi_n(\omega) = \xi(T^n\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n = 0, 1, \ldots$, $H_n(\xi_0^{n-1})$, – $\xi_0^{n-1} = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ təsadüfi vektorunun entropiyası olsun. $n \to \infty$ olduqda $H_n(\xi_0^{n-1})/n$ nisbəti $h(T, \xi)$ limitinə yığılır; $h(T, \xi)$ informasiya nəzəriyyəsində $\{\xi_n,\ n \ge 0\}$ təsadüfi prosesində **entropiya yaranma tezliyi** adlanır (bax, [3]) və bu limit $n \to \infty$ olduqda

ξ təsadüfi kəmiyyətinin $(\xi_1, ..., \xi_n)$ təsadüfi vektoruna nəzərən şərti entropiyasının limiti ilə üst-üstə düşür. Tərifə görə, $h(T) = \sup_{\xi} h(T, \xi)$, burada yuxarı sərhəd bütün göstərilən ξ-lər üzrə götürülür. Əgər bu tərifdə sonlu sayda qiymətlər alan (hesabi sayda qiymətlərdən artıq olan hal istisna olunur) təsadüfi kəmiyyətlər əvəzinə sonlu entropiyalı təsadüfi kəmiyyətlərdən istifadə olunarsa, $h(T)$ dəyişilmir.

İxtiyari η təsadüfi kəmiyyətinin E. yalnız bu təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu bölgüdən, yəni Ω fəzasının $\eta = \text{const}$ şəklində çoxluqlara bölgüsündən asılı olduğundan, E.-nı bilavasitə bölgü terminologiyası ilə vermək məqsədəuyğundur.

Erqodik nəzəriyyədə qəbul olunmuş yanaşmada ξ təsadüfi kəmiyyəti Ω fəzasının ixtiyari sonlu α bölgüsü ilə, ξ_0^{n-1} isə $\alpha_T^n = \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \ ... \ \vee T^{n-1}\alpha$ bölgüsü ilə əvəz olunur ki, onun elementləri $A_{i_0} T^{-1} A_{i_1} \bigcap ... \bigcap T^{-n+1} A_{i_{n-1}}$ şəklindədir; $A_{i_1}, ..., A_{i_{n-1}}$, – α bölgüsünün ixtiyari elementləridir.

«Dinamik sistemin E.» anlayışının yuxarıdakı tərifi J. Q. Sinaya (bax, [2]) məxsusdur. Lakin «dinamik sistemin E.-sı» anlayışının özü A. N. Kolmoqorov tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1]) və bu tərif Sinay tərifindən bir qədər fərqlidir. E.-nın meydana çıxması ilə əlaqədar olaraq erqodik nəzəriyyənin yeni erqodik istiqaməti yaranmış və bu da erqodik nəzəriyyənin bütün bölmələrinin inkişafında dərin bir təsirə səbəb olmuşdur.

E.-nın hesablanmasında əksər hallarda [2]-də şərh olunmuş teoremdən istifadə olunur; bu teoremə görə ixtiyari α bölgüsü üçün $h(T) = h(T, \alpha)$ bərabərliyi doğrudur; α bölgüsünün elementləri $T^{-n}\alpha$, $n = 1, 2, ...$ bölgüsünün elementləri ilə birlikdə bütün $\mathcal{A}$ σ – cəbrini doğurur (onda α, T üçün birtərəfli doğurucu bölgü və ya birtərəfli doğurucu (rus. образующая) adlanır). T avtomorfizm olduqda, ikitərəfli doğurucu təyin olunur, yəni belə α-lar üçün $\mathcal{A}$ bütün T_α^n-lərlə doğurulur, $n \in \mathbb{Z}$. Bu hökmlərin ümumiləşmələri də vardır (bax, [4], [5]), bu hallarda doğurucular asimptotik doğurucular ardıcıllığı ilə əvəz olunur.

Əgər T vəziyyətlər fəzası diskret $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ olan *Bernulli yerinidəyişməsidirsə*, onda

$$h(T) = -\sum_i \mu(y_i) \ln \mu(y_i)$$

bərabərliyi doğrudur, burada y_i, – μ ölçüsünün atomlarıdır; vəziyyətlər fəzası diskret olmayan Bernulli yerinidəyişməsi üçün $h(T) = \infty$. Vəziyyətlər fəzası diskret olan *Markov yerinidəyişməsi* üçün

$$h(T) = -\sum_{i,j} \pi_i \, p_{ij} \ln p_{ij}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\{\pi_i\}$ – birölçülü paylanma, p_{ij} uyğun Markov zəncirinin keçid ehtimallarıdır.

Hamar dinamik sistemlər üçün E. həndəsi məna daşıyır: E. başlanğıc anda faza fəzasının bir-birinə yaxın nöqtələrinin bir-birindən uzaqlaşmasının orta sürətini (loqarifmik şkalada) xarakterizə edir.

Entropiyanın ümumi xassələri:

1) $h(T)$ 0-dan $+\infty$-a qədər ($0, \infty$ daxil olmaqla) bütün qiymətləri alır;

2) ixtiyari $k \geq 0$ üçün $h(T^k) = k\,h(T)$; əgər $\{T^t, \ t \geq 0\}$ kəsilməz semi – axındırsa, onda ixtiyari $t \geq 0$ üçün $h(T) = t\,h(T^{-1})$ (bax, [7], [11]); əgər T avtomorfizmdirsə, onda $h(T^{-1}) = h(T)$ və deməli, kəsilməz axın üçün $h(T^t) = |t|\,h(T^1)$, $-\infty < t < \infty$. $h(T^1)$ – axın entropiyası adlanır.

3) dinamik sistemlərin düz hasilinin E. bu sistemlərin E.-larının cəminə bərabərdir;

4) dinamik sistemin homomorf obrazının E. (bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin* metrik) sistemin özünün E.-nı aşmır; izomorf sistemlərin E.-ları eynidir;

5) əgər T – invariant ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}$, T – invariant ehtimal ölçüləri $\mathbf{P}_1$ və $\mathbf{P}_2$-nin qabarıq kombinasiyası – $a\mathbf{P}_1 + (1-a)\mathbf{P}_2$ kimi ifadə olunarsa, onda $h(T) = ah_1 + (1-a)h_2$ bərabərliyi doğrudur, burada h_i, – $\mathbf{P}_i$ ölçüsü üzrə hesablanmış E.-dır, $i = 1, 2$.

Dinamik sistemin E.-nın asimptotik tərifi (bax, [6]), həm də ümumi qrup zamanlı dinamik sistemlər (bax, [7]), σ – sonlu ölçülü fəzada dinamik sistemlər üçün bu anlayışın ümumiləşməsi (bax, [8]) verilmişdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., в кн.: Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 86–91; [2] Синай Я. Г., в кн.: Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов, М., 1959, т. 124, № 4, с. 768–71; [3] Пинскер М. С., Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов, М., 1960; [4] Рохлин В. А, «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 5, с. 980–83; [5] Синай Я. Г., «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 6, с. 1200–02; [6] Рохлин В. А., «Докл. АН СССР», 1963, т. 148, № 4, с. 779–81; [7] Conze J. P., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd 25, № 1, S. 11–30; [8] Krengel U., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 17, № 3, S. 161–81; [9] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [10] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [11] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [12] Мартин Н., Ингленд Д., Математическая теория энтропии, пер. с англ., М., 1988.

ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin, topoloji **« энтропия** динамической системы топологическая; topological **entropy** of a dynamical system **»** – bax, *Topoloji entropiya*(sı) dinamik sistemin.

ENTROPİYA(sı) kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin **« энтропия** непрерывных случайных величин; **entropy** of continuous random variables **»** – bax, *Differensial entropiya.*

ENTROPİYA(sı) qrupda təsadüfi dolaşmanın **« энтропия** случайного блуждания на группе; **entropy** of a random walk on a group **»** – bax, *Təsadüfi dolaşma* qrupda.

ENTROPİYA nisbi **« энтропия** относительная; relative **entropy »** – bax, *Differensial entropiya*, *Nisbi entropiya.*

ENTROPİYA(sı) ölçülən D bölgüsünün **« энтропия** измеримого разбиения D; **entropy** of measurable of D partition **»**, – norma təyin olunmuş (X, μ) fəzasının ölçülən D bölgüsünə nəzərən E.-sı, aşağıdakı kimi təyin olunan kəmiyyətdir. Əgər D bölgüsünün sıfır ölçülü elementləri çoxluğu müsbət ölçülü çoxluq əmələ gətirərsə, onda ölçülən bölgünün E. $H(D) = \infty$ olur, əks halda

$$H(D) = -\sum \mu(C) \log \mu(C),$$

burada cəmləmə D-nin müsbət ölçülü bütün elementləri üzrə götürülür. Loqarifm, adətən, ikilik loqarifmdir.

ENTROPİYA prefiks **« энтропия** префиксная; prefix **entropy »** – bax, *Alqoritmik entropiya.*

ENTROPİYA(sı) sonlu obyektlərin **« энтропия** конечных объектов; **entropy** of finite object **»** – bax, *Alqoritmik entropiya*.

ENTROPİYA(sı) stasionar prosesin **« энтропия** стационарного процесса; **entropy** of stationary process **»** – diskret zamanlı və qiymətlər fəzası diskret olan $\zeta = \{\xi_k,\ k = ..., -1,\ 0,\ 1, ...\}$ stasionar prosesi üçün

$$\overline{\mathscr{E}}(\xi) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathscr{E}(\zeta_n) \qquad (*)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan limitə deyilir; $\zeta_n = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$. Məlumdur ki, (*) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limit həmişə vardır və

$$\overline{\mathscr{E}}(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{E}(\xi_n \mid \zeta_{n-1})$$

bərabərliyi doğrudur.

Bax, *Entropiya.*

ENTROPİYA şərti **« энтропия** условная; conditional **entropy »** – bax, *Entropiya*, *Alqoritmik entropiya*, *Şərti entropiya*(sı) bölgünün.

ε – ENTROPİYA « ε – энтропия; ε – entropy » – bax, *Epsilon entropiya* / ε – *entropiya*.

W – ENTROPİYA « W – энтропия; W – entropy » – informasiya nəzəriyyəsində tətbiq edilən, təsadüfi kəmiyyətin qeyri – müəyyənliyinin müəyyən anlamda nəzəri – informatik ölçüsüdür. ξ və $\widetilde{\xi}$ – uyğun olaraq hər hansı $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ və $(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathbf{S}_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $p(\cdot)$-nin və $(\mathfrak{X}\times\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}}\times\mathbf{S}_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$ fəzasında təyin olunmuş bütün ehtimal ölçüləri çoxluğunda $(\xi, \widetilde{\xi})$ cütlərinin mümkün olan birgə paylanmalarının sinfi W-nin verilmiş olduğu fərz olunur. Onda W – entropiya (və ya W-nin dəqiqliklə əksolunma məlumatlarının verildiyi şərtə görə entropiya), –

$$H_W(\xi) = \inf I(\xi, \widetilde{\xi}) \qquad (1)$$

kəmiyyətinə deyilir; $I(\xi, \widetilde{\xi})$, – ξ-yə dair $\widetilde{\xi}$-də informasiya miqdarıdır; aşağı sərhəd isə elə $(\xi, \widetilde{\xi})$ cütləri üzrə götürülür ki, $(\xi, \widetilde{\xi})$-nin birgə paylanması $p(\cdot,\cdot)$ W çoxluğundandır, ξ-nin paylanması $p(\cdot)$-dir. $p(\cdot,\cdot)$ birgə ehtimal paylanmaları sinfi W çox vaxt müəyyən mənfi olmayan həqiqiqiymətli $\rho(x, \widetilde{x})$ funksiyası vasitəsilə verilir, $x \in \mathfrak{X}$, $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}$:

$$W = \{\, p(\cdot,\cdot) \colon \mathbf{M}\rho(\xi, \widetilde{\xi}) \le \varepsilon \,\}, \qquad (2)$$

burada $\varepsilon > 0$ qeyd olunmuş ədəddir. $\rho(x, \widetilde{x})$ təhrif ölçüsüdür. Bu halda (1) düsturu ilə təyin olunan kəmiyyət (W isə (2) düsturu ilə təyin olunur) ε – entropiya (və ya sürət – təhrif funksiyası kimi) adlanır.

Əd.: [1] Шеннон К., Математическая теория связи, в сб.: Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969.

EPİDEMİK PROSES « эпидемии процесс; epidemic process » – populyasiyada epidemiyanın yayılmasının riyazi modelidir. Bir qayda olaraq, belə model kimi populyasiyanı törədən bütün individiumların vəziyyətlərini təsvir edən *Markov prosesi* seçilir, belə ki, hər bir individium öyrənilən xəstəliyə nəzərən ya sağlam, lakin immunitetsiz ola bilər və ya yoluxucu xəstə və ya xəstəlik keçirmiş, lakin yoluxucu olmayan individium ola bilər. Sağlam individiumun xəstəyə çevrilməsi intensivliyi yoluxucu xəstələrin sayından asılıdır. Xəstəlik keçirənlərin sayının son nəticə göstəricisinin paylanması, xəstələr sayının dəyişməsi prosesləri, populyasiyanın bütün üzvlərinin xəstə vəziyyətdə olduğu toplam müddət kimi xarakteristikalar öyrənilir.

EPSİLON – ENTROPİYA / ε – ENTROPİYA « эпсилон – энтропия / ε – энтропия; epsilon entropy / ε – entropy » – dəqiqliklə bərpa olunduğu halda təsadüfi kəmiyyətin qeyri – müəyyənliyinin nəzəri – informatik ölçüsüdür. ε – entropiya anlayışı əsasən K. Şennon (C. Shannon) tərəfindən daxil edilmişdir. ξ – qiymətlər çoxluğu $\mathfrak{X}$, paylanması $\mathbf{P}_{\xi}(\cdot) = p(\cdot)$ olan təsadüfi kəmiyyət, $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ və $(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathbf{S}_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$ – ölçülən fəzalar, $\rho(x, \widetilde{x})$, – $\mathbf{S}_{\mathfrak{X}}\times\mathbf{S}_{\widetilde{\mathfrak{X}}}$ fəzasına nəzərən mənfi olmayan ölçülən funksiya, $\varepsilon > 0$ olsun. Onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin epsilon – entropiyası (ε –entropiya) –

$$H_{\varepsilon}(\xi) = \inf I(\xi, \widetilde{\xi}) \qquad (1)$$

kəmiyyətinə deyilir, burada $I(\xi, \widetilde{\xi})$, – $\widetilde{\xi}$-dən ξ-yə nəzərən *informasiya miqdarıdır*; aşağı sərhəd $\mathfrak{X}\times\widetilde{\mathfrak{X}}$ fəzasından qiymətlər alan $(\xi, \widetilde{\xi})$ təsadüfi kəmiyyətlərinin elə cütləri üzrə götürülür ki, $\mathbf{P}_{\xi}(\cdot) = p(\cdot)$ və

$$\mathbf{M}\,\rho(\xi, \widetilde{\xi}) \le \varepsilon \qquad (2)$$

(məlumatların dəqiqliklə bərpası şərti). Əgər ξ diskret təsadüfi kəmiyyət, $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ və $(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathbf{S}_{\widetilde{\mathfrak{X}}})$ – fəzaları eyni olarsa və $\rho(x, \widetilde{x})$ funksiyası

$$\rho(x, \widetilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad x = \widetilde{x}, \\ 1, & \text{əgər} \quad x \neq \widetilde{x} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunarsa, onda ε – entropiya $\varepsilon = 0$ olduqda adi entropiyaya bərabər olur, yəni

$$H_0(\xi) = H(\xi).$$

Məs., əgər $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ asılı olmayan komponentlərli Qauss təsadüfi vektoru, $\mathbf{M}\xi_j = 0$, $j = 1, ..., n$ və

$$\rho(x, \widetilde{x}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \widetilde{x}_j)^2$$

olarsa, onda ε – entropiya

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \log \max (\mathbf{M}\xi_j^2 / \lambda, 1)$$

düsturu ilə tapılır, burada λ

$$\sum_{j=1}^{n} \min (\lambda, \mathbf{M}\xi_j^2) = \varepsilon$$

tənliyindən təyin olunur.

Müxtəlif Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin, proseslərinin və meydanlarının E. - e.-nın hesablama metodları da işlənilmişdir. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ təsadüfi kəmiyyəti ξ_j, $j = 1, ..., n$ ikilik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllığı olsun,

$$\mathfrak{X} = \widetilde{\mathfrak{X}}, \quad \mathbf{P}\{\xi_j = 1\} = 1/2,$$

$$\rho(x, \widetilde{x}) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_j, \widetilde{x}), \quad x = (x_1, ..., x_n),$$

$$\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n) \in \mathfrak{X}$$

və

$$\rho_i(x_i, \widetilde{x}_i) = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad x_i = \widetilde{x}_i, \\ 1, & \text{əgər} \quad x_i \neq \widetilde{x}_i. \end{cases}$$

Onda $H_\varepsilon(\xi) = 1 + \varepsilon \log \varepsilon + (1 - \varepsilon) \log (1 - \varepsilon)$.

Təsadüfi kəmiyyətlərin müxtəlif sinifləri üçün $\varepsilon \to 0$ olduqda $H_\varepsilon(\xi)$-nin asimptotik ifadələri tapılmışdır.

E. – e. anlayışının bəzi ümumiləşmələri vardır. Məs., $\rho(x, \widetilde{x}) = (\rho_1(x, \widetilde{x}), ..., \rho_m(x, \widetilde{x}))$ vektor funksiyasına baxmaq olar, $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, (2) şərtini isə

$$\mathbf{M}\rho_i(\xi, \widetilde{\xi}) \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., m \qquad (3)$$

formasında vermək olar.

(2) və (3) şərtləri, mahiyyət etibarilə, $(\xi, \widetilde{\xi})$ təsadüfi kəmiyyətlər cütlərinin ehtimal paylanmalarına bəzi məhdudiyyətləri ifadə edir. $(\xi, \widetilde{\xi})$ cütlərinin paylanmaları $P_{\xi\widetilde{\xi}}$-lərin hər hansı W çoxluğunu ixtiyari götürərək, $P_X(\cdot) = p(\cdot)$ qəbul edərək, informasiya nəzəriyyəsində W – entropiya ($H_W(\xi)$ anlayışı) və ya bərpanın dəqiqliyi verildiyi halda entropiya anlayışı E. - e. anlayışının ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur. $H_W(\xi)$ kəmiyyəti (1) düsturu ilə təyin olunur, burada aşağı sərhəd $P_{\xi\widetilde{\xi}} \in W$ üzrə götürülür.

E. – e. anlayışı yalnız təsadüfi kəmiyyətlərə şamil olunmur. A. N. Kolmoqorov Q metrik fəzasında C çoxluğunun nisbi və mütləq E. – e. anlayışlarını daxil etmişdir. C şəbəkəsinin nöqtələrinin minimal sayı ε-nun loqarifminə C çoxluğunun nisbi E. – e. ($H(C, Q)$) deyilir. Çoxluğun mütləq E. – e., – C çoxluğunun diametri 2ε-dan böyük olmayan çoxluqlarla örtüyündəki elementlərinin minimal sayının loqarifmidir. Müxtəlif funksional siniflərin E. – e.-larının asimptotikasının tədqiqi yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin xüsusi bölməsidir. Təsadüfi kəmiyyətin E. – e. və metrik fəzada altçoxluqların E. e. arasında əlaqə vardır.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385–88; [3] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, с. 3–86; [4] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [5] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971.

ERQODİK MARKOV ZƏNCİRİ « эргодическая цепь Маркова; **ergodic Markov chain »** – qeyri – periodik, qeyri – dissipativ elə *Markov zənciridir* ki, onun vəziyyətlər fəzasında yalnız bircə müsbət qayıdışlı sinif vardır (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Vəziyyətləri sayı hesabidən çox olmayan $E = \{1, 2, ...\}$ çoxluğu olan və n addıma keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$-lərlə verilən E. M. z. X üçün $i \in E$, i-dən asılı olmayan, $(\mu_1, \mu_2, ...)$ stasionar paylanması əmələ gətirən $\mu_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(n)$ limitləri vardır (qeyd olunan bu xassə E. M. z.-nin tərifinin əsası kimi götürülür). Əgər $n \to \infty$ olduqda, $|p_{ij}(n) - \mu_j|$ sıfra məxrəci 1-dən kiçik və (i, j)-dan asılı olmayan $i, j \in E$ hər hansı həndəsi silsilədən gec olmamaqla yığılarsa, E. M. z. – həndəsi erqodik Markov zənciri adlanır (Həndəsi erqodiklik kriterisi haqqında bax, [2]).

Vəziyyətləri çoxluğu ixtiyari Markov zəncirləri üçün də uyğun təriflər daxil olunur. Belə zəncirlərin həndəsi erqodikliyi, məs., [3]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Попов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 316–19; [3] Нумеллин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989; [4] Карташов Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, № 2, с. 230–40.

ERQODİK MƏSƏLƏLƏR(i) Diofant yaxınlaşmalarının **« эргодические задачи** диофантовых приближений; **ergodic problems** of Diophantine approximation **»** – həqiqi ədədlərin rasional ədədlərlə yaxınlaşmalarının öyrənilməsi ilə və ya daha ümumi qoyuluşda sıfırın sonlu sayda tamqiymətli arqumentli funksiyalarının qiymətlərilə yaxınlaşması ilə bağlı dinamik sistemlərin *erqodik nəzəriyyəsinin* analizi və mülahizələrinin köməyilə öyrənildiyi məsələlərdir. Burada individual və maksimal erqodik teoremlər, qarışdırıcı erqodik çevirmələrin ölçülərini dəyişməz saxlayan anlayışlar xüsusilə geniş surətdə istifadə olunur. Belə yanaşma, E. Borel (E. Borel), A. Ya. Xinçinin və onların davamçılarının müəyyən arifmetik xassələrə malik ədədi nəzəriyyəsinin

metrik təsvir üzrə aldıqları nəticələrin müasir anlamı ilə əlaqədar olmuşdur.

Həqiqi ədədlərin q-lük kəsrlərə ayrılışı $[0, 1]$ intervalının $T_1 : x \to \{qx\}$ çevirməsi ilə üzvü surətdə bağlıdır, burada $\{\alpha\}$, – α ədədinin kəsri hissəsinin işarələməsidir. T_1 çevirməsi Lebeq ölçüsünü olduğu kimi saxlayır və erqodikdir; bu çevirmə nəticəsində $0, 1, ..., q-1$ «rəqəmlərinin» və $[0, 1]$ intervalından təsadüfi seçilmiş α ədədlərinin q-lük ayrılışında «rəqəmlər» qrupunun paylanmasını araşdırmaq mümkün olur.

Zəncirvari kəsrlər nəzəriyyəsində $[0, 1]$ parçasında

$$T_{2x} = \begin{cases} \{1/x\}, & x \neq 0 \quad \text{olduqda,} \\ 0, & x = 0 \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

düsturu ilə təyin olunan Qauss çevirməsi yaranmışdır. Bu çevirmə Lebeq ölçüsünə nəzərən erqodikdir. Qauss çevirməsi Lebeq ölçüsünü saxlamır, lakin bu ölçüyə nəzərən mütləq kəsilməz və həmin $\mathcal{A}$ σ – cəbrində

$$M(A) = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_A \frac{dx}{1+x}, \qquad A \in \mathcal{A}$$

düsturu ilə təyin olunan Qauss ölçüsünü dəyişməz saxlayır. Bundan başqa, T_2 – güclü qarışdırıcı çevirmədir. α ədədinin zəncirvari kəsrə ayrılışında i-ci natamam kəsri (bax, MƏ, t. 5, səh. 811) $a_i(\alpha)$ ilə, $q_i(\alpha)$ ilə isə i-ci münasib kəsrin məxrəcini işarə edərək, Birkhof – Xinçin erqodik teoreminin köməyilə, məs., sanki bütün α ədədləri üçün (Lebeq ölçüsü mənada) doğru olan aşağıdakı münasibətləri almaq olur:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (a_1(\alpha) + ... + a_n(\alpha)) = \infty,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln q_n(\alpha) = \frac{\pi^2}{12 \ln 2},$$

bu münasibət həm özü-özlüyündə, həm də diofant yaxınlaşmalarında mühüm əhəmiyyətə malikdirlər.

Qauss çevirməsi ədədlərin müxtəlif şəkilli sıralara ayrılışlarının (bax, [5]) və çoxhədlilərin kəsri hissələrinin paylanmasının (bax, [2]) öyrənilməsində intervalın hissə-hissə monoton çevirmələrinin xüsusi halıdır.

p və q tam ədədlər olduqda, demək olar ki, bütün α-lar üçün

$$|\alpha - p/q| < f(q)/q$$

bərabərsizlikləri araşdırılmışdır, burada $f(x)$ – müsbət artmayan funksiyadır; belə bərabərsizliklər sistemləri (birgə yaxınlaşmalar) və onların modifikasiyaları da tədqiq olunmuşdur. Xətti formalar üçün sistemlərə çox diqqət verilir; bu xətti formaların

$$\| \alpha_{i1} a_1 + ... + \alpha_{ik} a_k \| < f_i(a), \quad 1 \leq i \leq n$$

münasibətilə verildiyi fərz olunur, burada $\|x\|$ – ən yaxın tam ədədə qədər məsafədir, $a = \max(|a_1|, ..., |a_k|)$. $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k)$ vektorunun dəyişmə oblastı $\mathbb{R}^k$-dan tamqiymətli şəbəkə (xətti yaxınlaşmalar) və ya yalnız əvvəlcədən verilmiş çoxluq ola bilər (qeyri – xətti yaxınlaşmalar). Erqodik mülahizələrlə yanaşı dispersion metod da tətbiq olunur. Burada alınmış nəticələrin xarakterizasiyası üçün aşağıda iki teorem verilir (bax, həm də [3]).

m, n – natural ədədlər, Ω_{mn}, – ω matrislərinin fəzası olsun; ω-nın komponentləri vahid uzunluqlu intervaldan qiymətlər alır: $0 \leq \omega_{ij} < 1$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Ω_{mn} fəzasında mn – ölçülü E^{mn} – vahidi kubu verilmişdir. A_{mn}, – Ω_{mn} fəzasının $\mathbf{P}_{mn}$ – ölçülü çoxluqlarının sinfi olsun. Bu qayda ilə $(\Omega_{mn}, \mathcal{A}_{mn}, \mathbf{P}_{mn})$ ehtimal fəzası alınır. $\mathbf{a}$ $\mathbb{R}^n$-dən olan, komponentləri sıfırdan fərqli tamqiymətli vektor üçün

$$T : \omega \to (\mathbf{a}\omega_1, ..., \mathbf{a}\omega_m) (\mathrm{mod}\, 1)$$

münasibətilə

$$T = T\mathbf{a} : \Omega_{mn} \to \Omega_{1m}$$

inikası təyin olunur, burada ω_i, – ω matrisinin sətir vektoru, $\mathbf{a}\omega_i$ – vektorların skalyar hasili, $\mathrm{mod}\, 1$ isə vektorun komponentlərinin kəsr hissəsinin götürülməsini ifadə edir. T inikası $A \in \mathcal{A}_{1m}$ üçün

$$\mathbf{P}_{mn}(T^{-1}A) = \mu_{1m}(A)$$

ölçüsünü dəyişməz saxlayır; xətti asılı olmayan $\mathbf{a}_1$ və $\mathbf{a}_2$ vektorları üçün $T\mathbf{a}_1$ və $T\mathbf{a}_2$ inikasları stoxastik asılı deyildirlər, yəni $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{1m}$ üçün

$$\mathbf{P}_{mn} \{ T\mathbf{a}_1^{-1} A_1 \bigcap T\mathbf{a}_2^{-1} A_2 \} = \mathbf{P}_{1m}(A_1)\, \mathbf{P}_{1m}(A_2).$$

Bu iki xassə əsasında aşağıdakı teoremləri isbat etmək olur.

Teorem 1. S, – $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tamqiymətli vektorların sonsuz toplusu olsun və fərz olunur ki, hər bir $\mathbf{a} \in S$ vektoruna $A(\mathbf{a}) \in A_{1m}$ çoxluğu qarşı qoyulmuşdur. Əgər

$$\sum_{\mathbf{a} \in S} \mathbf{P}_{1m} \{A(\mathbf{a})\} \tag{1}$$

sırası yığılarsa, onda

$$(\mathbf{a}\omega_1, ..., \mathbf{a}\omega_n) \in A(\mathbf{a}) (\mathrm{mod}\, 1), \ \mathbf{a} \in S \tag{2}$$

şərtləri sanki bütün $\omega \in \Omega_{mn}$ üçün yalnız sonlu dəfə ödənilir. Əgər (1) sırası dağılarsa və S-dən olan ixtiyari iki vektor xətti asılı olmazlarsa, onda sanki bütün $\omega \in \Omega_{mn}$ üçün (2) şərtləri sonsuz dəfələrlə ödənilirlər.

Teorem 2. $\omega \in \Omega_{mn}$ verildiyi halda $N(Q, \omega)$ (2) şərti ödənilən elə $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in S$ vektorlarının sayı olsun ki, bunlar üçün $a = \max(|a_1|, ..., |a_n|) \leq Q$ şərti ödənilsin. Əgər S-dən olan ixtiyari iki vektor asılı olmazlarsa, onda sanki bütün $\omega \in \Omega_{mn}$ üçün

$$N(Q, \omega) = \Phi(Q) + O((\Phi^{1/2}(Q))(\ln \Phi(Q))^{3/2+\varepsilon})$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\varepsilon > 0$ ixtiyaridir və

$$\Phi(Q) = \sum_{\substack{\mathbf{a}\in S,\\ \max(|a_1|,\ldots,|a_n|)\le Q}} \mathbf{P}_{1m}(A(\mathbf{a})).$$

Belə məsələlərə kompleks ədədlər çoxluqları, p-lik ədədlər, formal üstlü sıralar, hər biri uyğun ölçü ilə təmin olunmuş adellər üçün də baxmaq olur.

Əd.: [1] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., 1969; [2] Конфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [3] Спринджук В. Г., Метрическая теория диофантовых приближений, М., 1977; [4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [5] Galambos J., Representations of real numbers by infinite series, B., 1976; [6] Schweiger F., «Acta arithmetica», 1966, v. 11, p. 451–60.

ERQODİK NƏZƏRİYYƏ « эргодическая теория; ergodic theory » – XX əsrin 20–30-cu illərində yaranmış riyaziyyat bölməsidir. Bu nəzəriyyənin *erqodiklik*, *qarışma* kimi əsas anlayışları statistik fizikanın əsaslandırılması probleminə həsr olunmuş L. Boltsmann (L. Boltzmann) və C. Gibbsin (J. Gibbs) əsərlərinə əsaslanır. E. n.-nin ilk ümumi teoremlərindən biri *Birkhof – Xinçin erqodik teoremi* hesab olunur. Bu teoremdə hökm edilir ki, hər hansı ehtimali ölçüsünü dəyişməyən çevirmələrin (avtomorfizmlərin, axınların və ya endomorfizmlərin və semi – axınların) birparametrik qruplarında və ya semi – qruplarında zaman üzrə orta qiymətlər sanki yəqin mövcuddur. Belə qruplar və ya semi – qruplar dinamik sistemlər adlanır. Bu sistemlər E. n.-nin öyrəndiyi əsas obyektlərdir.

Ehtimal nəzəriyyəsində dinamik sistemlər dar mənada stasionar təsadüfi proseslərin realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmə qrupları kimi təbii surətdə yaranır. Dinamik sistemlərə differensial tənliklər nəzəriyyəsinin, statistik fizikanın, mexanikanın, qeyri – xətti rəqslər nəzəriyyəsinin, plazma fizikasının və d.-nin bir çox problemlərində təsadüf olunur. Məs., kompakt çoxobrazlıya malik Hamilton sistemlərində sabit enerjili axın (belə sistemin trayektoriyaları boyunca yerinidəyişmələrdən ibarət ola bilər) mikrokanonik Liuvill paylanmasını dəyişmir və buna görə də, dinamik sistemdir. Dinamikanın təsiri nəticəsində faza həcmi azalan, mexanikanın dissipativ sistemlərində faza fəzalarında tez-tez invariant cəzbedici çoxluqlar yaranır, məs., stoxastik attraktorlar və dinamikanın xassələri bunlarda topalanmış təbii dəyişməz qalan ehtimal ölçülərinin xassələrini təyin edir. Dinamik sistemlər ədədlər nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri ilə bağlı yaranır, xüsusilə də, müntəzəm paylanma ilə bağlı məsələlərdə. Məs., məhşur Veyl teoreminə əsasən,

$$\mathscr{P}_n = a_0 n^r + a_{r-1} n + \ldots + a_r . \qquad (1)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ əmsallarından heç olmasa biri irrasional olarsa və bu əmsallar müntəzəm paylanmaya malik olarsa, onda $\{\mathscr{P}(n)\}$-in kəsri payları – r – ölçülü torun ölçünü saxlayan xüsusi çevirməsi üçün Birkhof – Xinçin erqodik teoreminin gücləndirilmiş halı kimi alına bilinir (bax, [1]).

Dinamik sistemlər kombinatorikada, qeyri – kommunativ cəbrlərdə, qrupların təsviri nəzəriyyəsində və b. əmələ gəlir (bax, [1], [2]).

Bu zaman bu oblastlarda həm çevirmələrin ölçüsünü dəyişməz saxlayan qruplar, həm də ölçüləri ölçünün mütləq kəsilməzliyi mənasında ekvivalent ölçülərə çevirən qruplar yaranır.

$X_0(\omega)$ – ixtiyari təsadüfi kəmiyyət, $\{S^{(t)}\}$, – Ω fəzasında axın olsun. $X_t(\omega) = X_0(S^t\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi dar mənada stasionar təsadüfi proses təşkil edir. Əgər $\{S^{(t)}\}$ axını ilkin stasionar prosesin yerinidəyişmələr qrupudursa, onda $\omega \to \{X_t(\omega)\}$ keçidinə bu prosesin qeyri – xətti çevirməsi kimi baxmaq olar. E. n. belə yaranan bütün stasionar proseslərin xassələrini öyrənir. Əgər X_0 elə təsadüfi kəmiyyətdirsə ki, bütün X_t təsadüfi kəmiyyətlərinin $(-\infty < t < \infty)$ minimal σ – cəbri bütün ölçülən çoxluqların σ – cəbri ilə üst-üstə düşür, onda X_0 doğurucu təsadüfi kəmiyyət adlanır, $\{S^{(t)}\}$ dinamik sistemi bu halda qurulmuş stasionar prosesin yerinidəyişmələr qrupuna izomorf olur (bax, *İzomorfizmi dinamik sistemlərin* metrik).

Ehtimal nəzəriyyəsinin tipik məsələlərindən fərqli olaraq dinamik sistemin «təsadüfülüyü» yalnız başlanğıc ω nöqtəsinin seçilməsindən ibarətdir ki, bundan sonra bu nöqtənin evolyusiyası sırf determinik surətdə baş verir. Bu səbəbdən fiziki ədəbiyyatda E. n., bir çox hallarda determinik xaos nəzəriyyəsi də adlandırılır.

$(\Omega, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza, $\{S^{(t)}\}$, – Ω fəzasının çevirmələrinin birparametrik qrupu və ya semi – qrupu olsun.

Aşağıda $\{S^{(t)}\}$-nin dinamik sistemləri bu və ya digər requlyarlıq xassələrli təsadüfi proseslərlə yaxınlaşdıran, adətən, stoxastik kimi sayılan xassələri verilir.

1. $\{S^{(t)}\}$ qrupuna nəzərən invariant ehtimal paylanmalarının varlığı. İxtiyari $C \in \mathscr{A}$ və ixtiyari t, $-\infty < t < \infty$ üçün $\mathbf{P}(S^tC) = \mathbf{P}(C)$ olarsa, burada $\mathbf{P}$ ehtimal paylanması $\{S^{(t)}\}$-yə nəzərən invariant paylanma adlanır. Əgər Ω – kompakt, $\mathscr{A}$, – Ω-nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş Borel σ – cəbri, $\{S^{(t)}\}$ isə Ω-nın birparametrik homeomorfizmlər qrupudursa, onda heç olmazsa bir invariant ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ vardır. Bu nəticə Boqolyubov – Krılovun ümumi teoremindən alınır; bu teoremin isbatındakı mülahizələr olduqca ümumi xarakterə malikdir və bir çox digər məsələlərdə onlara təsadüf olunur, məs., faza fəzası kompakt Markov zəncirinin heç olmazsa bir stasionar paylanmasının varlığının isbatı buna misaldır.

İnvariant ehtimal paylanmaları cırlaşan, yəni $\{S^{(t)}\}$ qrupunun bir və ya bir neçə trayektoriyasında topalanmış paylanmalar ola bilər. Cırlaşmayan paylanmaların alınması üçün bəzən aşağıdakı qaydadan istifadə olunur. İxtiyari $\mathbf{P}$ ehtimal paylanması üçün onun t müddətində yerinidəyişməsi $(S^*)^t\mathbf{P}$ ilə işarə olunur, yəni

$$((S^*)^t\mathbf{P})(C) = \mathbf{P}(S^{-t}C),\ C \in \mathscr{A}.$$

Əgər $(S^*)^t\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}_0$ münasibəti hər hansı bir təbii mənada ödənilərsə, onda $\mathbf{P}_0$ invariant ehtimal paylanması olacaqdır.

Stoxastik attraktorlu sistemlərdə və onlara yaxın sistemlərdə invariant ehtimal paylanmaları məhz belə qurulur.

2. Erqodiklik. $\{S^{(t)}\}$ qrupu üçün $\mathbf{P}_0$ invariant ehtimal paylanmasının seçildiyi fərz olunur. Birkhof – Xinçin erqodik teoremində isbat olunur ki, ixtiyari $f \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}_0)$ üçün sanki hər yerdə zaman üzrə orta qiymətlərin limiti sanki yəqin (hər yerdə) vardır, yəni

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(S^t\omega)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(S^{-t}\omega)\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(S^t\omega)\,dt.$$

$\mathbf{P}_0$-ın erqodikliyi bütün bu limitlərin $\int f(\omega)\,d\mathbf{P}_0(\omega)$ riyazi gözləməsinə bərabər olmaları ilə ifadə olunur, bəzi hallarda isə daha güclü stoxastik xassələrin nəticəsi kimi alınır.

3. Q a r ı ş m a. $\{S^{(t)}\}$ dinamik sistemi üçün təyin olunmuşdur ki, $\mathbf{P}_0$ ehtimal paylanması invariant və erqodik paylanmadır və $\mathbf{Q}_0$ ehtimal paylanması $\mathbf{P}_0$-a nəzərən mütləq kəsilməz paylanmadır, $q_0(\omega)=\frac{d\mathbf{Q}_0}{d\mathbf{P}_0}$. Onda $\mathbf{Q}_t=(S^*)^t\mathbf{Q}_0$ paylanması da $\mathbf{P}_0$-a nəzərən mütləq kəsilməz paylanmadır və onun paylanma sıxlığı funksiyası $q_t(\omega)=q_0(S^t\omega)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Əgər ixtiyari məhdud ölçülən f üçün

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega f(\omega)\,d\mathbf{Q}_t(\omega)=\lim_{t\to\infty}\int f(\omega)\,q_t(\omega)\,d\mathbf{P}_0(\omega)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int f(\omega)\,q_0(S^t\omega)\,d\mathbf{P}_0=\int f(\omega)\,d\mathbf{P}_0(\omega)$$

olarsa, $\{S^{(t)}\}$ – qarışdırıcı sistemdir (bax, *Qarışma*). $\mathbf{Q}$ ehtimal paylanması bərabərçəkili olmayan ehtimal paylanması kimi anlaşılır. Qarışma isə onu ifadə edir ki, hər bir bərabərçəkili olmayan ehtimal paylanması dinamikanın təsiri ilə bərabərçəkili $\mathbf{P}_0$ ehtimal paylanmasına yığılır. Qarışma məhz bu şəkildə C. Gibbs tərəfindən daxil olunmuşdur. Qarışmadan erqodiklik alınır. Qarışmasız erqodik sistemlər xalis nöqtəvi spektrli *dinamik sistemlər* nəzəriyyəsində alınır.

4. R e q u l y a r l ı q. Kolmoqorovun «Sıfır – vahid qanunu» ehtimal nəzəriyyəsində böyük rola malikdir. Bundan başqa A. N. Kolmoqorov K *– sistem* anlayışını (bax, [3]) daxil etmişdir. Bu sistem müəyyən mənada «*sıfır – vahid qanununun*» ödənildiyi dinamik sistemdir. Bu anlayışlarla yanaşı K *– qarışma* və K *– bölgü* kimi yaxın anlayışlar yaranmışdır. K – sistemlər requlyar stasionar proseslərə analoqlardır, lakin bunlara tamamilə identik deyildirlər (bax, *Qauss dinamik sistemi*).

Realizasiyaları $\omega=\{\omega(s),\ -\infty<s<\infty\}$ olan dar mənada stasionar təsadüfi prosesin yerinidəyişmələri qrupu üçün əgər elə $\eta_0=f(\omega)=f(\{\omega(s),\ -\infty<s<\infty\})$ doğurucusu varsa ki, ona uyğun olan $\eta_t=f(\{\omega(s+t),\ -\infty<s<\infty\})$ stasionar prosesi requlyar prosesdir (yəni «sıfır – vahid qanununu» ödəyir), onda bu qrup K – sistemdir. K – sistemlər – erqodik və qarışdırıcı sistemlərdir. Tərsi isə sadə misallardan göründüyü kimi doğru deyildir. Bir sıra hallarda K – xassənin ödənildiyini təyin etmək erqodiklik və ya qarışmanı təyin etməkdən sadədir.

5. M ə r k ə z i l i m i t t e o r e m i n i n ö d ə n i l m ə s i. Requlyar stasionar proseslər üçün çox az əlavə şərtlərlə mərkəzi limit teoremi ödənilir. Dinamik sistemdə bu teoremin hər hansı $X_0=f(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti üçün doğruluğu belə anlaşılır ki,

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}X_t}}\,(X_t-t\mathbf{M}X_0)$$

normalanmış təsadüfi kəmiyyəti $t\to\infty$ olduqda Qauss paylanması ilə paylanır, burada $X_t(\omega)=\int_0^t f(S^u\omega)\,du$ və $t\mathbf{M}X_0=\mathbf{M}X_t$, $\mathbf{D}X_t$ – uyğun olaraq X_t-nin riyazi gözləməsi və dispersiyasıdır. Ehtimal nəzəriyyəsinə bilavasitə aid olmayan dinamik sistemlər üçün mərkəzi limit teoreminin müddəası bəzən olduqca gözlənilməz şəkildə ola bilir. Həmişə olduğu kimi bu teoremin isbatı $X_t=f(S^t\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi üçün zəif yığılma xassələrinin ödənilməsinə gətirilir. E. n.-nin tətbiqində mərkəzi limit teoreminin isbatı X_0 təsadüfi kəmiyyətlərinin mümkün olduqca daha geniş sinfi üçün maraq kəsb edir.

6. Z a m a n k o v a r i a s i y a l a r ı n ı n a z a l m a x a r a k t e r i. E. n.-nin tətbiqi məsələlərinin bir çoxunda

$$b_f(t)=\mathbf{M}f(S^t\omega)f(\omega)-(\mathbf{M}f(\omega))^2$$

zaman kovariasiyalarının azalma xarakteri mühüm rol oynayır. Markov stasionar prosesləri halında belə kovariasiyalar əksərən eksponensial azalır, belə ki, eksponentin üstü uyğun Markov operatorunun spektrindəki çatla (ara ilə) ifadə olunur. Dinamik sistemlərdə kovariasiyaların eksponensial azalması, adətən, dinamik sistemin Markov approksimasiyalarının qurulması ilə təyin olunur. $b_f(t)$-nin dəqiq asimptotik tədqiqi E. n.-nin ən çətin problemlərindəndir. Əksər hallarda kovariasiyaların azalması olduqca yavaş olur.

7. B e r n u l l i y e r i n i d ə y i ş m ə s i n ə i z o m o r f i z m. *Bernulli yerinidəyişməsi* ən güclü stoxastik xassələrə malik diskret zamanlı dinamik sistemdir. Stoxastik xassə kimi bəzən $\{S^t\}$ dinamik sisteminin bu yerinidəyişməyə izomorfizmi təklif olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, izomorfizm, adətən, ölçülən olur və əlavə struktur saxlamır, məs., topologiyanı, hamarlılığı. Buna görə də, izomorfizm olduqda təbii funksiyalar sinifləri üçün kovariasiyaların asimptotikası üzərində, mərkəzi limit teoreminə və s.-yə nəzarət itə bilər.

E. n.-nin əsas məsələlərindən biri dinamik sistemlərin və ya digər siniflərinin stoxastik xassələrinin araşdırılmasıdır. Differensial tənliklər sisteminin trayektoriyaları boyunca yerinidəyişmələr qrupu olan klassik dinamik sistemlərdə stoxastik xassələrin meydana gəlməsi dinamikanın dayanıqlı olmaması ilə izah olunur. Bu ümumi və mühüm ideyaya aid olan ilk qeydlərə H. Puankarenin (H. Poincaré) işlərində təsadüf olunur. Statistika üçün qeyri – dayanıqlılığın rolu J. Adamar (J. Hadamard), C. Birkhof (G. Birkhoff), E. Hopf (E. Hopf) kimi alimlərin araşdırılmalarında öz əksini tapmışdır ([2], [4]). Dinamikanın qeyri – dayanıqlılığı və dinamik sistemin stoxastik xassələri arasında əlaqənin olması XX əsrin 60-ci illərinin başlanğıcında A. N. Kolmoqorovun əsərində (bax, [3]) dinamik sistemlərin e n t r o p i y a s ı və K – s i s t e m anlayışlarının daxil olunması ilə göstərilmişdir. Sonradan *entropiya* anlayışı daha ümumi şəkildə təklif olunmuşdur. Dinamik sistemin entropiyası izomorfizmin invariantıdır və bu da A. N. Kolmoqorova E. n.-nin əsas problemlərindən biri olan hesabiqat Lebeq spektrli dinamik sisteminin izomorfluğu haqqında hökm verməyə əsas vermişdir və o göstərmişdir ki, müxtəlif qiymətlərli entropiyası olan Bernulli yerinidəyişmələri öz aralarında metrik izomorf deyildirlər, A. N. Kolmoqorovun bu nəticəsindən sonra eyni zamanda aydın olur ki, K – sistem halında dinamik sistemlərin izomorfizmi probleminə informasiya nəzəriyyəsi baxımında stasionar kodlama problemi kimi yanaşmaq lazımdır. Bu istiqamətdə ilk nəticələr L. D. Meşalkin və Y. Q. Sinay (bax, [1], [2]) tərəfindən alınmışdır. K – sistem üçün metrik

izomorfizm probleminin son nəticələri D. Ornsteynə məxsusdur (bax, [6]). Xüsusi halda o göstərmişdir ki, bərabər entropiyalı Bernulli yerinidəyişmələri izomorfdurlar. Bununla belə, K – sistem sinfində entropiya metrik invariantların tam sistemini təşkil etmir və bərabər qiymətli entropiyaya malik olan cüt-cüt qeyri – izomorf K – sistemlərin kontiniumu mövcuddur. Bu nəticələr stasionar proseslərin requlyarlıq xassələrinin dərin analizi ilə və müxtəlif requlyarlıq xassələrli incə proseslərin qurulması ilə alınmışdır.

E. n.-də zəif stoxastik xassəli dinamik sistemlər də mühüm rol oynayır. Belə sistemlərdən biri kimi ilk növbədə xalis nöqtəvi spektrli dinamik sistemlər qeyd olunmalıdır. Kolmoqorov – Arnold – Mozerin məşhur nəzəriyyəsində isbat olunur ki, belə sistemlər Hamilton sistemlərinin erqodik komponentlərində yaranır və bunlar da inteqrallanan Hamilton sistemlərinin kiçik sapmalarıdır. $(x_1, \ldots, x_d)$ koordinatlarlı d – ölçülü torun

$$(x_1, \ldots, x_d) \to$$
$$\to (x_1 + c_1,\ x_2 + c_2 x_1,\ \ldots,\ x_d + c_d,\ x_1 + \ldots + c_{d,d-1}x_{d-1})$$

şəkilli çevirmələri **çəpinə yerinidəyişmələr** adlanır və bunlar ədədlər nəzəriyyəsinə E. n.-nin tətbiqində yaranır, burada c_{ij} – tam ədədlərdir (bax, [1]).

Bircins təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində «zaman» kimi $\mathbb{R}^d$ və $\mathbb{Z}^d$ fəzaları götürüldükdə, çevirmələrin ölçülərini saxlayan qruplar yaranır. Erqodiklik, erqodik teoremlər, qarışma, entropiya çevirmələrinin birparametrik qrupu halında olduğu kimi təyin edilir. Requlyarlıq xassələri isə birölçülü zaman halında olduğundan daha da müxtəlif və mürəkkəb ola bilir. Bircins meydanlara aid çoxsaylı misallar bərabərçəkili statistik mexanikada yaranır.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985; [3] Колмогоров А. Н., в кн.: Избранные труды. Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 86–91; [4] Крылов Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М. – Л., 1950; [5] Синай Я., «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 4, с. 768–71; [6] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [7] Нейман Д ж., Избранные труды по функциональному анализу, т. 1–2, пер. с англ., М., 1987.

ERQODİK SİNİF (fi) Markov zənciri**nin « эргодический класс** цепи Маркова; **ergodic class** / set in a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; erqodik sinif.

ERQODİK TEOREMLƏR « эргодические теоремы; ergodic theorems » – *təsadüfi prosesin* zaman üzrə orta qiymətlərinin limitinin varlığı və ya bunların faza üzrə orta qiymətlər ilə üst-üstə düşməsi haqqında ixtiyari müddəadır. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında diskret zamanlı [yəni $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$] və ya kəsilməz zamanlı [yəni $T = [0, \infty)$], qiymətləri $(\mathscr{X}, B)$ faza fəzasından olan $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesinin verildiyi fərz olunur; $\mathscr{N}$ elə minimal σ cəbr olsun ki, bütün $t \in T$ qiymətlərində ζ_t təsadüfi kəmiyyətləri bu cəbrə nəzərən ölçülən olsunlar.

Fərz olunur ki, ζ_t, $t \in T$ prosesinin trayektoriyaları çoxluğu yerinidəyişmələrə nəzərən qapalı çoxluqdur. Yəni tərifə əsasən ixtiyari $\omega \in \Omega$ və ixtiyari $s \in T$ üçün Ω fəzasında elə ω_s^t elementi vardır ki, $\zeta_t(\omega_s^t) = \zeta_{t+s}(\omega)$ bərabərliyi bütün $t \in T$ üçün ödənilir.

Yerinidəyişmələrə nəzərən trayektoriyalar çoxluğunun qapalılığı ζ_t, $t \in T$ təsadüfi prosesi ilə elə θ_t, $t \in T$ yerinidəyişmələr operatorlarının ailəsini əlaqələndirmək imkanı yaradır ki, bu operatorlar $\mathscr{N}$ – ölçülən ζ təsadüfi kəmiyyətlərinə və Γ hadisələrinə $\theta_t \zeta(\omega) = \zeta(\omega_t^+)$ və $\omega \in \theta_t \Gamma$ qaydası ilə, yalnız və yalnız, $\omega_t^+ \in \Gamma$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ olduğu halda təsir edir.

Əgər $T = [0, \infty)$ olarsa, onda ζ_t, $t \in T$ prosesi aşağıdakı mənada ölçülən proses fərz olunur: $(t, \omega) \to \zeta_t(\omega)$ inikası $([0, \infty) \times \Omega, \mathscr{B}_+ \times \mathscr{N})$ ölçülən fəzasının $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasına inikası kimi anlaşılır ($\mathscr{B}_+$, – $[0, \infty)$ yarımoxunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir).

ζ_t, $t \in T$ prosesinin bu mənada ölçülənliyi yerinidəyişmiş $\theta_t \zeta$ kəmiyyətinin t, ω dəyişənlərinin toplusu üzrə ölçülənliyini təmin edir.

$\mathscr{N}$ – ölçülən ζ təsadüfi kəmiyyətinin **zaman üzrə orta qiymətləri**, diskret zaman halında

$$S_t(\zeta) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \theta_k \zeta$$

normalanmış cəmləri, əgər kəsilməz zaman halına baxılarsa,

$$S_t(\zeta) = \frac{1}{t} \int_0^t \theta_u \zeta \, du$$

inteqralları olur.

ζ təsadüfi kəmiyyətinin **faza üzrə orta qiyməti** – məhz onun riyazi gözləməsi – $\mathbf{M}\zeta$ kəmiyyətidir. Beləliklə, E. t. ya $S(\zeta) = \lim_{t \to \infty} S_t(\zeta)$ limitinin varlığını (hər hansı mənada) və ya $S(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta)$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün şərtləri formalaşdırır.

Belə növ nəticələrdən ən mühümü – *Birkhof – Xinçin erqodik teoremidir*; bu teoremdə hökm olunur ki, əgər zaman diskret, $\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ – stasionar ardıcıllıq və $\mathbf{M}|\zeta| < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t \to \infty} S_t(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta \mid \mathscr{G}) \qquad (*)$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur, burada $\mathscr{G}$ σ – cəbri, yalnız və yalnız, elə $\Gamma \in \mathscr{N}$ hadisələrini özündə saxlayır ki, onlar üçün $\theta_t \Gamma = \Gamma$ bərabərliyi bütün $t \geq 0$ üçün ödənilir. Əgər bundan başqa hər hansı $p \geq 1$ qiymətində $\mathbf{M}|\zeta|^p < \infty$ olarsa, onda (*) münasibətində yığılma p – tərtiblə orta mənada da doğrudur.

Analoji müddəa kəsilməz zaman halında da doğrudur. Bu halda $S(\zeta)$-nın $\mathbf{M}(\zeta)$ ilə üst-üstə düşməsi $\mathscr{G}$ σ – cəbrinin triviallıq məsələsinə gətirilir. Trivial $\mathscr{G}$ σ – cəbri ilə verilən stasionar prosesləri **erqodik proseslər** də adlandırırlar. Prosesin erqodikliyi üçün onun qarışma xassəsinə malik olması kafidir. Asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı; kəsilməz spektral sıxlığa malik Qauss təsadüfi prosesi; vəziyyətlər çoxluğu sonlu və ya hesabi, müsbət qayıdışlı Markov zənciri erqodik təsadüfi proseslərə misaldır.

Bu gün üçün ümumi hesab edilən E. t.-dən biri aşağıdakı kimi ifadə olunur. Fərz olunur ki, elə $\mathcal{N}$ – ölçülən $\tau \geq 0$ kəmiyyəti tapılar ki, ζ_t, $t \geq 0$ və $\zeta_{\tau+t}$, $t \geq 0$ proseslərinin sonlu-ölçülü paylanmaları üst-üstə düşər. Onda əgər $\mathbf{M}\tau < \infty$ və $\mathbf{M}\int_0^\tau \theta_t \,|\zeta|\, dt < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t\to\infty} S(\zeta) = \mathbf{M}\left(\int_0^\tau \theta_t\, \zeta\, dt \,|\, \mathcal{G}\right) \Big/ \mathbf{M}(\tau\,|\,\mathcal{G})$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir.

Bəzən

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\theta_t\, \zeta, \quad \lim_{t\to\infty} S_t(\zeta)/S_t(\eta)$$

və ya

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\theta_t\, \zeta \,/\, \mathbf{M}\theta_t \eta$$

şəklində limitlərin varlığı haqqında teoremlər də E. t.-lər adlanır.

Bax, *Erqodik teoremlər* stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi meydanlar üçün.

Əd.: [1] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Шуренков В. М., Эргодические теоремы и смежные вопросы теории случайных процессов, К., 1981.

ERQODİK TEOREMLƏR Markov prosesləri üçün «эргодические теоремы для марковских процессов; **ergodic theorems** for Markov processes» – 1) faza fəzalarında E. t. – zaman parametri məhdud olmadan artdıqca kəsilməz və həmçinin diskret zamanlı *Markov proseslərinin* keçid funksiyalarının limitlərinin və qiymətlərinin varlığı haqqında teoremlərdir. Limit anlayışı konkret vəziyyətdən asılı olaraq ifadə olunur, məs., o, nöqtəvi yığılma, Cezaro mənada yığılma və ya hər hansı Banax fəzasında yığılma kimi yığılmalarla əlaqədar ola bilər. Markov zəncirlərinin erqodik xassələrini A. A. Markov özü öyrənməyə başlamışdır (1906 – 07). Bu problem sonradan A. N. Kolmoqorov (1936), V. Deblin (W. Doeblin) və digər tədqiqatçıların nəzərini cəlb etmişdir və hal-hazırda da öz aktuallığını itirməmişdir. E. t.-in praktiki əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, bir çox fiziki sistemlər çoxluqlarında bu teoremlər limit və ya müəyyən mənada bərabərçəkili paylanmaları təsvir edir.

A. N. Kolmoqorovun aşağıdakı nəticələri (bax, [5], [2]) klassik nəticələr sayılır. $p_{ij}(n)$ – hər hansı bircins sonlu və ya hesabi X Markov zənciri üçün n addıma i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalı olsun. Onda Cezaro limiti

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}(m) = \pi_{ij}$$

vardır, belə ki, əgər j qayıdışsız vəziyyət olarsa, $\sum_j \pi_{ij} \leq 1$ və $\pi_{ij} = 0$ olur (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Əgər i zəncirin qayıdış vəziyyətidirsə, onda

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(nd) = d\, f_{ii}^{-1}$$

olur, burada d, – i vəziyyətinin periodu, f_{ii}, – i vəziyyətinə qayıdış müddətinin orta qiymətidir (bax, *Markov zənciri*; orta qayıdış müddəti). Bu müddəalardan mühüm nəticələr alınır. Məs., X sonlu və ayrılmayan zəncir olarsa, onda π_{ij} ədədləri i-dən asılı olmur və $\mu_j \equiv \pi_{ij}$ şərtini ödəyən $\{\mu_{ij}\}$ toplusu stasionar paylanma təşkil edir. Əgər i və j vəziyyətləri $d = 1$ periodlu eyni bir qayıdışlı sinifdən olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = f_{jj}^{-1}$$

olur.

E. t.-də limitə yığılma sürəti mühüm nəzəri və tətbiqi maraq doğurur, məsələn, bəzi $\rho < 1$ və $c_{ij} < \infty$ qiymətlərində $n \geq 1$ olduqda $|p_{ij}(n) - \mu_j| \leq c_{ij}\rho^n$ qiymətləndirilməsi kimi; bu halda i və j X Markov zəncirinin vəziyyətləri çoxluğu $\mathscr{E}$-də dəyişir, μ_{ij} ədədləri isə zəncirin stasionar paylanmasını əmələ gətirir (bu halda zəncir həndəsi erqodik zəncir adlanır). Sonuncu qiymətləndirmənin yerinə yetməsi üçün zəruri və kafi şərt $\mathscr{E}$ vəziyyətlər çoxluğunda müəyyən xassələrə malik funksiyanın varlığı terminlərilə ifadə olunur (bax, [12]); yığılma sürəti üstlü olduğu hal üçün oxşar qiymətləndirmələr də vardır. *Döblin şərti* və zəncirin ayrılmayan zəncir olması onun həndəsi erqodikliyini doğurur; bu halda c_{ij} konstantlarını müntəzəm məhdud hesab etmək olar.

$X = (X_n, \mathbf{P}_x)$ bircins Markov zənciri ixtiyari $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verildiyi halda E. t.-lərin alınmasında M. Freşe (M. Frechet), V. Döblin, N. M. Krılov, N. N. Boqolyubov, K. Yosida (K. Yosida) və S. Kakutani (Sh. Kakutani) kimi alimlərin xidmətlərini qeyd etmək lazımdır (bax, [1]). Orey teoreminə (bax, *Markov zənciri*) görə, əgər çoxaddımlı keçid ehtimalları $p(n, x, \Gamma)$, $\Gamma \in \mathscr{B}$, $n \geq 1$ olan X zənciri Harris qayıdışlı, qeyri – periodik və stasionar μ paylanmasına malik zəncirdirsə, onda $\mathscr{B}$-də υ ehtimal ölçüsünün, yükün tam variasiyası νP^n-nin seçilməsindən asılı olmayaraq μ stasionar paylanması $n \to \infty$ olduqda 0-a yaxınlaşır, burada

$$\nu P^n(\cdot) = \int p(n, x, \cdot)\, \nu(dx).$$

Periodik zəncir üçün analoji müddəa müvafiq şəkildə doğrudur. Əgər X Harris qayıdışlı zəncirdirsə və $\mu(\mathscr{E}) = \infty$ şərtini ödəyən invariant μ ölçüsünə malikdirsə, $\mu(\Gamma) < \infty$ olduğu hər bir halda $x \in \mathscr{E}$ olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda, $p(n, x, \Gamma) \to 0$ olur (bax, [4]).

Baxılan mövzuda keçid ehtimallarının kvazikompaktlıq şərti mühüm rol oynamışdır; bu şərtdə tələb olunur ki, X zənciri üçün elə m natural ədədi və $B(\mathscr{E})$ fəzasında təsir edən T kompakt operatoru olsun ki, $\|P^m - T\| < 1$ şərti ödənsin, burada $B(\mathscr{E})$ – norması $\|f\| = \sup|f|$ olan məhdud $\mathscr{B}$ – ölçülən f funksiyalarının Banax fəzası, P, – $B(\mathscr{E})$-də təyin olunmuş operatordur:

$$Pf(\cdot) = \int f(y)\, p(\cdot, dy).$$

Bu halda E. t. aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [4]). $\mathscr{E}$ fəzasında cüt-cüt kəsişməyən aşağıdakı xassələrli $E_k \in \mathscr{B}$ çoxluqlarının sonlu ailəsini seçmək olar: a) hər bir E_k uducu vəziyyətdir, yəni $x \in E_k$ olduqda $p(x, E_k) = 1$; b) X zəncirinin E_k-dakı hissəsi X_k [yəni $(E_k, \mathscr{B}_k)$ ölçülən fəzasında Markov zənciridir, burada $\mathscr{B}_k$, – $\mathscr{B}$ σ – cəbrinin E_k-da izidir, $p(x, \Gamma)$, $x \in E_k$, $\Gamma \in \mathscr{B}_k$, – X_k zəncirinin keçid ehtimallarıdır] Harris qayıdışlı zəncirdir və stasionar μ_k paylanmasına malikdir; c) əgər $x \in D = \mathscr{E} \setminus \bigcup_k E_k$ olarsa, onda $p(n, x, D) \to 0$ münasibəti $n \to \infty$ olduqda $x \in D$ üzrə mütəzəm ödənilir. Bundan başqa, X_k zəncirlərindən hər hansı biri qeyri – periodik olarsa, onda $p(n, x, \Gamma) \to \mu_k(\Gamma)$ münasibəti $n \to \infty$ olduqda $x \in E_k$ üzrə müntəzəm ödənilir (X_k periodik zəncir olduğu halda sadə dəyişikliklər tələb olunur). Qeyd olunanlardan, məs., kvazikompaktlıq və Döblin şərtinin eynigüclülüyü tələbi alınır. Nəhayət,

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} p(m, x, \Gamma) = \sum_k \pi(x, E_k)\, \mu_k(\Gamma)$$

münasibəti $x \in \mathscr{E}$ və $\Gamma \in \mathscr{B}$ üzrə müntəzəm ödənilir, burada

$$\pi(x, E_k) = \lim_{n \to \infty} p(n, x, E_k)$$

– E_k çoxluqları üzrə final paylanmadır.

Markov zəncirləri üçün digər E. t. mövcuddur. Feller zəncirləri (bax, [3], [11]) üçün, yəni məhdud kəsilməz funksiyalar ailəsini özündə inikas etdirən P operatorlarına uyğun topoloji fəzalarda zəncirlər üçün E. t. xüsusi yer tutur. Nisbətlər üçün limit teoremləri də E. t.-in müxtəlif formalarıdır (bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətlər üçün). Bu və ya digər E. t.-in tətbiqinin mümkünlüyü zəncirdə trivial olmayan ölçünün və ya onun analoqlarının olmasından asılıdır. Bu və digər bir sıra səbəblərə görə belə ölçülərin varlığı və onun strukturunun təsviri böyük maraq doğurur (bax, [3], [4], [10], [14]).

Kəsilməz zamanlı Markov prosesləri üçün E. t. Markov zəncirləri ilə müqayisədə ikinci plana keçir. Bu onunla izah olunur ki, Markov prosesləri üçün E. t.-in əksəriyyəti zəncirlərlə əlaqədar E. t.-də yaranır ki, bu da zəncirlərin uyğun proseslərə məqbul surətdə daxil edilməsi ilə bağlı olur (bax, [7], [13]). Beləliklə, Harris qayıdışlı zəncirlər üçün E. t. Harris qayıdışlı, müəyyən requlyarlıq şərtini (bax, [7]) ödəyən standart proseslər üçün E. t. kimi ifadə olunur (bax, *Qayıdışlı Markov prosesi*).

İdeyaları, metodikası və ümumi istiqamətinə görə Markov prosesləri və zəncirləri üçün erqodik nəzəriyyə ümumi nəzəriyyə və funksional analizin oxşar bölmələri ilə sıx əlaqədardır. Funksional analizin xüsusi metodlarından istifadə etməklə E. t.-in isbatında mühüm effektlərin olduğu aydın olmuşdur (bax, [11], [12]). Klassik işlərin əsaslandığı regenerasiya ideyaları bununla əlaqədar [9]-da yeni tərzdə ifadə olunmuşdur. Bircins olmayan hal da araşdırılmışdır.

2) Elementar hadisələr fəzasında E. t. – böyük ədədlər qanunu tipli teoremlər və nisbətlər üçün limit teoremləri onların analoqlarıdır (bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətlər üçün). Belə teoremlər müasir erqodik nəzəriyyə və stasionar proseslər nəzəriyyəsinin analoji nəticələri ilə bilavasitə çox yaxındır.

Qeyd olunan E. t.-ə misal aşağıdakı müddəa ilə ifadə olunur (bax, [2]). X – stasionar paylanması $\{\mu_j\}$ olan, vəziyyətləri çoxluğu hesabi çoxluğu aşmayan erqodik Markov zənciri olsun. Onda başlanğıc paylanması ixtiyari olduğu halda

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} f(X_m) = \sum_j \mu_j f(j)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, çünki $f(j)$, $j \in \mathscr{E}$ funksiyası üçün qeyd olunan sıra mütləq yığılır. Döblin şərtini ödəyən zəncirlərin ümumi halı üçün analoji nəticə alınmışdır.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [3] Foguel S. R., The erqodic theory of Markov processes, N. Y. – [a. o], 1969; [4] Revuz D., Markov chains, Amst. – [a. o], 1975; [5] Kolmogoroff A., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 607–10; [6] Хасьминский Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 196–214; [7] Duflo M., Revuz D., «Ann. Inst. H. Poincaré. B», 1969, t. 5, p. 223–44; [8] Попов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 316–19; [9] Nummelin E., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 43, S. 309–18; [10] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 3, с. 496–509; [11] Смирнов С. Н., «Докл. АН СССР», 1982, т. 263, с. 554–58; [12] Карташов Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 230–40, 478–85; [13] Шуренков В. М., Эргодические процессы Маркова, М., 1989; [14] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 4, с. 641–50; [15] Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989.

ERQODİK TEOREMLƏR stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi meydanlar üçün «**эргодические теоремы** для стационарных случайных процессов и однородных случайных полей; **ergodic theorems** for stationary random process and homogenous random fields» – stasionar təsadüfi proseslərin və bircins təsadüfi meydanların zaman üzrə orta qiymətlərinin varlığı və hesablanmasına aid müddəalardır.

1. Zaman üzrə orta qiymətin varlığı və yeganəliyi; abstrakt erqodik teoremlər. T – topoloji semi – qrup, $\mathscr{P}(T)$, – T-də bütün ehtimali Borel ölçülərinin ailəsi, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası olsun; fərz olunur ki, $X(t)$, $t \in T$, – T-də ölçülən təsadüfi meydandır və hər hansı $p \geq 1$ qiymətində $\mathbf{M}\left(|X(t)|^p \right) < \infty$, $t \in T$. L^p-də $X(\cdot)$ meydanının realizasiyaları (trayektoriyaları) üzrə orta qiyməti və ya zaman üzrə orta qiyməti elə $M^*(X) \in L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir ki, hər hansı $\{\nu_n\} \subset \mathscr{P}(t)$ ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n \to \infty} \int_T X(yt)\, \nu_n(dt) = M^*(X) \qquad (1)$$

münasibəti $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ fəzasında yığılma mənasında $y \in T$ üzrə müntəzəm ödənilsin; bu halda $\{\nu_n\}$ ardıcıllığı $X(\cdot)$ meydanını statistik ortalayır, deyilir. L^p-də hər bir $M^*(X)$ orta qiyməti – L^r-də orta qiymətdir, $1 \leq r < p$.

Geniş mənada sol yerinidəyişmələrə nəzərən ixtiyari bircins meydanın L^2-də zaman üzrə yeganə orta qiyməti vardır, dar

mənada bircins $X(\cdot)$ təsadüfi meydanı $\mathbf{M}(|X(x)|p) < \infty$ şərtini ödəyərsə, onda onun L^p-də zaman üzrə yeganə orta qiyməti vardır, $1 \le p < \infty$. Əgər $X_{t_1, t_2}(t) = X(t, t_1, t_2)$, $t, t_1, t_2 \in T$ olarsa, onda $M^*(X_{t_1,t_2}) = M^*(X)$. Əgər $X(\cdot)$ meydanı dar mənada bircins olarsa, $M^*(X) = \mathbf{M}(X(t)|J_X)$ olur, burada J_X, – $X(\cdot)$ meydanının yerinidəyişmələrə nəzərən $\mathscr{A}$-da $\mathbf{P} = \mathrm{mod}\, 0$ invariant altçoxluqlarının σ – cəbridir. Əgər $X(\cdot)$ geniş mənada bircins meydan olarsa, $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$-də $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi kəmiyyətlərinin bütün kombinasiyalarının çoxluğunun qapanması olan H_X altfəzasına və bu fəzada $U_t X(y) = X(ty)$, $t, y \in T$ xassəsi ilə təyin olunan U_t izometrik xətti operatorlarına baxmaq olar. $J_X = \{\gamma : \gamma \in H_X, U_X \gamma = \gamma, t \in T\}$ olsun. Onda $M^*(X) = \hat{\mathbf{M}}(X(t)|J_X)$, – $X(t)$-nin J_X üzərinə ortoqonal proyeksiyasıdır, $t \in T$. Bu nəticələr Birkhof [2] və Alaoğlu – Birkhof [1] «abstrakt erqodik teoremləri»-ndə şərh olunmuşdur. Deməli, buradan belə nəticə alınır ki, əgər $X(\cdot)$ dar mənada bircins və metrik tranzitiv olarsa və ya $X(\cdot)$ geniş mənada bircins olarsa və J_X alt fəzası trivial olarsa (konstantlardan ibarət olarsa), onda $M^*(X) = \mathbf{M}X$ olur, yəni zaman üzrə M^* orta qiyməti – «statistik ansambl üzrə» orta «qiymət» $\mathbf{M}X(t)$ – faza üzrə orta qiymət adlandırılan orta qiymətlə üst-üstə düşür. Bu fakt L. Boltsmann (L. Boltsmann) və C. U. Gibbs (J. W. Gibbs) kimi alimlərin ideyalarına əsaslanır və onun əsasında riyazi statistikada, statistik mexanikada və informasiya nəzəriyyəsində bir sıra müddəaları isbat etmək olur. $X = \mathbb{R}$ və $\mathbb{Z}$ hallarında zaman üzrə $M^*(X)$ orta qiymətinin varlığı və $M^*(X) = \hat{\mathbf{M}}(X(t)|J_X)$ bərabərliyi *Birkhof – Xinçin erqodik teoremi və Neyman erqodik teoremində* isbat olunmuşdur.

Birkhof – Xinçin və Neyman E. t.-nə əsasən ν_{A_n} : $\nu_{A_n}(B) = |A_n \cap B| / |A_n|$ ölçülər ardıcıllığı $\mathbb{R}$-də (uyğun olaraq $\mathbb{Z}$-də) bütün bircins təsadüfi meydanları ortalayır, burada $A_n = [0, n]$ və ya $A_n = [-n, n]$, $|B|$, – $B \subset \mathbb{R}$ çoxluğunun (uyğun olaraq $B \subset \mathbb{Z}$) Lebeq ölçüsüdür (uyğun olaraq gücüdür). Digər alt qruplarda «belə universal» ortalayıcı ardıcıllıqların axtarışı bu E. t.-lərin geniş ümumiləşmələrinə gətirmiş oldu (bax, aşağı).

2. Universal ortalayıcı ardıcıllıqlar; statistik erqodik teoremlər. Aşağıdakı iki eynigüclü müddəadan biri doğru olduqda $\{\nu_n\} \subset \mathscr{P}(T)$ ardıcıllığı T-də universal statistik ortalayıcı ardıcıllıq adlanır; əgər:

1) $\{\nu_n\}$ T-də ixtiyari geniş mənada bircins ölçülən təsadüfi meydanı statistik ortalayırsa;

2) $\{\nu_n\}$ L^p-də ixtiyari dar mənada bircins, $\mathbf{M}(X(t))^p < \infty$ ($p \ge 1$) şərtini ödəyən ölçülən $X(t)$ təsadüfi meydanını statistik ortalayırsa.

Əgər T lokal kompakt qrup və A_n, $n = 1, 2, \ldots$ – sağ Haar ölçüsü $0 < \mu(A_n) < \infty$ ilə T-də Borel altçoxluqlarıdırsa, onda $\nu_{A_n}(B) = \mu(A_n \cap B)/\mu(A_n)$ ölçülərinə baxmaq təbiidir; bu halda (1) münasibəti

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} X(yt)\mu(dt) = M^*(X)$$

şəklini alır və əgər $\{\nu_{A_n}\}$ statistik ortalayıcı ardıcıllıqdırsa, onda $\{A_n\}$ ardıcıllığı statistik ortalayıcı ardıcıllıq adlanır. Hesabi bazaya malik ixtiyari lokal kompakt qrupda bu növ ardıcıllıqlar mövcuddur (bax, [23]). Bunların axtarışı ilə bağlı teoremlər statistik erqodik teoremlər adlanır (ingilis dilli ədəbiyyatda «mean ergodic theorems» termini istifadə olunur). İxtiyari $\{\theta_n\}$ ardıcıllığı

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu(A_n \Delta A_n x)}{\mu(A_n)} = 0$$

– Feller xassəsini ödəyirsə, belə ardıcıllıq statistik ortalayıcı ardıcıllıqdır (bax, [19]); $\mathbb{R}^m$-də radiusları $r(S_n) \to \infty$ şərtini ödəyən S_n kürələrini özündə saxlayan A_n qabarıq çoxluqların ixtiyari $\{A_n\}$ ardıcıllığı Feller xassəli ardıcıllıqdır (bax, [5]). Neyman ($X = \mathbb{R}$ və $\mathbb{Z}$, $A_n = [0, n]$ və ya $[-n, n]$ olduqda) E. t. və Viner (bax, [12]) və Danford E. t. (bax, [6]) ($X = \mathbb{R}^m$ və $\mathbb{Z}^m$, $m \ge 1$, A_n – kürələr və ya kublar olduqda) bu teoremin xüsusi hallarıdır. Əgər X sonlu mərkəzə malik qeyri – kompakt sadə Li əlaqə qrupudursa, onda $\mu(A_n) \to \infty$ şərtini ödəyən ixtiyari $\{A_n\}$ ardıcıllığı statistik ardıcıllıqdır; bu E. t. qeyri – kompakt Li əlaqə qrupları sinfində sonlu mərkəzli sadə qrupları xarakterizə edir (bax, [22], burada ixtiyari Li qrupları üçün statistik E. t. isbat olunmuşdur). [13] və [19]-da E. t.-lər ümumiləşmiş bircins təsadüfi meydanlar üçün də tədqiq olunmuşdur.

3. Universal ortalayıcı ardıcıllıqlar; individual erqodik teoremlər. Əgər $\mathbf{M}(|X(t)|) < \infty$ şərtini ödəyən ixtiyari dar mənada bircins $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi meydanı üçün ixtiyari $y \in T$ qiymətində (1) [uyğun olaraq (2)] münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, $\{\theta_n\}$ ardıcıllığı (uyğun olaraq $\{A_n\}$) T-də individual ortalayıcı ardıcıllıq adlanır; individual ortalayıcı ardıcıllıqların axtarışı ilə bağlı teoremlər individual erqodik teoremlər adlanır (ingilis dilli ədəbiyyatda «poinwise ergodic theorems» termini də işlədilir). Əgər $q \in \mathscr{P}(t)$, q-nün daşıyıcısı T-ni doğurursa, nq^k q-nün konvolyusiyaya nəzərən k-cı dərəcəsidirsə, onda $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q^k$, $n = 1, 2, \ldots$ – statistik ortalayıcı ardıcıllıq və individual ortalayıcı ardıcıllıqdır (bax, [21]); q və $X(\cdot)$ haqqında bəzi əlavə fərziyyələrlə $\{q^n\}$ statistik ortalayıcı ardıcıllıq və individual ortalayıcı ardıcıllıqdır (bax, [18]). Əgər $\{A_n\}$ azalmayandırsa və Feller xassəlidirsə və

$$\sup_{1 \le n < \infty} (\mu(A_n A_n^{-1}) / \mu(A_n)) < \infty$$

şərti ödənilərsə, onda $\{A_n\}$ – individual ortalayıcı ardıcıllıqdır (bax, [8], [21] – [23]); məs., $\mu(S_n) \to \infty$ şərtini ödəyən S_n kürələrini özündə saxlayan, $\mathbb{R}^m$ -də qabarıq çoxluqların ixtiyari azalmayan ardıcıllığı – individual ortalayıcı ardıcıllıqdır. Birkhof – Xinçin, Viner [12] və Kalderon (bax, [3]) E. t. bu teoremin xüsusi hallarıdır. [9] və [11]-də qruplarda individual ortalayıcı ardıcıllıqların qurulması üçün digər metodlar təklif olunmuşdur.

4. Erqodik teoremlərin digər tipləri. E. Hopf [24]-də $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} f(\varphi^k \omega)$ əvəzinə

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} f(\varphi^k \omega) \right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{n} g(\varphi^k \omega) \right) \right)$$

limitlərinə baxaraq, Birkhof – Xinçin E. t.-ni sonsuzölçülü $(\Omega, \mathscr{A}, m)$ fəzasının φ endomorfizmlərinə ümumiləşdirmişdir, burada $f, g \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, m)$, $g \geq 0$. R. Çakon və D. Ornsteyn [4]-də Hopf E. t.-ni $L^1(\Omega, \mathscr{A}, m)$-də müsbət sıxlaşdırıcı operatorlara ümumiləşdirmişlər (bax, [17]), [20]-də Hopf E. t. ixtiyari endomorfizmlər qrupuna köçürülmüşdür. N. Danford və J. Şvarts [7]-də Birkhof – Xinçinin E. t.-ni $L^1(\Omega, \mathscr{A}, m)$ və $L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, m)$ fəzalarında $\|S\| < 1$ normaları olan S xətti operatorlarına ümumiləşdirmişlər (bax, [15]). E. t.-in digər ümumiləşmələri [10]-da və [10], [15], [16] və [22] kitablarında şərh olunmuşdur.

Asılılıq üçün müxtəlif məhdudiyyətlərlə təsadüfi proseslər, ardıcıllıq və meydanlar üçün zaman üzrə orta qiymətlərin varlığını müəyyənləşdirən böyük ədədlər qanunu formaca E. t.-ə yaxındır; $\mathbb{R}^m$-də geniş mənada bircins təsadüfi meydanlar üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununda bu məhdudiyyətlər spektr üzərinə olduqca zəif şərtlər terminlərində ifadə olunur (bax, [14]).

Əd.: [1] Alaoglu L., Birkhoff G., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 293–309; [2] Birkhoff G., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, p. 19–20; [3] Calderon A., «Ann. Math.», 1953, v. 58, p. 182–91; [4] Chacon R., Ornstein D., «Ill. J. Math.», 1960, v. 4, p. 153–60; [5] Day M., «Trans Amer. Math. Soc.», 1942, v. 51, p. 399–412; [6] Dunford N., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, p. 635–46; [7] Dunford N., Schwartz J., «J. Ration. Mech. Anal.», 1956, v. 5, p. 129–78; [8] Emerson W. R., «Amer. J. Math.», 1974, v. 96, p. 472-87; [9] Emerson W., Greenleaf F., «Adv. Math.», 1974, v. 14, p. 153–72; [10] Krengel U., Ergodic theorem, B. – N. Y., 1985; [11] Vershik A. M., «Selecta Math. Sovietica», 1982, v. 2, p. 331–50; [12] Wiener N., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, p. 1–18; [13] Urbanik K., «Studia Math.», 1958, v. 16, p. 268–334; [14] Гапошкин В. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, с. 295–319; [15] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [16] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [17] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [18] Оселедец В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, с. 551–57; [19] Темпельман А. А., «Литовский. Матем. сб.», 1962, т. 2, № 1, с. 195–213; [20] Темпельман А. А., « Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, с. 380–83; [21] Темпельман А. А., «Докл. АН СССР», 1967, т. 176, с. 790–93; [22] Темпельман А. А., «Тр. Моск. метем. об-ва», 1972, т. 26, с. 95-132; [23] Темпельман А. А., Эргодическая теоремы на группах, Вильнюс, 1986; [24] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113–82.

ERQODİK TEOREMLƏR Viner prosesləri üçün **« эргодические теоремы** для винеровских процессов; **ergodic theorems** for Wiener processes **»** – lokal zaman üzrə inteqrallar nisbətinin asimptotik qiymətinin tapılması probleminə aid teoremlər sinfidir. Bu teoremlərin xüsusi halı Viner prosesinin additiv funksionallarının nisbətinin asimptotikası haqqında nəticələrdir. İndikator funksionallarının ən sadə halında

$$\lim_{t\to\infty} \frac{l(s \leq t : \boldsymbol{w}(s) \in A)}{l(s \leq t : \boldsymbol{w}(s) \in B)} = \frac{l(A)}{l(B)}$$

münasibəti doğrudur, burada l – Lebeq ölçüsü, $\boldsymbol{w}(s)$ – Viner prosesi, A, B – Borel çoxluqları, $l(B) < \infty$.

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968.

ERQODİK TƏSADÜFİ PROSES « эргодический случайный процесс; ergodic random process » – kəsilməz və ya diskret zamanlı elə $\zeta(t)$ təsadüfi prosesidir ki, bu təsadüfi prosesin qiymətlərinin funksionallarının müəyyən bir $\Phi[\zeta(t)]$ sinfi üçün zaman üzrə $\mathbf{m}^{(\Phi)}$ orta qiyməti vardır ($\mathbf{m}^{(\Phi)}$ orta qiyməti $-T \leq s \leq T$ olduqda $\Phi[\zeta(t+s)]$ qiymətinin zaman üzrə orta qiymətinin $T \to \infty$ halında müəyyən ehtimal mənasında limiti kimi təyin olunur), bu qiymət ehtimali orta – $\mathbf{M}\Phi[\zeta(t)]$ ilə üst-üstə düşür (yəni $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyalarının bütün ansamblı üzrə $\Phi[\zeta(t)]$-nin orta qiyməti ilə). Erqodiklik anlayışı ilk dəfə statistik fizikada 20-ci əsrin başlanğıcında yaranmış, bu anlayışın yaranması fiziki sistemlərin ağlabatan tərzdə seçilmiş statistik ansamblı üzrə orta qiymətinin təyin edilməsi əvəzinə bu sistemin bircə trayektoriyası boyunca zaman üzrə orta qiymətinin təyin olunması mümkünlüyünə əsaslanmışdır; bu yanaşmadan istifadə olunaraq, sonralar erqodik təsadüfi proseslərlə bir çox ortaq cəhətləri olan, dinamik sistemlərin geniş erqodik nəzəriyyəsi inkişaf etmişdir (bax, məs., [1]).

t kəsilməz olsun; diskret zaman halı üçün isbatlar və nəticələr tamamilə analojidir və yalnız bəzi sadələşmələrlə fərqlənir. Belə ki, $\Phi[\zeta(t)]$ funksionalının zaman üzrə orta qiyməti, aydındır ki, zamandan asılı deyildir, onda erqodiklikdə fərz olunur ki, $\Phi[\zeta(t)]$ funksionallarının baxılan sinfi üçün $\mathbf{M}\Phi[\zeta(t)]$ orta qiyməti t-dən asılı deyildir, yəni $\zeta(t)$ prosesi müəyyən stasionallığa malikdir. E. t. p. anlayışına dəqiq məna vermək üçün $\Phi[\zeta(t)]$ funksionallarının baxılan sinfini də göstərmək lazımdır (və $T \to \infty$ olduqda istifadə olunan limit keçidinin mənasını da). Erqodik anlayışlardan ən geniş maraq ifadə edən anlayışlar $\Phi[\zeta(t)]$ funksionalı əvəzinə bütün t_0 qiymətləri üçün yalnız $\zeta(t_0)$ ani qiymətlərinə baxılmaqla kifayətlənildiyi hallarda yaranır; bu halda E. t. p. üçün $\mathbf{M}\zeta(t) = \text{const}$ bərabərliyi ödənilməlidir və erqodiklik isə onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ prosesi üçün *böyük ədədlər qanunu* ödənilir (adi böyük ədədlər qanunu – əgər $T \to \infty$ olduqda ya ehtimala görə limit və ya kvadratik orta mənada limit və böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu – əgər limit 1 ehtimallı limit kimi götürülürsə). $\Phi[\zeta(t)] = \zeta(t_0)$ şəklində funksionallara (və bunların sonlu xətti kombinasiyalarına) aid erqodiklik birinci tərtib erqodiklik adlanır.

Geniş mənada stasionar proseslərə tətbiqdə (və bu şərtlə ki, $T \to \infty$ olduqda limit kvadratik orta mənada anlaşılır) belə stasionarlığın sadə zəruri və kafi şərti *Slutski erqodik teoremi* ilə verilir (bax, həm də, *Böyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün); belə proseslər üçün zaman üzrə orta qiymətin 1 ehtimalla limit kimi təyin olunduğu halında 1-ci tərtib erqodiklik şərtləri haqqında *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün məqaləsinə bax. Dar mənada stasionar $\zeta(t)$ prosesləri üçün *Birkhof – Xinçin erqodik teoremi* ödənilir; bu teoremə görə $\zeta(t)$ prosesinin zaman üzrə orta qiyməti (1 ehtimalla limit kimi təyin olunan) yalnız $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right| < \infty$ olduğu halda, olduqca geniş şərtlərlə mövcuddur; buradan, məs., aydın olur ki, dar mənada stasionar proseslər üçün Slutski şərtinin ödənilməsindən $\zeta(t)$ prosesi üçün böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun doğruluğu alınır.

$\zeta(t)$ prosesinin ikinci tərtib erqodikliyi – elə $\Phi[\zeta(t)]$ funksionallar sinfinin erqodikliyi kimi adi qaydada təyin olunur ki, bu sinfə $\zeta(t_0)$ nöqtəsindəki qiymətlərin hamısı və bütün cüt-cüt – $\zeta(t_0)\zeta(t_1)$ hasilləri daxildirlər; belə erqodiklik üçün $\zeta(t)$ prosesinin hökmən geniş mənada stasionar olması tələb olunur və bu erqodiklik o vaxt ola bilir ki, həm $\zeta(t)$ prosesi, həm də $Y_\tau(t) = \zeta(t)\zeta(t+\tau)$ prosesi (τ parametrindən asılı olan) 1-ci tərtib erqodikliyə malik olsunlar.

$$B(\tau) = \mathbf{M}(\zeta(t+\tau)\,\zeta(t))$$

və

$$b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{M}\zeta(t+\tau)][\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]$$

korrelyasion funksiyalarının və həmçinin $f(\lambda)$ spektral sıxlığının və $\zeta(t)$ prosesinin bir realizasiyasının T uzunluqlu parça üzrə $F(\lambda)$ spektral funksiyasının tutarlı qiymətləndirilməsi üçün 2-ci tərtib erqodiklik zəruridir. Əgər $\Phi(x_0, ..., x_{n-1})$ elə n dəyişənli funksiya olarsa ki,

$$\mathbf{M}\left|\Phi[\zeta(t_0),\ \zeta(t_0+t_1), ..., \zeta(t_0+t_{n-1})]\right| < \infty$$

şərtini ödəsin və əgər

$$\Phi[\zeta(t)] = \Phi[\zeta(t_0),\ \zeta(t_0+t_1), ...,\ \zeta(t_0+t_{n-1})]$$

şəklində bütün funksionallar (və ya hətta daha geniş –

$$\Phi[\zeta(t)] = \lim_{n\to\infty} \Phi_n[\zeta(t_0),\ \zeta(t_0+t_1), ..., \zeta(t_0+t_{n-1})]$$

şəkildə funksionallar sinfi) üçün zaman üzrə orta qiymətin nəzəri – ehtimali orta qiymətə bərabər olması tələbi qoyularsa, erqodikliyin daha dar mənada anlayışı alınır. Bu mənada erqodiklik ödənilən proseslər, çox vaxt sadəcə erqodik (və ya metrik tranzitiv) proseslər adlandırılır. Əgər $\zeta(t)$ dar mənada stasionar təsadüfi proses olarsa,

$$\mathbf{m}^{(\Phi)} = (2T)^{-1} \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} \Phi[\zeta(t_0+s), \zeta(t_0+t_1+s), ..., \zeta(t_0+t_{n-1}+s)]\,ds$$

kəmiyyətinin $T \to \infty$ olduqda 1 ehtimalla limiti $\mathbf{m}^{\Phi}$-in varlığı Birkhof – Xinçinin erqodik teoremindən alınır; buna görə də, erqodiklik şərtlərinin tapılması məsələsi $\mathbf{m}^{(\Phi)} = \mathbf{M}\Phi[\zeta(t)]$ bərabərliyinin ödənilməsi şərtlərinin tapılmasına gətirilir. Bu şərtlər, adətən, olduqca çətin müəyyən olunur; yalnız $\zeta(t)$ Qauss stasionar prosesi olduğu hal istisnadır (bu halda, aydındır ki, geniş və dar mənada stasionarlıq üst-üstə düşür), belə ki, belə proseslərin erqodikliyi (metrik tranzitivliyi) üçün zəruri və kafidir ki, $\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ hər yerdə kəsilməz olsun (bax, [2], [3], [4], diskret t halında, [5], [6]). Qauss prosesləri sinfindən daha geniş olan stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesləri sinfinə aid olan qeyd olunan şərtin bəzi ümumiləşmələri və $\zeta(t)$-nin yüksək tərtib momentləri və ya çoxölçülü xarakteristik funksiyaları terminlərilə ifadə olunan şərtlər [7], [8]-də göstərilmişdir; lakin buradakı şərtlər çox çətin yoxlanılır. Daha ümumi erqodiklik şərti ($0 \le s \le T$ intervalında $T \to \infty$ olduqda $\Phi[\zeta(t+s)]$-in orta qiymətinin limitinin yığılması tələbi kimi anlaşılan) [9]-da verilmişdir.

Qeyri – erqodik (metrik intranzitiv) dar mənada stasionar $\zeta(t)$ prosesi halında dinamik sistemlərin ümumi nəzəriyyəsinə aid J. Neymanın [10], [11]-də, V. A. Roxlinin [12]-də aldığı nəticələrdən aydındır ki, $\zeta(t)$ prosesinin bütün realizasiyaları çoxluğunun olduqca geniş requlyarlıq şərtlərində bu çoxluq elə kəsişməyən altçoxluqlara bölünə bilinər ki, bunların hər biri üzrə $\zeta(t)$-nin bütün orta qiymətləri $T \to \infty$ olduqda 1 ehtimalla sabit qiymətlərə – $\zeta(t)$-nin şərti orta qiymətlərinə yığılırlar, bu şərtlə ki, prosesin baxılan realizasiyası uyğun altçoxluğa daxil olsun (bax, məs., [5]). Bu fakta belə interpretasiya vermək olar: qeyri – erqodik stasionar proseslərə praktiki olaraq belə erqodik proseslər sırasının qarışığı kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Maruyama G., «Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.», Ser. A, 1949, v. 4, № 1, p. 45–106; [3] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [4] Фомин С. В., «Укр. матем. ж.», 1950, т. 2, № 2, с. 25–47; [5] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [6] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [7] Parzen E., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 1, p. 299–301; [8] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [9] Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, 2 изд., 1989; [10] Neumann J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 4, p. 587–642; [11] Neumann J., Избранные труды по функциональному анализу, пер. с англ, нем., т. 1, М., 1987, с. 7–62; [12] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2, с. 57–128.

ERQODİKLİK « **эргодичность**; **ergodicity** » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının çevirmələrinin ölçüsünü dəyişməz saxlayan, qrup və ya semi – qrupa aid xassədir. Bu xassə qrup və ya semi – qrupa nəzərən invariant elə $A \in \mathscr{A}$ altçoxluqlarının yoxluğu kimi təyin olunur ki, bunlar $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(\Omega \setminus A) > 0$ şərtini ödəsinlər. Sonsuzölçülü ölçünü saxlayan çevirmələr üçün bəzən «E.» termini əvəzinə «metrik tranzitivlik» termini istifadə olunur.

Əgər $\{S^{(t)}\}$ $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}^d$ və ya $\mathbb{Z}^d\}$ stasionar təsadüfi prosesinin realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmələr qrupudursa, onda E. ifadə edir ki, ixtiyari $Y(x) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ təsadüfi kəmiyyəti üçün sanki yəqin

$$\frac{1}{T^d}\int_0^T \dots \int_0^T Y(S^{(t_1 \dots t_d)}x)\, dt_1 \dots dt_d \to \mathbf{M}Y$$

münasibəti ödənilir ($\mathbb{Z}^d$ halında inteqrallar əvəzinə cəmlər götürülür). Yuxarıda qeyd olunan təriflə ekvivalent *Birkhof – Xinçin erqodik teoreminin* sadə nəticəsini qeyd etmək olar.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

ERLANQ DÜSTURU « Эрланга формула; Erlang formula » – n – xətli *xidmət sistemində* k xəttin məşğul olmasının stasionar ehtimalı p_k üçün axın və xidmətin parametrləri λ, μ vasitəsilə ifadə olunan düsturdur:

$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \quad 0 \le k \le n\,.$$

Tələbin itməsi ehtimalı p_n-nə bərabərdir. 1917-də A. Erlanq tərəfindən çıxarılmışdır və bu düstur telefon və digər xidmət sistemlərində hesablamada çox istifadə olunur.

Bax, *Sevastyanov düsturu.*

ERLANQ PAYLANMASI « Эрланга распределение; Erlang distribution » – paylanmasının sıxlığı

$$p(x) = \frac{(n\alpha)^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} e^{-n\alpha x}, \quad \alpha > 0$$

bərabərliyi ilə təyin olunan, $[0, \infty)$-da topalanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada α, n – parametrlər, n – tam ədəddir, $\Gamma(n)$ – bütün n – müstəvidə analitik funksiyadır, $n = 0, -1, -2, \dots$ nöqtələrində sadə polyuslara malikdir və

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt, \quad (\operatorname{Re} n > 0),$$

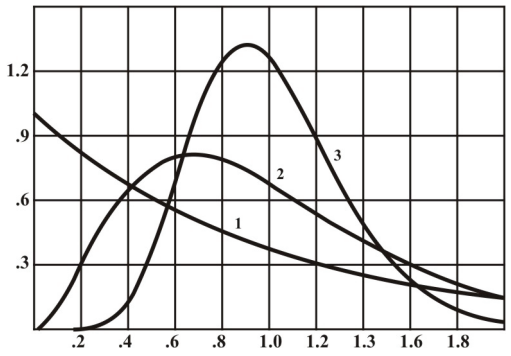
$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n),\ \Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,.$$

E. p. ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləmə və dispersiyası uyğun olaraq $1/\alpha$ və $1/n\alpha^2$ kəmiyyətlərinə bərabərdir. E. p. *Qamma paylanmanın* xüsusi bir halıdır. Bu paylanma kütləvi xidmət nəzəriyyəsi məsələlərində onu ilk dəfə tətbiq etmiş A. Erlanqın (A. Erlang) adı ilə adlandırılmışdır. Parametrləri α və n olan E. p. hər biri $n\alpha$ parametrli eyni üstlü qanunla paylanmış, n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmasıdır; xüsusi halda $n = 1$ olduqda E. p., – $\alpha > 0$ parametrli üstlü paylanmadır. E. p.-nın xarakteristik funksiyası

$$f(z) = (1 - iz/n\alpha)^{-n}$$

düsturu ilə ifadə olunur.



$\alpha = 1$ olduqda, (1) : $n = 1$, (2) $n = 3$, (3) $n = 10$ qiymətlərində Erlanq paylanmasının sıxlıq funksiyaları

E. p.-dan kütləvi xidmət nəzəriyyəsində bəzi hallarda xidmət müddətlərinin paylanmalarının hesablanmasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1971.

EROZİYA « эрозия; erosion » – bax, *Minkovski əməlləri*.

ESSEEN TEOREMİ « Эсссена теорема; Esseen theorem » – bax, *Asimptotik ayrılışı* paylanmanın.

ETİBARLI ÇOXLUQ « доверительное множество; confidence set », etibarlı oblast, etibarlı zona, – ehtimal paylanmasının parametri çoxölçülü olduğu halda *etibarlı interval* üçün ümumiləşmiş anlayışdır (bax, *Etibarlı interval*, *Meylsiz etibarlı çoxluq*, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Statistik qiymətləndirmə*).

ETİBARLI EHTİMAL « доверительная вероятность, вероятность накрытия; confidence probability » – bax, *Etibarlı zolaq*, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Etibarlı interval.*

ETİBARLI İNTERVAL « доверительный интервал; confidence interval » – qiymətləndirilən naməlum parametrin əsl qiymətini vahidə yaxın γ ehtimalı ilə daxilinə alan *təsadüfi intervaldır.* γ *– etibarlı ehtimal* adlanır. Bu ehtimal müşahidəçi tərəfindən seçilir. γ verildiyi halda E. i.-ın uzunluğu naməlum parametrin dəqiqliyini xarakterizə edir. Təbiidir ki, verilmiş etibarlı ehtimala uyğun təyin olunan müxtəlif E. i.-lardan uzunluğu minimal olan E. i. götürülür.

Birölçülü parametr. ζ – qiymətlər çoxluğu $\mathbb{R}^n$ olan seçimi vektor, $\mathbf{P}_\theta$, – ζ vektorunun naməlum θ parametrindən asılı paylanması, $\tilde{\theta}(\zeta)$, – ζ parametri üçün hesablanmış statistik qiymətdir. $\underline{\theta}(x)$ və $\bar{\theta}(x)$ – qiymətləri $\mathbb{R}^1$-dən olan və ζ vektorunun paylanmasının naməlum parametrlərindən asılı olmayan, $\underline{\theta}_1(x) < \bar{\theta}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ şərtini ödəyən həqiqi funksiyalar olsun. Əgər

$$p(\theta) = \mathbf{P}_\theta\{\underline{\theta}(\zeta) < \theta < \bar{\theta}(s)\} \ge \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta$$

münasibəti ödənilərsə, onda $(\underline{\theta}(\zeta), \bar{\theta}(\zeta))$ təsadüfi intervalı γ *– etibarlı interval*, γ $(0 < \gamma < 1)$ *– etibarlı hüdud*, $\underline{\theta}(\zeta)$ və $\bar{\theta}(\zeta)$, – uyğun olaraq *aşağı və yuxarı etibarlı sərhədlər*

adlanır. Əgər $p(\theta)$ ehtimalı θ-dan asılı olmazsa, onda $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ E. i. seçimlər fəzasına müvafiq interval adlanır. $\mathbf{P} = \inf_{\theta \in \Theta} p(\theta)$ – statistik qiymətin *etibarlılıq əmsalı* və ya *etibarlılıq hüdudu* adlanır. $p(\theta)$ ehtimalı θ parametrinin $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ intervalından olması hadisəsinin ehtimalı deyil, $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ təsadüfi intervalının θ parametrini öz daxilinə alması ehtimalı (*örtüm ehtimalı* adlanan) kimi anlaşılmalıdır.

İdeyası ingilis statistiki R. Fişerə məxsus etibarlı intervallar metodu amerikan statistiki Y. Neyman tərəfindən işlənmişdir.

Müşahidələr nəticəsində θ parametri üçün $\widetilde{\theta}_n$ meylsiz statistik qiyməti hesablanmışdırsa və $\widetilde{\theta}_n$ kəmiyyətinin paylanma qanunu məlum olarsa, onda E. i.-ı təyin etmək üçün sadəcə olaraq ε-nun elə qiymətini təyin etmək lazımdır ki, ε-nun bu qiyməti üçün

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = p(\theta)$$

bərabərliyi ödənilsin. Bu halda qarşıya çıxan çətinlik ondan ibarətdir ki, $\widetilde{\theta}_n$-nin paylanma qanunu araşdırılan təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunundan, deməli, bu qanunun naməlum parametrlərindən asılı olur (xüsusi halda isə $\widetilde{\theta}_n$-nin özündən asılı olur). Bu çətinliyi müəyyən dərəcədə aradan qaldırmaq məqsədilə, naməlum parametrlər statistik məlumatlar əsasında hesablanmış *nöqtəvi statistik qiymətlərlə* əvəz olunur (sınaqlar sayı n-in $20 \div 30$ qiymətləri üçün) və bununla da alınan nəticələr qaneedici olur.

Bax, *Etibarlı qiymətləndirmə.*

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Вентцель Е. С., Теория вероятностей, М., 1964; [3] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, М., 1979.

ETİBARLI QİYMƏTLƏNDİRMƏ « доверительное оценивание; confidence estimation » – ehtimal paylanmalarının naməlum parametrlərinin təqribi qiymətləri çoxluğunu təyin edən riyazi statistika metodudur. X – Evklid fəzasının $\mathscr{X}$ çoxluğundan qiymətlər alan təsadüfi vektor olsun. Bu vektorun ehtimal paylanması müəyyən bir $\mu(x)$ ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyaları verilmiş $p(x|\theta)$, $x \in \mathscr{X}$, $\theta \in \Theta$ olan paylanmaların parametrik ailəsindəndir. Fərz olunur ki, X-in müşahidələri nəticəsinə uyğun θ parametrik nöqtəsinin əsl qiyməti naməlumdur. E. q. metodunun mahiyyəti X-dən asılı elə $C(\mathrm{X})$ çoxluğunun qurulmasından ibarətdir ki, bu çoxluq θ parametrik nöqtəsinin əsl qiymətinə uyğun verilmiş $u(\theta)$ funksiyasını daxilinə almış olsun.

U, – $u(\theta)$, $\theta \in \Theta$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu, $C(\mathrm{X})$ – bütün $x \in \mathscr{X}$ qiymətləri üçün U-ya aid olan çoxluqların hər hansı bir çoxluğu olsun; bu halda fərz olunur ki, ixtiyari $u \in U$ elementi və ixtiyari $\theta \in \Theta$ qiymətində $\{C(X) \ni u\}$ hadisəsinin ehtimalı təyin olunmuşdur. Bu ehtimal –

$$P_C(u, \theta) = \int_{\{C(X) \ni u\}} p(x|\theta)\, d\mu(x), \quad u \in U, \ \theta \in \Theta$$

inteqralı ilə ifadə olunur və θ-nın verilmiş qiymətində $C(\mathrm{X})$ çoxluğunun u qiymətini öz daxilinə alması ehtimalı – *örtüm ehtimalı* (rus. вероятность накрытия) adlanır.

Əgər θ-nın əsl qiyməti naməlumdursa, onda müşahidələrin nəticəsinə uyğun $C(\mathrm{X})$ çoxluğu [$C(x)$, $x \in \mathscr{X}$ çoxluqlar çoxluğundan olan] etibarlı çoxluq və ya $u(\theta)$ funksiyasının naməlum əsl qiyməti üçün *interval statistik qiymət* adlanır.

Göstərilən qaydada qurulan $C(\mathrm{X})$ interval statistik qiymətinin ehtimali xarakteristikası kimi örtüm ehtimalı terminologiyasında $P_C(\theta)$ etibarlı ehtimalı –

$$P_C(\theta) = P_C[u(\theta), \theta], \quad \theta \in \Theta$$

bərabərliyi ilə verilən ehtimaldan istifadə olunur. Başqa sözlə, $P_C(\theta)$ – naməlum θ parametrik nöqtəsinin əsl qiymətinə uyğun verilmiş $u(\theta)$ funksiyasının qiymətini $C(\mathrm{X})$ çoxluğunun öz daxilinə alması ehtimalıdır, yəni örtüm ehtimalıdır.

$P_C(\theta)$ etibarlı ehtimalı θ-dan asılı olmadığı hallarda $C(\mathrm{X})$ seçimlər fəzasına müvafiq interval statistik qiyməti adlanır. Bu termin $P_C(\theta) = \mathbf{P}\{C(\mathrm{X}) \ni u(\theta) | \theta\} = \mathrm{const}$ və $\mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \mathscr{X} | \theta\} = \mathrm{const} = 1$ düsturlarının analoji olmasına əsaslanır. Daha ümumi halda $P_C(\theta)$ naməlum θ parametrindən asılı olur, odur ki, praktiki işlərdə interval statistik qiyməti etibarlılıq əmsalı $P_C = \inf_{\theta \in \Theta} P_C(\theta)$ ilə xarakterizə olunur; bu halda aşağı sərhəd Θ çoxluğunda hesablanılır (etibarlılıq əmsalı bəzən etibarlılıq hüdudu da adlanır).

E. q.-nin optimizasiyası interval qiymətləndirilmələrində qoyulan tələblərlə təyin olunur. Məs., əgər məqsəd seçim fəzasına müvafiq etibarlı çoxluqların qurulmasıdırsa və bu çoxluqlar üçün $0{,}5 \leq \omega \leq 1$ münasibətilə təyin olunan etibarlılıq əmsalı verilirsə, onda birinci tələb $P_c[u(\theta), \theta] \equiv \omega$, $\theta \in \Theta$ eyniliyə ilə ifadə olunur. Bu halda elə interval statistik qiymətlərini axtarmaq təbii olardı ki, onlar $u(\theta)$-nın əsl qiymətini ixtiyari $u \in U$ qiyməti üçün örtüm ehtimalından kiçik olmayan ehtimalla öz daxilinə alsın. Başqa sözlə, meylsizlik tələbi adlanan ikinci tələb $P_C(u, \theta) \leq \omega$, $u \in U$, $\theta \in \Theta$ bərabərsizliyi ilə ifadə olunur. Bu şərtlər daxilində interval statistik qiymətlərindən «ən yaxşısı» elə C sayılır ki, o, ən kiçik ehtimalla u-nun əsl $u(\theta)$-dan fərqli ixtiyari qiymətini öz daxilinə alsın. Buradan üçüncü tələb – «ən çox selektivlənmə» tələbi yaranır: C-dən fərqli olan ixtiyari digər etibarlı C' çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}_{C'}[u(\theta), \theta] \geq \omega, \quad \theta \in \Theta$$

şərti ödənilərsə,

$$P_C(u, \theta) \leq P_{C'}(u, \theta), \quad u \in U, \ \theta \in \Theta$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir.

Göstərilən üç tələbi ödəyən interval statistik qiymətlərini təyin etmə məsələsi seçimlər fəzasına müvafiq və mühümlük ölçüsü $1 - \omega$ olan meylsiz, ən güclü statistik kriterilərin təyin edilməsi məsələsinə ekvivalentdir. Bu məsələnin həllərinin varlığı məsələləri və onun konstruktiv təsviri hipotezlərin statistik yoxlanılmasının ümumi nəzəriyyəsinin əsasını təşkil edir.

E. q.-nin ən çox tətbiq olunduğu hallar $u(\theta)$-nın skalyar funksiya olduğu hallardır. $X_1, ..., X_n$, $n \geq 2$ – parametrləri naməlum, $\mathbf{M}X_i = \theta_1$, $\mathbf{D}X_i = \theta_2$ şərtlərini ödəyən, eyni normal paylanmaya malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $u(\theta) = \theta_1$ üçün interval statistik qiymətini qurmaq tələb olunur.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{və} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

olsun. $T = \sqrt{n}\,(\overline{X} - \theta_1)/s$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$-ə bərabər Styudent paylanmasına tabe olduğundan və bu paylanma naməlum θ_1 və θ_2 ($|\theta_1| < \infty$, $\theta_2 > 0$) parametrlərindən asılı olmadığından, t-nin ixtiyari müsbət qiymətində

$$\{\overline{X} - ts/\sqrt{n} < \theta_1 < \overline{X} + ts/\sqrt{n}\}$$

hadisəsinin ehtimalı yalnız t-dən asılıdır. Əgər göstərilən interval θ_1 üçün C interval statistik qiyməti kimi götürülərsə, onda bu interval statistik qiymətinə uyğun etibarlı ehtimal $\theta = (\theta_1, \theta_2)$-dən asılı olmayan

$$P_C(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{P}\{|T| < t\}$$

ehtimalı olacaqdır. Bu interval statistik qiyməti etibarlı interval, intervalın ucları – etibarlı sərhədlər və etibarlılıq hüdudları adlanır. Qeyd olunan misalda interval statistik qiyməti meylsiz və ən çox selektiv statistik qiymətdir.

Ədd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [4] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 187–92.

ETİBARLI LİMİT « доверительный предел; confidence limit / bound » – bax, *Etibarlı qiymətləndirmə.*

ETİBARLI OBLAST « доверительная область; confidence region » – bax, *Etibarlı çoxluq.*

ETİBARLI SƏRHƏD « доверительная граница; confidence bound » – bax, *Etibarlı interval*, *Etibarlı çoxluq*, *Etibarlı qiymətləndirmə.*

ETİBARLI ZOLAQ « доверительная полоса; confidence band » – naməlum paylanma funksiyasının interval qiymətləndirilməsi üçün anlayışdır. Paylanma funksiyası F-ə uyğun ümumi çoxluqdan n həcmli seçim əsasında $\underline{F}_n$ və $\overline{F}_n$ empirik paylanma funksiyaları elə təyin olunur ki, verilmiş $\gamma \in (0,1)$ ehtimalı üçün

$$\mathbf{P}\{\underline{F}_n(x) \leq F(x) \leq \overline{F}_n(x) \text{ bütün } x\text{-lər üçün}\}$$

bərabərliyi ödənilsin. Onda $\underline{F}_n$ və $\overline{F}_n$ funksiyaları uyğun olaraq aşağı və yuxarı etibarlı sərhədlər, bu sərhədlər arasında olan paylanma funksiyaları çoxluğu F üçün γ etibarlı ehtimala müvafiq *etibarlı zolaq* adlanır. Kəsilməz F funksiyası üçün E. z.-ın təyin olunması limiti və dəqiq paylanması məlum olan Kolmoqorov statistikası əsasında aparılır (bax, [1] – [3]).

Ədd.: [1] Бикел П., Доксам К., Математическая статистика, пер. с англ., в. 1–2, М., 1983; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Королюк В. С., Боровков Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981.

ETİBARLI ZOLAQ α hüdudlu **« доверительная полоса** уровня α; **confidence band** of level α **»** α – zolaq, $0 < \alpha < 1$, – $\eta(x) = \theta^{\mathsf{T}} f(x)$ reqressiya funksiyası üçün $A \subseteq X$ oblastı üzərində etibarlı zolaq – elə $D(y) \subset \mathbb{R} \times A$ altçoxluğudur ki, α və $D(y)$ üçün

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}^P} \mathbf{P}_\theta\{(x, \eta(x)), x \in A) \in D(y)\} \geq \alpha \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilsin, burada $y = (y_1, ..., y_N)^{\mathsf{T}}$ – paylanması $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}(y - F\theta)$ olan reqression eksperimentdir və $F = (f(x_1), ..., f(x_N))^{\mathsf{T}}$, $x_i \in X$, $i = 1, ..., N$.

(1) bərabərsizliyində yalnız bərabərlik işarəsi ödənilərsə, E. z. – dəqiq, əks halda konservativ zolaq adlanır. Əgər ixtiyari açıq $B \subset D(y)$ çoxluğu üçün $D(y) \setminus B$ α – zolaq olmazsa, onda α – zolaq məqbul α – zolaq adlanır.

Adətən, $\mathbf{P}_\theta$ paylanması ortası $F\theta$-ya bərabər normal paylanma fərz olunur, kovariasiya matrisi $\mathbf{V}$-nin məlum olduğu hesab edilir. Onda $\mathbf{V}$ və $M = F^{\mathsf{T}}\mathbf{V}^{-1}F$ (informasion matris) cırlaşmayan olduqları halda, $\tilde{\theta}$ statistik qiyməti ən kiçik kvadratlar metoduna görə $(0, \sigma^2 M^{-1})$ parametrlərli normal qanunla paylanır.

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\eta}(x) = f^{\mathsf{T}}(x)\,\hat{\theta}, \quad \mathbf{P}_\theta\{\hat{\theta} - \theta \in U_\alpha \subset \mathbb{R}^P\} \geq \alpha, \\ &\Psi_\alpha(x) = \inf_{u \in U_\alpha} u^{\mathsf{T}} f(x), \quad \overline{\Psi}_\alpha(x) = \sup_{u \in U_\alpha} u^T f(x) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

olsun. Onda

$$D(y) = \{(x, \hat{\eta}(x) + z),\ x \in A,\ z \leq \overline{\Psi}_\alpha(x)\}$$

– birtərəfli α – zolaq,

$$D(y) = \{(x, \hat{\eta}(x) + z),\ x \in A,\ \Psi_\alpha(x) \leq z \leq \overline{\Psi}_\alpha(x)\} \qquad (3)$$

– ikitərəfli α – zolaqdır. Məs., k_α – sərbəstlik dərəcəsi sayı p olan χ_p^α paylanmasının α kvantili olarsa, «ən ehtimallı nöqtələr» çoxluğu $U = \{u : \sigma^2 u^{\mathsf{T}} M u \geq k_\alpha\}$, – $\mathbb{R}$-də düzxətli $\theta_0 + \theta_1 x$ reqressiyası üçün $\mathbf{V}$ vahidi matris olan ikitərəfli dəqiq Uorkinq – Hotellinq α – zolağına uyğundur. Bu zolaq üçün

$$\overline{\Psi}_\alpha(x) = -\underline{\Psi}_\alpha(x) = k_\alpha \sigma \sqrt{1 + b(x - \bar{x})^2}$$

münasibəti ödənilir, burada $b > 0$, $\bar{x} = (x_1 + ... + x_N)/N$. Əgər σ parametri $s^2 = (N-p)^{-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{\eta}(x_i))^2$ kəmiyyəti

ilə qiymətləndirilmişdirsə, onda həmin model üçün elə zolaq dəqiq olur ki, onun üçün σ s ilə, k isə F – paylanmanın α – kvantili ilə əvəz olunsun. Sonlu intervallar üzərində dəqiq zolaqlar və digər α – zolaqların cədvəlləşdirilməsi haqqında bax, [1].

(3)-lə ifadə olunan ikitərəfli dəqiq məqbul α – zolaq

$$\overline{\Psi}_\alpha(x) = -\underline{\Psi}_\alpha(x) =$$

$$= \sup\left\{ \left| \underline{f}^{\mathrm{T}}(x)\,\underline{\upsilon} \right| : \max_{i=1,\,...,\,p} \left| \underline{f}^{\mathrm{T}}(z_i)\,\underline{\upsilon} \right|,\ \gamma_i \le k_\alpha \sigma \right\} \qquad (4)$$

funksiyası ilə təyin olunur, burada $\gamma_i > 0$, $z_i \in X$ – münasib nöqtələrdir, k_α kritik səviyyəsi onunla təyin olunur ki, $\hat{\eta}(x)$ – ortası $\eta(x)$ olan, korrelyasion funksiyası isə $\mathbf{M}_{\underline{\theta}}\,\hat{\eta}(x)\,\hat{\eta}(x') = \sigma^2 \underline{f}^{\mathrm{T}}(x) M^{-1} \underline{f}(x^1)$ olan təsadüfi meydandır.

Məs.,

$$\eta(\underline{x}) = \theta_0 + \overline{\theta}_1 x^{(1)} + \ldots + \overline{\theta}_m x^{(m)},$$

$$(x^{(1)},\ \ldots, x^{(m)}) = \underline{x} \in \mathbb{R}^m$$

yarıxətti reqressiya üçün ixtiyari $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N$ planında $\overline{\Psi}_\alpha(\underline{x})$ funksiyası kəsilməz hissəvi xətti splayndır, k_α isə $z_1, \ldots, z_{m+1}$ nöqtələrini $\mathbb{R}^m$-dən münasib olaraq seçdikdə, $\mathbf{V} = I$ olduqda X_i normal kəmiyyətinin maksimumunun α – kvantilidir:

$$\mathbf{M}\, X_i = 0, \quad \mathbf{D}\, X_i = 1,$$

$$\mathbf{M}\, X_i X_j = p, \quad 1 \le i < j \le m+1.$$

$\mathbb{R}$-də polinomial və triqonometrik m tərtib reqressiya üçün $\overline{\Psi}_\alpha(\cdot)$ – ixtiyari planda həmin tərtib uyğun splaynıdır. Nöqtəvi planın informasion matrisinin bəzi kanonik Markov – Kreyn ifadələrinin düyünləri seçildikdə (bax, [2]) $\hat{\eta}(z_i)$ asılı olmurlar, bu isə (4) düsturu ilə verilən dəqiq α – zolağın cədvəlləşdirilməsini standart normal paylanmanın cədvəllərinə gətirir.

Ən kiçik $\int \overline{\Psi}_\alpha(x)\, w(x)\, dx$, $w(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$ inteqralı ilə (3) α – zolaqlarının tapılması üçün alqoritm mövcuddur.

Əd.: [1] С е б е р Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] К р е й н М. Г., Н у д е л ь м а н А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973; [3] N a i m a n n D., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 4, p. 1199–214.

ETİBARLI ZONA « доверительная зона; confidence zone » – bax, *Etibarlı çoxluq.*

ETİBARLILIĞIN OPTİMİZASİYASI « надежности оптимизация; reliability optimization » – minimal xərclərlə verilən etibarlılıq göstəricilərinə nail olmaq və ya sərf olunan bütün xərclərə məhdudiyyət qoyulduqda maksimal etibarlılıq göstəricilərini almaq üçün mühəndis – texniki tədbirlər kompleksidir. E. o. məsələsinin həllində optimizasiyanın riyazi metodları geniş istifadə olunur. Etibarlılıq nəzəriyyəsində optimizasiya məsələlərinin bir neçə əsas istiqamətləri: optimal ehtiyatdasaxlama (rus. резервирование), çatışmamazlıq və sıradan çıxmaların (imtinaların) optimal axtarışı, optimal yoxlamalar və optimal profilaktik əvəzetmələrdir.

Optimal ehtiyatdasaxlama məsələləri qeyri – xətti tamqiymətli proqramlaşdırma məsələləri sinfinə aiddir.

Optimal ehtiyatdasaxlama məsələsinin məğzi – resurslara qoyulan məhdudiyyətlərlə (və ya əksinə resursların mümkün minimal xərclərində) sistemin seçilmiş etibarlılıq göstəricisinin maksimumunun alınmasından ibarətdir. Optimal ehtiyatda saxlamanın əksər praktik məsələlərində etibarlılıq göstəricisi – arqumentlərin hər birinə görə separabel və kvaziqabarıqdır, resurslara xərclər göstəricisi isə xəttidir. Bu da optimal ehtiyatdasaxlamanın əksər məsələlərinin həllində diskret optimizasiya üçün standart metodlardan istifadə etməyə imkan verir: məs., dinamik proqramlaşdırma, modifikasiya olunmuş Laqranj vuruqları metodu, koordinatlar üzrə ən sürətli enmə metodu və s.

Optimal texniki diaqnostika məsələsi sistemin vəziyyətlərinin ən sürətli (və ya minimal xərclərlə) identifikasiyası və imtinanın lokalizasiyasından ibarətdir. Elementlərdən hər birinin imtina vəziyyətində olması ehtimallarının məlum olduğu və sistemin elementlərinin uyğun altçoxluqlarında işəqabiliyyətsizliyini aşkar etməyə imkan verən testlər çoxluğunun da verildiyi fərz olunur. Optimal diaqnostika məsələsi testlərin aparılması üçün elə qaydanın tapılmasından ibarətdir ki, bu qayda sistemin heç olmazsa bir imtinasının orta hesabla ən sürətlə aşkar olunmasını və ya sistemin bütün imtinalarının orta hesabla ən sürətlə aradan qaldırılmasını təmin etmiş olsun. (Elementlərin etibarlılığı haqqında informasiya olmadığı halda hər iki məsələ minimaks kriterilərdən istifadə edilməklə həll olunur.)

Optimal yoxlamalar və optimal profilaktika məsələləri təsadüfi proseslərin optimal idarəetmə məsələləri (optimal dayanma haqqında məsələ) sinfinə aiddir. Birinci halda imtina anından imtinanın aşkar olunduğu ana qədər işsiz dayanma hesabına itkiləri minimallaşdıran yoxlama anları müəyyənləşdirilir. İkinci halda təsadüfi prosesin optimal dayanma məsələsinə, qoyuluşuna görə yaxın olan məsələ həll olunur; əgər qəzanın təmirinə sərf olunan cərimə profilaktik tədbirə sərf edilən cərimədən çox olarsa, onda profilaktik təmirin keçirilməsi üçün bütün itkiləri minimallaşdıran optimal anı tapmaq olur.

E. o.-nın bütün riyazi məsələlərini müəyyən mənada iki tipə ayırmaq olar: faza fəzasını idarəetmə (işəqabiliyyətli vəziyyətlər fəzasının genişləndirilməsi) və qeyd olunmuş fəzada təsadüfi dolaşma prosesinin özünün idarəedilməsi (prosesin işəqabiliyyətli vəziyyətlərin altçoxluğunda qaldığı müddətin çoxaldılması və imtina vəziyyətləri altçoxluğunda qalma müddətinin azaldılması məqsədilə idarəolunma) məsələləri kimi.

Əd.: [1] Вопросы математической теории надежности, М., 1983; [2] Надежность технических систем. Справочник, М., 1985; [3] У ш а к о в И. А., Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений, М., 1969; [4] П а ш к о в с к и й Г. С., Задачи оптимального обнаружения и поиска отказов в радиоэлектронной аппаратуре, М., 1981; [5] Б а р з и л о в и ч Е. Ю., К а ш т а н о в В. А., Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем, М., 1971.

ETİBARLILIĞIN RİYAZİ NƏZƏRİYYƏSİ « надежности математическая теория; mathematical theory of reliability » – mühəndis araşdırmalarında riyazi metodların tətbiqinə həsr olunmuş nəzəriyyədir. E. r. n.-ində: 1) element və sistemlərin layihələşdirilməsi mərhələsində onların etibarlılığının hesablanılması metodları və etibarlılığın təmin edilməsi; 2) hazırlanmış elementlər və sistemlərin etibarlılığı haqqında, xüsusi olaraq planlandırılmış sınaqlar və istismar nəticələrindən alınmış məlumatlara görə əsaslandırılmış nəticələrin alınması metodlarının tapılması; 3) sistem və onu təşkil edən elementlərin istismarı, saxlanılması və bir yerdən başqa yerə göndərilməsi prosesində aparılan işin etibarlılığını təmin etmək və yaxşılaşdırmaq üçün qaydaların tapılması (bax, [1]) kimi metod və qaydalar araşdırılır. E. r. n.-ndə riyaziyyatın müxtəlif bölmələrinin metodlarından istifadə olunur. Optimizasiya nəzəriyyəsi, riyazi məntiq və b. metodlar da geniş tətbiq olunur.

E. r. n.-də riyazi modellərin qurulması texniki sistemin (elementin) bütün mümkün vəziyyətlərinin $X=\{x\}$ vəziyyətlər çoxluğunun təşkil edilməsinə əsaslanır. t müddətinin keçməsi ilə sistemin (elementin) vəziyyətlərindəki dəyişiklik $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi ilə təsvir edilir. Sistemin (və ya elementin) işləməməsinə (sıradan çıxması) uyğun vəziyyətlər çoxluğu X_0, – X -in altçoxluğudur. Sistemin (elementin) qabiliyyətini itirməsi – i m t i n a – $\zeta(t)$ prosesinin trayektoriyalarının X_0 altçoxluğunda olmasına uyğundur. Real verilənlərin analizinə əsasən imtinaların baş verməsi ilə bağlı hadisələrə təsadüfi hadisələr kimi baxmaq olar. İ m t i n a s ı z l ı q – sistemin (elementin) işləmə qabiliyyətinin saxlaması (sıradan çıxmaması), etibarlılığın təmin olunması üçün əsas tələblərdən biridir. Etibarlılığın yüksək olması üçün sistemin t ə m i r q a b i l i y y ə t l i l i y i n i n olması, yəni qısa müddətdə və qənaətlə təmir aparılması mümkünlüyü əsas şərtlərdən biridir.

Təmir üçün zəruri fasilələr və iqtisadi cəhətdən sonrakı istismarın məqsədəuyğunluğu şərtilə sistemin işləmə vəziyyətinə gətirilməsi üçün aparılan işlər, profilaktik tədbirlər – sistemin (elementin) u z u n ö m ü r l ü l ü y ü adlanır.

Sistemin n elementdən ibarət olduğu fərz olunur. i-ci elementin vəziyyəti x_i dəyişəni ilə təsvir edilir və əgər bu element işəqabiliyyətlidirsə, $x_i=1$, əks halda $x_i=0$ götürülür. Sistemin işəqabiliyyətliliyi $(x_1, ..., x_n)$ toplusu ilə təyin olunur. $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ funksiyası s t r u k t u r f u n k s i y a s ı adlanır və sistem işqabiliyyətli olduğu halda $\varphi=1$, əks halda isə $\varphi=0$.

M i s a l l a r. Əgər sistemin ixtiyari bir elementinin sıradan çıxması sistemin imtinasına səbəb olarsa, onda sistemin struktur funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi = \min_{1 \le i \le n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

x_1, x_2, x_3, – A məntəqəsini B ilə, B məntəqəsini C ilə və A məntəqəsini C məntəqəsi ilə bağlayan rabitə xətlərinin vəziyyətləri olsun. Əgər bütün məntəqələr bir-birilə əlaqəlidirlərsə, rabitə sistemi işqabiliyyətli sayılır. Bu halda, ən çoxu bir rabitə xəttinin sıradan çıxa bilməsi qəbul olunur. Belə sistemin struktur funksiyası

$$\varphi = \max(x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_1x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 2x_1x_2x_3$$

münasibətilə ifadə olunur.

Əgər sistemin işəqabiliyyətliliyi elementlərin imtinalarının müəyyən kombinasiyalarında i-ci elementin vəziyyəti x_i ilə təyin olunursa, onda i-ci element m ü h ü m e l e m e n t adlanır. Əgər sistemin hər bir elementi mühüm element olarsa və $x_i' \le x_i''$, $i=1, ..., n$ olduqda $\varphi(x_1', ..., x_n') \le \varphi(x_1'', ..., x_n'')$ olarsa, sistem m o n o t o n s t r u k t u r a malikdir.

Elementlərin vəziyyətləri x_i-lərin qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu və $p_i = \mathbf{P}\{x_i=1\}$ ehtimallarının da təyin olunduğu fərz olunur. Onda sistemin işəqabiliyyətliliyi ehtimalı təyin olunmuşdur və bu ehtimal $h(p_1, ..., p_n) = \mathbf{P}\{\varphi=1\}$ kimi ifadə olunur. $h(p_1, ..., p_n)$ funksiyasının analizi sistemin imtinasız işləmə ehtimalının ən çox hansı elementlərdən asılı olmasını aşkar edə bilər. Əgər i-ci elementin fasiləsiz işləmə müddəti τ_i – paylanma funksiyası $F_i(t) = \mathbf{P}\{\tau_i \le t\}$ olan təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda $p_i = \mathbf{P}\{x_i=1\} = F_i(t)$, $\overline{F}_i(t) = 1 - F_i(t)$ olur. Bu halda, bərpa olunmayan elementlərli monoton strukturlu sistemin t müddəti ərzində fasiləsiz işləmə ehtimalı $\overline{F}(t) = h(\overline{F}_1(t), ..., \overline{F}_n(t))$ bərabərliyi ilə ifadə olunur. Mürəkkəb strukturlu sistemin işləmə ehtimalının və ya sistemin uyğun *imtina funksiyasının intensivliyinin* hesablanması çoxsaylı hesablamaların aparılmasına səbəb olur. Bu halda, köhnəlmə xassələri ilə bağlı bərabərsizliklərdən, *minimal zəncirlər və kəsiklər metodu* ilə bağlı bərabərsizliklərdən istifadə oluna bilər.

Sistemin etibarlılığının analizi məqsədilə sistemin strukturu *imtinalar ağacı* ilə təsvir olunur.

Sistemi proyektləndirmə ərəfəsində onun etibarlılıq göstəricilərini (imtinasız işləmə ehtimalını, işlək olma əmsalını) yaxşılaşdırmaq məqsədilə əlavə elementlərin təsiri araşdırılır (struktur e h t i y a t d a s a x l a n m a; bax, [4]). Digər ehtiyatda saxlama tipləri də, məs., funksional, zaman, yüklənmə kimi tiplər də mümkündür (bax, *Ehtiyatda saxlama*, *Optimal ehtiyatda saxlama*).

Sistemin etibarlılıq göstəriciləri, sıradan çıxan elementlərin bərpası mümkün olduqda, yaxşılaşır. Bərpalı sistemin etibarlılıq göstəricilərinin hesablanılması kütləvi xidmət sistemlərinin göstəricilərinin hesablanılmasına çox analojidir (bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*). Sistemə sifarişlərin (tələblərin) daxilolma anları imtina anlarına uyğundur, xidmət müddətlərinə isə təmir müddəti və ya sıradan çıxan elementlərin yenisi ilə əvəz olunma müddəti uyğundur. Ani təmirli sistemin ən sadə riyazi modeli bərpa prosesinə uyğundur (bax, *Bərpa nəzəriyyəsi*).

M i s a l. Sistem EHM-ni idarə edən iki identik elementdən ibarətdir. $t=0$ başlanğıc anında hər iki element saz vəziyyətdədir. Hər bir t anında yalnız bir saz element istifadə olunur, ikinci element isə əgər saz vəziyyətdədirsə, yüklənməyərək ehtiyatda saxlanılır. Sıradan çıxan elementin bərpasına dərhal başlanılır, ehtiyatda saxlanılan element isə işə başlayır. Fasiləsiz işləmə müddəti U_i və bərpa müddəti V_i – paylanma funksiyaları uyğun olaraq $F(s)$ və $G(s)$ olan qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Sıradan çıxmış elementin bərpası başa çatmayıb, işləyən element ilk dəfə sıradan çıxdığı anda sistem sıradan çıxır. Belə sistemin sıradan çıxdığı ana qədər işləmə müddətinin riyazi gözləməsi $T = m + m_1/(1-\gamma)$ kimi ifadə olunur, burada $m = \mathbf{M}U_i$ – elementin fasiləsiz işləmə müddətinin orta qiyməti; $m_1 = \mathbf{M}\min(U_i, V_i)$, $\gamma = \mathbf{P}\{V_i \le U_i\}$ isə sıradan çıxan elementin bərpasının işləyən elementin sıradan çıxma anına qədər, sona çatması ehtimalıdır.

Etibarlılıq göstəricilərinin hesablanması üçün analitik metodlarla yanaşı statistik modelləşdirmənin metodları geniş surətdə istifadə olunur (Monte – Karlo metodları).

Bərpaolunan elementlərli sistemin etibarlılıq göstəriciləri təmir müddətinin qısaldılması hesabına yaxşılaşır. Təmir müddətinin qısaldılması üçün sıradan çıxmış elementləri axtarma üçün xüsusi metodlar işlənilir (bax, *İmtina axtarışı*).

E. r. n.-nin sıradan çıxan elementlərin bərpa olunmasını nəzərə alan əsas riyazi modelləri üçün aşkar analitik həllər olmadığından E. r. n.-də asimptotik metodlardan geniş istifadə olunur. Bu halda fərz olunur ki, bərpa «sürətlə» aparılır, yəni verilmiş bərpa göstəriciləri (məs., orta müddət) imtinasız işləmə intervallarının analoji göstəricilərilə müqayisədə sonsuz kiçilən olur. Sistem və elementlərin etibarlılığını artırmaq məqsədilə, istismar prosesində profilaktik tədbirlər aparılır.

E. r. n.-də etibarlılıq göstəricilərinin faktiki qiymətləri haqqında statistik nəticələrin alınması məsələləri mühüm yer tutur. Tipik misallar sistemin elementlərini (komponentlərini) təşkil edən

sınaqların nəticələrinə görə sistemin etibarlılığının qiymətləndirilməsi məsələləridir.

M i s a l. 1) Sistemin n müxtəlif elementlərdən ibarət olduğu fərz olunur. İxtiyari elementin sıradan çıxması digər elementlərin sıradan çıxmasından asılı olmayıb, sistemin sıradan çıxmasına səbəb olur, yəni ehtiyatda saxlanılma yoxdur. i tipli imtinalar m_i sayda elementlərin sınaqdan keçirilməsində müşahidə olunmamışdır, $i = 1, ..., n$. Bu halda sistemin işqabiliyyətliliyinin ehtimalının γ – etibarlı aşağı sərhədi – $m_k = \min\limits_{1 \le i \le n} m_i$ şərtini təmin edən k tipli elementlərin işəqabiliyyətliliyinin ehtimalının γ – etibarlı aşağı sərhədinə bərabərdir.

Elementlərin (sistemin) etibarlılıq göstəriciləri haqqında nəticələr xüsusi qaydada planlandırılmış sərgi sınaqlarının nəticələrindən alınmış verilənlərə əsaslanılır. N – elementlərin sınaqları üçün hücrələrin sayı olsun. Hər bir element bir hücrədə yerləşir. Sərgi sınaqları iki sinfə ayrılır: sınaqlar aparıldıqda sıradan çıxan elementləri saz elementlərlə əvəz olunmayan B sinfi və sıradan çıxan elementləri saz elementlərlə əvəz olunan C sinfi. Sərgi sınaqlarının davam edilmə müddəti dayanma qaydası ilə təyin olunur, məs., sınaqlar müddətinin limiti T -nin verilməsi ilə, müşahidə olunan imtinaların limit qiyməti r -in verilməsi ilə. Sınaqların mühüm xarakteristikası t müddəti ərzində bütün sınaqdan keçirilən elementlərin imtinasız işləmə müddətlərinin cəmi $S(t)$ -dir. Sərgi sınaqlarında $[N, B, (r)]$ planına görə N element sınaqdan keçirilir, bu elementlər sıradan çıxdıqda yeni elementlərlə əvəz olunur və müşahidələr r -ci imtina qeyd olunana qədər aparılır. $[N, B, (r)]$ planına – t a m i ş l ə n i l m ə m ü d d ə t i – $S(t_r) = t_1 + ... + t_{r-1} + (N - r + 1)\, t_r$ uyğun olur, burada $t_1, ..., t_r$ – imtinaların baş verdiyi anlardır və $t_1 < t_2 < ... < t_r$. $[N, B, (r)]$ planı üzrə aparılan sınaqlarda $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ eksponensial paylanma funksiyasının parametri λ -nın meylsiz statistik qiyməti $\hat{\lambda} = (r-1)/S(t_r)$ nisbətinə bərabərdir. Əgər bütün sınaqlar $[N, B, T]$ planı üzrə aparılmışdırsa, bütün N sayda elementlər T müddəti ərzində sınaqdan keçirilirsə, onda λ parametrinin meylsiz statistik qiymətinin ifadəsi olduqca mürəkkəb olur. Sınaqdan keçiriləcək elementlərin etibarlılıq xarakteristikalarının qiymətləri üçün nöqtəvi statistik qiymətlərin, etibarlı intervalların və hipotezlərin yoxlanılması kriterlərinin ifadələri planın tipi və imtinasız işləmə müddətinin paylanma funksiyalarının seçilmiş ailəsi ilə təyin olunur ki, bu da sərgi sınaqlarının nəticələrinin üzərində işlənilməsi üçün müxtəlif statistik metodların tətbiq olunması ilə səciyyələnir (bax, [1], [5], [6]).

Əgər paylanma funksiyalarının qeyri – parametrik ailəsinə baxılarsa, yəni imtinasız işləmə müddətinin paylanma funksiyaları ixtiyari olarsa, onda bir çox statistik nəticələr natamam (senzurlanmış) verilənlər yığımı sxemi əsasında aşağıdakı qaydada təyin olur.

Əgər x_{ij} i -ci elementin bütün müşahidə olunmuş imtinasız işləmə müddətlərinin j -ci porsiyasında müşahidə olunmuş müddətdirsə, γ_{ij} – bu hissədə i -ci element üzərində müşahidənin dayandırılması işarəsidirsə, $\mathbf{x}_j = \{ x_{ij}, \gamma_{ij}, i = 1,...,k_j \}$ ədədlər toplusu v e r i l ə n l ə r p o r s i y a s ı adlanır. Əgər i -ci elementin sıradan çıxması ilə əlaqədar olaraq müşahidələr dayandırılmışdırsa, onda $\gamma_{ij} = 1$; əgər müşahidələr i -ci elementin sıradan çıxmasına görə deyil, digər səbəblərə görə dayandırılmışdırsa, $\gamma_{ij} = 0$ olur.

Məlumatlar hissəsi d i s k r e t b ö l ü n ə n l i k xassəsinə o halda malikdir ki, əgər ixtiyari $p_{ij} > 0$

$$\sum_{i=1}^{(k_j)} p_{ij} \le 1,$$

şərtini ödəyən p_{ij} ədədləri üçün sıçrayışları $\Delta F(x_{ij}) = F(x_{ij}) - F(x_{ij} - 0) = p_{ij} > 0$ olan elə $F(\cdot)$ paylanma funksiyası və əngəlləyici θ parametrinin hər hansı bir qiyməti tapılsın ki, $F(\cdot)$ və θ ilə təyin olunan verilənlər hissəsi $\mathbf{x}_j$ -nin alınması ehtimalı

$$\prod_{i=1}^{k_j} \left[\Delta F(x_{ij})\right]^{\gamma_{ij}} \left[1 - F(x_{ij})\right]^{1-\gamma_{ij}} C(\mathbf{x}_j, \theta) > 0$$

ifadəsinə bərabər olsun. Diskret bölünənlik xassəsinə malik verilənlər hissəsi aşağıdakı hallarda alınır: a) B tip plan üzrə sınaqlar aparıldıqda, bu şərtlə ki, sınaqların dayandırılması anları *dayanma anı* olsun; b) işləmə müddətləri asılı olmayan alternlənən proseslər və təmir müşahidə olunduqda, bu kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları uyğun olaraq $F(s)$ və $G(s)$ -dir [$G(s)$ – əngəlləyici parametr rolunu ifadə edir]; c) semi – Markov prosesləri və həmçinin etibarlılıq haqqında verilənlərin toplanılması üçün digər bir sıra sxemlər müşahidə olunduqda.

$\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ – qarşılıqlı asılı olmayan, eyni qanunla paylanması şərt kimi qoyulmaya da bilinən, diskret bölünənlik xassəsinə malik verilənlər porsiyaları olsun. Onda $F(s)$ paylanma funksiyası üçün maksimal doğruyaoxşarlıq ümumiləşmiş statistik qiyməti

$$\hat{F}(s) = 1 - \prod_{u \le s} \left[1 - \frac{\Delta D(u)}{N(u)} \right] \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\Delta D(u) = D(u) - D(u-0)$, $D(u)$ isə $\gamma_{ij} = 1$ olan $x_{ij} \le u$ şərtini ödəyən bütün x_{ij} -lərin sayı; $N(u)$, – $x_{ij} \ge u$ şərtini ödəyən bütün x_{ij} -lərin sayına bərabərdir, $i = 1, ..., k_j$, $j = 1, ..., m$. (*) statistik qiyməti $F(s)$ paylanma funksiyasının v u r u ğ u s t a t i s t i k q i y m ə t i adlanır.

Əgər $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ porsiyaları yuxarıda qeyd olunmuş a), b), c) müşahidələrinin misallarına uyğun olarsa, onda $m \to \infty$ olduqda (*) statistik qiyməti tutarlı və asimptotik normallıq xassələrinə malikdir və $F(s)$ paylanma funksiyası üçün bu halda γ – etibarlı interval və zolaqların sadə asimptotik sərhədlərini almaq olur (bax, [7] – [8]).

Etibarlılıq haqqında verilənləri topladıqda onların uyğun rejimləri nəzərə alınmalıdır. α – sınaqları və ya istismar rejimi dedikdə, əsas yüklənmə parametrlərinin seçilməsi nəzərdə tutulur (məs., temperatur, vibrasiya amplitudları və s.). Əgər sistemlər (elementlər) müxtəlif α rejimlərində istismar olunursa, onda etibarlılığı yoxlamaq üçün sınaqlar elə tərzdə aparılır ki, sistemin etibarlılıq göstəricilərinin statistik qiymətlərini iş rejiminin funksiyası kimi almaq mümkün olsun. Yükləmə hesabına sınaqların rejiminin ağırlaşması imtinaların baş vermə anlarının tezləşməsinə səbəb olur. E. r. n. - nin mühüm məsələlərindən biri – müəyyən

rejimlərdən digər rejimlərə keçdikdə sistemin etibarlılıq göstəricilərinin yenidən hesablanılma metodlarının təyin olunması məsələsidir. Bu məsələnin mürəkkəbliyi mümkün ola bilən rejimlərin müxtəlifliyi ilə bağlıdır. Praktikada çox istifadə olunan sınaqların rejimləri – yüklənməsi pilləvari olan və ya xətti artan rejimlərdir.

Zədələrin additiv yığım modelinin tətbiq oluna bilinməsi şərtlərində yenidən hesablama metodları çox sadədir. Bu modeldə fərz olunur ki, sabit yüklənməyə malik hər hansı α_0 nominal rejimində imtina (sıradançıxma) anı – paylanma funksiyası $F_0(t) = \mathbf{P}\{R \le t\}$ olan R təsadüfi kəmiyyətidir. α_0 rejimindən digər sabit yüklənməyə malik olan α rejiminə keçid $r(\alpha_0, \alpha) \ge 0$, $r(\alpha_0, \alpha_0) = 1$ funksiyası ilə verilir. İxtiyari $\alpha_1 = \alpha_1(t)$ rejimi üçün imtina anı τ

$$\int_0^{\tau} r(\alpha_0, \alpha_1(s))\, ds = R$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. α_1 rejimində fasiləsiz işləmə müddətinin paylanma funksiyası

$$F(t, \alpha_1) = \mathbf{P}\left\{ \int_0^t r(\alpha_0, \alpha_1(s))\, ds \ge R \right\} =$$

$$= F_0\left(\int_0^t r(\alpha_0, \alpha_1(s))\, ds \right)$$

münasibətilə ifadə olunur. Beləliklə, zədələrin additiv yığım modelində hesablanma aparılması üçün ilk əvvəl $r(\alpha_0, \alpha)$ funksiyası və $F_0(s)$ funksiyası qiymətləndirilməlidir.

E. r. n.-də daha ümumi hesablanılma metodlarından da istifadə olunur (bax, [1]).

Əd.: [1] Вопросы математической теории надежности, M., 1983; [2] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, M., 1965; [3] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., M., 1984; [4] Надежность технических систем, M., 1985; [5] Kalbfleisch J., Prentice R. L., The statistical analysis of failure time data, N. Y. – [a. o.], 1980; [6] Lawless J. E., Statistical models and methods for lifetime data, N. Y. – [a. o], 1982; [7] Беляев Ю. К., «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1985, № 4, с. 45–59; [8] Беляев Ю. К., Замятин А. А., в сб.: Вероятностные процессы и их приложения, M., 1985, с. 3–17; [9] Надежность и эффективность в технике, т. 8, M., 1990.

ETİBARLILIQ « надежность; reliability » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin*, *Etibarlılıq nəzəriyyəsi*; analitik – statistik metod.

ETİBARLILIQ ƏMSALI « доверия коэффициент; confidence coefficient » – bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Etibarlı interval.*

ETİBARLILIQ FUNKSİYASI « надежности функция; reliability function »: 1) E. f. – sistemin fasiləsiz işləmə ehtimalını onun elementlərinin etibarlılıq qiymətləri $p_1, ..., p_n$ -lərdən asılılığı ilə ifadə edən

$$R = R(p_1, ..., p_n)$$

funksiyasıdır; $R = (p_1, ..., p_n)$ ardıcıl sistemi, $R = 1 - (1 - p_1) ... (1 - p_n)$ paralel sistemi üçün. Mürəkkəb strukturlu sistem halında E. f.-nın tədqiqi kombinatorika metodları ilə (məs., minimal zəncirlər və minimal kəsiklər metodu ilə) aparılır.

2) E. f. $(0, t)$ müddətində hər hansı bir obyektin fasiləsiz işləmə ehtimalını ifadə edən $P(t)$ funksiyasıdır. Baxılan obyektin imtinalar intensivliyi ilə bağlı olan E. f. $P(t)$ –

$$P(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \lambda(u)\, du \right\}$$

münasibətilə ifadə olunur.

ETİBARLILIQ FUNKSİYASI, etibarlılıq əmsalı **« надежности функция,** коэффициент надежности; **reliability function,** reliability coefficient **»** – verilən rabitə kanalı üçün blokun uzunluğu n -in artması ilə optimal *blok kodu* xətasının ehtimalının azalmasını təmin elən eksponentin qüvvət üstündəki n -in əmsalıdır. Verilən kanal üçün E. f. $E(R)$ –

$$E(R) = \limsup_{n \to \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mathbf{P}_e(n, R) \right\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\mathbf{P}_e(n, R)$ – verilən n və R (kodun sürəti) üzrə blok uzunluqları n olan bütün blok kodları üzrə xətanın orta ehtimalının qiymətinin aşağı sərhədidir. Kanalların kifayət qədər geniş sinfi üçün $E(R)$ -in dəqiq qiyməti yalnız $R_{\text{cr}} \le R \le C$ oblastında məlumdur, burada C – kanalın ötürücülük qabiliyyəti, R_{cr} – kritik sürətdir. $0 \le R < R_{\text{cr}}$ oblastında $E(R)$ üçün yalnız yuxarı və aşağı sərhədlər məlumdur (bax, *Təsadüfi kodla(n)ma* sərhəd, *Sıx yerləşmə sərhədi*).

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., M., 1974; [2] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., M., 1965; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., M., 1985.

ETİBARLILIQ GÖSTƏRİCİLƏRİ, SİSTEMİN « надежности системы показатели; reliability indices of system » – konkret bir sistemin etibarlılığını müəyyənləşdirən xassələri ifadə edən kəmiyyət xarakteristikalarıdır. Etibarlılıq – sistemin zaman ərzində qəbul olunmuş sərhədlər çərçivəsində bütün paramertlərinin qiymətlərini saxlama xassəsidir. Bu parametrlər verilmiş rejimlərdə və texniki xidmət, tətbiq olunma, təmir, saxlanılma şəraitlərində tələb olunan funksiyaları yerinə yetirmək qabiliyyətini xarakterizə edən parametrlərdir.

Etibarlılıq elə mürəkkəb xassədir ki, o, texniki sistemin hansı məqsədlə istifadə olunmasından və bu sistemin tətbiq olunma şərtlərindən asılı olaraq, imtinasızlıq, uzunömürlülük, təmirəyararlılıq və saxlanılanlıq xassələrinin birgə nəzərə alınmasını ifadə edir.

Sistemin müəyyən müddət ərzində işəqabiliyyətlilik vəziyyətini kəsilməz surətdə saxlama xassəsinə imtinasızlıq (sıradançıxmamazlıq) deyilir. İmtinasızlıq etibarlılığın əsas xassəsidir. Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsinin əsas işləri imtinasızlıq göstəricilərinin hesablanmasına həsr olunmuşdur. İmtinasızlıq göstəricilərinin əsas olanları aşağıdakılardır.

İmtinasız işləmə (fasiləsiz işləmə) ehtimalı – verilmiş t_0 müddəti ərzində sistemin fasiləsiz işləməsi ehtimalıdır. ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə imtinaya qədər işləmə müddəti işarə olunarsa, bu göstərici $P(t_0) = \mathbf{P}\{\xi \ge t_0\}$ kimi ifadə olunar.

İmtinaya qədər orta işləmə müddəti– sistemin ilk imtinaya qədər işləmə müddətinin riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\xi$ -dir.

İmtinaya qədər qamma–faizli işləmə müddəti– γ ehtimalı ilə sistemin fasiləsiz işlədiyi t_γ müddətidir, yəni $P\{t_\gamma\} = \gamma$.

İmtinaya sərfolunan orta işləmə müddəti – bərpaolunan sistemin işləmə müddətinin bu işləmə müddətində baş vermiş imtinalar sayının riyazi gözləməsinə nisbətidir.

İmtinasızlığın mühüm xarakteristikası – *imtina intensivliyi funksiyasıdır*.

Təmirəyararlılığın əsas göstəriciləri – verilmiş müddət ərzində işəqabiliyyətlilik vəziyyətinin bərpa olunma ehtimalı və işqabiliyyətlilik vəziyyətinin bərpasının orta müddətidir.

Etibarlılığın bəzi xassələrini xarakterizə edən etibarlılığın kompleks göstəricilərindən də tez-tez istifadə olunur. Bu göstəricilərdən əsas olanları imtinasızlığı və təmirəyararlığı xarakterizə edən göstəricilərdir. Hazırolma əmsalı – ixtiyari anda sistemin işəqabiliyyətli olması ehtimalıdır. Operativ hazırolma əmsalı – obyektin ixtiyari anda işəqabiliyyətli vəziyyətdə olması və bu andan sonra verilmiş zaman intervalında imtinasız işləməsi ehtimalıdır.

Sistemlərin hamısı yalnız iki vəziyyət ilə, yəni ya işəqabiliyyətliliyi və ya sıradan çıxmış vəziyyəti ilə xarakterizə olunmur, belə ki, sistemin işəqabiliyyətliliyinin effektivliyi müəyyən surətdə aşağı olmağa başladığı halda hissəvi sıradan çıxma vəziyyəti də olur. Buna görə də, etibarlılıq araşdırıldıqda işləmə göstəricilərinin effektivliyi də tədqiq olunur. Belə halda xüsusi olaraq, etibarlılıq effektivliyi saxlama əmsalı – müəyyən istismar müddətində effektivlik göstəricisinin bu göstəricinin nominal qiymətinə olan nisbəti ilə xarakterizə olunur və bu da məqsədə uyğun olur; göstəricinin nominal qiyməti isə baxılan müddətdə sistemin sıradan çıxmadığı şərtilə hesablanır. Effektivliyi saxlama əmsalı sistemin müxtəlif elementlərinin imtinalarının bu əmsaldan istifadənin məqsədyönlü tətbiqinin effektivliyini xarakterizə edir.

Etibarlılığın hesablanması elementlərin etibarlılığı haqqında məlumatların nəzərə alınması ilə onların işləmə prinsipləri və onların strukturu haqqında informasiya əsasında sistemin etibarlılıq göstəricilərinin kəmiyyətcə hesablanmasından ibarətdir. Etibarlılıq göstəricilərinin apriori hesablanması üçün ehtimal nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunur. İstismar nəticələri və ya xüsusi sınaqların nəticələri əsasında etibarlılıq göstəricilərinin empirik statistik qiymətlərini hesablamaq üçün riyazi statistikanın metodlarından istifadə olunur.

Əd.: [1] Надежность в технике. Термины и определения. ГОСТ 27.002-83, М., 1983; [2] Надежность технических систем. Справочник, М., 1985; [3] Вопросы математической теории надежности, М., 1983.

ETİBARLILIQ GÖSTƏRİCİSİ « надежности показатель; reliability index » – etibarlılıq nəzəriyyəsində istifadə olunan termindir. Bütün elementləri statistik asılı olmayan sistemdə i-ci element təsadüfi X_i vəziyyəti ilə xarakterizə olunur və məlumdur ki,

$$\mathbf{P}\{X_i = 1\} = p_i = \mathbf{M}\,X_i, \quad i = 1, ..., n.$$

$\mathrm{X} = (X_1, ..., X_n)$ olsun. i-ci elementin işəqabiliyyətli olması ehtimalı i-ci elementin etibarlılıq göstəricisi adlanır. Onda sistemin E. g. analoji olaraq

$$\mathbf{P}\{\Phi(\mathrm{X}) = 1\} = h = \mathbf{M}\Phi(\mathrm{X})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\mathbf{M}\,\mathrm{X}$, – X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, Φ – sistemin struktur funksiyasıdır.

Sistemin elementləri asılı olmadığı halda sistemin E. g.-ni onun elementlərinin E. g.-lərinin funksiyası kimi ifadə etmək olar:

$$h = h(\mathrm{p}).$$

Əgər $p_1 = p_2 = ... = p_n = \mathrm{p}$ olarsa, $h(\mathrm{p})$ simvolundan istifadə olunur. $h(\mathrm{p})$-yə (elementlər eyni olduğu halda isə $h(\mathrm{p})$-yə) Φ strukturunun etibarlılıq funksiyası deyilir. Əgər sistemin elementləri asılı olmayan elementlər olarsa, onda sistemin E. g. yalnız p -nin funksiyası olmaya bilər və bu halda h funksiyasından istifadə olunmur.

Etibarlılıq funksiyası üçün

$$h(\mathrm{p}) = p_i\, h(1_i, \mathrm{p}) + (1 - p_i)\, h(0_i, \mathrm{p}), \quad i = 1, ..., n$$

bərabərliyi doğrudur (bax, [1]).

Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

ETİBARLILIQ HÜDUDU / SƏVİYYƏSİ « доверительный уровень; confidence level » – bax, *Etibarlı interval*, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Statistik qiymətləndirmə.*

ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİ; analitik – statistik metod **« надежности теория;** аналитико статистический метод; **reliability theory;** analytical – statistical method / combined simulation method **»** – etibarlılığı hesablanılacaq xarakteristikaların $\xi_1, ..., \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələrinin analitik ifadəsi f şəklində ifadə edilməsindən ibarət hesablama metodudur.

Qiymətləndiriləcək xarakteristikanın təqribi qiymətini tapmaq üçün $\xi_1, ..., \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərini *Monte – Karlo metodu* ilə hesablayaraq, f ifadəsində uyğun təqribi $\mathbf{M}\xi_1, ..., \mathbf{M}\xi_k$ qiymətlərinin yerinə qoymaq lazımdır. Xarakteristikanın f, $\mathbf{M}\xi_i$ ilə ifadə olunmasının seçilməsi sonlu statistik qiymətin dispersiyasının minimumuna əsasən aparılır (bu məsələ, adətən, evristik mülahizələrə əsaslanmaqla həll olunur). Sistemin etibarlılığı üçün kiçik ε parametrinin qüvvət üstləri üzrə sırası kimi ifadə olunmasına əsaslanan analitik – statistik metod sxeminə baxılmışdır; ε – sistemin elementlərinin imtina intensivliklərini ümumi normalaşdırıcı vuruqdur. *Hissəvi xətti proses* halında qeyd olunan qüvvət üstlü sıranın əmsallarının ehtimali interpretasiyası mümkündür və bunları asanlıqla modelləşdirmək olur.

Analitik – statistik metodun modifikasiyasıyaları sistemin modeli üzərində bilavasitə sürətli modelləşdirmə metodlarıdır. Bu halda, sistemin axtarılan ehtimali xarakteristikalarının təyin olunması – modelləşdirməyə (metodun statistik hissəsi), sistemin trayektoriyalarının bəzi funksionallarının hesablanması və orta qiymətlərinin təyin olunmasına (analitik hissə) gətirilir.

Analitik – statistik metod sistemin qeyri – stasionar xarakteristikalarının (fasiləsiz işləmə ehtimalı, qeyri – stasionar hazırolma əmsalı, operativ hazırolma əmsalı) araşdırılmasında effektiv hesab olunur.

Analitik – statistik metod xarakteristikaları az fərqlənən sistemlərin axtarılan etibarlılıq göstəricilərinin yaxınlığının statistik qiymətlərini kəmiyyət etibarilə qurmağa imkan verir. Metodun birinci mərhələsində iki sistemin axtarılan xarakteristikalarının fərqi üçün aşkar şəkildə hesablanılmayan bəzi parametrlər daxil olan analitik düsturlar qurulur; ikinci mərhələdə statistik modelləşdirmə metodu ilə verilmiş parametrlərin meylsiz statistik qiymətləri qurulur və bu qiymətlər analitik düsturda yerinə qoyulur.

Analitik – statistik metod və onun modifikasiyaları mürəkkəb texniki sistemlərin etibarlılıq xarakteristikalarının hesablanmasında geniş surətdə praktiki tətbiq olunur. Yüksəketibarlı sistemlərdə bu metodların tətbiqi statistik qiymətin dispersiyasını statistik modelləşdirmə metodu ilə bilavasitə hesablanmış qiymətlə müqayisədə azaltmağa imkan verir. Analitik – statistik metod və onun modifikasiyaları EHM-da reallaşdırılmışdır.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Исследования по анализу надежности сложных систем, К., 1975; [2] Коваленко И. Н., Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем, М., 1980; [3] Коваленко И. Н., Расчет вероятностых характеристик систем, К., 1982; [4] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Методы расчета высоконадежных систем, М., 1988.

EVKLİD KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ « евклидова квантовая теория поля; Euclidean quantum field theory » – kvant meydan nəzəriyyəsinin bölməsidir, burada $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ fəzasında Evklid meydanları adlandırılan – M^d Minkovski fəzasında adi kvant meydanları üzrə qurulan köməkçi yeni meydanlar öyrənilir (kobud deyimdə, bu meydanlar qeyd olunanların $\mathbb{R}^d$ fəzasına – «xəyali zaman» oblastına «davamıdır»). Əksər hallarda M^d-də kvant meydanını qurmaq və öyrənmək əvəzinə, ona uyğun Evklid fəzasını araşdırmaq, sonradan isə analitik surətdə davam edilmə prosedurunun köməyilə ilkin meydana qayıtmaq münasibdir.

$\mathbb{R}^d$-də Evklid meydanları, M^d-də kvant meydanları aksiomatik təsvir oluna bilinirlər: bozon meydanı – $T \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ olduqda [$S(\mathbb{R}^d)$, – $\mathbb{R}^d$-də sürətlə azalan sonsuz hamar funksiyaların fəzasıdır], $\xi_\varphi(T) = (T, \varphi)$ şəklində funksionallar ilə doğurulmuş, $\mathbb{R}^d$-də ümumiləşmiş funksiyaların $S'(\mathbb{R}^d)$ fəzasında funksionallarının $\mathcal{A}$ cəbrində təyin olunmuş vəziyyəti (və ya kvazivəziyyəti) kimi verilir. Bu vəziyyət bəzi ümumi şərtləri ödəməlidir (kovariantlıq, SO – müsbətlik və s.; bax, [2]). Fermion Evklid meydanları üçün kvazivəziyyət uyğun Qrassman cəbrində təyin olunur (bax, [3]).

Əgər μ – Markov ümumiləşmiş təsadüfi meydanının $S'(\mathbb{R}^d)$-də ehtimal paylanmasıdırsa, onda bu paylanma $(F \in \mathcal{A})$ üzrə $\langle F \rangle_\mu$ orta qiyməti $\mathbb{R}^d$-də bozon Evklid meydanını təyin edir; E. Nelsonun aşkar etdiyi bu fakt (E. Nelson, bax, [1]) Evklid meydanlarının qurulmasını olduqca yüngülləşdirir.

$$\langle \xi_{\varphi_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{\varphi_n} \rangle = \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^n} S_n(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)\, dx_1^d \ldots dx_n^d,$$

$$\varphi_i \in S(\mathbb{R}^d),$$

momentləri $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ (ümumiləşmiş) funksiyalarını təyin edir (bunlar Evklid meydanının *Şvinger funksiyaları* adlanır) və bunların $(M^d)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ fəzalarına analitik davamları uyğun kvant meydanının *Uaytman funksiyaları* ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [3] Osterwalder K., Schrader R., «Helv. Phys. Acta», 1973, v. 46, p. 277–302.

EVKLİD MEYDANI « евклидово поле; Euclidean field » – bax, *Evklid kvant meydan nəzəriyyəsi*.

EVKLİD ŞEYPİ « евклидова шейп; Euclidean shape » – bax, *Təsadüfi şeyp*.

EVKLİD YANAŞMASI « евклидова подход; Euclidean approach » – bax, $P(\varphi)_2$ – *modelləri*, *kvant meydan nəzəriyyəsinin*.

EVOLYUSİON SENZURLAMA « эволюционное цензурирование; evolutional censoring » – bax, *Senzurla(n)ma.*

EVOLYUSİONAL STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK « эволюционное стохастическое дифференциальное уравнение; evolutional stochastic differential equation » – təchiz olunmuş Hilbert fəzasında (rus. в оснащенном гильбертовом пространстве) –

$$\begin{aligned} du(t, \omega) &= A(u(t, \omega), t, \omega)\, dN(t) + \\ &+ B(u(t, \omega), t, \omega)\, dM(t) \\ t &> t_0, \quad u(t_0, \omega) = u_0(\omega) \end{aligned} \tag{1}$$

şəklində tənlikdir, burada A və B – hər hansı təchiz olunmuş H Hilbert fəzasında operatorlar, N – məhdud variasiyalı təsadüfi proses, M – qiymətləri hər hansı Hilbert fəzasından olan lokal martinqal, ω – təsadüf simvolunu ifadə edən dəyişən, (1) bərabərliyi isə stoxastik differensial martinqallar mənasında anlaşılır. H Hilbert fəzasını «təchiz edən» fəzalar kimi A və B operatorlarının təyin olunma və qiymətlər oblastları ilə bağlı fəzalardan istifadə olunur.

E. s. d. t.-yə tipik misal xüsusi törəməli evolyusion stoxastik differensial tənlikdir. Məs.,

$$du(t, x) = \frac{1}{2} u_{xx}(t, x)\, dt + u_x(t, x)\, d\boldsymbol{w}(t),$$

$$(t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^1,$$

$$u(0, x) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}^1$$

şəklində tənliyə, $\boldsymbol{w}$ – Viner prosesi, u_0, – $L^2(\mathbb{R}^1)$ fəzasından funksiya olduğu halında, $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $W_2^{-1}(\mathbb{R}^1)$ Sobolev fəzaları cütü ilə təchiz olunmuş Hilbert fəzasında E. s. d. t. kimi baxmaq münasibdir. $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ fəzası $A := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $B := \frac{\partial}{\partial x}$ operatorlarının təyin olunma oblastı, $W_2^{-1}(\mathbb{R}^1)$ isə A operatorunun qiymətlər oblastıdır.

Xüsusi törəməli E. s. d. t. E. s. d. t. nəzəriyyəsinin inkişafı üçün başlanğıc və əsas stimul olmuşdur (bax, [1] – [3]), lakin elə mühüm problemlər mövcuddur ki, bunların öyrənilməsini zəruri edir. Məs., sonsuzölçülü fəzalarda 2-ci tərtib xüsusi törəməli elliptik və parabolik tənliklərin həllində E. s. d. t.-lər münasib köməkçi aparatdır (bax, [4]).

E. s. d. t.-lər nəzəriyyəsində stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsində olduğu kimi zəif və güclü həllər anlayışları da təyin olunmuşdur. Bir qədər dəqiq olmasa da, güclü həll M martinqalı verildiyi halda verilmiş ehtimal fəzasında qurulmuş həll anlaşılır. Zəif həll anlayışı belə anlaşılır: hər hansı elə ehtimal fəzası və bu fəzada elə martinqal axtarılır ki, bunlar üçün (1)

tənliyinin həlli olsun. Güclü və zəif həllərin varlığını təmin edən şərtlər olduqca fərqlidirlər. Təchiz olunmuş E. s. d. t.-in güclü və zəif həllərinin varlığına aid tipik nəticələr aşağıda verilir.

H – separabel Hilbert fəzası, $H^* \equiv H$, V – separabel refleksiv Banax fəzası olsun (sadəlik üçün fərz olunur ki, bütün fəzalar həqiqidirlər). Əgər: a) $V \subset H \subset V^*$; b) V, – H -da sıx olarsa; c) əgər elə c konstantı varsa ki, bütün $v \in V$ -lər üçün $\|v\|_H \le c\|v\|_V$; ç) $vv^* = (v, v^*)_H$ şərti bütün $v \in V$, $v^* \in V$ üçün ödənilərsə (vv^*, $-v^*$-un v-də qiymətidir) fərziyyələri ödənilərsə, H fəzası V, V^* cütü ilə təchiz olunmuş dur, deyilir. Daha sonra hesab olunur ki, a) – ç) xassələrinə malik olan V və H fəzaları verilmişdir. Bu xassələrə malik olan fəzalara aid $W_p^m(G)(=V)$ və $L^2(G)(=H)$ – Sobolev fəzalarını qeyd etmək olar, burada G, – $\mathbb{R}^d$ -də məhdud oblast, $d\,p \ge 2(d - m\,p)$ və ∂G requlyardır. Fərz olunur ki, $(\Omega, \mathscr{A}, \{\mathscr{A}_t\}, \mathbf{P})$ tam ehtimal fəzasında qiymətləri həqiqi separabel E $(E^* = E)$ Hilbert fəzasından olan və vahidi korrelyasion operatora malik Viner prosesi $w(t)$ verilmişdir. $\mathscr{P}$ – öngörül çoxluqların σ – cəbri, $\mathscr{L}^2(E, H)$, – E-dən H-a olan Hilbert – Şmidt operatorlarının fəzası, $\|\cdot\|$ – bu fəzada norma olsun; hesab olunur ki, $S = V \times [0, T] \times \Omega$ -da $A : S \to V^*$ və $B : S \to \mathscr{L}^2(E, H)$ funksiyaları verilmişdir. Fərz olunur ki, bu funksiyalar ölçülən və öngörül funksiyalardır və $v \in V$. Fərz olunur ki,

$$du(t, \omega) = A(u(t, \omega), t, \omega)dt + \\ + B(u(t, \omega), t, \omega)\, d\,w(t), \; t \le T, \qquad (2)$$

$$u(0, \omega) = u_0(\omega) \qquad (3)$$

E. s. d. t. verilmişdir və bəzi K sabitləri, $\alpha > 0$ bütün $v_1, v_2, v_3 \in V$, $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

A_1) A-nın semikəsilməzliyi: $vA(v_1 + \lambda v_2)$ $\mathbb{R}^1$-də λ üzrə kəsilməzdir;

A_2) (A, B)-nin monotonluğu:

$$2(v_1 - v_2)(A(v_1) - A(v_2)) + \| |B(v_1) - B(v_2)| \|^2 \le \\ \le K \| v_1 - v_2 \|_H^2;$$

A_3) (A, B)-nin koersitivliyi:

$$2vA(v) + \| |B(v)| \|^2 + \alpha \| v \|^2 \le K(1 + \|v\|_H^2);$$

A_4) A-nın artımının məhdudluğu:

$$\|A(v)\|_{V^*} \le K(1 + \|v\|_V).$$

Əgər $A_1 - A_4$ şərtləri ödənilərsə və $u_0 \in L^2(\Omega; \mathscr{A}_0; H)$ olarsa, onda (2) – (3) məsələsinin yeganə güclü həlli vardır. Bu həll $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathscr{P}, V) \cap L^2(\Omega; C([0, T]; H))$ fəzasındandır (bax, [1], [2]). Bu həll sonluölçülü stoxastik differensial tənliyin həllinin xassələrinə analoji xassələrə malikdir (məs., bu həll başlanğıc verilənlərə görə kəsilməzdir, bu şərtlə ki, əmsallar təsadüfdən asılı olmasın – Markov xassəsinə malik olsun) və s.

Koersitivlik şərti bəzən olduqca ağır şərt olur. Xətti E. s. d. t.-lərə tətbiq olunarkən onun əvəzinə monotonluq tipli şərtlərdən istifadə etmək olar ki, bu şərtlər xətti halda $(A + 1/2B^*B)$ operatorunun dissipativlik şərtilə əvəz olunur.

E. s. d. t.-in həllinin güclü həllər tipli olmasının isbatı monotonluq xassəsinə əsaslanır. Bu olduqca geniş şərtdir. Məs., A, B xətti olduqları halda, bu şərt koersitivlik şərtindən alınır.

Buna baxmayaraq, bir sıra elə mühüm E. s. d. t. vardır ki, onlar üçün bu şərt ödənilmir. Məs., *Navye – Stoks stoxastik differensial tənliyi* və ya populyasion genetikanın tənliklərindən biri:

$$du(t) = \alpha\, \Delta u(t) dt + \sqrt{u(t)(1 - u(t))}\; d\,w(t)$$

üçün bu şərt ödənilmir.

Lakin bu tənliklərin zəif həllərinin varlığını isbat etmək olur (bax, [5]). Ümumiyyətlə, (2) – (3) məsələsinin zəif həllinin varlığının isbatı üçün monotonluq şərtindən imtina etmək olar. Bunun əvəzində aşağıdakı şərtin ödənilməsini tələb etmək olar; A_5) V-nin H-a daxil olmasının kompaktlığını.

Bu halda semikəsilməzlik şərti A və B operatorlarının hər hansı daha güclü kəsilməzlik şərti ilə əvəz olunmalıdır (bax, [6]).

Monotonluq şərtindən başqa E. s. d. t.-in həllinin yeganəliyini təmin edən hansısa ümumi şərtlər, hal-hazırda məlum deyildir.

E. s. d. t.-in zəif həll problemi ilə bağlı olaraq, müstəqil bir maraq doğuran, E. s. d. t.-lər ardıcıllığının doğurduğu ölçülər ardıcıllığının nisbi kompaktlığı məsələsi araşdırılmışdır (bax, [6]). Bu halda fərz olunmuşdur ki, E. s. d. t.-in əmsalları (1) E. s. d. t.-in əmsallarına yığılır. İsbat olunmuşdur ki, nisbi kompaktlıq üçün əsas kafi şərtlər A_2, A_4, A_5 tipli şərtlərdir.

E. s. d. t.-in həllinin varlığının ən geniş yayılmış isbat metodu – Qalyorkin metodudur. Bu metod eyni zamanda həm güclü, həm də zəif həllərin varlığının isbatında tətbiq olunur. Fərq yalnız sonluölçülü approksimasiyalardan limitə keçmə mərhələsində alınır. A_3 şərti ödənildiyi halda limitə keçmə tənlikdə bilavasitə monotonluq metodu ilə aparılır. Əgər bu şərt olmasa, onda limitə keçid sonluölçülü approksimaedici tənliklərin həllərinin doğurduqları ölçülər üzrə aparılır.

Diffuziya əmsalı B məhdud olan E. s. d. t.-lər üçün semi – qruplar metodu geniş yayılmışdır (bax, [7]).

E. s. d. t.-lər nəzəriyyəsi *operator stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsi* ilə sıx bağlıdır (bax, [8]).

Əd.: [1] Pardoux E., Équations aux dérivés partiells stochastiques nonlineaires monotones. Thése doct. Sci. Univ. Paris Sud., P., 1975; [2] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, М., 1979, с. 71–146; [3] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов, М., 1983; [4] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [5] Viot M., Solutions faibles d'equations aux derivees partielles stochastic nonlineaires. These doct. Sci. Univ. Pierre et Marie Curie, P., 1976; [6] Grigelionis B., Mikulevicius R., «Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.», 1985, v. 69; [7] Curtain R. F., Pritchard A. J., «Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.», 1978, v. 8; [8] Скороход А. В., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 157–85.

EVOLYUSİONAR SPEKTRAL FUNKSİYA « эволюционирующая спектральная функция; evolutionary spectral function » – bax, *Evolyusionar spektral ifadə.*

EVOLYUSİONAR SPEKTRAL İFADƏ « эволюционирующее спектральное представление; evolutionary spectral representation » – $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ *stasionar təsadüfi prosesinin* spektral ifadəsinin zəif qeyri – stasionar proseslərin geniş sinfinə ümumiləşməsidir. $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin E. s. i. aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} A(t;\lambda)\, dZ(\lambda), \qquad (1)$$

burada $Z(\lambda)$ – stasionar təsadüfi prosesin ayrılışında olduğu kimi, qeyri – korrelyar artımlarlı kompleks təsadüfi funksiyadır, odur ki,

$$\mathbf{M}\, dZ(\lambda)\, \overline{dZ(\lambda')} = 0, \quad \lambda' \neq \lambda \quad \text{və} \quad \mathbf{M}\left|dZ(\lambda)\right|^2 = dF(\lambda), \qquad (2)$$

təsadüfi olmayan $A(t;\lambda)$ funksiyası isə bütün t -lər üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| A(t;\lambda)\right|^2 dF(\lambda) < \infty, \qquad (3)$$

şərtini ödəyir (bu şərt bütün t -lər üçün $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2 < \infty$ şərtinin ödənilməsini təmin edir) və t -nin asta dəyişən funksiyasıdır. M. Pristliyə görə (E. s. i.-ni o daxil etmişdir; bax, [1], [2]) $A(t;\lambda)$ -nın «asta dəyişənliyini» aşağıdakı kimi ifadə etmək münasibdir:

$$A(t;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta}\, dK_t(\theta),$$

burada $\left|dK_t(\theta)\right|$ t -nin ixtiyari qiymətində $\theta = 0$ olduqda mütləq maksimuma malikdir. E. s. i.-yə malik olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesləri [yəni $dZ(\lambda)$ (2) şərtini, $A(t;\lambda)$ (3) şərtini ödədikdə və t -yə görə asta dəyişdikdə (1) şəklində ifadə olunan] o s s i l y a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r adlanır.

Təsadüfi funksiyaların ifadə olunması haqqında Karunen teoreminə əsasən $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi, yalnız və yalnız, o halda ossilyar prosesdir ki, t -yə görə hər hansı asta dəyişən $A(t;\lambda)$ funksiyası və məhdud azalmayan $F(\lambda)$ funksiyası üçün $B(t;s) = \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$ funksiyası

$$B(t;s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} A(t;\lambda)\, \overline{A(s;\lambda)}\, dF(\lambda)$$

şərtini ödəsin. Bu halda $F(t;\lambda) = \left|A(t;\lambda)\right|^2 F(\lambda)$ $\zeta(t)$ prosesinin e v o l y u s i o n a r s p e k t r a l f u n k s i y a s ı adlanır. Bu funksiya, ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur, belə ki, $\zeta(t)$ prosesi (1) şəklində bir çox müxtəlif E. s. i.-yə malik ola bilir.

Ossilyar təsadüfi proseslər sinfinə stasionar proseslərdən başqa, praktiki cəhətdən çox maraq doğuran qeyri – stasionar təsadüfi proseslər də (məs., iqtisadiyyatda; bax, [3]) aiddir. Bu halda stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin bir sıra nəticələri [məs., $\zeta(t)$ proseslərinin optimal xətti ekstrapolyasiya və filtrasiya məsələlərinə, uyğun $F(\lambda)$ spektral funksiya və $f(\lambda) = F'(\lambda)$ spektral sıxlığının qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsinə aid] ossilyar proseslər üçün olduqca sadə və yalnız cüzi dəyişikliklərlə ifadə oluna bilinir (bax, məs., [2], [4]).

Əd.: [1] P r i e s t l e y M. B., « J. Roy. Statist. Soc., Ser. B », 1965 , v. 27, № 2, p. 204–37; [2] P r i e s t l e y M. B., Spectral analysis and time series, v. 2, Ch.11, L. – [a. o.], 1981; [3] Г р е н д ж е р K., Х а т а н а к а M., Спектральный анализ временных рядов в экономике, пер. с англ., M., 1972; [4] M a n d r e k a r V., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 32, № 1, p. 280–84.

EVOLYUSİONAR SPEKTRAL ÖLÇÜ « эволюционирующая спектральная мера; evolutionary spectral measure » – bax, *Spektral nəzəriyyələri* q e y r i – s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n.

EYLER ƏDƏDLƏRİ « Эйлера числа; Euler numbers » –

$$E_{n,k} = k E_{n-1,\,k} + (n-k+1)E_{n-1,\,k-1}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n \quad (*)$$

rekurrent münasibətindən təyin olunan natural $E_{n,k}$ ədədləridir; $E_{0,0} = 1$, $E_{n,0} = E_{0,k} = 0$ və $k > n$ olduqda $E_{n,k} = 0$ qəbul edilir. (*) ədədləri L. Eyler (L. Euler) tərəfindən 1755-də nəzəri ədədi məsələlərlə bağlı daxil edilmişdir. E. ə. sonlu cəm şəklində ifadə olunur:

$$E_{n,k} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m\, C_{n+1}^{m} (k-m)^n .$$

E. ə.-ni doğuran funksiyanın köməyi ilə də təyin etmək olur:

$$\frac{1-x}{1-xe^{t(1-x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} E_{n,k}\, x^k\, \frac{t^n}{n!} .$$

E. ə. kombinator analizdə, növlərə ayırma alqoritmlərinin araşdırılmasında, optimal kvadratur düsturların qurulmasında mühüm rol oynayır. $E_{n,k}/n!$ nisbəti – $1, 2, ..., n$ ədədlər çoxluğunun ixtiyari təsadüfi yerdəyişməsi – $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ -də k sayda $\alpha_{i-1} < \alpha_i$, $i = 1, ..., n$ artmalarının ödənilməsi ehtimalıdır ($\alpha_0 = 0$ olduğu fərz olunur).

Əgər $k = n/2 + x\sqrt{n/12}$ olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda məhdud x -lər üçün

$$\frac{E_{n,k}}{n!} \sim \sqrt{\frac{6}{\pi n}}\; e^{-x^2/2}$$

asimptotik düsturu doğrudur.

B i r p a r a m e t r l i E. ə. – E_n -lər aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!} .$$

Əd.: [1] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, M., 1977.

EYNŞTEYN – SMOLUXOVSKİ MODELİ « Эйнштейна – Смолуховского модель; Einstein – Smoluchowski model » – bax, *Ornşteyn – Ulenbek prosesi.*

ƏDƏDİ SİMULYASİYA(sı), təsadüfi təzahürün **« численная симуляция** случайного явления; **numerical simulation** of a random phenomenon **»** – təsadüfi və ya psevdotəsadüfi ədədlərin köməyilə baxılan təsadüfi təzahürün elementar nəticələri ardıcıllığının qurulmasıdır və bu nəticələrin müşahidə olunan təzahürün asılı olmayan müşahidələri ardıcıllığına xas olan statistik xassələrə malik olduğu fərz olunur. EHM-də sonlu – tərtib ədədlər üzərində əməllər aparıldığından, yalnız olduqca sadə alqoritmlər praktiki əhəmiyyət kəsb edir, ona görə də, bu təzahürün yalnız bəzi xassələrə malik olan realizasiyaları ilə, o da təqribi olaraq, kifayətlənilir.

Əd.: [1] Соболь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

ƏHƏMİYYƏTSİZ ÇOXLUQ « пренебрежимое множество; negligible set » – *ölçü* nəzəriyyəsi mənasında kiçik çoxluqdur. (X, S, μ) – ölçülü ixtiyari fəza, Y – əsas bazis çoxluğu X-in altçoxluğu olsun. Əgər μ^* ölçüsü μ ölçüsü ilə uzlaşan xarici ölçü və $\mu^*(Y)=0$ olarsa, Y çoxluğu μ ölçüsünə nəzərən əhəmiyyətsiz çoxluqdur, deyilir. Əgər (χ, S, μ) tam ölçülü fəza olarsa, onda μ – əhəmiyyətsiz çoxluqların bütün sinfi sıfır μ – ölçülü bütün çoxluqların sinfi ilə üst-üstə düşür. Əgər X topoloji fəza, μ ölçüsü X-də Borel ölçüsü olarsa və ixtiyari $x \in X$ çoxluğu üçün onun elə $U(x)$ ətrafı olarsa ki, $Y \bigcap U(x)$ $(Y \subset X)$ kəsişməsi X-də μ – əhəmiyyətsiz çoxluq olsun, onda $Y \subset X$ çoxluğu X fəzasında μ ölçüsünə nəzərən lokal əhəmiyyətsiz çoxluq adlanır. Hər bir Ə. ç. eyni zamanda lokal əhəmiyyətsiz çoxluqdur. Tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyildir.

İnvariant və kvaziinvariant ölçülər üçün mütləq əhəmiyyətsiz çoxluq anlayışı vardır (bax, [3]) və bu anlayış ölçülü adi fəzalar üçün Ə. ç. anlayışına yaxındır. Məs., sonsuzölçülü E Banax fəzasının ixtiyari kompakt altçoxluğu E-də paralel köçürmələrə nəzərən kvaziinvariant və E-də verilən bütün σ – sonlu ölçülərin sinfi üzrə mütləq əhəmiyyətsiz çoxluqdur.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Харазашвили А. В., Топологические аспекты теории меры, К., 1984.

ƏHƏMİYYƏTSİZ ZONA « безразличная зона; indifference zone » statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində – ilkin H_0 hipotezi və alternativ H_1 hipotezinə uyğun parametrik çoxluqları ayırd edən oblastdır. Ə. z.-nın məğzi H_0-dan kiçik yayınmaların, yəni onların nəzərə çarpmaması ciddi nəticələr doğurmayan yayınmaların çoxluğu mənasında anlaşılır. Ə. z., adətən, təminatlı gücə malik kriterilərin axtarılması məsələlərində daxil olunur, məs., verilmiş $\varepsilon > 0$, α qiymətldərində bütün $\theta \geq \theta_0 + \Delta$ [burada $(\theta_0, \theta_0 + \Delta)$ – əhəmiyyətsiz zonadır] üçün, gücü $\geq 1 - \varepsilon$ olan, α – ölçülü $H_0 : \theta \leq \theta_0$ hipotezini yoxlamaq üçün kriterinin tapılmasında. Belə tələbin yerinə yetirilməsi aparılacaq müşahidələrin lazım olan sayını planlaşdırmaq hesabına təmin olunur.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

ƏKS HADİSƏ « противоположное событие; negation / complement of an event » – bax, *Tamamlayan hadisə*.

ƏKSEDİCİ BARYER « отражающий барьер; reflecting barrier / boundary » – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

ƏKSEDİCİ SƏRHƏD « отражающая граница; reflecting boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

ƏLAQƏLƏR MODELİ « связей модель; bound model » – bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi*.

ƏLAQƏLİ VƏZİYYƏTLƏR(i) Markov zəncirinin **« сообщающиеся состояния** цепи Маркова; **communicating states** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

ƏLAVƏ MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏR « дополнительные наблюдаемые; complementarity observables » – bax, *Müşahidələnənlər*.

ƏLVERİŞLİ ELEMENTAR HADİSƏ A hadisəsi üçün **« благоприятное элементарное событие** для события A; **elementary event**, favorable to A **»** – eksperimentdə müşahidə oluna bilən hər hansı A hadisəsinin baş verməsinə səbəb olan elementar hadisəyə deyilir. Məs., «düzgün metal pulun iki dəfə atılması» stoxastik eksperimentinə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{GG, GŞ, ŞG, ŞŞ\}$ çoxluğu, $A = \{$ metal pul birinci dəfə gerb üzü yuxarı olmaqla düşmüşdür $\}$ – eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisədir. A hadisəsi üçün Ə. e. h.-lər – $\{GG\}$ və $\{GŞ\}$ elementar hadisələridir.

ƏN BÖYÜK DOĞRUYAOXŞARLIQ METODU « наибольшего правдоподобия метод; maximum likelihood method » – bax, *Maksimal doğruyaoxşarlıq metodu*.

ƏN BÖYÜK DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ « наибольшего / максимального правдоподобия принцип; maximum likelihood principle » maksimal doğruyaoxşarlıq prinsipi, – statistik nəticənin evristik prinsipidir; bu prinsipə əsasən, statistik modeldə naməlum parametrin qiyməti kimi *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* supremumunu təmin edən ən «doğruyaoxşar» qiymət seçilməlidir. x – paylanması naməlum $\theta\in\Theta$ qiymətindən asılı X təsadüfi seçiminin müşahidə nəticəsi, $p(x,\theta)$ – təsadüfi seçimin paylanmaları ailəsini dominarlayan σ – sonlu μ ölçüsünün köməyilə təyin olunan doğruyaoxşarlıq funksiyasıdır ($\theta\in\Theta$ parametrinin funksiyası). Ə. b. d. p.-nə əsasən θ parametrinin iki mümkün θ_1 və θ_2 qiymətlərindən doğruyaoxşarı o qiymətdir ki (yəni x müşahidəsi ilə ən çox uzlaşan), o, doğruyaoxşarlıq funksiyasının ən böyük qiymətinə uyğundur. Bu nəticə doğruyaoxşarlıq funksiyasının hansı σ – sonlu dominarlayıcı ölçü ilə təyin olunmasından asılıdır. Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində Ə. b. d. p. konkret şəkildə ifadə olunur və bu prinsipə əsasən, θ naməlum parametri üçün statistik qiymət kimi doğruyaoxşarlıq funksiyasının supremumunu təmin edən $\hat{\theta}(x)$ statistikası seçilir. İki mürəkkəb $H_0:\theta\in\Theta_0$ və $H_1:\theta\in\Theta_1$ statistik hipotezlərinin yoxlanılması nəzəriyyəsində Ə. b. d. p. *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinə* gətirir; bu kriteriyə əsasən

$$\sup_{\theta\in\Theta_1} p(x;\theta) \Big/ \sup_{\theta\in\Theta_0} p(x;\theta)$$

doğruyaoxşarlıq nisbətinin böyük və ya kiçik olmasından asılı olaraq H_1 və ya H_0 hipotezi qəbul edilir [iki sadə $H_0:\theta=\Theta_0$ və $H_1:\theta=\Theta_1$ hipotezləri halında Ə. b. d. p. $p(x;\theta_1)/p(x;\theta_0)$ doğruyaoxşarlıq nisbətinə əsaslanan ən güclü – Neyman – Pirson kriterisinə gətirir].

Qeyd etmək lazımdır ki, ümumi halda Ə. b. d. p.-nin ciddi formal əsaslandırmaları mövcud deyildir, lakin bu prinsip əsasında qurulan statistik prosedurlar əksərən bir çox optimal (və ya asimptotik optimal) xassələrə malikdirlər (bax, *Doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi*, *Maksimal doğruyaoxşarlıq metodu*).

Ə. b. d. p. ilə yanaşı statistik nəticənin ümumi nəzəriyyəsində daha ümumi prinsiplərə – doğruyaoxşarlıq zəif prinsipi və doğruyaoxşarlıq gücləndirilmiş prinsipinə də baxılır. Birinci prinsipə görə, X seçimi üzrə iki müxtəlif x_1 və x_2 müşahidələri əsasında bunların doğruyaoxşarlıq funksiyaları mütənasibdirlərsə, yəni $p(x_1;\theta)\equiv h(x_1,x_2)\,p(x_2;\theta)$ olarsa, eyni statistik nəticələr çıxarılmalıdır. İkinci prinsip iki müxtəlif X və Y seçimləri üzrə x və y müşahidələri haqqındadır, bu halda X və Y-in doğruyaoxşarlıq funksiyaları $p_X(x;\theta)$ və $p_Y(y;\theta)$ eyni bir naməlum θ parametrindən asılıdırlar. Bu prinsipə görə x və y müşahidələri üzrə θ parametri haqqında, onların uyğun doğruyaoxşarlıq funksiyaları mütənasib olarsa, yəni $p_X(x;\theta)\equiv h(x,y)\,p_Y(y;\theta)$ münasibəti ödənilərsə, eyni statistik nəticələr çıxarılmalıdır.

Ədd.: [1] Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

ƏN CİDDİ KRİTERİ « наиболее строгий критерий; most stringent test » – bax, *Qurşayıcı funksiyası*, *gücün.*

ƏN DƏQİQ ETİBARLI ÇOXLUQ « наиболее точное / селективное доверительное множество; most accurate confidence set », ən selektiv etibarlı çoxluq, – ehtimal paylanmasının naməlum parametrinin ixtiyari düzgün olmayan qiymətini daxilə alma ehtimalını minimallaşdıran, eyni etibarlılıq əmsalına malik etibarlı çoxluqlar sinfindən *etibarlı çoxluqdur*.

X, – $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathbf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi element, $\Delta=\{C(X)\}$ – etibarlılıq əsmalı eyni P olan θ parametri üçün etibarlı çoxluqlar sinfi olsun, yəni Δ-dan olan ixtiyari $C(X)$ üçün

$$\inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{P}_\theta\{\theta\in C(X)\} = P$$

olsun. Δ-dan olan $C^0(X)$ çoxluğu θ parametri üçün Δ sinfində o halda Ə. d. e. ç. adlanır ki, ixtiyari $C(X)\in\Delta$ üçün

$$\mathbf{P}_\theta\{\theta'\in C^0(X)\} \le \mathbf{P}_\theta\{\theta'\in C(X)\}, \quad \theta\ne\theta'$$

münasibəti ödənilsin. Bax, *Etibarlı interval*, *Etibarlı çoxluq.*

Ədd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ƏN DƏQİQ İNVARİANT ETİBARLI ÇOXLUQ « наиболее точное инвариантное доверительное множество; most accurate invariant confidence set » – eyni hüdudlu invariant etibarlı çoxluqlar sinfində ən dəqiq *etibarlı çoxluqdur.*

X, – $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathbf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi element, $\Delta=\{C(X)\}$ – etibarlılıq əmsalı eyni P, $0<P<1$ olan, θ parametri üçün bütün etibarlı çoxluqların sinfi olsun. $\mathfrak{X}$-də $\mathfrak{X}$ fəzasının özünə ölçülən g çevirmələrinin $G=\{g\}$ qrupunun verildiyi və bu qrupa nəzərən $\{\mathbf{P}_\theta\}$ ailəsinin invariant olduğu fərz olunur. Əgər bütün $g\in G$ üçün $C(gX)=\bar{g}C(X)$ bərabərliyi ödənilərsə, Δ-nın etibarlı $C(X)$ çoxluğu G qrupuna nəzərən invariant etibarlı çoxluq adlanır, burada $\bar{g}$, – Θ-nı özünə çevirən $\bar{g}$ çevirmələrinin doğurulmuş $\bar{G}=\{\bar{g}\}$ qrupunun elementidir. Əgər Δ-dan olan ixtiyari digər $C(X)$ invariant çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}_\theta\{\theta'\in C_0(X)\} \le \mathbf{P}_\theta\{\theta'\in C(X)\}, \quad \theta\ne\theta'$$

münasibəti ödənilərsə, Δ-dan olan invariant etibarlı $C_0(X)$ çoxluğu ən dəqiq invariant etibarlı çoxluq adlanır.

Bax, *Etibarlı interval*, *Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

Ədd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

ƏN DƏQİQ SƏRHƏD « наиболее точная граница; most accurate bound / limit » – ən dəqiq etibarlı intervalın sərhədidir.

Bax, *Etibarlı interval*, *Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

ƏN ƏLVERİŞSİZ PAYLANMA « наихудшее распределение, наименее благоприятное распределение; worst distribution » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin.*

ƏN ƏLVERİŞSİZ PAYLANMA « наименее благоприятное распределение; least favorable distribution » – qərar qəbuletmə statistik məsələsində risk funksiyasını maksimallaşdıran *aprior paylanmadır.*

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{X}}, \mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası üzrə d həllinin (qərarının) $(\mathscr{D}, \mathfrak{D}_{\mathscr{D}})$ həllər fəzasından qəbul edilməsi fərz olunur və fərz olunur ki, bu halda naməlum θ parametri $(\Theta, \mathfrak{D}_\Theta, \pi_t)$, $t \in T$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətdir. $L(\theta, d)$ – parametrin əsl qiyməti θ olduğu halda d həlli qəbul edildikdə yaranan itkiləri ifadə edən funksiyadır.

$$\rho(\pi_t, d) = \int_\Theta \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, d(x))\, d\mathbf{P}_\theta(x)\, d\pi_t(\theta)$$

d həllinin qəbul edilməsindən yaranan orta itkiləri ifadə edən risk funksiyası olduqda

$$\sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \rho(\pi_{t^*}, d)$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\pi_t, t \in T\}$ ailəsindən olan π_{t^*} aprior paylanması Beyes yanaşmasında qərar qəbuletmə statistik məsələsində d həlli (qərarı) üçün **ən əlverişsiz paylanma** adlanır. Ə. ə. p. d həllini qəbuletmədə yaranan ən «ağır» (orta hesabla) $\rho(\pi_{t^*}, d)$ itkilərini hesablamağa imkan verir. Praktikada, adətən, Ə. ə. p. yönümündə deyil, əksinə, elə həllin qəbul olunması yönəmində nəticəyə gəlməyə cəhdlər göstərilir ki, θ parametrinin dəyişiklikləri maksimal itkilərə səbəb olmasın; bu isə maksimal riski minimallaşdıran, minimal d^* həllinin axtarılmasına, yəni

$$\inf_{d \in \mathscr{D}} \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d^*)$$

münasibətini ödəyən d^* həllinin təyin olunmasına gətirir.

Beyes yanaşmasında, sadə alternativə qarşı mürəkkəb statistik hipotezin yoxlanılması məsələsində Ə. ə. p. **Vald reduksiyası** vasitəsilə təyin olunur. X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası üzrə X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathbf{Q}$ qanununa tabe olduğu haqqında H_1 sadə alternativə qarşı X-in paylanma qanununun $H_0 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsindən olması haqqında mürəkkəb H_0 hipotezini yoxlamaq tələb olunur. Fərz olunur ki, $p_\theta(x) = d\mathbf{P}_\theta(x)/d\mu(x)$ və $q(x) = d\mathbf{Q}(x)/d\mu(x)$, burada $\mu(x)$, – $(\mathfrak{X}, \mathscr{D}_{\mathfrak{X}})$ fəzasında hər hansı σ – sonlu ölçüdür, $\{\pi_t, t \in T\}$, – $(\Theta, \mathfrak{D}_\Theta)$ fəzasında aprior paylanmalar ailəsidir. Onda ixtiyari $t \in T$ üçün mürəkkəb H_0 hipotezinə qarşı elə sadə H_t hipotezini qarşı qoymaq olar ki, bu hipotezə görə X təsadüfi kəmiyyəti ehtimal sıxlığı

$$f_t(x) = \int_\Theta p_\theta(x) = d\pi_t(\theta)$$

olan ehtimal qanununa tabedir. *Neyman – Pirson* lemmasına əsasən, sadə alternativ H_1-ə qarşı H_t sadə hipotezinin yoxlanılması üçün doğruyaoxşarlıq nisbətinə görə qurulmuş *ən güclü kriteri* vardır. β_t bu kriterinin gücü olsun, onda Ə. ə. p. $\{\pi_t, t \in T\}$ ailəsindən elə π_{t^*} aprior paylanmasıdır ki, bu paylanma üçün bütün $t \in T$ qiymətlərində $\beta_{t^*} \le \beta_t$ bərabərsizliyi ödənilir. Ə. ə. p. belə bir xassəyə malikdir: H_{t^*} hipotezində X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal sıxlığı $f_{t^*}(x)$ alternativ $q(x)$ sıxlığından «ən az uzaqlaşmışıdır», yəni H_{t^*} hipotezi $\{H_t, t \in T\}$ ailəsindən olan H_1 alternativ hipotezinə ən «yaxın» olan hipotez sayılır. Bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə, *Oyunu*, *iki şəxsin.*

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « наиболее мощный критерий; most powerful test » – verilmiş *mühümlük ölçülü* bütün kriterilər arasında ən böyük kriteri gücünə malik olan *statistik kriteridir.* Müşahidələrin nəticəsi əsasında sadə H_1 alternativ hipotezinə qarşı H_0 sadə hipotezinin yoxlanılması məsələsinə baxılır. Əslində, H_1 hipotezi doğru olduğuna baxmayaraq, H_1 hipotezinə qarşı irəli sürülmüş H_0 hipotezini yoxlamaq məqsədilə tətbiq edilən statistik kriteri əsasında yayınma nəticəsində mümkün ola bilən 1-ci növ səhvin məqbul ehtimalının α olduğu fərz olunur. Statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində H_1 hipotezinə qarşı irəli sürülmüş H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün istifadə olunan bütün statistik kriterilər arasında ən yaxşı kriteri ən böyük kriteri gücünə malik kriteridir; bu halda bütün bu kriterilər üçün 1-ci növ səhv ehtimalının eyni olduğu və mühümlük ölçüsünün də eyni $-\alpha$ olduğu nəzərdə tutulur; ən yaxşı kriteri H_1 alternativ hipotezinin doğru olduğu halda, yoxlanılan H_0 hipotezini ən böyük ehtimalla qəbul etməyən kriteridir. Məhz bu kriteri mühümlük ölçüsü α olan bütün statistik kriterilər arasında **ən güclü kriteri** adlanır (bu kriterilərin sadə H_1 alternativ hipotezinə qarşı irəli sürülmüş H_0 sadə hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunduğu nəzərdə tutulur). *Statistik kriterinin gücü* ikinci növ səhvin ehtimalı $\beta = \mathbf{P}\{H_0 \mid H_1\}$ vasitəsilə ifadə olunur və $1-\beta$-ya bərabərdir. Adətən, kriterinin mühümlük ölçüsü – $\alpha = \mathbf{P}\{H_1 \mid H_0\}$ ehtimalı öncədən seçilir (məsələn, $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}01$) və bu halda kriterinin gücünün maksimal olması ikinci növ səhvin ehtimalı β-nın minimal olmasına səbəb olur. 1-ci növ xəta ehtimalı verilmiş bütün kriterilər arasında 2-ci növ xəta ehtimalı ən kiçik olan sadə hipotezin (sadə alternativə qarşı) yoxlanılması üçün istifadə olunan statistik kriteri Ə. g. k.-dir. Sadə hipotezlər hallarında Ə. g. k.-nin təyin olunması məsələsinin həlli Neyman – Pirson lemmasında verilir; bu lemmaya əsasən *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi* Ə. g. k.-dir.

H_0 və H_1 konkurent hipotezləri mürəkkəb hipotezlər olduğu halda, Ə. g. k.-nin təyin olunması məsələsi – əgər belə kriteri vardırsa – *müntəzəm ən güclü kriteri* terminlərilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Никулин М. С., в кн.: Исследования по математической статистике, в. 8, Л. 1988, с. 129–42; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [4] Neyman J., Pearson E., «Phil. Trans. Roy. Soc. London.», Ser. A, 1933, v. 231, p. 289–337.

ƏN KİÇİK EKSSESSİV MAJORANT « наименьшая эксцессивная мажоранта; minimal excessive majorant » – bax, *Optimal dayanma*(sı) təsadüfi prosesin.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÇƏKİLİ METODU « наименьших квадратов взвешенный метод; weighted least squares / generalized least squares method » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu.*

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU « наименьших квадратов метод; least squares method » – *xətalar nəzəriyyəsi və statistik qiymətləndirmənin* ən geniş yayılmış ümumi metodlarından biridir; bu metodla naməlum parametrin statistik qiymətləri xətalar vektorunun normasının minimizasiyası şərtindən təyin olunur. Funksiyaların approksimasiyası nəzəriyyəsində və operator tənliklərin təqribi həlli nəzəriyyəsində bu metodun analoqları vardır.

Ə. k. k. m. K. Qaussun (C. Gauss, 1974 – 95) və A. Lejandrın (A. Legendre, 1805 – 06) işlərində daxil olunmuşdur. O. Koşi (A. Cauchy, 1936) Ə. k. k. m. üçün ortoqonallıq ideyasının mühümlüyünü birinci olaraq göstərmişdir. P. L. Çebışev (1958) polinomial reqressiya modellərində Ə. k. k. m.-nun tətbiqinin müxtəlif aspektlərini işləmişdir. K. Pirson (K. Pearson, 1896) xətti modellə çoxölçülü normal qanunun əlaqəsi olduğunu müəyyən etdi və Ə. k. k. m. ilə bağlı müxtəlif statistikaların paylanma qanunlarını çıxardı. A. A. Markov (1898) və A. N. Kolmoqorov (1946) Ə. k. k. m.-nu ciddi surətdə əsaslandırdılar və onun tətbiq olunma sərhədlərini müəyyənləşdirdilər. A. Eytken (A. Aitken, 1935) müasir matris işarələmələrində bu metodu ifadə etmişdir. R. Fişer (R. Fisher, 1922 – 25) ortoqonallıq ideyasını inkişaf etdirdi və dispersion analizin və reqression eksperimentlərin planlaşdırılmasının əsasını qoydu. A. N. Kolmoqorov (1946), J. Derbin və M. Kendall (J. Durbin, M. Kendall, 1951), U. Kruskal (W. Kruskal, 1961) Ə. k. k. m.-na həndəsi (koordinatsız) yanaşmanı inkişaf etdirdilər. S. Rao (S. Rao, 1962) xətti modelin müxtəlif variantlarına baxmışdır. A. Hörl (A. Hoerl, 1962) Ə. k. k. m. prosedurlarına C. Steynin (Ch. Stein, 1956) ümumi yanaşmasını tətbiq etmişdir və bu zaman A. N. Tixonovun qeyri – korrekt operator tənliklərin həllində inkişaf etdirdiyi requlyarizasiya metodları ilə dərin əlaqələri olan yalvari reqressiyanın ümumiləşmiş sxemini daxil etmişdir.

Ə. k. k. m. ölçmələrin xətti modelində. Fərz olunur ki, n – ölçülü ölçmələr vektoru $Y = (y_1,...,y_n)$ $Y = X\theta + \varepsilon$ strukturludur, burada $X = (x_{ij})$ – ranqı p olan və $(n \times p)$ – dim. – ölçülü məlum matrisdir, $p \leq n$ (bu matris reqression əmsallar matrisi, $A = X^{\mathrm{T}}X$ plan matrisi adlandırılır); $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,...,\theta_p)^{\mathrm{T}}$ – naməlum, lakin tamamilə müəyyən parametrlər vektorudur; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – riyazi gözləməsi sıfra bərabər xətaların n – ölçülü təsadüfi vektorudur. Fərz olunur ki, $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektorunun komponentləri $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan və ümumi simmetrik paylanma funksiyası $F(x) = \mathbf{P}\{\varepsilon_1 < x\}$, $F(x) = 1 - F(-x)$ olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Y -in ölçülmələri əsasında θ vektor parametrini qiymətləndirmək tələb olunur.

Ə. k. k. m.-na əsasən θ parametrinin statistik qiyməti

$$S(\theta) = \|Y - X\theta\|^2 = (Y - X\theta)^{\mathrm{T}}(Y - X\theta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - X_i\theta)^2 = \min$$

kvadratik formasının minimizasiyası şərtindən alınır, burada X_i, – X matrisinin i-ci sətridir. $S(\theta)$ forması $\theta_1,...,\theta_p$ dəyişənlərinə nəzərən ikinci dərəcəli çoxhədlidir. $S(\theta)$ minimumunu $\hat{\theta}$-nın elə qiymətində alır ki, birinci tərtib xüsusi törəmələr vektoru sıfra çevrilir; $\partial S/\partial\theta = 0$, buradan isə belə nəticə alınır ki, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti

$$(X^{\mathrm{T}}X)\,\hat{\theta} = X^{\mathrm{T}}Y$$

normal tənliklər sistemini ödəməlidir. Fərziyyəyə görə, X – tam ranqlı matrisdir, buna görə də, $A = X^{\mathrm{T}}X$ matrisinin tərs matrisi vardır və deməli, $\hat{\theta} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y$. Bu statistik qiymət $Y = (y_1,..., y_n)^{\mathrm{T}}$ ölçmələrin xətti funksiyasıdır. Onun statistik xassələri paylanma funksiyası $F(x)$-dən olduqca asılıdır. Məs., $F(x)$-in üzərinə olduqca ümumi məhdudiyyətlərdə statistik qiymət $y_1, \dots, y_n$ üzrə xətti, bütün meylsiz statistik qiymətlər sinfində tutarlı, meylsiz və effektiv statistik qiymət olur (bax, *Meylsiz statistik qiymət*, *Effektiv statistik qiymət*); burada effektivlik dörd keyfiyyət ölçüsündən heç olmasa birinə nəzərən optimallıq kimi anlaşılmalıdır: 1) ixtiyari $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \hat{\theta}_j$ xətti kombinasiyasının dispersiyası $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \theta_j$ kəmiyyətinin bütün xətti meylsiz statistik qiymətləri sinfində minimaldır, o cümlədən, $\hat{\theta}_j$, $j = 1, \dots, p$ komponentlərindən hər birinin dispersiyası minimaldır; 2) $\det(\mathrm{cov}\hat{\theta}) = \min$ (ümumiləşmiş dispersiya adlandırılan, $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin kovariasion matrisinin determinantı); 3) $\mathrm{cov}\,\hat{\theta} = \min$, yəni verilmiş sinfin ixtiyari statistik qiyməti və Ə. k. k. m. statistik qiymətinin kovariasion matrisləri arasındakı fərq həmişə müsbət müəyyən matrisdir; 4) $\mathrm{tr}\,(\mathrm{cov}\hat{\theta}) = \mathbf{M}(\hat{\theta} - \mathbf{M}\hat{\theta})^{\mathrm{T}}(\hat{\theta} - \mathbf{M}\hat{\theta}) = \min$, $\mathbf{M}\hat{\theta} = \hat{\theta}$.

Ə. k. k. m. statistik qiymətinin mühüm xassəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur. Fərz olunur ki, ölçmə xətalarının dispersiyası $\sigma^2 = \mathbf{D}\varepsilon_1$ naməlum parametrlərdən biridir və $\Delta = Y - X\hat{\theta}$ qalıqlar vektorudur (xətalar kimi sayılan vektor), $S^2 = \frac{1}{n-p}\Delta^{\mathrm{T}}\Delta$. Onda S^2, – σ^2-nın meylsiz statistik qiymətidir.

Xətaların paylanma qanunu $F(x)$ haqqında olduqca geniş şərtlərlə Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətlər asimptotik normal kəmiyyətlərdir: $\hat{\theta} \sim N_p(\theta,\ \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}$, $n \to \infty$ və ya daha aydın yazılışda, $\sigma^{-1}(X^{\mathrm{T}}X)^{1/2}(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0,1)$, $n \to \infty$. σ naməlum olduqda, σ əvəzinə onun statistik qiymətini yerinə qoyduqda bu nəticə yenə də doğrudur. Normal qanunla paylanmış ε_i xətaları üçün, yəni $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$ olduqda daha da ən güclü müddəalar doğrudur: 1) Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymət yalnız xətti və meylsiz statistik qiymətlər sinfində deyil, bütün

statistik qiymətlər sinfində effektiv statistik qiymətdir; 2) $\hat{\theta}$ və S^2 statistikaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və birlikdə $(\theta^{\mathrm{T}}, \sigma^2) = (\theta_1, ..., \theta_p, \sigma^2)$ naməlum parametrləri vektorunun kafi (bax, *Kafi statistika*) və asimptotik effektiv statistik qiymətidir; 3) σ^2 məlum olduqda, Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymət $N_p(\theta, \sigma^2(X^TX)^{-1}$ normal qanuna yalnız $n \to \infty$ olduqda deyil, hətta ixtiyari sonlu n qiymətində də tabedirlər. Sonlu n qiymətlərində $\hat{\theta}$ və S^2 statistik qiymətlərinin asılı olmamazlığı normal qanunun səciyyəvi xassəsidir: digər bütün $F(x)$ paylanmaları üçün bu statistikalar asılıdırlar. Lakin xətaların ixtiyari simmetrik paylanmaya malik olduğu hallarda, $n \to \infty$ $j = 1, \ldots, p$ olduqda, korrelyasiya əmsalları $r(\hat{\theta}_j, S^2) \to 0$ münasibətini ödəyir, odur ki, bu statistikalar asimptotik olaraq qeyri – korrelyardırlar.

Qeyd olunanlardan mühüm nəticə olaraq belə bir fakt alınır: maksimal ranqa malik olan, $(k \times p)$ – dim. – ölçülü ixtiyari G matrisi üçün $G\hat{\theta}$ kəmiyyəti $H = G\theta$ vektorunun Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətidir, belə statistik qiymətin xassələri $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin xassələrindən asanlıqla alınır.

Bir çox praktiki məsələrdə reqression əmsallar matrisi apriori verilir, lakin elə qoyuluşlar olur ki, tədqiqatçı X matrisini hər hansı məlum sinifdən seçərək, eksperimenti planlaşdırmaq imkanı əldə edir (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*). Matrisin seçilməsində aydın olan prinsiplərdən biri statistik qiymətlərin kovariasion matrisi – $P = \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}$ -in minimizasiyasıdır, yəni $A = X^{\mathrm{T}}X$ plan matrisinin maksimizasiyasıdır (bu və ya digər mənada). Reqression eksperimentlərin planlaşdırılmasının digər mühüm prinsipi ortoqonallıq anlayışı ilə bağlıdır. Baxılan məsələdə $G\theta = H = (h_1, ..., h_k)^{\mathrm{T}}$ vektorunu qiymətləndirmək tələb olunur. Əgər H vektorunun komponentlərinin Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətləri $\hat{h}_1, ..., \hat{h}_k$ qeyri – korrelyardırsa, plan – $h_1, ..., h_k$ parametrik funksiyalarına nəzərən ortoqonal plan adlanır: yəni $\mathbf{M}(\hat{h}_i - h_i)(\hat{h}_j - h_j) = 0;\ i, j = 1, ..., k$, $i \neq j$ olarsa. Ortoqonal planların üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, hər bir h_j üçün $\hat{h}_j$ statistik qiymətini elə hesablamaq olar ki, guya bütün digər h_i-lər $i \neq j$ olduqda $h_i = 0$ şərtini ödəyir. Bu yanaşma, xüsusilə, Ə. k. k. m.-dakı hesablama çətinliklərini aradan qaldırır, belə ki, statistik qiymətlər üçün aşkar düsturda bu halda diaqonal matrisin çevrilməsi tələb olunur.

Baxılan yanaşmanın ən sadə ümumiləşməsi ən kiçik kvadratların çəkilənmiş metodudur; bu metodda $(n \times n)$ – dim. – ölçülü çəkili matris W daxil olunur və kvadratların çəkili cəmlərinin minimumu şərtindən $\hat{\theta}$ statistik qiyməti tapılır: $(Y - X\theta)^{\mathrm{T}}W(Y - X\theta) = \min$ şərtindən. Bu metod, adətən, ölçmə xətaları korrelyar olan və ε vektorunun kovariasion matrisi $\operatorname{cov}\varepsilon = \Xi$ məlum olan xətti modeldə tətbiq olunur. Bu şərtlərlə $W = \Xi^{-1}$ qəbul etdikdə, Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətlərin yuxarıda qeyd olunan bütün xassələrinə malik olan statistik qiymət almaq olur. Məs., asimptotik normallıq şərti $n \to \infty$ olduqda $\hat{\theta} \sim N_p(\theta, (X^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}X)^{-1})$ münasibətilə ifadə olunur, xətalar normal qanunla paylandığı halda və $\varepsilon \in N_n(0, \Xi)$ olduqda, bu münasibət yalnız asimptotik deyil, hətta bütün sonlu n-lər üçün də ödənilir. Əgər Ξ kovariasion matrisi sabit vuruq dəqiqliyilə məlum olarsa, yəni $\Xi = \sigma^2\Xi_0$ olarsa, onda $W = \Xi_0^{-1}$ və $S^2 = \dfrac{1}{n-p}\,\Delta^{\mathrm{T}}\Xi_0^{-1}\Delta$ [burada $\Delta = Y - X\hat{\theta}$ – qalıqlar vektorudur (xəta kimi sayılanların vektoru)] statistikası σ^2 parametrinin meylsiz statistik qiymətidir, $(\hat{\theta}, S^2)$ cütü isə (θ, σ^2) üçün kafi statistikadır. Çəkili Ə. k. k. m. daha mürəkkəb qeyri – xətti qiymətləndirmə metodlarını reallaşdıran rekkurent ədədi alqoritmlərin qurulmasında da tətbiq olunur.

Bir naməlum parametr olduğu hal. Naməlum θ kəmiyyətinin qiymətini qiymətləndirmək üçün n sayda asılı olmayan ölçmələr aparılmış və $y_i = \theta + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$ nəticələri alınmışdır, burada $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ – təsadüfi xətalardır (xətalar nəzəriyyəsində qəbul olunmuş tərifə görə, təsadüfi xətalar riyazi gözləmələri sıfra bərabər, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, yəni $\mathbf{M}\varepsilon_i = 0$; əgər $\mathbf{M}\varepsilon_i \neq 0$ olarsa, xətalar sistematik xətalar adlanır).

$\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2 d_i$ olsun, burada d_i – məlum kəmiyyətlərdir, σ^2 isə naməlum miqyas parametridir. Bu qoyuluşa $Y = \mathbf{1}\theta + \varepsilon$ şəklində xətti model uyğundur, burada $Y = (y_1, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$, reqression əmsallar matrisi isə $(1 \times n)$ – dim. – ölçülü $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$ vektorudur, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$. Çəkili Ə. k. k. m.-na görə θ parametrinin statistik qiyməti

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \theta)^2 = \min, \quad w_i = d_i^{-1}$$

şərtindən alınır, buradan isə $\hat{\theta}$ üçün aşağıdakı ifadə alınır:

$$\hat{\theta} = w^{-1} \sum_{i=1}^{n} w_i y_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

σ^2 üçün aşağıdakı statistik qiymət alınır:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \hat{\theta})^2$$

n-in olduqca böyük qiymətində və $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ xətalarının paylanmaları üçün bəzi ümumi fərziyyələrlə

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2 / w)$$

münasibəti ödənilir, bu münasibətdən θ-nın qiyməti haqqında hipotezin yoxlanılması və təqribi etibarlı intervalların qurulmasında istifadə etmək olar.

Əgər xətalar normal qanunla paylanmış olarsa, yəni $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2 d_i)$ olarsa, S^2 və $(\hat{\theta} - \theta)/S$ təsadüfi kəmiyyətlərinin dəqiq paylanma qanunlarını tapmaq olar, doğrudan da, $(n-1)S^2/\sigma^2$ statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ olan χ^2 – paylanmasına tabedir, $(\hat{\theta} - \theta)/S$ statistikası isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$-ə bərabər Styudent t – paylanması ilə paylanır.

M i s a l 1. Cilalama avtomatında hazırlanmış 20 oxda nominal ölçülərdən yayınmalara nəzarət olunur. Bərabərdəqiqliklə asılı olmayan ölçmələr nəticəsində (mikronlarda) yayınmaların qiymətləri cədvəldə verilmişdir (burada n_i – yayınma kəmiyyəti y_i-nin müşahidə oldunduğu ölçmələrin sayıdır, $\sum_{i=n}^{k} n_i = n = 20$).

y_i	39	40	41	42	43	44	46
n_i	2	4	4	6	2	1	1

Bütün ölçmələr asılı olmadıqlarından və bərabərdəqiqliklə aparıldıqlarından, ayrı-ayrı ölçmələrin çəkiləri onların miqdarına mütənasib götürülməlidir, $w_i = n_i$, odur ki, çəkilər matrisi $W = \operatorname{diag}(n_1,...,n_k)$ şəklində olur və θ-nın naməlum yayınmasının statistik qiyməti kimi $\hat{\theta} = \sum n_i y_i \Big/ \sum n_i = 41{,}50$ kəmiyyəti götürülür. Etibarlılıq ehtimalı $\gamma = 0{,}95$ olduqda sərbəstlik dərəcəsi sayı 19-a bərabər Styudent paylanması üçün cədvəllərdən $t_\gamma = 2{,}09$ olduğunu tapmaq olur, buna görə də, $\theta \approx \hat{\theta} = 41{,}50$ təqribi bərabərliyinin limit mütləq xətası

$$t_\gamma S = t_\gamma \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i (y_i - \hat{\theta})^2} \Big/ n(n-1) = 0{,}80$$

kəmiyyəti götürülməlidir. Beləliklə, $\gamma = 0{,}95$ etibarlılıq ehtimalı ilə θ üçün etibarlı interval $40{,}70 \le \theta \le 42{,}30$ münasibətilə təyin olunur.

M i s a l 2. Qəbuledicinin girişinə $y(t) = \theta x(t) + \varepsilon(t)$ siqnalı daxil olur, bu siqnal $\theta x(t)$ şəklində faydalı siqnal ilə riyazi gözləməsi sıfra bərabər və korrelyasion funksiyası $h(s,t)$ olan qeyri – stasionar $\varepsilon(t)$ maneəsinin qarışığıdır, burada $x(t)$ məlum funksiyadır. Siqnalın amplitudu $y(t)$, $t_1, ..., t_n$ anlarında ölçülür. Faydalı siqnalın amplitudu θ-nı qiymətləndirmək tələb olunur.

Bu qoyuluşa $Y = X\theta + \varepsilon$ xətti modeli uyğundur, $Y = (y(t_1),...,y(t_n))^{\mathsf{T}}$, $X = (x(t_1),...,x(t_n))^{\mathsf{T}}$, $\varepsilon = (\varepsilon(t_1),..., \varepsilon(t_n))^{\mathsf{T}}$, burada ε orta qiyməti 0 və kovariasion matrisi $\Xi = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = k(t_i, t_j)$ olan təsadüfi vektordur. Çəkili Ə. k. k. m.-na görə, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $S(\theta) = (Y - X\theta)^{\mathsf{T}} \times \Xi^{-1}(Y - X\theta) = \min$ şərtindən alınır və $\theta = (X^{\mathsf{T}}\Xi^{-1}X)^{-1} \times X^{\mathsf{T}}\Xi^{-1}Y$ şəklində olur. Matrisinin elementlərini σ^{ij}-larla işarə edib, statistik qiyməti daha sadə aşkar şəkildə yazmaq olur, yəni

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \sigma^{ij} x_i y_j\right] \Big/ \left[\sum_{i,j=1}^{n} \sigma^{ij} x_i x_j\right]^{-1} \qquad (1)$$

$\hat{\theta}$ kəmiyyəti orta qiyməti θ və dispersiyası $D = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \sigma^{ij} x_i x_j\right]^{-1}$ olan asimptotik olaraq normal qanunla paylanır. Əgər küy Qauss prosesidirsə, onda bu münasibət ixtiyari

$$n\colon (\theta - \hat{\theta}) \Big/ \sqrt{D} \in N(0,1)$$

üçün ödənilir.

Sabit siqnalın qeyri – korrelyar ölçülmələri halında $x(t) \equiv 1$, $X = \mathbf{1} = (1,...,1)^{\mathsf{T}}$, $\Xi = \operatorname{diag}(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2)$ və (1) düsturu aşağıdakı şəkildə ifadə olunur

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=1}^{n} y_i / \sigma_i^2\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-2}\right];$$

$\Xi = \sigma^2$ xüsusi halında

$$\hat{\theta} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

H i p o t e z l ə r i n y o x l a n ı l m a s ı və e t i b a r l ı q i y m ə t l ə n d i r m ə. Xətti modelin parametrlərinin Ə. k. k. m. üzrə statistik qiymətləri olduqca ümumi fərziyyələrlə asimptotik olaraq normal qanuna tabedirlər, buna görə də, etibarlı çoxluqların və kritik oblastların sərhədləri kimi limit normal qanununun sıxlığınının hüdud səthləri olan $(\theta - \hat{\theta})^{\mathsf{T}} X^{\mathsf{T}} X (\theta - \hat{\theta}) = \text{const}$ şəklində p – ölçülü ellipsoidlər səthlərindən istifadə etmək məsləhətdir (bax, *Səpələnmə ellipsoidi*). $Q(c) = \{\theta \in \mathbb{R}^p : (\theta - \hat{\theta})^{\mathsf{T}} X^{\mathsf{T}} X (\theta - \hat{\theta}) \le c\}$, $c > 0$ olsun. Onda normal qanunla paylanmış ε_i xətaları halında, yəni $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$ olduqda ixtiyari $c > 0$ qiymətlərində nəticələr doğrudur: σ^2 dispersiyası naməlumdursa,

$$\mathbf{P}\{Q(c\sigma^{-2}) \ni \theta\} = \mathbf{P}\{\chi_p^2 \le c\},$$

burada χ_p^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı p-yə bərabər χ^2 paylanmasına tabe təsadüfi kəmiyyətdir; σ^2 naməlumdursa və onun statistik qiyməti S^2-dan istifadə etdikdə:

$$\mathbf{P}\{Q(cS^{-2}) \ni \theta\} = \mathbf{P}\{F_{p,n-p} \le c\},$$

burada $F_{p,n-p}$ – parametrləri $p, n-p$ olan F – paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyətdir.

M i s a l 3. Ölçmə cihazının kalibrlənməsində onun vasitəsilə parametrləri $a_1,...,a_n$ əvvəlcədən məlum olan etalonlar toplusu ölçülür, sonra ölçülmə qiymətləri A_i-lərin əsl qiymətlərdən yayınmaları y_i-lər araşdırılır: $y_i = A_i - a_i$. Əgər cihaz sistematik xətasızdırsa, onda $\mathbf{M}\, y_i = 0$ sabit olaraq cihazın dəqiqliyini xarakterizə edir. Əgər sistematik xəta vardırsa, onda onu təqribi olaraq

$$\mathbf{M}\, y_i = \alpha + \beta a_i = (\alpha + \beta \bar{a}) + \beta(a_i - \bar{a}),$$

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

şəklində ifadə etməyə cəhd göstərilir, bu isə aşağıdakı xətti modelə uyğundur:

$$Y = X\theta + \varepsilon, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)^{\mathrm{T}}, \quad \theta_1 = \alpha + \beta\bar{a}, \quad \theta_2 = \beta,$$

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 - \bar{a} & a_2 - \bar{a} & \dots & a_n - \bar{a} \end{Vmatrix},$$

burada ε_i xətaları $(0, \sigma^2)$ normal qanunu ilə paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. θ_1, θ_2 parametrlərinə keçid $X^{\mathrm{T}}X$ matrisinin dioqonal matris olmasını təmin edir. Ən kiçik kvadratlar statistik qiyməti burada aşkar şəkildə yazılır:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\hat{\theta}_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} y_i\,(a_i - \bar{a})\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2\right]$$

$\hat{\theta}_1$ və $\hat{\theta}_2$ statistik qiymətləri qeyri – korrelyardırlar, buna görə də, θ_1 və θ_2 üçün etibarlı oblastlar ellipslərdir:

$$Q(c) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^2 : \frac{(\theta_1 - \hat{\theta}_1)^2}{\mathbf{D}\hat{\theta}_1} + \frac{(\theta_2 - \hat{\theta}_2)^2}{\mathbf{D}\hat{\theta}_2} \le c\right\},$$

burada

$$\mathbf{D}\hat{\theta}_1 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \mathbf{D}\hat{\theta}_2 = \sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2;$$

$$\mathbf{P}\{\theta \in Q(C\sigma^2)\} = \mathbf{P}\{\chi_2^2 \le c\} = 1 - \exp(-c/2).$$

σ^2 dispersiyası məlum olmadıqda onun əvəzinə onun aşağıdakı statistik qiymət qoyulur:

$$S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 (a_i - \bar{a})]^2$$

bu halda $\mathbf{P}\{\theta \in Q(cS^2)\} = \mathbf{P}\{F_{2,n-2} \le c\}$. Bu modeldə ilkin parametrlər üçün alınmış $\hat{\alpha}$ və $\hat{\beta}$ statistik qiymətləri korrelyardırlar, buna görə də, $(\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$ vektoru üçün etibarlı oblastlar daha mürəkkəb ifadəli ellipsoidlər ailəsi olur:

$$Q(c) = \{\theta \in \mathbb{R}^2 : n(\alpha - \hat{\alpha})^2 + 2n\bar{a}(\alpha - \hat{\alpha})(\beta - \hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le c\}$$

Ə. k. k. m.-nun hesablama çətinlikləri. Çəkili Ə. k. k. m. üzrə $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $A\hat{\theta} = X^{\mathrm{T}}\Xi^{-1}Y$ normal tənliklər sisteminin həllidir, onun kovariasion matrisi $\operatorname{cov}\hat{\theta} = P = A^{-1}$ münasibətilə ifadə olunur. Əsas çətinliklər Ξ matrisi və ya planın ümumiləşmiş matrisi $A = X^T\Xi^{-1}X$ yaxşı şərtləndirildikdə yaranır, ümumiyyətlə, bu eksperimentin planının dəyişilməsi zərurətinin olduğunu göstərir.

Bir çox hallarda, matrislərin adi çevrilməsini psevdoçevirmə variantlarından biri ilə əvəzetməyə üstünlük verilir. Yaxşı şərtləndirilməməklə bağlı digər problem o halda yaranır ki, A^{-1}-in maşında hesablanması çətin olmasa da, onun ifadəsi $\hat{\theta}$-nın lazımi dəqiqliklə qiymətləndirilməsini təmin edir. Bu halda statistik qiymətə süni meyl daxil etmək məqsədəuyğun olur və buna görə A matrisini $A_\lambda = A + \lambda I$ ilə əvəz etmək lazımdır, burada λ – kiçik bir ədəddir (ölçmə dispersiyalar 1-ə yaxın olduqda λ $0{,}01$ tərtiblə götürülür). Belə statistik qiymət kvadratik orta xətanın minimumu kriterisi üzrə daha üstün hesab olunur. Kvadratik orta xətanın minimumu kriterisi əsasında λ parametrinin optimizasiyası da mümkündür (bax, *Yalvari reqressiya*).

Ə. k. k. m.-nun realizasiyası ilə bağlı digər çətinlik böyük həcmli informasiyanın qorunub saxlanması zərurəti və Ξ matrisinin çevrilməsində onun dim. – ölçüsünün böyük olması ilə yaranan mürəkkəbliklə əlaqədardır. A və Ξ matrislərinin çevrilməsini yeni ölçmələr daxil olduqca rekkurent olaraq aparmaq məqsədəuyğundur. Bu $\hat{\theta}^{(0)}$ və $P^{(0)}$ ilkin qiymətləri əsasında $\hat{\theta}^{(k)}$ statistik qiymətinin və onun kovariasion matrisi $P^{(k)}$-nın rekursiv hesablanma prosedurlarına gətirir. Xüsusi halda, $\Xi = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ halında bu prosedur aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + K^{(k+1)}[y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\theta}^{(k)}];$$

$$K^{(k+1)} = P^{(k)}X_{k+1}^{\mathrm{T}}[X_{k+1}P_kX_{k+1}^{\mathrm{T}} + \sigma_k^2]^{-1};$$

$$P^{(k+1)} = [I - K^{(k+1)}X_{k+1}]P^{(k)}$$

burada X_k, – X matrisinin k-cı sətridir; $K^{(k)}$, – $(p \times 1)$ – dim. – ölçülü vektor – ötürmə əmsalı (bax, *Kalman filtri*) adlanır.

Ə. k. k. m. əsasında ölçmələrin hamarlanması (rus. выравнивание, сглаживание) Ə. k. k. m.-nun tətbiqinin ən tipik hallarından biri –

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} \theta_j \varphi_j(t_i) + \varepsilon_i, \; i = 1, \dots, n$$

şəklində ölçmə nəticələrinin hamarlanmasıdır, burada $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ – hər hansı t parametrinin məlum funksiyalarıdır (əgər t zamandırsa, onda $t_1, \dots, t_n$ ölçmələr aparılan anlardır). Bu sxem reqression əmsallar matrisi $X = (\varphi_i(t_i))$ olan xətti modelə uyğundur. Tətbiqdə, əsas etibarilə, çox vaxt parabolik interpolyasiyaya rast gəlinir, $\varphi_i(t)$-lər çoxhədlilər olduğu hala (məs., $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^2, \dots$). Tətbiq üçün digər mühüm hal harmonik interpolyasiyadır, bu halda $\varphi_j(t)$ kimi triqonometrik funksiyalar götürülür [məs., $\varphi_j(t) = \cos(j-1)t$, $j = 1, \dots, p$]. Müasir standart paket proqramlarında, adətən, $\varphi_j(t)$ kimi çoxhədlilərin, eksponentlərin və triqonometrik funksiyaların müxtəlif kombinasiyalarından istifadə olunması da nəzərə alınır.

Ölçmələrin hamarlanması məsələlərində ortoqonalizasiya ideyaları mühüm əhəmiyyətə malikdir, burada bu ideyalara görə $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, p$ funksiyalarının seçilməsi funksiyaların ortoqo-

nal sistemlərinin seçilməsinə gətirilir. Ortoqonalizasiya p parametrinin müxtəlif qiymətlərində alınmış statistik qiymətlər arasında sadə əlaqəni təmin edir, bu da onun hesablama üstünlüklərindən başqa digər üstün bir cəhətidir (bax, *Forsayt metodu*) və hesablama həcmini azaldır, məs., approksiməedici çoxhədlinin dərəcəsi düzgün seçildikdə.

M i s a l 4. Hərəkət edən avtomobilə havanın müqavimətini təyin etmək üçün aparılan sınaqların nəticələri cədvəldə göstərilmişdir, burada y – avtomobilin ön səthinin müqavimətə məruz qalan sahəsidir (m^2), υ – avtomobilin sürətidir (km/s). Bu kəmiyyətlər arasında $y = a\upsilon^2 + by + c$ şəklində təqribi asılılığı müəyyənləşdirmək tələb olunur. Xətalar kvadratını minimallaşdıraraq, yəni:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{10} [y_i - a\upsilon_i^2 - b\upsilon_i - c]^2 = \min$$

y_i	4,28	3,53	3,16	2,98	2,60	2,23	2,05	1,67	1,49	1,12
υ_t	88,7	98,0	100,0	102,8	106,7	115,8	118,9	130,2	138,9	146,3

münasibətindən $\hat{a} = 0{,}0007;\ \hat{b} = -0{,}205;\ \hat{c} = 16{,}84$ qiymətləri alınır. $\{1, \upsilon, \upsilon^2\}$ funksiyalar sistemindən

$$\{G_0(\upsilon) = 1;\ G_1(\upsilon) = a_0 + a_1\upsilon;$$
$$G_2(\upsilon) = \beta_0 + \beta_1\upsilon + \beta_2\upsilon^2\}$$

sisteminə keçdikdə hesablamalar sadələşir, bu sistemin əmsalları isə aşağıdakı ortoqonallıq şərtlərindən təyin olunur:

$$\sum_{i=1}^{10} G_j(\upsilon_i)\, G_k\,(\upsilon_0) = 0,\ j, k = 0, 1, 2, ...,\ j \neq k,$$

bu şərtlər plan matrisinin diaqonallığını təmin edir ki, bu matris də çevrilməlidir. Bu prosedurların hər ikisi ekvivalentdirlər, lakin hesablama nöqteyi – nəzərindən ortoqonal çoxhədlilərə keçid daha sadədir və nəticədə yuvarlaqlaşdırma xətaları azalır və approksiməedici çoxhədlinin dərəcəsi dəyişdikdə G_0, G_1, G_2 halında tapılmış əmsalların korreksiyasına ehtiyac olmur.

Ə. k. k. m. ö l ç m ə l ə r i n q e y r i – x ə t t i m o d e l l ə r i n d ə. n – ölçülü ölçmələr vektoru $\mathbf{Y} = (y_1, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$-nin naməlum parametrlərin p – ölçülü vektoru ilə

$$y_i = f_i(\theta_1, ..., \theta_p) + \varepsilon_i,\quad i = 1, ..., n$$

münasibətlər sistemi ilə əlaqəli olduğu fərz olunur, burada ε_i – naməlum təsadüfi xətalar, f_i isə $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ differensiallanan inikasının məlum koordinat funksiyalarıdır (ümumi halda, qeyri – xətti). Ə. k. k. m.-na əsasən θ_j-nin statistik qiymətləri kimi $\hat{\theta}_j$-nin elə qiymətləri götürülür ki, bunlar üçün xətalar vektorunun norması minimaldır:

$$S(\theta) = \| Y - F(\theta) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f_i(\theta_1, ..., \theta_p)]^2 = \min.$$

f_i funksiyaları qeyri – xətti olduğundan $\partial S/\partial\theta = 0$ normal tənliklər sisteminin həlli olduqca çətin ola bilər. Bəzən Y vektorunun qeyri – xətti çevirməsini tapmaq mümkün olur, bu halda (2) münasibətləri xətti modelə gətirilir. Ölçmələr müxtəlif dispersiyalı (heterogen) və korrelyar olduğu hal üçün metodun şübhə doğurmayan ümumiləşdirmələri mümkündür.

M i s a l 5. Podşibnikdə sürtünmə əmsalı μ kəmiyyəti t temperaturu ilə (sabit sürət halında) $\mu = \beta\exp(\gamma t)$ empirik düsturu ilə əlaqəlidirlər. Beləliklə, μ kəmiyyəti β və γ-dan qeyri – xətti asılıdır, lakin onun loqarifmi $\ln\mu$ isə $\ln\beta$ və γ-nın xətti funksiyasıdır. Ə. k. k. m.-nun ilkin və çevrilmiş bərabərliklərə tətbiqi nəticədə β və γ üçün müxtəlif statistik qiymətlər verir, lakin əgər xətalar ölçülən kəmiyyətlə müqayisədə kiçik olarsa, $\mathbf{D}(\ln\mu) \approx \mu^{-2}\mathbf{D}\mu$ olduğu alınır. Buna əsasən, xəttiləşdirilmiş modeldə $\ln\mu_i$ ölçmələrinə $w_i = \mu_i^{-2}$ çəkilərini qarşı qoymaq olar. Bundan sonra ilkin və xətti hallarda statistik qiymətlər arasındakı fərq mühüm əhəmiyyət kəsb etmir.

R e k u r r e n t x ə t t i l ə ş d i r m ə. Ölçmələrin qeyri – xətti modelini xətti modelə gətirən funksional çevirmə seçmək mümkün olmayan hallarda, əvvəlcə hər hansı $\hat{\theta}^{(0)}$ başlanğıc yaxınlaşması seçilir, sonra $X = \theta - \hat{\theta}^{(0)}$ vektoru daxil olunur və (2) münasibətləri $Y = F(\hat{\theta}^{(0)})X + \varepsilon$ şəklində yazılır. Daha sonra, sağ tərəf X vektorunun komponentləri $X_1, ..., X_p$-lərin qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılır və xətti hədlərlə kifayətlənərək, naməlum X vektoru ilə ölçmələrin təqribi xətti modeli alınır:

$$Y - F(\hat{\theta}^{(0)}) = \left(\frac{\partial F}{\partial\theta}(\hat{\theta}^{(0)})\right) X + \delta$$

yəni

$$y_i - f_i(\hat{\theta}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial\theta_j}(\hat{\theta}^{(0)})X_j + \delta_i,\ i = 1, ..., n, \qquad (3)$$

burada $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n)^{\mathrm{T}}$ – xətalar vektorudur. $\hat{X} = (\hat{X}_1, ..., \hat{X}_p)^{\mathrm{T}}$-nin parametrinin statistik qiymətlərini tapmaq üçün Ə. k. k. m.-nu tətbiq edərək birinci yaxınlaşma – $\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\theta}^{(0)} + \hat{X}$ alınır. Bu əməliyyatı rekurrent təkrar etmək olar, bu halda əgər xətalar dispersiyası $\mathbf{D}\delta_i$ hər bir addımdan sonra azalırsa, onda proses yığılır: $n \to \infty$ olduqda $\hat{\theta}^{(n)} \xrightarrow{p} \tilde{\theta}$, bununla belə alınan $\tilde{\theta}$ qiyməti birqiymətli təyin olunmaya bilər və həm də, $\hat{\theta}^{(0)}$ başlanğıc yaxınlaşmasından asılı ola bilər. Bu metodda əksər hallarda iterasiyada $1 - 2$ addımla kifayətlənməyə üstünlük verilir.

(3) xətti modellərində iterasiyanın hər bir addımında hesablamaları da rekkurent formada aparmaq əlverişlidir, bu halda yalvari (ric) reqressiya ideyalarından istifadə olunur (bax, *Levenberq – Markvardt metodu*).

Bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu* q i y m ə t l ə n d i r i l m i ş k o v a r i a s i o n m a t r i s l i, *Ən kiçik kvadratlar metodu* m ə h d u d i y y ə t l ə r l i.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] S e a l H. L., «Biometrika», 1967, v. 54, № 1–2, p. 1–24; [3] Д е м и д е н к о Е. З., Линейная и нелинейная регрессии, М., 1981; [4] P a o C. P., Линейный статистические методы и

их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Албе рт А., Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание, пер. с англ., М., 1977; [6] Планирование оптимальных экспериментов, М., 1975; [7] Ar nold S. F., The theory of linear models and multivariate analysis, N. Y., 1981; [8] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, М., 1989; [9] Бо льшев Л. Н., Наименьших квадратов метод, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 3, М., 1982.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU qiymətləndirilmiş kovariasion matrisli « **наименьших квадратов метод** с оцененной ковариационной матрицей; **least squares method** with estimated covariance matrix » – ölçmələr vektorunun kovariasion matrisinin tutarlı statistik qiymətinin ümumiləşmiş (çəkili) *ən kiçik kvadratlar metodunda* istifadəsilə bağlı statistik prosedurlar toplusudur.

$Y = X\theta + \varepsilon$ xətti reqressiya modelində $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)^{\mathsf{T}}$ təsadüfi xətalar vektorunun $\mathbf{M}\varepsilon = 0$, $\operatorname{cov}\varepsilon = \Xi$ şərtlərini ödədiyi fərz olunur. Əgər Ξ matrisi məlum olarsa, onda θ parametrinin Ə. k. k. m. ilə hesablanmış $\hat{\theta}$ statistik qiyməti

$$\hat{\theta}(\Xi) = (X^{\mathsf{T}}\Xi^{-1}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}\Xi^{-1}Y \qquad (1)$$

şəklində olur və ən sadə fərziyyələrlə optimallığın məlum xassələrinə malik olur. Əgər Ξ matrisi naməlumdursa, lakin onun tutarlı $\hat{\Xi}$ statistik qiyməti vardırsa, onda

$$\hat{\theta}(\hat{\Xi}) = (X^{\mathsf{T}}\hat{\Xi}^{-1}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}\hat{\Xi}^{-1}Y \qquad (2)$$

statistik qiyməti asimptotik olaraq əsl Ξ kovariasion matrisinə əsaslanan $\hat{\theta}(\Xi)$ statistik qiymətinin paylanması ilə eyni paylanmaya malik olur (bax, [1]). Bu zaman (2) statistik qiyməti və onunla əlaqədar statistikaların sonlu seçimi xassələri (1) statistik qiymətinin analoji xassələrindən olduqca fərqlənir və bunların tədqiqi hətta normal ölçmələr halında belə əksər hallarda çox çətin məsələlərə gətirir. Məsələn, olduqca sadə sxemlər klassik *Berens – Fişer probleminin* çoxölçülü ümumiləşmələri olan məsələlərə gətirilir (bax, [2] – [5]).

Ξ matrisi üçün müxtəlif strukturlu fərziyyələrlə Ə. k. k. m. ilə ümumiləşmiş statistik qiymətlər alınmışdır (bax, [6]) və bu statistik qiymətlər (2) ilə müqayisədə daha effektivdir. Xüsusi strukturlu Ξ matrislər üçün (qiymətləndiriləcək parametrlərin çox olmayan sayı dəqiqliyi ilə təyin olunan)

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = [X^{\mathsf{T}}(\hat{\Xi}^{(k)})^{-1}X]^{-1}X^{\mathsf{T}}(\hat{\Xi}^{(k)})^{-1}Y$$

şəklində çoxaddımlı sxemlərə baxılır, burada $\hat{\Xi}^{(k)}$ statistik qiymətləri hər dəfə $\Delta^{(k)} = Y - X\hat{\theta}^{(k)}$ reqression qalıqların analizi əsasında alınır. Bu şəkildə daha çox araşdırılmış sxemlərdən biri psevdo asılıolmayan reqressiyalar sxemidir (bu sxem [1]-də daxil olunmuşdur; bax, [7]). Belə məsələlər zaman sıraları nəzəriyyəsində geniş yayılmışdır – ARMAX – modelləri (bax, [8]).

Paylanmış laqlarla xətti modellərdə (2) tipli statistik qiymətlərə çox diqqət yetirilir və bu laqlarda bu statistik qiymətlər hətta asimptotik effektiv belə olmur; bu xassələr $\hat{\Xi}$ statistik qiymətinin qurulması qaydasından olduqca asılı olur (bax, məs., [9]).

Əd.: [1] Zellner A., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1962, v. 57, p. 348–68; [2] James G. S., «Biometrika», 1951, v. 38, p. 324–29; [3] Rao C. R., «Proc. 5-th Berk. Symp. Math. Stat. Probab.», 1967, v. 1, p. 355–72; [4] Hannan E. J., «Econometrica», 1976, v. 44, № 4, p. 713–23; [5] Шалаевский О. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 104, с. 189–214; [6] Макшанов А. В., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1979, т. 85, с. 137–57; [7] Шалаевский О. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 3, с. 565–69; [8] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессии, М., 1981; [9] Анализ авторегрессий. Сб. ст., пер. с англ., М., 1978.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU məhdudiyyətlərli « **наименьших квадратов метод** с ограничениями; **constrained least squares method** » – *ən kiçik kvadratlar metodu* ilə nöqtəvi qiymətləndirmə məsələsində qiymətləndirilən parametrin məqbul qiymətləri çoxluğuna məhdudiyyətlər olduğu halda statistik prosedurlar toplusudur. Məhdudiyyətlər formaları xətti (kvadratik) tənliklər və ya bərabərsizliklər şəklində olduğu hallar daha tam surətdə araşdırılmışdır ki, bu hallar, məs., qiymətləndirilən parametrin məqbul qiymətləri çoxluğunun qabarıqlığı, parametrin qiymətləndirilən funksiyasının müsbət və ya monotonluğu kimi şərtlər nəticəsində yaranır.

Fərz olunur ki, n – ölçülü ölçmələr vektoru $\mathbf{Y} = (y_1,...,y_n)^{\mathsf{T}}$

$$Y = X\theta + \varepsilon \qquad (1)$$

xətti modelinə tabedir, burada X, – $p \le n$ ranqlı, $(n \times p)$ – dim. – ölçülü məlum matrisdir, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)^{\mathsf{T}}$ isə qeyri – korrelyar təsadüfi xətaların elə vektorudur ki, $\mathbf{M}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = 1, \dots, n$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ məhdudiyyətini ödəyən naməlum $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^{\mathsf{T}}$ parametrini ən kiçik kvadratlar metodu ilə qiymətləndirmək tələb olunur. Uyğun $\hat{\theta}$ statistik qiyməti bəzən restriktiv statistik qiymət adlanır, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)^{\mathsf{T}}$.

Bərabərlik şəklində xətti məhdudiyyətlər. Fərz olunur ki, məhdudiyyət

$$H\theta = b \qquad (2)$$

bərabərliyi şəklindədir, burada H, – $m \le p$ ranqlı, $(m \times p)$ – dim. – ölçülü matris, $\mathbf{b} = (b_1,..., b_m)^{\mathsf{T}}$ – məlum vektordur. Bu həndəsi olaraq onu ifadə edir ki, naməlum θ vektoru $\mathbb{R}^p$-də (2) tənliyi ilə verilən, m – ölçülü hipermüstəvidəndir. Bu halda, (2) məhdudiyyətlərində, uyğunluq normasını minimallaşdıran $\hat{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = (\hat{\hat{\theta}}_1, \dots, \hat{\hat{\theta}}_p)^{\mathsf{T}}$ statistik qiyməti

$$\hat{\hat{\theta}} = \hat{\theta} + (X^{\mathsf{T}}X)^{-1}H^{\mathsf{T}}S(b - H\hat{\theta}) \qquad (3)$$

ifadəsi ilə təyin olunur, burada $S = [H(X^{\mathsf{T}}X)^{-1}H^{\mathsf{T}}]^{-1}$ və $\hat{\theta} = (X^{\mathsf{T}}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}Y$, – θ vektorunun Ə. k. k. m. ilə təyin olunan adi (məhdudiyyətlərsiz) statistik qiymətidir (bax, [1] – [3]). $\hat{\hat{\theta}}$ statistik qiyməti (2) şərtini ödəyən xətti meylsiz statistik qiymətlər sinfində effektiv statistik qiymətdir. Onun kovariasion matrisi – $\operatorname{cov}\hat{\hat{\theta}} = V[\mathbf{I} - H^{\mathsf{T}}SH(X^{\mathsf{T}}X)^{-1}]$ bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $V = \sigma^2(X^{\mathsf{T}}X)^{-1} = \operatorname{cov}\hat{\theta}$. σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət

$$s^2 = \frac{1}{n-p+m}\ (Y - X\hat{\hat{\theta}})^{\mathrm{T}}(Y - X\hat{\hat{\theta}})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. $\hat{\hat{\theta}}$ üçün rekurrent formada düsturlar (həm də X və H tam ranqlı matrislər olmadığı hallarda) [5]-də verilmişdir.

Bərabərsizliklər şəklində xətti məhdudiyyətlər.

Məhdudiyyətin

$$H\theta \le b$$

şəklində olduğu fərz olunur, yəni

$$(H\theta)_i \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (4)$$

Uyğun $\hat{\hat{\theta}}$ statistik qiyməti yeganə surətdə təyin olunur və yaxud əgər $\hat{\theta}$ üçün bütün (4) bərabərsizlikləri ödənirsə, $\hat{\theta}$-nın Ə. k. k. m. üzrə adi statistik qiyməti ilə üst-üstə düşür, ya da ki, $(H\theta)_i = b_i$ hipermüstəvilərinin heç olmasa birində olur, yəni (4) bərabərsizliklərindən heç olmasa birini bərabərliyə çevirir. Bununla bağlı olaraq, $\hat{\hat{\theta}}$ statistik qiyməti sıfırdan fərqli ehtimalla sərhəd qiymətlərini alır və meylsiz statistik qiymət olur (bax, [5]). Xətanın tam kvadratının müqayisəsi üçün kriteri kimi

$$\mathbf{M}[(\hat{\hat{\theta}}-\theta)^{\mathrm{T}}(\hat{\hat{\theta}}-\theta)] = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{D}\hat{\hat{\theta}}_j + \sum_{j=1}^{p} [\,\mathbf{M}\,(\hat{\hat{\theta}}_j - \theta_j)]^2$$

bərabərliyini istifadə etdikdə, (4) məhdudiyyətlərini nəzərə almadan hesablanmış adi Ə. k. k. m. statistik qiyməti $\hat{\hat{\theta}}$ restriktiv statistik qiymətindən daha əlverişli ola bilər (bax, [5]).

Xətti və qeyri – xətti modellər və həm də xətti və qeyri – xətti məhdudiyyətlərli sistemlər hallarında restriktiv statistik qiymətlərin qurulması üçün hesablama alqoritmləri tapılmışdır (bax, [6], [7]). Xətti modellər və (4) tipli məhdudiyyətlər, həm də bunların bəzi ümumiləşmələri üçün uyğun restriktiv statistik qiymətləri rekurrent formada almaq olur (bax, [8], [9]).

Əd.: [1] Chipman J. S., Rao M. M., «Econometrika», 1964, v. 32, № 1–2, p. 198–209; [2] Liew C. K., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1976, v. 71, № 355, p. 746–51; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М.. 1968; [4] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессии, М., 1981; [5] Албер А., Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание, пер. с англ., М., 1977; [6] Бард Й., Нелинейное оценивание параметров, пер. с англ., М., 1979; [7] Лоусон Ч., Хенсон Р., Численное решение задач метода наименьших квадратов, пер. с англ., М., 1986; [8] Оценивание в условиях неопределенности. Свердловск, 1982; [9] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, М., 1989.

ƏN SADƏ NÖQTƏVİ PROSES « простейший точечный процесс; simplest point process » – bax, *Puasson nöqtəvi prosesi.*

ƏN SELEKTİV ETİBARLI ÇOXLUQ « наиболее селективное доверительное множество; most selective confidence set » – bax, *Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

«ƏN YAXIN QONŞU» ALQORİTMİ « «ближайшего соседа» алгоритм; nearest neighbour algorithm » – *iyerarx prosedurun təsnifatının* xüsusi halıdır; iki sinif arasında yaxınlıq ölçüsünün bu siniflərin ən yaxın obyektləri arasında yaxınlıq ölçüsü kimi təyin olunması ilə səciyyələnir.

ƏN YAXIN ÜMUMİ ƏCDAD « ближайший общий предок; nearest mutual ancestor » – *şaxələnən prosesdə* elə hissəcikdir ki, verilən andakı bütün hissəciklərin əcdadı olduğu halda onun varislərindən heç biri bu xüsusiyyətə malik olmur. Ə. y. ü. ə. anlayışı və onun ümumiləşməsi – *redüslənmiş şaxələnən proses – şaxələnən təsadüfi meydanların* öyrənilməsində istifadə olunur. Ə. y. ü. ə.-ın bölünmə anı üçün ilk limit teoremləri [1], [2]-də alınmışdır.

Əd.: [1] Fleischmann K., Prehn U., «Math. Nachr.», 1974, Bd 64, S. 357–62; [2] Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 614–23; [3] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67.

ƏN YAXŞI XƏTTİ MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT « наилучшая линейная несмещенная оценка; best linear unbiased estimator, BLUE » – bax, *Xətti statistik qiymət* ən kiçik dispersiyalı.

ƏN YAXŞI XƏTTİ PROQNOZ « наилучший линейный прогноз; best linear prediction » – bax, *Təsadüfi proses*; kanonik ifadə.

ƏNGƏLƏDAYANIQLILIQ « помехоустойчивость; noise immunity » – əngəllərin təhrifedici təsirinin aradan qaldırılmasında sistemin informasiya örtürmə qabiliyyətini xarakterizə edən texniki termindir. Optimal ötürmə metodu üçün mümkün qədər alına bilinən Ə. çox vaxt *potensial əngələdavamlılıq* adlandırılır. İnformasiya ötürmənin konkret sisteminin əngələdayanıqlılığı informasiya nəzəriyyəsində *məlumatların bərpaolunma dəqiqliyi* ilə xarakterizə olunur, məs., ötürülən *məlumatın səhv dekodlama* ehtimalı ilə bərpa olunması halında. Tətbiqlərdə informasiyanı ötürmə sisteminin Ə.-ı *siqnal / küy nisbəti* (*əmsalı*) ilə də xarakterizə olunur.

Əd.: [1] Витерби Э., Омура Д. К., Принципы цифровой связи и кодирования, пер. с англ., М., 1982; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [3] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

ƏNGƏLƏDAYANIQLI STATİSTİK QİYMƏT « помехоустойчивая оценка; robust estimator » – bax, *Robast statistik qiymət.*

ƏNGƏLLƏYİCİ PARAMETR « мешающий параметр; nuisance parameter » statistik məsələdə – müşahidələrin paylanmasının asılı olduğu naməlum parametrdir, lakin verilən məsələdə bu parametrin qiymətinə görə statistik nəticələrin çıxarılması tələb olunmur. Məs., normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətin orta qiyməti haqqında Styudent hipotezinin yoxlanılması məsələsində müşahidələrin dispersiyası Ə. p.-dir; normal paylanma qanununa tabe iki seçimin orta qiymətlərinin bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılmasının *Berens – Fişer problemində* müşahidələrin dispersiyaları Ə. p.-lərdir. Naməlum parametrlərin bir hissəsinin qiymətləndirilməsi məsələsində digər parametrlər Ə. p.-lər hesab olunur; bu, qiymətləndirmə nəzəriyyəsində belə qəbul olunmuşdur. Ə. p.-lər sonsuzölçülü obyektlər də ola bilər, məs., asılı olmayan $y_i = a + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n$ müşahidələri üzrə a parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsində $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ xətalarının birgə paylanması Ə. p. (sonsuzölçülü) ola bilər.

Ə. p.-lərli məsələlərdə belə parametrlərin müxtəlif xaricetmə metodlarından istifadə olunur. Bəzən qeyri – asimptotik məsələ-

lərdə şərti məsələlərə keçiddən (bax, məs., *Şərti kriteri*) istifadə olunur; bu zaman statistik nəticələr, şərti paylanmanın parametrlərinə nəzərən şərti məsələdə, yəni Ə. p. üçün məqbul statistikanın verilmiş (müşahidə olunmuş) qiymətində alınır.

Digər hallarda əvvəlcədən paylanmaları Ə. p.-lərdən asılı olmayan statistikalara əsaslanan prosedurlarla (sərbəst prosedurlar adlandırılan) kifayətlənilir.

Asimptotik məsələlərdə Ə. p.-i xaricetmə məqsədilə bəzən, seçimdən və Ə. p.-in naməlum qiymətindən asılı təsadüfi kəmiyyətlər qurulur ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərin asimptotik paylanmaları Ə. p.-dən asılı olmur və Ə. p.-i onun statistik qiyməti ilə əvəz etdikdə o dəyişmir (bax, məs., *Statistik kriteri* $C(\alpha)$).

Ə. p. anlayışını H. Hotellinq [1]-də daxil etmişdir.

Ədd.: [1] H o t e l l i n g H., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, № 3, p. 271–83; [2] Л и н н и к Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Л и н н и к Ю. В., Избранные труды. Математическая статистика, Л., 1982, с. 217–32; [4] B a s u D., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1977, v. 72, № 358, p. 355–66; [5] B a s u D., «J. Statist. Plann. and Inference», 1978, v. 2, № 1, p. 1–13.

ƏSAS BƏRPA TEOREMİ « основная / узловая / ключевая теорема восстановления; key renewal theorem » – bax, *Bərpa teoremi.*

ƏSAS HİPOTEZ « основная гипотеза; null hypothesis » – bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*.

ƏVƏZETMƏ / PERMUTASİON / YERDƏYİŞMƏ t ə s a d ü f i / s u b s t i s i o n **« подстановка** с л у ч а й н а я; r a n d o m **permutation substision »** – bax, *Təsadüfi əvəzetmə.*

ƏYRİ XƏTLİ STOXASTİK İNTEQRAL « криволинейный стохастический интеграл; stochastic curve integral » – bax, *Stoxastik inteqral* t ə s a d ü f i m e y d a n d a ə y r i ü z r ə.

FAKTOR « **фактор; factor** » – bax, *Faktor eksperiment*.

FAKTOR ANALİZ « **факторный анализ; factor analysis** » – *çoxölçülü statistik analizin* elə bölməsidir ki, özündə

$$\mathbf{x} = \mu + \Lambda\xi + \varepsilon \qquad (1)$$

xətti modelinin qurulması ilə bağlı məsələlərin riyazi – statistik həlli metodlarını birləşdirir, burada $\mathbf{x}$ – müşahidə olunan kəmiyyətlərin $(p\times 1)$ – ölçülü təsadüfi vektoru, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}(x)$, $\mathbf{M}[(\mathbf{x}-\mu)(\mathbf{x}-\mu)^{\mathsf{T}}] = \Xi$, Λ – müşahidə olunan kəmiyyətlər üzərinə qoyulan ümumi faktorların yüklərinin naməlum $(p\times m)$ – matrisi, ξ – müşahidə olunmayan təsadüfi, ümumi faktorların $(p\times m)_{\mathbf{x}}$ – vektoru $(m << p)$, $\mathbf{M}(\xi^{\mathsf{T}}) = 0$, $\mathbf{M}(\xi\xi^{\mathsf{T}}) = I$ (bəzən ξ – normalanmış, qarşılıqlı ortoqonal, naməlum, təsadüfi olmayan parametrlərin vektoru kimi də interpretasiya olunur), $\boldsymbol{\varepsilon}$ – təsadüfi $(p\times 1)$ – xətalar vektoru (və ya da spesifik faktorlar vektoru da adlanır), $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}\xi^{\mathsf{T}}) = 0$, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{T}}) = \Psi$, burada Ψ naməlum diaqonal kovariasion matrisdir. F. a.-in (1) modelindən aydındır ki,

$$\Xi = \Lambda\Lambda^{\mathsf{T}} + \Psi. \qquad (2)$$

Λ və Ψ parametrləri bütün müşahidələr üçün eynidir və bunlar struktur parametrləri adlanır, ξ vektorunun $\mathbf{x}$ təsadüfi vektorunun ayrı-ayrı müşahidə qiymətləri ilə əlaqədar qiymətləri təsadüfi parametrlər adlanır. $m>1$ olduqda Λ üzərinə $[(1/2)\,m(m-1)]$ sayda asılı olmayan məhdudiyyətlər qoymaq zəruridir, əks halda onun elementləri təyin olunmur, belə ki, (1)-də Λ-nı $\Lambda^* = \Lambda T$ ilə, ξ-ni isə $\xi^* = T^{\mathsf{T}}\xi$ ilə əvəz etmək olar və (2) münasibəti doğru olaraq qalır. Beləliklə, Λ ortoqonal fırlanma dəqiqliyi ilə təyin olunur. Bu qeyri – müəyyənlik bir sıra fırlanma kriteriləri (bax, [1]) ilə aradan qaldırılır və bu halda bu kriterilərə F. a. modelinə qoyulan məhdudiyyətlər kimi baxmaq olar.

F. a. modellərinin qurulması ilə bağlı əsas məsələlər modelin varlığı və identifikasiyası (yeganəliyi), naməlum parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi, bunların alqoritmik təyin edilməsi kimi məsələlər, həmçinin müşahidə verilənlərinə modelin adekvatlığı haqqında hipotezlərin statistik yoxlanılması, struktur parametrlərinin qiymətləri haqqında məsələlərdir.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorlar ardıcıllığı olsun və bunların seçimi verilənləri və ya seçimi ifadə etdikləri fərz olunur. μ və Ξ üçün statistik qiymətlər kimi uyğun olaraq,

$$\bar{x}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{və} \quad S = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})^{\mathsf{T}}$$

götürülür. Struktur parametrlər matrislərinin qiymətləndirilməsi proseduru $\widetilde{S} = \widetilde{\Lambda}\widetilde{\Lambda}^{\mathsf{T}} + \widetilde{\Psi}$ matrislər sinfində S matrisinin «ən yaxşı» approksimasiyasının axtarışı kimi anlaşılmalıdır [burada $\widetilde{\Lambda}$, – $(p\times m)$ – matris, $\widetilde{\Psi}$ – dəyişənlərin diaqonal $(p\times p)$ – matrisidir], «ən yaxşı» approksimasiya hər hansı seçilmiş məsafə funksiyasının və ya approksimasiya funksiyası $\mu(S;\widetilde{S})$ -in minimizasiyası mənasında anlaşılır. Bu sonunculara aid misallar uyğun olaraq: $[\mathrm{tr}(S-\widetilde{S}^2)]^{1/2}$ və $\mathrm{tr}(S\widetilde{S}^{-1}) - \ln|S\widetilde{S}^{-1}| - p$ olur. Onda verilən μ üzrə Ψ üçün statistik qiymət

$$\mu(S;\hat{\Psi}_{\mu}) = \inf_{\widetilde{\Psi}\in\mathfrak{A}_p} \mu(S;\widetilde{\Psi})$$

münasibətini ödəyən $\widetilde{\Psi}_{\mu}: \mathfrak{S}_p^{\mu} \to \mathfrak{A}_p$ inikası kimi təyin etmək olar, burada $\mathfrak{S}_p$ – həqiqi simmetrik müsbət müəyyən $(p\times p)$ – matrislər çoxluğu, $\mathfrak{A}_p$ – diaqonal $(p\times p)$ – matrislər çoxluğu,

$$\mu(S,\widetilde{\Psi}) = \sum_{i=k+1}^{k+p-m} f(g_i),$$

$f(x)$ – hər hansı kəsilməz ciddi çökük elə funksiyadır ki, ikinci tərtib də daxil olmaqla ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələri vardır, $x=1$ nöqtəsində minimum qiymətini alır və

$$\widetilde{\Psi}H = SHG, \quad H^{\mathsf{T}}SH = \mathbf{I} \qquad (3)$$

probleminin ümumi məxsusi qiymətlərinin spektrində təyin olunmuşdur, burada G – elementləri $g_1 \geq ... \geq g_p$ olan ümumiləşmiş məxsusi qiymətlərin diaqonal $(p\times p)$ – matrisidir, H – uyğun, ümumiləşmiş məxsusi vektorlar matrisidir, k isə $f(g_k) > f(g_{k+p-m})$ bərabərsizliyi ödənən ən böyük tam qiymətə bərabərdir. μ üzrə Λ-nın statistik qiyməti $\hat{\Lambda}_{\mu} = SH_1(\mathbf{I}-G_1)^{1/2}$ ifadəsilə təyin olunur, burada G_1 – elementləri $g_1 \geq ... \geq g_k \geq g_{k+p-m+1} \geq ... \geq g_p$ olan diaqonal $(m\times m)$ – matrisdir, H_1 isə (3) probleminin uyğun məxsusi vektorlarının $(p\times m)$ – matrisidir və $\widetilde{\Psi}$ bu halda $\hat{\Psi}_{\mu}$ ilə əvəz olunur. Onda model üçün yalnız Ξ matrisinin varlığı və yeganəliyi halında ($\mathbf{x}$ -in paylanması haqqında fərziyyələrsiz) $\widetilde{\Lambda}_{\mu}$ və $\hat{\Psi}_{\mu}$ statistik qiymətləri ciddi tutarlı statistik qiymətlərdir (yəni $N\to\infty$ olduqda uyğun olaraq Λ və Ψ-yə vahid ehtimalla yığılırlar). $2m > p$ şərtində F. a. modeli identifik olmur.

Modelin identifikasiyası üzrə əsas nəticələr (modelin yeganəliyi üçün zəruri və kafi şərtlər) sistemləşdirilmişdir (bax, [4], [5]). Beləliklə, Λ və Ψ -nin qiymətləndirilməsi məsələsinin həlli (3) ümumiləşmiş məsələsinin öz məxsusi qiymətlərində optimizasiyasına gətirilir. Optimizasiya kriterisi hər hansı seçilmiş, μ -dən asılı funksiyadır, dəyişənlər – $\widetilde{\Psi}$ matrisinin p diaqonal elementləridir. Praktikada optimizasiya çoxdəyişənli funksiyanın EHM-dan istifadə olunmaqla iterativ metodlarla minimallaşdırılması ilə həyata keçirilir. $\mathbf{x} \sim N_p(\mu, \Xi)$ olduğu fərz olunduqda Ψ üçün ümumiləşmiş ən kiçik kvadratlar metodu və maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə tapılmış statistik qiymətlər məhz $\hat{\Psi}_\mu$ -nün qiymətləri olur və bu qiymətlərdə uyğun olaraq,

$$\mu = \sum_{i=k+1}^{k+p-m} (g_i^{-1} + \ln g_i - 1)$$

və

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{k+p-m} (1 - g_i)^2$$

funksiyalarının minimumları alınır. Ayrıca $\mathbf{x}_0$ müşahidəsi ilə əlaqədar olan ξ_0 vektorunun şərti riyazi gözləməsi və kovariasion matrisinin tutarlı statistik qiymətləri məhz uyğun olaraq $\Lambda_\mu^{\mathsf{T}} S^{-1}(x_0 - \bar{x})$ və $(1 - \hat{\Lambda}_\mu^{\mathsf{T}} S^{-1} \hat{\Lambda}_\mu)$ -yə bərabərdirlər.

F. a., adətən, birincisi, müşahidə olunan dəyişənlər fəzasının dim. – ölçüsünün kiçildilməsi məqsədilə informasiyanın konvolyusiya metodu kimi, ikincisi, xətalar variasiyasını nəzərə almayan müşahidələr matrisinin variasiya mənbələrinin bölüşdürülməsi metodu kimi, üçüncüsü, müşahidələrin təsnifi metodu kimi istifadə olunur. F. a. psixologiya, sosiologiya, təbabət, coğrafiya və s. kimi oblastlarda tətbiq olunur (bax, məs., [1] – [3]).

Əd.: [1] Харман Г., Современный факторный анализ, пер. с англ., М., 1972; [2] Окунь Я., Факторный анализ, пер. с польск., М., 1974; [3] Иберла К., Факторный анализ, пер. с нем., М., 1980; [4] Anderson T. W., Rubin H., «Proc. 3-rd Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1956, v. 5, p. 111–50; [5] Tumura Y., Sato M., «TRU Math.», 1980, v. 16, № 2, p. 121–31; [6] Банников В. А., в кн.: Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа, М., 1980, с. 208–32.

FAKTOR ANALİZİ; modelin identifikasiyası **« факторный анализ;** идентификация модели; identification of a model of **factor analysis »** – faktor analiz modelinin qurulması ilə əlaqədar əsas məsələlərdən birinin həllidir və $\Xi = \Lambda\Lambda^{\mathsf{T}} + \Psi$ tənliyinin Λ və Ψ struktur parametrləri matrislərinə nəzərən həllinin varlığı fərz olunduğu halda, faktor yüklərinin $(p \times m)$ – matrisi Λ üzərinə qoyulan elə zəruri və kafi şərtlərin təyin olunmasından ibarətdir ki, bu həll Λ matrisinin m tərtib ixtiyari ortoqonal T matrisinə sağdan vurulma dəqiqliyi ilə yeganə olsun.

Bax, *Faktor analiz*.

FAKTOR ANALİZİ; sxemlər **« факторный анализ;** схемы; **factor analysis models »** – *faktor analizin* müxtəlif sxemləridir, o cümlədən, baş komponentlər analizi (BKA), əsas faktor analiz (ƏFA), kanonik faktor analiz (KFA), alfa – faktor analiz (AFA). Bu sxemlər onun xüsusi halları olan modellə aşğıdakı kimi təsvir olunur.

$\mathbf{y}^{\mathsf{T}} = (y_1, ..., y_n)$ – komponentlərinin hamısının riyazi gözləmələri sıfra bərabər, dispersiyaları isə sıfırdan fərqli olan təsadüfi vektor olsun. Fərz olunur ki, $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{s} + \mathbf{l}$, burada $\mathbf{c} = F\mathbf{x}$, $\mathbf{My} = \mathbf{Ms} = \mathbf{Ml} = \mathbf{Mc}$. $n \times r$ – ölçülü təsadüfi olmayan F matrisi ümumi faktorların yüklər matrisi adlanır (rus. матрица нагрузок). Fərz olunur ki, $\mathbf{Mx} = 0$, $\mathbf{Mxx}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$. Ümumi faktorların təsadüfi vektoru $\mathbf{x}$, spesifik faktorlar vektoru $\mathbf{s}$, xətalar vektoru $\mathbf{l}$ -in ortoqonal vektorlar olduğu, $\mathbf{Mxs}^{\mathsf{T}} = 0$, $\mathbf{Mxl}^{\mathsf{T}} = 0$, $\mathbf{Msl}^{\mathsf{T}} = 0$ fərz olunur. $\mathbf{y} = \mathbf{t} + \mathbf{l}$, $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ mümkün ola bilən ifadələrdir, burada $\mathbf{t} = \mathbf{s} + \mathbf{c}$, $\mathbf{u} = \mathbf{s} + \mathbf{l}$; $\mathbf{t}$ – əsl qiymətlər vektoru, $\mathbf{u}$ – individual faktorlar vektoru adlanır.

Fərz olunur ki,

$$C = \mathbf{Myy}^{\mathsf{T}}, \quad C_c = \mathbf{Mcc}^{\mathsf{T}} = FF^{\mathsf{T}},$$
$$C_t = \mathbf{Mtt}^{\mathsf{T}}, \quad S^2 = \mathbf{Mss}^{\mathsf{T}}, \quad E^2 = \mathbf{Mll}^{\mathsf{T}},$$
$$U^2 = \mathbf{Muu}^{\mathsf{T}} = S^2 + E^2;$$

və

$$V = \operatorname{diag} C, \quad H^2 = \operatorname{diag} C_c,$$
$$T^2 = \operatorname{diag} C_t = H^2 + S^2, \quad C_0 = C - V.$$

D^2 – baş diaqonal elementləri müsbət olan diaqonal matris olsun. Yuxarıda təsvir olunan matrislər arasında bu və ya digər münasibətlərin müəyyənləşdirilməsi ilə əlaqədar olan F. a. məsələləri $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n)$ vektorunun qiymətləri fəzasında

$$\lambda = (\boldsymbol{w}^{\mathsf{T}} C_c \boldsymbol{w}) \big/ (\boldsymbol{w}^{\mathsf{T}} D^2 \boldsymbol{w})$$

kvadratik formalar nisbətinin ekstremal nöqtələrinin təsvirinə gətirilə bilinər. Bu məsələləri hər hansı matrisin məxsusi qiymətlərinin və məxsusi vektorlarının təsvirinə gətirmək olar. Əgər $D^2 = V^2$, $D^2 = U^2$, $D^2 = H^2$ götürülərsə, uyğun olaraq, ƏFA, KFA, AFA sxemləri alınır.

BKA sxemi

$$\lambda_c = (\boldsymbol{w}^{\mathsf{T}} C \boldsymbol{w}) \big/ (\boldsymbol{w}^{\mathsf{T}} V^2 \boldsymbol{w})$$

kvadratik formalarının nisbətinin öyrənilməsinə gətirilə bilinir. Bir çox hallarda KFA daha üstün sxem hesab olunur. Fərz olunur ki, yuxarıda təsvir olunan bütün matrislər ya tamamilə məlumdurlar, ya da ki, seçim üzrə qiymətləndirilirlər.

Əd.: [1] Mc Donald P. P., Roderich P., «Brit. J. Math and Statist. Psychol.», 1970, v. 23, № 1, p. 1–21.

FAKTOR ÇOXLUQ « факторное множество; factor set » – bax, *Faktor eksperiment.*

FAKTOR EKSPERİMENT « факторный эксперимент; factor experiment » – faktor modellərin öyrənilməsi üçün *reqression eksperimentdir*. Belə modellərə *dispersion analizin* elə tipli məsələləri gətirilir ki, bu məsələlərdə məhsuldarlığın torpaqların tiplərindən və bunların becərilməsindən asılılığı statistik araşdırılır (bax, *Blok plan*, F. e.-də torpaqların tipləri və onların becərilməsi eyni hüquqlu, asılı olmayan dəyişənlər kimi fərz olunur, lakin blok plan nöqteyi – nəzərincə sınaqlar aparılan hissələrdə torpaqların müxtəlifliyi onların qeyri – bircins olması səbəb kimi anlaşılırdı və bu səbəbin

eksperiment nəticələrinə təsirini mümkün olduqca aradan qaldırmaq tələb olunurdu). Qeyd olunan asılı olmayan dəyişənlər (torpaqların tipləri, onların becərilməsi qaydaları), başqa bir çox dəyişənlər kimi, mahiyyət etibarilə, təbii olaraq, kəmiyyətcə təsvir olunmur və buna görə də, bunlar keyfiyyət dəyişənləri adlandırılır (kəmiyyət dəyişənlərindən, məs., istifadə olunan gübrələrin miqdarı kimi dəyişənlərdən fərqli olaraq). Keyfiyyət dəyişənlərinin qiymətlərini faktorlar vasitəsilə təsvir etmək münasibdir. Əgər i-ci dəyişən s_i qiymətlərindən birini ala bilərsə, onda bunlar müxtəlif $l_{i_1}, ..., l_{i_{s_i}}$ ədədləri ilə (adətən, tam olan) nömrələnir və bu halda deyilir ki, F_i faktoru təcrübə zamanı l_{i_k} səviyyəsindədir, bu isə belə anlaşılır ki, i-ci dəyişən bu səviyyədə ala biləcəyi qiymətlərindən k-cısını almışdır; bu təsvir qaydası kəmiyyət dəyişənləri üçün də yarayır. F. e.-də faktorların sayının sonlu olduğu fərz olunur; hər bir faktor sonlu sayda səviyyəyə malik olur (ümumiyyətlə, faktordan faktora keçdikcə dəyişən).

F. e.-in R. Fişer tərəfindən tarixən daxil olunması və öyrənilməsi (ciddi tərifsiz olmasına baxmayaraq) *eksperimentin planlaşdırmasının* müasir nəzəriyyəsi üçün zəruri olmuşdur. Hal-hazırda «F. e.» termini üçün vahid anlamın olmadığını hesab etmək olar. Bir çox müəlliflər F. e.-in səciyyəvi cəhətlərini sınaqdan sınağa keçdikdə eyni zamanda bir neçə faktorun dəyişməsi kimi hesab edirlər. Bu hal F. e.-i R. Fişerin işlərinə qədərki klassik eksperiment adlandırılan eksperimentlərdən onunla fərqləndirir ki, bu halda hər hansı sınaqlar seriyasında yalnız bir faktorun səviyyələri dəyişir, digərlərinin səviyyələrinin isə dəyişməz qaldığı fərz olunur. F. e.-in tətbiqi araşdırmalar üçün vaxtın azalmasını təmin edərək (bu, məs., aqrobioloji sınaqlar üçün xüsusilə mühümdür), bir qayda olaraq, alınan statistik qiymətlərin dəqiqliyini artırmağa, həmçinin müxtəlif faktorların qarşılıqlı təsirini qiymətləndirməyə (bax, aşağı) imkan yaradır.

Tətbiq olunan faktor modelinin tipi eksperimentator tərəfindən postulatlaşdırılır və ya uyğun hipotezlərin statistik müqayisəsi yolu ilə təyin olunur. Ən sadə – xətti – model yuxarıda məhsuldarlıq haqqında baxılan məsələ üçün aşağıdakı şəkildədir:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha x_{1i} + \beta x_{2j} + \varepsilon_{ijk},$$

burada y_{ijk}, – k-cı təcrübədə öyrənilən faktorlar uyğun olaraq, x_{1i} və x_{2j} qiymətlərini aldıqda məhsuldarlığı ifadə edən kəmiyyətdir, ε_{ijk} – təsadüfi xətadır, belə ki, adətən, fərz olunur ki, bunlar riyazi gözləmələri sıfra bərabər, dispersiyası σ^2 olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. α və β parametrləri uyğun faktorların səviyyələrinin əsl effektləri, μ ümumi orta qiymət adlandırılır. n sayda iki səviyyəli faktorlar halında xətti model aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$y = \mu + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + \varepsilon .$$

Müxtəlif faktorların qarşılıqlı təsirini də nəzərə alan daha mürəkkəb modellərdə y-in ifadəsinə bir neçə faktorun səviyyələrinin kombinasiyaları ilə təyin olunan toplananlar da əlavə olunur. Baxılan misal üçün belə model aşağıdakı şəkildə olur:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha x_{1i} + \beta x_{2j} + \gamma x_{1i} x_{2j} + \varepsilon_{ijk} .$$

γ parametri – ikifaktorlu qarşılıqlı təsir effekti adlanır. μ, α, β, γ parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi də bu halda F. e.-in məqsədi olur.

Struktur nöqteyi – nəzərdən ən sadə F. e. – tam F. e.-dir və bu eksperiment faktorların səviyyələrinin bütün mümkün kombinasiyalarına uyğun sınaqlardan ibarət olur. n sayda ikiseviyyəli faktorlar halında eksperiment 2^n sayda sınaqdan ibarət olur (bunların təkrarlanmayan sınaqlar olduğu fərz olunur). Tam F. e. həm əsas effektləri, həm də bütün tərtibdən olan faktorların qarşılıqlı təsir effektlərini qiymətləndirməyə (əgər bunlar seçilmiş modeldə nəzərə alınırsa) imkan verir. Tam F. e. bir sıra optimallıq xassələrinə malikdir (bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin* həm də [1] – [3]), onun nəticələrinin yenidən statistik işlənilməsi olduqca sadədir.

Tam F. e.-in çatışmayan cəhəti onun üçün aparılan sınaqlar sayının çox olmasındadır. Buna görə də, sınaqların sayı az olan F. e.-in planlarını qurmağa müyəssər olmaq mühümdür (belə planlar kəsri planlar adlanır (rus. дробные планы), lakin bununla belə bu planlar seçilmiş modelin parametrlərinin statistik qiymətlərini təyin etməyi təmin edir. Belə növ mühüm metod qarışdırma metodudur. Bu üsulun məğzi ondan ibarətdir ki, F. e. elə sınaqlardan təşkil olunur ki, bu sınaqlar parametrlərin bəzi xətti funksiyalarının toplam statistik qiymətlərini qurmağa imkan verir, bu şərtlə ki, bu funksiyalardan hər birinə qiymətləndiriləcək effektlərdən ən çox biri daxil ola bilər. Əgər bu halda qiymətləndirilməyən effektlər sıfır effektlər kimi hesab olunarsa, onda maraq kəsb edən parametrlər üçün statistik qiymətlər alınır. Tam F. e.-lə müqayisədə sınaqlar sayının azaldılması olduqca əhəmiyyətli ola bilir. Məs., xətti n – faktorlu model üçün bu sayı 2^n-dən $(n+1)$-ə qədər azaltmaq olur (adətən, 2^{n-p} sınaqdan ibarət kəsri F. e.-lər istifadə olunur ki, bu halda $2^{n-p} \geq n+1$ olur). Qarışdırma proseduru münasib cəbriləşməni mümkün edir. Doğrudan da, effektlərin qiymətləndiriləcək xətti funksiyalarının qurulması üçün hər bir qayda ilə hər hansı sonlu Abel qrupu əlaqələnir; bu funksiyalar, Abel qrupunun elementləri arasında, aparılmış qarışdırma haqqında bütün informasiyanı özündə saxlayan münasibətləri təyin edir.

F. e.-in parametrlərinin xətti əvəzlənməsi tez-tez tələb olunduğundan (məs., parametrlər üçün eyniliklərin doğruluğunda, bax, *Aprior informasiyadan istifadə*), həmçinin kəmiyyət faktorlarının bir hissəsinin məlum olduğu halında F. e.-in daha ümumi şəkildə ifadə olunması səmərəlidir. Məs., faktorların səviyyələrinin effektlər vektoru ilə yanaşı, onun cırlaşmayan xətti çevirmələri mühüm hesab olnur, bu xətti çevirmələrin hər biri baş effektlər vektoru adlanır.

Müxtəlif faktorlar halında (hər hansı ω çoxluğundan) əsas effektlər vektorunun ixtiyari komponentlərinin bir-birinə vurulması ilə faktorların qarşılıqlıtəsir effektlərinin toplusu alınır (bax, *Faktorun baş effekti*, *Faktorların qarşılıqlıtəsir effekti*). F. e.-in reqressiya funksiyası əsl əsas effektlərin və bəzi qarşılıqlıtəsir effektlərinin bütün komponentlərinin xətti formasıdır. Hətta bu reqressiya funksiyasına faktorların A altçoxluqlarının qarşılıqlıtəsir effekti də daxil olursa, onda o, ixtiyari $B \subset A$ altçoxluğundan qarşılıqlıtəsir faktorlar effektini də daxilinə alır.

Faktorların belə altçoxluqlarının toplusu F. e.-in faktor çoxluğu Ω adlanır (qeyd etmək olar ki, *Çəkiləmə planı* məqaləsində təsvir olunmuş model faktor modeli deyildir, çünki, bu modeldə faktorların boş çoxluğuna müvafiq sərbəst həd yoxdur).

Bütün faktorlarının səviyyələri eyni olan F. e. – simmetrik və müntəzəm F. e. adlandırılır, bu şərtlə ki, ixtiyari x_i faktorunun bütün səviyyələri planda $n_i = N$ dəfə iştirak etmiş

olsunlar. $\omega_i(j)$ və $A=\{i_1, ..., i_r\}$ üçün $\omega_A(j_1, ..., j_r)$ – uyğun olaraq, x_i səviyyəsinin j-ci tezliyinin və $x_{i_1}, ..., x_{i_r}$ faktorlarının $j_1, ..., j_r$ səviyyələri üzərində birgə müşahidənin tezliyinin işarələri olsun. Əgər bütün $A\in\Omega$ altçoxluqları üçün $\omega_A(j_1, ..., j_r)=\prod_{k=1}^{r}\omega_{i_k}(j_k)$ bərabərliyi ödənilərsə, F. e. – Ω üzərində r e q u l y a r e k s p e r i m e n t d i r, deyilir.

F. e.-in Ω üzərində requlyarlığı Ω üzərində əsas effektlər və qarşılıqlıtəsir effektlərin cüt-cüt ortoqonal seçilməsi mümkünlüyünə ekvivalentdir. s səviyyəli k sayda faktorun simmetrik müntəzəm requlyar planı (N, k, s, t) – o r t o q o n a l c ə d v ə l adlanır. Əgər r sayda faktorun bütün qarşılıqlıtəsirlərini meylsiz qiymətləndirmək mümkün olarsa, plan $2r+1$ sayda i z i n - v e r m ə q a b i l i y y ə t i n ə malikdir, deyilir. $r=1$ olduqda əsas effektlər planı alınır.

Aşağıdakı hökm planlar və optimallıq kriterilərinin kombinator xassələri arasındakı asılılığı illüstrasiya edir (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*): əsas effektlərin requlyar müntəzəm planı ξ^*, bu planın (ξ^*-nun) düyünlərində (və ya faktorlar kəmiyyət faktorları olduğu halda ξ^*-nun düyünlərini örtən çoxölçülü kubda) daşıyıcıya malik planlar içərisində D – optimal plandır. Çoxlu yaxın nəticələr vardır. İlkin olaraq ortoqonal cədvəllər *latın kvadratları*, *latın kubları* və s. kimi kombinator konstruksiyalar vasitəsilə qurulurdu (bax, *Ortoqonal kvadratlar*, *Ortoqonal kublar*). Sonradan bu cədvəllərin qurulması sonlu meydanlar nəzəriyyəsinin, sonlu həndəsələrin və sonlu proyektiv fəzaların metodlarını istifadə edən faktor planların həndəsi nəzəriyyəsi çərçivəsində ümumiləşdirilmişdir. Məs., 0, 1 və 2 qiymətlərini alan dörd sayda üçsəviyyəli faktorlar üçün əsas effektlərin həndəsi planı sətirləri $EG(4, 3)$ sonlu Evklid fəzasının $x_1+x_2+2x_3=0(\mathrm{mod}\,3)$ və $x_1+2x_2+2x_3=0(\mathrm{mod}\,3)$ müstəvilərinin kəsişməsində yerləşən nöqtələrindən təşkil olunan aşağıdakı plan olacaqdır:

$$D=\{x_{ui}\}=\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{matrix}\\ \left\|\begin{matrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&0&2&2\\0&1&1&2\\1&1&2&0\\2&1&0&1\\0&2&2&1\\1&2&0&2\\2&2&1&0\end{matrix}\right\|\end{array},\quad \begin{matrix}u=1, ..., 9\\ i=1, ..., 4.\end{matrix}$$

Əgər x_{u3} və x_{u4} qiymətlərinə uyğun olaraq, 3 ölçülü iki kvadratın $x_{u1}+1$ nömrəli sətri ilə $x_{u2}+1$ nömrəli sütununun kəsişməsindəki elementlər kimi baxılarsa, onda planın ənənəvi, iki ortoqonal latın kvadratları şəklindəki yazılışı alınır:

$$\begin{matrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{matrix}\quad \text{və}\quad \begin{matrix}0&2&1\\1&0&2.\\2&1&0\end{matrix}$$

Həndəsi metodlar bir çox mühüm xüsusi hallar üçün eksperimentin effektiv planlarını qurmağa imkan verir. Ümumi halda, verilən Ω faktor çoxluğu üçün minimal sayda müşahidələrlə həndəsi planın qurulması məsələsi həll olunmamışdır.

Eksperimentlərin sayının azaldılması bəzi hallarda planlaşdırmanın requlyarlığından imtina edərək, daha az effektiv planlarla qane olunmaqla nəticələnir. Qeyri – requlyar planların qurulması üçün işlənilmiş ədədi metodlar müxtəlif kombinar cədvəllərin (məs., balanslanmış cədvəllərin) qurulmasına əsaslanmışdır.

Əd.: [1] Б р о д с к и й В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, M., 1976; [2] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983, гл. 10–14; [3] Е р м а к о в С. M., Ж и г л я в с к и й А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, M., 1987; [4] R a g h a v a r a o D., Constructions and Combinatorial problems in design of experiments, N. Y. – [a. o.], 1971; [5] R a k t o e B. L., H e d a y a t A., F e d e r e r W. T., Factorial designs, N. Y. – [a. o.], 1981.

FAKTOR MODEL « факторная модель; factor model » – bax, *Faktor eksperiment.*

FAKTORİAL MOMENT « факториальный момент; factorial moment » – *təsadüfi kəmiyyətin* ədədi xarakteristikasıdır. Daha dəqiq, X t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t i n i n m t ə r t i b ($m\geq 1$ – tam ədəddir) f a k t o r i a l m o m e n t i – $X^{[m]}=X(X-1)...(X-m+1)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə (əgər, bu riyazi gözləmə varsa) deyilir. F. m.-lər təsadüfi kəmiyyətlərin momentlərilə və əksinə, momentlər F. m.-lə ifadə oluna bilinirlər. Məs., birinci F. m. və riyazi gözləmə üst-üstə düşür, dispersiya $\mathbf{D}X=\mathbf{M}X^{[2]}+$ $+\mathbf{M}X^{[1]}-(\mathbf{M}X^{[1]})^2$ və s. F. m.-lər, bir qayda olaraq, tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər üçün istifadə olunurlar və bu halda bunlar X təsadüfi kəmiyyətinin doğuran funksiyası $\psi(z)$-in törəmələri vasitəsilə ifadə olunur: $\mathbf{M}X^{[m]}=\psi^{[m]}(1)$, burada $\psi^{(m)}(z)$, – $\psi(z)$ funksiyasının m-ci tərtib törəməsidir. Doğuran funksiya və F. m. vasitəsilə diskret paylanmalarla bağlı bəzi düsturlar kompakt şəkildə ifadə olunur.

Bax, *Təsadüfi proses*; k ə s i l m ə l ə r.

Əd.: [1] К е н д а л л M. Д ж., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., M., 1966.

FAKTORİAL OXLARIN FIRLANMASI « факторных осей вращение; rotation of factorial axes » faktor analizdə – faktor yüklərinin $(p\times m)$ – matrisi $\mathbf{\Lambda}$-nın (bax, *Faktor analiz*; s x e m l ə r) m tərtib cırlaşmayan həqiqi $\mathbf{T}$ matrisinə sağdan vurulmasıdır; bu vurma ümumi faktorlar fəzasında (yəni $\mathbf{\Lambda}$ matrisinin sütunlarının ilkin p – ölçülü fəzasında m sayda vektorları altfəza kimi örtmüş m – ölçülü altfəzada) yeni koordinat sisteminin (yeni faktorial oxların) seçilməsinə uyğun olur, bu isə ümumi faktorların ən yaxşı məzmunlu interpretasiyası məqsədilə edilir; onda $\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\xi}$, – $(m\times 1)$ – vektoru yeni faktor oxlarında nöqtənin koordinatlarını verir (burada $\boldsymbol{\xi}$ – ümumi faktorların $(m\times 1)$ – vektorudur). Əgər $\mathbf{T}$ ortoqonal matris olarsa, F. o. f. o r t o q o n a l f ı r l a n m a, əks halda isə ç ə p b u c a q f ı r l a n m a adlanır. F. o. f. üçün iki yanaşma vardır, bu isə anlayışın cəbri və ya həndəsi terminlərlə ifadə olunması ilə bağlıdır. Birinci yanaşma analitik metodlarla, ikinci isə oxların qrafik təsviri ilə bağlıdır. [3], [4]-də ortoqonal və çəpbucaq fırlanmaların ümumi şəkilli məqsəd funksiyalarının

maksimizasiyasına əsaslanan analitik metodlarla alınmış faktor yüklər üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərinin asimptotik dispersiyaları və kovariasiyalarının hesablanması üçün düsturlar alınmışdır.

Əd.: [1] Харман Г., Современный факторный анализ, пер. с англ., M., 1972; [2] Иберла К., Факторный анализ, пер. с нем., M., 1980; [3] Archer C. O., Jennrich R. I., «Psychometrika», 1973, v. 38, № 4, p. 581–92; [4] Jennrich R. I., «Psychometrika», 1973, v. 38, № 4, p. 593–604.

FAKTORİAL SEMİİNVARİANT « факториальный семиинвариант; factorial semiinvariant / cumulant » – *təsadüfi kəmiyyətin semiinvarianta* analoji ədədi xarakteristikasıdır. ξ – doğuran funksiyası $\psi(z)$ olan mənfi olmayan tamqiymətli təsadüfi kəmiyyət olsun. $\ln\psi(1+z)$ funksiyasının ayrılışında $Z^m/m!$-in qarşısındakı əmsala m tərtib faktorial semiinvariant deyilir. F. s. və semiinvariantlar arasında münasibətlər faktorial momentlər və momentlər arasında münasibətlərə analojidir (bax, *Faktorial moment*).

Əd.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., M., 1966.

FAKTORİZASİON EYNİLİKLƏR « факторизационные тождества; factorization identites » – *təsadüfi dolaşmaların* müxtəlif xarakteristikaları arasında (əsas etibarilə onların sərhəd funksionallarının paylanmaları arasında) əlaqələri ifadə edən çoxparametrli eyniliklər sistemidir.

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $f(\lambda) = \mathbf{M}\, e^{i\lambda\xi_1}$, $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ olsun. F. e.-in yaranması – $|z| \le 1$, $(\operatorname{Im}\lambda = 0)$ oblastında $1 - z f(\lambda)$ funksiyasının

$$1 - z f(\lambda) = A_{z_+}(\lambda) A_{z_-}(\lambda) \qquad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilməsi mümkünlüyü ilə bağlı olmuşdur, burada $A_{z_\pm}(\lambda)$ – sərhədlər də daxil olmaqla, $\pm\operatorname{Im}\lambda > 0$ oblastında sıfra çevrilməyən analitik funksiyalardır. (1) ifadəsi $1 - z f(\lambda)$ funksiyasının faktorizasiyası adlanır və bu ifadə inteqral tənliklərin Viner – Hopf metodu həlli ilə sıx əlaqədardır. Bu ifadə

$$A_{z_\pm}(\lambda) = \exp\left\{ -\int_0^{\pm\infty} e^{i\lambda x} dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}\{S_n < x\} \right] \right\}, \quad |z| < 1$$

sabit vuruğu dəqiqliyi ilə yeganədir, burada və aşağıda sadəlik üçün $\mathbf{P}\{S_n = 0\} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ qəbul olunmuşdur.

$(n,\ t)$ müstəvisində hissəciyin hərəkəti trayektoriyası kimi $(0,\ 0)$, $(1,\ S_1)$, $(2,\ S_2)$, … trayektoriyası üçün sərhədlər təyin olunur; $n = \text{const} > 0$, $t = \text{const} > 0$. Bu sədlərin keçilməsi ilə bağlı aşağıdakı təsadüfi kəmiyyətlər daxil olunur:

$$Y_0 = 0, \quad Y_n = \max_{0 \le k \le n} S_k, \quad Y_\infty = Y,$$

$$\theta_{n_-} = \min\{ k \le n : S_k = Y_n \},$$

$$\theta_{n_+} = \max\{ k \le n : S_k = Y_n \}, \quad \theta_{0_+} = \theta_{0-} = 0,$$

$$\eta(t) = \min\{ k : S_k \ge t \}, \quad \chi(t) = S_{\eta(t)} - t,$$

bu təsadüfi kəmiyyətlər yuxarı sərhəd funksionalları adlanır. n və $t < 0$ sədləri üçün də aşağıdakı sərhəd funksionalları simmetrik olaraq daxil olunur. Bu halda bu funksionallar $*$ simvolları da qoyularaq işarə olunurlar. Məs.,

$$Y_n^* = \min_{0 \le k \le n} S_k, \quad \theta_{n_-}^* = \min\{ k \le n : S_k = Y_n^* \}$$

$$\eta^*(t) = \min\{k \ge 1 : S_k \le t\}, \quad \chi^*(t) = S_{\eta^*(t)} - t.$$

S_n təsadüfi kəmiyyəti eyni zamanda yuxarı və aşağı funksional kimi hesab olunur.

Birgə paylanmaların yuxarı (aşağı) sərhəd funksionallarının xarakteristik funksiyaları faktorizasiya komponentləri $A_{z_+}(\lambda)$ [uyğun olaraq $A_{z_-}(\lambda)$] terminlərində ifadə olunurlar. Bu halda yalnız ikiölçülü paylanmanın xarakteristik funksiyasının ifadəsinin məlum olması kifayətdir (bax, [2]):

$$\mathbf{P}\{Y_n \in dx,\ \theta_{n_-} = k\} \quad \text{və} \quad \mathbf{P}\{\chi(t) \in dy,\ \eta(t) = l\}. \qquad (2)$$

Bu paylanmalar üçün xarakteristik funksiyaların ifadələri vasitəsilə F. e.-in bütün müxtəlif formalarını təsvir etmək olur. (2) paylanmaları üçün eyniliklər uyğun olaraq, birinci və ikinci faktorizasion eyniliklər adlanır. Bu iki eynilikdən sərhəd funksionallarının digər kombinasiyalarının xarakteristik funksiyaları asanlıqla alınır.

Faktorizasiya komponentləri $A_{z_\pm}$ ilə digər təsadüfi kəmiyyətlərin çevirmələri də əlaqəlidirlər, belə ki, bu çevirmələrə, təbii ki, sərhəd funksionalları kimi baxmaq olar; məs., təsadüfi dolaşmanın trayektoriyasının $t \ge 0$ səviyyəsini kəsmə nöqtələri sayı $\nu_n(t)$ və bu trayektoriyanın t səviyyəsindən yuxarıda keçirdiyi $\tau_n(t)$ müddəti (yəni $S_k \ge t$ şərtilə təyin olunan k, $1 \le k \le n$ indekslərinin sayı) belə funksionallardır və bunlar eyni zamanda hər iki – n və t parametrlərindən asılı sərhəd funksionallarıdır. Bu halda $\tau_n(t)$ və $\nu_n(t)$ üzərində çevirmələr və $A_{z_\pm}$ komponentləri arasında olan əlaqələr daha mürəkkəb şəkildə ifadə olunur. Bu əlaqələrdən alınan nəticələrdən birinə əsasən $\tau_n(+)$ və θ_{n_-} təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları üst-üstə düşür.

Birinci faktorizasion eynilik. $|z| < 1$, $\rho < 1/|z|$, $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ olduqda

$$(1 - z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}\,(\rho^{\theta_{n_-}} \exp(i\lambda Y_n)) = \frac{A_{z_+}(0)}{A_{z\rho_+}(\lambda)}. \qquad (3)$$

Birinci F. e.-in nəticəsi:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\, \mathbf{M}(\exp(i\lambda Y_n);\ \theta_{n_-} = n) = \frac{1}{A_{z_+}(\lambda)}.$$

2. $$\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(\rho^{\theta_{n_-}} \exp(i\lambda Y_n)) \right] \times$$

$$\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}(\rho^{\theta_n^*} \exp(i\lambda Y_n^*)) \right] = \frac{1}{(1 - z)(1 - z\rho f(\lambda))}$$

3. $\rho = 1$ qiymətində (3)-dən Pollaçek–Spitser eyniliyi alınır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \, \mathbf{M} \exp(i\lambda Y_n) = \frac{A_{z_+}(0)}{(1-z)A_{z_+}(\lambda)} =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \, \mathbf{M} \exp(i\lambda \max(0, S_n)) \right\}.$$

4. $$\mathbf{M}(z^{\eta(+0)};\ Y > 0) = 1 - \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}\{S_n > 0\} \right\};$$

$$\mathbf{M}\eta(0) = \frac{1}{\mathbf{P}\{Y^* = 0\}}.$$

5. Aşağıdakı üç müddəa ekvivalentdirlər:

$$\mathbf{P}\{Y < \infty\} = 1, \quad \mathbf{P}\{Y = 0\} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_n > 0\}}{n} < \infty.$$

6. $$\mathbf{M}\, \rho^{\theta_{\infty -}} \exp(i\lambda Y) = \frac{A_{1+}(0)}{A_{\rho_+}(\lambda)},$$

$(\theta_{\infty -},\ Y)$ təsadüfi vektorunun paylanması sonsuz bölünən paylanmadır.

7. Əgər ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri simmetrikdirlərsə, onda

$$\mathbf{P}\{\theta_{n-} = n\} = \mathbf{P}\{Y_n = 0\} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2};$$

$$\mathbf{P}\{\eta(0) = n\} = \frac{\mathbf{P}\{Y_n = 0\}}{2n-1};$$

$$\mathbf{P}\{\theta_{n-} = k\} = \mathbf{P}\{\theta_{k-} = k\}\, \mathbf{P}\{Y_{n-k} > 0\}.$$

8. $r = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(1/2 - \mathbf{P}\{S_n > 0\})$ olsun. Əgər $|r| < \infty$ olarsa (buna görə kifayətdir ki, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 < \infty$ olsun və ya ξ_k -lar simmetrik təsadüfi kəmiyyətlər olsun), onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\theta_{n-}}{n} < \alpha \right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\tau_n(+0)}{n} < \alpha \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha}$$

(arksinus qanunu).

İkinci faktorizasion eynilik. $|z| < 1$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$ olduqda

$$1 - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{i\lambda x}\, d_x \, \mathbf{M}(z^{\eta(x)} e^{i\mu\chi(x)},\ \eta(x) < \infty) =$$

$$= \frac{A_{z_+}(\mu)}{A_{z_+}(\lambda)}. \qquad (4)$$

Bu halda belə razılaşdırılmışdır ki, inteqrallanan funksiyanın $x = 0$ nöqtəsində

$$\mathbf{M}(z^{\eta(+0)} e^{i\mu\chi(+0)};\ \eta(+0) < \infty)$$

kəmiyyətinə bərabər sıçrayışı vardır, $\lambda = \mu$ olduqda (4) eyniliyindəki inteqral $\lambda A'_{z_+}(\lambda) / A_{z_+}(\lambda)$ nisbətinə bərabər olur.

İkinci F. e.-in nəticələri:

1. $|z| \leq 1$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ olduqda

$$1 - \mathbf{M}(z^{\eta(0)} e^{i\mu\chi(0)};\ \eta(0) < \infty) = A_{z_+}(\mu).$$

2. Əgər $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$ olarsa, onda $\mathbf{M}_{\chi}(0)$ sonludur və $\mathbf{M}_{\chi}(0) = \sigma e^r / \sqrt{2}$.

3. Fərz olunur ki, Kramer şərti ödənilir ($\psi(\mu) = f(-i\mu)$ funksiyası hər hansı $0 < \operatorname{Re}\mu < \mu_+$ zolağında analitikdir) və fərz olunur ki, $\psi(\mu_+) > 1$ və $\lambda(z)$, – $\psi(\mu) = 1/z$, $0 < z < 1 \Big/ \inf_{\operatorname{Im}\lambda = 0} \psi(\mu)$ tənliyinin ən böyük köküdür. Onda $x > 0$ olduqda

$$\mathbf{M}(z^{\eta(x)} e^{\lambda(z)\chi(x)};\ \eta(x) < \infty) = e^{-\lambda(z)x}.$$

Məs.,

$$\mathbf{M}(z^{\eta(0)} e^{\lambda(z)\chi(0)};\ \eta(0) < \infty) = 1.$$

4. $\chi(x)$ və $\eta(x)$ asılı olmadıqda yalnız iki mümkün hal var:

a) $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\} = ce^{-\alpha x}$ $(c > 0,\ \alpha > 0,\ x > 0)$;

b) ξ_1-in tam qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = x\} = c\, p^{x-1} \quad (c > 0,\ p \geq 0,\ x = 1, 2, \ldots).$$

Bu hallarda uyğun olaraq

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n} f(n, x) + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{n} f(n, x) \right),$$

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\} +$$

$$+ \frac{p}{1-p}\left[\frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\} - \frac{x-1}{n} \mathbf{P}\{S_n = x-1\} \right],$$

burada $f(n, x) = \frac{d}{dx} \mathbf{P}\{S_n < x\}$, – S_n-in sıxlığıdır. $p = 0$ olduqda $(\xi_1 \leq 1)$, yəni dolaşma yuxarıdan semikəsilməz olduqda

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n} \mathbf{P}\{S_n = x\}.$$

Əgər $\mathbf{M}(e^{i\lambda\xi_1};\ \xi_1 < 0\}$ və ya $\mathbf{M}(e^{i\lambda\xi_1};\ \xi_1 > 0\}$ rasional funksiya olarsa, onda faktorizasiya komponentləri $1 - z f(\lambda)$ funksiyasının sıfırları və polyusları ilə aşkar şəkildə ifadə oluna bilinir (bax, [2]). ξ_1 tamqiymətli olduğu zaman $e^{i\lambda}$-nın rasional olması da tələb olunur. Bu sinifdən olan paylanmalar üçün təsadüfi dolaşmanın trayektoriyasının zolağı tərk etməsi ilə bağlı sərhəd funksiyalarının paylanmalarının ikiqat çevirmələrinin

komponentləri vasitəsilə ifadə olunan aşkar düsturlar da məlumdur (bax, [8]):

$$Q_0(z,\ \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\ \mathbf{M}(\ e^{i\lambda S_n};\ N\ > n),$$

$$Q_1(z,\ \lambda) = \mathbf{M}(\ z^N e^{i\lambda S_N};\ S_N\ \le -a),$$

$$Q_2(z,\lambda)\ = \mathbf{M}(z^N\ e^{i\lambda S_N};\ S_N\ \ge b),$$

burada $N = \min\{n : S_n \notin (-a, b)\},\ a>0,\ b>0$.

F. e. *Sərhəd məsələlərində* asimptotik analizin güclü vasitəsidir. Araşdırmalar, adətən, üç mərhələdə aparılır. Birinci mərhələdə araşdırılan sərhəd funksionallarının birgə paylanmalarının ikiqat və ya üçqat çevirmələrinin (fəza və zaman üzrə) faktorizasiya komponentləri ilə ifadə oluna bilən eynilikləri axtarılır. Sonra bu çevirmələr faktorizasiya komponentlərinin xüsusiyyətləri (sıfırları, polyusları, şaxələnmə nöqtələri) istifadə olunmaqla fəza dəyişəni üzrə çevrilirlər. Bu zaman doğuran funksiyaların asimptotik ifadələri adlandırılan ifadələr alınır. Bunların sonrakı analizi aşma metodunun (rus. метод перевала) modifikasiyası vasitəsilə həyata keçirilir. Bu halda yenə də faktorizasiya komponentlərinin analitik xassələrindən olduqca istifadə olunur. Nəticədə tam asimptotik ayrılışlar haqqında, böyük yayınmalar haqqında teoremlər də daxil olmaqla teoremlər alınmışdır.

Asimptotik analiz metodu A. A. Borovkovun işlərində təklif olunmuşdur (bax, [3]) və burada təsadüfi dolaşmalar trayektoriyasının birtərəfli sərhəddən kənara çıxması ilə bağlı sərhəd funksiyalarının asimptotikası araşdırılmışdır. Bu metodun sonrakı inkişafı iki sərhədli bir sıra sərhəd məsələlərinin həllinə səbəb olmuşdur (bax, [3], [4]).

F. e.-nin vasitəsilə çox sadə yollarla böyük ədədlər qanunu, arksinus qanunu və s. kimi müddəalar almaq olur. Bir çox F. e. və bunlarla bağlı olan sərhəd funksionallarının paylanmalarının araşdırmaları kəsilməz zamanlı və asılı olmayan artımlarlı bircins $\zeta(t)$ prosesləri üçün də tədqiq olunmuşdur (bax, [5], [6]). Bu halda $z/(z-\varphi(\lambda))$ funksiyası faktorizasiya olunur, burada $\varphi(\lambda) = \ln \mathbf{M}\exp(\lambda\zeta(1))$. Bir sıra nəticələr sonlu Markov zəncirləri vəziyyətlərində verilən təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [7]).

Ədd.: [1] Феллер В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; [4] Рогозин Б. А., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 6, с. 1334–63; [5] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 4, с. 656–70; [6] Лотов В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 475–85, в. 4, с. 873-79; [7] Пресман Э. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 4, с. 861–900; [8] Kemperman J. H. B., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 4, p. 1168–93.

FAKTORİZASİYA METODU « факторизации метод; factorization method » – yarımoxda Viner – Hopf tənliyinin həll versiyalarından biridir. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan ξ_k, $k \ge 1$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri – $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu təsadüfi dolaşmaların və ya asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ bircins təsadüfi prosesinin sərhəd funksionallarının araşdırılmasında F. m. *faktorizasion eyniliklərə* əsaslanmışdır.

$\varphi(s) = \mathbf{M}e^{it\xi_1}$, $\psi(s) = \ln \mathbf{M}e^{is\zeta(1)}$, $\mathrm{Im}\, s = 0$ olsun, onda A) $1 - z\varphi(s) = \varphi_+(s,\ z)\ \varphi_-(s,\ z)\ \varphi_0(s,\ z)$ bərabərliyi doğrudur, burada

$$\varphi_{\pm}(s,\ z) = \exp\left\{ \mp \int_{\pm 0}^{\pm\infty} e^{isx} dx \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\ \mathbf{P}\{S_k < x\} \right] \right\},$$

$$\varphi_0(s,\ z) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\ \mathbf{P}\{S_k = 0\} \right\}$$

və həm də

B) $\lambda[\lambda - \psi(s)]^{-1} = f_+(s,\ \lambda) f_-(s,\ \lambda)$ bərabərliyi doğrudur, burada

$$f_+(s,\ \lambda)\ =$$

$$= \exp\left\{ -\int_0^{\infty} (e^{isx} - 1)\, d\, x \int_0^{\infty} (\ e^{-\lambda t}\, t^{-1}\ \mathbf{P}\{\zeta(t) > x\} \right\} dt\ ,$$

$$f_-(s,\ \lambda) = \exp\left\{ \int_{-\infty}^{0} (e^{isx} - 1) dx \int_0^{\infty} (e^{-\lambda t} t^{-1}\, \mathbf{P}\ \{\zeta(t) \le x\} \right\} dt\ .$$

S_n cəmlərinin və $\zeta(t)$ prosesinin bir çox sərhəd funksionallarının xarakteristik funksiyaları faktorizasiya komponentləri terminləri ilə ifadə olunur. Məs., $S_n^+ = \sup_{0 \le m \le n} S_m$, $\zeta^+(t) =$ $= \sup_{0 \le u \le t} \zeta(t)$ funksionalları üçün uyğun olaraq,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\ \mathbf{M}\ e^{is S_n^+}\ = \varphi_+(0,\ z)/(1-z)\varphi_+(s,\ z)$$

– Pollaçek – Spitser eyniliyi,

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, \mathbf{M} e^{is\zeta^+(t)}\, dt\ = f_+(s,\ \lambda)$$

– Spitser – Roqozin eyniliyi alınmışdır.

Ədd.: [1] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 4, с. 656–70; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

FAKTORİZASİYA TEOREMİ « факторизационная теорема; factorization theorem » kafi statistikalar üçün – bax, *Kafi statistika*.

FAKTORLARIN QARŞILIQLITƏSİR EFFEKTİ « факторов эффект взаимодействия; interaction of factors » – faktor eksperimenti D-nin müşahidələrinin qarşılıqlı təsir effektli faktorlar vektoru əmələ gətirən əmsallarla xətti funksiyadır. Bu vektor induksiya ilə aşağıdakı kimi daxil olunur. Faktorun baş effekt vektoruna (bax, *Faktorun baş effekti*) sıfır tərtib qarşılıqlıtəsir effekt vektoru (və ya birfaktorlu qarşılıqlıtəsir vektoru) deyilir. N sınaqda D planının $F_1, ..., F_r$ faktorlarının $(r-1)$ – tərtib qarşılıqlıtəsir effekt

vektoru (və ya r – faktor qarşılıqlıtəsir effekt vektoru) elə $\mathbf{z} = \{z_1, ..., z_N\}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ vektoruna deyilir ki,

$$\sum_{i=1}^{N} z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} z_i^2 \neq 0.$$

$\mathbf{z}$ vektoru $F_1, ..., F_r$ faktorlarının $(r-2)$-ci tərtibə qədər, $(r-2)$-ci tərtib də daxil olmaqla bütün qarşılıqlıtəsir effektlər vektorlarına ortoqonal olsun və $\mathbf{z}$-in komponentləri D planının $F_1, ..., F_r$ faktorları eyni qiymətlər alan bütün müşahidələri üçün bərabər olsunlar. Əmsalları qarşılıqlıtəsir effektli faktorlar vektoru əmələ gətirən müşahidələrin riyazi gözləmələrinin xətti funksiyasına faktorların qarşılıqlıtəsirinin əsl effekti (rus. истинный эффект) deyilir.

Faktor eksperiment, *Faktorun baş effekti* məq.-dəki əd.-ta bax.

FAKTORSİSTEM (i) dinamik sistemin « **факторсистема** динамической системы; **factor quotient** of a dynamical system » – bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin* metrik.

FANO ALQORİTMİ « Фано алгоритм; Fano algorithm » – bax, *Ardıcıl dekodla(n)ma*.

FANO BƏRABƏRSİZLİYİ « Фано неравенство; Fano inequality » – rabitə kanalları üçün tərs *kodlama* teoremlərinin isbatında əsas yer tutan, informasiya nəzəriyyəsi bərabərsizliyidir. X, Y N sayda elementli eyni bir çoxluqdan qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər (asılı) olsun. $\rho = \mathbf{P}\{X \neq Y\}$ olsun, onda şərti (ikilik) entropiya $H(X|Y)$ yuxarıdan Fano bərabərsizliyi ilə qiymətlənir, yəni

$$H(X|Y) \leq \rho \log_2 (N-1) + h(\rho),$$

burada $h(\rho) = -\rho \log_2 \rho - (1-\rho)\log_2 (1-\rho)$.

F. b. informasiyanın rabitə kanalları ilə ötürülmə xətasının ehtimalı üçün yuxarı qiymətlənmələrinin alınmasında əsas vasitələrdən biridir.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник Б. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теория информации, М., 1982.

FAYDALILIQ FUNKSİYASI « полезностей функция; utility function » – üstünlük münasibətinin indikatorudur. Daha dəqiq: M – ixtiyari təbiətli elementlərin hər hansı çoxluğu, $\succeq$, – M-də verilmiş binar üstünlük münasibəti olsun. Əgər M-də təyin olunan elə U funksionalı olarsa ki,

$$a \succeq b \Leftrightarrow U(a) \geq U(b) \qquad (1)$$

münasibətini ödəsin, onda (1)-dəki U funksionalı üstünlük indikatoru və ya faydalılıq funksiyası adlanır.

Əgər U, V üstünlüklər meydanı $\{M, \succeq\}$ üçün iki indikatordursa (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*), onda elə ciddi artan $g(x)$ funksiyası vardır ki, $U(a) = g(V(a))$. Əgər M hər hansı $\{X, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmalarının hər hansı çoxluğudursa və (1) doğrudursa, M-dən olan ixtiyari $\mathbf{P}$ paylanması üçün

$$U(\mathbf{P}) = \int u(x)\, \mathbf{P}(dx) \qquad (2)$$

olarsa (u, – X-də hər hansı ölçülən funksiyadır), onda u funksiyasına, adətən, F. f. (2) funksionalının qiymətinə isə gözlənilən faydalılıq deyilir (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*).

«F. f.» anlayışı ilk dəfə D. Bernulli tərəfindən təyin olunmuşdur (bax, [1]): onun «Peterburq oyunu» məsələsinin analizində baxdığı «mənəvi gözləmə» anlayışı mahiyyəti etibarilə, gözlənilən faydalılıq anlayışı ilə üst-üstə düşür. F. f. haqqında müasir ifadələr C. Neyman və O. Morgenşternin işlərilə başlanmış hesab olunur.

Əd.: [1] Bernoulli D., Specimen theoriae novae de mensura sortis, «Comment. acad. sci. imper. Petrop.», 1738, t. 5, p. 175–92 (англ. пер.: «Econometrica», 1954, v. 22, № 1); [2] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [3] Фишберн П., Теория полезностей для принятия решений, пер. с англ., М., 1978.

FAYDALILIQ NƏZƏRİYYƏSİ « полезностей теория; utility theory » – ümumiyyətlə, ixtiyari təbiətli fəzalarda üstünlük münasibətlərinin təsviri üsullarına və formalaşdırılması prinsiplərinə aid nəzəriyyədir. Üstünlük münasibətləri konkret məsələlərdə, adətən, araşdırılan obyektin keyfiyyətinin bu və ya digər xarakteristikaları ilə uzlaşdırılır. Aşağıda əsas etibarilə ehtimal paylanmaları fəzalarında üstünlüklərə baxılır. Bu halda əsas məsələlərdən biri ondan ibarətdir ki, təsadüfi kəmiyyətin bu və ya digər mənada orta qiymətinin anlaşıldığı kimi (riyazi gözləmə, median və s.), təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin orta qiymətə nəzərən bu və ya digər səpələnmə xarakteristikaları da eyni zamanda nəzərə alınmalıdır. Başqa sözlə, sistemin orta göstəricilərinin dəyişməsi mümkünlüyü və eyni zamanda araşdırılan sistemin stabilliyi də nəzərə alınmalıdır.

F. n.-nin ilkin ideyalarına hələ D. Bernullinin işlərində təsadüf olunur (bax, [1]). Onun «Peterburq oyunu» məsələsində daxil etdiyi «mənəvi gözləmə» (rus. «нравственное ожидание») anlayışı mahiyyətcə gözlənilən faydalılıq anlayışı ilə üst-üstə düşür (bax, aşağıda bənd 4). Müasir F. n.-nə C. Neyman və O. Morgenşternin işlərilə başlanıldığı hesab olunur (bax, [2]).

1. **İlkin anlayışlar.** İxtiyari təbiətli elementlərin boş olmayan çoxluğu M-də – üstünlük münasibəti hər hansı $T \subset M^2$ çoxluğudur. Əgər $(a, b) \in T$ olarsa, onda $a \succ b$ (a, b-dən yaxşıdır) və əgər $(a, b) \notin T$ olarsa, onda $b \succeq a$ (a, b-dən yaxşı deyildir və b, a-dan pis deyildir). Aşağıda $\succ$ münasibəti zəif nizamlanma kimi, yəni asimmetrik ($a \succeq b \Rightarrow a \succeq b$) və mənfi tranzitiv ($a \succeq b,\ b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$) hesab olunur. Əgər $a \succeq b$ və $b \succeq a$ olarsa, tərifə görə $a \sim b$ (a, b-yə ekvivalentdir). Asimmetriyaya görə $a \succeq b \Leftrightarrow (a \succ b$ və ya $a \sim b)$. $\succeq$ münasibəti $\succ$ münasibətinə uyğun qeyri – ciddi üstünlükdür. $\{M, \succeq\}$ cütü üstünlüklər meydanı adlanır. $\sim$ münasibətinə əsaslanaraq M çoxluğunu ekvivalentlik siniflərinə ayırmaq olar və belə siniflərin fəzası M'-də $\succ$ münasibətinə uyğun $\succ'$ münasibətini daxil etmək olar.

2. **Hesablanılanlıq.** Əgər M-də təyin olunmuş elə U funksionalı varsa ki,

$$a \succeq b \Leftrightarrow U(a) \geq U(b)$$

münasibəti ödənilir, onda $\succeq$ münasibəti hesablanılan münasibət adlanır. U funksionalı üstünlük indikatoru və ya faydalılıq funksiyası adlanır.

Əgər U, V, – $\{M, \succeq\}$ üstünlüklər meydanının iki indikatorudursa, onda elə ciddi artan $g(x)$ funksiyası vardır ki, $U(a) = g(V(a))$.

Hesablanılanlıq aşağıdakı anlayışla əlaqəlidir. Əgər elə $H \subset M$ hesabi çoxluğu varsa ki, $a \succ b$ münasibətini ödəyən ixtiyari $a, b \in M$ üçün $a \succ h \succ b$ münasibətini ödəyən $h \in H$ elementi tapılarsa, onda $\succ$ münasibəti separabel münasibətdir, deyilir. Teorem 1: M-də $\succeq$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda hesablanılandır ki, M'-dəki $\succ'$ ciddi üstünlüyü separabel münasibət olsun, bu teorem doğrudur.

Misal. Əgər

$$\{(x, y) \succ^0 (x_1, y_1) \Leftrightarrow x > x_1 \text{ və ya } x = x_1 \text{ və } y > y_1\}$$

münasibəti ödənilərsə, $\succ^0$ münasibəti $\{(x, y)\}$ ədədlər cütü fəzasında – leksikoqrafik münasibət adlanır, bu halda hər bir ekvivalentlik sinfi bir nöqtədən ibarət olur, $\succ^0$ separabel münasibət olmur və deməli, hesablanılan münasibət də olmur.

3. **Affin üstünlük indikatoru.** M – affin fəza və ya qarışıqlar fəzası, yəni ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ və ixtiyari $a, b \in M$ üçün – «qarışıq» $\alpha a + (1 - \alpha) b \in M$ elementi təyin olunmuşdur və

$$1 \cdot a + 0 \cdot b = a, \quad \alpha a + (1 - \alpha) b = (1 - \alpha) b + \alpha a$$

və ixtiyari $\beta \in [0, 1]$ üçün

$$\alpha(\beta a + (1 - \beta) b) + (1 - \alpha) b = \alpha\beta a + (1 - \alpha\beta) b.$$

«Xətti» F. n.-nin əsas nəticələrindən biri teorem 2-dir:

Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

1^0 (asılı olmamazlıq şərti) – ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ və $c \in M$ üçün

$$\alpha \succeq b \Rightarrow a\alpha + (1 - \alpha) c \succeq ab + (1 - \alpha) c;$$

2^0 (Arximed şərti) – hər hansı $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ədədləri üçün

$$(\alpha \succ b, \ b \succ c) \Rightarrow \alpha a + (1 - \alpha) c \succ b, \ \ b \succ \beta a + (1 - \beta) c;$$

onda $\succeq$ – hesablanılan münasibətdir və onun indikatorları arasında affin funksional ola bilər, yəni elə U funksionalı tapıla bilinər ki, ixtiyari $\alpha \in [0, 1]$ üçün

$$U(\alpha a + (1 - \alpha) b) = \alpha U(a) + (1 - \alpha) U(b). \qquad (1)$$

4. **Gözlənilən faydalılıq.** $\{X, \mathcal{A}\}$ – ölçülən fəza, $\mathcal{A}$ isə bütün birnöqtəli çoxluqları özündə saxlayan σ – cəbr və $M = \mathcal{P}$, – X-də ehtimal paylanmalarının hər hansı ailəsi olsun. $\mathbf{P}_x$, – x nöqtəsində topalanmış paylanma olarsa, $\succeq$ münasibəti X fəzasında $x \succeq y \Leftrightarrow \mathbf{P}_x \succeq \mathbf{P}_y$ qaydasına görə üstünlük münasibəti doğurur. $\mathcal{P}$ bütün cırlaşmış paylanmaları özündə saxlayırsa və hesabi sayda qabarıq kombinasiyaların və şərti paylanmaların yaranmasına nəzərən qapalı olarsa, $\mathcal{P}$ məqbul ailə adlanır. Ehtimal paylanmaları halında teorem 2-ni teorem 3 dəqiqləşdirir; əgər $\mathcal{P}$ məqbul ailədirsə, $\succeq$ zəif nizamlanması isə $1^0 - 2^0$ xassələrindən başqa

$$\{\mathbf{P}(A) = 1, \ y \preceq x \text{ bütün } x \in A\} \Rightarrow \mathbf{P}_y \preceq \mathbf{P}$$

şərtini ödəyərsə, onda $\preceq$ hesablanılan münasibətdir və onun indikatorları arasında

$$U(\mathbf{P}) = \int u(x) \ \mathbf{P}(dx)$$

affin indikatoru tapılar, burada u, – X-də hər hansı ölçülən funksiyadır.

Ehtimal paylanmalarını müqayisə edərkən, u funksiyası – faydalılıq funksiyası, U funksionalının özü isə gözlənilən faydalılıq adlanır (digər yanaşmalar və mülahizələrə bax, вв. 5, 7, 8).

Teorem 2 – 3 F. n.-nə ordinalist yanaşma kimi adlandırılan yanaşmanı əks etdirir. Bu yanaşmanın tərəfdarları hesab edirlər ki, məqsədəuyğun sayılmalıdır ki, yalnız baxılan elementlər müqayisə edilsin və bunlara heç bir konkret faydalılıq qiymətləri yazılmasın. Bu zaman üstünlük münasibətinin hesablanılanlıq faktı işin mahiyyətini dəyişmir, belə ki, bir münasibətə indikatorların sonsuz çoxluğu uyğun olur. Göstərilən yanaşma çərçivəsində teoremlərin şərtləri münasibətlərin öz terminlərilə ifadə olunur, bu və ya digər indikatorun varlığı haqqında hökm yalnız münasibətin xarakterizasiyası kimi anlaşılır, funksionalın özü isə önəm daşımır.

Digər – marginalist – yanaşmanın tərəfdarları elementlərin «keyfiyyət ölçmə» funksionalının varlığını əvvəlcədən fərz etmək mümkün olması hallarını istisna etmirlər. Bu zaman funksionalın özünün bu və digər postulatlaşdırılan xassələrinə əsaslanaraq funksionalın şəkli təyin olunur. Məs., elə hallar mümkün ola bilər ki, baxılan hadisə və ya prosesin təbiətinin keyfiyyətcə və verilənlərin analizinə görə öyrənilməsinə əsaslanan (1) affinlik şərtinin ödənilməsinin bilavasitə yoxlanılması $1^0 - 2^0$ şərtlərinin yoxlanılmasından daha sadə ola bilər, çünkü, (1) şərti aşağıdakı sadə şəkildə interpretasiya oluna bilir: a elementi M-dən seçildiyi halda randomlanmış strategiyalar ola bilər; onda (1) α ehtimalı ilə a-nın alınmasına səbəb olan, $(1 - \alpha)$ ehtimalı ilə b-yə gətirən strategiya seçildikdə bir çox hallarda faydalılıq qiymətlərinə təbii tələbatı ifadə edir.

Bundan sonrakı müddəalar göstərilən yanaşmalardan ikincisini əks etdirir.

5. **Kəsilməzlik şərti.** Bu şərtlər paylanmaların özlərinin bu və ya digər mənada yaxınlığı halında faydalılıqların yaxınlığı haqqında təsəvvürlə bağlıdırlar. $\mathcal{F}$ – ədəd oxunda F paylanmalarının hər hansı ailəsi; $\succeq$, – $\mathcal{F}$-də verilmiş üstünlük münasibəti, U funksionalı $\succeq$ münasibətinin indikatoru olsun. Aşağıdakı şərtlərə baxılır.

A1 şərti: U funksionalı paylanmaların zəif yığılmasına nəzərən kəsilməzdir.

A2 şərti: əgər ixtiyari A Borel çoxluğu üçün $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{F}_n(A) \to \mathbf{F}(A)$ olarsa, $U(\mathbf{F}_n) \to U(\mathbf{F})$ münasibəti doğrudur. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 4: əgər paylanmalar ailəsi $\mathcal{F}$ məqbul ailədirsə, $\mathcal{F}$-də təyin olunmuş U affin funksionalı isə A2 şərtini ödəyirsə, onda

$$U(\mathbf{F}) = \int u(x) \ \mathbf{F}(dx). \qquad (2)$$

Əgər A1 şərti də ödənilərsə, onda (2)-dəki faydalılıq funksiyası u kəsilməzdir.

U funksionalının kəsilməz olduğu topologiyanı bir qədər də zəiflətməklə, (2)-dəki faydalılıq funksiyası u üçün daha müəyyən xassələrə nail olunur. Məs., əgər sonlu riyazi gözləmələrə malik hər hansı paylanmalar ailəsi ilə kifayətlənərək, U əvəzinə $\int |F(x)-G(x)|\,dx$ inteqral metrikasında kəsilməz, affin funksionallara baxılarsa, onda (2)-dəki faydalılıq funksiyası u Lipşits şərtini ödəyir (bu zaman Lipşits sabiti funksionalın normasına bərabər olur).

6. **«Artım və stabillik» üçün şərtlər.** Burada ixtiyari F paylanması gözlənilən gəlir təsadüfi kəmiyyətinin paylanması kimi interpretasiya olunur. Belə interpretasiya yalnız mülahizələrin münasibliyi ilə bağlıdır, əslində isə növbəti müddəalar müxtəlif tətbiqlərdə istifadə olunur.

$F(x)$, – $\mathbf{F}$ tip paylanma funksiyası olsun. Qeyd olunan interpretasiyada təbii olaraq aşağıdakı şərtlər daxil olunur:

B1 şərti (1-ci növ stoxastik dominarlanma şərti):

Əgər $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}\in\mathscr{F}$ və bütün x-lər üçün

$$F(x)\le G(x) \tag{3}$$

olarsa, onda $\mathbf{F}\succeq\mathbf{G}$;

B2 şərti («stabilliyə yaxınlaşma»): əgər $\mathbf{F},\mathbf{G}\in\mathscr{F}$ – ümumi simmetriya mərkəzi m olan simmetrik paylanmalar və $x\le m$ olduqda $F(x)\le G(x)$ olarsa, onda $\mathbf{F}\succeq\mathbf{G}$. [Əgər $F(m-x)=1-F(m+x+0)$ bərabərliyi bütün $x>0$-lər üçün ödənilərsə, $\mathbf{F}$ paylanması m mərkəzi ilə simmetrik paylanma adlanır].

Misal. $\mathscr{F}$ – riyazi gözləməsi m, dispersiyası σ^2 olan bütün $\Phi_{m\sigma}$ normal paylanmalarından ibarət ailə olsun. Onda B1 – B2 şərtləri məsələni (m,σ^{-1}) cütləri fəzasında elə üstünlüklər münasibətlərinin araşdırılmasına gətirir ki, bunlar adi hissəvi vektor nizamlanması, yəni $\ge$ münasibətinə zidd olmur.

Paylanmaların kifayət qədər geniş siniflərinə baxıldıqda dispersiya stabillik üçün «yaxşı» xarakteristika olmur, bu aşağıdakı müddəadan aydın olur. $m_{\mathbf{F}}$ və $\sigma^2_{\mathbf{F}}$, – $\mathbf{F}$ paylanmasının uyğun riyazi gözləməsi və dispersiyası, $U(\mathbf{F})=f(m_{\mathbf{F}},\sigma_{\mathbf{F}})$ funksional olsun, burada f funksiyası: $\partial f(x,y)/\partial x>0$, $\partial f(x,y)/\partial y<0$ şərtlərini ödəyir (B1 – B2 şərtlərinə baxdıqda sonuncu şərt təbiidir). Onda ixtiyari $\mathbf{G}$ paylanması üçün elə $\mathbf{F}$ paylanması tapılar ki, (3) ödənilər, lakin $U(\mathbf{F})<U(\mathbf{G})$ olar.

Əgər (2) hər hansı, konkret faydalılıq funksiyası u ilə doğru olarsa, $\mathscr{F}$ isə (2)-nin sağ tərəfi sonlu olan paylanmalar ailəsi olarsa, onda B1 şərti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, faydalılıq funksiyası u azalmayan, B2 şərti isə, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, faydalılıq funksiyası u – yuxarı qabarıq olsun.

7. **«Paylanmaların ortalanması» ilə bağlı şərtlər.**

Hesablanılan üstünlük münasibəti monoton çevirmə dəqiqliyi ilə indikator doğurduğundan, affinlik şərti təbii olaraq elə zəiflənməlidir ki, monoton çevirmə dəqiqliyi ilə affin funksionallara keçid mümkün olsun. Aşağıdakı C şərtinə baxıldığı fərz olunur:

$\mathbf{Q}$ ixtiyari paylanma olarsa, $U(\mathbf{F})=U(\mathbf{G})$ şərtini ödəyən ixtiyari $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ paylanmaları üçün

$$U((\mathbf{F}+\mathbf{Q})/2)=\mathbf{U}((\mathbf{G}+\mathbf{Q})/2)$$

bərabərliyi doğrudur. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. Əgər $\mathscr{F}$ – bütün paylanmaların fəzası, U funksionalı A 2, B 1 və C şərtlərini ödəyərsə, onda elə ciddi artan v funksiyası və azalmayan u funksiyası tapılar ki,

$$U(\mathbf{F})=v\left(\int u(x)\,F(dx)\right). \tag{4}$$

Əgər A 1 şərti ödənilərsə, onda v və u kəsilməz funksiyalardır. Əgər «determinik gəlirin faydalılığı gəlirin özü ilə ölçülürsə», yəni bütün x-lər üçün

$$U(\mathbf{E}_x)=x \tag{5}$$

olarsa (burada $\mathbf{E}_x$, – x-də topalanmış paylanmadır), onda

$$U(\mathbf{F})=u^{-1}\left(\int u(x)\,\mathbf{F}(dx)\right), \tag{6}$$

burada u^{-1}, – u-ya tərs funksiyadır. $\mathscr{F}$-in daralması və əlavə şərtlərin daxil edilməsi (4)-ü konkretləşdirməyə imkan verir.

Misal (Masse kriterisi). $\mathscr{F}$ – eyni bir sonlu parçada topalanmış paylanmalar ailəsi, $u(x)=\exp\{cx\}$, $c>0$ olsun. Onda (6) aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$U(\mathbf{F})=\frac{1}{c}\ln\left(\int e^{cx}\mathbf{F}(dx)\right).$$

Sonuncu kriteri yeganə kriteridir ki, C, A 1 və

$$U(\mathbf{F}*\mathbf{G})=U(\mathbf{F})+U(\mathbf{G})$$

şərtlərini ödəyir, burada $*$ – kompozisiya əməlidir. Digər ortalama əməli, bilavasitə paylanmaların riyazi gözləmələrinə gətirir. ξ və η – paylanmaları uyğun olaraq, $\mathbf{F}$ və $\mathbf{G}$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $(\xi+\eta)/2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}$ simvolu ilə işarə edilmişdir (aşağıda). «$\circ$» əməlini kompozisiya əməlinə nəzərən ortalama adlandırmaq olar. Aşağıdakı D şərtinə baxılır: $U(\mathbf{F})=U(\mathbf{G})$ olarsa, onda $U(\mathbf{F}\circ\mathbf{G})=U(\mathbf{F})$.

Aşağıdakı teorem doğrudur. Teorem 6: $\mathscr{F}$ paylanmalar ailəsi $\circ$ əməlinə görə qapalı olsun və fərz olunur ki, bütün $\mathbf{F}\in\mathscr{F}$-lər üçün sonlu riyazi gözləmə $m_{\mathbf{F}}$ mövcuddur; $\mathscr{F}$-də təyin olunmuş U funksionalının A 1, B 1 və D şərtlərini ödədiyi fərz olunur; onda v hər hansı kəsilməz azalmayan funksiya olduqda, $U(\mathbf{F})=v(m_{\mathbf{F}})$. Əgər (5) ödənilərsə, onda bu sonuncu teorem çərçivəsində $U(\mathbf{F})=m_{\mathbf{F}}$. Teorem 6-nın tətbiqini yalnız o halda faydalı hesab etmək olar ki, $\mathscr{F}$ çoxluğu bir o qədər də «zəngin» olmasın, məs., $m_{\mathbf{F}}$ funksionalı $\mathscr{F}$-də kəsilməz olduqda. Bu 6 teoreminin nəticəsindən aydındır: əgər $\mathscr{F}$ sonlu riyazi gözləmələrə malik bütün paylanmaların çoxluğu, U funksionalı isə A1 və D şərtlərini ödəyərsə, onda $U(\mathbf{F})=\text{const}$.

8. **Qeyri – xətti funksionallar və müqayisəedici faydalılıq.** Affin indikatorlarla təsvir olunan üstünlüklər münasibətləri nisbətən dar sinif təşkil edir. «Affinlik şərtlərini» ödəməyən münasibətə nümunə *Alle paradoksudur.* «Affin» olmayan, lakin daha çevik üstünlüklər münasibətlərinin təsviri bilavasitə qeyri – xətti funksionallara keçiddən ibarətdir, məs., n tərtib formalara:

$$U(\mathbf{F}) = \int ... \int u(x_1, ..., x_n)\, \mathbf{F}(dx_1) ... \mathbf{F}(dx_n). \qquad (7)$$

(7)-nin interpretasiyalarından biri aşağıdakı kimi ifadə olunur. Fərz olunur ki, gəlir götürmənin variantı uyğun $\mathbf{F}$ bir-birindən asılı olmayaraq n dəfə istifadə olunur, ξ_j, – j -ci dəfə alınan gəliri ifadə edən təsadüfi kəmiyyətdir və determinik gəlirlər ardıcıllığının faydalılığı faydalılıq funksiyası $u(x_1, ..., x_n)$ ilə ölçülür. Onda (7) $(\xi_1, ..., \xi_n)$ ardıcıllığının gözlənilən faydalılığıdır. Xüsusi halda,

$$u(x_1, ..., x_n) = (u(x_1) + ... + u(x_n))/n$$

bərabərliyi ilə təyin olunan faydalılığın orta qiyməti anlamında (7) formasından (2) alınır, burada $u(z)$ – determinik z gəlirinin faydalılığıdır.

İkinci yanaşmada $X \times X$ fəzasında (determinik alternativlər cütləri fəzasında, bax, bənd 4) müqayisəedici faydalılıq funksiyası $u(x, y)$ daxil edilir; bu funksiya «x alternativinin y-dən nə qədər yaxşı olmasını» ifadə edir. X-də nizamlanma formalarından biri kimi

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x, y) \geq w(y)$$

münasibətini vermək olar, burada w – hər hansı «sədd» funksiyasıdır. Bu formanın interpretasiyalarından biri, əgər «üstünlük intensivliyi hər hansı səddi keçirsə», alternativlərin fərqli olması təsəvvürü ilə bağlıdır. Digər, bəzi səbəblərə görə daha mühüm interpretasiya seçimin dayanıqlılığı ilə bağlıdır. Bu halda fərz olunur ki, $w(y) = u(y, y)$ və bu zaman $u(x, y)$ kəmiyyəti y-in x-lə əvəzlənməsindən faydalılıq kimi, $u(y, y)$ kəmiyyəti isə y alternativinin qorunub saxlanılmasının faydalılığı kimi interpretasiya olunur, modelin özü isə nisbi faydalılıq və ya şərti faydalılıq modeli adlanır.

Bu anlayışların (X, χ) fəzasında ehtimal paylanmaları ailəsi $\mathscr{P}$ halına köçürülməsi (bax, [4]) gözlənilən müqayisəedici faydalılığın ümumi modeli üçün

$$\mathbf{P} \succeq \mathbf{Q} \Leftrightarrow \iint u(x, y)\mathbf{P}(dx)\,\mathbf{Q}(dy) \geq \int w(y)\,\mathbf{Q}(dy)$$

qaydasının və gözlənilən nisbi müqayisəedici faydalılığın modeli üçün

$$\mathbf{P} \succeq \mathbf{Q} \Leftrightarrow \iint u(x, y)\,\mathbf{P}(dx)\,\mathbf{Q}(dy) \geq$$

$$\geq \iint u(x, y)\mathbf{Q}(dx)\,\mathbf{Q}(dy)$$

qaydasının daxil edilməsindən ibarətdir.

Əgər sədd funksiyası $w(y) \equiv 0$ olarsa, onda yuxarıda qeyd olunan mənada $\mathbf{P}$ paylanmasına ekvivalent çırlaşmış paylanma axtarışı $\mathbf{P}$ paylanmasına nəzərən determinik y alternativinin müqayisəedici faydalılığının orta qiyməti $g(y) = \int u(x, y)\,\mathbf{P}(dx)$ funksiyası ilə bağlı olur. Məs., $\mathscr{P} = \mathscr{T}$ – ədəd oxunda paylanmalar ailəsi olsun (bax, bənd 5). Onda

$$\int u(x, y)\,\mathbf{F}(dx) = 0 \qquad (8)$$

tənliyinin həlli determinik gəlirdir və onun müqayisəedici orta qiyməti paylanması $\mathbf{F}$ olan təsadüfi gəlirə nəzərən sıfra bərabərdir.

$\mathscr{T}$ məqbul ailə olarsa (bax, bənd 4) və burada təyin olunmuş U funksionalı (5), A 1, B 1 şərtlərini və həmçinin aşağıdakı şərti ödəyərsə: əgər $U(\mathbf{F}) = U(\mathbf{G})$ olarsa, onda $U((\mathbf{F} + \mathbf{G})/2) = U(\mathbf{F})$ (C şərti ilə müqayisə et) şərtlərini ödəmiş olsun. Onda $U(\mathbf{F})$ (8) tənliyinin həllidir, $u(x, y)$ funksiyası isə hər iki arqumentinə görə kəsilməzdir, x-ə görə artandır və $u(x, x) = 0$.

Əd.: [1] Bernoulli D., «Comment. acad. sci. imper. Petrop.», 1738, t. 5, p. 175–92 (англ. пер.: «Econometrica», 1954, v. 22, № 1); [2] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., M., 1970; [3] Debreu G., Theory of value, N. Y. – L., 1959; [4] Фишберн П., Теория полезностей для принятия решений, пер. с англ., M., 1978; [5] Кирута А. Я., Рубинов А. M., Яновская Е. В., Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах, Л., 1980; [6] Handbook of mathematical psychology, v. 1–3, N. Y. – L., 1963–65; [7] Allais M., «Econometrica», 1953, v. 21, № 4, p. 503–46; [8] Смоляк С. А., в св.: Модели и методы стохастической оптимизации, M., 1983, с. 181–212.

FAZA « фаза; phase », faza spektri, qarşılıqlı faza spektri, faza sıxlığı, faza yerinidəyişməsi, – λ tezliyində, $-\infty < \lambda < \infty$ iki stasionar $X(t)$ və $Y(t)$ təsadüfi prosesləri arasında

$$F_{XY}(\lambda) = \arg f_{XY}(\lambda) = \operatorname{arctg}\,[-\operatorname{Im} f_{XY}(\lambda)/\operatorname{Re} f_{XY}(\lambda)]$$

ifadəsi ilə təyin olunan kəmiyyətdir, burada $f_{XY}(\lambda)$, – $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin qarşılıqlı spektral sıxlığıdır. Əgər təsadüfi proseslər öz aralarında xətti çevirmə ilə bağlı olarsa, onda $F_{XY}(\lambda)$ kəmiyyətini bir prosesin digərinə nəzərən faza üzrə yerinidəyişməsi kimi interpretasiya etmək olar və yerinidəyişmədə $X(t)$ və $Y(t)$ prosesləri arasında koherentlik əmsalının λ tezliyində maksimum qiymətini alınır.

Bax, *Ötürücü funksiya*.

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., M., 1980; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 2, M., 1972; [3] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., M., 1974.

FAZA DİAQRAMI « фазовая диаграмма; phase diagram » – Gibbs meydanının potensialını (məs., tərs β temperaturu və kimyəvi μ potensialını) ifadə edən parametrlərin bu parametrli ekstremal Gibbs təsadüfi meydanları sayından asılılığını illüstrasiya edən qrafikdir.

FAZA FƏZASI Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin **« фазовое пространство** цепи Маркова или марковского процесса; **state space** of a Markov chain or a Markov process **»** – *Markov zənciri və ya Markov prosesinin vəziyyətləri çoxluğudur (fəzasıdır).*

FAZA FƏZASI təsadüfi prosesin **« фазовое пространство** случайного процесса; **state space** of a random / stochastic process **»**, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$, $t \in T$

(T – hər hansı parametrik çoxluqdur) təsadüfi prosesinin faza fəzası, – ölçülən $(M, \mathscr{B})$ fəzasıdır, bu fəzada $\zeta(t, \cdot)$ təsadüfi elementi t -nin hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ qiymətində öz qiymətlərini $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasının ölçülən $(M, \mathscr{B})$ fəzasına inikası kimi alır. T ə s a d ü f i p r o s e s i n v ə z i y y ə t l ə r f ə z a s ı termini də eyni mənada anlaşılır. Əgər F. f. hər hansı əlavə strukturlarla verilərsə, onda, adətən, bu strukturların ölçülən fəzanın strukturu ilə uzlaşdırıldığı fərz olunur (məs., M metrik fəzadırsa, onda $\mathscr{B}$ bir qayda olaraq, M -in Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir).

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., M., 1985.

FAZA KEÇİDİ « фазовый переход; phase transition » – maddənin termodinamik parametrlərinin kəsilməz surətdə dəyişməsi nəticəsində onun makroskopik xassələrinin sıçrayışvari dəyişməsindən ibarət təzahürdür.

F. k.-nin ciddi riyazi tərifini statistik mexanikanın bərabərçəkili vəziyyətlərini təsvir edən *Gibbs təsadüfi meydanları* nəzəriyyəsi çərçivəsində vermək olar. $\mathscr{U}_\lambda$ – şəbəkəvari sistemin həqiqi $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ parametrindən asılı *potensialları* ailəsi olsun. Sadəlik üçün fərz olunur ki, meydanın qiymətləri fəzası X sonludur və indekslərin ixtiyari sonlu çoxluğu A və ixtiyari $x_A \in X^A$ konfiqurasiyası üçün $\mathscr{U}_A^\lambda(x_A)$ funksiyası λ -nın həqiqi analitik funksiyasıdır. Əgər potensialı $\mathscr{U}^\lambda$ olan Gibbs təsadüfi meydanlarının ehtimal paylanmalarının elə $\mathbf{P}^\lambda$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ ailəsi vardırsa ki, realizasiyanın hər hansı silindrik funksiyası φ-nin (yəni sonlu sayda dəyişənlərdən asılı φ-nin) $\mathbf{P}^\lambda$ ölçüsü üzrə orta qiyməti $\langle \varphi \rangle^\lambda$ λ-nın funksiyası kimi λ_0 nöqtəsində analitik xüsusiyyətlərə malik olsun (yəni λ_0 nöqtəsinin heç bir ətrafında həqiqi analitik funksiya olmasın), $\mathscr{U}^{\lambda_0}$ ($\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$) potensialı $\mathscr{U}^\lambda$ istiqamətində F. k. nöqtəsidir, deyilir. Kəsilməz sistemlər üçün və ixtiyari X fəzası ilə verilən şəbəkəvari sistemlər üçün də F. k. nöqtəsi analoji təyin olunur.

Əgər $\langle \varphi \rangle^\lambda$ orta qiyməti sonlu həcmdə Gibbs paylanması üzrə hesablanarsa, onda $\langle \varphi \rangle^\lambda$ həmişə λ -nın analitik funksiyası olur. Beləliklə, F. k.-nin ciddi riyazi tərifi yalnız sonsuz sistemlər dilində verilə bilinər, bu sistemlər isə *termodinamik limit keçidindən* sonra yaranır.

Əgər λ_0 elə nöqtə olarsa ki, $\mathscr{U}^\lambda$ potensiallı bütün ekstremal Gibbs paylanmalarının çoxluğunun gücü λ_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafında sabit deyildir, onda analitik funksiyanın yeganə surətdə davam olunmasından $\mathscr{U}_{\lambda_0}$ -ın $\mathscr{U}_\lambda$ istiqamətində F. k. nöqtəsi olduğu alınır. Baxılan F. k. nöqtələrinin əksəriyyəti belə təbiətə malik nöqtələrdir, məs., İzinq modelinin F. k. nöqtələri. Odur ki, F. k.-nin tədqiqi məsələsi *faza diaqramının* forması haqqında məsələ ilə sıx əlaqədardır. Belə bir hipotez vardır ki, F. k. nöqtəsinin ətrafında Gibbs vəziyyəti yeganə olan F. k.-inə malik sistem Heyzenberq XY – modelindən alınır, lakin bu modeldə pozulmaların olması analitik olaraq isbat olunmamışdır.

Əgər F. k. $\langle \varphi \rangle^\lambda$ funksiyalarından birinin λ_0 nöqtəsi ətrafında sıçrayışvari dəyişməsi ilə baş verirsə, onda F. k. birinci növ F. k.-dir, deyilir. F. k.-ləri korrelyasion funksiyaların (məs., Heyzenberq modelində) asimptotik azalması sürətinin dəyişməsi ilə və qeyri – trivial limit avtomodel paylanmaların yaranması ilə bağlı olur.

Korrelyasion tənliklər metodu və ya klaster ayrılışı metodundan istifadə edərək, β tərs temperaturunun olduqca kiçik qiymətləri üçün, həmçinin μ kimyəvi potensialının (güclü seyrəklənmiş qazlar) olduqca böyük mənfi qiymətləri üçün F. k.-nin olmadığını isbat etmək olur. Birölçülü sistemlərin geniş sinfində F. k. yoxdur.

F. k.-nin varlığı haqqında riyazi nəticələr daha çox xüsusi xarakter daşıyır. Daha tam surətdə yalnız ferromaqnit *İzinq modeli* öyrənilmişdir. $\beta = \infty$ olduqda (yəni sıfır temperaturda) meydanları təsvir edən *əsas vəziyyətlərin* araşdırılması və kükrəntilər nəzəriyyəsi metodlarının ardıcıl tətbiqi hesabına alınan, β-nın olduqca böyük qiymətlərində baş verən F. k. strukturu ən yaxşı anlaşılan hesab olunur. Burada alınan nəticələrdən ən ümumisi *Piroqov – Sinay teoremidir*.

Kristal strukturlu maddənin yaranması ilə bağlı kəsilməz sistemlərdə, μ-nün olduqca böyük qiymətlərində F. k.-nin varlığı haqqında mülahizə isbat olunmamışdır.

F. k.-ləri yalnız Gibbs təsadüfi meydanları üçün tipik olmayıb, çoxkomponentli təsadüfi sistemlərin digər modelləri üçün də, məs., qarşılıqlıtəsirə malik Markov proseslərində də yaranır. F. k.-ləri bioloji sistemlərin riyazi modelləri, texniki sistemlər (təsviretmə, məlumatları ötürmə sistemləri), iqtisadi sistemlərdə və s.-də yaranır.

Əd.: [1] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [2] П р е с т о н К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1971; [3] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [4] С и н а й Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [5] L i g g e t t, T h o m a s M., Interacting particle system, N. Y. – [a. o.], 1985.

FAZA MODULYASİYASI « фазовая модуляция; phase modulation » – bax, *Tezlikli – modulyar ossilyasiya*, *Modulyasiya və demodulyasiya.*

FAZA SIXLIĞI « фазовая плотность; phase density » – bax, *Faza*.

FAZA SPEKTRİ « фазовый спектр; faza spectrum » – bax, *Faza.*

FAZA TEZLİK XARAKTERİSTİKASI « фазовая частотная характеристика; phase frequency characteristic » – bax, *Ötürücü funksiya*.

FAZA YERİNİDƏYİŞMƏSİ « фазовый сдвиг; phase shift / displacement » – bax, *Ötürücü funksiya*, *Faza.*

FAZACA MODULYAR RƏQS / OSSİLYASİYA « фазово – модулированное колебание; phase – modulated oscillation » –

$$X(t) = A \sin(\omega_0 t + a(t)) \qquad (*)$$

şəklində *təsadüfi prosesdir*, burada ω_0 – yüksək aparıcı tezlik, $a(t)$ – modulyasiyalayıcı aşağıtezlikli təsadüfi prosesdir və bu prosesin qiymətlərinə əsas əlavələr ω_0 -dan çox kiçik olan tezliklər sayəsində baş verir.

F. m. r. radiotexnikada və rabitə texnikasında informasiyanın ötürülməsi və digər tətbiqi məqsədlər üçün geniş istifadə olunur (bax, məs., [1] – [4]); bu halda $a(t)$ təsadüfi prosesinin əksər hallarda, heç olmasa stasionar artımlarlı və ya stasionar proses olduğu fərz olunur. (*) prosesi hətta $a(t)$ stasionar proses

olduqda belə qeyri – stasionar prosesdir (lakin kompleks stasionar prosesin həqiqi hissəsidir; bax, [4], [5]). Geniş şərtlər daxilində $X(t)$ prosesinin *ortalanmış korrelyasion funksiyası*, *ortalanmış spektral sıxlığı* və *ortalanmış spektral funksiyası* vardır (və $X(t)$ asimptotik stasionar prosesdir və bu o mənada anlaşılır ki, onun üçün

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\, X(t+\tau)X(t) = B_0(\tau)$$

limiti vardır və bu limit ortalanmış korrelyasion funksiya ilə üst-üstə düşür). Ortalanmış korrelyasion $B_0(\tau)$ funksiyası və onun Furye çevirməsi $f_0(\lambda)$ – ortalanmış spektral sıxlığı (başqa sözlə, ortalanmış güc spektri) – üçün hesablamalar modulyasiyalayıcı $a(t)$ proseslərinin müxtəlif sinifləri üçün aparılmışdır (bax, məs., [1] – [8]). Məs., əgər $a(t)$ stasionar artımlarlı Qauss təsadüfi prosesidirsə və onun orta qiyməti sıfra bərabər, struktur funksiyası isə

$$\mathbf{M}\,[\,X(t+\tau) - X(t)]^2 = D(\tau)$$

olarsa, onda geniş şərtlərlə

$$B_0(\tau) = 0{,}5\, A^2\, e^{-D(\tau)/2} \cos\omega_0\tau,$$

$$f_0(\lambda) = 0{,}25\, A^2\{G(\lambda-\omega_0) + G(\lambda+\omega_0)\}$$

olur, burada

$$G(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\{-D(\tau)/2\}\cos\lambda\tau\, d\tau\,.$$

$a(t)$ Viner prosesi olduğu xüsusi halda $D(\tau) = \sigma^2|\tau|$ (bax, [9]), odur ki, burada

$$f_0(\lambda) = \frac{A^2\sigma^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{(\lambda-\omega_0)^2+\sigma^4/4} + \frac{1}{(\lambda+\omega_0)^2+\sigma^4/4}\right\}.$$

Faza modulyasiyası, yəni hər hansı verilmiş $a(t)$ təsadüfi prosesinə mütənasib olan rəqs fazasının fluktuasiyalarının yaranması bucaq modulyasiyanın mühüm tipidir (bax, *Tezlikli – modulyar ossilyasiya*).

Əd.: [1] М и д д л т о н Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 2, М., 1962; [2] Л е в и н Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, 2 изд., М., 1974; [3] В а н Т р и с Г. Л., Теория обнаружения оценок и модуляция, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [4] P a p o u l i s A., Probability random variables and stochastic processes, 2 ed., N. Y. – [a. o.], 1984; [5] P a p o u l i s A., «IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.», 1983, v. 31, № 1, p. 96–105; [6] P a p o u l i s A., «Trans. 9-th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Rand. Processes», 1983, V. B, p. 105–11; [7] Х а р к е в и ч А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [8] Z a d e h L. A., «Proc. IRE», 1951, v. 39, № 4, p. 425–28; [9] W i e n e r N., W i n t n e r A., «Nature», 1958, v. 181, № 4608, p. 561–62.

FEFFERMAN BƏRABƏRSİZLİYİ « Феффермана неравенство; Fefferman inequality » – bax, *Martinqal*.

FELLER HƏLLİ s t o x a s t i k d i f f e r e n s i a l t ə n l i y i n **« феллеровское решение** с т о х а с т и ч е с к о г о д и ф ф е р е н ц и а л ь н о г о у р а в н е н и я; **Feller solution** o f a s t o c h a s t i c d i f f e r e n t i a l e q u a t i o n **»** – elə $(\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ *Feller prosesidir* ki, hər bir $x\in\mathbb{R}^d$ üçün $\mathbf{P}_x$ –

$$d\zeta_t = \sigma(\zeta_t)\, dW_t + b(\zeta_t)\, dt \qquad (*)$$

tənliyinin zəif həllidir. F. h. aşağıdakı hallarda mövcuddur (σ və b -nin məhdud olduğu fərz edilir):

1) əgər σ və b Lipşits şərtini ödəyərlərsə,

2) əgər $\sigma\sigma^*/2$ müntəzəm müsbət olarsa,

3) (sərhədli stoxastik differensial tənlik üçün) əgər $\sigma\sigma^*/2$ sərhəd xaricində və aparı əmsalı isə sərhəddə müntəzəm müsbət olarsa.

1) halında (*)-nun həlli güclü yeganə həldir və onun paylanması Feller prosesidir. 2) və 3) hallarında yeganəlik olmaya da bilər və F. h. bütün həllər çoxluğundan seçilir.

Əd.: [1] К р ы л о в Н. В., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1973, т. 37, № 3, с. 691–708; [2] К р ы л о в Н. В., С а ф о н о в М. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 245, № 1, с. 18–20; [3] А н у л о в а С. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», т. 50, № 2, с. 211–41.

FELLER KEÇİD FUNKSİYASI « феллеровская переходная функция; Feller transition function » – bax, *Keçid funksiyası*, M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n.

FELLER MARKOV ZƏNCİRİ « феллеровская цепь Маркова; Feller Markov chain » – bax, *Feller prosesi*.

FELLER PROSESİ « феллеровский процесс; Feller process » – ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında verilən bircins ζ *Markov prosesidir*, burada $\mathscr{E}$ – topoloji fəza, $\mathscr{B}$ – bu fəzada Borel çoxluqları çoxluğu, $p(t, x, \Gamma)$, $t\ge 0$, $x\in\mathscr{E}$, $\Gamma\in\mathscr{B}$, – ζ prosesinin Feller keçid funksiyasıdır, yəni $t\ge 0$

$$P_t f(\cdot) = \int f(y)\, p(t, \cdot, dy)$$

münasibəti ilə təyin olunan $P_t : f \to P_t f$, $t\ge 0$ operatorları, f funksiyası $\mathscr{E}$ -də məhdud və kəsilməz bütün funksiyalar ailəsində dəyişdikdə bu ailəni öz-özünə inikas etdirirlər. Belə proseslər sinfi ilk dəfə U. Feller tərəfindən [1]-də göstərilmişdir.

Bir çox birölçülü diffuziya prosesləri və hər bir *güclü Feller prosesi* F. p.-lərinə misaldır. İxtiyari standart prosesin vəziyyətləri fəzasına onun özünün doğurduğu incə topologiya daxil etdikdə bu prosesə F. p. kimi baxmaq olar (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n).

Feller xassəsindən bir çox faydalı nəticələr alınır (bundan sonra $\mathscr{E}$ fəzasının metriklənən fəza olduğu fərz olunur). Məs., $\mathscr{E}$ kompakt, $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$-də verilən Feller keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ s t o x a s t i k k ə s i l m ə z olarsa, yəni hər dəfə $\zeta\in\mathscr{E}$ olarsa, $t\downarrow 0$ olduqda $p(t, x, U)\to 1$ münasibəti ödənilərsə, U isə x nöqtəsinin ətrafı olarsa, onda bu funksiyaya uyğun Markov prosesi ζ -nı, ümumiliyi pozmadan, sağdan kəsilməz və ikinci növ kəsilməyə malik olmayan proses hesab etmək olar (bax, [2]). Trayektoriyaları sağdan kəsilməz ixtiyari F. p. *ciddi Markov prosesidir*.

Markov prosesinin Feller xassəsi bəzən geniş mənada verilir: bu halda əvvəlki qaydada təyin olunan P_t, $t \geq 0$ operatorlarının $\mathscr{E}$-də bütün məhdud Borel funksiyaları sinfində təyin olunduğu və bu operatorların bu və ya digər münasib surətdə seçilmiş funksiyalar çoxluğunu özünə inikas etdirməsi tələb olunur (bax, [3]). Məs., $\mathscr{E}$ hesabi bazaya malik lokal kompakt fəza olduğu halda P_t operatorlarının $\mathscr{E}$-də kəsilməz, sonsuzluqda sıfra yaxınlaşan bütün kəsilməz funksiyalar ailəsini özünə əks etdirdiyini fərz etmək məqsədəuyğun olur. Əgər bu halda eyni zamanda stoxastik kəsilməzlik şərti də ödənilərsə, onda ζ prosesi hər hansı standart prosesə ekvivalentdir (bax, [2]; bu proseslərin ekvivalentliyi onların ümumi keçid funksiyasına malik olması kimi anlaşılır).

F. p.-nə analoji olaraq, Feller Markov zənciri də təyin olunur. Bir çox hallarda hər hansı ölçülən fəzada verilən ümumi Markov zəncirinə əsaslanaraq, bu zəncirin vəziyyətləri fəzasının mümkün olduqca qənaətlə genişləndirilməsi hesabına və bu genişləndirilmiş fəzada zənciri təyin edərək, bu fəzada Feller zəncirini almaq mümkün olur (bax, [4]). Feller zəncirlərinin dərindən ətraflı öyrənilməsinə səylər göstərilmişdir.

Əd.: [1] F e l l e r W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [3] W a l s h J. B., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, p. 1672–83; [4] Ш у р М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 3, с. 496–509; [5] С м и р н о в С. Н., «Докл. АН СССР», 1982, т. 263, № 3, с. 554–58.

FELLER SEMİ – QRUPU « феллеровская полугруппа; Feller semigroup » – bax, *Markov semi – qrupu*.

FERMİ – DİRAK STATİSTİKASI « Ферми – Дирака статистика; Fermi – Dirac statistics » – $(1/2,\ 3/2,\ ...)$, yarımspinli eyni tipli hissəciklər sistemlərinə $h = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erq.san vahidlərində tətbiq olunan kvant statistikasıdır. E. Fermi (E. Fermi) tərəfindən 1926-da təklif olunmuşdur və həmin ildə də P. Dirak (P. Dirac) onun kvant – mexaniki mənasını aydınlaşdırmışdır: F. – D. s.-na tabe olan sistem üçün dalğa funksiyası koordinatların və hissəciklərin spinlərinin yerdəyişmələrinə nəzərən antisimmetrik olmalıdır. F. – D. s.-na görə hər bir kvant vəziyyətində bir hissəcikdən artıq hiccəcik ola bilməz (Pauli prinsipi) və bu hissəciklər bir-birindən fərqlənmir.

İdeal qaz üçün F. – D. s.-na görə kvant vəziyyəti $\{n_p\}$ səviyyələrinin doldurduğu ədədlərin çoxluğu ilə təyin olunur, hər bir n_p səviyyəsi göstərir ki, verilən səviyyə p impulsu ilə dolmuşdur ($n_p = 1$) və ya boşdur ($n_p = 0$). Böyük sistemlər üçün səviyyələri kiçik oyuqlar üzrə elə qruplaşdırmaq olar ki, bu oyuqlarda orta enerjisi $\varepsilon_i = P_i^2 / 2m$ olan G_i səviyyə olsun və $G_i >> 1$. Sistemin vəziyyəti $\{N_i\}$ toplusu ilə təyin olunur, burada N_i – oyuğun səviyyələri üzrə n_p-lərin cəmidir. Makroskopik vəziyyətin statistik çəkisi, yəni hissəciklərin oyuqlarda müxtəlif yerləşmələrinin sayı –

$$W(N_i) = \Pi_i \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i - N_i)!}$$

düsturu ilə təyin olunur. Vəziyyətlər üzrə hissəciklərin ən böyük ehtimali paylanması, $E = \sum_i \varepsilon_i N_i$ enerjisi qeyd olunduqda, hissəciklərin sayı $N = \sum_i N_i$ vasitəsilə statistik çəkinin maksimallıq şərtindən tapılır. Bu halda dolma halı üçün orta qiymətlər $\overline{n}_i = \overline{N}_i / G_i = (\varepsilon^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1)^{-1}$ olur, μ – kimyəvi potensial, $\beta = 1/kT$, k – Boltsmann sabiti, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}\, erq/grad$, T – mütləq temperaturdur.

Əd.: bax, Boze – Eynşteyn statistikası məq. əd-ta və Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, т. 1, М., 1984.

FERMİON FƏZASI « фермионное пространство; fermion space » – bax, *Fok fəzası*.

FERNİK TEOREMİ « Ферника теорема; Fernique theorem » – bax, *Təsadüfi proses*; t r a y e k t o r i y a l a r ı n r e q u l y a r l ı ğ ı.

FEYDİNQLƏR / DONMALAR k a n a l d a **« замирания** в к а н а л е; c h a n n e l **fading »** – ötürücünün şüalandırdığı dalğa fazası və amplitudunun stabil olduğu halda, qəbuledici apparaturunun girişində dalğanın (elektromaqnit və akustik) faza və amplitudunun dəyişiklikləridir (fluktuasiyalarıdır). F. yaranmasının əsas səbəbi dalğanın ötürücüdən qəbulediciyə çoxsaylı yollarla yayılmasıdır və yayılmadakı gecikmələr və yolların sayı təsadüfi surətdə dəyişə bilər; digər səbəblər yayılma mühitinin sınma əmsalının fluktuasiyaları, udma əmsallarının dəyişilmələri (məs., yağıntılar ucbatından) və s. kimi səbəblərdir.

Tezlik – selektiv və zaman – selektiv F. vardır. T e z l i k – s e l e k t i v F. modeli qurularkən fərz olunur ki, təsadüfi parametrlərli kanal ilə dalğa keçərkən çıxış siqnalının spektri təsadüfi tezlik funksiyasının (kompleks təsadüfi ötürmə əmsalı) vurulmuş giriş siqnalının spektrinə bərabərdir. Bu funksiya (təsadüfi tezlik funksiyası), adətən, kompleks təsadüfi Qauss prosesi hesab edilir. Əgər ötürmə əmsalı arqumenti $[0,\ 2\pi]$ intervalında müntəzəm qanunla paylanmış kompleks təsadüfi kəmiyyət olarsa, F. – t ə d r i c i F. adlandırılır. $w(x)$ modulunun paylanma sıxlığı əksər hallarda $w(x) = (x/\sigma^2) \exp\{-x^2/\sigma^2\}$ (R e l e y d o n m a l a r ı) və ya $w(x) = (x/\sigma^2) \exp\{-(x^2 + a^2)/\delta^2\} I_0(\mu a/\sigma^2)$ (R a y s f e y d i n q l ə r i) funksiyaları vasitəsilə təsvir olunur.

Z a m a n – s e l e k t i v F.-lər m o d e l i əsas etibarilə belə fərziyyə əsasında qurulur ki, təsadüfi parametrlərli kanal ilə dalğa keçərkən onun kompleks qurşayıcısı təsadüfi zaman funksiyasına, adətən, kompleks Qauss prosesinə vurulur.

Əd.: [1] К е н н е д и Р., Каналы связи с замираниями и рассеянием, пер. с англ., М., 1973.

FEYNMAN – KAS DÜSTURU « Фейнмана – Каца формула; Feynman – Kas formula » – bax, *Stoxastik differensial həndəsə*.

FƏRQ PSEVDOMOMENTİ « разностный псевдомомент; difference pseudomoment » – bax, *Psevdomoment*.

FƏRQLƏR FUNKSİYASI, METEOROLOJİ İTKİLƏRİN « разностная функция метеорологических потерь; difference function of meteorologic losses » – bax, *Meteoroloji itkilər funksiyası*.

FƏRQLƏR ŞKALASI « разностей шкала; difference scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*.

FƏRQLİ ÖLÇMƏLƏRİN XARİC OLUNMASI « выделяющихся измерений исключение; outliers detection » r e g r e s s i o n a n a l i z d ə – asılı olmayan

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ xətalarlı

$$y_i = \theta^{\mathsf{T}} f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., N$$

xətti *reqression eksperiment* modelinə adekvat olmayan ölçmələrin qüsurlusunu seçib ayırma kriteriləridir.

Şovene kriterisinə görə y_i ölçməsi o halda qüsurlu hesab olunur ki, $\hat{\theta}^{\mathsf{T}} f(\cdot)$-nin ən kiçik kvadratlar metodu ilə approksimasiyasının uyğun styudentləndirilmiş qalığı –

$$e_i^* = |\, y_i - \hat{\theta}^{\mathsf{T}} f(x_i) \,|\; \hat{\sigma}_i^{-1} \,(1 - f^{\mathsf{T}}(x_i) M^{-1} f(x_i))^{-1/2}$$

kritik sərhədi aşmış olsun (burada $\hat{\sigma}_i$, – y_i-nin ölçmə nəticələri nəzərə alınmadığı hal üçün y_i-nin statistik qiymətidir və $M = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, f(x_i)$). Bu kriteri üçün sərhədlər L. N. Bolşev və onun şagirdləri tərəfindən araşdırılmışdır. F. ö. x. o.-nın bir çox evristik kriteriləri vardır ki, bunlar y_i ölçməsi üçün Kuk statistikası Kuk statistikasında, qalıqlar qrafikində h_i kəmiyyətinə:

$$h_i = f^{\mathsf{T}}(x_i)\, M^{-1} f(x_i)$$

əsaslanır.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Избранные труды, М., 1987, с. 224–42; [2] Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., 2 изд., кн. 1–2, М., 1986; [3] Atkinson A. C., Plots, transformations and regression, Oxf., 1985.

FƏZA(sı) 2–ci növ kəsilməyə malik olmayan funksiyaların « **пространство** функций безразрывов 2–го рода; **space** of right-continuous functions with left limits / space of CADLAG functions » – qiymətləri hər hansı metrik fəzadan olan, $[a, b)$-nin hər bir nöqtəsində sağdan limiti olan, $(a, b]$-nin nöqtələrində soldan limiti olan $[a, b]$ parçasında funksiyalar sinfidir. Adətən, fərz olunur ki, 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar F.-dan olan funksiyaların qiymətləri daxili nöqtələrdə birtərəfli limitlərdən biri ilə üst-üstə düşür. *Markov proseslərinin* seçimi funksiyaları təbii şərtlərlə bu fəzalara aid olur. Təsadüfi proseslər üçün bir çox mühüm *limit teoremləri* 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar fəzasında ehtimal ölçülərinin zəif yığılması haqqında müddəalardır.

Əksər hallarda 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar F.-nın tərifini daraltmaq münasibdir: fərz olunur ki, $D = D[0, 1]$, – $[0, 1)$-də soldan kəsilməz, $(0, 1]$-in nöqtələrində soldan limiti olan, təyin olunma oblastı $[0, 1]$ olan bütün həqiqi funksiyalar çoxluğudur.

D – Banax fəzasıdır və $\|x\| = \sup\{\,|x(t)| : t \in [0, 1]\}$ bu fəzada normadır, D-nin altfəzası isə *kəsilməz funksiyalar fəzası* – $C[0, 1]$-dir.

Limit teoremlərində D fəzası

$$d(x, y) = \inf\left\{\|x \circ \lambda - y\| + \|\lambda - i\| : \lambda \in \Lambda\right\}$$

metrikasının doğurduğu *Skoroxod topologiyası* (bax, [1], [2]) ilə verilir, burada $x \circ \lambda \equiv x(\lambda(t))$, $i(t) \equiv t$, Λ, – $[0, 1]$-i özünə inikas etdirən bütün kəsilməz artan funksiyalar çoxluğudur.

(D, d) metrik fəzası separabeldir, lakin tam deyildir. İsbat olunmuşdur ki, D-də elə metrika vermək mümkündür ki, bu metrika Skoroxod topologiyasını doğurmaqla yanaşı D-ni tam metrik fəzaya çevirir; belə metrika aşkar təsvir edilmişdir (bax, [3], [4]).

D fəzası metrikası

$$d_0(x, y) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 : \text{elə } \lambda \in \Lambda \text{ tapılar ki, } \|x \circ \lambda - y\| \le \varepsilon$$
$$\sup\{\,|\ln((\lambda(t) - \lambda(s))/(t - s))| : t \ne s\} \le \varepsilon\Big\}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan tam separabel metrik fəzadır.

D-nin kompakt altçoxluqlarının xarakterizasiyası [3]-də alınmışdır. $A \subset D$ çoxluğunun Skoroxod topologiyasında, yalnız və yalnız, o halda kompakt qapayıcısı vardır ki, $\|x\|$ norması A-da məhdud olsun və $w_x[0, \delta)$, $w_x[1 - \delta, 1)$, $w_x''(\delta)$ kəmiyyətləri $\delta \to 0$ olduqda $x \in A$ üzrə müntəzəm sıfra yaxınlaşsınlar, burada

$$w_x(T) = \sup\{\,|x(s) - x(t)| : s, t \in T\},$$
$$w_x''(\delta) = \sup\{\min\{\,|x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)|\} :$$
$$t_1 \le t \le t_2,\ t_2 - t_1 \le \delta,\ t_1, t, t_2 \in [0, 1]\}.$$

Əksər hallarda D-də $\|\cdot\|$ norması ilə doğurulan müntəzəm topologiyaya da baxılır. Bu topologiya Skoroxod topologiyasından güclüdür. $C[0, 1]$ altfəzasında (kəsilməz funksiyalar fəzasında) müntəzəm topologiya və Skoroxod topologiyası eyni bir topologiya doğurur. Banax fəzası $(D, \|\cdot\|)$ separabel fəza deyildir. Bu fəzada paylanmalar haqqında məzmunlu limit teoremlərini bütün sferaları özündə saxlayan $\mathcal{B}$ σ – cəbrində (bu σ – cəbr Borel σ – cəbrindən kasıbdır) təyin olunmuş ölçülərə baxdıqda almaq olar və bu halda zəif yığılma məhdud kəsilməz $\mathcal{B}$ – ölçülən funksiyaların inteqrallarının yığılması kimi anlaşılmalıdır (bax, [5]), separabel ölçü adlanan ölçüləri də ayırmaq olur (bax, [6]). Bax, *C – yığılma*(sı) təsadüfi proseslərin.

Qiymətləri metrik fəzadan olan 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyalar F.-da bəzi topologiyalar [2]-də şərh olunmuşdur və bunlar Skoroxod topologiyasından zəif topologiyalardır.

Əd.: [1] Скороход А. В., «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, в. 3, с. 364–67; [2] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [3] Колмогоров А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 239–47 (в кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 384–93); [4] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [5] Dudley R. M., «Ill. J. Math.», 1966, v. 10, № 1, p. 109–26; [6] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [7] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 3–41; [8] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов.

S – FƏZA « **S – пространство; S – space** » – bax, *Banax fəzası*, Sazonov xassəli.

σ – FƏZA « **σ – пространство; σ – space** » – bax, *σ – Topoloji fəza*.

FƏZA, σ TOPOLOGİYA İLƏ « пространство с σ – топологией; space with σ – topology » – bax, *σ – Topoloji fəza*.

FƏZASI, ELEMENTAR HADİSƏLƏRİN « пространство элементарных событий; space of elementary events » – bax, *Stoxastik eksperiment.*

FƏZASI, HƏLLƏRİN (QƏRARLARIN) « пространство решений; decision space », həllər fəzası – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

FƏZASI, KƏSİLMƏZ FUNKSİYALARIN « пространство непрерывных функций; space of continuous functions » – topoloji $\mathscr{X}$ fəzasının həqiqi kəsilməz funksiyalar çoxluğu $C(\mathscr{X})$ -dir; qiymətləri bəzi metrik fəzalardan olan kəsilməz funksiyalar F.-na da baxılır.

$\mathscr{X}$ -dən olan kompaktlarda müntəzəm yığılma topologiyası ilə verilən $C(\mathscr{X})$ fəzası Hausdorf lokal qabarıq fəzasıdır. Əgər $\mathscr{X}$ -dən olan kompaktların elə artan (hesabi) ardıcıllığı varsa ki, ixtiyari kompakt bu ardıcıllığın çoxluqlarından birinin tərkibində olsun, onda $C(\mathscr{X})$ – metriklənən fəzadır (bax, [1], [2]).

Əgər K kompakt metrik fəza olarsa, onda $C(K)$ $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in K\}$ norması təyin olunmuş separabel Banax fəzasıdır. $(C(K), \|\cdot\|)$-ya qoşma fəza – K-nın Borel σ – cəbrində hesabi – additiv ölçülər çoxluğudur (bax, [3]). $C(K)$ – kompaktları müntəzəm məhdud və eynidərəcədə kəsilməz funksiyalar çoxluğudur.

$K = [0, 1]$ olduqda kəsilməz funksiyalar F. 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan *funksiyalar fəzasının* bir hissəsini təşkil edir.

Borel σ – cəbri $C(K)$ silindrik σ – cəbrlə üst-üstə düşür. $C[0, 1]$ fəzası separabel Banax fəzaları sinfində universaldır, lakin refleksiv deyildir, bazisi var, lakin şərtsiz bazisə malik deyildir (bax, [4]).

Əd.: [1] Бурбаки Н., Общая топология, пер. с франц., М., 1975; [2] Келли Дж. Л., Намиока И., Линейные топологические пространства, пер. с англ., М., 1962; [3] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [4] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [5] Функциональный анализ, 2 изд., 1972.

FƏZASI, ÖLÇÜLƏRİN « пространства мер; space of measure » – zəif yığılma topologiyası təyin olunmuş hər hansı fəzanın Borel σ – cəbrində bütün *requlyar ölçülərin* çoxluğudur. $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ – topoloji və ya σ – topoloji fəza, $\mathfrak{G}$ – açıq çoxluqlar sinfi, $C(\mathscr{X})$, – $\mathscr{X}$ -də bütün məhdud kəsilməz, norması $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ olan funksiyaların Banax fəzası olsun. Əgər $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ normal fəza olarsa, onda $C(\mathscr{X})$ -ə qoşma $C^*(\mathscr{X})$ fəzası $\mathfrak{G}$ sinfinin doğurduğu çoxluqlar cəbri $\alpha(\mathfrak{S})$ -da bütün yüklərin fəzasıdır. Buna görə də, $C(\mathscr{X})$ -də ixtiyari xətti Φ funksionalı

$$\Phi(f) = \int_{\mathscr{X}} f(x)\, d\mu(x)$$

inteqralı ilə ifadə olunur, burada μ *yükdür* (bax, [1]). $C^*(\mathscr{X})$ -də topologiyaya baxıldığı fərz olunur, bu topologiyada ixtiyari μ_0 yükünün açıq ətrafları $C(\mathscr{X})$ fəzasından $f_1, ..., f_n$ funksiyalar toplusu və $\varepsilon > 0$ ədədi ilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\left\{ \mu : \left| \int_{\mathscr{X}} f_i(x)\, d\mu(x) - \int_{\mathscr{X}} f_i(x)\, d\mu_0(x) \right| < \varepsilon \right\}.$$

$C^*(\mathscr{X})$ -də belə topologiya * – zəif topologiya və ya $\mathscr{X}$ – topologiya adlanır (bax, [2]).

$C^*(\mathscr{X})$ -dən olan hər bir hesabi – additiv yükün $\sigma(\mathfrak{G})$ Borel σ – cəbrində verildiyini hesab etmək olar, belə ki, o, $\alpha(\mathfrak{G})$ -dan $\sigma(\mathfrak{G})$ σ – cəbrinə yeganə surətdə davam olunur. $C^*(\mathscr{X})$ -də * – zəif topologiyasının doğurduğu topologiya təyin olunmuş, bütün mənfiolmayan hesabi – additiv $M \subseteq C^*(\mathscr{X})$ yüklərin çoxluğu ölçülər fəzası adlanır; M -də alınan topologiya zəif topologiya adlanır. Bu topologiyada yığılma ölçülərin zəif yığılması adlanır. M çoxluğu $C^*(\mathscr{X})$ -də qapalı deyildir. Onda M -dən olan ölçülərin şəbəkəsi M -dən olmayan yükə yığıla bilər. $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ tam mənası ilə normal fəza olarsa, ölçülər fəzası M -dən olan ölçülər ardıcıllığı (μ_n) μ -yə zəif yığılarsa, onda $\mu \in M$ (bax, [1]).

Əgər $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ metriklənən fəza olarsa, onda ölçülər fəzası M -də Levi – Proxorov metrikası adlanan $\pi(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ metrikasını daxil etmək olar. π metrikasının doğurduğu topologiya zəif topologiya ilə həmişə üst-üstə düşməyə bilər. Əgər $\mathscr{P} \subseteq M$ ölçülərin tam ailəsi olarsa, onda $\mathscr{P}$ -də zəif topologiya olan və π metrikası ilə doğurulan topologiya üst-üstə düşür. Əgər $\mathscr{X}$ tam separabel metrik fəza olarsa, onda zəif topologiya və π metrikası ilə doğurulan topologiya bütün M -də üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–628; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [3] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1950, т. 1, в. 2, с. 177–238; [4] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [5] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространства, пер. с франц., М., 1977.

FƏZASI, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin **« пространство состояний** цепи Маркова; **state space** of a Markov chain **»** – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zəncirləri üçün.

FƏZASI, VƏZİYYƏTLƏRİN təsadüfi prosesin **« пространство состояний** случайного процесса; **state space** of a random process **»** – bax, *Faza fəzası*.

FƏZAVİ STATİSTİK STRUKTUR « пространственная статистическая структура; spatial statistical structure » – bax, *Statistik struktur.*

Fİ – ŞAXƏLƏNƏN PROSES « Фи – ветвящийся процесс; φ – branching process », φ – şaxələnən proses, – özündən sonrakı nəsli doğuran hissəciklərin sayı

cari nəslin ölçüsünün funksiyası olan, diskret zamanlı, *requlyar şaxələnən prosesdir.* Məs., əgər $\varphi(\cdot)$ funksiyası və asılı olmayan eyni qanunla paylanmış $\zeta_i(t)$ təsadüfi kəmiyyətləri tam mənfi olmayan qiymətlər alırsa, onda F. – ş. p.-in $(t+1)$-ci nəslinin hissəciklərinin sayı $\zeta(t+1)$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\zeta(t+1) = \zeta_1(t) + \ldots + \zeta_{\varphi(z(t))}(t).$$

$\varphi(n) = n$ olduğu hal Qalton – Vatson şaxələnən prosesinə uyğundur; $\varphi(n) = n + c$, $c = \text{const} > 0$ – immiqrasiyalı *şaxələnən prosesə*; $\varphi(n) = \max(0, n - C)$, $C = \text{const} > 0$ halı isə emiqrasiyalı şaxələnən prosesə uyğundur və s.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 15–25; [2] Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 2, с. 319–39; [3] Янев Н. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 433–40; [4] Ватутин В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 3, с. 482–97.

FİDUSİAL EHTİMAL « фидуциальная вероятность; fiducial probability » – naməlum parametr haqqında aprior paylanmadan asılı olmayan fidusial (güvənilə bilinən) mülahizələrə əsaslanan ehtimaldır. Qoyulan məsələyə fidusial mülahizələrdən istifadə etməklə yanaşma R. A. Fişer (R. A. Fisher) tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu metodun mahiyyəti qısaca aşağıda verilir. T – baxılan ailə üçün kafi statistika, $g(T, \theta)$, – T və θ-nın elə funksiyası olsun ki, onun paylanması θ-dan asılı olmasın.

$$\mathbf{P}\{g(T, \theta) < \lambda \,|\, \theta\} = F(\lambda) \qquad (1)$$

olsun.

$$g(T, \theta) < \lambda \quad \text{və} \quad \theta > h(T, \lambda) \qquad (2)$$

bərabərsizliklərinin ekvivalent olduğu fərz olunur. Onda (1) bərabərliyini

$$\mathbf{P}\{\theta > h(T, \lambda)] = F(\lambda) \qquad (3)$$

şəklində yazmaq olar. Lakin T_0, – T təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş qiymətidirsə,

$$\mathbf{P}\{\theta > h(T_0, \lambda)]\} = F(\lambda) \qquad (4)$$

hökmünün nə dərəcədə doğru olub-olmadığı mübahisəlidir.

Məs., $N(\theta, 1)$ normal qanunu ilə verilmiş n həcmli seçimin seçimi ortası $\bar{x}$ olsun. Onda $y = (\bar{x} - \theta) \sim N(0, 1/\sqrt{n})$ və

$$\mathbf{P}\left\{\bar{x} - \theta < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} = \int_{-\infty}^{\lambda/\sqrt{n}} N\left(y \,|\, 0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) dy = \Phi(\lambda).$$

Əgər müəyyən bir seçim üçün $\bar{x} = 5{,}832$ olarsa, onda fidusial mülahizələrə əsasən,

$$\mathbf{P}\left\{\theta > 5{,}832 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi(\lambda) \qquad (5)$$

olduğu alınır. Lakin belə mülahizələr mübahisə doğura bilər. Birincisi, θ təsadüfi kəmiyyət olmaya da bilər və ola bilər ki, o, hər hansı bir qeyd olunmuş, amma naməlum kəmiyyət olsun. İkincisi, əgər θ hətta naməlum aprior paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olsa belə, (5) tipli hökmlər aprior paylanmadan asılı olmayaraq düzgün olmaya da bilər. (5) düsturunu ehtimal hökmü kimi müxtəlif üsullarla interpretasiya etməyə cəhd etmək mümkündür. Bu istiqamətdə bəzi mülahizələr A. P. Dempster (A. P. Dempster, 1963), D. A. S. Frezer (D. A. S. Fraser, 1961), Sprota (1961) məxsusdur.

Əd.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., 1968; [2] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528–35; [3] Frazer D., «Biometrika», 1961, v. 48, p. 261–80; [4] Климов Г. П., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, с. 763–65.

FİDUSİAL İNTERVAL « фидуциальный интервал; fiducial interval » – $F^*(\theta \,|\, x) = 1 - F(x \,|\, \theta)$ fidusial paylanma funksiyasından istifadəyə əsaslanan, *etibarlı intervala* analoji olan intervaldır, burada x – müşahidələr nəticəsi, θ – müşahidənin paylanma funksiyası $F(x \,|\, \theta)$-nın naməlum parametridir. θ və x ədədi qiymətli olduğu hallarda x əvəzinə kafi statistika götürülür və $F^*(\theta \,|\, x)$ θ arqumentinin funksiyası kimi paylanma funksiyasıdır. Belə hallarda θ üçün $1 - \alpha$ hüdudlu F. i. –

$$\inf_x \{F^*(\theta_2 \,|\, x) - F^*(\theta_1 \,|\, x)\} = 1 - \alpha$$

şərtilə təyin olunur. F. i.-ın ucları olan $\theta_1(x)$ və $\theta_2(x)$ statistikaları bir çox hallarda parametrin mümkün olan qiymətləri üçün təminedici sərhədlər olur.

F. i. – $F^*(\theta \,|\, x)$ funksiyası ilə ifadə olunan kifayət qədər böyük *fidusial ehtimala* malik olan və naməlum parametrin qiymətlərini daxilinə alan intervaldır. İnvariant statistik modellər üçün fidusial intervallar etibarlı intervallarla onların ehtimalları ilə birlikdə üst-üstə düşür, bu şərtlə ki, invariant fidusial intervallarda olduğu kimi invariant etibarlı intervallarla kifayətlənilməlidir. Bu halda intervala parametrin elə qiymətləri daxil olunur ki, bu qiymətlər müşahidə nəticəsində paylanma funksiyasının qiymətlərinin verilmiş ehtimalla qeyd olunmuş çoxluqdan olmasını təmin etsin.

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528–35; [2] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

FİDUSİAL PAYLANMA « фидуциальное распределение; fiducal distribution » – $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsinin θ parametrinin *paylanması* $\mathbf{P}_x^*$-dir. Bu anlayış ədədi θ və x-lər üçün R. Fişer tərəfindən elə hal üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]) ki, bu halda x müşahidəsinin empirik paylanma funksiyası $F(x \,|\, \theta)$ θ-nın artması ilə elə azalır ki, x qeyd olunduqda θ-nın funksiyası kimi baxılan $F^*(\theta \,|\, x) = 1 - F(x \,|\, \theta)$ paylanma funksiyasının xassələrini ödəyir (x əvəzinə *kafi statistika* istifadə olunduğu zaman bir çox hallar belə vəziyyətə gətirilir).

F. p. invariant paylanmalar ailəsi üçün təyin olunmuşdur (bax, [2] – [4]). g çevirmələrinin qrupu G-nin X və Θ-da təsir göstərdiyi fərz olunur. Əgər x-in paylanması $\mathbf{P}_\theta$ olduqda gx-in paylanması $\mathbf{P}_g(\theta)$ olarsa, paylanmalar ailəsi – invariant

paylanmalar ailəsi adlanır. Bu halda $\delta : X \to D$ ekvivariant həlledici qaydalarına (elə qaydalara ki, $\delta(gx) = g\delta(x)$ bərabərliyi bütün x və g -lər üçün ödənilsin) və $L_\theta(d)$ invariant itki funksiyalarına (elə funksiyalara ki, $L_g\theta(gd) = L_\theta(d)$ bərabərliyi bütün θ, d və g -lər üçün ödənilsin) baxılır. Əgər G qrupunun Θ çoxluğunda təsiri tranzitivdirsə, onda $\mathscr{P}$ ailəsi müəyyən bircinslik xassəsinə malikdir: θ_0 parametrinin qeyd olunmuş qiyməti və paylanması $\mathbf{P}_{\theta_0}$ olan x müşahidəsi üçün, g elementi G qrupundan olduqda, gx elementi $\mathscr{P}$ ailəsinin bütün elementlərini əhatə edir.

D, – Θ -da ehtimal ölçüləri çoxluğu olsun [müəyyən $\mathscr{B}(\Theta)$ və $\mathscr{B}(X)$ σ – cəbrlərinin verildiyi fərz olunur; odur ki, G qrupunun çevirmələri ölçüləndir]. $B \in \mathscr{B}(\Theta)$ üçün G -nin D -yə təsiri $(g\alpha)(B) - \alpha(g^{-1}(B))$ münasibəti ilə verilmiş olsun. F. p. meylsizlik şərtini

$$\int L_\theta(\alpha)\, d\beta(\theta) \geq \int L_\theta(\beta) d\beta(\theta)$$

tip bərabərsizliyi ilə ödəyən hər bir invariant itki funksiyası üçün ekvivariant həllər qaydaları sinfində $\int L_\theta(\delta(x))\, d\,\mathbf{P}_\theta(x)$ riskini minimallaşdıran Θ -da ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathscr{P}^* = \{\mathbf{P}_x^* : x \in X\}$ ilə ifadə olunur.

Əgər G qrupu X -ə tranzitiv təsir edirsə, onda F. p.-lar ailəsi $\mathscr{P}^* = \{\mathbf{P}_x^* : x \in X\}$ üçün invariantlıq və $S(x)$ invariant ailələri üçün $\mathbf{P}_\theta\{\theta \in S(x)\} = \mathbf{P}_x^*\{\theta \in S(x)\}$ fidusial ehtimallar və etibarlı ehtimalların üst-üstə düşməsi tələbləri ilə birqiymətli olaraq seçilir [$S(x)$ -in invariantlığı $\theta \in S(x) g \in G$ şərtindən $g\theta \in S(gx)$ şərtinin ödənilməsidir].

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528–35; [2] Flaser D., «Biometrika», 1961, v. 48, p. 261–80; [3] Климов Г. П., «Докл. АНСССР», 1970, т. 191, № 4, с. 763–65; [4] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

FİKTİV VƏZİYYƏT « фиктивное состояние; fictitious / fictions state » – prosesin trayektoriyalarını nizama salmaq məqsədilə *Markov prosesinin* faza fəzasına daxil edilmiş əlavə α vəziyyətidir. F. v. termini [1]-də P. Levi tərəfindən vəziyyətlər çoxluğu hesabi Markov proseslərinin araşdırılmasında daxil edilmişdir. Məs., əgər ζ prosesi ardıcıl olaraq $1, 2, 3, \ldots$, sonra isə $\ldots, -3, -2, -1$ vəziyyətlərində olursa və n vəziyyətində $\sum \mathbf{M}\tau_n < \infty$ şərtini ödəyən τ_n müddəti ərzində qalarsa, onda $1, 2, 3, \ldots$, vəziyyətlər ardıcıllığından $\ldots, -3, -2, -1$ ardıcıllığına təsadüfi sıçrayış anında keçdikdə, təbiidir ki, trayektoriyaların real vəziyyətinin heç birində deyil, fiktiv bir ∞ vəziyyətində olduğunu qəbul etmək olar. t -nin ixtiyari $t > 0$ qiymətində ζ_t -nin fiktiv vəziyyətlər çoxluğunda olması ehtimalı sıfra bərabərdir. Markov prosesinin faza fəzasının tamamlanması ideyası sonradan giriş və çıxış sərhədlərinin qurulması istiqamətində inkişaf etmişdir (bax, *Markov prosesi*; sərhəd şərti).

Əd.: [1] Levy P., Ann. sci. École norm. supér., 1951, t. 68, p. 327–81; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова. пер. с англ., М., 1964.

FİLTR FAZASI « фильтра фаза; filter phase » – elə fazadır ki, ötürücü funksiyanın filtrinin bu fazası kompleks kəmiyyət kimi təsvir olunur.

Bax, *Xətti filtr.*

FİLTRASİYA(sı) semimartinqalın **« фильтрация** семимартингала; **filtering** of semimartingale **»** – bax, *Semimartinqalın filtrasiyası.*

FİLTRASİYA(sı) siqnalın **« фильтрация** сигнала; signal **filtering »** – siqnalın küylə additiv qarışığından onun ayrılması prosesidir. Siqnalın F. məsələsi $s(t)$ siqnalının t anında $x(u)$, $u \in [t_0, t_1]$ təsadüfi prosesinin müşahidələri üzrə $s(\cdot)$ ilə bağlı $\hat{s}(t)$ statistik qiymətinin qurulmasıdır. Əgər $s(\cdot)$ -in statistik xarakteristikaları və $x(\cdot)$ məlum olarsa, onda bir qayda olaraq, kvadratik orta xətası $\mathbf{M}\,|\hat{s}(t) - s(t)|^2$ ən kiçik olan $\hat{s}(t)$ statistik qiymətini qurmağa cəhd edilir. Ən çox siqnalın xətti filtrasiyası istifadə olunur. Bu halda optimal statistik qiymət

$$\hat{s}(t) = \int_{t_0}^{t_1} h(t, \lambda)\, x(\lambda)\, d\lambda$$

inteqralı ilə ifadə olunur, $h(t, \lambda)$ funksiyası isə

$$\mathbf{M}\, x(u)\, s(t) = \int_{t_0}^{t_1} h(t, \lambda)\, \mathbf{M} x(\lambda)\, x(u)\, d\lambda, \quad u \in [t_0, t_1]$$

inteqral tənliyini ödəyir.

$x(\cdot)$ və $s(\cdot)$ prosesləri birgə Qauss paylanmasına malik olduğu halda, xətti metodlar siqnalın F.-nın minimal xəta ilə olmasını təmin edir. Bu metodların siqnalın F. üçün ümumiləşməsi qeyri – xətti stoxastik differensial tənliklərlə təsvir olunan sistemlə formalaşaraq siqnalın F.-nın ümumi stoxastik tənliklərinin alınması ilə nəticələnir (bax, [2]).

Əd.: [1] Ван Трис Г., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

FİLTRASİYA(sı) təsadüfi proseslərin **« фильтрация** случайных процессов; **filtering** of random processes **»** – bax, *Təsadüfi proses*; filtrasiya.

FİLTRASİYA TƏNLİYİ diffuzion prosesin filtrasion sıxlığı üçün **« фильтрации уравнение** для фильтрационной плотности диффузионного процесса; **filtering equation** for filtering density of a diffusion process **»** – diffuzion proses üçün Lebeq ölçüsünə nəzərən filtrasiya tənliyini ödəyən ölçünün sıxlığı $\pi(t, x)$ üçün aşağıdakı qeyri – xətti tənlikdir:

$$\pi(t, x) = \varphi(t, x) \Big/ \int \varphi(t, x)\, dx\,,$$

$\varphi(t, x)$ təsadüfi meydanı isə əmsalları diffuzion prosesin əmsalları üzrə təyin olunan xətti stoxastik 2-ci tərtib parabolik tənliyin həllidir. Bu tənlik, adətən, normallaşdırılmayan filtrasion sıxlığının tənliyi adlanır. $\pi(t, x)$

və $\varphi(t, x)$ sıxlıqları üçün F. t. hal-hazırkı dövrə qədər yaxşı öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [2] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1983.

FİLTRASİYA TƏNLİYİ diffuzion proseslər üçün **« фильтрации уравнение** для диффузионных процессов; **filtering equation** for diffusion processes **»** – *şərti riyazi gözləmə* üçün

$$\pi_t[f] = \mathbf{M}[f(\zeta(t))|Y(s),\ s \le t]$$

tənliyidir, burada $\zeta(t)$ – diffuzion prosesin komponentlərinin müəyyən bir hissəsidir (şərti olaraq «müşahidə olunmayan» adlanan), $Y(s)$ – komponentlərin qalan hissəsi («müşahidə olunan»), f – verilmiş funksiyadır. $\pi_t[f]$ üçün tənlik ümumiləşmiş mənada anlaşılır, yəni şərti riyazi gözləmə ilə verilən ölçüyə nəzərən F. t. filtrasiya nəzəriyyəsində mərkəzi rol oynayır. F. t. ən ümumi formada [1]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

FİLTRİN GÜCLƏNDİRMƏ ƏMSALI « фильтра коэффициент усиления; gain of a filter » – bax, *Xətti filtr.*

FİLTRLƏNMİŞ PUASSON PROSESİ « профильтрованный пуассоновский процесс; filtered Poisson process » – bax, *İmpulsal Puasson prosesi.*

FİNAL EHTİMAL « финальная вероятность; final probability » – vəziyyətləri çoxluğu $\mathscr{E}$ sonlu və ya hesabi çoxluq olan bircins *Markov zəncirinin* i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$-lərin $n \to \infty$ olduqda hər bir $j \in \mathscr{E}$ üçün limiti mövcud olan, i-dən asılı olmayan və $\sum_{\mathscr{E}} p_j = 1$ şərtini ödəyən p_j ehtimalına deyilir. F. e.-ları zəncirin yeganə stasionar paylanmasını təşkil edir. Sonlu Markov zəncirində F. e., yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki, $\mathscr{E}$ periodu 1-ə bərabər olan vəziyyətlərin yeganə bir mühüm sinfindən və ola bilər ki, əhəmiyyətsiz vəziyyətlər sinfindən ibarət olsun (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Hesabi zəncirdə F. e.-ın varlığı üçün bütün mühüm vəziyyətlərin çoxluğu C-nin 1 periodlu yeganə müsbət sinif təşkil etməsi zəruridir; əgər $\mathscr{E} = C$ olarsa, onda bu şərt elə kafidir. p_j^{-1} kəmiyyəti i vəziyyətindən j vəziyyətinə orta qayıdış müddətinə bərabərdir.

Misal (uducu vəziyyətli təsadüfi dolaşma). $\mathscr{E} = \{0, 1, 2, ...\}$, $p_{00} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$, $0 < p < 1$, $i = 1, 2, ...$ olsun, burada $\mathscr{E} = C \cup R$, $C = \{0\}$ isə müsbət mühüm sinif, $R = \{1, 2, ...\}$ – əhəmiyyətsiz vəziyyətlər sinfidir. Əgər $p \le 1/2$ olarsa, onda F. e.-ları vardır və $p_0 = 1$, $p_j = 0$, $j \ge 1$. Əgər $p > 1/2$ olarsa, onda $i = 0, 1, 2, ...$ qiymətlərində

$$\lim_{n\to\infty} p_{i0}(n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^i, \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0, \quad j \ge 1$$

olur və F. e.-ları yoxdur.

Bax, *Şaxələnən proses.*

FİNAL EHTİMALI şaxələnən prosesin **« финальная вероятность** ветвящегося процесса; **final probability** of a branching process **»** – bax, *Şaxələnən proses*; final ehtimalları.

FİNAL ÖDƏMƏ « финальная плата; final reward » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

FİNAL TİP şaxələnən prosesdə **« финальный тип** в ветвящемся процессе; **final type** in a branching process **»** – final sinfə daxil olan hissəciklər tipidir (bax, *Şaxələnən proses* hissəciklərinin tipləri sayı sonlu). Final sinfə daxil olan hissəciklər çoxaldıqda bu sinifdəki hissəciklərin ümumi sayı dəyişmir və bu sinifdən olan hər hansı final tipin bir hissəciyinə sanki yəqin çevrilirlər və ya ola bilər ki, digər siniflərin hissəciklərinin hər hansı bir neçəsinə çevrilsinlər.

FİNİT AXIN « финитный поток; finitary flow » – bax, *Təsadüfi axın.*

FİNİT POTENSİAL « финитный потенциал; finite-range potential » – bax, *Potensial*(ı) Gibbs meydanının.

FİNİT SƏRHƏD « финитная граница; finitary boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

FİSK İNTEQRALI « Фиска интеграл; Fisk integral » – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı.*

FİSK – STRATONOVİÇ İNTEQRALI « Фиска – Стратоновича интеграл; Fisk – Stratonovich integral » – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı.*

FİŞER APPROKSİMASİYASI « фишеровская аппроксимация; Fisher approximation » – bax, *Fişer çevirməsi.*

FİŞER ÇEVİRMƏSİ « Фишера преобразование; Fisher transformation » – *xi – kvadrat paylanmasına* tabe təsadüfi kəmiyyəti normalaşdıran çevirmədir. χ_n^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı n-ə bərabər xi – kvadrat paylanmasına tabe təsadüfi kəmiyyət olsun. Əgər $n \to \infty$ olarsa, onda mərkəzi limit teoreminə əsasən, $\{\chi_n^2\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, asimptotik olaraq parametrləri $\mathbf{M}\chi_n^2 = n$, $\mathbf{D}\chi_n^2 = 2n$ olan normal qanunla paylanır. Daha dəqiq, n-in böyük qiymətlərində, ixtiyari $x \in \mathbb{R}$, x üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \le x\right\} = \Phi(x) - \frac{2}{3}\varphi^2(x)\frac{1}{\sqrt{2n}} + \left[\frac{2}{9}\varphi^{(5)}(x) + \varphi^{(3)}(x)\right]\frac{1}{2n} + O\left[\frac{1}{n^{3/2}}\right] = \Phi(x) + O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right], \quad (1)$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır, $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $\varphi^r(x) = \Phi^{(r+1)}(x)$.

R. Fişer digər normallaşdırıcı çevirmə də təklif etmişdir və bu çevirmədə o, belə bir faktdan istifadə etmişdir ki, n-in böyük qiymətlərində $\sqrt{2\chi_n^2}$ təsadüfi kəmiyyəti təqribi olaraq parametr-

ləri $\sqrt{2n-1}$ və 1-ə bərabər normal qanunla paylanır. Daha dəqiq, $n \to \infty$ olduqda ixtiyari $x \in \mathbb{R}$, x üçün

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{2\chi_n^2} - \sqrt{2n-1} \le x\right\} = \Phi(x) - \frac{1}{6}\varphi^2(x)\,\frac{1}{\sqrt{2n}} +$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{1}{12}\varphi^{(3)}(x) - \varphi^{(3)}(x)\right]\frac{1}{2n} + O\left[\frac{1}{n^{3/2}}\right] =$$

$$= \Phi(x) + O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \qquad (2)$$

düsturu doğrudur. F. ç. Puasson paylanmasının Fişer approksimasiyası adlanan yaxşı approksimasiyasını qurmağa imkan yaradır. ξ, $-\lambda$, $\lambda > 0$ parametrli Puasson qanununa tabe təsadüfi kəmiyyət olsun. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası üçün xi – kvadrat terminlərində ixtiyari mənfi olmayan m ədədi üçün

$$\mathbf{P}\{\xi \le m\} = \mathbf{P}\{\chi^2_{2m+2} \ge 2\lambda\}$$

ifadəsi doğrudur; (2) düsturundan istifadə edərək Puasson paylanması üçün aşağıdakı Fişer normal approksimasiyasını qurmaq olar:

$$\mathbf{P}\{\xi \le m\} \approx 1 - \Phi[\sqrt{4\lambda} - \sqrt{4(m+1)-1}] =$$

$$= \Phi[\sqrt{4m+3} - 2\sqrt{\lambda}). \qquad (3)$$

Bu Fişer approksimasiyasından $\lambda \ge 25$ qiymətlərində istifadə etmək tövsiyyə olunur. (3) approksimasiyası faktiki olaraq nəticə kimi belə müddəadan alınır ki, $\lambda \to \infty$ olduqda $\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{\lambda}$ təsadüfi kəmiyyəti asimptotik olaraq standart normal qanuna tabedir.

Əd.: [1] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55; [2] Браунли К. А., Статистическая теория и методология в науке и технике, пер. с англ., М., 1977; [3] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A guide to chisquare testing, N. Y., 1996.

FİŞER z – ÇEVİRMƏSİ « Фишера z – преобразование; Fisher z – transformation » – seçimi *korrelyasion əmsalı* normallaşdıran çevirmədir. (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) – eyni qanunla paylanmış qarşılıqlı asılı olmayan, normal qanuna tabe, ikiölçülü təsadüfi vektorlar olsun, bunların birgə paylanması aşağıdakı düsturla verilir:

$$\mathbf{P}\{X_i < x,\ Y_i < y\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{(x-\mu_1)/\sigma_1} \int_{-\infty}^{(x-\mu_2)/\sigma_2} e^{-(u^2-2\rho uv+v^2)/2(1-\rho^2)}\,du\,dv,$$

burada

$$\mu_1 = \mathbf{M}X_i, \quad \sigma_1^2 = \mathbf{D}X_i, \quad \mu_2 = \mathbf{M}Y_i, \quad \sigma_2^2 = \mathbf{D}Y_i,$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\,\mathbf{M}(X_i - \mu_1)(Y_i - \mu_2).$$

Korrelyasiya əmsalı ρ X_i və Y_i təsadüfi kəmiyyətlərinin xətti asılılıq dərəcəsini xarakterizə edir, $|\rho| \le 1$. Əgər normal qanunun parametrləri μ_i, σ_i^2 və ρ naməlum olarsa, onda ρ üçün nöqtəvi statistik qiymət kimi seçimi korrelyasiya əmsalı –

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

götürülür, burada

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

R. Fişer [1]-də göstərmişdir ki, r statistikasının ehtimal paylanması ρ parametrindən asılıdır və $n \ge 3$ olduqda paylanma sıxlığı

$$p_n(r) = \begin{cases} \dfrac{2^{n-3}}{\pi\Gamma(n-2)}\,(1-\rho^2)^{(n-1)/2}\,(1-r^2)^{(n-4)/2} \times \\ \times \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left[\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right)\right]^2 \frac{(2\rho r)^m}{m!}, & |r| < 1, \\ 0, & |r| \ge 1 \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur. R. Fişer [2]-də seçimi korrelyasiya əmsalı r-i normallaşdıran z – çevirməsini təklif etmişdir və

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = \operatorname{arg\,th} r$$

düsturu ilə təyin olunub, nə ρ, nə də ki, n-dən asılı olmur; n-in böyük qiymətlərində z statistikası təqribi olaraq, aşağıdakı parametrlərli normal qanunla paylanır:

$$\mathbf{M}z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-3)}\left[1 - \frac{3-\rho^2}{4(n-3)} + \ldots\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho},$$

$$\mathbf{D}z = \frac{1}{n-3}\left[1 - \frac{\rho^2}{2(n-3)} - \frac{2-6\rho^2+3\rho^4}{6(n-3)^2} + \ldots\right] \approx \frac{1}{n-3}.$$

z statistikasını $H_0 : \rho = 0$ hipotezini yoxlamaq üçün tətbiq etmək məsləhətdir, bu halda o faktdan istifadə olunur ki, H_0 doğru olduqda z statistikasının paylanması təqribi olaraq standart normal paylanma olur.

Əd.: [1] Fisher R. A., «Biometrika», 1915, v. 10, p. 507–21; [2] Fisher R. A., «Metron», 1921, v. 1, № 4, p. 3–32; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Браунли К. А., Статистическая теория и методология в науке и технике, пер. с англ., М., 1977.

FİŞER DƏQİQ KRİTERİSİ « Фишера точный критерий; Fisher exact test » – bax, *Yeyts düzəlişi*, *Fişer – İrvin kriterisi*.

FİŞER F – PAYLANMASI « Фишера F – распределение; Fisher F – distribution », F – paylanma, Fişer–Snedekor paylanması, Snedekor paylanması, – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_{ab}(x) = \frac{1}{B[a/2, b/2]}\ (a/b)^{a/2}\ x^{b/2-1}[1+(a/b)\,x]^{-(a+b)/2}$$

düsturu ilə ifadə olunan, $(0, \infty)$-da topalanmış kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*, burada $a, b > 0$ – sərbəstlik dərəcələri sayları adlandırılan parametrlər, $B(a, b)$ – beta – funksiyadır. $a > 2$ olduqda bu paylanma müsbət asimmetriyalı, modasını $x = (a-2)\,b\,/\,a\,(b+2)$ nöqtəsində alan unimodal paylanmadır. F. F – p.-nın riyazi gözləməsi $b > 2$ olduqda $b/(b-2)$-yə, $b > 4$ olduqda isə $2b^2(a+b-2)/a(b-2)^2 \times$ $\times(b-4)$-ə bərabərdir. F. F-p. 2-ci növ *beta – paylanmaya* gətirilir (*Pirson paylanmaları* sisteminin VI tipinin xüsusi halına). F. F – p.-na $a/2$ və $b/2$ parametrlərli qamma – paylanma qanununa tabe uyğun X_1 və X_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri ilə ifadə olunan $F_{a,b} = bX_1/aX_2$ nisbətinin paylanması kimi baxmaq olar. $F_{a,b}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$ beta – paylanmanın paylanma funksiyası vasitəsilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\mathbf{P}\{F_{a,b} < x\} = B_{a/2,b/2}\left(\frac{(a/b)\,x}{1+(a/b)\,x}\right).$$

Bu münasibətdən F. F – p. qiymətlərinin beta – paylanma cədvəlləri vasitəsilə hesablanılmasında istifadə olunur. Əgər $a = m$ və $b = n$ tam ədədlər olarsa, onda

$$F_{mn} = \frac{\chi_m^2}{m} \Big/ \frac{\chi_n^2}{n} \qquad (*)$$

– F – nisbət paylanması sərbəstlik dərəcələri sayları m və n olan Fişer F – paylanma adlanır, burada χ_m^2 və χ_n^2 – uyğun olaraq, sərbəstlik dərəcələri sayları m və n olan xi – kvadrat paylanmaya tabe asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

F. F – p. riyazi statistikada fundamental rol oynayır və birinci növbədə iki seçimi dispersiyanın nisbətinin paylanması kimi meydana çıxır. $X_1, ..., X_m$ və $Y_1, ..., Y_n$, – (a_1, σ_1^2) və (a_2, σ_2^2) parametrlərli normal qanunlu ümumi çoxluqlardan seçimlər olsun.

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2,$$

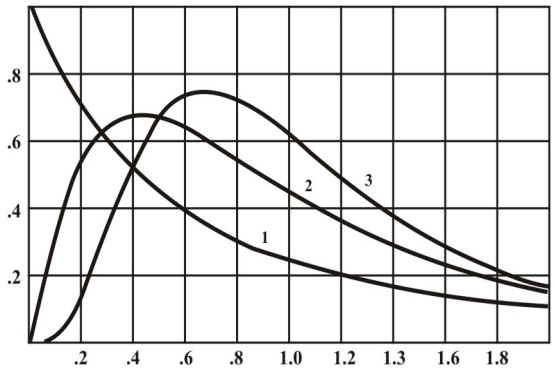
və

$$s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (Y_j - \overline{Y})^2$$

düsturları uyğun olaraq, σ_1^2 və σ_2^2 dispersiyalarının statistik qiymətləri olsun, burada $\overline{X} = \sum_i X_i/m$, $\overline{Y} = \sum_j Y_j/n$ – seçimi ortalardır. Onda dispersion nisbət adlandırılan

$$F = \sigma_2^2 s_1^2 / \sigma_1^2 s_2^2$$

nisbətinin paylanması $\sigma_1 = \sigma_2$ hipotezi şərtində $m-1$ və $n-1$ sərbəstlik dərəcələrli F. F – p.-dır (belə təyin olunan F. F – p. həmçinin dispersion nisbət paylanması kimi də adlandırılır).



Fişer F – paylanmasının sıxlıq funksiyaları: (1) $a = b = 2$; (2) $a = 4$, $b = 10$; (3) $a = b = 10$.

F – kriteri $\overline{F}$ statistikasına əsaslanır və bu kriteri, xüsusi halda, iki ümumi çoxluğun dispersiyalarının bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün, dispersion analizdə, reqression analizdə, çoxölçülü statistik analizdə istifadə olunur.

F. F – p.-nın universallığı onun digər paylanmalarla əlaqələrilə nəzərə çarpır. $m = 1$ qiymətində (*) düsturundakı F_{mn}-in kvadratının paylanması sərbəstlik dərəcəsi sayı n-ə bərabər Styudent paylanmasıdır. Normal paylanma və xi – kvadrat paylanmanın köməyilə F. F – p.-nın müxtəlif approksimasiyaları mövcuddur.

F. F – p.-nın dispersion analizə daxil olunması R. Fişerin (bax, [1]) adı ilə bağlıdır, lakin qeyd olunmalıdır ki, o, dispersion nisbət üçün z kəmiyyətindən istifadə etmişdi ki, bu kəmiyyət də F ilə $z = \frac{1}{2}\ln F$ bərabərliyi ilə bağlıdır. z təsadüfi kəmiyyətinin paylanması üçün R. Fişer, F. F – p. üçün cədvəlləri C. Snedekor (G. Snedecor, 1937) tərtib etmişlər. Müasir praktiki məsələlərdə daha sadə F. F – p.-ndan onun beta – paylanma və natamam beta – paylanma cədvəllərindən istifadə etməklə istifadəyə üstünlük verilir.

Bax, *Dispersion analiz*, *Fişer z – paylanması*.

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805–13; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

FİŞER z – PAYLANMASI « Фишера z – распределение; Fisher z – distribution » – ehtimal sıxlığı

$$p(x) =$$

$$= 2m_1^{m_1/2}\, m_2^{m_2/2}\, \frac{\Gamma((m_1+m_2)/2)\, e^{m_1 x}}{\Gamma(m_1/2)\Gamma(m_2/2)(m_1 e^{2x} + m_2)^{(m_1+m_2)/2}}$$

düsturu ilə ifadə olunan, $(-\infty, \infty)$-da topalanmış kəsilməz ehtimal *paylanmasıdır*, burada $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$ – sərbəstlik dərəcələri sayları adlandırılan tam ədədlərdir. F. z – p.-nın xarakteristik funksiyası aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$f(t) = [m_2/m_1]^{it/2} \ \frac{\Gamma((m_1+it)/2)\Gamma((m_2-it)/2)}{\Gamma(m_1/2)\,\Gamma(m_2/2)}.$$

$(1/m_2 - 1/m_1)/2$ və $(1/m_2 + 1/m_1)/2$ uyğun olaraq riyazi gözləmə və dispersiyadır.

Əgər F təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sərbəstlik dərəcələri sayları m_1 və m_2 olan *Fişer* F *– paylanması* olarsa, onda $z = \frac{1}{2}\ln F$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sərbəstlik dərəcələri sayı m_1 və m_2 olan F. z – p.-dir. Dispersion nisbət paylanması kimi məlum olan Fişer F – paylanması ilə birlikdə R. Fişer tərəfindən [1]-də 1924-də dispersion analiz ilk dəfə daxil olunmuşdur. Fişer belə hesab edirdi ki, statistik hipotezlərin yoxlanılmasında və dispersion analizdə F. z – p. əsas paylanma ola bilər. F. z – p. elə o dövrdə cədvəlləşdirilmişdir və ilk araşdırmalar z statistikasına aid olmuşdur, lakin müasir riyazi statistikada daha sadə F statistikasından istifadə olunur.

Əd.: [1] Fisher R., «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805–13; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

FİŞER – İRVİN KRİTERİSİ « Фишера – Ирвина критерий; Fisher – Irwin test », Fişer – Yeyts kriterisi, Fişer dəqiq kriterisi, – *əlamətlərin qoşmalıq cədvəli* $\|f_{ij}\|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ -də asılı olmamazlığın yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*, bu halda $f_{i.} = \sum_j f_{ij}$, $f_{.j} = \sum_i f_{ij}$, $i, j = 1, 2$ cəmlərinin əvvəlcədən qeyd olunduqları fərz olunur. $H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ asılı olmamazlığın ilkin hipotezidir, p – eyni indekslərli tezliklərə uyğun ehtimallardır, alternativ hipotez – heç olmazsa indekslərin bir cütü üçün bərabərsizlikdir. H_0 hipotezində ixtiyari seçim üçün və burada yeganə f_{11} təsadüfi kəmiyyəti üçün müşahidə ehtimalı

$$\mathbf{P}\{f_{ij} \mid f_{i.},\ f_{.j},\ i, j = 1, 2\}$$

hiperhəndəsi paylanmaya gətirir və bu da H_0-ın yoxlanılması üçün kriterinin alınması ilə nəticələnir (bax, [1], [2], [3]). Paylanma cədvəlləri və yaxınlaşmalar [2], [6]-da verilmişdir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Gibbons J. D., в кн.: Encyclopedia of statistical sciences, v. 3, N. Y., 1982, p. 118–21; [4] Lieberman G. J., Owen D. B., Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford (Calif.), 1961; [5] Vilaplana J. P., Table of hypergeometric probability distribution, pt. 2, Panama, 1976; [6] Лике ш П., Ляга Й., Основные таблицы математической статистики, пер. с чеш., М., 1985; [7] Pratt J. W., Gibbons J. D., Concepts of nonparametric theory, N. Y., 1981; [8] Fisher R. A., «J. Roy. Statist. Soc.», 1935, v. 98, p. 39–54; [9] Yates F., «J. Roy. Statist. Soc.», 1934, v. 1, p. 217–35; [10] Irwin J. O., «Metron.», 1935, v. 12, № 2, p. 83–94.

FİŞER – YEYTS KRİTERİSİ « Фишера – Йейтса критерий; Fisher – Yates test » – bax, *Fişer – İrvin kriterisi.*

FİZİKİ REALİZASİYA OLUNMA ŞƏRTİ « физической реализуемости условие; physical realizability condition » – bax, *İmpulsal keçid funksiyası*.

FİZİKİ SPEKTR SIXLIĞI « физического спектра плотность; physical spectrum density » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

FİZİKİ STATİSTİK HAVA PROQNOZU « физико-статистический прогноз погоды; physical statistical weather forecasting » – bax, *Statistik proqnozu, havanın*.

FKJ – BƏRABƏRSİZLİYİ « ФКЖ – неравенство; FKG – inequality » – məs., ixtiyari maqnit meydanı ilə ferromaqnit modelləri üçün tez-tez istifadə olunan *korrelyasion bərabərsizlikdir.*

FOK FƏZASI « Фока пространство; Fock space » – hissəcikləri sayı qeyri – məhdud kvant sistemlərinin təsvirində istifadə olunan fəzaların xüsusi sinfi üçün istifadə olunan ümumi addır. H – hər hansı Hilbert fəzası («birhissəli» fəza) və $H_{s,a}^{\otimes_n}$ – onun simmetriklənmiş (s) və ya antisimmetriklənmiş (a) tenzor qüvvət üstü olsun (n – hissəli vəziyyətlər fəzası; bax, [1]). Onda bu fəzaların düz cəmi

$$\mathscr{F}_{s,a}(H) = \oplus_{n=0}^{\infty} H_{s,a}^{\otimes_n}, \quad H_{s,a}^{\otimes_0} = C^1,$$

H üzərində simmetrik və ya bozon və antisimmetrik və ya fermion Fok fəzası adlanır. $H = L_2(\Omega, \mu)$ olduğu halda [(Ω, μ) – ölçülü fəzadır], F. f. $\mathscr{F}_{s,a}(L_2(\Omega, \mu))$ sayı artan $x_i \in \Omega$, $i = 1, ..., n$ dəyişənlərinin simmetrik və ya antisimmetrik funksiyalarının sonsuz

$$\Phi = \{f_0, f_1(x), ..., f_n(x_1, ..., x_n), ...\}$$

ardıcıllıqlarından ibarətdir. Bu halda

$$\|\Phi\|^2 = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |f_n(x_1, ..., x_n)|^2 \, d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_n).$$

Əd.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Рид М., Саймон Б., Метод современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977.

FOK İFADƏSİ kommutativ və antikommutativ münasibətlərin **« Фока представление** коммутационных и антикоммутационных соотношений; **Fock representation** of commutative and anticommutative relations **»** – bu münasibətlərin *Fok fəzasında* doğum və ölüm operatorları şəklində ən çox istifadə olunan ifadələri sinfidir. H Hilbert fəzasında L *prehilbert* kompleks *fəzası* üzərində kanonik kommutativ münasibətlərin və ya kanonik antikommutativ münasibətlərin ifadəsi H-da təsir göstərən və f-dən antixətti asılı

$(f \in L)$, $\{a(f), f \in L\}$ qapalı operatorlarının elə ailəsinə deyilir ki, bu operatorlar üçün aşağıdakı münasibətlər ödənilsin (heç olmazsa, H -dan olan vektorların hər yerdə sıx hər hansı çoxluğunda):

$$\left.\begin{aligned} a(f_1)a(f_2) \mp a(f_2)a(f_1) &= 0, \\ a(f_1)a^*(f_2) \mp a^*(f_2)a(f_1) &= (f_1,\ f_2)E, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

burada $(\cdot,\ \cdot)$, – L -də skalyar hasil, « – » işarəsi kanonik kommutativ münasibətə, « + » işarəsi kanonik antikommutativ münasibətə uyğundur, $a^*(f)$, – $a(f)$ operatoruna qoşma operatordur. Əgər H fəzasında bütün $a(f)$, $f \in L$ operatorları ilə sıfra çevrilən və bu operatorların doğurduğu operatorlar $*$ – cəbrinə nəzərən tsiklik vektor (vakuum) tapılarsa, (1) münasibətlərinin ifadəsi F o k i f a d ə s i adlanır. $\mathcal{F}_{s,a}(\overline{L})$ Fok fəzasında $\{a(f),\ f \in L\}$ ifadəsi buna bir misaldır, burada $\overline{L}$, – L -in tamamlanmasıdır və tamamlanma $(\varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_n)^{s,a}$ [$\varphi_i \in L$ vektorlarının simmetrik (s) və ya antisimmetrik (a) tenzor hasili] şəklində vektorlarda aşağıdakı düstur vasitəsilə təsir edən, L -in skalyar hasili üzrə tamamlanmasıdır:

$$a(f)(\varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_n)^{s,a} =$$
$$= \sqrt{n}(\varphi_i f)(\varphi_1 \otimes ... \otimes \overset{\vee}{\varphi_i} \otimes ... \otimes \varphi_n)^{s,a}, \qquad (2)$$

burada φ_i üzərində $\vee$ işarəsi bu vuruğun olmaması kimi anlaşılır və $a(f)\mathbf{1} = 0$, $\mathbf{1} \in \mathcal{F}_{s,a}(L)$ – vakuum vektorudur.

(1) münasibətlərinin ixtiyari F. i. (2) ifadəsinə unitar ekvivalentdir. L sonluölçülü fəza olduğu halda (1) münasibətlərinin ixtiyari ifadəsi F. i.-dir, sonsuzölçülü L halı üçün hətta qeyri – Fok ifadəsi də mövcuddur (bax, [2]).

Əd.: [1] Б е р е з и н Ф. А., Метод вторичного квантования, 2 изд., М., 1986; [2] Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

FOKKER – PLANK TƏNLİYİ « Фоккера – Планка уравнение; Fokker – Planck equation », K o l m o g o r o v d ü z t ə n l i y i, – bax, *Diffuzion proses*, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Stoxastik differensial həndəsə*.

FOKKER – PLANK – KOLMOQOROV TƏNLİYİ « Фоккера – Планка – Колмогорова уравнение; Fokker – Planck – Kolmogorov equation » – bax, *Stasionar Markov prosesi*, *Kolmoqorov tənlikləri*.

FORSAYT METODU « Форсайта метод; Forsythe method / algorithm » – Qram – Şmidt ortoqonalizasiya metodunun rekurrent variantı olub, ən kiçik kvadratlar metodu əsasında parabolik interpolyasiya məsələlərində mühüm rol oynayır.

Ölçmələrin nəticələri y_i -lərin, $i = 1, ..., n$ aşağıdakı şəkildə olduğu fərz olunur:

$$y_i = \sum_{j=0}^{p} \theta_j t_i^j + \varepsilon_i =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} \alpha_j \varphi_j(t_i) + \varepsilon_i, \quad \mathbf{M}\varepsilon_i = 0, \quad \mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2, \qquad (1)$$

burada j üstlü $\varphi_j(t)$ çoxhədliləri ortonormalanma şərtləri –

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(t_i)\varphi_k(t_i) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}, \quad 0 \le k, j \le p \qquad (2)$$

şərtlərini ödəyirlər. Bu halda aydındır ki,

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \varphi_1(t) = \lambda_1\left(t - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)$$

və

$$\lambda_j\varphi_j(t) = (t - \beta_j)\varphi_{j-1}(t) - \gamma_j\varphi_{j-2}(t),$$

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi_{j-1}^2(t_i), \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi_{j-1}(t_i)\varphi_{j-2}(t_i)$$

F o r s a y t m ü n a s i b ə t l ə r i doğrudur (bax, [1]), burada λ_j konstantları (2) normalanma şərtindən təyin olunurlar:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi^2(t_i) = 1.$$

Ortonormalanmış (1) modelinə ən kiçik kvadratlar metodunun tətbiqi aşağıdakı bir sıra nəticələrə gətirir:

1) $\hat{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_j(t_i)$;

2) $\mathbf{D}(\hat{\alpha}_j) = \mathbf{D}(\varepsilon_i) = \sigma^2$;

3) $s^2 = \hat{\sigma}^2 = (n - p - 1)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{j=1}^{p} \hat{\alpha}_j^2\right)$.

Əgər approksimaedici çoxhədlinin tərtibi əvvəlcədən məlum olmazsa və hesablama prosesində seçilərsə, onda p -nin bir vahid artırılması nəticəsində $\hat{\alpha}_0, ..., \hat{\alpha}_p$ statistik qiymətləri dəyişmir,

$$\alpha_{p+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{p+1}(t_i),$$

və

$$(\hat{\sigma}^2)_{p+1} = \frac{n - p - 1}{n - p - 2}(\hat{\sigma}^2)_p - \frac{1}{n - p - 2}\hat{\alpha}_{p+1}^2$$

olur.

Reqression analiz üzrə tətbiqi proqramların müasir paketlərində baxılan metod addımlı reqressiya prosedurunun mühüm əsas hissəsini təşkil edir.

Əd.: [1] F o r s y t h e G., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1957, v. 5, p. 74–88; [2] Х у д с о н Д., Статистика для физиков, пер. с англ., М., 1970.

FORSAYT MÜNASİBƏTİ « Форсайта соотношение; Forsythe relation / equation » – bax, *Forsayt metodu*.

FORTE – XARKEVİÇ – ROZANOV SPEKTRİ « Форте – Харкевича – Розанова спектр; Fortet – Kharkevich – Rozanov spectrum » – bax, *Ortalanmış spektral funksiya*.

FORTE – KAS TEOREMİ « Форте – Каца теорема; Fortet – Kac theorem » – bax, *Limit teoremləri diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin*.

FORTE – MURYE METRİKASI « Форте – Мурье метрика; Fortet – Mourier metric » – ξ – strukturdan istifadə olunmaqla aşağıdakı şəkildə təyin olunan ehtimal metrikasıdır (bax, *Ehtimal metrikası*; struktur). $(U,\ d)$ – hər hansı separabel metrik fəza, $\mathfrak{X}$ – qiymətləri U -dan olan təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu və $G_q^p = \{f\}$ U -da təyin olunmuş elə həqiqi funksiyalar çoxluğudur ki, bunlar üçün aşağıdakı münasibət:

$$L_p(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,\ y)\,[\max(1,\ d(x,\ c),\ d(y,\ c))]^{p-1}} : \right.$$

$$\left. x \neq y,\ x, y \in U \right\} \leq 1, \quad p \geq 1, \quad 0 < q \leq \infty$$

və bundan başqa, $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in U\} \leq q$ münasibəti də ödənilir, burada c, – U -dan olan sabit elementdir.

$$\zeta(X,\ Y;\ G_q^p) = \sup\{\,|E(f(X) - f(Y))| : f \in G_q^p\}$$

funksionalı Forte – Murye metrikası adlanır.

F. – M. m.-na aid misallar: 1) $\zeta(X, Y; G_\infty^1)$ – *Kantoroviç metrikası,* 2) $\zeta(X, Y; G_1^1)$ – Dadli metrikasının modifikasiyasıdır (bax, [2]).

Əgər $q < \infty$ olarsa, onda F. – M. m. $\mathfrak{X}$ -də zəif yığılma topologiyasını doğurur. Əgər $X_n \in \mathfrak{X}$ ardıcıllığı hər hansı $c \in U$ üçün $m_n = \mathbf{M}\,d^p(X_n,\ c) < \infty,\ \ n = 0, 1, \ldots$ şərtini ödəyərsə, onda $\zeta(X_n, X_0; G_\infty^p) \to 0$, $n \to \infty$ yığılması momentlərin $m_n \to m_0$ yığılması ilə birlikdə $\pi(X_n,\ X_0^\infty) \to 0$ zəif yığılmasına ekvivalentdir (π *Levi – Proxorov metrikasıdır*).

Əd.: [1] Forter R., Mourier E., «Ann. Sci. Êcole norm. supér.», 1953, v. 70, № 3, p. 266–85; [2] Dudley R. M., «Aarhus Univ. Lect. Notes Ser.», 1976, v. 45; [3] Rachev S. T., «Publ. Inst. Statist. Univ. Paris», 1982, v. 27, № 1, p. 27–47; [4] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 264–87.

FOSTER KRİTERİSİ « Фостера критерий; Foster criterion » – bax, *Stasionar Markov prosesi*.

FRAKTAL « фрактал; fractal », fraktal çoxluq – məzmunu tamamilə müəyyən olunmamış termindir. Bu termin əsasən kəsri dim. – ölçülü «fraktal» çoxluqların adı kimi istifadə olunur (bu dim. – ölçü, çoxluqların geniş sinfi üçün, üstüstə düşən Hausdorf və ya «entropik» ölçü ola bilər və prinsip etibarilə bu müəyyən olunmalıdır); bu şərhə qədər dəqiqliklə «fraktal» dim. – ölçü dəqiq termindir. Lakin bu terminin müəllifi B. Mandelbrot [1]-də, onu maraqlandıran çoxluqların iki cəhətini qeyd etmişdir: «F. adlandırdığım araşdırdığım, bütün fiqurlar mənim anlamımda «qeyri – requlyarlıq, lakin özünəoxşarlıq» xassəli olmuşlar. «Oxşar» (rus. подобный) sözü həmişə klassik məna, yəni «xətti böyüdülmüş və ya kiçildilmiş» mənasında anlaşılmamalıdır, lakin o, daha münasib və geniş izahlı «bənzər» (rus. похожий) sözü ilə uzlaşır (bax, [2]-də, onun məqaləsinə)». Baxılan obyektlərin «requlyarlıq» və ya «kəsilənlik» xassəsinin məhz hansı anlam daşıdığını dəqiq söyləmək çətindir; bu halda aydındır ki, mənfi xarakteristikalar, yəni onların nə çoxobrazlılar, nə də ki, bunların hesabi birləşmələri olduğu hesaba alınmır. M çoxluğunun «özünəoxşarlığı» (rus. самоподобие) belə anlaşılır: hər hansı x nöqtəsinin ətrafı $U_n(x)$ müxtəlif dərəcədə böyüdülməklə mikroskopda müşahidə olunarsa, böyüdülmə artdıqca mikroskopun görüntü sahəsində alınan mənzərələrin bir-birinə oxşarlığı daha çox nəzərə çarpır. Bu mülahizələr olduqca aydın dəqiqləşmələr tələb edir [məs., ətraflar, adətən, radiusları r_n -ə bərabər kürələr kimi götürülərək, vahid radiuslu D kürəsinə qədər böyüdülür, yəni y -i $(y-x)/r_n$ -ə çevirən $g_n : U_n \to D$ inikasına baxılır; g_n və $(U_n \cap M)$ çoxluqları arasında oxşarlıq ondan ibarətdir ki, bu çoxluqlar (ola bilər ki, nə cürsə çevrilmiş, yəni hansısa ortoqonal çevirmələrə məruz qalmış) Hausdorf metrikasında bir-birinə yaxın olur] və bu dəqiqləşmələr daxil olunduqda «özünəoxşarlıq» tamamilə dəqiq anlayış olur. B. Mandelbrot izah edir ki, kəsri Hausdorf dim. – ölçülü çoxluq, əlbəttə ki, «qeyri – requlyar» çoxluqdur, lakin o, «özünəoxşar» olmaya bilər, lakin tam Hausdorf dim. – ölçülü çoxluq tamamilə «qeyri – requlyar» (məs., «kəsiklənən») ola bilər və bununla belə, lokal «özünəoxşarlıq» xassəsinə malik olmaya bilər. F. üçün digər xassənin, ilkin olaraq əsas xassə kimi adlandırılan: Hausdorf dim. – ölçüsü topoloji ölçüdən böyükdür (bax, [1]) xassəsinin ödənilməsi tamamilə zəruri deyildir. Buna görə də, «fraktallıq» hərfi mənada anlaşılmamalıdır. İlkin etimologiyanın əksinə olaraq, onun ingilis variantı «fraction» – hərfi mənada «parçalanmış» (rus. изломанный) mənasında (bəzən də «kəsiklənmiş») işlənən latın «fractus» sözü ilə əlaqələndirilə bilinər.

B. Mandelbrot F.-a böyük diqqət yetirərək, həm nəzəri riyaziyyat, həm də təbiətşünaslıqda ona aid çoxsaylı misallar göstərərək, əminliklə qeyd etmişdir ki, F. hələ məktəb kursundan adət edilmiş məlum həndəsi fiqurlar kimi, «tamhüquqlu» obyektlərdir. Bir sıra riyazi məsələlərdə onun ilk nəşrləri ərəfəsinə qədər kəsri dim. – ölçülü çoxluqlara, təbii olaraq təsadüf olunmuşdu (yəni «qeyri – requlyar» çoxluqlara; bax, [4]-də riyaziyyatın müxtəlif bölmələrindən bəzi misallara): B. Mandelbrot ədədi eksperimentlərin verilənlərinə əsaslanaraq belə tip yeni və mühüm misallar göstərmişdir; bu bir növ təbliğat xarakterli olmuşdur. Lakin o, lap əvvəldən bunlarda mühüm «özünəoxşarlıq» xassəsinə malik olmaya diqqət yetirmişdir. Əlbəttə ki, «özünəoxşarlıq» «artefakt» ola bilər, yəni insan tərəfindən yaradıla bilinər. Klassik misallarda – sanki heç yerdə differensiallanmayan K. Veyerştrass (K. Weierstass) və B. Van-der – Varden (B. Van de Wairden) funksiyalarının, C. Peano (G. Peano), H. Kox (H. Koch) və D. Hilbert (D. Hilbert) əyrilərinin, V. Serpinski (W. Sierpinski) xalçası kimi misallarda vəziyyət belədir. Bütün bu misallarda müəyyən obyekt sonsuz sayda addımlarla qurulur və müəlliflər təsviri asan etmək məqsədilə bu addımları bir-birinə oxşar şəkildə edirdilər. Lakin digər hallarda «özünəoxşarlıq» ilkin tərif və ya quruluşda bilavasitə olmur; buna diqqət yetirmək olduqca səmərəli olurdu. Bir sıra hallarda bu və ya digər çoxluqların «fraktallığı» haqqında (dim. – ölçü haqqında və «özünəoxşarlıq» haqqında hökmlər də daxil olmaqla) müşahidələr ciddi araşdırmalar prosesində təsdiq olunmuşdur və bu halda digər cəhətlərlə əlaqədar mühüm prosesə nail olunmuşdur.

Bu xüsusilə «Konform dinamikaya», yəni kompleks dəyişənlər oblastında analitik funksiyaların iterasiyasına aiddir, bax, [2], [3].

Təbiətşünaslıq oblastında, məs., qayalıqlı sahil, dağ silsiləsi, rəqs edən alov, bulud, cəng koloniyasi F.-dırlar. B. Mandelbrot hətta müxtəlif təbii elmi misallarda özünəoxşarlığın kəmiyyət xarakteristikalarını da göstərmişdir. Əlbəttə ki, bu misallarda riyazi misallardan fərqli olaraq, özünəoxşarlıq yalnız hər hansı məhdud diapozonlu miqyaslarda ödənilir. B. Mandelbrota görə cansız təbiətdə diapazonun ucları 10^4 dəfə, bioloji misallarda isə 10^2 dəfə fərqlənə bilər. Belə xarakterli ayrı-ayrı mülahizələrə əvvələr də təsadüf olunurdu, lakin yalnız B. Mandelbrotdan sonra bir çox müəlliflər təbiətdə çoxsaylı F. aşkar etmişlər (məs., toz burumları və kolloidlərin bir-birinə yapışmış «kiç»ləri F.-dırlar; kürəvi ildırımın da fraktal olduğu fərz olunur). Belə görünür ki, təbiətdə formaları yüksək dəqiqliklə adi «Evklid» fiqurlarına malik obyektlərlə yanaşı, həqiqətən də, «fraktal» formalı obyektlərə də təsadüf olunur. Əlbəttə ki, bu yalnız fenomenologiyadır; belə bir sual doğur: bu və ya digər obyekt hansı səbəbdən hansısa kəmiyyət xarakteristikalarına malik olan fraktal formalı obyekt olur? Məlum olduğu kimi, riyazi təbiətşunaslıqda bu suala əksər hallarda cavab alınmamışdır.

F.-ın geniş populyarlığı ilə bağlı olaraq, ixtiyari kəsri dim. – ölçülü ölçüləri əhatə edən həndəsi ölçü nəzəriyyəsinin bu sahəsi böyük marağa səbəb olmuşdur (lakin özünəoxşarlıqla bağlılıq olmaya da bilər, bax, [4]).

Əd.: [1] Mandelbrot B. B., On fractal geometry and a few of the mathematical questions it has raised. «Proc. Intern. Congr. Math., Warszawa. 1983», v. 2, Warszawa, 1984, p. 1661–75; [2] Пейтген Х. О., Рихтер П. Х., Красота фракталов, пер. с англ., М., 1993; [3] Carleson L., Gamelin T. W., Complex dynamics, N. Y., 1993; [4] Falconer K. J., The geometry of a fractal sets, N. Y. – [a. o.], 1985.

FRAKTAL BRAUN HƏRƏKƏTİ « **фрактальное броуновское движение; fractional brawnian motion** » – bax, *Avtomodel proses*.

FUNDAMENTAL LEMMA(sı) riyazi statistikanın « **фундаментальная лемма** математической статистики; **fundamental lemma** of mathematical statistics» – bax, *Neyman – Pirson lemması*.

FUNDAMENTAL MATRİS Markov zəncirinin « **фундаментальная матрица** цепи Маркова; **fundamental matrix** of a Markov chain » – bax, *Markov zənciri*; fundamental matris.

FUNKSİONAL EHTİYATDA SAXLAMA « **функциональное резервирование; functional redundancy** » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

FUNKSİONAL İNTEQRAL « **функциональный интеграл; path integral** » – bax, *Kontinual inteqral*.

FURYE ÇEVİRMƏSİ diskret « **Фурье преобразование** дискретное; discrete **Fourier transform** » – bax, *Diskret Furye çevirməsi*.

FURYE ÇEVİRMƏSİ qrupda ehtimal paylanmalarının « **Фурье преобразование** распределения вероятностей на группе; **Fourier transform** of a probability distribution on a group » – G qrupunun bir-birinə ekvivalent olmayan ayrılmayan bütün unitar ifadələrinin $\{A_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$ çoxluğunda

$$\hat{\mu}(\gamma)=\int_G A_\gamma(g)\mu(dg) \qquad (*)$$

qaydası ilə verilmiş operatorqiymətli funksiyadır (burada μ, – G qrupunda ehtimal paylanmasıdır). İnteqralı Boxner inteqralı kimi təyin etmək olar.

Əgər G qrupu lokal kompakt olarsa, onda G-də ehtimal ölçülərinin F. ç. $\hat{\mu}(\gamma)$ aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) F. ç. $\hat{\mu}(\gamma)$ ixtiyari $\gamma\in\Gamma$ üçün hər hansı Hilbert fəzasında məhdud xətti operatordur və onun norması vahidi aşmır;

2) əgər A_γ vahidi ifadədirsə, yəni $A_\gamma(g)=\mathbf{I}$ bərabərliyi ixtiyari $g\in G$ üçün ödənilərsə, onda $\hat{\mu}(\gamma)=\mathbf{I}$ bərabərliyi doğrudur, burada $\mathbf{I}$, – H-da vahidi operatordur.

3) μ ölçüləri və onların F. ç.-ləri $\{\hat{\mu}(\gamma),\ \gamma\in\Gamma\}$ arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir;

4) əgər μ_1 və μ_2 üçün $\mu_1*\mu_2$ konvolyusionu təyin olunmuşdursa, onda onun F. ç. $\hat{\mu}_1(\gamma)\times\hat{\mu}_2(\gamma)$ ilə üst-üstə düşür;

5) əgər $\overline{\mu}$ ölçüsü μ ölçüsü üzrə $\overline{\mu}(B)=\mu(B^{-1})$ qaydası ilə təyin olunarsa (burada $B^{-1}=\{g\in G: g^{-1}\in B\}$), onda $\hat{\overline{\mu}}$ operatoru $\hat{\mu}(\gamma)$-ya qoşma operatordur; μ ölçüsü, yalnız və yalnız, o halda simmetrik ölçüdür ki, $\hat{\mu}(\gamma)$ öz-özünə qoşma operator olsun;

6) G-də ehtimal ölçüləri μ_n-lər ardıcıllığı μ ehtimal ölçüsünə, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, $\hat{\mu}_n(\gamma)\to\hat{\mu}(\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$ zəif yığılması ödənilsin.

Əgər G Mur qrupudursa (məs., kompakt qrupdursa), onda ayrılmayan bütün ifadələr sonluölçülüdürlər və belə hesab etmək olar ki, bunlar matris şəklində verilir. Onda $\hat{\mu}$ matris-qiymətli funksiyadır. (*) düsturunda inteqrallama bu halda matrislərin elementləri üzrə ineqrallama kimi anlaşılmalıdır.

Əgər G Abel qrupu olarsa, onda onun bütün ayrılmayan unitar ifadələri birölçülü olub, G qrupunun hər hansı xarakterinə vurma operatorlarına ekvivalentdirlər. Buna görə də, Abel qrupu G-də ehtimal ölçüsü μ-nün F. ç. kimi G qrupunun xarakterlər qrupu $\hat{G}$-də bütün $\gamma\in\hat{G}$ üçün $\hat{\mu}(\gamma)=\int_G\gamma(g)\,\mu(dg)$ qaydası ilə verilmiş kompleksqiymətli $\hat{\mu}(\gamma)$ funksiyası nəzərdə tutulur. Bu halda $\hat{\mu}(\gamma)$, $\gamma\in\hat{G}$ μ ehtimal paylanmasının G Abel qrupunda xarakteristik paylanma funksiyası adlanır. Yuxarıda 1) – 6) xassələri $\hat{\mu}(\gamma)$ funksiyasının uyğun xassələri kimi ifadə olunur. Məs., bütün $\gamma\in\Gamma$ üçün $|\hat{\mu}(\gamma)|\le 1$; $\hat{\mu}(\mathbf{1})=1$, $\mathbf{1}\in\hat{G}$ vahidi xarakterdir; $\mu_1(\gamma)*\mu_2(\gamma)=\hat{\mu}_1(\gamma)*\hat{\mu}_2(\gamma)$. Bundan başqa, $\hat{\mu}(\gamma)$ – kəsilməz funksi-

yadır və xarakteristik funksiyalar üçün kəsilməzlik teoreminin analoqu da bu halda doğrudur.

Klassik halda, $G = \mathbb{R}^1$ və ya $\mathbb{R}^n$ olduqda, bütün xarakterlər $\gamma_t(x) = e^{itx}$, $x \in G = \mathbb{R}^1$, $t \in \hat{G} = \mathbb{R}^1$ şəklində olur və μ ölçüsünün F. ç. adi xarakteristik funksiya anlayışı ilə üst-üstə düşür, yəni

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^1} \exp\{itx\}\,\mu(dx).$$

Əd.: [1] Г р е н а н д е р У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [2] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

FURYE ÇEVİRMƏSİ s o n l u **« Фурье преобразование** к о н е ч н о е; f i n i t e **Fourier transform »** – bax, *Sonlu Furye çevirməsi*.

FURYE ÇEVİRMƏSİ s ü r ə t l i **« Фурье преобразование** б ы с т р о е; f a s t **Fourier transform »** – bax, *Sürətli Furye çevirməsi*.

FURYE – STİLTYES ÇEVİRMƏSİ « Фурье – Стилтьеса преобразование; Fourier – Stiltjes transform » – bax, *Xarakteristik funksiya*.

GELFAND İNTEQRALI « Гельфанда интеграл; Gelfand integral » – qiymətləri Banax fəzası B-dən olan funksiyalar üçün Lebeq inteqralının ümumiləşmələrindən biridir. $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ – ölçülü fəza, $\mathscr{B}$, – σ – cəbr, μ, – $\mathscr{B}$-də σ – sonlu ölçü olsun. X, – Ω-dan $\mathscr{B}$-yə elə inikas olsun ki, B-yə qoşma olan B^*-dan ixtiyari x^* üçün $x^*(X)$ ədədi funksiyası ölçülən və Lebeq üzrə inteqrallanan olsun. Onda X-ə qoşma olan ikinci bir fəzadan elə x^{**} elementi vardır ki, bütün $x^* \in X^*$ üçün

$$x^{**}(x^*) = \int_{\Omega} x^*(x)\, d\mu$$

bərabərliyi doğrudur. x^{**} elementi Gelfand inteqralı adlanır.

Əgər *Pettis inteqralı* mövcuddursa, G. i. onunla üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Гельфанд И. М., «Зап. Науково-досл. инст. матем. и мех. Харк. держ. унів.та Харк. матем. тов.», 1936, т. 13, в. 1, с. 35–40; [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962.

GENERATOR(u) korrelyasion pəncərənin **« генератор** корреляционного окна; lag window **generator »** – bax, *Korrelyasion pəncərə.*

GENERATOR(u) prosesin **« генератор** процесса; **generator** of a process **»** – proses üçün təyin olunmuş anlayışdır; *doğuran operator* və ya *infinitezimal operator* kimi də adlanır. Bax, *Doğuran operator*, *İnfinitezimal operator*, *Kolmoqorov tənlikləri.*

GENİŞLƏNDİRİLMİŞ STOXASTİK İNTEQRAL « расширенный стохастический интеграл; extended stochastic integral » – qeyri – antisipativ funksiyaların adi stoxastik inteqralı (İto, Stratonoviç və s.) ilə üst-üstə düşən, təsadüfi funksiyanın Viner prosesi w üzrə inteqralıdır. G. s. i.-ın bir neçə konstruksiyası məlumdur.

Hitsuda – Skoroxod konstruksiyası (bax, [1], [2]). $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası, $\mathscr{A} = \sigma\{w\}$, $H = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ olsun. H-dan olan ixtiyari $F = (F_t)$ funksiyası üçün

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t_1, \ldots, t_n))$$

ifadəsi doğrudur, burada f_n (təsadüfi olmayan) funksiyaları $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, \|\cdot\|_{n+1})$ fəzasındandır, I_n – *çoxqat Viner inteqrallarıdır*.

Fərz olunur ki,

$$\mathscr{D}(\mathscr{I}) = \left\{ F : p^2(F) = \sum (n+1)! \left\| \tilde{f} \right\|_{n+1}^2 < \infty \right\},$$

burada $\tilde{f}_n$, – f_n-in bütün arqumentlər üzrə simmetrizasiyasıdır. $F \in \mathscr{D}(\mathscr{I})$ üçün G. s. i. –

$$\mathscr{I}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(f_n(t, t_1, \ldots, t_n))$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Çoxqat Viner inteqrallarının xassələrinə əsasən, $\mathbf{M}\mathscr{I}(F) = 0$, $\mathbf{M}|\mathscr{I}(F)|^2 = p^2(F)$ olduğu alınır. Əgər F H-dan olan qeyri – antisipativ funksiya olarsa, onda $F \in \mathscr{D}(\mathscr{I})$ və $\mathscr{I}(F)$ İto inteqralı $\int F_t\, dw_t$ ilə üst-üstə düşür. $F \to \mathscr{I}(F)$ inikası H-dan $L^2(\Omega)$-ya qapalı xətti operatordur. $\mathscr{I}$ operatoru *stoxastik törəmə* D ilə sıx əlaqəlidir. Əgər $F \in H$ olarsa, bütün təsadüfi kəmiyyətlər $\mathscr{D}(D)$ stoxastik törəməsinin təyin olunma oblastındandırlar və $\int \|DF_t\|_H^2\, dt < \infty$ olarsa, onda $F \in \mathscr{D}(\mathscr{I})$ və

$$\mathbf{M}|\mathscr{I}(F)|^2 = \|F\|_H^2 + \mathbf{M}\iint DF_t(s)\, DF_s(t)\, ds\, dt\,.$$

$\mathscr{I}$ və D operatorları aşağıdakı mənada qoşmadırlar: əgər $\eta \in \mathscr{D}(D)$, $F \in \mathscr{D}(\mathscr{I})$ olarsa, onda $\mathbf{M}\langle D\eta, F\rangle = \mathbf{M}\eta\, \mathscr{I}(F)$ bərabərliyi doğrudur; burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$, – $L^2(\mathbb{R}_+)$-da skalyar hasildir.

Göstərilən eynilik differensiallanan ölçülər nəzəriyyəsində G. s. i. təyin etmək məqsədilə istifadə olunur, burada, adətən, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ölçü ilə verilən lokal qabarıq fəza fərz olunur, F funksiyasına qiymətləri $L^2(\mathbb{R}_+)$-dan olan Ω-da verilmiş vektor meydan kimi baxılır, stoxastik törəmə isə hər hansı zəif mənada istiqamət üzrə törəmə kimi anlaşılır. Belə yanaşmada G. s. i. P ölçüsünün F vektor meydanı boyunca loqarifmik törəməsi olur (bax, [3]). Hilbert fəzaları halında G. s. i. $\mathscr{D}(\mathscr{I})$-dan daha geniş inteqralaltı funksiyalar sinfində təyin oluna bilinir.

Qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi konstantı $\mathscr{I}$ işarəsindən xaricə çıxarmaq olmaz. Misal: $F = w_T I_{[0,T]}$. Onda $\mathscr{I}(F) = w_T^2 - T$.

Oqava konstruksiyası (simmetrik G. s. i.; bax, [4], [5]). $F \in H$, $\{e_i\}$, – $L^2(\mathbb{R}_+)$-da tam ortonormalanmış sistem olsun. F üçün Furye sırasının dw_t üzrə formal inteqrallanmasından alınan $\sum \langle F, e_i \rangle I_i(e_i)$ sırasının cəmi stoxastik inteqral

anlaşılır. Əgər $\int \|\mathscr{D}F_t\|_H^2\, dt < \infty$ olarsa, onda $\mathscr{D}F_t(s)$ nüvəsinin sanki yəqin sonlu izi vardırsa, onda simmetrik G. s. i. mövcuddur və o, $\mathscr{T}(f) + \operatorname{tr}\mathscr{D}F$ ilə üst-üstə düşür. Qeyri – antisipativ funksiya İto prosesi olduqda simmetrik G. s. i. *Stratonoviç stoxastik inteqralı* ilə üst-üstə düşür.

G. s. i. sıçrayışvari funksiyaların inteqrallarından limitə keçidlə də təyin olunur.

Əd.: [1] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 223–37; [2] Кабанов Ю. М., Скороход А. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов. (Друскининкай 25–30 ноября 1974), ч. 1, Вильнюс, 1975, с. 123–67; [3] Норин Н. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 1, с. 114–24; [4] Nualart D., Zakai M., «Probab. Theory and Related Fields», 1986, v. 73, № 2, p. 255–80; [5] Мацкявичюс В., «Лит. матем. сб.», 1984, т. 24, № 1, с. 121–130; [6] Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 3, с. 512–15.

GENİŞYAYIMLI KANAL « широковещательный канал; broadcast channel » – bir ötürücüdən bir neçə qəbulediciyə informasiya ötürməsini təsvir edən, informasiya nəzəriyyəsində çoxkomponentli kanallardan biridir. Diskret stasionar ikiçıxışlı yaddaşsız kanal giriş əlifbası $\mathscr{Y}$, iki çıxış əlifbası $\widetilde{\mathscr{Y}_1}$, $\widetilde{\mathscr{Y}_2}$ və keçid ehtimalları $p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \mid y)$ ilə verilir, burada $\mathscr{Y}$, $\widetilde{\mathscr{Y}_1}$, $\widetilde{\mathscr{Y}_2}$ – sonlu çoxluqlar, $\tilde{y}_1 \in \widetilde{\mathscr{Y}_1}$, $\tilde{y}_2 \in \widetilde{\mathscr{Y}_2}$, $y \in \mathscr{Y}$. Belə G. k. üçün kodlama $K=1$, $L=2$ olduqda kanallar şəbəkəsi üçün (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri*) ümumi kodlama sxemi ilə təsvir olunur. Sistemdə üç tip məlumat vardır ($M=3$): bir məlumat birinci qəbuledən üçün bir məlumat, ikinci qəbuledən üçün bir məlumat isə hər iki qəbul edən üçün nəzərdə tutulur. Bu halda kodlayıcı qurğuların sayı 1-ə bərabərdir və $A_1 = \{1, 2, 3\}$ dekodlayıcı qurğuların sayı isə 2-yə bərabərdir və $B_1 = \{1, 3\}$, $B_2 = \{2, 3\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$. Beləliklə, birinci çıxışdakı dekoder məlumatın birinci və üçüncü komponentini bərpa etməlidir, ikinci çıxışdakı dekoder ikinci və üçüncü komponentləri bərpa etməlidir. Baxılan ikiçıxışlı G. k.-ın ötürücülük qabiliyyəti oblastı keçid ehtimalları $p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \mid y)$-lərdən deyil, yalnız uyğun $p(\tilde{y}_1 \mid y)$ və $p(\tilde{y}_2 \mid y)$ marginal ehtimallarından asılı olur (tərs əlaqə olmadıqda).

İkiçıxışlı G. k. üçün ümumi kodlama sxeminin xüsusi halları ümumi informasiyasız genişyayımlı kanaldır (üçüncü komponent iştirak etmir, odur ki, $A_1 = \{1, 2\}$, $B_1 = C_1 = \{1\}$, $B_2 = C_2 = \{2\}$) və asimmetrik genişyayımlı kanaldır (birinci və ikinci komponent yoxdur, odur ki, $A_1 = \{1, 3\}$, $B_1 = \{1, 3\}$, $C_1 = \{1\}$, $B_2 = \{3\}$, $C_2 = \{2\}$).

G. k.-ın ötürücülük qabiliyyəti oblastı $\mathscr{R}$ üçün ümumi halda yalnız bəzi sərhədlər (daxildən və xaricdən) məlumdur. Lakin G. k.-ın bir sıra sinifləri üçün $\mathscr{R}$-i dəqiq hesablamaq mümkündür. Məs., asimmetrik G. k.-ın ötürücülük qabiliyyəti oblastı elə (R_1, R_3) cütlərindən ibarətdir ki, bunlar üçün

$$0 \le R_3 \le I(U; \tilde{Y}_2),$$

$$0 \le R_1 + R_3 \le \min\{ I(Y; \tilde{Y}_1), I(Y; \tilde{Y}_1 \mid U) + I(U; Y_2) \},$$

(I – informasiya miqdarıdır) münasibətləri $(U, Y, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$ təsadüfi kəmiyyətlər dördlüyü üçün ödənilir və bu təsadüfi kəmiyyətlər uyğun olaraq $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \widetilde{\mathscr{Y}_1}, \widetilde{\mathscr{Y}_2})$-dən qiymətlər alır ($\mathscr{U}$ – elementlərinin sayı $|\mathscr{U}|$ olan, $|\mathscr{U}| \le |\mathscr{Y}| + 2$ şərtini ödəyən hər hansı sonlu çoxluqdur); bununla yanaşı bu cütlər, $p(u, y, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = p(u, y)\, p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \mid y)$ birgə ehtimal paylanmaları ilə verilir, burada $p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \mid y)$ – baxılan G. k.-ın keçid ehtimallarıdır.

Ümumi halda ötürücülük qabiliyyəti oblastı $\mathscr{R} = \{(R_1, R_2, R_3)\}$ iki böyük, ikiçıxışlı G. k. üçün pisləşmiş G. k. və semideterminik G. k. üçün məlumdur. Bu halda əgər marginal $p_1(\tilde{y}_1 \mid y)$ və $p_2(\tilde{y}_2 \mid y)$ keçid ehtimalları hər hansı $q(\tilde{y}_2 \mid \tilde{y}_1)$, $\tilde{y}_1 \in \widetilde{\mathscr{Y}_1}$, $\tilde{y}_2 \in \widetilde{\mathscr{Y}_2}$ keçid ehtimallarının toplusu üçün

$$p(\tilde{y}_2 \mid y) = \sum_{\tilde{y}_1} q(\tilde{y}_2 \mid \tilde{y}_1)\, p(\tilde{y}_1 \mid y)$$

münasibətilə əlaqəlidirlərsə, ikiçıxışlı diskret G. k. pisləşmiş kanal (rus. ухудшенный канал) (ikinci komponent birincidən pisdir) adlanır. Əgər diskret G. k.-ın komponentlərindən biri determinik kanaldırsa, yəni bütün $y \in \mathscr{Y}$, $\tilde{y}_1 \in \widetilde{\mathscr{Y}_1}$ üçün $p_1(\tilde{y}_1 \mid y) = 0$ və ya $p_1(\tilde{y}_1 \mid y) = 1$ olarsa, G. k. semideterminik kanal adlanır.

G. k.-ın baxılan modelinin bir çox ümumiləşmələri vardır. Məs., diskret və kəsilməz zamanlı Qauss G. k.-ın ötürücülük qabiliyyəti oblastı hesablanmışdır (bu kanallar pisləşmiş G. k.-lara gətirilir). Tərs əlaqəli G. k. üçün kodlama, xəta ehtimalı maksimal olan G. k. üçün kodlama və digər məsələlərə də baxılmışdır.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] Cover T., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1972, v. 18, № 1, p. 2–14.

GƏNCLƏŞƏN PAYLANMA « молодеющее распределение; benefical aging distribution » – bax, *Qocalan paylanma.*

GƏTİRİLMİŞ AÇIM « привиденный размах; abyusted range » – bax, *Hörst fenomeni.*

GİBBS FENOMENİ « Гиббса явление; Gibbs phenomenon » – Furye sıralarının xüsusi cəmlərinin (və ya orta qiymətlərinin) xüsusiyyətidir. $f(x)$ funksiyasının Furye sırasının xüsusi cəmləri $s_n(x)$-lərin $f(x)$-ə x_0 nöqtəsinin hər hansı $\{x: 0 < |x - x_0| < h\}$ ətrafında yığıldığı fərz olunur və fərz olunur ki, $a \equiv f(x_0 - 0) \le f(x_0 + 0) \equiv b$. Əgər $A < a \le b < B$ olarsa,

$$A = \varliminf_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0 - 0}} s_n(x), \qquad B = \varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ x\to x_0 + 0}} s_n(x),$$

x_0 nöqtəsində $s_n(x)$ üçün G. f. baş verir. G. f. zaman sıralarının spektral analizində yaranır ki, bu da seçimin həcminin sonluluğu ilə əlaqədar baş verir ki, bu isə müşahidələrin verilənlərin düzbucaqlı pəncərəsinə hasilinə ekvivalentdir. Spektral sıxlığın statistik qiymətini taparkən Furye çevirməsindən istifadə etdikdə G. f. nəticəsində meyl əmələ gəlir. Əgər seçim verilənlərin münasib pəncərəsi ilə əvvəlcədən hamarlanarsa (belə hamarlama tezlik oblastında uyğun spektral pəncərənin istifadə edilməsinə ekvivalentdir), meyl azalır.

Əd.: [1] Ульянов П. Л., Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, с. 958; [2] Отнес Р., Эноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982.

GİBBS LİMİT VƏZİYYƏTİ « Гиббса предельное состояние; Gibbs limit state » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

GİBBS PAYLANMASI « Гиббса распределение; Gibbs distribution » – termodinamik tarazlıqda hissəciklər sisteminin və təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsinin konfiqurasiyalarının statistikasının təsviri üçün *statistik mexanikada* istifadə olunan *ehtimal paylanmasıdır*.

d – ölçülü $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasının $\mathbf{\Lambda}$ oblastında («qabda») N hissəcikdən ibarət kəsilməz sistem halında G. p. N sayda $X_1, ..., X_N$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı

$$p_{\mathbf{\Lambda}}(x_1, ..., x_N) = \exp\{-H(x_1, ..., x_N)\} / Z_{N,\mathbf{\Lambda}} \qquad (1)$$

şəklində verilir, burada $H(x_1, ..., x_N)$, – $x_1, ..., x_N \in \mathbf{\Lambda}$-nın simmetrik həqiqi funksiyası, $Z_{N,\mathbf{\Lambda}}$ normalayıcı elə seçilmiş vuruqdur ki, $p_{\mathbf{\Lambda}}$-nın inteqralının 1-ə bərabər olmasını təmin etsin; bu inteqral statistik cəm adlanır. Bu şəkildə ixtiyari sıxlıq verilə bilinər, odur ki, bu tərif fiziki tətbiqlərdə sistemin potensial enerjisini ifadə edən H funksiyasına yalnız əlavə məhdudiyyətlər qoyulduqda məzmun kəsb edir. Əksər hallarda fərz olunur ki, H cüt translyasion invariant izotrop $\Phi(x)$, $x \in [0, \infty)$ potensialı ilə

$$H(x_1, ..., x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(|x_i - x_j|) \qquad (2)$$

şəklində verilmişdir. Bəzən əlavə sərhəd şərtləri, cüt potensial halında

$$H(x_1, ..., x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \Phi(|x_i - x_j|) + \sum_i U(x_i) \qquad (3)$$

şəklində olan H funksiyasına da baxılır, burada $U(x)$, $x \in \mathbf{\Lambda}$, – $\mathbf{\Lambda}$ qabından kənarda yerləşən hissəciklərlə verilən, fiziki tətbiqlərdə potensial enerjini təyin edən funksiyadır. Adətən, fərz olunur ki, $\operatorname{dist}(x, \mathbf{\Lambda}^e) \to 0$ olduqda $U(x) \to 0$ olur. Əksər hallarda

$$H(x_1, ..., x_N) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... i_k \leq N} U(\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\})$$

olduqda cüt olmayan (çoxhissəli) potensial halında ümumiləşmələrə də baxılır.

Bir qədər fərqli, münasib sayılan digər nöqteyi – nəzərə görə, üst-üstə düşməyən komponentlərli $(x_1, ..., x_N) \in \Lambda^N$ vektoruna N – nöqtəli $\{x_1, ..., x_N\} \in \Lambda$ altçoxluğu qarşı qoyulur və bu inikasdan doğurulan altçoxluqlar fəzasında ehtimal ölçüsünə baxılır. Bu onu ifadə edir ki, G. p. Λ qabının altçoxluqlarında topalanmış nöqtəvi təsadüfi meydanın paylanması kimi interpretasiya olunur. Fiziki olaraq bu hissəciklərin fərqlənməyən olduqları haqqında təsəvvürə uyğun olur.

Belə gözləmək olar ki, termodinamik limitə keçmədə, Λ oblastının həcmi $|\Lambda|$ ilə birlikdə hissəciklərin sayı N üçün $N \to \infty$ münasibəti elə ödənilməlidir ki, ρ sıxlığı $\rho = N/|\Lambda| = \text{const}$ olmalı, Λ-da nöqtəvi meydanın G. p. isə potensialı U_μ olan (əlavə kimyəvi μ potensialının daxil olunması ilə ilkin potensialdan alınan) nöqtəvi *Gibbs təsadüfi meydanının* ehtimal paylanmasına zəif yığılma mənasında yığılmalıdır. μ-nün qiyməti Gibbs limit meydanında hissəciklərin orta sıxlığının ρ kostantına bərabər olması şərtindən tapılır. Bu hökm potensial üzərinə bəzi şərtlərlə və ρ sıxlığının olduqca kiçik olduğu fərz olunmaqla isbat olunmuşdur, odur ki, uyğun Gibbs meydanı U_μ potensialı ilə yeganə surətdə verilir. Faza keçidləri oblastında analoji müddəa, hələ ki, yalnız doğruyaoxşar hipotez olaraq qalmaqdadır.

Bir çox hallarda Λ qabında təsadüfi sayda bir-birindən fərqlənməyən hissəciklərin G. p. araşdırılır. Bu halda fərz olunur ki, qabdakı hissəciklərin sayının N-ə bərabər olması ehtimalı p_N, –

$$\rho_N = \frac{e^{-\mu N}}{N!} Z_{N,\Lambda} \left(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu N}}{N!} Z_{\Lambda, N} \right)^{-1} \qquad (4)$$

düsturu ilə ifadə olunur, N-in qeyd olunmuş qiyməti şərtində bu hissəciklərin vəziyyətlərinin şərti paylanması isə N hissəcikdən ibarət sistem üçün yuxarıda təsvir olunmuş G. p. olur. Məlumdur ki, μ-nün qeyd olunmuş qiymətində və $N \to \infty$ olduqda termodinamik limit keçidində bu G. p. zəif yığılma mənasında, asimptotik olaraq, potensialı U_μ olan nöqtəvi Gibbs meydanlarının paylanmaları sinfilə yaxınlaşır.

Fiziki ədəbiyyatda təsadüfi sayda hissəciklərli G. p. – böyük kanonik ansambl (və ya böyük kanonik ansamlda G. p.), qeyd olunmuş sayda hissəciklərli G. p., – kiçik kanonik ansambl (və ya kiçik kanonik ansamblda G. p.) adlanır.

Hissəciklər sayı N-in və H enerjisinin qeyd olunduğu G. p.-na da baxılır. Bu paylanma sıxlığı (1) olan paylanmanın doğurduğu, $H(x_1, ..., x_N) = H$ qiymətinin qeyd olunduğu şərtinə nəzərən şərti ehtimaldır. Burada $|\Lambda| \to \infty$ olduqda, termodinamik limit keçidində hissəciklərin sıxlığı $\rho = N/|\Lambda|$ və xüsusi enerji – $e = H/|\Lambda|$-nın qeyd olunduğu fərz olunur, limit paylanması isə potensialı $U_{\mu,\beta}$-yə bərabər təsadüfi Gibbs meydanının paylanması olur, bu halda kimyəvi μ potensialının və tərs β temperaturunun qiymətləri münasib olaraq seçilir. Fiziki ədəbiyyatda ρ və e qeyd olunmuş G. p. mikrokanonik G. p. (və ya mikrokanonik ansamblda G. p.) adlanır.

Tez-tez baxılan digər hal diskret $t \in T$ parametrli G. p.-nın şəbəkəvari modellərinə uyğun haldır. $U = \{U_A(x_A),\ A \subset T\}$ potensialı halında, sonlu tutumlu $\Lambda \subset T$ qabında, qiymətləri $(X, \mathscr{B}, m)$ ölçülü fəzasından olan G. p.

$$p_\Lambda(x_t, t \in \Lambda) = \exp(-H(x_t, t \in \Lambda)) / Z_\Lambda$$

şəklində sıxlıqla (μ ölçülü ekzemplyarların $|\Lambda|$ hasili üzrə) təyin olunur, burada

$$H_\Lambda(x_t,\ t \in \Lambda) = \sum_{A \subset \Lambda} U_A(x_t, t \in \Lambda)$$

və Z_Λ – statistik cəm adlanan normalayıcı vuruqdur. $|\Lambda| \to \infty$ olduqda termodinamik limitdə bu G. p., asimptotik olaraq, potensialı U-ya bərabər Gibbs təsadüfi meydanlarının paylanmaları sinfi ilə yaxınlaşır. Belə G. p. böyük kanonik ansamblda nöqtəvi Gibbs meydanının G. p.-nın analoqudur. Şəbəkəvari qazın potensialı $U_{\mu,\beta}$ halında da kiçik kanonik və mikrokanonik ansamblda da təbii olaraq paylanmalar daxil olunur.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., M., 1971; [2] D o b r u s h i n R. L., T i r o z z i B., «Comm. Math. Phyz.», 1977, v. 54, № 2, p. 173–92; [3] E l l i s R., Entropy. Large deviations and statistical mechanics, N. Y., 1985; [4] G e o r g i i H.-Q., Canonical Gibbs measures, B. – N. Y., 1979.

GİBBS POSTULATI « **Гиббса постулат; Gibbs postulate** » – bax, *Statistik mexanika.*

GİBBS SIXLIĞI « **Гиббса плотность; Gibbs density** » – bax, *Gibbs təsadüfi meydanı.*

GİBBS SONLU VƏZİYYƏTİ « **Гиббса конечное состояние; Gibbs finite state** » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

GİBBS TƏSADÜFİ MEYDANI « **Гиббса случайное поле; Gibbs random field** » – xüsusi şəkilli şərti keçid ehtimalları ilə verilən *təsadüfi meydandır*. Statistik mexanikanın şəbəkəvari modellərinə uyğun diskret arqumentli G. t. m. aşağıdakı konstruksiya ilə təyin olunur. T – sonlu və ya hesabi çoxluq, $(X, \mathscr{B}, m)$, – σ – sonlu m – ölçülü ölçülən fəza olsun. G i b b s m e y d a n ı n ı n p o t e n s i a l ı $U = \{U_A, A \subset T, |A| < \infty\}$ bütün sonlu $A \subset T$ çoxluqlarına qarşı qoyulan, qiymətləri $\mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$-dan olan, $x_A \subset X^A$ arqumentlərinin ölçülən U_A funksiyalarının sistemi kimi təyin olunur, burada $|A|$, – A-nın gücüdür. İxtiyari sonlu $\Lambda \subset T$ və $x \in X^T$ üçün şərti hamiltonian

$$H(x_\Lambda \mid x_{T\setminus\Lambda}) = \sum_{A \subset T,\ A \cap \Lambda \neq \varnothing,\ |A| < \infty} U_A(x_A) \qquad (1)$$

düsturu ilə verilir, burada x_A, – x realizasiyasının A-ya daralmasıdır. Daha sonra

$$(x_{T\setminus\Lambda}) = \int_{X^\Lambda} \exp\{-H(x_\Lambda \mid x_{T\setminus\Lambda})\}\, m_\Lambda(dx_\Lambda) \qquad (2)$$

statistik cəmi daxil olunur, burada m_Λ, – m – ölçülü $|\Lambda|$ ekzemplyarlarının düz hasilidir. Nəhayət, m_Λ ölçüsünə görə

$$p(x_\Lambda \mid x_{T\setminus\Lambda}) = \exp\{-H(x_\Lambda \mid x_{T\setminus\Lambda})\} / Z(x_{T\setminus\Lambda}) \qquad (3)$$

ehtimal sıxlıqları daxil olunur. Bu sıxlıqlar elə x_Λ, $x_{T\setminus\Lambda}$ üçün təyin olunmuşdur ki, bunlar üçün (1) sırası və (2) inteqralı mütləq yığılırlar, (3)-dəki məxrəc isə sıfra bərabər olmur. Belə sıxlıq Λ həcmində $x_{T\setminus\Lambda}$ sərhəd şərtli G i b b s s ı x l ı ğ ı adlanır. Əgər ixtiyari sonlu $\Lambda \subset T$ üçün $X_{T\setminus\Lambda} = \{X(t),\ t \in T \setminus \Lambda\}$ kəmiyyətinin verilmiş qiymətində $X_\Lambda = \{X(t),\ t \in \Lambda\}$-nın şərti paylanması m_Λ ölçüsü üzrə Gibbs sıxlığı (3)-lə verilərsə, $\{X_t,\ t \in T\}$ təsadüfi kəmiyyətlər sistemi – *təsadüfi Gibbs meydanı* adlanır. Bu təklif *DLR – şərti* (rus. *ДЛР – условие*) adlanır. Bu halda G. t. m.

$$H(x) = \sum_{A \subset T} U_A(x_A)$$

formal hamiltonianı ilə verilir.

Λ sonlu olduqda, verilən tərif *Gibbs paylanmasının* tərifi ilə üst-üstə düşür. Əksər hallarda, $T = \mathbb{Z}^d$ d – ölçülü tamqiymətli şəbəkə və X sonlu çoxluq olduğu hala baxılır və bu halda m sayıcı ölçü götürülür. $X = \{-1, 1\}$, $T = \mathbb{Z}^d$ olduqda, potensial translyasion invariant olur və $U_A \neq 0$ şərti yalnız $A = \{t\}$ və $A = \{s, t\}$ olduqda ödənilir, burada $|s - t| = 1$, bu halda *İzinq modelindən* söhbət gedir. $T = \mathbb{Z}^d$ olduqda, potensial üzərinə, əksər hallarda, təbii olaraq daxil olunan translyasion invariantlıq şərti qoyulur. G. t. m. anlayışının statistik mexanikada olduğu kimi digər tətbiqi sahələrdə tətbiqlərinin geniş dairəni əhatə etməsi özünü Averintcev – Spitser teoremi ilə doğruldur; bu teoremə görə, təsadüfi meydanın hər hansı potensiallı Gibbs meydanı olması üçün $p(x_\Lambda \mid x_{T\setminus\Lambda})$ şərti sıxlıqları üçün yalnız ümumi xarakterli olduqca zəif fərziyyə irəli sürülməlidir. Məs., X sonlu olduqda, əgər bütün bu sıxlıq şərtləri sıfra bərabər olmazsa, *Markov təsadüfi meydanı* olduqca böyük diametrli çoxluqlarda potensialı sıfra çevrilən Gibbs meydanı olur.

Birölçülü $\mathbb{Z}$ şəbəkəsində G. t. m.-na m i s a l Markov zənciridir. Burada $U_{\{t,\,t-1\}}(x_t,\, x_{t-1}) = -\ln p_t(x_t \mid x_{t-1})$, $p_t(x_t \mid x_{t-1})$ – keçid ehtimallarıdır, $A \neq \{t, t-1\}$ olduqda, $U_A \equiv 0$. İxtiyari Qauss təsadüfi meydanı kvadratik potensialı $T = \mathbb{Z}^d$, $X = \mathbb{R}$ olduqda

$$H(x) = \sum_{s,\,t \in \mathbb{Z}^d} U_{s,t}\, x_s\, x_t \qquad (4)$$

formal hamiltonianı ilə verilən Gibbs meydanıdır, burada $U_{s,\,t} \in \mathbb{R}$

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} |U_{s,t}| < \infty$$

şərtini ödəyirlər.

Digər mühüm sinif – Gibbs *nöqtəvi təsadüfi meydanlarıdır*. Burada potensial $U = \{U(A)\}$ funksiyası kimi verilir, A, – $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında bütün mümkün olan sonlu altçoxluqlardan biri ola bilər. x realizasiyasının şərti hamiltonianı $\mathbb{R}^d$-də lokal sonlu altçoxluq olduğundan

$$H_\Lambda(x_\Lambda \mid x_{\mathbb{R}^d\setminus\Lambda}) = \sum_{A \subset x,\ A \cap \Lambda \neq \varnothing} U_A$$

kimi verilir, burada $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ – sonlu Lebeq ölçülü ölçülən çoxluqdur və $x_\Lambda = x \bigcap \Lambda$. Nəhayət, statistik cəm Gibbs sıxlıqları və G. t. m. anlayışının özü diskret haldakı kimi, lakin bir mühüm fərqli cəhətlə daxil olunur, bu cəhət μ_Λ-nın Λ-da Puasson nöqtəvi təsadüfi meydanının 1 sıxlıqlı ehtimal paylanması olmasıdır.

Daha sonra, müəyyənlik üçün, əsas etibarilə, $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində sonlu X fəzalı təsadüfi meydanlar və $U_A(x_A) \neq \infty$ halları araşdırılır. İxtiyari X fəzalı meydanların ümumi nəzəriyyəsi və nöqtəvi təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsi X-i sonlu olan şəbəkəvari meydanlar nəzəriyyəsinə analojidir, amma burada bir çox əlavə şərtlər və razılaşmaların daxil olunması tələb olunur.

U potensialının translyasion invariant və

$$\sum_{\Lambda:\, 0\in A} \sup_{x_A} |U(x_A)| < \infty \qquad (5)$$

olduğu fərz olunur. Onda verilmiş U potensiallı G. t. m.-nı müəyyən edən, $X^{\mathbb{Z}^d}$ -də bütün ehtimal ölçülərinin toplusu $S(U)$ boş olmayan qapalı (zəif yığılma topologiyasında) qabarıq çoxluq əmələ gətirir. Bu çoxluğun kənar nöqtələri onunla seçilir ki, bunlar *requlyar təsadüfi meydanlardır*. U potensiallı requlyar G. t. m.-nı müəyyənləşdirən ehtimal ölçüləri sinfi, $n\to\infty$ olduqda, $x_{\mathbb{Z}^d\setminus V_n}$, $n=1, 2, ...$ sərhəd şərtlərinin hər hansı ardıcıllığı üçün $V_1\subset V_2\subset ..., U_n V_n=\mathbb{Z}^d$ artan həcmlərində (3) şəklində sıxlığa malik Gibbs paylanmalarının bütün limitləri sinfi ilə (hər hansı təbii mənada) üst-üstə düşür.

G. t. m.-ları nəzəriyyəsinin əsas riyazi məsələsi $S(U)$ toplusunun təsviri və bu topluya daxil olan meydanların xassələrini U potensialının xassələrindən asılı olaraq təsvir etməkdir. Bu məsələ tam həldən uzaqdır. Çoxsaylı cəhdlər edilməsinə baxmayaraq, potensial vasitəsilə G. t. m.-nın sonluölçülü paylanmalarının aşkar analitik təsviri, yalnız bəzi nadir hallarda, məs., ikiölçülü İzinq modeli, Qauss modeli hallarında mümkün olmuşdur. Buna görə də, ilk növbədə keyfiyyət xarakterli məsələlər ön plana çıxır, məs., $S(U)$ çoxluğu yalnız bir nöqtədən ibarət olan U potensiallarının sinfini təyin etmək məsələsi.

$d=1$ olan birölçülü halda verilmiş potensiala malik G. t. m.-nın yeganəliyi üçün

$$\sum_{A:\, 0\in A} (\operatorname{diam} A)\ \sup_{x_A} \left|U(x_A)\right| < \infty \qquad (6)$$

şərtinin ödənilməsi kifayətdir.

(5) şərti ödənilən, lakin (6) şərti ödənilməyən potensiallar sinfində müxtəlif imkanlar yaranır ki, bunlar elə bil ki, çoxölçülü halı təqlid edir.

Yeganəlik kriterilərindən ən münasib olanı (ixtiyari d dim. – ölçüsü halında) aşağıdakı tələblə ifadə olunur (bax, [1], [2]):

$$\sup_{t\subset\mathbb{Z}^d} \sum_{s\neq t} \alpha_{s,t} < 1. \qquad (7)$$

Burada $s, t\in\mathbb{Z}^d$, $s\neq t$ olduqda

$$\alpha_{s,t} = \sup \operatorname{var}\left(g_{\{t\}}(\cdot\,|\,\tilde{x}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}),\ q_{\{s\}}(\cdot\,|\,x'_{\mathbb{Z}^d\setminus\{s\}})\right),$$

burada $\operatorname{var}(\cdot,\cdot)$ – variasiya üzrə məsafədir və yuxarı sərhəd yalnız s nöqtəsində fərqlənən $\tilde{x}$, x' sərhəd şərtlərinin bütün cütləri üzrə götürülür. Bu şərt aşkar surətdə asılı olmayan artımlarlı meydana olduqca yaxın G. t. m.-larının sinfini seçib ayırır. Tərs temperatur β-dan asılı $U_\beta=\{\beta U\}$ şəklində Gibbs meydanı potensiallarının sinfi üçün bu kriteri olduqca kiçik bütün β-lar üçün ödənilir. Kimyəvi potensiallar vektoru μ-dən asılı Gibbs meydanının U_μ potensiallar sinfi üçün, əgər μ_x-in bütün qiymətləri modulca olduqca böyük mənfi qiymətlər alarsa, yeganəlik kriterisi ödənilir, bu isə onu fərz etmək nəticəsinə gətirir ki, qaz seyrəklənmişdir və olduqca kiçik sıxlığa malikdir.

G. t. m. yeganəlik oblastında ehtimal nəzəriyyəsi baxımından bir çox təbii xassələrə malikdir. Məs., (5) və (7) şərtlərinin ödənilməsi nəticəsində aşağıdakı qarışma şərti alınır: $\mathbf{P}_V$ – meydanın V-yə daralma paylanması, $\mathbf{P}_V(\cdot\,|\,x_W)$ – meydanın $W\subset\mathbb{Z}^d\setminus V$ çoxluğuna daralmasının verilmiş qiymətində bu daralmanın şərti paylanması olarsa, ixtiyari sonlu $V\subset\mathbb{Z}^d$ çoxluğu üçün

$$\lim_{\operatorname{dist}(V,\,W)\to\infty} \sup_{x_W} \operatorname{var}\left(\mathbf{P}_V(\cdot\,|\,x_W),\ \mathbf{P}_V\right) = 0. \qquad (8)$$

Əgər əlavə olaraq, $\sup_{x_A}|U(x_A)|$-nın $\operatorname{diam} A\to\infty$ olduqda eksponensial olaraq sürətlə azalması fərz olunarsa, onda (8)-də sıfra yığılma sürətlə eksponensial olaraq baş verəcəkdir və meydan üçün mərkəzi limit teoremi doğru olacaqdır. (6) şərtini ödəyən, potensiala malik birölçülü meydanlar üçün bu mülahizələr analojidir.

Yuxarıda qeyd olunan fərziyyələrsiz, verilən potensiala malik G. t. m. yeganə olmaya da bilər və $S(U)$ çoxluğunun strukturu (yəni *faza diaqramı*) d dim. – ölçüsü və μ, β kimi parametrlərdən olduqca asılı olur. Bu struktur yalnız ayrı-ayrı xüsusi modellər üçün (məs., İzinq modeli üçün) kifayət dərəcədə tamamilə öyrənilmişdir. Bu – *faza keçidləri* nəzəriyyəsinin predmetidir.

Gibbs vəziyyətlərinin strukturu aşkar olaraq təsvir olunabilinən, çox da olmayan hallardan biri kvadratik hamiltonianın (4) şəklində olduğu haldır. Əlavə – ciddi müsbət müəyyənlik şərti ödənildikdə, yəni ixtiyari sonlu $V\subset\mathbb{Z}^d$ və $x_t\in\mathbb{R}$, $t\in V$ üçün, $c>0$ olduqda

$$\sum_{s,t\in V} u_{s,t}\, x_s\, x_t \geq c \sum_{t\in V} (x_t)^2 \qquad (9)$$

şərti ödənilərsə, $t\in\mathbb{Z}^d$ üzrə müntəzəm məhdud mütləq birinci momentə malik meydanlar sinfi ilə apriori kifayətlənmək olarsa, onda yeganə G. t. m. mövcuddur. Bu meydan orta qiyməti 0-a bərabər stasionar Qauss meydanıdır. Bu məhdudiyyətsiz G. t. m. olduqca çoxdur. (9) şərtindən imtina edildikdə vəziyyət kəskin surətdə dəyişir. Məs., dim. – ölçü $d=1, 2$ olduqda

$$\sum_{s,\,t\in\mathbb{Z}^d:\,|s-t|=1} (x_s - x_t)^2$$

şəklində hamiltonian üçün G. t. m. yoxdur. $d=3$ olduqda, orta qiyməti sıfra bərabər yeganə Qauss stasionar meydanından başqa, bu potensiallı Gibbs meydanı əvvəlkindən ixtiyari konstant əlavə olunmaqla alınan meydanlar olur.

Əd.: [1] Д о б р у ш и н Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 201–29; 1970, т. 15, в. 3, с. 469–97; [2] Д о б р у ш и н Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1968, т. 2, в. 4, с. 31–43; [3] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [4] П р е с т о н К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [5] С и н а й Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [6] D o b r u s i n R. L., Gaussian random Fields Gibbsian point of view, в кн.: Multicomponent random systems, N. Y. – Basel, 1980, p. 119–59; [7] P r e s t o n C h., Random Fields, B., 1976; [8] R u e l l e D., Thermodynamic formalism, Reading (Mass.), 1978.

GİRİŞ AXINI « входящий поток; input / arrival flow / stream » – *xidmət sistemi nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir. G. a. ədəd oxunun nöqtələrinin, yəni $t_n\in\mathbb{R}$ nöqtələrinin təsadüfi ardıcıllığı kimi təyin olunur və bu ardıcıllığın sonlu limit nöqtələrinin sanki yəqin olmadığı fərz olunur; bu ardıcıllıq, adətən, nizamlanmış ardıcıllıqdır ($t_n\leq t_{n+1}$). t_n kəmiyyətinə G. a.-nın n-ci hadisəsi anı və ya n-ci tələbin sistemə daxilolma anı deyilir. Bir çox

hallarda G. a. sistemin fəaliyyətdə olmasından asılı olmayaraq verilir. Ən çox yayılmış G. a.-ları – keçmişin təsirsizlik xassəsinə malik G. a.-ları, təsiri məhdud G. a.-ları və *Palm axınıdır*. Müasir baxışlara görə, G. a. xidmət müddəti ardıcıllıqları ilə birlikdə xidmət sisteminin idarəedici ardıcıllığını əmələ gətirir. Stasionar idarəedici ardıcıllıqlı sistemlər nəzəriyyəsi daha çox inkişaf etdirilmişdir. Bax, *Nöqtəvi proses.*

Əd.: [1] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, M., 1972; [2] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., M., 1987.

GİRİŞ AXINI ixtiyari keçmişi təsirsiz **« входящий поток** произвольный без последействия; **arbitrary input / arrival flow / stream with lack of memory »** – bax, *Giriş axını* keçmişi təsirsiz.

GİRİŞ AXINI keçmişi məhdud təsirliliyə malik **« входящий поток** с ограниченным последействием; **recurrent input / arrival flow / stream »** – elə *giriş axınıdır* ki, bu axında n -ci hadisənin baş vermə anı asılı olmayan təsadüfi z_n kəmiyyətlərinin cəminə bərabər təsadüfi kəmiyyətdir:

$$t_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n, \quad n \geq 1.$$

Keçmişi məhdud təsirli G. a. nəzəriyyəsi A. Ya. Xinçin tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində və onun tətbiqlərində ən çox yayılmış axın – rekurrent axındır (bərpa axını), bu axın üçün

$$\mathbf{P}\{z_1 < t\} = F_0(t), \quad \mathbf{P}\{z_n < t\} = F(t), \quad n \geq 2$$

şərtləri ödənilir. $F_0(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ olduqda keçmişi məhdud təsirli G. a. – ən sadə axındır (stasionar Puasson axını). Bax, *Palm axını.*

Əd.: [1] Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, M., 1965; [2] Бусленко Н. П., Моделирование сложных систем, M., 1978.

GİRİŞ AXINI keçmişi təsirsiz **« входящий поток** без последействия; **input / arrival flow / stream with lack of memory »** – aşağıdakı xassəli *giriş axınıdır:* $\zeta(t)$, – $[0, t)$ yarımintervalında bircins axın hadisələrinin sayını ifadə edən təsadüfi proses olsun, $t \geq 0$; onda $\{\zeta(t), t \geq 0\}$ – *asılı olmayan artımlarlı təsadüfi prosesdir*. Başqa sözlə, ixtiyari t_i, t_j, $1 \leq t_i < t_j \leq n$ anlarında $\zeta(t_j) - \zeta(t_i)$ qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, giriş axını keçmişi təsirsiz G. a. adlanır. Əgər $(t, t+s)$ müddətində k sayda hadisənin baş vermə ehtimalı t anına qədər baş vermiş hadisələrdən asılı olmazsa, onda belə axın keçmişi təsirsiz G. a.-dır, $s > 0$.

Keçmişi təsirsiz regulyar giriş axını onunla xarakterizə olunur ki, $t < s$ şərtini ödəyən ixtiyari t, s qiymətlərində $\zeta(s) - \zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda(s) - \lambda(t)$ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır; $\Lambda(t)$ – kəsilməz azalmayan funksiyadır. Keçmişi təsirsiz sinqulyar giriş axını onunla xarakterizə olunur ki, hadisələr yalnız verilmiş $\{x_n\}$ ardıcıllığından olan anlarda baş verə bilər. İxtiyari keçmişi təsirsiz giriş axını – asılı olmayan requlyar və sinqulyar keçmişi təsirsiz G. a.-larının cəmidir.

Bax, *Puasson prosesi*.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, M., 1963; [2] Бусленко Н. П., Моделирование сложных систем, M., 1978.

GİRİŞ AXINI regulyar, keçmişi təsirsiz **« входящий поток** регулярный без последействия; **regular input / arrival flow / stream with lack of memory »** – bax, *Giriş axını* keçmişi təsirsiz.

GİRİŞ AXINI sinqulyar, keçmişi təsirsiz **« входящий поток** сингулярный без последействия; **singular input / arrival flow / stream with lack of memory »** – bax, *Giriş axını* keçmişi təsirsiz.

GİRİŞ BRAKI « входной брак; entrance rejets » – bax, *Ardıcıl statistik qiymətlər.*

GİRİŞ QANUNU « входа закон; entrance law » – bax, *Kolmoqorov tənlikləri*.

GİRİŞ PAYLANMASI « входов распределение; entrance distribution » – bax, *Markov prosesi*; davamı.

GİRİŞ SİQNALI « входной сигнал; input signal » – bax, *Ehtimali avtomat.*

GÖZLƏMƏ MÜDDƏTİ « ожидания длительность; waiting time » – tələbin *xidmət sistemində* olduğu – lakin onun xidmət müddəti hesaba alınmayan – zaman müddətidir. Fasiləsiz xidmət sistemində G. m. – tələbin daxil olduğu andan onun xidmətinə başlandığı ana qədər keçən zaman müddətinə bərabərdir. G. m.-nin araşdırılması üçün əsas metodlar: *semi – Markov prosesləri metodu*, *virtual gözləmə müddəti metodu*, *çoxölçülü təsadüfi dolaşma metodudur* (bax, *Xinçin teoremi*).

Gözləmə müddəti ilə xidmət sistemlərində əgər G. m.-nin stasionar orta qiymətləri $\mathbf{M}\omega$, $\mathbf{M}\nu$ və *növbə* kəmiyyəti mövcuddurlarsa, bunlar bir-birilə $\mathbf{M}\nu = \lambda(\mathbf{M}\omega + \tau)$ bərabərliyi ilə əlaqəlidirlər, burada λ – giriş axınının *intensivliyi*, τ – tələbə xidmətin orta müddətidir.

GÖZLƏNİLƏN FAYDALILIQ « ожидаемая полезность; expected utility » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

GÖZLƏNİLƏN GƏLİR KRİTERİSİ « ожидаемого дохода критерий; expected reward criterion » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

GÜC (ü) statistik kriterinin **« мощность** статистического критерия; **power** of a statistical test **»** – H_1 mürəkkəb alternativinə qarşı H_0 sadə hipotezinin yoxlanılması üçün təyin olunmuş *statistik kriterinin*, H_1 hipotezi əslində doğru olduğu halda, H_0 hipotezinin qəbul edilməməsi ehtimalıdır. Yoxlanılan H_0 hipotezinə alternativ H_1 hipotezi mürəkkəb hipotez olduğu halda (bu halda H_0 hipotezinin özü sadə və ya mürəkkəb ola bilər, bu isə simvolik olaraq belə yazılır: $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$, $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$), H_0-ın H_1-ə qarşı yoxlanılması üçün təyin olunmuş statistik kriterinin G. bu statistik kriterinin G. funksiyası $\beta(\theta)$-nın

($\theta\in\Theta=\Theta_1=\Theta_0\cup\Theta_1$) çoxluğuna daralması kimi təyin olunur.

Bu tərifdən fərqli digər aşağıdakı tərif də geniş yayılmışdır: bu $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$ mürəkkəb hipotezinə qarşı $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ hipotezinin yoxlanılması üçün təyin olunmuş statistik kriterinin G. $\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta(\theta)$-dır, burada $\beta(\theta)$ – bu statistik kriterinin G. funksiyasıdır (bax, *Güc funksiyası*, *kriterinin*).

Əd.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1975.

GÜC FUNKSİYASI, KRİTERİNİN « мощности критерия функция; power function of a test » – *statistik kriterinin* keyfiyyətini xarakterizə edən funksiyadır. $(\mathfrak{X},\mathscr{B},\mathbf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi vektorunun realizasiyası x üzrə

$$\mathbf{P}_\theta\in H_1=\{\mathbf{P}_\theta,\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\}$$

alternativ H_1 hipotezinə qarşı X təsadüfi vektorunun ehtimal paylanması $\mathbf{P}_\theta$-nın

$$H_0=\{\mathbf{P}_\theta,\theta\in\Theta_0\subset\Theta\}$$

altçoxluğundan olması haqqında H_0 hipotezini yoxlamaq tələb olunur və $\varphi(\cdot)$ H_1-ə qarşı H_0-ın yoxlanılması üçün statistik kriterinin kritik funksiyası olsun. Onda

$$\beta(\theta)=\int_{\mathfrak{X}}\varphi(x)\,d\,\mathbf{P}_\theta(x),\quad \theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1, \qquad (*)$$

– kritik funksiyası φ olan statistik kriterinin güc funksiyası adlanır. (*)-dan aydın olur ki, əgər X $\mathbf{P}_\theta$, $\theta\in\Theta$ qanununa tabe olarsa, kriterinin G. f. $\beta(\theta)$ göstərir ki, H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezini yoxlamaq üçün təyin edilmiş statistik kriteri hansı ehtimallarla H_0 hipotezini qəbul etmir.

Yu. Neyman (J. Neyman) və E. Pirson (E. Pearson) tərəfindən əsası qoyulmuş statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində mürəkkəb H_1 hipotezinə qarşı mürəkkəb H_0 hipotezinin yoxlanılması məsələsi kriterinin G. f. terminlərilə ifadə olunur və bu aşağıdakı kimi ifadə olunur: $\theta\in\Theta_1$ olduqda, bütün $\theta\in\Theta_0$ üçün və $0<\alpha<1$ qiymətində $\beta(\theta)\le\alpha$ olarsa, belə kriterinin G. f. $\beta(\theta)$-nın maksimumunu təmin edən statistik kriteri qurmaq tələb olunur, burada kriterinin mühümlük ölçüsü adlandırılan α ədədi H_0 hipotezi doğru olduğu halda onun səhvən qəbul edilməməsinin verilən məqbul ehtimalıdır.

Əd.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер с нем., М., 1960.

GÜC SPEKTRİ « мощности спектр; power spectrum » – bax, *Stasionar təsadüfi proses*.

GÜCLƏNDİRİLMİŞ PRİNSİPİ, DOĞRUYAOXŞARLIĞIN « усиленный принцип правдоподобия; strong likelihood principle » – bax, *Ən böyük doğruyaoxşarlıq prinsipi*.

GÜCLƏNDİRMƏ ƏMSALI « усиления коэффициент; gain » – bax, *Ötürücü funksiya*.

GÜCLÜ BİRZİRVƏLİ PAYLANMA « сильно одновершинное распределение; strictly unimodal distribution » – bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma*.

GÜCLÜ FELLER XASSƏSİ Markov prosesləri **« сильно феллеровское свойство** марковских процессов; **strong Feller property** of a Markov processes **»** – $(X,\mathfrak{B})$ (X – topoloji fəza, $\mathfrak{B}$ – onun Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir) faza fəzasında elə $\mathbf{P}(t,x,\Gamma)$ bircins *keçid ehtimalıdır* ki, bütün $t>0$ və $f\in B(X)$ üçün

$$F(x)=T_tf(x)=\int_X\mathbf{P}(t,\,x,\,dy)\,f(y)\in C(X)$$

daxilolma münasibəti ödənilir, burada $B(X)$ – məhdud Borel funksiyalarının fəzası, $C(X)$ – kəsilməz funksiyalar fəzasıdır. Güclü Feller keçid ehtimalı ilə verilən Markov prosesinə *güclü Feller prosesi* deyilir. Viner prosesi – güclü Feller prosesidir.

GÜCLÜ FELLER KEÇİD FUNKSİYASI « сильно феллеровская переходная функция; strong Feller transition function » – bax, *Keçid funksiyası* Markov prosesi üçün.

GÜCLÜ FELLER PROSESİ « сильно феллеровский процесс; strong Feller process » – *Feller prosesinin* xüsusi halıdır. E – topoloji fəza, $\mathscr{B}$ – bu fəzada Borel çoxluqlarının çoxluğu olsun. $(E,\mathscr{B})$ ölçülən fəzasında keçid funksiyası $p(t,x,\Gamma)$, $t\ge0$ $x\in E$, $\Gamma\in\mathscr{B}$ olan bircins Markov prosesi X-in verildiyi fərz olunur. f funksiyası hər dəfə $\mathscr{B}$ – ölçülən və məhdud olduqda

$$\mathbf{P}_tf(\cdot)=\int f(y)\,\mathbf{P}\,(t,\,\cdot\,,\,dy)$$

funksiyası ixtiyari $t>0$ qiymətində hər dəfə kəsilməz olarsa, X prosesinə güclü Feller prosesi deyilir. Nisbətən zəif məhdudiyyətləri ödəyən hər bir diffuzion proses G. F. p.-dir (bax, [2]). G. F. p.-nə və açıq çoxluqlarda G. F. p.-lərinin hissələrinə müvafiq ekssessiv funksiyaların xassələri klassik superharmonik funksiyaların xassələrinə yaxındır və bu da Dirixle məsələsinin ehtimali izahında (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) kəsilməz G. F. p.-lərinin istifadəsinin müvəffəqiyyətini təyin etmiş oldu (bax, [2]). G. F. p.-ləri sinfinə ilk dəfə [1]-də baxılmışdır.

G. F. p.-lərinə analoji, güclü Feller Markov zənciri də təyin olunur. Güclü Feller komponentinə malik keçid funksiyaları olan Markov zəncirləri öyrənilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Гирсанов И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 1, с. 7–28; [2] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [3] Tuominen P., Tweedie R., «Proc. London Math. Soc.», 1979, v. 38, p. 89–114.

GÜCLÜ HARMONİKLƏNMƏLİK(yi) təsadüfi prosesin **« сильная гармонизуемость** случайного процесса; **strong harmonizability** of a random process **»** – bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses.*

GÜCLÜ İNFİNİTEZİMAL OPERATOR « сильный инфинитезимальный оператор; strong infinitezimal operator / generator » – bax, *İnfinitezimal operator.*

GÜCLÜ ÖLÇÜLƏN İNİKAS « сильно измеримое отображение; strongly measurable mapping » – sonsuzölçülü Banax fəzasına inikas üçün ölçülənlik anlayışıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – tam ölçüyə malik ehtimal fəzası, B – Banax fəzası olsun. Əgər $f:\Omega\to B$ inikası sonlu sayda müxtəlif qiymətlər alırsa və bu qiymətlərdən hər biri A-nın hər hansı çoxluğundandırsa, f sadə inikas adlanır. Əgər elə sadə $f_n:\Omega\to B$ inikaslar ardıcıllığı və elə $\Omega_0\in A$ çoxluğu varsa ki, $\mu(\Omega\setminus\Omega_0)=0$ və bütün $\omega\in\Omega_0$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(\omega)-f(\omega)\|=0$ münasibəti ödənilsin, onda f inikasına güclü ölçülən inikas (Boxnerə görə ölçülən inikas) deyilir.

$f:\Omega\to B$ inikası, yalnız və yalnız, o halda güclu ölçüləndir ki, bu inikas sanki separabelqiymətli olsun [yəni elə $\Omega_0\in A$ tapılar ki, $\mu(\Omega\setminus\Omega_0)=0$ və $f(\Omega_0)$, – B-nin separabel altçoxluğudur] və hər bir $\beta\subset B$ Borel çoxluğu üçün $f^{-1}(\beta)\in\mathcal{A}$.

Sanki separabelqiymətli $f:\Omega\to B$ inikası, yalnız və yalnız, o halda güclu ölçülən inikasdır ki, o, zəif (skalyar) ölçülən olsun (Pettis teoremi).

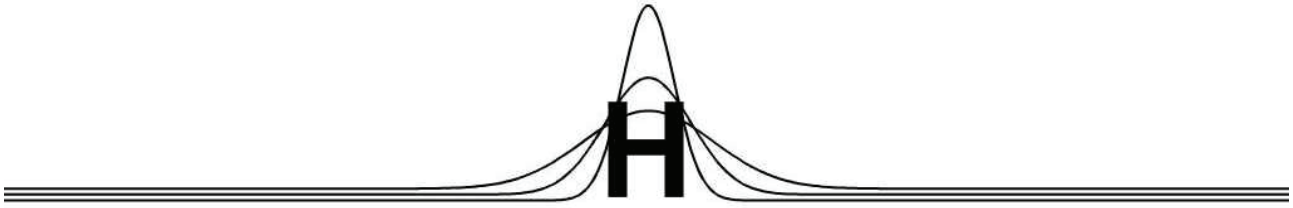
Əd.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

GÜCLÜ TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR « сильный случайный линейный оператор; strong random linear operator » – bax, *Təsadüfi xətti operator.*

GÜCLÜ UNİMODAL / GÜCLÜ TƏKZİRVƏLİ PAYLANMA « сильно унимодальное / одновершинное распределение; strongly unimodal distribution » – bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma.*

GÜCLÜ YIĞILMA « сильная сходимость; strong convergence » – bax, *Müntəzəm yığılma.*

GÜCÜ GÜCLƏNDİRMƏ ƏMSALI « усиления мощности коэффициент; gain » – bax, *Xətti filtr.*



HAAR ÖLÇÜSÜ « Хаара мера; Haar measure » – G çevirmələr qrupuna malik E fəzasının Borel σ – cəbri $\mathscr{B}$-də verilmiş, G-yə nəzərən invariant μ *ölçüsüdür*, yəni ixtiyari $A\in\mathscr{B}$ və ixtiyari $s\in G$ üçün $\{sg: g\in A\}$ çoxluğu ölçüləndir, $\mu(sA)=\mu(A)$, burada sA çoxluğu $\{sg: g\in A\}$ çoxluğu kimi anlaşılır. Əgər $f(p)$, $p\in E$ funksiyası $\mathscr{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndirsə və mənfi olmayandırsa, onda

$$\int f(p)\,\mu(dp)=\int f(sp)\,\mu(dp)$$

bərabərliyi bu inteqrallardan heç olmasa birinin varlığı halında doğrudur. Əgər $\mu(A)=\mu(sA)$ olarsa, μ ölçüsü s o l i n - v a r i a n t H. ö. (sol H. ö.) adlanır. Əgər μ sol H. ö.-dürsə, onda G-nin elementlərinin ölçülən altçoxluqları K-lardan təşkil olunmuş σ – cəbrdə verilmiş ν funksiyası üçün $\nu(K)=$ $=\mu(K^{-1})$ olarsa, ν ölçüsü sağ H. ö.-dür, burada K^{-1}, – $\{g^{-1}: g\in K\}$ çoxluğu kimi anlaşılır. Ayrılan topoloji lokal T kompakt qrupunda sol H. ö. həmişə vardır; əgər μ və $\tilde{\mu}$ T-də iki sol H. ö.-dürsə, onda $\tilde{\mu}=c\mu$, burada c – hər hansı müsbət ədəddir. T-də elə müsbət kəsilməz Δ funksiyası (T-də modulyar funksiya) vardır ki, $\Delta(t)>0$, $t\in T$, $\Delta(e)=1$, e, – T qrupunun vahidi elementidir. $\Delta(tt')=\Delta(t)\,\Delta(t')$, t, $t'\in T$ münasibətlərini ödəyir. Əgər μ T-də sol H. ö.-dürsə, onda $\mu(pg)=\Delta(g)\mu(p)$, $g\in T$, $p\in\mathfrak{A}$ bərabərliyi doğrudur, $\mathfrak{A}$ T qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir.

Ədd.: [1] В е й л ь А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [2] В и л е н к и н Н. Я., Специальные функции и теория представления групп, М., 1965.

HADİSƏ « событие; event » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*, *Təsadüfi hadisə*.

*** A HADİSƏSİ B HADİSƏSİNİ DOĞURUR « событие A влечет событие B ; event A implies event B »** – eksperimentdə müşahidə oluna bilən A hadisəsi baş verdikdə B hadisəsi hökmən baş verdiyi halda deyilir və bu münasibət simvolik olaraq $A\subset B$ və ya $B\supset A$ kimi işarə olunur. A, B – elementləri müəyyən mənada nizamlanmış Ω çoxluğunun altçoxluqlarıdır.

$B=A\cup B$ və ya $A=A\cap B$ olarsa, $A\subset B$; $A\subset A$; $B\subset C\Rightarrow A\subset C$; A eksperimentdə müşahidə oluna bilən ixtiyari hadisədirsə, $A\subset\Omega$ və $\varnothing\subset A\subset\Omega$ münasibətləri doğrudur.

Ədd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей. 5-ое изд., М.: Наука 1969; [2] Н е в ё Ж., Математические основы вероятностей, М., 1969.

HALQASI, ÇOXLUQLARIN « кольцо множеств; ring of sets » – bax, *Ölçü.*

σ – HALQASI, ÇOXLUQLARIN « σ – кольцо множеств; σ – ring of sets », σ – h a l q a, – bax, *Ölçü.*

τ – HAMAR ÖLÇÜ « τ – гладкая мера; τ – smooth measure » – topoloji X fəzasında *Borel ölçüsü* μ-dür və aşağıdakı xassəyə malikdir: X fəzasının açıq çoxluqlarının artan ümumiləşmiş hər bir $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ardıcıllığı üçün $\mu\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\right)=\lim_\lambda\mu(U_\lambda)$ münasibəti doğrudur. Hesabi bazaya malik topoloji fəzada (xüsusilə, separabel metrik fəzada) hər bir Borel ölçüsü τ – hamar ölçüdür. Requlyar topoloji fəzada hər bir τ – hamar sonlu ölçü requlyar ölçüdür. Əgər X metrik fəzadırsa, μ ölçüsü, yalnız və yalnız, o halda τ – hamar ölçüdür ki, μ ölçüsünün daşıyıcısı mövcud olsun.

Ədd.: [1] В а р а д а р а й н В. С., «Матем. сб.», 1961, т. 55, в. 1, с. 35–100.

HAMARLA(N)MA BƏRABƏRSİZLİYİ « сглаживания неравенство; smoothing inequality » – *paylanmalar arasında* yaxınlığı daha hamar paylanmaların yaxınlığı ilə qiymətləndirməyə imkan yaradan bir sıra bərabərsizliklərin ümumi adıdır. H. b.-ləri aşağıdakı şəkildə olur:

$$\mu(\mathbf{P},\,\mathbf{Q})\le c\,\mu(\mathbf{P}*\Phi^\varepsilon,\,\mathbf{Q}*\Phi^\varepsilon)\;+\;C(\varepsilon),$$

burada μ – hər hansı ehtimal metrikası, c – sabit, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ – paylanmalar, $\{\Phi^\varepsilon,\,\varepsilon>0\}$ – hamar paylanmaların elə parametrik çoxluğudur ki, $\varepsilon\to0$ olduqda Φ^ε sıfırda cırlaşmış paylanmaya zəif yığılır, $C(\varepsilon)$, – μ, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$-dən asılı və $\varepsilon\to0$ olduqda sıfra yaxınlaşan hər hansı funksiyadır. Adətən, Φ^ε – h a m a r l a y ı c ı p a y l a n m a adlanan – hamar paylanması $\Phi^\varepsilon(x)=\Phi(x/\varepsilon)$ şəklində olur. Hamar Φ-lər üçün $\mathbf{P}*\Phi^\varepsilon$ və $\mathbf{Q}*\Phi^\varepsilon$ paylanmaları da uyğun hamarlığa malik olurlar və belə paylanmalar bunlarla iş prosesində sadələşməyə səbəb olur.

H. b.-lərə aid m i s a l l a r. Aşağıda birölçülü hala baxılır və Φ – orta qiyməti sıfra bərabər, dispersiyası vahidə bərabər normal qanun, $\Phi^\varepsilon(x)=\Phi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon\le\varepsilon_0$ olsun.

1. *Müntəzəm metrika* üçün H. b.:

$$\rho(\mathbf{P},\,\Phi)\le c_1\,\rho(\mathbf{P}*\Phi^\varepsilon,\,\Phi*\Phi^\varepsilon)\;+\;c_2\,\varepsilon$$

burada c_1 və c_2 – sabitlərdir, $\mathbf{P}$ – ixtiyari paylanmadır.

2. *Levi – Proxorov metrikası* üçün H. b.:

a) $\pi(\mathbf{P},\,\mathbf{Q})\le\pi(\mathbf{P}*\Phi^\varepsilon,\;\mathbf{Q}*\Phi^\varepsilon)\;+c\varepsilon\sqrt{\log 1/\varepsilon}$,

burada c – sabitdir, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ – ixtiyari paylanmalardır;

b) $\pi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \le c_1\pi(\mathbf{P}*\Phi^{\varepsilon}, \mathbf{Q}*\Phi^{\varepsilon}) + c_2(1+\Gamma)\varepsilon,$

burada $\mathbf{P}$ – ixtiyari paylanma, $\mathbf{Q}$ – mütləq kəsilməz elə paylanmadır ki, onun paylanma sıxlığı $q(x)$ üçün bütün h-lar üçün

$$\Gamma = \sup_h \{ h^{-1} \int |q(x+h) - q(x)| dx\} < \infty$$

münasibəti ödənilir, c_1 və c_2 – sabitlərdir.

3. s tərtib *ideal metrika* üçün H. b.: $0 < s \le 2$ olduqda,

$$\zeta_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \le \zeta_s(\mathbf{P}*\Phi^{\varepsilon}, \mathbf{Q}*\Phi^{\varepsilon}) + c\varepsilon^s,$$

burada c – sabitdir, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ – ixtiyari paylanmalardır.

4. *Tam variasiyalı metrika* üçün məzmunlu H. b. mövcud deyildir. Məs., elə $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları yoxdur ki, $x \to 0$ olduqda $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ olsun və bunlar üçün bütün $\mathbf{P}$ və $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ şərtini ödəyən bütün ε üçün

$$\sigma(\mathbf{P}, \Phi) \le f(\sigma(\mathbf{P}*\Phi^{\varepsilon}, \Phi*\Phi^{\varepsilon})) + g(\varepsilon)$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

Əd.: [1] Bergstom H., «Skand. aktuarietidskr.», 1945, v. 28, № 1/2, p. 106–27; [2] Esseen C. – G., «Acta math.», 1945, t. 77, № 1, p. 3–125; [3] Sazonov V. V., «SANKHYA, ser. A», 1968, v. 30, pt. 2, p. 181–204; [4] Ротарь В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 4, с. 647–65; [5] Юринский В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 1, с. 3–12; [6] Абрамов В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 406–10.

HAMARLAMA PARAMETRİ « сглаживания параметр; smoothing parameter » – bax, *Qeyri – parametrik reqression analiz*.

HAMARLAYICI PAYLANMA « сглаживающее распределение; smoothing distribution » – bax, *Hamarla*(n)*ma bərabərsizliyi*.

HAMBURGER TEOREMİ « Гамбургера теорема; Hamburger theorem » – bax, *Momentlər problemi*.

HAMİLTON STRATEGİYASI « гамильтонова стратегия; Hamiltonian strategy » – bax, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi*.

HAN TEOREMİ, yüklər haqqında **« Хана теорема** о зарядах; **Hahn theorem** on signed **»** – ixtiyari yükün iki müsbət ölçünün fərqi kimi göstərilməsini ifadə edən, *ölçü* nəzəriyyəsi teoremidir. μ – əsas bazis fəzası X-in hissələrindən təşkil olunmuş S σ – cəbrində təyin olunmuş ixtiyari yük olsun. Onda X fəzasının aşağıdakı şərtləri ödəyən iki – A və B altçoxluqlarına bölgüsü $\{A, B\}$ vardır:

1) ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu üçün $Y \cap A \in S$ və $\mu(Y \cap A) \ge 0$,

2) ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu üçün $Y \cap B \in S$ və $\mu(Y \cap B) \le 0$.

A, – μ yükünə nəzərən müsbət çoxluq, B, – μ yükünə nəzərən mənfi çoxluq adlanır. Bu halda deyilir ki, $\{A, B\}$ bölgüsü – μ yükünə nəzərən X fəzasının Han mənada ayrılışıdır.

S σ – halqasında iki (müsbət) μ^+ və μ^- ölçüləri –

$$\mu^+(Y) = \mu(Y \cap A), \quad \mu^-(Y) = -\mu(Y \cap B), \quad Y \in S$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur, μ^+ və μ^- uyğun olaraq, μ yükünün yuxarı və aşağı variasiyaları adlanır (aydındır ki, bu ölçülər X fəzasının $\{A, B\}$ bölgüsünün seçilməsindən asılı deyildir). Bu ölçülərdən biri hökmən sonludur. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ münasibəti də vardır ki, bu əksər hallarda verilən μ yükünün Jordan mənada ayrılışı adlandırılır. $|\mu|(Y) = \mu^+(Y) + \mu^-(Y)$, $Y \in S$ bərabərliyi ilə təyin olunan çoxluq funksiyası $|\mu|$, – μ yükünün tam variasiyası adlanır. Bu funksiya S σ – halqasında ölçüdür. Bu ölçü üçün $|\mu(Y)| \le |\mu|(Y)$, $Y \in S$ münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. А., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

HANNİNQ PƏNCƏRƏSİ « ханнинг окно; hanning window » – bax, *Korrelyasion pəncərə.*

HANT PROSESİ « Ханта процесс; Hunt process » – standart *Markov prosesinin* xüsusi halıdır. Lokal kompakt separabel Hausdorf fəzası E standart, ümumiyyətlə isə, qırılan $X = (X_t, \zeta, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \ge 0$ prosesinin vəziyyətləri çoxluğu və $\overline{E} = E \cup \{\Delta\}$, – E fəzasının adi birnöqtəvi kompaktifikasiyası olsun, yəni Δ – sonsuz uzaqlaşmış nöqtədir. Əgər ilkin (başlanğıc) paylanmanın ixtiyari seçimində və ixtiyari $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots$ Markov momentləri üçün X_{τ_n} nöqtəsi $\overline{E}$ fəzasının topologiyasında Δ nöqtəsinə $\{\tau = \zeta < \infty\}$ çoxluğunda sanki yəqin yaxınlaşırsa, X prosesi Hant prosesi adlanır, burada $\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_n$. Bircins keçid funksiyasına müvafiq Hant prosesinin varlığı üçün şərtlər olduqca ümumi xarakter daşıyır (bax, [1], [2]).

H. p.-ləri sinfi ehtimali potensial nəzəriyyəsinin yaranmasında mühüm rol oynamışdır (bax, [1], həm də *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün).

Əd.: [1] Хант Дж. А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [2] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968.

HARDİ ENTROPİYASI « Харди энтропия; Hardy entropy » – bax, *İnformasion ölçü.*

HARMONİK AYRILIŞ METODU « гармонического разложения метод; metod of harmonic decomposition » – bax, *Pisarenko spektral statistik qiymәti.*

HARMONİK FUNKSİYA Markov prosesi üçün **« гармоническая функция** для марковского процесса; **harmonic function** for a Markov process **»** – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

HARMONİK FUNKSİYA Markov zənciri üçün **« гармоническая функция** для цепи Маркова; **harmonic function** for a Markov chain **»** – klassik mənada harmonik funksiyanın mənfi olmayan analoqudur;

ekssessiv funksiyanın xüsusi halıdır; $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında keçid ehtimalları $p(x, \Gamma)$, $x \in \mathscr{E}$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ olan $X = (X_n, \mathbf{P}_x)$ bircins Markov zənciri verilir. Əgər E-də verilən f funksiyası ($0 \le f \le \infty$) $\mathscr{B}$ – ölçülən və $\mathscr{E}$-də hər yerdə

$$\mathbf{M}_x f(X_1) \equiv \int_E f(y)\, p(x, dy) = f(x)$$

münasibətini ödəyərsə, f bu zəncir üçün harmonik funksiya adlanır, burada $\mathbf{M}_x$, – $\mathbf{P}_x$ ölçüsünə uyğun riyazi gözləmədir [məs., Markov zəncirinin vəziyyətləri çoxluğu $1, 2, ...$ olarsa, f funksiyasını $f_i = f(i)$ götürərək $\{f_1, f_2, ...\}$ ardıcıllığı ilə eyniləşdirmək olar; onda harmonik funksiyanı təyin edən bərabərlik

$$\sum_j p_{ij} f_j = f_i$$

bərabərliklər sistemi şəklində olur, burada p_{ij}, – i vəziyyətindən j vəziyyətinə bir addıma keçid ehtimalıdır, $i \ge 1$]. H. f.-ya aid mühüm misal $\pi_\Gamma(x)$, $x \in \mathscr{E}$ funksiyasıdır, $\pi_\Gamma(x)$ – zəncirin trayektoriyasının $\Gamma \in \mathscr{B}$ çoxluğunda sonsuz dəfə olması ehtimalı – $\mathbf{P}_x$ – ehtimalıdır.

Əgər f H. f.-sı məhdud olarsa, onda ixtiyari $\tau < \infty$ Markov momenti üçün $\mathbf{M}_x f(X_\tau) \equiv f(x)$ eyniliyi ödənilir və bu xassənin müəyyən bir modifikasiyası – separabel lokal kompakt Hausdorf fəzası $\mathscr{E}$-də verilən standart Markov prosesi $X = (X_t, \zeta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \ge 0$ üçün harmonik funksiyanın tərifində əsas götürülür. Doğrudan da, bu halda əgər f ekssessiv funksiyası üçün

$$\mathbf{M}_x \{ f(X_\tau);\ \tau < \zeta \} \equiv f(x)$$

eyniliyi $\mathscr{E}$-də ödənilərsə, $f(x)$ funksiyası X üçün H. f. adlanır, burada $\tau = \inf \{ t \ge 0 : X(t) \notin U \}$, – X prosesinin U çoxluğundan başlanğıc andan sonrakı ilk çıxış anıdır, U, – $\mathscr{E}$ çoxluğunda kompakt qapanmaları ilə bütün açıq çoxluqların ailəsindəndir (bu tərifin digər modifikasiyaları da mümkündür; bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün).

Misal. n – ölçülü Evklid fəzasının hər hansı oblastında klassik mənada $f \ge 0$ H. f. bu oblastdan ilk çıxış anında kəsilən (dayanan) Viner prosesi üçün H. f.-dır.

HARMONİK İNTERPOLYASİYA « гармоническая интерполяция; harmonic interpolation » – ən kiçik kvadratlar metodu ilə

$$\theta_0 + \sum_{k=1}^{n} (\theta_{2k} \cos kx + \theta_{2k-1} \sin kx)$$

şəklində *reqressiya* funksiyasının parametrlərinin interpolyasiyasıdır (bax, *Reqression eksperiment*).

HARMONİK ORTALAMA « гармоническое усреднение; harmonic averaging » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

HARMONİKLƏNƏN KORRELYASİON FUNKSİYA « гармонизуемая корреляционная функция; harmonizable correlation function » – bax, *Harmoniklənmə şərtləri*.

HARMONİKLƏNƏN TƏSADÜFİ MEYDAN « гармонизуемое случайное поле; harmonizable random field » – $t = (t_1, ..., t_n)$ nöqtələrinin n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ fəzasında (və ya tamqiymətli koordinatlarlı t nöqtələrinin n – ölçülü $\mathbb{Z}^n$ şəbəkəsində) verilmiş və

$$X(t) = \int_{\Lambda_n} e^{itk}\, Z(dk) \qquad (1)$$

n – ölçülü Furye – Stiltyes inteqralı şəklində ifadə oluna bilən kompleksqiymətli $X(t)$ *təsadüfi meydanıdır*, burada Λ_n, – $t \in \mathbb{R}^n$ olduqda $k = (k_1, ..., k_n)$ nöqtələrinin n – ölçülü fəzası, yaxud $t \in \mathbb{Z}^n$ olduqda $\{ k : -\pi \le k_i < \pi,\ i = 1, ..., n \}$ kubudur, $Z(dk)$, – n – ölçülü bütün Δ intervalları üçün Λ_n-də təyin olunmuş kompleksqiymətli təsadüfi ölçüdür. (1)-in sağ tərəfindəki stoxastik inteqralın müxtəlif təriflərinə H. t. m.-ların müxtəlif sinifləri müvafiq olur, lakin bütün ağlabatan təriflərdə (1) təsadüfi meydanının korrelyasion funksiyası –

$$\mathbf{M} X(t)\, X(s) \equiv B(t, s) \int_{\Lambda_n} \int_{\Lambda_n} e^{i(tk - sk')}\, F(dk, dk') \qquad (2)$$

düsturu ilə verilir, burada Z ölçüsünün təyin olunma oblastından olan ixtiyari $\Delta \subset \Lambda_n$, $\Delta' \subset \Lambda_n$ altçoxluqları üçün

$$F(\Delta, \Delta') = \mathbf{M} Z(\Delta) \overline{Z(\Delta')}, \quad Z(\Delta) = \int_\Delta dZ(k).$$

Bu halda $B(t, s)$ korrelyasion funksiyasının (2) şəklində ifadə olunması $X(t)$ meydanının harmoniklənən olmasını təmin edir.

Əd.: bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses*.

HARMONİKLƏNƏN TƏSADÜFİ PROSES « гармонизуемый случайный процесс; harmonizable random process » – həqiqi $t \in \mathbb{R}^1$ arqumentindən və ya tamqiymətli $t \in \mathbb{Z}^1$ arqumentindən asılı,

$$\zeta(t) = \int_\Lambda e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) \qquad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilinən kompleksqiymətli $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir*, burada $t \in \mathbb{R}^1$ olduqda $\Lambda = (-\infty, \infty)$, $t \in \mathbb{Z}^1$ olduqda $\Lambda = [-\pi, \pi]$, $Z(\lambda)$ isə kompleksqiymətli təsadüfi funksiyadır. H. t. p.-lər sinfinə ilk dəfə 1940-cı illərin ortalarında M. Loev (M. Loève) tərəfindən baxılmışdır və alınan nəticələr [1]-də s. 496 – 99-da şərh olunmuşdur. M. Loev fərz etmişdir ki, $\zeta(t)$ H. t. p.-nin

$$\left.\begin{aligned} F(\Delta, \Delta') &= \mathbf{M} Z(\Delta) \overline{Z(\Delta')}, \\ Z(\Delta) &= \int_\Delta dZ(\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ilə ifadə olunan spektral ölçüsü $\Lambda \times \Lambda$ fəzasında məhdud variasiyalı kompleks ölçüdür, odur ki,

$$V(F) = \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| F(\Delta_i, \Delta'_j) \right| \right) < \infty \qquad (3)$$

münasibəti ödənilir, burada supremum kəsişməyən Λ-ya aid $\Delta_1, ..., \Delta_n$ və $\Delta'_1, ..., \Delta'_n$ Borel çoxluqlarının bütün mümkün olan sonlu topluları üzrə götürülür. Bu halda (1)-in sağ tərəfindəki inteqralı uyğun Stiltyes inteqral cəmləri ardıcıllığının kvadratik orta mənada limiti kimi təyin etmək olur [yəni $F(d\lambda, d\lambda')$ ölçüsü tamamilə $\lambda = \lambda'$ diaqonalında topalanmış stasionar təsadüfi prosesin xüsusi halındakı inteqral kimi təyin olunur]. (1), (2) və (3)-dən

$$\mathbf{M}\, \zeta(t)\, \overline{\zeta(s)} = B(t, s) = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} e^{i(t\lambda - s\lambda')} F(d\lambda, d\lambda') \qquad (4)$$

münasibəti alınır, burada sağ tərəfdəki inteqral adi ikiölçülü Stiltyes inteqralıdır. Tərsi də doğrudur – $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B(t, s)$-in (4) şəklində ifadə oluna bilinməsindən $\zeta(t)$-nin H. t. p. olduğu alınır, burada $F(d\lambda, d\lambda')$ – $\Lambda \times \Lambda$ fəzasında məhdud variasiyalı ölçüdür. [$F(\Delta, \Delta')$ nüvəsinin müsbət müəyyən olması tələbi əslində artıqdır; bu [1]-də əlavə qoyulmuşdu, bax, [2]].

Müəyyənlik üçün, $t \in \mathbb{R}^1$ və $\Lambda = (-\infty, \infty)$ olsun. H. t. p. üçün daha ümumi tərif Yu. A. Rozanov tərəfindən [3]-də verilmişdir (bax, həmçinin, [4] – [8]-ə). Yu. A. Rozanov (3) şərti əvəzinə $F(\Delta, \Delta')$ spektral ölçüsünün Freşe mənada sonlu variasiyalılığı üçün daha zəif fərziyyə daxil etmişdir ki, bu da

$$W(F) = \sup \left(\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{b_j} F(\Delta_i, \Delta'_j) \right| \right) < \infty \qquad (5)$$

şərtinə gətirilir, burada supremum həqiqi oxun kəsişməyən $\Delta_1, ..., \Delta_n$ və $\Delta'_1, ..., \Delta'_n$ Borel çoxluqlarının bütün mümkün olan topluları üzrə, həm də modulca vahidi aşmayan $a_1, ..., a_n$ və $b_1, ..., b_n$ kompleks ədədlərinin topluları üzrə götürülür. (5) şərtini başqa şəkildə, (2) düsturundan kompleksqiymətli təsadüfi $Z(\Delta)$ ölçüsünün semivariasiyasının sonlu olması şərti kimi xarakterizə etmək olar (bax, məs., [9], səh. 347 – 48 və [5]). (5) şərtində (4) inteqralı yalnız adi Stiltyes inteqralı kimi deyil, hər hansı daha geniş mənada mövcud ola bilər; bu halda da $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B(t, s)$-in (4) şəklində ifadə oluna bilinməsi $\zeta(t)$ prosesinin (1) şəklində ifadə olunması üçün zəruri və kafi şərt olur (burada bu halda sağ tərəfdəki Stiltyes inteqralı hər hansı xüsusi şəkildə təyin olunmalıdır). $\zeta(t)$ prosesi (1) şəklində ifadə olunduqda və (2) funksiyası da (5) şərtini ödədikdə o, H. t. p. adlanır; harmoniklənmənin belə (daha geniş) anlayışını Loev mənada daha sadə harmoniklənmədən fərqləndirmək üçün Y. Q. Qladışev [10]-da təklif etmişdir ki, Loev mənada harmoniklənmə *mütləq harmoniklənmə* adlandırılsın; M. Rao [6] – [8]-də onu sadəcə *harmoniklənmə* (və ya *güclü harmoniklənmə*) adlandırmışdır, lakin o, Rozanov mənada harmoniklənməni *zəif harmoniklənmə* termini ilə işarə etmişdir (yəni bu halda o, $\zeta(t)$-ni *zəif harmoniklənən təsadüfi proses* adlandırmışdır; bu sonuncu termin aşağıda istifadə olunacaqdır).

Yu. A. Rozanov [3]-də göstərmişdir ki, ixtiyari $Y(t)$ stasionar prosesinin H fəzasının hər hansı xətti altfəzasına proyeksiyalanmasından alınan $\zeta(t)$ prosesi həmişə zəif H. t. p.-dir (burada $Y(t)$ – hər hansı H Hilbert fəzasında sonlu dispersiyalı təsadüfi kəmiyyətlər əyrisi kimi nəzərdə tutulur; bax, *Korrelyasion nəzəriyyə təsadüfi funksiyaların*). A. Mayami və H. Salehi [5]-də isbat etmişlər ki, tərs teorem də doğrudur, belə ki, zəif H. t. p.-lər sinfi H Hilbert fəzasının təsadüfi kəmiyyətlər əyriləri sinfi ilə üst-üstə düşür və bu əyrilər H-da olan hər hansı daha geniş Hilbert fəzasındakı stasionar əyrilərin H-da proyeksiyalarıdır.

Zəif H. t. p. üçün (Loev mənada H. t. p. üçün də) aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\lambda_0 t} \zeta(t)\, dt = Z(\lambda_0 + 0) - Z(\lambda_0 - 0)$$

və

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t + \tau, t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} F(d\lambda, d\lambda')$$

(bax, [3], [6], [8]). Qeyri – stasionar proseslər üçün H. t. p. böyük ədədlər qanununa, yalnız və yalnız, o halda tabedir ki, $\zeta_0(t) = \zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)$ mərkəzlənmiş prosesinin müvafiq spektral ölçüsünün qiyməti $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$ nöqtələri üçün sıfra bərabərdir. Belə H. t. p. üçün həmişə ortalanmış $\widetilde{B}(\tau)$ korrelyasion funksiyası və

$$\widetilde{F}(\Delta) = \int_{\Delta} d\widetilde{F}(\lambda) = \int_{\Delta} F(d\lambda, d\lambda')$$

bərabərliyi ilə təyin olunan ortalanmış $\widetilde{F}(\lambda)$ spektral funksiyası mövcuddur.

H. t. p.-ə aid misallar «*Harmoniklənmə şərtləri*» məq.-də şərh olunmuşdur. H. t. p. anlayışının sadə ümumiləşməsi çoxölçülü H. t. p. anlayışıdır; bu anlayışın digər ümumiləşməsi (eyni zamanda da bircins təsadüfi meydan anlayışının ümumiləşməsi) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ fəzasında harmoniklənən təsadüfi meydan anlayışıdır. Bu ümumiləşmələr, xüsusi halda, [6] – [8]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Hurd H. L., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1973, v. 19, № 3, p. 316–20; [3] Розанов Ю. А., « Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [4] Bochner S., в кн.: Proc. Third Berk. Symp. Math. Statist. and Probab., v. 2, Berk. – Los Ang., 1956, p. 7–27; [5] Miamee A. G., Salehi H., «Indiana Univ. Math. J.», 1978, v. 27, № 1, p. 37–50; [6] Rao M. M., «L'enseignement math.», 1982, t. 28, № 3–4, p. 295–351; [7] Rao M. M., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1984, v. 81, p. 4611–12; [8] Rao M. M., в кн.: Handbook of Statistics, v. 5, Amst., 1985, p. 279–310; [9] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [10] Гладышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 184–89.

HARMONİKLƏNMƏ ŞƏRTLƏRİ « гармонизуемости условия; harmonization conditions » – $B(t, s) = \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$ korrelyasion funksiyası üzərinə qoyulan elə şərtlərdir ki, bu şərtlərdə $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ (və ya $t \in \mathbb{Z}^1 = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$) təsadüfi prosesi harmoniklənən

prosesdir. Müəyyənlik üçün $t \in \mathbb{R}^1$ olsun, harmoniklənmə isə Loev mənada anlaşılır (bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses*). ($\zeta(t)$ prosesinin Rozanov mənada harmoniklənən proseslər sinfindən, yəni zəif harmoniklənən proseslərin daha geniş sinfindən olması üçün H. ş. haqqında bax, məs., [2]).

$\zeta(t)$ prosesi, yalnız və yalnız,

$$B(t,\ s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\lambda - s\lambda')}\ d^2F(\lambda,\ \lambda') \qquad (1)$$

olduğu halda harmoniklənəndir, burada $F(\lambda, \lambda')$, – $\mathbb{R}^2$ müstəvisində məhdud variasiyalı funksiyadır (bax, [1], [3]). (1) şəklində ifadə olunan korrelyasion funksiya (harmoniklənən korrelyasion funksiya adlanan) həmişə məhduddur və hər iki dəyişəninə görə müntəzəm kəsilməzdir. Lakin sonuncu şərtləri ödəyən korrelyasion funksiya harmoniklənən olmaya da bilər (olsa belə, yalnız Rozanov mənada harmoniklənən ola bilər) (bax, [3], [4]).

Bir sıra H. ş.-lərini funksiyaların Furye – Stiltyes inteqralı şəklində göstərilməsi üçün məlum şərtlərdən almaq olur (bax, məs., [5] – [7]). Lakin bütün bu H. ş.-ləri (hətta [8]-də tapılan zəruri və kafi H. ş.) effektiv sayılmır, belə ki, bunlar çətin yoxlanılır. Bununla belə, [5] və [8]-də bir-birilə qovuşan nəticələr (həm də [9]-da, fəsil 6-da şərh olunmuş) harmoniklənən proseslərin bir çox xüsusi hallarının alınmasına imkan verir (bax, məs., [3]). Bu nəticələrə görə $B(t,\ s)$ funksiyası $\mathbb{R}^2$-də $F(\lambda,\ \lambda')$-in tam variasiyasının $N < \infty$ şərtini ödəyən N-i aşmadığı halda və yalnız və yalnız, o halda (1) şəklində ifadə oluna bilir ki, ixtiyari tamqiymətli n və $(t_1,\ s_1)$, ..., $(t_n,\ s_n)$ həqiqi ədədlər cütlərinin ixtiyari ardıcıllığı və c_1, ..., c_n kompleks ədədləri üçün

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c_j\ B(t_j,\ s_j)\right| \le$$

$$\le N \sup_{(x,\ y)\in\ \mathbb{R}^2}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j\ \exp\left(\ it_jx - is_jy\right)\right| \qquad (2)$$

münasibəti ödənilsin.

(1) və (2) şərtləri bir sıra harmoniklənən təsadüfi proseslər siniflərini göstərməyə imkan yaradır (bax, məs., [3], [10] və [11]). Hər bir belə sinfin təsviri faktik olaraq hər hansı kafi H. ş.-dir.

Misallar. 1) Əgər $\left|B(t,\ s)\right|$ funksiyası və ya $\left|B(t,\ s)\right|^2$ $\mathbb{R}^2$-də inteqrallanandırsa, onda $B(t, s)$ funksiyasını hər hansı $f(\lambda, \lambda')$ funksiyasının ikiölçülü Furye çevirməsi kimi ifadə etmək olar. Bu halda $\zeta(t)$ prosesi harmoniklənəndir və $d^2F(\lambda,\ \lambda') = f(\lambda,\ \lambda')d\lambda\ d\lambda'$.

2) $K(\omega)$ məhdud variasiyalı kompleks funksiya, $h(t)$ – kompleks funksiya olarsa,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\ dK(\omega)$$

olduqda $\zeta(t) = h(t)\ \zeta_0(t)$ şəklində proses harmoniklənən prosesdir, burada $\zeta_0(t)$ – spektral funksiyası $F_0(\lambda)$ olan stasionar təsadüfi prosesdir. Bu halda

$$F(\lambda,\ \lambda') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \omega)\ K(\lambda' - \omega)\ dF_0(\omega).$$

3) $Z(u)$ – qeyri – korrelyar artımlarlı,

$$\mathbf{M}\ dZ(u)\ \overline{dZ(v)} = \delta(u - v)\ dF_0(u)dv$$

şərtini ödəyən kompleks təsadüfi funksiya, $F_0(u)$ – məhdud azalmayan funksiya,

$$h(t,\ u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\ dK_u(\omega)$$

olarsa və $K_u(\omega)$-nın isə ω-nın funksiyası kimi bütün u qiymətlərində eyni bir sabitlə məhdudlanan variasiyası olarsa, onda

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\ u)\ dZ(u)$$

şəklində proses harmoniklənən prosesdir.

Ossilyar proseslər *evolyusionar spektral ifadəyə* malik olarsa, onda belə proseslər də harmoniklənən proseslərdir.

4) $Z(u)$ – kompleks təsadüfi funksiya və

$$\mathbf{M}Z(u)\ \overline{Z(v)} = BZ(u,\ v)$$

$\mathbb{R}^2$-də sonlu variasiyaya malik olarsa, $h(t)$ isə (2) misalındakı kimi kompleks funksiya olduqda

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - u)\ dZ(u)$$

tipli proseslər harmoniklənən proseslərdir və bu halda

$$d^2F(\lambda,\ \lambda') =$$

$$= dK(\lambda)\ \overline{dK(\lambda')}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\ i(\ u\lambda - v\lambda')\right] d^2B_Z(u,\ v).$$

Ədd.: [1] Лоэв M., Теория вероятностей, пер. с англ., M., 1962, с. 496–99; [2] Rao M., «L'enseignement math.», 1982, t. 28, p. 295–351; [3] Hurd H. L., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1973, v. IT 19, p. 316–20; [4] Гладышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 184–89; [5] Bochner S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 40, p. 271–76; [6] Cramer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1939, v. 46, p.191–201; [7] Domingues A. G., «Duke Math. J.», 1940, v. 6, p. 246–55; [8] Eberlein W. F., «Duke Math. J.», 1955, v. 22, p. 465–68; [9] Rudin W., Fourier analysis on groups, N. Y. –L., 1962; [10] Розанов Ю. A., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [11] Cambanis S., Liu B., «Inform. and Control», 1970, v. 17, p. 183–202.

HARRİS QAYIDIŞLI MARKOV ZƏNCİRİ « возвратная по Харрису цепь Маркова; Harris recurrent Markov chain » – bax, *Markov zənciri*.

HARRİSON MÖVSÜM MODELİ « Харрисона сезонная модель; Harrison seasonal model » – proqnozlanan təsadüfi proseslər üçün *Holt – Uinters modelinin*

modifikasiyasıdır. Holt – Uinters modelinin mövsüm komponenti aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$s(t-L+j) = 1 + \sum_k \{ a_k \cos(k\lambda_j) + b_k \sin(k\lambda_j) \}, \quad (*)$$

burada

$$a_k = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{L} s(t-L+j) \cos(k\lambda_j),$$

$$b_k = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{L} s(t-L+j) \sin(k\lambda_j),$$

$$\lambda_j = 2(j-1)\pi / L - \pi .$$

(*)-da cəmlənmə mühüm sayılan harmoniklər üzrə aparılır və $s(t-L+j)$ bu şəkildə Holt – Uinters modelinə əvəz olunur.

Əd.: [1] Harrison P., «Appl. Statist.», 1965, v. 14, p. 102–39; [2] Кендэл M., Временные ряды, пер. с англ., M., 1981.

HARTLİ « хартли; hartley » – *informasiya miqdarı* vahididir, informasiya miqdarı təyin olunduqda onluq loqarifmləri istifadə olunduqda alınır. Keçid düsturu: $1H. = 1/\lg 2\ bit \approx$ $\approx 3{,}32\ bit$.

HARTMAN – VİNTNER – ŞTRASSEN TEOREMİ « Хартмана – Винтнера – Штрассена теорема; Hartman – Wintner – Strassen theorem » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* Banax fəzasında.

HASİL(i) σ – cəbrlər ailəsinin « **произведение** семейства σ – алгебр; **product** of a family of σ – algebras » – bax, *Hasil*(i) ölçülərin.

HASİL(i) ehtimal fəzalarının « **произведение** вероятностных пространств; **product** of probability spaces » – verilən $(\Omega_\lambda, \mathscr{A}_\lambda, \mathbf{P}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = \varnothing$ ehtimal fəzalarından aşağıdakı qaydada alınan $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *ehtimal fəzasıdır.* Ω, – Ω_λ, $\lambda \in \Lambda$ çoxluqlarının dekart hasili $\prod_\lambda \Omega_\lambda$, $\mathscr{A}$, – $\mathscr{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ σ – cəbrlərinin hasili, yəni $A_\lambda \neq \Omega_\lambda$ şərti yalnız sonlu sayda $\lambda \in \Lambda$ indeksləri üçün ödənildiyi halda

$$A = \prod_\lambda A_\lambda, \quad A_\lambda \in \mathscr{A}_\lambda, \qquad (*)$$

şəklində verilən $A \subset \Omega$ altçoxluqlarının doğurduğu σ – cəbr, $\mathbf{P}$ isə $\mathbf{P}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ ehtimal ölçülərinin hasilidir, yəni $\mathscr{A}$ -da ehtimal ölçüsü olub, aşağıdakı xassəyə malikdir: (*) şəklində hər bir $A \in \mathscr{A}$ çoxluğunda

$$\mathbf{P}(A) = \prod_\lambda \mathbf{P}_\lambda(A_\lambda)$$

bərabərliyi doğrudur. $\mathscr{A}$ -da belə ölçünün varlığı Anderson – Yessen teoremi ilə ifadə olunmuşdur.

Ehtimal fəzalarının H.-nin konstruksiyası vasitəsilə ixtiyari μ_λ, $\lambda \in \Lambda$ ehtimal ölçüləri ailəsi üçün heç olmazsa elə $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ -də asılı olmayan təsadüfi elementlərin elə X_λ, $\lambda \in \Lambda$ ailəsini göstərmək olur ki, hər bir $\lambda \in \Lambda$ üçün X_λ elementinin paylanması μ_λ vardır.

Adətən, ehtimal fəzaları ailəsinin hesabidən çox olmayan hasilindən istifadə olunur.

Əd.: [1] Лоэв M., Теория вероятностей, пер. с англ., M., 1962.

HASİL(i) ölçülən fəzaların « **произведение** измеримых пространств; **product** of a measurable spaces » – bax, *Hasil*(i) ölçülərin.

HASİL(i) ölçülərin « **произведение** мер; **product** measure » – *ölçü* nəzəriyyəsinin əsas konstruksiyalarından biridir. $(X_t, S_t, \mu_t)_{t \in T}$, – ölçülərli fəzaların ixtiyari ailəsi, ixtiyari $t \in T$ üçün $X_t \in S_t$ və $\mu_t(X_t) = 1$ (başqa sözlə, μ_t ehtimal ölçüsüdür) münasibətləri ödənilmiş olsun. Fərz olunur ki, ixtiyari $t \in T$ indeksi üçün Y_t çoxluğu S_t σ – cəbrindəndir və $t \in T$ indekslərinin sonlu saydasından başqa bütün t -lər üçün $Y_t = X_t$ bərabərliyi doğrudur. $\prod_{t \in T} X_t$ hasilində $\prod_{t \in T} Y_t$ şəklində ixtiyari altçoxluq ölçülən paralelepiped (və ya elementar çoxluq) adlanır. Bütün mümkün olan ölçülən paralelepipedlərin çoxluğu $\prod_{t \in T} X_t$ -də çoxluqların semi – cəbridir. Bu semi – cəbr $(S_t)_{t \in T}$ σ – cəbrlər ailəsinin hasili adlanan və $\prod_{t \in T} S_t$ simvolu ilə işarə olunan σ – cəbrlər çoxluğunu doğurur. Bu sonuncu σ – cəbri başqa cür də təsvir etmək olar: bu σ – cəbr $\prod_{t \in T} X_t$ -də minimal σ – cəbrdir və bütün pr_t, $t \in T$ proyeksiyaları bu cəbrə nəzərən ölçüləndirlər. $\prod_{t \in T} S_t$ σ – cəbrində, ixtiyari $\prod_{t \in T} Y_t$ ölçülən paralelepipedi üçün

$$\mu\left(\prod_{t \in T} Y_t\right) = \prod_{t \in T} \mu_t(Y_t)$$

xassəsinə malik olan yeganə μ ölçüsü təyin etmək olur. μ ölçüsü $(\mu_t)_{t \in T}$ ölçülər ailəsinin hasili adlanır və $\prod_{t \in T} \mu_t$ simvolu ilə işarə olunur. Beləliklə, nizamlanmış üçlüyü $\left(\prod_{t \in T} X_t, \prod_{t \in T} S_t, \prod_{t \in T} \mu_t\right)$ ölçülü fəza olub, $(X_t, S_t, \mu_t)_{t \in T}$ fəzalar ailəsinin hasili adlanır. $\left(\prod_{t \in T} X_t, \prod_{t \in T} S_t\right)$ ölçülən fəzası çox vaxt $(X_t, S_t)_{t \in T}$ ölçülən fəzaların hasili adlanır.

İndekslər çoxluğu T sonlu olduqda, yuxarıda qeyd olunana analoji qaydada $\prod_{t \in T} \mu_t$ hasili və elə $(\mu_t)_{t \in T}$ ölçülər ailəsi təyin olunur ki, burada hər bir μ_t, $t \in T$ ölçüsü σ – sonlu ölçüdür.

Bu halda $\prod_{t\in T}\mu_t$ də σ – sonlu ölçü olur. Məs., $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında klassik n – ölçülü Lebeq ölçüsünə birölçülü ölçülərin hasilinin tamamlanması kimi baxmaq olur (aydındır ki, vuruqların sayı n -ə bərabər olmalıdır). Öz növbəsində, vahid uzunluqlu intervalda birölçülü Lebeq ölçüsünə $\{0,\ 1\}^N$ Kantor diskontinuumunda verilən hər hansı ölçü – hasilin tamamlanması obrazı kimi baxmaq olar. Sonuncu ölçü $\prod_{n\in N}\mu_n$ ölçüsüdür, burada hər bir $n\in N$ indeksi üçün μ_n ölçü – vuruğu $\{0,\ 1\}$ ikielementli çoxluğunda elə təyin olunmuşdur ki, $\mu_n(\{0\})=\mu_n(\{1\})=1/2$.

Ölçülərin H. Kavalyeri prinsipi adlanan prinsiplə sıx əlaqədardır, bu prinsip fəzaların hasilində yerləşən ixtiyari ölçülən çoxluqların ölçülərini bu çoxluqların uyğun kəsiklərinin ölçüləri vasitəsilə hesablamağa imkan verir. Fubini teoremi də bu qəbildən olub, fəzaların hasili üzrə inteqrallar və vuruqlar üzrə inteqrallar arasında əlaqəni ifadə edir.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

HAUSDORF PSEVDOMETRİKASI « Хаусдорфа псевдометрика; Hausdorff pseudometric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

HAUSDORF STRUKTURU ehtimal metrikasının **« Хаусдорфа структура** вероятностной метрики; **Hausdorff structure** of a probability metric **»** – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

HAUSDORF TEOREMİ « Хаусдорфа теорема; Hausdorff theorem » – funksiyalar sinfinin Hausdorfa görə tamlıq xassəsini və bu sinifdən olan funksiyaların kəsilməzlik xassəsini əlaqələndirən teoremdir.

$\mathcal{G}$ – funksiyaların $\mathcal{X}$ çoxluğunda Hausdorfa görə tam sinfi və $\mathfrak{G}$, – $\{x:\ g(x)>0\},\quad g\in\mathcal{G}$ şəkilli çoxluqlar sistemi olsun. Onda $(\mathcal{X},\ \mathfrak{G})$ σ – topoloji fəza əmələ gətirir və $\mathcal{X}$ -də bütün funksiyaların çoxluğu $\mathcal{G}$ ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М. – Л., 1937; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

HAZIROLMA ƏMSALI « готовности коэффициент; instantaneous availability index » – sistemin ixtiyari anda işəqabiliyyətli vəziyyətdə olması ehtimalıdır. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin.*

HELLİ TEOREMİ « Хелли теорема; Helly theorem »: $F(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ldots$ – məhdud azalmayan elə funksiyalar olarsa ki, $\{F_n(x)\}$ ardıcıllığı $F(x)$ -ə tamamilə yığılır, onda $n\to\infty$ olduqda ixtiyari kəsilməz məhdud $g(x)$ funksiyası üçün

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_n(x)\ \to\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x) \qquad (*)$$

münasibəti doğrudur. Tərsi də doğrudur, (*) yığılmasından $\{F_n\}$ ardıcıllığının F -ə tamamilə yığılması alınır.

Əd.: [1] Helly E., «Sitzungsber. Math. – Naturwiss. KI. Keiser. Akad. Wiss.», 1912, Bd 121, S. 265–97.

HELLİNGER İNTEQRALI « Хеллингера интеграл; Hellinger integral » – $\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ *ehtimal ölçüləri* arasında aşağıdakı α tərtib inteqraldır:

$$\int (d\mathbf{P})^{\alpha}\,(d\widetilde{\mathbf{P}})^{1-\alpha}$$

və ixtiyari $\mathbf{P}<<\mathbf{Q}$, $\widetilde{\mathbf{P}}<<\mathbf{Q}$ münasibətlərini ödəyən $\mathbf{Q}$ ehtimal ölçüsünə görə

$$\int \left(\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}\right)^{\alpha}\left(\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}}\right)^{1-\alpha} d\mathbf{Q}$$

inteqralı kimi anlaşılır. Bu tərifin korrektliyi ona əsaslanır ki, o, $\mathbf{Q}$ ölçüsünün seçilməsindən asılı olmur; $\mathbf{Q}$, – $\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ ölçüləri üçün dominar ölçüdür.

Bax, *Hellinger metrikası.*

HELLİNGER METRİKASI « Хеллингера метрика; Hellinger metric » – hər hansı $(\Omega,\ \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında verilən ehtimal paylanmalarının $\mathcal{P}(\Omega)$ fəzasında sadə *ehtimal metrikasıdır* və

$$\chi^2(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=(1/2)\int_{\Omega}\left(\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{V}}}-\sqrt{\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{V}}}\right)^2 d\mathbf{V}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, $\mathbf{V}$, – Ω -da elə ixtiyari ölçüdür ki, $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ ehtimal paylanmaları bu ölçüyə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər [məs., xüsusi halda, $\mathbf{V}=(\mathbf{P}+\mathbf{Q})/2$ belə ölçüdür]. χ H. m. $\mathbf{V}$ -nin seçilməsindən asılı deyildir. H. m. simvolik formada

$$\chi^2(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=(1/2)\int_{\Omega}\left(\sqrt{d\mathbf{P}}-\sqrt{d\mathbf{Q}}\right)^2 \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə ifadə olunur. Əgər Ω -da invariant dx ölçüsü mövcuddursa, deməli, $\mathbf{P}$ paylanmasının sıxlığı $p(x)$ haqqında danışmaq olar, onda (*) münasibəti paylanmalarının sıxlıq funksiyaları p və q olan $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmaları üçün adi –

$$\chi^2(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=(1/2)\int_{\Omega}\left(\sqrt{p(x)}-\sqrt{q(x)}\right)^2 dx$$

formasını alır. H. m. –

$$H(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=\int_{\Omega}\sqrt{\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{V}}\,\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{V}}}\ d\mathbf{V}$$

Hellinger inteqralı ilə $\chi^2(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=1-H(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})$ bərabərliyi ilə əlaqəlidir və $\alpha=1/2$ tərtib *Hellinger məsafəsinin* xüsusi halıdır.

H. m. aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $0\le\chi(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})\le 1$, $\chi(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=0\Leftrightarrow\mathbf{P}=\mathbf{Q}$;

2) $\chi(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=1\Leftrightarrow\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ qarşılıqlı sinqulyardırlar $(\mathbf{P}\perp\mathbf{Q})$;

3) əgər $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_2$, $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_1\times\mathbf{Q}_2$ olarsa, onda

$$1-\chi^2(\mathbf{P},\,\mathbf{Q})=(1-\chi^2(\mathbf{P}_1,\,\mathbf{Q}_1))\,(1-\chi^2(\mathbf{P}_2,\,\mathbf{Q}_2))$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i \in \mathscr{P}(\Omega_i)$, $i=1,\,2$. Bu xassə H. m.-nın geniş istifadəsi üçün əsas səbəb olmuşdur.

4) H. m. və *tam variasiya metrikası* σ arasında aşağıdakı münasibət vardır:

$$\chi^2(\mathbf{P},\,\mathbf{Q}) \le \sigma(\mathbf{P},\,\mathbf{Q}) \le \sqrt{2}\chi(\mathbf{P},\,\mathbf{Q}),$$

bu münasibət onu ifadə edir ki, χ və δ metrikaları ciddi mənada ekvivalentdirlər (bax, *Ehtimal metrikalarının müqayisəsi*).

χ metrikası bir sıra digər ehtimal metrikaları və məsafələri kimi, məs., σ metrikası, müşahidələr nəticələri üzrə $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmalarının fərqlənməsinin «çətinlik dərəcəsini» düzgün əks etdirən bir xassəyə malik olub, statistikada mühüm rol oynayır. Doğrudan da, fərz olunur ki, $\alpha(\varphi)$ və $\beta(\varphi)$ – müqayisə olunan $\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ paylanmalarından hansının doğru olması haqqında H və $\widetilde{H}$ hipotezlərinin yoxlanılması üçün $\varphi(\omega)$ kriterisinin 1-ci və 2-ci növ səhv ehtimallarıdır. Əgər bu paylanmaların fərqlənmə ölçüsü kimi

$$\mathrm{Er}(\mathbf{P},\,\widetilde{\mathbf{P}}) = \inf\{\alpha(\varphi)+\beta(\varphi):\varphi\}$$

götürülərsə, onda

$$\mathrm{Er}(\mathbf{P},\,\widetilde{\mathbf{P}}) = 1-\sigma(\mathbf{P},\,\widetilde{\mathbf{P}})$$

olur. Asılı olmayan sınaqlarla bağlı $\mathbf{P}^n=\mathbf{P}_1\times\ldots\times\mathbf{P}_n$ və $\widetilde{\mathbf{P}}^n=\widetilde{\mathbf{P}}_1\times\ldots\times\widetilde{\mathbf{P}}_n$ ölçüləri üçün fərqlənmə ölçüsü

$$(1/2)\,e^{-2\lambda n} \le \mathrm{Er}(\mathbf{P}^n,\,\widetilde{\mathbf{P}}^n) \le e^{-\lambda n}$$

münasibətilə qiymətləndirilir, burada

$$\lambda = -\log H(\mathbf{P},\,\widetilde{\mathbf{P}}) \ge \chi^2(\mathbf{P},\,\widetilde{\mathbf{P}}).$$

Əd.: [1] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

HELLİNGER MƏSAFƏSİ « Хеллингера расстояние; Hellinger distance », α tərtib H. m. – adi *ehtimal məsafəsidir* və o,

$$\tau(\alpha;\,\mathbf{P},\,\mathbf{Q}) = \int_{\Omega}\varphi_\alpha(p_{\mathbf{V}},\,q_{\mathbf{V}})\,d\mathbf{V},\quad 0<\alpha<1$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\varphi_\alpha(x,\,y)=\alpha x-(1-\alpha)y-x^\alpha y^{1-\alpha}$, $\mathbf{V}$, – $(\Omega,\,\mathscr{A})$ ölçülən fəzasında elə ehtimal paylanmasıdır ki, o, eyni ehtimal fəzasında verilən $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ ehtimal paylanmalarından dominar olanıdır [yəni $\mathbf{P}<<\mathbf{V}$, $\mathbf{Q}<<\mathbf{V}$; belə ölçülər həmişə mövcuddur, məs., $V=(\mathbf{P}+\mathbf{Q})/2$] və $p_V=d\mathbf{P}/d\mathbf{V}$, $q_V=d\mathbf{Q}/d\mathbf{V}$. H. m. –

$$\tau(\alpha;\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \mathbf{M}_{\mathbf{V}}\varphi_\alpha(p_{\mathbf{V}},\,q_{\mathbf{V}}) = 1-\mathbf{M}_{\mathbf{V}}\,p_{\mathbf{V}}^{\alpha}\,q_{\mathbf{V}}^{1-\alpha},$$

bərabərlikləri şəklində yazıla bilinir, burada $\mathbf{M}_{\mathbf{V}}$, – $\mathbf{V}$ ölçüsü üzrə ortalamadır.

φ_α funksiyası aşağıdakı xassələri ödəyir:

$\varphi_\alpha(x,\,y)\ge 0$, $x,\,y\ge 0$ olduqda,

$$\varphi_\alpha(x,\,y)\to yI(x=0)\overset{def}{=}\varphi_0(x,\,y),\ \alpha\downarrow 0 \text{ olduqda,}$$

$$\varphi_{1/2}(x,\,y)=(1/2)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2,$$

$$\frac{2}{1-\alpha}\,\varphi_{1/2}(x,\,y)\le\varphi_\alpha(x,\,y)\le 8\,\varphi_{1/2}(x,\,y).$$

Bu xassələr əsasında H. m. ilə *Hellinger metrikası* – $\chi(\mathbf{P},\,\mathbf{Q})=\tau(1/2;\mathbf{P},\mathbf{Q})$-nü müqayisə etmək olur:

$$\frac{2}{1-\alpha}\,\chi(\mathbf{P},\,\mathbf{Q})\le\tau(\alpha;\mathbf{P},\mathbf{Q})\le 8\,\chi(\mathbf{P},\,\mathbf{Q}),$$

bu münasibətdən

$$\tau(\alpha;\,\mathbf{P},\,\mathbf{Q})=0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{P}=\mathbf{Q}$$

münasibəti alınır. H. m. $\alpha\ne 1/2$ olduqda metrika olmur, çünki onun üçün simmetriya və üçbucaq bərabərsizliyi xassələri ödənilmir.

H. m. və onunla bağlı

$$H(\alpha;\mathbf{P},\mathbf{Q})=1-\tau^2(\alpha;\mathbf{P},\mathbf{Q})$$

– α tərtib Hellinger inteqralının üstün cəhətləri, xüsusi halda, aşağıdakı mütləq kəsilməzlik ($\mathbf{Q}<<\mathbf{P}$) və $\mathbf{Q}$ paylanmasının $\mathbf{P}$-yə nəzərən sinqulyarlıq ($\mathbf{Q}\perp\mathbf{P}$) kriterilərilə ifadə olunur:

$\mathbf{Q}<<\mathbf{P} \;\Leftrightarrow\; H(\alpha;\,\mathbf{P},\,\mathbf{Q})\to 1,\quad \alpha\downarrow 0$

$\mathbf{Q}\perp\mathbf{P} \;\Leftrightarrow\; H(\alpha;\,\mathbf{P},\,\mathbf{Q})\to 0,\quad \alpha\downarrow 0$

$\mathbf{Q}\perp\mathbf{P} \;\Leftrightarrow\; H(\alpha;\,\mathbf{P},\,\mathbf{Q})=0$, bütün $\alpha\in(0,\,1)$ üçün,

$\mathbf{Q}\perp\mathbf{P} \;\Leftrightarrow\; H(\alpha;\,\mathbf{P},\,\mathbf{Q})=0$, hər hansı $\alpha\in(0,\,1)$ üçün.

$\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n$, $n\ge 1$ ehtimal paylanmaları ailələrinin kontiqual-allıq və tam asimptotik fərqlənmə kimi xassələrinin kriteriləri Hellinger inteqralları terminlərilə ifadə olunur:

a) $(\mathbf{Q}^n)\Delta(\mathbf{P}^n)$-nin kontiqualllığı – $n\to\infty$ olduqda, $\mathbf{P}^n(A^n)\to 0 \Rightarrow \mathbf{Q}^n(A^n)\to 0$, $A^n\in\mathscr{A}$; b) $(\mathbf{Q}^n)\Delta(\mathbf{P}^n)$-nin tam asimptotik fərqlənməsi – yəni elə n_k və $A_1, A_2, \ldots$ ardıcıllıqları vardır ki, $k\to\infty$ olduqda $\mathbf{P}^{n_k}(A_k)\to 1$ və $\mathbf{Q}^{n_k}(A_k)\to 0$ olur. Doğrudan da:

$$(\mathbf{Q}^n)\Delta(\mathbf{P}^n) \;\Leftrightarrow\; \lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\inf H(\alpha;\mathbf{P}^n,\mathbf{Q}^n)=1,$$

$$(\mathbf{Q}^n)\Delta(\mathbf{P}^n) \;\Leftrightarrow\; \lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\inf H(\alpha;\mathbf{P}^n,\mathbf{Q}^n)=0,$$

$$(\mathbf{Q}^n)\Delta(\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\inf H(\alpha;\mathbf{P},\mathbf{Q})=0$$

bütün $\alpha\in(0,\,1)$ üçün,

$$(\mathbf{Q}^n)\Delta(\mathbf{P}^n) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\inf H(\alpha;\mathbf{P},\mathbf{Q})=0$$

hər hansı $\alpha\in(0,\,1)$ üçün

münasibətləri doğrudur.

HELLİNGER PROSESİ « Хеллингера процесс; Hellinger process » – ehtimal ölçüləri ailələri arasında Helinger inteqralının zaman üzrə dəyişmə evolyusiyasını xarakterizə edən *öngörül təsadüfi prosesdir.* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0})$, – $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ filtrasiyası ilə verilmiş (bax, *Stoxastik bazis*) $(\Omega, \mathcal{A})$ ölçülən fəzası və $\mathbf{P}$, $\widetilde{\mathbf{P}}$, – $(\Omega, \mathcal{A})$-da iki ehtimal ölçüsü; $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}|\mathcal{A}_t$ və $\widetilde{\mathbf{P}}_t = \widetilde{\mathbf{P}}|\mathcal{A}_t$, – $\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ ölçülərinin $\mathcal{A}_t$-yə daralması olsun və $\mathbf{Q}$ elə bir ölçü olsun ki, $\mathbf{P} \overset{loc}{<<} \mathbf{Q}$, $\widetilde{\mathbf{P}} \overset{loc}{<<} \mathbf{Q}$, yəni hər bir $t \geq 0$ qiymətində $\mathbf{P}_t$, $\widetilde{\mathbf{P}}_t$, $\mathbf{Q}_t$ ölçüləri $\mathbf{P}_t << \mathbf{Q}_t$, $\widetilde{\mathbf{P}}_t << \mathbf{Q}_t$ şərtlərini ödəyirlər, burada $\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}|\mathcal{A}_t$.

$$\mathscr{Y}_t = \frac{d\mathbf{P}_t}{d\mathbf{Q}_t}, \quad \widetilde{\mathscr{Y}}_t = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{Q}_t}, \quad Y_t(\alpha) = \mathscr{Y}_t^{\alpha}\widetilde{\mathscr{Y}}_t^{1-\alpha}$$

və $H(\alpha)_t = \mathbf{M}_Q Y_t$, – $\mathbf{P}_t$ və $\widetilde{\mathbf{P}}_t$ ölçüləri arasında α tərtib Hellinger inteqralı olsun; simvolik olaraq:

$$H(\alpha)_t \equiv \int \left(\frac{d\mathbf{P}_t}{d\mathbf{Q}_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{Q}_t}\right)^{1-\alpha} d\mathbf{Q}_t = \int (d\mathbf{P}_t)^{\alpha}\,(d\widetilde{\mathbf{P}}_t)^{1-\alpha}$$

$Y(\alpha) = (Y_t(\alpha)_t)_{t\geq 0}$ prosesi $Y_t(\alpha) = \mathscr{Y}_t^{\alpha}\widetilde{\mathscr{Y}}^{-1-\alpha}$ olduqda D sinfinin Q ölçüsü üzrə mənfi olmayan supermartinqalıdır və Dub – Meyer ayrılışına görə elə $\mathcal{M}(\alpha)$ Q – martinqalı və artan sonluqiymətli $A(\alpha)_0 = 0$ şərtini ödəyən elə öngörül $A(\alpha)$ prosesi vardır ki, $Y(\alpha) = \mathcal{M}(\alpha) - A(\alpha)$. Hər bir $\alpha \in (0, 1)$ üçün $h(\alpha)_0 = 0$ şərtini ödəyən elə artan $h(\alpha) = (h(\alpha)_t)_{t\geq 0}$ öngörül prosesi tapılar ki, (Q – fərqlənməməzliyinə qədər dəqiqliklə yeganə olan), $h(\alpha) = I_{\Gamma'} \cdot h(\alpha)$ doğrudur, burada $\Gamma' = \Gamma \cap \widetilde{\Gamma}$, $\Gamma = \{\mathscr{Y}_- > 0\} \cup [[0]]$, $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\mathscr{Y}} > 0\} \cup [[0]]$ və $A(\alpha) = Y(\alpha)_- \cdot h(\alpha)$, yəni

$$A(\alpha)_t = \int_0^t Y(\alpha)_{s-}\, dh_s(\alpha).$$

Bu $h(\alpha)$ prosesi $\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ ölçülərinə uyğun $\alpha \in (0, 1)$ tərtib Hellinger prosesi adlanır. Əgər $\widetilde{\mathscr{Y}}^c$ $\mathscr{Y}$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}$ Q – martinqallarının kəsilməz martinqal komponentləri, $\nu(\mathscr{Y}, \widetilde{\mathscr{Y}})$ – ikiölçülü $(\mathscr{Y}, \widetilde{\mathscr{Y}})$ prosesinin sıçrayışları ölçüsünün kompensatoru olarsa, onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$h(\alpha)_t = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left\{\frac{1}{\mathscr{Y}_-^2}\cdot\left\langle \mathscr{Y}^c, \mathscr{Y}^c\right\rangle - \frac{1}{\mathscr{Y}\cdot\widetilde{\mathscr{Y}}_-}\cdot\left\langle \mathscr{Y}^c, \widetilde{\mathscr{Y}}^c\right\rangle + \frac{1}{\widetilde{\mathscr{Y}}^2}\cdot\left\langle \widetilde{\mathscr{Y}}^c, \widetilde{\mathscr{Y}}^c\right\rangle\right\} + \varphi_{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\mathscr{Y}_-}, 1 + \frac{y}{\widetilde{\mathscr{Y}}_-}\right) * \nu_t^{(\mathscr{Y}, \widetilde{\mathscr{Y}})}.$$

burada $\left\langle \mathscr{Y}^c, \mathscr{Y}^c\right\rangle$, $\left\langle \widetilde{\mathscr{Y}}^c, \widetilde{\mathscr{Y}}^c\right\rangle$, – $\mathscr{Y}^c$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}^c$-nin kvadratik xarakteristikaları, $\left\langle \mathscr{Y}^c, \widetilde{\mathscr{Y}}^c\right\rangle$, – $\mathscr{Y}^c$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}^c$-nin kvadratik kovariasiyasıdır; $\varphi_{\alpha}(x, y) = \alpha x + (1-\alpha)y - x^{\alpha}y^{1-\alpha}$.

M i s a l l a r. 1) Əgər $\mathbf{Q} = (\mathbf{P} + \widetilde{\mathbf{P}})/2$ olarsa, onda $\mathscr{Y} + \widetilde{\mathscr{Y}} = 2$ və

$$h(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{Y}_-} + \frac{1}{\widetilde{\mathscr{Y}}_-}\right)^2 \cdot \left\langle \mathscr{Y}^c, \mathscr{Y}^c\right\rangle + \varphi_{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\mathscr{Y}_-}, 1 - \frac{x}{\widetilde{\mathscr{Y}}_-}\right) * \nu^{\mathscr{Y}}.$$

2) Əgər $\widetilde{\mathbf{P}} \overset{loc}{<<} \mathbf{P}$ və $Z_t = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t}$ olarsa, onda

$$h(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\cdot\frac{1}{Z_-^2}\cdot\left\langle Z^c, Z^c\right\rangle + \left\{\alpha + (1-\alpha)\left(1 + \frac{x}{Z_-}\right) - \left(1 + \frac{x}{Z_-}\right)\right\} * \nu^Z$$

və məsələn,

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{Z_-^2}\cdot\left\langle Z^c, Z^c\right\rangle + \frac{1}{2}\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{x}{Z_-}}\right\}^2 * \nu^Z.$$

H. p.-nin «öngörül kafi statistika» kimi rolu aşağıdakı nəticələrdən aydın olur.

1. $A = \mathbf{V}\mathcal{A}_t$, $\tau = \tau(\omega)$ – Markov momenti (yəni $\tau \geq 0$ və $\{\tau \geq t\} \in \mathcal{A}_t$, $t \geq 0$) olsun; onda $\widetilde{\mathbf{P}}_{\tau} << \mathbf{P}_{\tau}$ münasibətinin ödənilməsi üçün zəruri və kafidir ki, $\widetilde{\mathbf{P}}_0 << \mathbf{P}_0$ və $h(\alpha)_{\tau} \xrightarrow{\widetilde{\mathbf{P}}} 0$, $\alpha \downarrow 0$ münasibətləri ödənilsin.

2. $\widetilde{\mathbf{P}} \overset{loc}{<<} \mathbf{P}$ olsun, onda Kakutani alternativinin aşağıdakı ümumiləşməsi doğrudur: $\widetilde{\mathbf{P}} << \mathbf{P}$ münasibətinin ödənilməsi üçün zəruri və kafidir ki, $\widetilde{\mathbf{P}}\{h(1/2)_{\infty} < \infty\} = 1$ olsun, $\widetilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$ münasibətinin ödənilməsi üçün zəruri və kafidir ki, $\widetilde{\mathbf{P}}\{h(1/2)_{\infty} < \infty\} = 0$ şərti ödənilsin.

Əd.: [1] L i p t s e r R. S h., S h i r y a e v A. N., On the problem of «predictable» criteria of contiguity. Proc 4th USSR – Japan Symp., «Lect, Notes Math.», 1983, № 1021, p. 386–418; [2] Ж а к о д Ж., Ш и р я е в A. H., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., M., 1994.

HEMMİNQ PƏNCƏRƏSİ « хэмминг окно; hamming window » – bax, *Korrelyasion pəncərə.*

HENNAN – KUİNN KRİTERİSİ « Хеннана – Куинна критерий; Hannan – Quinn criterion » – bax, *Parametrik model*; t ə r t i b i n s e ç i l m ə s i.

HERMİT MÜSBƏT FUNKSİYASI « Эрмитова положительная функция; Hermitian positive function » – bax, *Müsbət müəyyən funksiya.*

HERMİT TƏSADÜFİ MATRİSİ « Эрмитова случайная матрица; Hermitian random matrix » – n tərtib elə $H_n = \|\xi_{ij}\|$ kvadrat *təsadüfi matrisidir* ki, özünün qoşma Hermit matrisi $\overline{H_n^{\mathrm{T}}}$ ilə üst-üstə düşür. Əgər H. t. m. H_n -in elementlərinin diaqonalda və diaqonaldan yuxarıda yerləşən həqiqi və xəyali hissələri birgə ehtimal sıxlığına malik olarlarsa, onda H_n matrisinin məxsusi qiymətləri $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ 1 ehtimalla üst-üstə düşmürlər. H. t. m. H_n -in məxsusi vektorları

$$(H_n - \lambda_i I)\, a_i = 0\,,\ (a_i,\ \overline{a}_i) = 1\,,\ \arg a_{1i} = c_i\,,\ i = 1, ..., n$$

tənliklər sistemi ilə birqiymətli təyin olunurlar, burada c_i – hər hansı təsadüfi olmayan ədədlərdir, $0 \leq c_i \leq 2\pi$, $i = 1, ..., n$.

Γ, – n – ölçülü unitar matrislər qrupu və υ – bu qrupda normalanmış Haar ölçüsü, $\mathscr{B}$, – Γ qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri olsun, $A_n = (a_1, ..., a_n)$. Əgər H. t. m. H_n -in paylanma sıxlığı mövcuddursa, onda

$$\mathbf{P}\{A_n \in L,\ \alpha_i < \lambda_i < \beta_i,\ i = 1, ..., n\}$$

ehtimallarını hesablamaq olar, burada α_i, β_i – ixtiyari həqiqi ədədlərdir; L, – $\mathscr{B}$ -nin ixtiyari altçoxluğudur.

Əgər $U_n H_n U_n^*$ və H_n matrislərinin paylanmaları bütün $U_n \in \Gamma$ unitar matrislər üçün üst-üstə düşərsə, onda A_n matrisi H. t. m. H_n -in məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı deyildir və onun paylanması

$$\mathbf{P}\{A_n \in L \subset \mathscr{B}\} = \int_L \nu(\, dU_n \,|\, \arg u_{1i} = c_i,\ \ i = 1, ..., n)$$

düsturu ilə təyin olunur. Məxsusi qiymətlərin paylanma sıxlığını da təyin etmək olur (bax, [1]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

HESABİ – ADDİTİV FUNKSİYASI, ÇOXLUQLARIN « счетно – аддитивная функция множеств; countably additive set function / σ – additive set function » – çoxluqların hər hansı sinfində təyin olunmuş və hesabi additivlik xassəsinə (yəni hesabi sayda toplananlar üçün additivlik xassəsinə) malik funksiyadır. K – çoxluqların hər hansı sinfi, G – additiv yazılışda kommutativ topoloji qrup olsun (yəni G -də qrup əməli + simvolu ilə işarə olunur). Əgər K sinfinin elementlərinin hesabi dizyunkt $(X_i)_{i \in I}$ ixtiyari ailəsi üçün bu elementlərin birləşməsi də K -nın elementi olduğu halda

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(X_i)$$

bərabərliyi ödənilərsə, $\mu : K \to G$ funksiyası hesabi–additiv funksiya adlanır. Bərabərliyin sağ tərəfindəki cəmin yığılması adi mənada anlaşılır (I çoxluğunun sonlu altçoxluqlarının tamamlayıcılarının doğurduğu Freşe filtri üzrə I -də yığılma kimi). Tərifdən bilavasitə alınır ki, bu sıra kommutativ (şərtsiz) yığılır və deməli, əgər G qrupu həqiqi ədədlər meydanı üzərində sonluölçülü normalanmış vektor fəza olarsa, onda o göstərilən sıra mütləq yığılır.

G həqiqi $\mathbb{R}$ ədəd oxu ilə üst-üstə düşdükdə, sonsuz qiymətlər alan H. – a. ç. f.-na da tez-tez baxılır. Bu halda tələb olunur ki, hər bir funksiya sonsuzluq qiymətini yalnız bir işarə ilə ala bilər (ya yalnız $+\infty$ və ya yalnız $-\infty$).

Aydındır ki, hər bir H. – a. ç. f. eyni zamanda həm də sonlu – additiv çoxluq funksiyasıdır. Tərsi isə, ümumiyyətlə, doğru deyildir. Riyaziyyatın müxtəlif oblastlarında halqalar və cəbri çoxluqlarda (uyğun olaraq, çoxluqların σ – halqa və σ – cəbrlərində) verilən ədədi hesabi – additiv funksiyalar olduqca mühüm rola malikdirlər. Belə funksiyalar tez-tez yüklər (ümumiləşmiş ölçülər, işarəsini dəyişən ölçülər) adlandırılır. H.-a. ç. f. anlayışının mühüm xüsusi halı – *ölçü* anlayışıdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

HESABİ EHTİMALİ AVTOMAT « вероятностный автомат счетный; countable probabilistic automation » – bax, *Ehtimali avtomat.*

HESABİ MARKOV ZƏNCİRİ « счетная цепь Маркова; countable / denumerable Markov chain » –

1) geniş mənada H. M. z. – vəziyyətləri çoxluğu hesabi *Markov zəncirdir.*

2) Dar mənada H. M. z. – vəziyyətləri çoxluğu hesabi bircins *Markov zənciridir*. H. M. z. nəzəriyyəsi asılı təsadüfi sınaqlar və kəmiyyətlərin bütövlükdə nəzəriyyəsi kimi sonlu zəncirlər üzrə A. A. Markovun işləri seriyasından qaynaqlanmışdır (bax, [1], [2]). Vəziyyətləri çoxluğu hesabi zəncirlərin öyrənilməsinə 1936 – 37-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən başlanılmışdır (bax, [4], [5]).

H. M. z. nəzəriyyəsi Markov zəncirlərinin ümumi nəzəriyyəsinin ən çox öyrənilmiş sahəsinə qədər inkişaf yolu keçərək, elm və texnikanın müxtəlif oblastlarında cürbəcür tətbiqlərini tapa bilmişdir (bax, [6], [10]).

Sonlu və hesabi Markov zəncirlərinin (yəni vəziyyətləri çoxluğu sonlu və hesabi Markov zəncirlərinin) evolyusiyasını təyin edən ehtimal mexanizmi ilk növbədə keçid ehtimalları (biraddıma) p_{ij} ilə təsvir olunur, burada i və j baxılan zəncirin vəziyyətləri fəzası E -nin nöqtələridir. Əgər E sonlu fəza olarsa, onda o, əksər hallarda, $\{0, 1, ..., N\}$ və ya $\{1, ..., N\}$ çoxluğu ilə eyniləşdirilir, N – natural ədəddir; əgər E hesabi fəzadırsa, onda o, $\{0, 1, ...\}$ və ya $\{1, 2, ...\}$ çoxluğu ilə eyniləşdirilir. Başlanğıc (ilkin) paylanma məlum olduğu halda, yəni $p_i = \mathbf{P}\{X_0 = i\}$, $i \in E$ ehtimalları məlum olduqda $\Lambda_n = \{X_0 = i_0, ..., X_n = i_n\}$ şəklində hadisələrin ehtimalları və bu hadisələr üzrə zəncirin bütün evolyusiyası $\mathbf{P}(\Lambda_n) = p_{i0} p_{i_0 i_1} ... p_{i_{n-1} i_n}$ bərabərliyindən tapılır, burada $\{X_0, X_1, ...\}$ – baxılan zəncirin trayektoriyasıdır. Beləliklə, $\mathbf{P}\{X_n = i_n \,|\, \Lambda_{n-1}\} = p_{i_{n-1} i_n}$, $\mathbf{P}\{X_n = i_n / \Lambda_{n-1}\} = p_{i_{n-1} i_n}$ bərabərliyi $\mathbf{P}\{\Lambda_{n-1}\} \neq 0$, $n \geq 1$ olduqda doğrudur.

p_{ij} ehtimallarından $P = \|p_{ij}\|$ keçid matrisi qurulur və bu matris E -nin sonlu və ya sonsuz olmasından asılı olaraq sonlu və ya

sonsuz stoxastik matris olur. $p_{ij}(n)$ n addıma i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalı olduqda *Kolmoqorov – Çepmen tənliyi*

$$p_{ij}(m+n)=\sum_{k\in E} p_{ik}(m)\,p_{kj}(n),\quad m,\ n\geq 1$$

əsasında $\left\| p_{ij}(n)\right\|$ matrisini P^n şəklində yazmaq olur.

P^n matrisinin $n=1,\ 2,\ \ldots$ bütün qiymətlərində bilavasitə tapılması, bir qayda olaraq, mümkün olmur və adətən, həm nəzəri, həm də tətbiqi araşdırmalarda əsas səylər $n\to\infty$ halında P^n-in asimptotikasının təsvirinə istiqamətlənir. Bu halda A. N. Kolmoqorova məxsus, zəncir vəziyyətlərinin təsnifatı əsas götürülmüşdür (bax, *Markov zənciri*; v ə z i y y ə t l ə r i n t ə s n i f a t ı). Markov zəncirləri üçün *limit teoremləri* də mühüm informasiya verir. Buna baxmayaraq H. M. z. ilə araşdırmalarda, xüsusilə də, sonlu zəncirlərlə bağlı olaraq, bəzi müəlliflər sırf cəbri texnikadan istifadə edirlər (bax, məs., [6]), bu halda cəbri və ehtimal modellərinin kombinasiyasında, adətən, böyük uğurlara nail olunur (bax, [7] – [10]).

M i s a l 1. Zəncirin vəziyyətləri çoxluğu $\{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$ toplusu olsun və zəncirin verilən vəziyyətlər üzrə təsadüfi dolaşmaya uyğun olduğu fərz olunur. Fərz olunur ki, 0 və N vəziyyətləri uducu vəziyyətlərdir və hər bir i vəziyyətindən $(0<i<N)$ növbəti addımla ya $p_{i,\,i+1}=p$ $(p\in(0,\ 1))$ ehtimalı ilə $i+1$ vəziyyətinə və ya $p_{i,\,i-1}=q=1-p$ ehtimalı ilə $i-1$ vəziyyətinə keçid baş verir. Aydın olur ki, əgər $1\leq j\leq N-1$ olarsa, i-nin ixtiyari qiymətlərində $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0$ münasibəti ödənilir. $\alpha_i=\lim\limits_{n\to\infty} p_{i0}(n)$ və $\beta_i=\lim\limits_{n\to\infty} p_{iN}(n)$ limitləri də mövcuddur və $\alpha_i+\beta_i=1$. Əgər $p=q=1/2$ olarsa, onda $\alpha_i=1-iN^{-1}$. Əgər $p\neq 1/2$ olarsa, onda $\alpha_i=(\gamma^N-\gamma_i)(\gamma^N-1)^{-1}$ olur, burada $\gamma=q\,p^{-1}$ $(0\leq i\leq N)$.

M i s a l 2 (müvəffəqiyyətlər seriyası). Vəziyyətləri çoxluğu – $\{0,\ 1,\ \ldots\}$ olan H. M. z.-nin keçid ehtimalları $p_{i0}=q_i$ və $p_{i,\,i+1}=1-q_i$ olsun, burada $q_i\in(0,\ 1)$, $i\geq 0$ və digər hallarda isə $p_{ij}=0$. Əgər hər dəfə i vəziyyətindən $i+1$ vəziyyətinə və ya hər hansı sınaqlarda 0 vəziyyətinə keçid uyğun olaraq «müvəffəqiyyət» və ya «qeyri – müvəffəqiyyət» kimi interpretasiya olunarsa, onda n-ci addımda zəncirin $i\geq 1$ vəziyyətində olması bu ana qədər, sonuncu qeyri – müvəffəqiyyətdən sonra məhz yalnız i sayda müvəffəqiyyətin baş verməsi kimi anlaşılır (fərz olunur ki, qeyri – müvəffəqiyyətlər baş vermişdir). Verilən zəncir qarşılıqlı zəncir, yalnız və yalnız, o halda olur ki, $\sum\limits_i p_i=\infty$ şərti ödənilsin (bax, *Qayıdışlı Markov zənciri*), burada $p_i=1-q_i$. Bu halda bu zəncirin *final ehtimalları* $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ ehtimalları olur ki, bunlar $\sum\limits_j \pi_j=1$ və $\pi_j=\pi_0\,p_0\,p_1\ldots p_{j-1},\ j\geq 1$ münasibətlərindən təyin olunur.

Əd.: [1] M a r k o v A. A., «Изв. физ.-матем. об-ва Казан ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135–56; [2] M a r k o v A. A., «Изв. Петерб. АН», 1907, т. 1, № 3, с. 61–80; [3] M a r k o v A. A., Исчисление вероятностей, 4 изд., M., 1924; [4] K o l m o g o r o v A. N., Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 173–78; [5] K o l m o g o r o v A. N., Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 183–97; [6] R o m a n o v s k i y V. I., Дискретные цепи Маркова, M. – L., 1949; [7] F e l l e r V., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, M., 1984; [8] G i x m a n I. I., S k o r o x o d A. V., Теория случайных процессов, т. 1, M., 1971; [9] S i r a j d i n o v S. X., F o r m a n o v Sh. K., Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова, Таш., 1979; [10] B a r u ç a – R i d A. T., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., M., 1969; [11] K e m e n i J., S n e l l J., K n e p p A., Счетные цепи Маркова, пер. с англ., M., 1987.

HESABİ TİP σ – CƏBR « счетного типа σ – алгебра; σ – algebra of countable type », s e p a r a b e l t i p – bax, *σ – Cəbri, çoxluqların.*

HESABLANILMA MƏSƏLƏLƏRİ k o m b i n a t o r a n a l i z d ə **« перечислительные задачи** в к о м б и н а т о р н о м а н а л и з е; **ennumerative problems** i n c o m b i n a t o r i a l a n a l y s i s **»** – bax, *Kombinator analiz.*

HETEROSKEDASTİK REQRESSİYA « гетероскедастическая регрессия; heteroscedastic regression » – dispersiyaları müxtəlif olan, qeyri – korrelyar xətalarlı *reqression eksperimentdir.*

HEYZENBERQ MODELİ « Гейзенберга модель; Heisenberg model » – *statistik mexanikanın* şəbəkəvari modelidir; bu modeldə vəziyyətlər fəzası $\{x_s\}$ (X-in qiymətləri fəzası) – vahid radiuslu $S^2\subset\mathbb{R}^3$ sferasıdır, U potensialı isə aşağıdakı şəkildədir:

$$U_A(x_A)=\begin{cases} -h\,x_t, & A=\{t\},\\ -I\,x_s\,x_t, & A=\{s,\ t\},\ \left|s-t\right|=1,\ s,\ t\in\mathbb{Z}^d,\\ 0, & \text{digər } A\text{-lar üçün}\end{cases}$$

Üçölçülü H. m.-ndə ($\mathbb{Z}^3$ şəbəkəsində) $h=0$ olan maqnit sahəsində və $I>0$ olduqda (ferromaqnit model) faza keçidi baş verir, bu keçid ondan ibarət olur ki, tərs temperatur parametri β-nın böyük qiymətlərində *Gibbs paylanmalarının* tam bir kontiniumu olur.

H. m. XYZ – m o d e l i də adlandırılır. $X=S^1\subset\mathbb{R}^2$ halı XY – m o d e l i adlanır. Üçölçülü XY – modeli Gibbs paylanmalarının analoji strukturuna malikdir. $\mathbb{Z}^2$ şəbəkəsində vəziyyət başqadır: ikiölçülü XY – modelində Berezinski – Kosterlits – Tauless faza keçidi baş verir, bu keçid ondan ibarətdir ki, bütün β qiymətlərində, Gibbs paylanmasının yeganəliyinə baxmayaraq, korrelyasiyaların azalma sürəti kiçik β qiymətlərində eksponensial azalmadan böyük β-larda qüvvət üstlü azalmaya qədər dəyişir.

İkiölçülü H. m. üçün analoji problem həll olunmamışdır.

Əd.: [1] F r o h l i c h J., S i m o n B., S p e n c e r T., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 50, № 1, p. 79–85; [2] B r i c m o n t J., F o n t a i n e J., L a n d a u L. J., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 56, № 3, p. 281–96; [3] F r o h l i c h J., S p e n c e r T., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 81, № 4, p. 527–602.

HƏDDƏNZİYADƏLİK « избыточность; redundancy » – *məlumatlar mənbəinin* hasil etdiyi məlumatın komponentləri arasında statistik asılılıq ölçüsüdür. Elementlərinin sayı

$|\mathfrak{X}|$-ə bərabər sonlu $\mathfrak{X}$ çoxluğundan qiymətlər alan $\{X_k\}$, $-\infty < k < \infty$ stasionar təsadüfi prosesinin realizasiyaları olan $X = (..., X_{-1}, X_0, X_1, ...)$ məlumatlarını hasil edən, stasionar məlumatlar mənbəi diskret zamanlı U-nun H. ölçüsü λ

$$\lambda = 1 - \overline{H}(U)/H_{\max}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\overline{H}(U)$ – *məlumatların hasilolunma sürəti*, $H_{\max}$ – komponentləri $|\mathfrak{X}|$ sayda qiymətlər alan, diskret zamanlı mənbənin məlumat hasilolunma sürətinin mümkün olan maksimal qiymətidir. İnformasiya nəzəriyyəsi üçün H. ölçüsünün qiyməti məlumatlar mənbəinin *kodlama* teoremi ilə təyin olunur və bu teoremdə *informasiyanı ötürmə sürətinin* artırılması mümkünlüyü göstərilir.

Rabitə kanalının əngələdayanıqlılığını artırmanın əsas metodlarından biri kodlamada H. z. ölçüsünün daxil olunmasıdır və bununla da kanalın girişində simvollar arasında statistik asılılıq əks olunur. Belə asılılıq, dekodlamada, kanalda xətaların təsirinin aradan qaldırılmasına imkan yaradır ki, bu da *səhv dekodlama ehtimalının* azalmasına səbəb olur.

Əd.: [1] Галлагер R., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., M., 1974; [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, M., 1982.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « решающая функция; decision function » – seçimi $\mathfrak{X}$ fəzasının həllər fəzası $\mathfrak{D}$-yə stoxastik inikasıdır. Stoxastik inikas həllər fəzası $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$-da stoxastik eksperimentin nəticəsi x-dən asılı olan $\varphi(\cdot|x)$ ehtimal paylanmasını (*həlledici qaydanı*) təyin edir. H. f. hər bir x üçün paylanması $\varphi(\cdot|x)$ qiymətləri $\mathfrak{D}$-dən olan $\delta = \delta(x)$ təsadüfi kəmiyyətdir. H. f., bəzən φ həlledici qaydası ilə eyniləşdirilir. H. f.-nın praktiki realizasiyası, ümumi halda randomizasiya proseduru ilə bağlıdır və əgər $\varphi(\cdot|x)$ paylanması hər hansı $d = d(x)$ nöqtəsində topalanmışdırsa, onda randomizasiya aparılmır. Bununla əlaqədar olaraq, randomlanmış və randomlanmamış H. f.-lar daxil olunur; randomlanmamış H. f.-lar $\mathfrak{X}$-dən $\mathfrak{D}$-yə ölçülən inikaslar kimi statistikalarla eyniləşdirilir.

Statistik oyunlar nəzəriyyəsində H. f. – seçimi fəzanın bütün mümkün həllər çoxluğuna ixtiyari ölçülən inikasıdır (bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*, *Statistik oyun*).

Əd.: [1] Вальд A., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, M., 1967, с. 300–522.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA; Bayes həlledici funksiyası **« решающая функция** байесовская; **Bayes decision function »** – bax, *Beyes həlledici funksiyası*.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA invariant **« решающая функция** инвариантная; invariant **decision function »** – bax, *İnvariantlıq* statistik oyunlar nəzəriyyəsində.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA meylsiz **« решающая функция** несмещенная; unbiased **decision function »** – bax, *Meylsizlik*(yi) statistik prosedurun.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA məqbul **« решающая функция** допустимая; admissible **decision function »** – bax, *Məqbul həlledici funksiya*.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA minimal **« решающая функция** минимальная; minimal **decision function »** – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA; minimal tam sinif **« решающая функция;** минимально полный класс; minimal complete class of **decision function »** – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA müntəzəm yaxşı **« решающая функция** равномерно лучшая; uniformly best **decision function »** – parametrik fəzanın bütün nöqtələrində risk funksiyasını müntəzəm minimallaşdıran *həlledici funksiyadır*. Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA optimal **« решающая функция** оптимальная; optimal **decision function »** – bax, *Optimallıq*(ğı) statistik prosedurun.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA randomlanmamış **« решающая функция** нерандомизированная; non–randomized **decision function »** – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA randomlanmış **« решающая функция** рандомизированная; randomized **decision function »** – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*.

HƏLLEDİCİ FUNKSİYA; tam sinif **« решающая функция;** полный класс; complete class of **decision function »** – elə *həlledici funksiyalar* çoxluğudur ki, qəbul olunan qərarların itkisiz keyfiyyəti statistik problemində bu funksiyalara baxılması kifayət edir. K – həlledici funksiyaların hər hansı sinfi olsun (ola bilər ki, bu sinif bütün həlledici funksiyaların sinfi ilə üst-üstə düşsün). Əgər ixtiyari $\delta \in K$ həlledici funksiyası üçün elə $\delta^* \in K^*$ həlledici funksiyası tapılarsa ki, bütün $\theta \in \Theta$ üçün $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda $K^* \subset K$ altsinfi K sinfində tam sinif adlanır, burada $R(\theta, \delta)$, – δ həlledici funksiyasının risk funksiyası olub, araşdırılan obyekti xarakterizə edən naməlum $\theta \in \Theta$ parametri haqqında qərar qəbul etmək üçün istifadə olunur. Bax, *Statistik prosedur*; tam sinif.

HƏLLEDİCİ KRİTERİ « решающий критерий; decision criterion » – bax, *Həlledici qayda*, *Ardıcıl yoxlanılması*, *hipotezlərin.*

HƏLLEDİCİ QAYDA « решающее правило; decision rule », həlledici kriteri, müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyasının θ parametrinə nəzərən H_i, $i = 0, ..., k$ hipotezlərinin yoxlanılması üçün (τ, d) ardıcıl *statistik kriterisidir.* Burada τ hər hansı $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında, verilmiş azalmayan $\{\mathscr{A}_t\}$, $\mathscr{A}_t \subset \mathscr{A}$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anıdır (dayanma anı), d, – $0, ..., k$ qiymətlərini (qəbul edilən hipotezin nömrəsi) alan ölçülən funksiyadır (sonda qəbul olunan qərar funksiyasıdır). Məs., əgər τ təsadüfi kəmiyyət olmazsa, onda H. q. statistik hipotezləri yoxlamaq üçün adi kriteridir.

Əgər (τ^*, d^*) H. q.-sında $w(\tau, \theta, d)$ Beyes riskinin orta qiymətinin minimumu alınırsa, yəni

$$\inf_{(\tau, d)} \int_{\Theta} \mathbf{M}_{\theta}\, w(\tau, \theta, d)\, q(d\theta) = \int_{\Theta} \mathbf{M}_{\theta}\, w(\tau^*, \theta, d^*)\, q(d\theta)$$

münasibəti ödənilərsə, (τ^*, d^*) H. f. $q(d\theta)$, $\theta \in \Theta$ aprior paylanması üçün Beyes (optimal Beyes) H. q.-sı adlanır.

Parametrlərin ardıcıl qiymətləndirilməsi məsələləri üçün H. q. anlayışının analoqu ardıcıl plandır (qiymətləndirmənin).

Əd.: [1] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976.

HƏNDƏSİ EHTİMALLAR « геометрические вероятности; geometric probability » – *ehtimal nəzəriyyəsinin* təsadüfi fiqurlar və onların təsadüfi yerləşmələrinin xassələrini öyrənən bölməsidir. H. e. üzrə ilk məsələlər artıq 18-ci əsrdə həll olunurdu (bax, *Byuffon iynə məsələsi*). 19-cu əsrin riyaziyyatçıları üçün səciyyəvi hal müntəzəm paylanmaya və fiqurları təyin edən parametrlərin asılı olmamazlığına əsaslanaraq, təsadüfi fiqurların paylanmalarını vermək üçün səylərin göstərilməsi olmuşdu. Lakin parametrlərin seçilməsində sərbəstlik təsadüfi fiqurun paylanmasını yeganə şəkildə vermək üçün təminedici olmamışdır. Bu vəziyyət *Bertran paradokslarında* aşkar surətdə özünü əks etdirmişdir.

Vahid radiuslu dairənin «ixtiyari vətərinin» uzunluğunun $\sqrt{3}$-dən böyük olması (yəni «təsadüfi vətərin» uzunluğunun daxilə çəkilmiş bərabərtərəfli üçbucaqlının tərəfindən böyük olması) hadisəsi A-nın ehtimalı $\mathbf{P}$-nin tapılması məsələsi qoyulmuşdu. J. Bertran (J. Bertrand) təsadüfi vətərin seçilməsi üçün aşağıdakı üç halı təklif etmişdi:

1) Çevrə üzərinə bir-birindən asılı olmadan B və C nöqtələri atılır. Bu nöqtələrin hər biri müntəzəm paylanmaya malikdir. BC vətərinə baxılır. Bu halda, $\mathbf{P}(A) = 1/3$.

2) Dairənin mərkəzindən vətərə endirilən perpendikulyarın oturacağı dairə daxilində müntəzəm qanunla paylanmışdır. Onda $\mathbf{P}(A) = 1/4$.

3) Dairənin mərkəzindən vətərə qədər olan məsafə $[0, 1]$-də müntəzəm qanunla paylanmışdır. Vətərin istiqaməti ixtiyaridir və $[0, 2\pi]$-də müntəzəm qanunla paylanmışdır. Onda $\mathbf{P}(A) = 1/2$.

Əgər vətər onun dairənin mərkəzindən məsafəsi p və vətərin verilmiş istiqamətlə əmələ gətirdiyi φ bucağı ilə verilərsə, onda «təsadüfi vətər» sözünün mənası – p və φ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması anlamına ekvivalentdir. Bu misallarda paylanmaların uyğun differensialları aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$1)\ \frac{dp\, d\varphi}{2\pi^2\sqrt{1-p^2}}; \qquad 2)\ \pi^{-1}\, p\, dp\, d\varphi; \qquad 3)\ (2\pi)^{-1}\, dp\, d\varphi.$$

Təsadüfi vətərin «təbii» təyin edilmə məsələsini H. Puankare (H. Poincaré) həll etmişdir. O, təsadüfi vətərin paylanmasını – Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant düzxətlər fəzasında ölçünün vətərlər çoxluğuna normalanmış daralması kimi təyin etməyi təklif etmişdir (belə ölçü yeganədir; bax, *İnteqral həndəsə*). Belə seçimə 3) misalı uyğundur. İnvariant ölçülərin sonluölçülü çoxluqlara analoji daralması ilə təsadüfi fiqurların paylanmasını digər fəzalarda da qurmaq olar (bax, məs., *Təsadüfi kəsik*(yi) çoxüzlünün). A. Renyi [6]-da verdiyi aksiomlar sistemi əsasında yuxarıda şərh olunmuş ölçünün daralması metodunun ehtimal ölçülərinin qurulmasına gətirdiyini göstərmişdir.

H. e.-da elə ölçülər də böyük əhəmiyyətə malikdirlər ki, çevirmələr qrupuna nəzərən bu ölçülərin invariant olmaları tələbi yalnız qismən ödənilir (bax, *İnteqral həndəsə*). İnteqral həndəsədə kombinator yanaşmaların inkişafı ölçülərin invariant olması tələblərindən asılı olmayan nəticələr almağa imkan verir. Verilmiş ölçüyə görə ehtimal ölçülərinin qurulması üsuluna onun faktorizasiyası da aiddir. Xüsusi halda, bu üsulla *təsadüfi şeyplərin* paylanmaları alınır. *Həndəsi proseslərdə* «tipik» konfiqurasiyaların paylanmalarının tapılması məsələləri də H. e.-a aiddir.

Konkret hadisələrin ehtimallarının hesablanması uyğun ölçülər və onların hasilləri üzrə inteqralların (çoxölçülü) hesablanmasına gətirilir. Bu halda inteqrallama oblastı olduqca mürəkkəb ola bilər. Örtüklər haqqında, qablaşdırma, fiqurların qarşılıqlı yerləşməsi haqqında məsələlər, cisimlərin düzxətlərlə və müstəvilərlə kəsilməsi haqqında *riyazi stereologiyanın* məsələləri belələrindəndir.

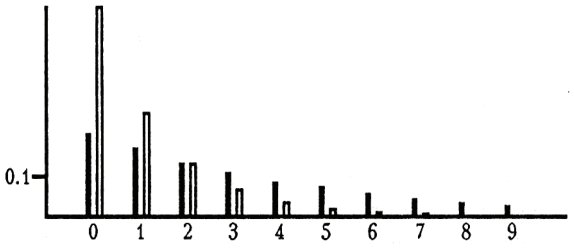
Əd.: [1] К е н д а л л М., М о р а н П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [2] С а н т а л о Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983; [3] B a d d e l e y A., «Adv. Appl. Probab.», 1977, v. 9, p. 824–60; [4] L i t t l e D., «Adv. Appl. Probab.», 1974, v. 6, p. 103–30; [5] Geometrical probability and biological structures, B. – [a. o.], 1978; [6] R e n y i A., Wahrschein-lichkeitchnung, 2 Aufl., B., 1966.

HƏNDƏSİ ERQODİK MARKOV ZƏNCİRİ « геометрически эргодическая цепь Маркова; geometrically ergodic Markov chain » – bax, *Erqodik Markov zənciri.*

HƏNDƏSİ PAYLANMA « геометрическое распределение; geometric distribution » – $m = 0, 1, 2, \ldots$ qiymətlərini

$$p_m = \mathbf{P}\{\xi = m\} = p\,(1-p)^m, \quad 0 < p < 1$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal *paylanmasıdır* (bax, şəkil). Riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq $(1-p)/p$ və $(1-p)/p^2$-na bərabərdir; asimmetriya əmsalı $As = (2-p)/\sqrt{1-p}$, eksses əmsalı $Eks = 6 + p^2/(1-p)$-yə bərabərdir.



$p = 0{,}2$ və $p = 0{,}5$ qiymətlərində həndəsi paylanma

H. p. adı p_m ehtimallarının həndəsi silsilədə azalmasına görə verilmişdir. H. p. mənfi binomial paylanmanın xüsusi halı olub, Bernulli sxemində ilk müvəffəqiyyətə qədər aparılan sınaqlar sayının paylanması kimi yaranmışdır; bu halda p – hər bir sınaqda «müvəffəqiyyət» ehtimalıdır.

H. p. keçmişin təsirsizliyi xassəsinə malikdir: əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti H. p. qanununa tabedirsə, onda ixtiyari tam m və n qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\xi \geq m+n \mid \xi \geq m\} = \mathbf{P}\{\xi \geq n\}$$

bərabərliyi doğrudur. Bu xassə onu göstərir ki, H. p. *üstlü qanunun* diskret analoqudur və H. p.-nın mühümlüyünə dəlalət edir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

HƏNDƏSİ PROSES « геометрический процесс; geometric process » – həndəsi fiqurların hər hansı $\mathscr{J}$ fəzasında təsadüfi *nöqtəvi prosesdir.* Fiqurlar əsas adlandırılan U fəzasında yerləşir və adətən, sonlu sayda parametrdən asılı olur. $\mathscr{J}$ fəzasına aid misallar: $\mathbb{R}^n$-də d – ölçülü müstəvilər, $\mathbb{R}^n$-də kürələr, $\mathbb{R}^n$-də çoxüzlülər, sferada dairələr və s. H. p.-in realizasiyaları U fəzasında sonlu və ya hesabi sayda fiqurların toplularıdır.

Əksəriyyətcə əsas U fəzasının çevirmələri qrupuna nəzərən invariant H. p.-lərə baxılır. Əsas fəzası $U = \mathbb{R}^n$ olan $\mathbb{R}^n$ fəzasının paralel yerinidəyişmələr qrupuna nəzərən invariant H. p. bircins (stasionar), Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant H. p. isə bircins və izotrop H. p. adlanır.

Ən çox məlum olan Puasson H. p.-ləridir; bu proseslərə $\mathscr{J}$-də Puasson nöqtəvi prosesləri uyğundur ki, bunlar üçün $\mathscr{J}$-də idarəedici ölçü adlanan μ-nün verilməsi tələb olunur. Müstəvidə düzxətlər Puasson prosesi, yalnız və yalnız, o halda bircins və izotrop prosesdir ki, onun idarəedici ölçüsü düzxətlərin invariant ölçüsünə mütənasib olsun (bax, *İnteqral həndəsə*), bu halda mütənasiblik əmsalı λ düzxətlər prosesinin intensivliyi adlanır. Bu halda H perimetrli qabarıq oblastı kəsən düzxətlərin sayı $\pi^{-1}\lambda H$ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır. $\mathbb{R}^n$-də kürələr Puasson prosesi, yalnız və yalnız, o halda bircins və izotrop prosesdir ki, $\mathscr{J} = \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$-da onun idarəedici ölçüsü μ, – $\mu = \lambda L \times m$ bərabərliyi ilə təyin olunsun, burada L, – $\mathbb{R}^n$-də Lebeq ölçüsü, λ – mərkəzlər prosesinin intensivliyi, m – «tipik» diametr paylanması adlanan, $[0, \infty)$-da ehtimal ölçüsüdür.

Puasson prosesləri digər H. p.-lərin qurulmasının əsasını təşkil edir. Əgər $\mathbb{R}^n$-də Puasson nöqtəvi prosesinin realizasiyasının hər bir nöqtəsinə qabarıq çoxüzlü qarşı qoymaq olarsa, bu çoxüzlü isə $\mathbb{R}^n$-in elə nöqtələrindən ibarət olarsa ki, bunlar üçün x realizasiyanın ən yaxşı nöqtəsidir, onda çoxüzlülər H. p.-i alınır; bu proses Voronoy *təsadüfi mozaikası* adlanır.

Əgər Puasson nöqtəvi prosesi bircins (izotrop) olarsa, uyğun Voronoy mozaikası da bu xassəyə malikdir. İdarəedici meylləri $\mathscr{J}$-də təsadüfi ölçülər olan Puasson H. p.-lərinə – ikiqat stoxastik Puasson proseslərinə (Koks proseslərinə) də baxılır.

H. p.-lərin mühüm xarakteristikaları onların moment ölçüləridir. $N(B)$ – prosesin $B \subset \mathscr{J}$ altçoxluğuna aid nöqtələrinin sayı olsun. İxtiyari kəsişməyən $B_1, \ldots, B_k \subset \mathscr{J}$ altçoxluqları üçün $\Lambda_k(B_1 \times \ldots \times B_k) = \mathbf{M}[N(B_1) \ldots N(B_k)]$ ölçüsünə k – tərtib moment ölçüsü deyilir. Puasson H. p.-nin birinci moment ölçüsü onun idarəedici ölçüsü ilə üst-üstə düşür.

$U = \mathbb{R}^n$-də fiqurlar fəzasını vəziyyətlər fəzası $\mathbb{R}^d$-nin ölçülər, səmtlər və şeyplər (daxili bucaqlar) fəzası Φ-ə hasili, yəni $\mathbb{R}^d \times \Phi$ fəzası kimi göstərmək məqsədəuyğundur. Məs., müstəvidə üçbucaqlı özünün ağırlıq mərkəzi, sahəsi, səmti və şeypi vasitəsilə təyin olunur. Deməli, üçbucaqlılar fəzasını $\mathscr{J} = \mathbb{R}^2 \times \times [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \Omega$ hasili kimi ifadə etmək olar, burada Ω – üçbucaqlıın şeyplərinin ikiölçülü fəzasıdır. Digər misal: Ox oxuna paralel olmayan düzxətlər fəzası – düzxətlərin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin $\mathbb{R}^1$ fəzasının səmtlər fəzası $[0, \pi)$-yə hasilidir. Əgər bu halda H. p.-in $\mathbb{R}^d$ vəziyyətlər fəzasına proyeksiyası nöqtəvi proses olarsa, H. p. Φ-dən nişanları olan (qeyd olunmuş misallarda nişanlar – sahə, səmt və üçbucaqların şeypi və düzxətlərin istiqamətləridir), $\mathbb{R}^d$-də nişanlanmış nöqtəvi prosesdir.

$\mathbb{R}^d$-də bircins nişanlanmış nöqtəvi proseslər üçün birinci moment ölçüsü ölçülərin hasili $\Lambda_1 = L \times \lambda \mathbf{P}$ kimi ifadə olunur, burada L, – $\mathbb{R}^d$-də Lebeq ölçüsü, λ – H. p.-in intensivliyi, $\mathbf{P}$ – nişanlar fəzasında ehtimal ölçüsüdür; $\mathbf{P}$ «tipik» nişanın paylanması adlanır. H. p.-i nişanlanmış nöqtəvi proses kimi ifadə etdikdə «tipik» nişan anlayışı ilə H. p.-in «tipik» elementi anlayışı da təyin olunur («tipik» elementin vəziyyəti təyin olunmamışdır). Bircins düzxətlər H. p.-i üçün «tipik» düzxəttin istiqamətinin paylanması $\mathbf{P}$ istiqamət qızılgülü adlanır (bax, *İntensivlik qızılgülü*).

Bir sıra hallarda fiqurlar fəzası qrup olur və bu halda H. p. qrupda təsadüfi *nöqtəvi prosesdir*, bu proseslər üçün Palm paylanması adlanan paylanmalar təyin olunmuşdur. Məs., müstəvidə vahid uzunluqlu parçalar fəzasını fəzada Evklid hərəkətləri qrupu kimi göstərmək olar; təpələri nömrələnmiş, sahəsi vahidə bərabər üçbucaqlılar fəzasını müstəvinin affin çevirmələrinin sahəsini saxlayan (dəyişdirməyən) qrup kimi göstərmək olur. Düzxətt parçaları və dairələrin bircins və izotrop H. p.-lərinin Palm paylanmalarını şərtsiz paylanmalarla əlaqələndirən tənliklər mövcuddur.

$\mathbb{R}^d$-də sonlu intensivliyə malik H. p. əksər hallarda digər H. p.-lərin sonlu altçoxluqlarına baxılarkən alınır.

Misallar. 1) ω_1 – müstəvidə Puasson nöqtəvi prosesinin təsadüfi realizasiyası olsun. ω_1-in nöqtələri üçlüyü üçbucaqlıların H. p.-i ξ_1-i əmələ gətirir. Sonlu intensivliyə malik H. p. almaq üçün ξ_1 prosesinə seyrəklənmə proseduru tətbiq olunur. Əgər seyrəklənmə «parametr» üzrə aparılırsa (məs., ξ_1-dən elə üçbucaqlılar saxlanılır ki, onların perimetrləri verilmiş ədəddən kiçik olsun), onda alınmış H. p.-in «tipik» üçbucaqlıının şeypinin paylanması *Təsadüfi şeyp* məqaləsində 1) misalında verilmiş şeypin paylanması ilə üst-üstə düşür. «Sahə üzrə» seyrəkləmə (məs., yalnız o üçbucaqlılar saxlanılır ki, onların daxilinə ω_1-dən k sayda nöqtə düşür) sonsuz intensivliyə malik H. p.-ə gətirir və bu halda şeyp üzərinə əlavə məhdudiyyətlər qoyulur (üçbucaqlılar olduqca «dar» olmamalıdır). Bundan sonra «tipik» şeypin paylanması «*Təsadüfi şeyp*» məqaləsinin 2) misalındakı ölçünün normalanmış daralması ilə verilir (bax, [1]).

2) ω_2 – müstəvidə düzxətlər Puasson prosesinin təsadüfi realizasiyası olsun. ω_2-dən olan düzxətlər üçlüyü sonsuz intensivlikli üçbucaqlılar H. p. ξ_2-ni əmələ gətirir. Əgər ω_2-dən olan

k sayda düzxətlərlə kəsişən üçbucaqlılarla kifayətlənmək olarsa, onda seyrəklənmiş H. p.-in «tipik» üçbucaqlısının şeypinin paylanması «*Təsadüfi şeyp*» məqaləsinin 3) misalındakı şeypin paylanması ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Stochastic geometric statistics. Stereology, Lpz., 1984.

HƏNDƏSİ PROSES izotrop **« геометрический процесс** изотропный; isotropic **geometric process »** – bax, *Həndəsi proses.*

HƏNDƏSİ PROSES stasionar (bircins) **« геометрический процесс** стационарный (однородный); stationary (homogeneous) **geometric process »** – bax, *Həndəsi proses.*

HƏNDƏSİLƏŞDİRİLMƏSİ, STATİSTİK NƏZƏRİYYƏNİN « геометризация статистической теории; geometrization of the statistical theory » – riyazi statistikanın əsas strukturlarını həndəsi obyektlər kimi öyrənən istiqamətdir. $\mathbf{P}(\cdot)$ ehtimal paylanmaları nöqtələr rolunu oynayır. Belə paylanmaların hər bir $\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ ailəsi [nəticələr (elementar hadisələr) fəzası Ω-nın eyni bir $\mathscr{A}$ hadisələr cəbrində] həndəsi fiqur təyin edir. Məsələn, skalyar və ya vektor θ parametrindən hamar asılı ehtimal paylanmaları ailəsi hamar xətlər, səthlər kimi anlaşılır. Fiqurların inikası (ola bilər ki, çevrilməyən) statistik həlledici qaydalar kateqoriyası əmələ gətirən $\Pi:\mathbf{P}(\cdot)\to$ $\to\int\mathbf{P}(d\omega)\Pi(\omega,\cdot)$ statistik həlledici qaydaları ilə verilir. Eyni bir $\theta\in\Theta$ parametri ilə parametrikləndirilmiş, ümumiyyətlə, müxtəlif $(\Omega^{(i)},\mathscr{A}^{(i)})$ ölçülən fəzalarında verilmiş iki – $\{\mathbf{P}_\theta^{(i)},\theta\in\Theta\}$, $i=1,2$ ailəsi üçün əgər elə iki Π^{12} və Π^{21} həlledici qaydaları olarsa ki, ixtiyari $\theta\in\Theta$ üçün $\mathbf{P}_\theta^{(1)}\Pi^{12}=\mathbf{P}_\theta^{(2)}$, $\mathbf{P}_\theta^{(2)}\Pi^{21}=\mathbf{P}_\theta^{(1)}$ bərabərliklərinin ödənilməsini təmin etsin, onda $\{\mathbf{P}_\theta^{(1)},\theta\in\Theta\}$ və $\{\mathbf{P}_\theta^{(2)},\theta\in\Theta\}$ konqruent ailələr adlanır. Konqruentlik uyğun statistik modellərin statistik ekvivalentliyi ilə üst-üstə düşür. Məs., konqruent modellər sinfində ən sadə model ailənin kafi statistikasına gətirir. Konqruent ailələrdə üst-üstə düşən kəmiyyətlər – ailə invariantı anlayışı da yaranır. Bunlardan ən maraqlıları differensial – həndəsi invariantlardır. Məs., sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə differensial kvadratik forma vardır. Bu forma Fişer informasion matrisi ilə təyin olunur və parametrin meylsiz statistik qiymətlərinin aşağıdan dəqiqliyini ifadə edən Rao – Kramer bərabərsizliklərində yaranır. Bu forma informasion Riman metrikasını da təyin edir. İnvariant əlaqələrin tam bir ailəsi mövcuddur və bunlardan ən maraqlısı (Riman mənada deyil!) geodeji əyrilər (xətlər) və tamamilə geodeji səthlər eksponensial paylanmalar ailələridir. Bu sonuncuların nəzəriyyəsində nisbi entropiya (Kullbak – Leybler – Sanov yayınması) – Pifaqor teoreminin qeyri – simmetrik variantını ödəyən məsafə kvadratının yarısının qeyri – simmetrik analoqu böyük rol oynayır.

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., Статастические решающие правила и оптимальные выводы, M., 1972; [2] Cencov N. N., «Oper. Forsch. Statist.», Ser. Statist., 1978, v. 9, № 2, p. 267–76; [3] Amari Shun – Ichi, «Lect. Notes in Statist.», 1985, v. 28; [4] Geometrization of statistical theory Lancaster, 1987.

HƏSSASLIQ kobud xətalara **« чувствительность** к грубым ошибкам; gross-error **sensitivity »** – bax, *Robast statistik qiymət.*

HİDRODİNAMİK LİMİT « гидродинамический предел; hydrodynamical limit » – bax, *Hidrodinamik limit keçidi*.

HİDRODİNAMİK LİMİT KEÇİDİ « гидродинамический предельный переход; hydrodynamical limit approach / propagation of chaos » – statistik mexanikanın *dinamik sisteminin* və ya qarşılıqlıtəsirli *Markov prosesinin* doğurduğu ehtimal paylanmalarının orta xarakteristikalarının zaman üzrə evolyusiyasını təqribi təsvir etmək üçün istifadə olunan limit keçididir. Limitdə differensial və ya inteqro-differensial tənliklər alınır və bu tənliklər hidrodinamik tənliklər adlanır. H. l. k. ilk dəfə [4]-də Eyler hidrodinamik tənliyinin çıxarılışı üçün edilən cəhddə alınmışdır, lakin hazırki dövrə qədər yalnız bəzi aşkar həll oluna bilən və buna görə də, «cırlaşmış» modellər üçün riyazi məqbul sayılan nəticələr alınmışdır, məs., qadağalarlı proses üçün hidrodinamik tənlik – Bürgers tənliyidir.

H. l. k.-nin riyazi tərifi olduqca böyükdür, odur ki, burada onun yalnız ideyası verilir. $\varepsilon\to 0$ parametri daxil olunur, bu parametr tipik mikro- və makro-miqyasların münasibəti mənasını daşıyır. $t=0$ başlanğıc anında təsadüfi meydan üçün $\mathbf{P}_0^\varepsilon$ ehtimal paylanmalarının ailəsinə baxılır, belə ki, $\mathbf{P}_0^\varepsilon$ qeyd olunmuş $\mathbf{P}_0^\varepsilon$ paylanmasının ε^{-1} dəfə dartılması nəticəsində alınır. Beləliklə, $\mathbf{P}_0^\varepsilon$-in vəziyyətləri ($\mathbf{P}_0$ üzərinə qoyulan təbii kəsilməzlik məhdudiyyətlərilə) makromiqyasda «sanki translyasion invariant» olurlar, lakin bunlar makromiqyas yerinidəyişmələrində olduqca dəyişə bilərlər. Daha sonra, başlanğıc şərti $\mathbf{P}_0^\varepsilon$ ilə evolyusiyaya baxılır və $\mathbf{P}_t^\varepsilon$ ilə $\varepsilon^{-1}t$ anındakı (makrozaman keçdikdən sonra) vəziyyət işarə olunur. Əgər $\varepsilon\to 0$ olduqda $\mathbf{P}_t^\varepsilon$ üçün $\overline{\mathbf{P}}_t$ limiti varsa, bu limitə hidrodinamik limit deyilir.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, M., 1985, с. 235–84; [2] Boldrighini C., Dobrushin R. L., Suhov Yu. M., «J. Stat. Phys.», 1983, v. 31, p. 577–615; [3] Nonequilibrium phonemena II. From stochastics to hydrodynamics, Amst. – N. Y., 1984, p. 123–294; [4] Morrey C., «Comm. Pure Appl. Math.», 1955, v. 8, p. 279–326; [5] Spohn H., «Rev. Modern Phys.», 1980, v. 52, p. 569–615; [6] Sznitman A. – S., «Probab. Theory and Related Fields», 1986, v. 71, p. 581–613.

HİDRODİNAMİK TƏNLİK « гидродинамическое уравнение; hydrodynamical equation » – bax, *Hidrodinamik limit keçidi.*

HİDRODİNAMİKA TƏNLİKLƏRİ « гидродинамики уравнения; hydrodynamic equations » – sıxılmayan özlü mayenin axınını təsvir edən Navye – Stoks tənliklər sistemidir. H. t.-nin statistik həlli – Navye – Stoks sisteminin həllərində topalanmış ehtimal ölçüsü olub, aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\partial u(t,\ x)/dt\ +\ \sum_{j=1}^{3}u^j\partial u\,/\,\partial x^j\ =$$

$$=\nu\Delta u\ +\ \nabla p(t,\ x)\ +\ f(t,\ x),\ \operatorname{div}u=0,$$

burada $u=(u^1,\ u^2,\ u^3)$ – sürət, p – təzyiq, f – xarici qüvvələrin sıxlığı, $\nu>0$ özlülük əmsalı, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ maye ilə doldurulmuş oblastdır. Bu oblastın sərhədi $\partial\Omega$-da, adətən, yapışma

şərtləri verilir: $x = (x^1, x^2, x^3) \in \partial\Omega$, $u(t, x) = 0$, $t = 0$ olduqda isə başlanğıc şərti $u(t, x) = u_0(x)$ olur. $u_0(x) = u_0(x, \omega)$ ehtimal paylanması μ olan təsadüfi vektor meydan, $u(t, x, \omega)$ qeyd olunan məsələnin həlli olsun. Onda $u(t, x, \omega)$ üçün ehtimal paylanması təyin edən **P** ölçüsünə başlanğıc μ ölçüsünə müvafiq statistik həll deyilir.

HİLBERT ÇEVİRMƏSİ « Гильберта преобразование; Hilbert transformation » – bax, *Təsadüfi proses*; kəsilmələr.

HİLBERT TƏSADÜFİ FUNKSİYASI « гильбертова случайная функция; Hilbert random function » – bax, *Təsadüfi funksiya*.

HİLLE – İOSİDA TEOREMİ « Хилле – Иосида теорема; Hille – Iosida theorem » – xətti operatorun sıxlaşdırıcı semi – qrupun hansı şərtlərində doğuran operator olacağını təyin edən teoremdir.

X – Banax fəzası, A, – X fəzasında ixtiyari xətti operator olsun.

Teorem. A operatorunun operatorların sıxlaşdırıcı T_t semi – qrupunun hər hansı kəsilməz X fəzasında doğuran operator olması üçün zəruri və kafidir ki:

a) A operatorunun təyin olunma oblastı D_A, X -də sıx olsun;

b) $\lambda f - Af = g$ tənliyi ixtiyari $g \in X$ və $\lambda > 0$ üçün $f \in D_A$ həllinə malik olsun;

c) ixtiyari $f \in D_A$, $\lambda > 0$ üçün $\|\lambda f - Af\| \geq \|\lambda f\|$ bərabərsizliyi ödənilsin.

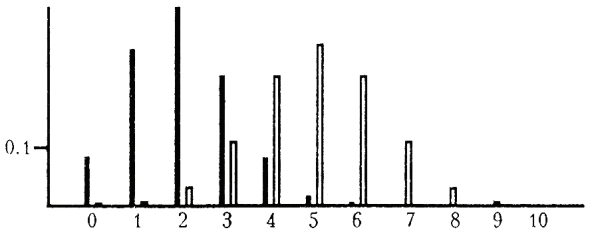
X^+, – X -də qapalı konus olsun (mənfi olmayan elementlərin konusu). Əgər $\lambda f - Af \in X^+$, $\lambda > 0$ münasibətindən $f \in X^+$ münasibəti alınarsa, onda $f \in X^+$ üçün $T_t f \in X^+$ münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Хилле Э., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1951; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [4] Данфорд Н., Шварц Т. Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

HİPERHƏNDƏSİ PAYLANMA « гипергеометрическое распределение; hypergeometric distribution » – $m = 0, 1, 2, ..., n$ tam qiymətlərini

$$p_m = \mathbf{P}\{\xi = m\} = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n \qquad (*)$$

ehtimalları (bax, şəkil) ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal *paylanmasıdır*, burada M, N və n – tam mənfi olmayan ədədlərdir və $M \leq N$, $n \leq N$.



$n = 50$, $n = 10$, $M = 10$ və $M = 25$ qiymətlərində hiperhəndəsi paylanma

H. p., adətən, qaytarmamaq şərtilə seçmə sxemi ilə bağlıdır, yəni (*) düsturu N sayda elementi olan ümumi çoxluqdan, M saydası «nişanlanmış», $N - M$ saydası «nişanlanmamış» olduğu halda, n saydası qaytarmamaq şərtilə çıxarıldıqda bunların yalnız m saydasının «nişanlanmış» olması ehtimalını ifadə edir. Bu halda, (*) ehtimalı yalnız

$$\max(0, M + n - N) \leq m \leq \min(n, M)$$

qiymətləri üçün təyin olunur. Lakin (*) düsturunu $m > n$ olduqda $C_n^m = 0$ qəbul edərək bütün $m \geq 0$ qiymətləri üçün də istifadə etmək olar, buna görə də, $p_m = 0$ bərabərliyi n həcmli seçimdə m sayda «nişanlanmış» elementlərin olmaması kimi anlaşılmalıdır. Bütün fəza üzrə ehtimalların qiymətlərinin cəmi 1-ə bərabərdir. $M/N = p$ işarələməsi apardıqda, (*) düsturu digər –

$$p_m = C_n^m \cdot A_{Np}^m \cdot A_{Nq}^{n-m} / A_N^n$$

formasında alınır, burada $A_n^m = C_n^m\, m!$, $p + q = 1$. Əgər p – sabit və $N \to \infty$ olarsa, onda

$$p_m \approx C_n^m\, p^m q^{n-m}$$

binomial paylanması alınır. H. p.-nın riyazi gözləməsi N-dən asılı deyildir və o, uyğun binomial paylanmanın riyazi gözləməsi $\mu = np$ ilə üst-üstə düşür. H. p.-nın dispersiyası $\sigma^2 = npq + (N - n)/(N - 1)$ binomial paylanmanın dispersiyası npq-nü aşmır.

$N \to \infty$ olduqda H. p.-nın ixtiyari tərtib momentləri binomial paylanmanın uyğun momentlərinin qiymətlərinə yaxınlaşır. $(\xi - \mu)/\sigma$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda standart normal paylanmaya yığılır ki, $N \to \infty$ olduqda $\mu \to \infty$ olsun. Bolşev approksimasiyası da yaxşı yaxınlaşma verir:

$$p_0 \approx \exp\left\{-\frac{6nM}{3(2N - D - 1) + 1}\right\}.$$

H. p.-nın doğuran funksiyası

$$\psi(z) = \frac{A_{N-M}^n}{A_N^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{A_M^j A_N^j}{A_{N-M+j-n}^j} \frac{z^j}{j!}.$$

Bərabərliyin sağ tərəfindəki sıra $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ hiperhəndəsi funksiyadır, burada $\alpha = -n$, $\beta = -M$, $\gamma = N - M - n + 1$ (H. p. adı da məhz bununla əlaqədar verilmişdir). Seçimi statistik araşdırma və statistik qəbul nəzarəti məsələlərində H. p. əsas paylanmalardandır.

(*) ehtimalı və uyğun paylanma funksiyası üçün geniş miqyaslı cədvəllər tərtib olunmuşdur.

Əd.: [1] Lieberman G., Owen D., Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford, 1961; [2] Оуэн Д. Б., Сборник статистических таблиц. Обработка таблиц, пер. с англ., М., 1966; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

HİPERQRUP « гипергруппа; hypergroup » – lokal kompakt elə K Hausdorf fəzasıdır ki, $K\times K$ -dan, K -da *ehtimal ölçülərinin* zəif topologiya ilə verilmiş $B(K)$ fəzasına kəsilməz $(x,\ y)\mapsto \delta_x \circ \delta_y$ inikası vardır, burada « $\circ$ » simvolu inikasların kompozisiyası işarəsidir.

Bu inikasda aşağıdakı xassələr doğrudur:

1) bütün $x,\ y,\ z\in K$ üçün $\delta_x \circ (\delta_y \circ \delta_z) = (\delta_x \circ \delta_y) \circ \delta_z)$ (burada δ_x , – $x\in K$ nöqtəsində topalanmış ölçüdür);

2) bütün $x,\ y\in K$ üçün supp ($\delta_x \circ \delta_y$) çoxluğu kompaktdır;

3) K -dan K -ya elə $x\to x^-$ homomorfizmi vardır ki, $x^- = x$ və $(\delta_x \circ \delta_y)^- = \delta_{y^-} \circ \delta_{x^-}$ bütün $x,\ y\in K$ üçün ödənilir;

4) elə $e\in K$ elementi vardır ki, $\delta_e \circ \delta_x = \delta_x \circ \delta_e = \delta_x$ bütün $x\in K$ üçün ödənilir;

5) ixtiyari $x,\ y\in K$ üçün $e\in \operatorname{supp}(\delta_x \circ \delta_y)$ münasibəti $x = y^-$ münasibətinə ekvivalentdir;

6) $K * K$ -dan K -nın qapalı altçoxluqlarından ibarət, Maykl topologiyası ilə verilmiş $R(K)$ fəzasına $(x,\ y)\to$ $\to \operatorname{supp}(\delta_x \circ \delta_y)$ inikası kəsilməzdir.

Əgər bütün $x,\ y\in K$ üçün $\delta_x \circ \delta_y = \delta_y \circ \delta_x$ olarsa, K kommutativ hiperqrup adlanır; əgər yalnız 1) – 4) xassələri ödənilərsə, K zəif hiperqrup adlanır. Qeyd olunan tələblər [1]-də verilən hiperqrup aksiomatikasına cavab verir və bu aksiomatika H.-da ehtimalların öyrənilməsində daha çox istifadə olunur (bax, [2]). H.-a klassik misal lokal kompakt qrupun onun kompakt altqrupu üzrə bir-birilə ikili əlaqəli siniflər fəzasıdır.

Kommutativ H.-lar üçün xarakteristik çevirmələrin kəsilməzlik teoremlərinin müxtəlif variantları müəyyən edilmişdir. Burada ikili obyekt kimi, nöqtəbənöqtə vurmaya görə, H. daxil olunur. Belə, Pontryagin ikili xassəsinə analoji xassəli H.-lar güclü hiperqruplar adlanır (bax, [4], [5]-in xülasələri). H.-da nöqtəbənöqtə vurmanın sonsuz bölünən paylanmaları üçün Levi – Xinçin ifadəsinin analoqu alınmışdır. Funksiyaların polinomların ortoqonal sistemləri üzrə ayrılışında yaranan polinomial H.-lar belə oxşar H.-lara misalları almağa imkan yaradır. Ölçülərin ardardınca artmaqla götürülən kompozisiyaları üçün limit qanunları kommutativ və qeyri – kommutativ H.-ların müxtəlif konkret halları üçün öyrənilir.

Əd.: [1] Jewett R. I., «Adv. Math.», 1975, v. 18, № 1, p. 1–101; [2] Spector R., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 497, p. 643–73; [3] Delsarte J., «C. r. Acad. sci. Paris», 1938, t. 206, p. 178–82; [4] Литвинов Г. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, М., 1985, с. 57–106; [5] Вайнерман Л. И., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 24, М., 1986, с. 165–205; [6] Heyer H., «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1064, p. 481–550.

HİPER – YUNAN – LATIN KUBU « гипергреко – латинский куб; hyper – Greek – Latin cube » – bax, *Ortoqonal kublar.*

HİPER – YUNAN – LATIN KVADRATI « гипергреко – латинский квадрат; hyper – Greek – Latin square » – bax, *Ortoqonal kvadratlar.*

HİSSƏVİ XƏTTİ AQREQAT « кусочно линейный агрегат; piecewise linear aggregate » – bax, *Hissəvi xətti proses.*

HİSSƏVİ XƏTTİ PROSES « кусочно линейный процесс; piecewise linear process » – aşağıdakı ümumi cəhətlərli $X(t)$ bircins Markov prosesinin bir qədər müxtəlif ifadəsi ilə anlaşılan termindir. $X(t)$ prosesi

$$X(t) = (\nu(t),\ \xi_1(t),\ \xi_2(t),\ ...,\ \xi_k(t))$$

şəklində verilir, burada $\nu(t)$ – sonlu və ya hesabi sayda mümkün qiymətlər alan proses [$\nu(t)$, – $X(t)$ prosesinin baş komponentidir], $\xi_i(t)$ – hissəvi xətti qanunla dəyişən ədədi komponentlərdir, $k = |\nu(t)|$ [$\nu(t)$ vəziyyətinin ranqı] – dəyişən tamqiymətli kəmiyyətdir. $X(t)$ prosesinin sıçrayışları ya özü-özünə, yaxud əlavə komponentlər vektoru $(\xi_1(t)$, ..., $\xi_k(t))$-nin uyğun fəzada hər hansı çoxüzlünün sərhədlərinə çatma anında baş verir. H. x. p.-in ən çox yayılmış növü onunla xarakterizə olunur ki, $\xi(t)\geq 0$ və $\nu(t) = 0$ olduqda $\xi_j(t) = -\alpha_{ij}$ bərabərlikləri doğru olur, α_{ij} – mənfi olmayan sabitlərdir. Bu halda $\xi_j(t)$ – hər hansı t anından başlayan müəyyən bir əməliyyatın bu əməliyyat sona çatana qədər işləmə kəmiyyəti kimi, α_{ij} – həmin əməliyyatın yerinə yetirilmə sürəti kimi interpretasiya olunur. Belə prosesin sıçrayışları ya $\nu(t)$ prosesinin cari vəziyyəti ilə təyin olunan intensivliklə özü-özünə baş verir, ya da ki, hər hansı əlavə komponentin 0 qiymətini aldığı anında baş verir. H. x. p. *Xidmət sistemlərinin* ümumiləşmiş modeli kimi daxil edilmiş və xidmət sistemlərinin modelləşdirilməsinin əsası olmuşdur; H. x. p.-lərin dayanıqlılıq xassələri araşdırılmışdır.

Xidmət sistemlərinin H. x. p.-lərlə birbaşa təsviri əvəzinə, adətən, sistemi hissə – hissə təsvir etməyə imkan verən hissəvi xətti aqreqatlar yanaşmasından istifadə etmək, sonra bunları formal qaydalarla birləşdirmək məsləhətdir. Hissəvi xətti aqreqat elə təsadüfi dəyişdiricidir ki, o, xaricdən siqnallar qəbul edir və bu qəbuletmə anları arasında intervallarda özünü H. x. p. kimi aparır. Hissəvi xətti aqreqat qeyd olunan H. x. p.-in (onun vəziyyətinin) təyin etdiyi çıxış siqnallarını da istehsal edir. Əgər hissəvi xətti aqreqatlardan ibarət sistemdə siqnallar bəzi aqreqatlardan digərlərinə ötürülürsə, həm də xaricdən heç bir siqnal daxil olunmursa, belə sistem H. x. p.-lə təsvir olunur. Xidmət sistemlərini interpretasiya etdikdə aqreqatların giriş və çıxış siqnalları tələblərin daxil olunması və xidmətin başa çatması ilə əlaqədardır.

Əd.: [1] Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. Н., Лекции по теории сложных систем, М., 1973; [2] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978; [3] Авраменчук Е. Ф., [и др.], Технология системного моделирования, М. – Берлин, 1988.

HİSTOQRAM « гистограмма; histogram » – eksperimental verilənlərin qrafik təsviri növlərindən biridir. H. aşağıdakı kimi qurulur. Hər hansı mütləq kəsilməz ξ təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş bütün X_1, ..., X_n qiymətləri diapozonu x_1 , ..., x_{k+1} nöqtələrilə k sayda qruplanma intervallarına (adətən, bərabər) bölünür; $[x_i,\ x_{i+1})$ intervalında müşahidə olunan qiymətlərin sayına bərabər olan müt l əq

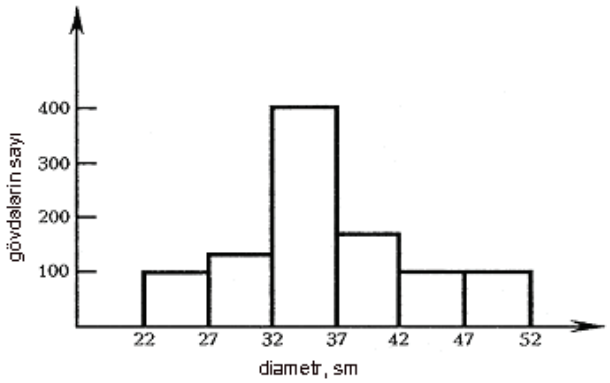
tezlik m_i, $i = 1, ..., k$ və ya $h_i = (m_i/n) \cdot 100\%$ – nisbi tezliyi təyin olunur; absis oxunda x_1, ..., x_{k+1} nöqtələri qeyd olunur və hündürlükləri $m_i/(x_{i+1} - x_i)$ və ya $h_i/(x_{i+1} - x_i)$, oturacaqları isə $[x_i, x_{i+1}]$ olan düzbucaqlılar qurulur; odur ki, qurulmuş düzbucaqlının sahəsi ya mütləq və ya nisbi tezliyə bərabər olur, bu isə statistik verilənlərin H. vasitəsilə təsviridir.

$[x_i, x_{i+1})$ intervalları bərabər olduğu halda düzbucaqlıların hündürlükləri ya m_i və ya h_i -yə bərabər götürülür. İntervalların sayının seçilməsi ξ təsadüfi kəmiyyətinin naməlum paylanma qanunu və seçimin həcmindən asılıdır, odur ki, bu sayın seçilməsi üçün universal tövsiyyə yoxdur. Əksər hallarda $k \approx 1 + \log_2 n$ Sterces düsturundan istifadə olunur.

Məs., 1000 ədəd küknar ağacının gövdəsinin diametrinin ölçülməsi nəticəsində alınmış nəticələr aşağıda verilmişdir.

Diametr, sm.	22-27	27-32	32-37	37-42	42-47	47-52
Gövdələrin sayı (mütləq tezlik)	100	130	400	170	100	100

Bu misal üçün H. aşağıda təsvir olunmuşdur.



1000 küknar ağacının gövdəsinin diametrlərinin paylanmasının histoqramı, 6 intervalda qruplanmışdır; intervalın uzunluğu 5 sm.

Vektor təsadüfi kəmiyyətlər üçün H. analoji qurulur. Diskret təsadüfi kəmiyyət üçün H. anlayışı məna daşımır.

H. mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma sıxlıqlarının qeyri – parametrik qiymətləndirmə üsullarından biridir. Bu üsul sıxlığın tarixən ilk və universal qiymətləndirilmə üsulu sayılır. Lakin H. metodu yüksək dəqiqliyə malik deyildir: məhdud təsadüfi kəmiyyətin L^2 metrikasında H.-ın sıxlıq funksiyasının qrafikindən yayınması ehtimalı (əgər sıxlıq funksiyasının məhdud ikinci tərtib törəməsi vardırsa) ən yaxşı halda $n^{-1/3}$ tərtibə malikdir və bu qruplama intervallarının sayı $k \sim n^{1/3}$ olduğu haldadır; m – ölçülü vektor təsadüfi kəmiyyətin H.-nın yayınması ehtimala görə $n^{-1/m+2}$ tərtiblə təyin olunur və bu hal $k \sim n^{m/(m+2)}$ olduqda alınır (bax, [1]). Hamar qrafik üçün etibarlı oblastlar C metrikasında qurulmuşdur (bax, [2]). Hamar olmayan qrafiklər üçün (bax, [3]) L^1 metrikasında yığılma təyin olunmuşdur. Hal-hazırda daha dəqiq qiymətləndirmələr vardır (məs., Parzen – Rozenblattın nüvə tip statistik qiymətləri ilə, N. N. Çentsovun proyeksion statistik qiymətləri ilə).

Ədd.: [1] Ч е н ц о в N. N., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, M., 1972; [2] С м и р н о в N. V., Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды, M., 1970; [3] A b o u J a o u d e S., «Ann. Inst. H. Poincaré. B.», 1976, v. 12, p. 213–31.

HİTSUDA – SKOROXOD KONSTRUKSİYASI « Хицуды – Скорохода конструкция; Hitsuda – Skorohod construction » – bax, *Genişləndirilmiş stoxastik inteqral.*

HODCES STATİSTİK QİYMƏTİ « Ходжеса оценка; Hodges estimator » – bax, *Supereffektiv statistik qiymət.*

HOLL TEOREMİ « Холла теорема; Hall theorem » – bax, *Kombinator analiz*.

HOLT – UİNTERS MODELİ « Хольта – Уинтерса модель; Holt – Winters model » – təkmilləşdirilmiş *Braun proqnozlama metodudur.* Xətti trend olduqda, t anında X_t prosesinin k vahid irəliyə proqnozu, H. – U. m.-nə müvafiq olaraq, $X_{t+k} = \{a_0(t) + a_1(t)k\}\, s(t + k - L)$ düsturu ilə hesablanılır, burada $s(t)$ – periodik funksiya, L – bir dövr ərzində müşahidələnənlər sırasının nöqtələri sayıdır (məs., əgər verilənlər bir il müddətində hər ay toplanırsa, onda $L = 12$). Hər bir an üçün $a_0(t)$, $a_1(t)$, $s(t)$ funksiyaları aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$a_0(t) = \beta_1 \frac{x_t}{s(t-L)} + [(1-\beta_1)\{a_0(t-1) + a_1(t-1)\}],$$

$$a_1(t) = \beta_2 \{a_0(t) - a_0(t-1)\} + (1-\beta_2)\, a_1(t-1),$$

$$s(t) = \beta_3 \frac{x_t}{a_0(t)} + (1-\beta_3)\, s(t-L),$$

burada β_1, β_2, β_3 – modelin parametrləridir və bunları əvvəlcədən ya qiymətləndirmək və ya vermək lazımdır.

Ədd.: [1] H o l t C., «Carnegie Inst. Tech. Res. Mem.», 1957, № 2; [2] W i n t e r s P., «Manag. Sci.», 1960, v. 6, p. 324–42; [3] К е н д э л M., Временные ряды, пер. с англ., M., 1981.

HOMOSKEDASTİK REQRESSİYA « гомоскедастическая регрессия; homoscedastic regression » – dispersiyaları üst-üstə düşən, xətaları qeyri – korrelyar *reqression eksperimentdir*.

HOTELLİNQ KRİTERİSİ « Хотеллинга критерий; Hotelling test », T^2 – k r i t e r i, – H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*: Cırlaşmayan, p – ölçülü normal $N(\mu, B)$ qanununun riyazi gözləmələrinin naməlum vektoru $\mu = (\mu_1, ..., \mu_p)^{\mathrm{T}}$-nin əsl qiyməti ilə uzlaşan H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün statistik kriteridir. Bu normal qanunun kovariasion matrisi B-də naməlum $\mu_0 = (\mu_{10}, ..., \mu_{p0})^{\mathrm{T}}$ vektorudur. H. k. aşağıdakı nəticəyə əsaslanmışdır. Asılı olmayan, p – ölçülü $X_1, ..., X_n$ təsadüfi vektorlarının, $n - 1 \geq p$, cırlaşmayan normal $N(\mu, B)$ qanununa tabe olduqları fərz olunur və fərz olunur ki,

$$T^2 = n\,(\overline{X} - \mu_0)^{\mathrm{T}} S^{-1} (\overline{X} - \mu_0),$$

burada

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \quad S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(X_i-\overline{X})^{\mathsf{T}}$$

– naməlum μ və B parametrləri üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərdir. Onda

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)}T^2$$

statistikası p və $n-p$ sərbəstlik dərəcələri sayı ilə qeyri – mərkəzi *Fişer* F *– paylanmasına* tabedir və onun qeyri – mərkəzilik parametri –

$$n\,(\mu-\mu_0)^{\mathsf{T}}B^{-1}(\mu-\mu_0)$$

şəklində ifadə olunur və T^2 statistikası *Hotellinq* T^2 *– paylanması* qanununa tabedir, deyilir. Deməli, $H_1:\mu\neq\mu_0$ alternativinə qarşı $H_0:\mu=\mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün cırlaşmayan p – ölçülü normal $N(\mu,\ B)$ qanununa tabe, asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ vektorlarının realizasiyaları üzrə F statistikasının qiymətini hesablamaq olar, belə ki, H_0 hipotezi doğru olarsa, bu statistika sərbəstlik dərəcələri sayları p və $n-p$ olan mərkəzi F – paylanması qanununa tabedir. Mühümlük ölçüsü α olan H. k.-nə görə, əgər $F\geq F_\alpha(p,\ n-p)$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul olunmur, burada $F_\alpha(p,\ n-p)$, – F – paylanmanın yuxarı α – kvantilidir.

H. k. və doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi arasında əlaqə vardır.

$$L(\mu, B) = L(X_1, ..., X_n;\ \mu,\ B) =$$

$$= \frac{|B|^{-n/2}}{(2\pi)^{np/2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^{\mathsf{T}}B^{-1}(X_i-\mu)\right\}$$

– $X_1, ..., X_n$ seçimi üzrə hesablanmış doğruyaoxşarlıq funksiyası olsun. $H_1:\mu\neq\mu_0$ mürəkkəb alternativinə qarşı $H_0:\mu=\mu_0$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması üçün doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi

$$\lambda=\lambda(X_1, ..., X_n)=\sup_{B} L(\mu_0,\ B)\ /\ \sup_{\mu, B} L(\mu,\ B)$$

statistikasına əsasən qurulmuşdur.

λ statistikası ilə T^2 və F statistikaları arasında aşağıdakı münasibətlər mövcuddur:

$$\lambda^{2/n}=(n-1)\big/(T^2+n-1)=(n-p)/(pF+n-p)\,.$$

$H_0:\ \mu=\mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün H. k. oxşarlıq çevirmələrinə nəzərən invariant bütün kriterilər arasında müntəzəm ən güclü kriteridir (bax, *Ən güclü kriteri*, *İnvariant kriteri*).

Əd.: [1] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Р а о С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., 1968.

HOTELLİNQ T^2 – PAYLANMA « Хотеллинга T^2 – распределение; Hotelling T^2 – distribution » – paylanma sıxlığı

$$p(x)=\frac{\Gamma((n+1)/2)\ x^{k/2-1}(1+x/n)^{-(n+1)/2}}{\Gamma((n-k+1)/2)\,\Gamma(k/2)n^{k/2}}$$

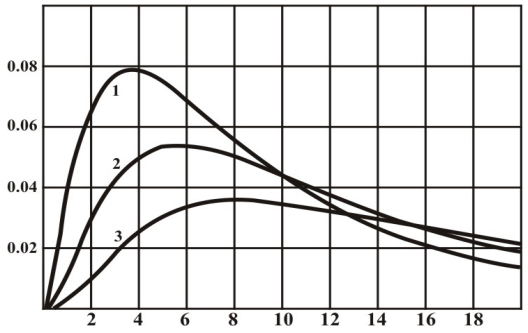
düsturu ilə təyin olunan, $(0,\ \infty)$-da topalanmış, kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*, burada n və k parametrləri sərbəstlik dərəcələri adlanır, $n\geq k\geq 1$. $k=1$ olduqda H. T^2 – p. *Styudent paylanmasına* gətirilir, ixtiyari $k>1$ qiymətində isə ona Styudent paylanmasının çoxölçülü ümumiləşməsi kimi baxmaq olar və bu aşağıdakı mənada anlaşılır. Əgər k – ölçülü Y təsadüfi vektoru orta qiymətlər vektorunun komponentləri sıfra bərabər, kovariasion matrisi Ξ olan normal qanunla paylanmış olarsa və əgər

$$S=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^{\mathsf{T}}Z_i$$

olarsa, Z_i təsadüfi vektorları öz aralarında və Y ilə asılı olmazlarsa və Y ilə eyni qanunla paylanmış olarlarsa, onda $T^2=Y^{\mathsf{T}}S^{-1}Y$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər H. T^2 – p. ilə paylanmışdır (Y – vektor sütun, $^{\mathsf{T}}$ – transponirlənmədir). Əgər $k=1$ olarsa,

$$T^2=\frac{Y^2}{\chi_n^2/n}=t_n^2\,,$$

burada t_n təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər Styudent paylanmasına tabedir.



Hotellinq paylanmasının sıxlığı $n=10$ olduqda : (1) $k=5$; (2) $k=6$; (3) $k=7$.

Əgər T^2 təsadüfi kəmiyyətini təyin etdikdə, Y -in $(\nu,\ \Xi)$ parametrlərli normal qanunla paylandığı fərz olunarsa, onda uyğun paylanma sərbəstlik dərəcəsi sayı n, qeyri – mərkəzilik parametri ν olan q e y r i – m ə r k ə z i H. T^2 – p. adlandırılır. H. T^2 – p. riyazi statistikada Styudent t – paylanması istifadə olunan halda, lakin çoxölçülü hal üçün istifadə edilir. Əgər müşahidə nəticələri $X_1, ..., X_n$ – orta qiymətlər vektoru μ və cırlaşmayan kovariasion Ξ matrisinə malik normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorlar olarsa, onda

$$T^2=n(\overline{X}-\mu)^{\mathsf{T}}S^{-1}(\overline{X}-\mu)$$

statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $n-1$ olan H. T^2 – p.-na tabedir, burada

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{və} \quad S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^{\mathrm{T}}.$$

Bu fakt *Hotellinq kriterisi* üçün əsas olmuşdur. Ədədi hesablamalar üçün beta – paylanma və ya Fişer F – paylanma cədvəllərindən istifadə olunur, çünki $\frac{n-k+1}{n^k}T^2$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları k və $n-k+1$ olan F – paylanma qanununa tabedir.

Bax, T^2 – *statistika*.

Əd.: [1] H o t e l l i n g H., «Ann. Math. Statist.», 1931, v. 2, p. 360–78; [2] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

HOTELLİNQ T^2 – STATİSTİKASI « Хотеллинга T^2 – статистика; Hotelling T^2 – statistic » – bax, T^2 – *statistika*.

HÖFDİNQ ÖLÇÜSÜ « Хёфдинга мера; Hoeffding measure » – bax, *Ranq korrelyasiyası*.

HÖLDER BƏRABƏRSİZLİYİ « Гельдера неравенство; Hölder's inequality » – *təsadüfi kəmiyyətlərin* momentləri üçün bərabərsizliklərdən biridir. [1]-də O. Hölder tərəfindən təklif olunmuş daha ümumi bərabərsizlikdən aşağıdakı nəticə alınır: ξ və η təsadüfi kəmiyyətlər, $r>1$, $1/r + 1/s = 1$ olduqda,

$$\mathbf{M}|\xi\eta| \le (\mathbf{M}|\xi|^r)^{1/r}(\mathbf{M}|\eta|^s)^{1/s}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

H. b.-dən *Bunyakovski bərabərsizliyi* alınır, yəni

$$\mathbf{M}|\xi\eta| \le (\mathbf{M}\xi^2)^{1/2}(\mathbf{M}\eta^2)^{1/2}\ .$$

Əd.: [1] H o l d e r O., «Nachr. Ges. Wiss. Gött.», 1889, № 2, S. 38–47; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

HÖRST FENOMENİ « Херста явление; Hurst phenomenon » – zaman sırasının kumulyativ cəmlərində toplananlar sayının artması ilə alınmış «genişlənmiş» cəmlər ardıcıllığının sürətli (sonlu dispersiyalı, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin x_t sırasında uyğun artması ilə müqayisədə) artmasıdır. Bu fenomen H. Hörst tərəfindən (bax, [1], [2]) aşkar edilmişdir; o, Nil çayından başlayaraq, çay axınının, çay və göllərin səviyyəsinin, havanın temperaturu və təzyiqinin, ağac halqalarının qalınlığının, göl çöküntüləri layları və s.-nin birillik qiymətlərindən tərtib olunmuş 690 illik sıralar üçün «alınmış» genişlənmiş (gətirilmiş açımı) sıraları araşdırarkən bu fenomenlə qarşılaşmışdır.

x_t, $t = 0, 1, \ldots, n$ sırasının «alınmış» genişliyi (gətirilmiş açımı) (rus. приведенный размах; bu R/S – statistika kimi işarə olunur) aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$V_n = R_n/S_n = \frac{\max\limits_{0\le u\le n}\left(\sum\limits_{t=0}^{u} x_t - u\bar{x}_n\right) - \min\limits_{0\le u\le n}\left(\sum\limits_{t=0}^{u} x_t - u\bar{x}_n\right)}{n^{-1}\sum\limits_{t=0}^{u} x_t^2 - (\bar{x}_n)^2},$$

burada $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_n = n^{-1}\sum\limits_{t=0}^{n} x_t$ (kəsilməz t parametrindən asılı x_t sıraları üçün də «alınmış» genişlik (gətirilmiş açım) analoji təyin olunur; bax, məs., [3], [4]). Göstərmək olar ki, əgər x_t sonlu dispersiyalı, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının müşahidə olunmuş qiymətləridirsə, onda $V_n \sim n^{1/2}$ münasibəti $n\to\infty$ olduqda asimptotik olaraq ödənilir (bax, [3], [5]). V_n qiymətləri, adətən, cn^H funksiyasının qiymətləri ətrafında qiymətlər alır (dəyişir), burada $c = \text{const}$, H isə əksər hallarda $0{,}5$-dən çox olur (orta hesabla H-ın qiyməti $0{,}74$-ə yaxın olmuşdur). H kəmiyyəti bəzən Hörst parametri (və ya əmsalı) adlandırılır.

Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər sırasını x_t stasionar ardıcıllığı ilə (diskret zamanlı stasionar proseslə) əvəz etməklə H. f.-nin izahı üçün ilk cəhdlərin hamısı uğursuz olmuşdu (bax, [6]). Qeyd etmək lazımdır ki, korrelyasiyalar (sonlu yaddaşa malik) ən sadə sonlu zamanlı stasionar proseslər üçün

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B(k) = 2\pi f(0) < \infty$$

şərtini ödədiyindən [$B(k)$, – x_t prosesinin korrelyasion funksiyası, $f(\lambda)$ – onun spektral sıxlığıdır], həmişə $H = 0{,}5$ olur (bax, [3]). H. f. ödənildiyi model sıraya aid misallardan birinə [7], [8]-də baxılmışdır, bu y_t kəsri Braun hərəkətinin artımları $y_{t+1} - y_t$ kəmiyyətlərinin sırası x_t-dir, yəni üstlü struktur funksiyası –

$$D(\tau) = \mathbf{M}(y_{t-\tau} - y_t)^2 = C|\tau|^{2H}, \quad 1/2 < H < 1$$

olan stasionar artımlarlı avtomodel Qauss prosesidir. Bu halda x_t – korrelyasion funksiyası cəmlənilməyən

$$B(k) = 0{,}5\,C\{|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\}$$

olan stasionar təsadüfi prosesdir, bu proses üçün Hörst parametri H-a bərabərdir (müşahidələr üzrə bu parametrin qiymətləndirilməsi haqqında, bax, [9]). Qeyd olunan modelin çay axınının və digər geofiziki zaman sıralarının və ya turbulent axında sürətin fluktuasiyaları sıralarının təsviri üçün tətbiqi haqqında bax, [10], [4]. [3]-də H. f. ödənilən avtomodel zaman proseslərinə aid bir sıra misallar (məs., stasionar artımlarlı bəzi qeyri – Qauss proseslərinin artımlarının sıraları üçün, sonsuz dispersiyalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün) göstərilmişdir. H. f. [11], [12]-də baxılmış $(1-B)^{\delta}x_t = a_t$, $0 < \delta < 1/2$ tənliyi ilə verilən stasionar kəsri tərtibli avtoreqressiv proseslər üçün də ödənilir, burada $B_{x_t} = x_{t-1}$, a_t – dispersiyası sonlu σ_a^2 olan, orta qiyməti sıfra bərabər, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır, burada $f(\lambda) = (\sigma_a^2/2\pi)[4\sin^2\lambda/2]^{-\delta}$, $H = \delta + 1/2$.

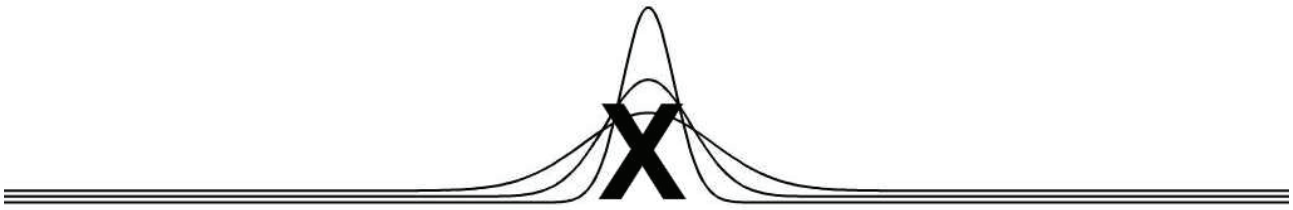
H. f. x_t zaman sırasının qeyri – stasionarlığı ilə izah oluna bilir. Qeyri stasionarlıq isə bir çox geofiziki müşahidələr sıralarında olur

(bax, məs., [13]), burada $x_t = y_t + m_t$ şəklində misala baxılmışdır, y_t stasionar təsadüfi prosesdir və

$$\mathbf{M}y_t = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\, y_{t+k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_y(k) = 0,$$

yəni y_t-nin yaddaşı sıfra bərabərdir, m_t isə zamandan asılı trenddir və bu trend üçün H. f. ödənilir.

Əd.: [1] H u r s t H. E., «Trans. Amer. Soc. Civil Engrs.», 1951, v. 116, p. 770–808; [2] H u r s t H. E., «Proc. Inst. Civil Engrs.», 1956, pt 1, v. 5, p. 519–90; [3] M a n d e l b r o t B., T a q q u M., «Bull. Intern. Statist. Inst.», 1979, v. 48, book 2, p. 69–104; [4] H e l l a n d K., V a n A t t a C., «J. Fluid Mech.», 1978, v. 85, pt 3, p. 573–89; [5] F e l l e r W., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 427–32; [6] L l o y d E. H., «Adv. in Hydrosci.», 1967, v. 4, p. 281–339; [7] M a n d e l b r o t B., «C. r. Acad. sci.», 1965, t. 260, № 12, p. 3274–77; [8] M a n d e l b r o t B., V a n N e s s J. W., «SIAM Rev.», 1968, v. 10, p. 422–37; [9] D a v i e s R., H a r t e S., «Biometrika», 1987, v. 7, № 1, p. 95–101; [10] M a n d e l b r o t B., W a l l i s S., «Water Resources Res.», 1969, v. 5, № 2, p. 228–67; [11] H o s k i n g J., «Biometrika», 1981, v. 68, № 1, p. 165–76; [12] A n d e l J., «Kybernetika», 1986, v. 22, № 2, p. 105–23; [13] K l e m e s V., «Water Resources Res.», 1974, v. 10, № 4, p. 675–88.



XALİS BEYES STRATEGİYASI « чистая байесовская стратегия; pure Bayes strategy » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin.*

XALİS STRATEGİYA « чистая стратегия; pure strategy » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*; *Statistik oyun*.

XALİS VƏZİYYƏT « чистое состояние; pure state » – bax, *Sıxlıq operatoru.*

XAOS « xaoc; chaos » – həmişə də dəqiq olmayan (və müxtəlif hallarda müxtəlif) məzmunlu, trayektoriyaları qeyri – dayanıqlılıq ilə şərtləşdirilmiş dinamik sistemin (sistemin dinamikasında gözə çarpan rol oynayan bütün trayektoriyalar və ya onların hər hansı çoxluğunun) trayektoriyalarının kvazitəsadüfi dəyişikliklərinin qeyri – formal təsvirində istifadə olunan ifadədir. Bu keyfiyyətcə belə «mexanizmlə» təzahür edir. Fərz olunur ki, sistemin faza fəzasında faza nöqtəsi x t müddəti ərzində $\varphi_t(x)$-ə keçir. x nöqtəsinin trayektoriyası prinsip etibarilə, özünün başlanğıc qiyməti x ilə tam mənası ilə təyin olunmasına baxmayaraq, əgər bu başlanğıc qiymət tam dəqiq deyil, yalnız δ tərtib xəta ilə (praktik olaraq bu qaçılmazdır) verilərsə, onda nöqtənin hərəkətinin nə cür davam edəcəyi (heç olmasa məhdud dəqiqliklə olsa belə) haqqında yalnız nisbətən kiçik zaman parçasında mülahizə yürütmək mümkündür. Doğrudan da, əgər trayektoriyalar olduqca güclü dayanıqsızlığı ilə fərqlənirsə [bu o mənada anlaşılır ki, iki yaxın x və y nöqtələri üçün $\varphi_t(x)$ və $\varphi_t(y)$ arasında məsafə zaman keçdikcə trayektoriyalar olduqca böyük məsafədə aralanana qədər (məs., eksponensial) sürətlə artır], onda heç olmasa, prinsip etibarilə $\varphi_t(x)$-i tapmaq üçün olan qeyri – müəyyənlik t-nin artması ilə o qədər də sürətlə artır ki (çünki məlum deyildir ki, $\varphi_t(x)$ və ya $\varphi_t(y)$ reallaşacaq), bu da nöqtənin hərəkəti haqqında nisbətən böyük olmayan t-lər ($|\ln\delta|$ tərtib) üçün əvvəlcədən mülahizə yürütməyə imkan verə bilir. Bu sistemin evolyusiyasını təkrar müşahidə etdikdə (yəni onun vəziyyətinin dəyişməsini) və hərəkət eyni başlanğıc nöqtəsindən (δ-ya qədər dəqiqliklə) başlayaraq müşahidə olunarsa, tez bir zaman ərzində ($|\ln\delta|$ tərtib müddət keçdikdən sonra) onun vəziyyəti (faza nöqtəsi $\varphi_t(y)$-in vəziyyəti), ümumiyyətlə, birinci dəfə olduğundan tam fərqli olacaqdır, sanki sistemin evolyusiyası determinik deyildir. Başlanğıc x nöqtəsi vəziyyətindəki çox da böyük olmayan qeyri – müəyyənlik, zaman keçdikcə elə bil ki, bütün faza fəzası üzrə və ya heç olmasa onun nəzərə çarpacaq hissəsi üzrə «yayılmış» olur. Daha ətraflı analiz göstərir ki, determiniklənmiş sistemlə, adətən, təsadüfiliklə əlaqəli digər xassələr də imitasiya oluna bilərlər. Məs., «xaotiklik» xassələrindən biri kimi $\varphi_t(x)$ trayektoriyası boyunca ölçmələr aparan ölçmə cihazının ardıcıl göstəricilərinin A. N. Kolmoqorov mənada alqoritmik mürəkkəbliyini hesab etmək təbiidir (bax, [1]). Bu ardıcıllıqlar, deyilən mənada, ardıcıl Bernulli sınaqları nəticələrinin yazılışı tipli «həqiqi» təsadüfi proseslər üçün olduğu kimi mürəkkəb ola bilir.

Dinamik sistemin konkret spesifikasından onun trayektoriyalarının eksponensial dayanıqsız olub-olmaması asılı olur və əgər trayektoriyalar eksponensial dayanıqsızdırlarsa, onda belə trayektoriyalar çoxluğu nə dərəcədə genişdir? Bu suala cavab bu və ya digər sistemin spesifikasını əks etdirir (alınmış tədqiqatlar nəzərə alınmaqla).

Təsadüfi proseslərin xassələrinin ən «uğurlu» imitasiyası, eksponensial dayanıqsızlıq bütün trayektoriyalara (qapalı faza çoxobrazlısında) aid olduqda alınır və eksponensial dayanıqsızlığı xarakterizə edən statistik qiymətlər, yəni «yaxın trayektoriyaların aralanmasını» xarakterizə edən statistik qiymətlər (texniki olaraq, tənliklərin variasiyalarda həllərinin necə olması nəzərdə tutulur) bütün trayektoriyalar üzrə müntəzəm olur (Anosov sistemləri adlandırılan), xüsusilə də, əgər sistemin faza fəzasında hamar sıxlığa malik, «fiziki üstünlüklü» invariant μ ölçüsü varsa, «Sırf metriki» nöqteyi – nəzərdən (ölçü nəzəriyyəsi mənasında), diskret zaman halında belə sistem Bernulli sınaqları təsadüfi prosesindən fərqlənmir (bu sistem onun adi modelinə izomorfdur), kəsilməz zaman halında isə ona yaxın prosesdən (Bernulli axını) fərqlənmir (bax, [2], [3]). Digər tərəfdən, «sırf metrik» nöqteyi – nəzərdən baxmayaraq, korrelyasiyaların azalma sürəti ilə maraqlanmaq olar, yəni t artdıqca «olduqca yaxşı» (məs., hamar) f, g funksiyaları üçün $\int f(\varphi_t(x))\, g(x)\, d\mu$ kəmiyyəti (faza fəzası üzrə inteqral) ilə maraqlanmaq olar. Aydın olmuşdur ki, bunlar eksponensial azalır.

Təsadüfi proseslərin xassələrini hiperbolik attraktorlar, yəni faza fəzasının invariant altçoxluqları da çox «uğurlu» imitasiya edirlər; bunlar yaxın trayektoriyaları müntəzəm eksponensial sürətlə özünə yaxınlaşdırır və bunların daxilində yaxın trayektoriyalar attraktor daxilində qalaraq müntəzəm eksponensial sürətlə uzaqlaşırlar. Bu halda, attraktorda «fiziki üstünlüklü» invariant μ ölçüsü haqqında yeni sual yaranır. SRB ölçüsü (Sinay – Ryuell – Bouen ölçüsü) belə ölçüdür; bu ölçü belə alınır: attraktorun hər hansı ətrafında μ_0 Lebeq ölçüsündən başlayaraq, onun t müddəti ərzində «evolyusiyasına» baxaraq (bu ölçü trayektoriya boyunca «üzərək» attraktora daha çox yaxınlaşaraq topalanır), $t \to \infty$ olduqda limitə keçilir. Bu halda sonda sistemin xassələri haqqında SRB ölçüsünə nəzərən əvvəldə olduğu kimi nəticələr alınır (bax, [3]).

Hiperboliklik xassəsi azacıq zəiflədikdə söylənilənlər öz qüvvəsində qalır (lakin olduqca çox zəifləmədə nəticələr də zəif olur, bu da bəzi hallarda baxılan halın mahiyyəti ilə bağlı olur). Konform dinamikada bu xüsusilə yaxşı araşdırılmışdır (bax, [4]).

Zəif hiperboliklik daha çox olduqda xaotiklik haqqında müddəalar, artıq «metrik» xarakterli olmur; bu halda trayektoriyaların birbirinə dolaşıqlığından (onların dayanıqsızlığından) əlavə, məlum mürəkkəbliyin təsdiqindən söhbət gedir. Belə nəticələrin böyük əksəriyyəti (həm ümumi, həm də konkret sistemlərə aid) homoklinik trayektoriyalarla bağlıdır (eyni hiperbolik periodik trayektoriyası olan dayanıqlı W^s və dayanıqsız W^u invariant çoxobrazlılarının kəsişdiyi trayektoriya homoklinik trayektoriya adlanır). W^s və W^u transversal kəsişdikləri halda, sistemdə elə invariant hiperbolik çoxluqlar olur ki, bunların daxili

dinamikası əvvəlki hallarda olduğu kimi xaotik olur, lakin bunların Lebeq ölçüsü sıfra bərabər olduğundan, bu mənada, onlar faza fəzasının olduqca kiçik bir hissəsini tutur və bunların sistemin dinamikasına tam təsirindən inamla danışmaq olmur. Bununla belə, bunların digər trayektoriyaların «hərəkətinə» müəyyən dərəcədə təsiri olduğundan, şübhəsiz ki, bu anlamda onlar müəyyən qədər sistemi «xaotikləşdirir». Sərbəstlik dərəcəsi $3/2$ olan Hamilton sistemləri üçün homoklinik trayektoriyalar sistemin inteqrallanan olmaması haqqında (yəni ikinci inteqralın olmaması haqqında) bəzi teoremlərdə mühüm rol oynayır; bu da bir növ xaotiklik kimi anlaşılır. (Dim. – ölçülər böyük olduğu hallarda mənzərə belə aydın olmur.) W^s və W^u -nun kəsişməsi qeyri – transversal olduqda, çox mürəkkəb vəziyyət (hələ indiyə qədər tam öyrənilməmiş) yaranır; burada çoxlu müxtəlif hallar olur. Bu hallardan bəzilərində aydın olur ki, parametrdən asılı olan sistem üçün trayektoriyaların dinamikasının keyfiyyət mənzərəsi parametrin dəyişmələrinə olduqca həssas olur, bu şərtlə ki, parametr «olduqca böyük» çoxluqlarda dəyişsin (onun hansısa qiymətlərində deyil!) (bax, [5]). «Parametr üzrə müəyyən xaotiklik» alınır.

Əd.: [1] Алексеев В. М., Символическая динамика [Одиннадцатая летняя математическая школа], К., 1976; [2] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [3] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [4] Пейтген Х. О., Рихтер П. Х., Красота фракталов, пер. с англ., М., 1993; [5] Palis J., Takens F., Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, Cambridge, 1993.

XAOS bircins « **xaoc** однородный; homogeneous **chaos** » – bax, *Bircins xaos.*

XARAKTERİSTİK ÇEVİRMƏ « характеристическое преобразование; characteristic transform » – bax, M – *sonsuz bölünən paylanma*.

XARAKTERİSTİK FUNKSİONAL « характеристический функционал; characteristic functional », ehtimal paylanmasının –

$$\hat{F}(g) = \int_T \exp(i\,g(x))\,dF(x)\,,\ g \in T^*$$

bərabərliyi ilə təyin olunan funksionalıdır, burada T – xətti topoloji fəza, T^*, – T -yə topoloji qoşma fəzadır. Ehtimal paylanması F -in müəyyən bir σ – cəbrdə ($\mathscr{B}$ -nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə) təyin olunduğu və T^* -dan olan bütün g -lərin bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur. X. f. anlayışını A. N. Kolmoqorov [1]-də daxil etmişdir və bu anlayışla bağlı bütün əsas məsələlər onun adı ilə bağlıdır.

T – Banax fəzası, $\mathscr{B}$ – Borel σ – cəbri olsun. Onda

1) $\hat{F}(0) = 1$ və $\hat{F}$ müsbət müəyyəndir, yəni

$$\sum_{k,l=1}^{n} c_k\,\bar{c}_l\,\hat{F}(g_k - g_l) \geq 0$$

bərabərsizliyi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kompleks ədədlərinin ixtiyari sonlu toplusu və T^* –dan olan ixtiyari $g_1, g_2, \ldots, g_n$ elementləri üçün ödənilir;

2) $\hat{F}$ güclü topologiyada kəsilməzdir, T^* fəzasının $*$ – zəif topologiyasında sekvensial kəsilməzdir, yəni $*$ – zəif yığılmasının doğurduğu topologiyada (T^* -dan olan $\{f_n\}$ ardıcıllığı hər bir $x \in T$ üçün $f_n(x) \to f(x)$ olduğu halda $f \in T^*$ olan f -ə yığılır);

3) T^* -dan olan ixtiyari g , g_1, g_2 üçün

$$\left|\hat{F}(g)\right| \leq 1\,,$$

$$\left|\hat{F}(g_1) - \hat{F}(g_2)\right| \leq 2\,[\,1 - \mathrm{Re}\,\hat{F}(g_1 - g_2)\,]\,;$$

4) $\hat{F}(-g) = \overline{\hat{F}}(g)$;

5) X. f. və ehtimal paylanmaları arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir;

6) iki ehtimal paylanmasının kompozisiyasının X. f. onların X. f.-larının hasilinə bərabərdir;

7) Əgər K , – T -də ehtimal paylanmalarının zəif nisbi kompakt çoxluğudursa, onda $\{\hat{F} : F \in K\}$ X. f.-lar çoxluğu T^* fəzasının güclü topologiyasında müntəzəm kəsilməzdir;

8) əgər $\{F_n\}$ ehtimal paylanmaları ardıcıllığı ehtimal paylanması F -ə zəif yığılırsa, onda $\{\hat{F}_n\}$ T^* -dan olan hər bir kompakt (və hətta hər bir məhdud) çoxluqda $\hat{F}$ -ya yığılır.

T^* -da hər bir kompleksqiymətli funksional 1) və 2) şərtlərini ödəyərsə, onda o, T -dən olan silindrik çoxluqların cəbrində promera, yəni mənfi olmayan sonlu – additiv çoxluq funksiyasını doğurur (bax, [2]).

İndiyə qədər hələ də həllini tapmayan mühüm problemlərdən biri T^* -da hər bir müsbət müəyyən kompleksqiymətli funksionalın müəyyən bir ehtimal paylanmasının X. f. olduğu haqqında zəruri və kafi şərtlərin axtarılmasıdır. Bu məsələ funksionala uyğun promeranın $\mathscr{B}$ -də ehtimal ölçüsünə qədər davamı məsələsi ilə üst-üstə düşür. Fəzaların bəzi sinifləri üçün, o cümlədən, Hilbert və daha ümumi hesabi – Hilbert fəzaları üçün bu problem tamamilə həll olunmuşdur (bax, [4], [5]). Digər mühüm problem X. f.-ın xassələrinə malik fəzaların həndəsəsinin təsvirindən ibarətdir. Məs., Minlos – Sazonov teoremi [6] məqaləsindəki nəticələrlə birlikdə X. f. terminlərində nüvə fəzalarını xarakterizə etməyə imkan verir.

X. f.-ların tətbiqi və xassələri haqqında bax, [7].

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 178–79; [2] Mourier E., «C. r. Acad. sci.», 1950, t. 231, p. 28–29; [3] Gross L., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 46, p. 1–62; [4] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [5] Сазонов В. В., в сб.: Тр. VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике (1960), Вильнюс, 1962, с. 455–62; [6] Муштари Д. Х., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 1, с. 66–77; [7] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984.

XARAKTERİSTİK FUNKSİONAL(ı) təsadüfi ölçünün **« характеристический функционал** случайной меры; **characteristic functional** of a random measure **»** – bax, *Təsadüfi ölçü*.

XARAKTERİSTİK FUNKSİYA « характеристическая функция; characteristic function », μ *ehtimal ölçüsünün* Furye– Stiltyes çeviməsi – z -in həqiqi qiymətlərində ($z \in \mathbb{R}^1$)

$$\varphi(z) = \mathbf{M}\, e^{iz\xi} = \mathbf{M}(\cos z\xi + i \sin z\xi) \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunan kompleksqiymətli funksiyadır; ξ – təsadüfi kəmiyyətdir. $\varphi(z)$ bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur və məhduddur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$ olarsa,

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dF(x) \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\varphi(z)$ X. f.-sı $F(x)$ funksiyasının Furye – Stiltyes çevirməsidir;

μ ehtimal ölçüsüdürsə, X. f.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\, d\mu(x) \qquad (2')$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\mu_\xi(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\}$, B, – $\mathbb{R}^1$-də Borel çoxluğudur.

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, p(x)\, dx \qquad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\varphi(z)$ X. f.-sı ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sıxlığı funksiyasının (əgər o varsa) sadəcə Furye çevirməsidir.

ξ diskret təsadüfi kəmiyyət olarsa və o, $\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$; $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$ paylanma qanunu ilə verilərsə, onda ξ-nin X. f.-sı

$$\varphi(z) = \mathbf{M}\, e^{iz\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{izx_k}\, \mathbf{P}\{\xi = x_k\} =$$

$$= \mathbf{M}\cos z\xi + i\, \mathbf{M} \sin z\xi \qquad (4)$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada

$$\mathbf{M}\cos z\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \cos zx_k\, p_k,$$

$$\mathbf{M}\sin z\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \sin zx_k\, p_k.$$

e^{izx} funksiyası kəsilməz və məhdud olduğundan ($|e^{izx}| = 1$) X. f.-nın (2) düsturu ilə verilmiş ifadəsindəki inteqral (*riyazi gözləmə*) sonludur.

M i s a l l a r 1. $\lambda > 0$ parametrli *Puasson qanunu* ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı

$$\varphi(z) = \exp[\lambda(e^{iz} - 1)]$$

düsturu ilə hesablanır.

2. *Bernulli qanunu* ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı:

$$\varphi(z) = e^{iz} \cdot p + q = 1 + p(e^{iz} - 1)$$

kimi ifadə olunur, burada $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1 - p = q$.

3. $[a, b]$ parçasında *müntəzəm paylanmaya* malik ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\varphi(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{izb} - e^{iza}}{iz}.$$

Xüsusi halda ξ təsadüfi kəmiyyəti $[-a, a]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış olarsa, onda

$$\varphi(z) = \frac{\sin az}{az}$$

olur.

4. (a, σ) parametrli *normal paylanmanın* X. f.

$$\varphi(z) = \exp\left\{iza - \frac{(\sigma z)^2}{2}\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. Xüsusi halda, standart normal paylanmaya uyğun X. f.:

$$\varphi(z) = e^{-z^2/2} \text{ olur; } a = 0,\ \sigma = 1.$$

5. $\alpha > 0$ parametrli *üstlü qanunla* paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.

$$\varphi(z) = \frac{\alpha}{\alpha - iz}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

6. *Koşi qanunu* ilə paylanmış ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

olarsa, onda onun X. f.:

$$\varphi(z) = e^{-a|z|};$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{a}{a^2 + (x-\theta)^2}$$

olarsa, onda

$$\varphi(z) = e^{-i\theta z - a|z|}$$

olur.

Xarakteristik funksiyanın xassələri. X. f.-nın bəzi xassələri aşağıdakılardır.

1^0. ξ ixtiyari təsadüfi kəmiyyətdirsə, bütün həqiqi z-lər üçün $|\varphi(z)| \leq \varphi(0) = 1$.

2^0. a və b sabit ədədlərdirsə, $a\xi + b$ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-sı $\varphi_{a\xi+b}(z) = e^{izb}\varphi_\xi(az)$.

3^0. $\varphi(-z) = \overline{\varphi(z)}$.

4^0. $\varphi(z)$ bütün ədəd oxunda müntəzəm kəsilməz funksiyadır.

5^0. n sayda asılı olmayan $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlər cəminin X. f.-sı bu təsadüfi kəmiyyətlərin uyğun X. f.-ları – $\varphi_{\xi_1}(z), \ldots, \varphi_{\xi_n}(z)$-lərin hasilinə bərabərdir:

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = \mathbf{M}\, e^{iz(\xi_1+\ldots+\xi_n)} =$$

$$= \mathbf{M}(e^{iz\xi_1}\cdot e^{iz\xi_2}\cdot\ldots\cdot e^{iz\xi_n}) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_i}(z).$$

Xüsusi halda $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(z) = [\varphi_{\xi_1}(z)]^n.$$

6^0. $z_1, \ldots, z_n$ ixtiyari həqiqi, $c_1, \ldots, c_n$ ixtiyari kompleks ədədlər və n ixtiyari tamqiymətli müsbət ədəd olarsa, onda

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi(z_k - z_r)\, c_k\bar{c}_r \geq 0.$$

7^0. ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı bir $n \geq 1$ tərtib momenti, yəni $\mathbf{M}|\xi|^n$ vardırsa, $k \leq n$ şərtini ödəyən bütün k-lar üçün $\varphi(z)$ X. f.-sı k dəfə differensiallanandır və

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathbf{M}\xi^k,$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(iz)^k}{k!}\,\mathbf{M}\xi^k + \frac{(iz)^n}{n!}\,\varepsilon_n(z)$$

bərabərlikləri doğrudur, burada $|\varepsilon_n(z)| \leq 3\mathbf{M}|\xi|^n$ və $z \to 0$ olduqda $\varepsilon_n(z) \to 0$.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin X. f.-nın loqarifminin – $f(z) = \ln\varphi(z)$ funksiyasının $z = 0$ nöqtəsi ətrafında k tərtib ($k \geq 1$ və $\mathbf{M}|\xi|^k < +\infty$ olarsa) kəsilməz törəməsi vardır; onda $f(z)$-in k tərtib törəməsinin sıfır nöqtəsindəki qiyməti $f^{(k)}(0)$-ın $1/i^k$-ya hasilinə ξ-nin k tərtib *semi – invariantı* (kumulyantı) deyilir. k tərtib semi – invariant s_k ilə işarə olunarsa,

$$s_k = \frac{1}{i^k}[\ln\varphi(z)]^{(k)}_{z=0} = \frac{1}{i^k}f^{(k)}(0) =$$

$$= \frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k}{dz^k}\ln\varphi(z)\right]_{z=0}.$$

k tərtib (k tam ədəddir) semi – invariant k tərtib moment və k tərtib momentdən kiçik bütün momentlərin rasional funksiyası kimi ifadə olunur.

$\mathbf{M}\xi = \frac{1}{i}f'(0)$,

$\mathbf{D}\xi = -f''(0)$ olduğundan

$s_1 = \frac{1}{i}f'(0) = \mathbf{M}\xi$, $s_2 = \frac{1}{i^2}f''(0) = \mathbf{D}\xi$

olur, burada $\mathbf{M}\xi$ və $\mathbf{D}\xi$ uyğun olaraq, ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyasıdır.

m_k, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib momenti olsun: $m_k = \mathbf{M}\xi^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Onda

$m_1 = s_1$,

$m_2 = s_2 + s_1^2$,

$m_3 = s_3 + 3s_1s_2 + s_1$,

$m_4 = s_4 + 3s_2^2 + 4s_1s_3 + 6s_1^2s_2 + s_1^4$,

.....

və

$s_1 = m_1 = -\mathbf{M}\xi$,

$s_2 = m_2 - m_1^2 = \mathbf{D}\xi$,

$s_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$,

$s_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_4^4$,

.....

düsturları ilə ξ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib semi – invariantları və k tərtib momentləri arasındakı münasibətlər ifadə olunur.

$(a; \sigma)$ parametrli *normal qanunla* (*Qauss paylanması*) paylanmış təsadüfi kəmiyyətin üçüncü tərtibdən sonrakı bütün semi – invariantları sıfra bərabərdir, yəni $k \geq 3$ olduqda $s_k = 0$; $s_1 = a$, $s_2 = \sigma^2$.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası məlum olarsa, onun xarakteristik funksiyasını təyin etmək həmişə mümkündür. X. f. məlum olarsa, təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası bu X. f. ilə birqiymətli təyin olunur:

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-izx} - e^{-izy}}{iz}\cdot\varphi(z)\,dz. \quad (*)$$

Bu düstur **çevirmə düsturu** adlanır. Bəzən (*) düsturuna ekvivalent aşağıdakı düstur da verilir:

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{u\to 0}\int\frac{e^{-izx} - e^{-izy}}{iz}\,\varphi(z)\,e^{-z^2u^2}\,dz,$$

$$x < y.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, təsadüfi kəmiyyətin X. f., yalnız və yalnız, onun paylanma funksiyası simmetrik olduğu halda həqiqi-qiymətlidir və bu halda

$$\varphi(z) = \mathbf{M}\cos z\xi.$$

Hər hansı bir $\varphi(z)$ funksiyasının X. f. olub-olmadığını təyin etmək çətin məsələlərdən biridir. Belə tipli məsələlərlə əlaqədar alınmış nəticələrdən bəziləri aşağıda qeyd olunmuşdur.

1. $\varphi(0) = 1$ şərtini ödəyən kəsilməz $\varphi(z)$ ($z \in \mathbb{R}^1$) funksiyasının xarakteristik funksiya olması üçün ixtiyari həqiqi – qiymətli $z_1, \ldots, z_n$ və ixtiyari kompleks qiymətli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$ ədədləri üçün

$$\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(z_i - z_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j \geq 0$$

şərtinin ödənilməsi, yəni onun müsbət – müəyyən olması zəruri və kafidir (**Boxner – Xinçin teoremi**).

2. Aşağıya qabarıq, cüt, kəsilməz $\varphi(z)$ ($z \in \mathbb{R}^1$) funksiyası:

1) $\varphi(z) \geq 0$;

2) $\varphi(0) = 1$;

3) $z \to \infty$ olduqda, $\varphi(z) \to 0$

şərtlərini ödəyərsə, onda $\varphi(z)$ X. f.-dır (P o y a t e o r e m i, 1920).

3. $\varphi(z)$ X. f. $\exp\mathscr{P}(z)$ tipli funksiya olarsa ($\mathscr{P}(z)$ polinomdur), onda $\mathscr{P}(z)$ polinomunun dərəcəsi ikidən böyük ola bilməz (M a r t s i n k e v i ç t e o r e m i).

4. $\xi_1, ..., \xi_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\mathbf{M}\xi_n = 0$, $\mathbf{D}\xi_n^2 = 1$, $F_{\widetilde{S}_n}(x)$

$$\widetilde{S}_n = \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, $\varphi(z)$ isə ξ_i təsadüfi kəmiyyətinin X. f. olsun. Onda $n \to \infty$ olduqda $\{F_{\widetilde{S}_n}(x),\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı $(0;\ 1)$ parametrli Q a u s s p a y l a n m a s ı n a z ə i f y ı ğ ı l ı r.

İki X. f.-nın hasili yenə də X. f.-dır. Təbiidir ki, bəzi X. f.-lar iki və ya ikidən artıq sayda X. f.-ların hasili şəklində ifadə olunur. Hər bir $f(t)$ X. f. $f_1(t) = e^{iat}$ (a həqiqidir) və $f_2(t) = f(x)\, e^{-iat}$ tipli iki X. f.-nın hasili kimi ifadə oluna bilinər. X. f.-nın vuruqlarından biri e^{iat} şəklində olarsa, X. f.-nın iki X. f.-nın hasili kimi ifadəsi t r i v i a l adlanır. Trivial hallardan fərqli olaraq, X. f.

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$$

şəklində $f_1(t)$ və $f_2(t)$ cırlaşmayan paylanmaların X. f.-larının hasili kimi ifadə olunarsa, X. f. a y r ı l a n X. f. adlanır. Bu halda $f_1(t)$ və $f_2(t)$ funksiyaları $f(t)$ X. f.-nın k o m p o n e n t l ə r i (və ya vuruqları) adlanır.

X. f. hasil şəklində yalnız trivial surətdə ifadə olunarsa, onda belə X. f. a y r ı l m a y a n X. f. adlanır. Məs., $F(x)$ sırf diskret paylanma funksiyasıdırsa və bu paylanmanın yalnız iki kəsilmə nöqtəsi vardırsa, onda ona uyğun X. f. ayrılmayan X. f.-dır.

X. f.-nın ayrılışına aid A. Ya. Xinçin aşağıdakı nəticələri almışdır (bax, [1]).

a) Hər bir X. f. aşağıdakı xassələrə malik olan ikidən çox olmayan X. f.-ların hasili şəklində ifadə oluna bilinir. Bunlardan biri ayrılmayan komponentlərə malik deyildir, digəri isə ayrılmayan vuruqların sonlu və ya hesabi ardıcıllığının yığılan hasilidir.

b) Ayrılmayan komponentləri olmayan X. f.-lar sonsuz bölünəndirlər.

n – ölçülü $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin (təsadüfi vektorunun) X. f. $z = (z_1, ..., z_n)$ həqiqi vektorunun funksiyası olan

$$\varphi_\xi(z) = \mathbf{M}\exp[\, i(z_1\xi_1 + ... + z_n\xi_n)]$$

r i y a z i g ö z l ə m ə s i n ə deyilir. ξ-nin komponentləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda n – ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin X. f.

$$\varphi_\xi(z_1, ..., z_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(z_k)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, М.,1962; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [5] З о л о т а р е в В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

XARAKTERİSTİK FUNKSİYA a n a l i t i k « **характеристическая функция** аналитическая; a n a l y t i c **characteristic function** » – bax, *Analitik xarakteristik funksiya*.

XARAKTERİSTİK FUNKSİYALAR METODU « характеристических функций метод; characteristic functions method » – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas analitik metodlarından biridir. 19-cu əsrin sonunda A. M. Lyapunov bu metod ilə məşhur *Lyapunov teoremini* isbat etmişdir (bax, [1]). X. f. m.-nun əsas ideyası, müasir interpretasiyada, ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}$-lərin Furye – Stiltyes çevirmələri və bunlara analoji çevirmələrdən istifadə olunmadan ibarətdir.

Hər bir $\mathbf{P}$ üçün Furye – Stiltyes çevirmələri –

$$f(t,\ \mathbf{P}) = \int e^{itx}\, \mathbf{P}(dx)$$

funksiyalarına x a r a k t e r i s t i k f u n k s i y a l a r deyilir.

X. f. m. paylanmaların kompozisiyalarının analizində (və hər şeydən öncə, asimptotik analizdə) ən effektiv metod sayılır ki, bu da asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmalarının analizinə ekvivalentdir. Bu isə xarakteristik funksiyaların aşağıdakı şərtləri ilə əsaslandırılır:

1) $\mathbf{P}$ paylanması özünün uyğun xarakteristik funksiyası $f(t,\ \mathbf{P})$ ilə tam mənası ilə təyin olunur.

2) İxtiyari $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_n$ paylanmaları üçün

$$f(t,\ \mathbf{P}_1 * \mathbf{P}_2 * ... * \mathbf{P}_n) = f(t,\ \mathbf{P}_1) f(t,\ \mathbf{P}_2) \ ... \ f(t,\ \mathbf{P}_n)$$

bərabərliyi doğrudur.

3) Əgər $\mathbf{P}_n$ paylanmalar ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}$ paylanmasına zəif yığılırsa ($\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$), onda $f(t,\ \mathbf{P}_n) \to f(t,\ \mathbf{P})$ yığılması hər bir $t \in \mathbb{R}^1$ üçün ödənilir və bu yığılma hər bir $|t| \leq T$ məhdud intervalında müntəzəm yığılma olacaqdır.

4) Əgər $f(t,\ \mathbf{P}_n)$ xarakteristik funksiyası $t = 0$ nöqtəsində kəsilməz $g(t)$ funksiyasına yığılırsa, onda $g(t) = f(t,\ \mathbf{P})$ hər hansı $\mathbf{P}$ paylanmasının xarakteristik funksiyasıdır və $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ (zəif yığılma).

Paylanmaların və onların uyğun xarakteristik funksiyalarının analitik xassələri bir-birilə sıx bağlıdır. Məs., $\mathbf{P}$ paylanmasının hamarlılığı (onun törəməsinin varlığı və onun törəmələrinin hansısa saydasının varlığı) $t \to \infty$ olduqda $f(t,\ \mathbf{P})$ funksiyasının sıfra yığılma sürətində özünü əks etdirir, hansısa sayda $\mathbf{P}$-nin momentlərinin varlığı uyğun $f(t,\ \mathbf{P})$-nin hamarlılığını şərtləndirir, paylanmanın birzirvəlilik kriterisi xarakteristik funksiyalar terminlərilə ifadə olunur və s.

X. f. m. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremləri nəzəriyyəsinin qurulmasında müvəffəqiyyətlə istifadə olunmuşdur (bax, *Limit teoremləri*, *Mərkəzi limit teoremləri*). Bu metoddan istifadə edilməklə limit teoremlərinin müxtəlif dəqiqləşmələri alınmışdır (bax, *Berri – Esseen bərabərsizliyi*, *Berri – Esseen teoremi*).

X. f. m.-nun geniş potensial imkanları onun müasir ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox bölmələrində müvəffəqiyyətlə tətbiq olunmasına şərait yaratmışdır (məs., şaxələnən proseslər nəzəriyyəsində doğuran funksiyalar metodu formasında).

X. f. m. ideyası «ümumiləşmiş cəmləmə» modelində istifadə olunur, bu halda, hər hansı kommutativ qrup və ya semi – qrup əməlinin köməyilə formalaşan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin «cəmlərinə» baxılır (paylanmalar fəzasında bu əməl – semi – qrup kommutativ əməli «ümumiləşmiş kompozisiya» əməlini doğurur). Bu modellərdə xarakteristik funksiyaların analoqu kimi

$$f(\theta, P) = \int q(\theta, x)\, \mathbf{P}(dx)$$

inteqral çevirmələri götürülür. Burada θ dəyişəni müəyyən bir Θ çoxluğundan qiymətlər alır, bu çoxluq q çevirməsinin nüvəsi kimi istifadə olunan əmələ uyğun olaraq ciddiliklə təyin olunur.

$f(\theta, P)$ «Xarakteristik funksiyası» 1) – 4) xassələrinə tamamilə uyğun olan xassələrə malikdir ki, bu da baxılan modelə X. f. m.-nun tətbiq olunmasına əsas verir.

Əd.: [1] Л я п у н о в А. М., Избранные труды, М., 1948, с. 179–218, 221–50; [2] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [3] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

XARAKTERİSTİK GÖSTƏRİCİ, DAYANIQLILIQ PARAMETRİ « характеристический показатель, параметр устойчивости; characteristic index, parameter of stable » – bax, *Dayanıqlı paylanma göstəricisi*, *Dayanıqlı paylanma.*

XARAKTERİSTİK OPERATOR(u) **« характеристический оператор; characteristic operator »** bircins Markov prosesinin – nöqtənin sonsuz kiçik ətrafında gedişatını təsvir edən operatordur. Daha dəqiq, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ – lokal kompakt Hausdorf fəzası E-də sağdan kəsilməz Markov prosesi olsun. $\tau_{\mathcal{U}}$ ilə $\mathcal{U}$ açıq çoxluğu üçün prosesin $\mathcal{U}$ çoxluğundan ilk çıxış anı işarə olunmuşdur. x nöqtəsində prosesin xarakteristik operatoru $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{\mathcal{U} \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x f(x\tau_{\mathcal{U}}) - f(x)}{\mathbf{M}_x \tau_{\mathcal{U}}}$$

limiti kimi təyin olunur, burada limit elə açıq $\mathcal{U} \downarrow x$ çoxluqlarına görə götürülür ki, bunlar üçün limit altında ifadə sonlu olsun. Bu zaman əgər x nöqtəsində limit vardırsa, $f \in D_{\mathfrak{A}}(x)$, əgər bütün $x \in E$ nöqtələrində limit vardırsa, $f \in D_{\mathfrak{A}}$ olur [burada $D_{\mathfrak{A}}(x)$ $\mathfrak{A}$ operatorunun x nöqtəsində təyin olunma oblastıdır, $D_{\mathfrak{A}} = \bigcup_{x \in E} D_{\mathfrak{A}}(x)$]. Bu tərif Markov proseslərinin daha geniş sinfi üçün də yayılır.

X. o. infinitezimal operatorun genişlənmiş forması olub, prosesin sonsuzluğa ilk getmə anına qədər olan gedişatını təyin edir. X. o. qlobal minimum prinsipini ödəyir: əgər x_0 f funksiyasının qlobal minimum nöqtəsidirsə, onda $\mathfrak{A} f(x_0) \geq 0$. X. o. kəsilməz proseslər üçün lokaldır: $\mathfrak{A} f(x)$ x nöqtəsinin sonsuz kiçik ətrafında f funksiyasının qiymətləri üzrə təyin olunur. Bu halda X. o. lokal minimumu prinsipini ödəyir: f funksiyasının lokal minimum nöqtəsində $\mathfrak{A} f(x_0) \geq 0$. $\mathbb{R}^d$-də diffuzion proseslər üçün X. o. bütün məhdud ikiqat differensiallanan funksiyalarda təyin olunmuşdur və o, aşağıdakı kimi ifadə olunur (qırılmayan proseslər üçün):

$$\mathfrak{A} f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

burada $a_{ij}(x)$ – müsbət müəyyən matris (diffuziya matrisi), $b_i(x)$ – aparı vektorudur.

Əd.: [1] Д ы н к и н Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

XARAKTERİZASİON TEOREMLƏR « характеризационные теоремы; characterization theorems » – təsadüfi kəmiyyətlər və ya təsadüfi vektorların *paylanma tipləri* və bu təsadüfi kəmiyyətlər və ya vektorların funksiyalarının ümumi xassələri arasında əlaqəni müəyyənləşdirən teoremlərdir.

M i s a l 1. X üçölçülü elə təsadüfi vektor olsun ki:

1) onun üç qarşılıqlı ortoqonal oxlar üzərinə proyeksiyaları X_1, X_2, X_3 asılı olmasınlar və

2) X-in ehtimal paylanmasının sıxlığı $p(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ yalnız $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ cəmindən asılı olsun. Onda X normal paylanma qanununa tabedir və

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right\},$$

burada $\sigma > 0$ hər hansı sabitdir (qazın stasionar vəziyyətində molekulların sürətlərinin paylanması üçün Maksvell qanunudur).

M i s a l 2. $X \in \mathbb{R}^n$ komponentləri eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X = (X_1, ..., X_n)$ olan təsadüfi vektor olsun. Əgər paylanma normal qanuna tabedirsə, onda

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

«empirik ortası» və

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2$$

«empirik dispersiyası» asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olacaqdır. Əksinə, bu kəmiyyətlər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda X normal paylanma qanununa tabedir.

M i s a l 3. $X_k \in \mathbb{R}^n$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan komponentlərli vektor, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ sıfırdan fərqli sabitlər olsun. Əgər $Y_1 = a_1X_1 + ... + a_nX_n$ və $Y_2 = b_1X_1 + ... + b_nX_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, X normal qanunla paylanır. Bu hökm D a r m u a – S k i t o v i ç t e o r e m i adlanır. Xüsusi halda, $n = 2$, $a_1 = a_2 = b_1 = 1$ və $b_2 = -1$ olduqda, yəni $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$ olduqda, B e r n ş t e y n t e o r e m i alınır. a_i və b_j əmsalları üzərinə bəzi məhdudiyyətlər qoyaraq, Y_1 və Y_2-nin asılı olmamazlığı şərtini onların eyni qanunla paylanan olduqları fərziyyəsi ilə əvəz etdikdə X vektorunun normal qanunla paylandığı haqqında hökm doğrudur. Bu müddəa L i n n i k t e o r e m i adlanır.

Təsadüfi $X \in \mathbb{R}^n$ vektorunun paylanmasının belə xarakterizasiyası – iki $Q_1(X)$ və $Q_2(X)$ çoxhədlilərinin eyni qanunla paylanması və asılı olmamazlığı xassəli xarakterizasiyası riyazi statistikada mühüm rol oynayan X. t.-lə yanaşı verilir.

Əd.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

XARAKTERİZASİON TEOREMLƏR Abel qruplarında ehtimal paylanmaları üçün « **характеризационные теоремы** для вероятностных распределений на абелевых группах; **characterization theorems** for probability distributions on Abelian groups» – təsadüfi kəmiyyətlərin bəzi funksiyalarının xassələri üzrə bu təsadüfi kəmiyyətlərin *paylanmaları* haqqında informasiya verən teoremlərdir. Burada həqiqi ədəd oxunda çoxsaylı X. t.-dən (bax, [1]) Qauss paylanmasının xarakterizasiya məsələlərinin qruplar üzrə analoqlarına baxılır və bu halda xətti statistikaların eyni paylanmaya malik olmaları və ya asılı olmamazlığı xarakterizasiya olunur, belə ki, bu hal üçün alınan nəticələr nisbətən tamamlanmış xarakter daşıyır.

G – lokal kompakt separabel Abel metrik qrupu, $\overline{G}$ – onun xarakterlər qrupu, C_G, – G qrupunun sıfrının komponenti, $\Gamma(G)$, – G-də Qauss paylanmalarının çoxluğu, $\Gamma^s(G)$, – G-də simmetrik Qauss paylanmalarının çoxluğu, $I(G)$, – G-də idempotent paylanmaların çoxluğu olsun. G qrupunun K kompakt altqrupunda Haar paylanması μ_K ilə işarə olunur; T – çevrənin fırlanmalar qrupudur.

$f_n : G \to G$ homomorfizminin $f_n(g) = ng$ (n natural ədəddir) və $f_n(G) = G^{(n)}$ düsturları ilə təyin olunduğu fərz olunur. Əgər $G^{(2)} = G$ olarsa, G qrupu Korvin qrupu adlanır.

Əgər qiymətləri G-dən, paylanmaları γ olan elə asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri olarsa ki, $X+Y$ və $X-Y$ də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, onda G qrupunda γ paylanması Bernşteyn mənada Qauss paylanması adlanır. G qrupunda Bernşteyn mənada Qauss paylanmaları çoxluğu $\Gamma_B(G)$ ilə işarə olunur. Fərz olunur ki, $I_B(G) = I(G) \bigcap \Gamma_B(G)$. μ_k paylanması $I_B(G)$-yə, yalnız və yalnız, o halda aid olur ki, $K^{(2)} = K$ bərabərliyi ödənilsin. $\Gamma_B(G)$ çoxluğu semi – qrupdur (konvolyusiyaya nəzərən) və $I_B(G) * \Gamma(G)$ $\Gamma_B(G)$ üzərindədir. $I_B(G) * \Gamma(G) = \Gamma_B(G)$ bərabərliyinin ödənildiyi G qruplarının tam təsviri belədir: ixtiyari $K \subset G$ kompakt Korvin altqrupu üçün G/K faktorqrupunun T^2-na topoloji izomorf altqrupu yoxdur (bax, [2]). Əgər $\mu = \mu_k * \nu$ və $\nu \in \Gamma(G)$ olarsa, onda μ paylanması $K \subset G$ kompakt altqrupuna nəzərən invariant paylanmadır və μ G/K faktorqrupunda Qauss paylanması doğurur.

Həqiqi ədəd oxunda, əgər X və Y asılı olmayan (eyni qanunla paylanmış olmaları şərt deyildir) təsadüfi kəmiyyətlər və $X+Y$ və $X-Y$ də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda X və Y Qauss paylanması ilə paylanan təsadüfi kəmiyyətlərdir (Bernşteyn teoremi). Bu teoremin qruplar halı üçün analoqu aşağıdakı nəticədir. Fərz olunur ki, X və Y qiymətləri G-dən, paylanmaları μ və ν olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və fərz olunur ki, C_G qrupunun 2 tərtibdən elementləri yoxdur. Onda $X+Y$ və $X-Y$, yalnız və yalnız, o halda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir ki, $\mu, \nu \in I_B(G) * \Gamma(G)$ və $\mu = \nu * E_g$ bərabərlikləri ödənilmiş olsun (bax, [2]). Bu teorem aşağıdakı mənada dəqiqdir: əgər C_G qrupunun 2 tərtibdən elementləri vardırsa, onda qiymətləri G qrupundan olan, asılı olmayan və paylanmaları μ və ν olan elə X və Y təsadüfi kəmiyyətləri vardır ki, Y, $\nu \notin I(G) * \Gamma(G)$, $X+Y$ və $X-Y$ isə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir (bax, [2]).

Klassik halda, əgər X_j, $j = 1, 2, ..., m$ $\mathbb{R}^1$-də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $L_1 = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_m X_m$ və $L_2 = \beta_1 X_1 + ... + \beta_m X_m$ (bütün α_j, β_j-lər sıfırdan fərqlidirlər) asılı olmayan xətti formalardırsa, onda X_j təsadüfi kəmiyyətləri Qauss paylanmaları ilə paylanmışlar (Skitoviç – Darmua teoremi). Qruplar üçün bu teoremin analoqu aşağıdakı nəticədir. X_j, $j = 1, 2, ..., m$ qiymətləri G qrupundan olan, paylanmaları μ_j olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\{a_j\}_{j=1}^m$, $\{b_j\}_{j=1}^m$ G qrupu üçün məqbul tam ədədlər çoxluqları olsun [yəni elə ədədlər olsun ki, bütün j-lər üçün $G^{(j)} \neq \{0\}$] və $L_1 = a_1 X_1 + ... + a_m X_m$ və $L_2 = b_1 X_1 + ... + b_m X_m$ asılı olmayan xətti formalar olsun. Onda əgər G qrupu

$$G \approx \mathbb{R}^n + D, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

şəklində qrupa topoloji izomorf olarsa, D isə burulmasız (rus. без кручения) diskret qrup olarsa, onda bütün j-lər üçün $\mu_j \in \Gamma(G)$. Əgər $G^{(2)} = \{0\}$ olarsa, onda bütün μ_j-lər cırlaşmış paylanmalardır. Əgər G modul 3 üzrə çıxıqlar qrupuna izomorf qrupdursa, onda ya bütün μ_j-lər cırlaşmış paylanmalardır, ya da ki, heç olmasa, ixtiyari iki j_1 və j_2 qiymətləri üçün $\mu_{j_1} = \mu_{j_2} = \mu_G$, digər μ_j-lər isə ixtiyari olur (bax, [3]).

Bu nəticə aşağıdakı mənada dəqiqdir. Əgər G qrupu yuxarıda qeyd olunan qruplara topoloji izomorf deyildirsə, onda qiymətləri G qrupundan olan, paylanmaları μ_i olan X_j, $j = 1, 2, ..., m$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri və G qrupu üçün elə $\{a_j\}_{j=1}^m$ və $\{b_j\}_{j=1}^m$ – tam qrupların məqbul çoxluqları vardır ki, $L_1 = a_1 X_1 + ... + a_m X_m$ və $L_2 = b_1 X_1 + ... + b_m X_m$ xətti formaları asılı deyildirlər və j-nin bütün qiymətlərində $\mu_j \notin I(G) * \Gamma(G)$ münasibəti doğrudur (bax, [3]).

Həqiqi ədədlər oxunda L_1 və L_2 xətti formalarının asılı olmamazlığından alınır ki, baxılan paylanmaların xarakteristik funksiyaları sıfra bərabər olmurlar. Qruplar halında bu, ümumiyyətlə, belə deyildir. X_j, $j = 1, 2, ..., m$ – qiymətləri G-dən olan asılı olmayan və paylanmaları μ_j olan, xarakteristik funksiyaları sıfra çevrilməyən təsadüfi kəmiyyətlər, $\{a_j\}_{j=1}^m$, $\{b_j\}_{j=1}^m$, – G üçün

tam ədədlərin məqbul çoxluqları olsun. Onda $L_1 = a_1X_1 + ... + a_mX_m$ və $L_2 = b_1X_1 + ... + b_mX_m$ xətti formalarının asılı olmamazlığından bütün j-lər üçün $\mu_j \in \Gamma(G)$ münasibətinin alınması üçün zəruri və kafidir ki, G burulmasız qrup olsun, yaxud $G^{(p)} = \{0\}$ olsun, burada p sadə ədəddir (bax, [3]).

$\mathrm{Aut}(G)$, – X qrupunun bütün topoloji avtomorfizmlərinin qrupu olsun. X_j, $j = 1, ..., s$ paylanmaları μ_i, qiymətləri G qrupundan olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(G)$ olsun. Aşağıdakı məsələyə Skitoviç – Darmua teoreminin qruplar üçün analoqu kimi baxmaq olar. Hansı G qrupları üçün L_1 və L_2 xətti formalarının asılı olmamazlığından bütün j-lər üçün $\mu_j \in I(G) * \Gamma(G)$ xassəsi ödənilir? Qurye və Olkin isbat etmişlər ki, $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ bu xassəyə malikdirlər (bax, [1]). Bu xassəli kompakt Abel qruplarının tam təsviri aşağıdakı kimidir.

(I) Fərz olunur ki, G qrupu aşağıdakı qruplardan biri ilə izomorfdur:

(a) $Z(2^{m_1}) \times ... \times Z(2^{m_n}), \quad 0 \le m_1 < ... < m_n,$

(b) $\Delta_2 \times Z(2^{m_1}) \times ... \times Z(2^{m_n}), \quad 0 \le m_1 < ... < m_n,$

onda bütün μ_j-lər cırlaşmış paylanmalardır;

(II) fərz olunur ki, G qrupu $Z(3) \times G'$ qrupuna topoloji izomorfdur, burada G' (a) və ya (b)-dəki kimi qrupdur; onda ya bütün μ_j-lər cırlaşmış paylanmalardır, yaxud μ_j paylanmalarını μ'_j yerinidəyişmələri ilə elə əvəz etmək olar ki, heç olmasa iki μ'_{j_1} və μ'_{j_2} paylanmaları üçün $\mu'_{j_1} = \mu'_{j2} = m_{Z(3)}$ bərabərliyi ödənilsin, digər μ'_j-lər ixtiyari olsun və $\sigma(\mu'_j)$ daşıyıcılarının hamısı üçün isə $\sigma(\mu'_j) \subset Z(3)$ münasibəti ödənilsin, burada $Z(n)$ – modul n üzrə çıxıqlar qrupudur, Δ_2, – 2–adik tam ədədlərin qrupudur (2 tam ədədin qrup cəmi ilə qrup).

Bu nəticə aşağıdakı mənada dəqiqdir. G kompakt Abel qrupudur, lakin yuxarıda qeyd olunmuş qaydalara izomorf deyildir. Onda paylanmaları μ_j, qiymətləri isə G qrupundan olan elə asılı olmayan X_j təsadüfi kəmiyyətləri və $\delta_j \in \mathrm{Aut}(G)$ avtomorfizmləri vardır ki, $L_1 = X_1 + ... + X_s$ və $L_2 = \delta_1(X_1) + ... + \delta_s(X_s)$ xətti formaları asılı olmayandırlar və bütün j-lər üçün $\mu_j \notin I(X) * \Gamma(G)$.

$A = \{a_j\}_{j=0}^m$ tam ədədlərin ixtiyari çoxluğu, $\Gamma_A(G)$ G-də μ paylanmalarının sinfi olsun; μ-lər aşağıdakı xassələrə malikdirlər: X_j, $j = 1, 2, ..., m$, $m \ge 2$ paylanmaları μ, qiymətləri G-dən olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda a_0X_1 və $a_1X_1 + ... + a_mX_m$ xətti formaları eyni qanunla paylanmışlar. $\mathfrak{M}(G)$ G qrupu üçün $A = \{a_j\}_{j=0}^m$ qarşılıqlı sadə ədədlərin –

$$a_0^2 = a_1^2 + ... + a_m^2 \qquad (2)$$

şərtini ödəyən ədədlərin məqbul çoxluqlarının çoxluğu olsun.

Klassik halda, əgər X_j, $j = 1, 2, ..., m$ $\mathbb{R}^1$-də eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $\{a_j\}_{j=0}^m$ (2) şərtini ödəyən həqiqi ədədlərdirsə və a_0X_1 və $a_1X_1 + ... + a_mX_m$ xətti formaları eyni qanunla paylanmışlarsa, onda X_j Qauss paylanması ilə paylanmışdır (Poya – Linnik teoremi). Qruplar halında $I_A(G) = I(G) \cap \Gamma_A(G)$ olsun. Onda ixtiyari $A \in \mathfrak{M}(G)$ çoxluğu üçün G-də

$$I_A(G) * \Gamma^s(G) = \Gamma_A(G) \qquad (3)$$

bərabərliyinin ödənilməsi üçün zəruri və kafidir ki, ya G qrupu (1) şəklində qrupa topoloji izomorf olsun, ya da ki, $G^{(p)} = \{0\}$ olsun, burada p sadə ədəddir (bax, [4]).

Əgər hər hansı $A \in \mathfrak{M}(G)$ üçün (3) bərabərliyi doğru olarsa, birhədli və xətti statistikanın eyni paylanmaya malik olduqları Qauss paylanmasının xarakterizasiyası mümkündür, deyilir. Belə G qruplarının sinfi aşağıdakı kimi təsvir olunur: hər hansı sadə p ədədi üçün C_G qrupunun p tərtib elementi yoxdur (bax, [5]).

$\Gamma_U(G)$ G-də Urbanik mənada Qauss paylanmaları çoxluğu olsun, yəni elə μ paylanmalarının ki, bunlar ixtiyari $\overline{g} \in \overline{G}$ xarakteri ilə T-də Qauss paylanmasına çevrilirlər. Onda $\Gamma(G) \subset \Gamma_U(G)$. $\Gamma(G) = \Gamma_U(G)$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün zəruri və kafidir ki, ya $C_G \approx T$ ödənilsin və yaxud $\overline{G}$ qrupunun sıfır olmayan faktor qrupa qeyri – məhdud bölünən elementi olsun (bax, [6]).

Əgər $n_g = g_0$ tənliyi G-də ixtiyari istənilən qədər böyük natural n ədədləri üçün həll olunandırsa, $g_0 \ne 0$ elementi qeyri–məhdud bölünən element adlanır.

Ədb.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [2] Фельдман Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 47–58; «Теория вероятн. и ее примен.», 1996, т. 41, в. 4, с. 901–06; [3] Фельдман Г. М., «Докл. АН СССР», 1988, т. 301, № 3, с. 558–60; [4] Фельдман Г. М., «Укр. матем. ж.», 1989, т. 41, № 8, с. 1112–18; «Укр. матем. ж.», 1990, т. 42, № 1, с. 139–42; [5] Фельдман Г. М., Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах, К., 1990; [6] Фельдман Г. М., «Studia Math.», 1982, v. 73, p. 81–86; [7] Рухин А. Л., «Матем. заметки», 1969, т. 6, № 3, с. 301–07; [8] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

XARAKTERİZASİYASI, PAYLANMALARIN « характеризация распределений; characterization of distributions » – *paylanmalar* çoxluğunun xassələrini bu paylanmaların hər hansı digər xassələri və onların xüsusi seçilmiş çevirmələrinin xassələrinin köməyilə təsvir etmək üçün modeldir.

P. x.-na aid misallar. 1) Mənfi olmayan ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması mütləq kəsilməz paylanma olarsa və ixtiyari $x \ge 0$, $t > 0$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\xi \ge x + t \mid \xi \ge x\} = \mathbf{P}\{\xi \ge t\}$$

bərabərliyi ödənilərsə (keçmişin təsirsizlik xassəsi), onda ξ eksponensial qanunla paylanmışdır, yəni

$$\mathbf{P}\{\xi \geq t\} = e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$$

burada $\lambda > 0$ – hər hansı parametrdir.

2) Əgər ξ və η elə təsadüfi kəmiyyətlərdirsə ki, $\xi + \eta$ və $\xi - \eta$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, onda ξ və η normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Xarakterizasiyanın ümumi modeli *Dayanıqlılıq*(ğ ı) stoxastik modelin və *Dayanıqlılıq*(ğ ı) paylanmaların xarakterizasiyasının məqalələrində verilmişdir.

Bax, həm də *Xarakterizasion teoremlər*.

Əd.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

XARİCETMƏ METODU « исключения метод; exclusion method » – bax, *Daxiletmə və xaricetmə metodu*, *Modelləşdirilməsi*, *təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

XARİCİ ÖLÇÜ « внешняя мера; outer measure » – bax, *Ölçü.*

XƏTA « ошибка, погрешность; error » – bax, *Səhv*, *xəta*, *fərq*; *Sistematik xəta*, *Standart xəta*, *Reprezentativ xəta.*

XƏTA ehtimal olunan **« ошибка** вероятная; **probable error »** – bax, *Kvartil məsafə.*

XƏTA(sı) eksperimentin **« ошибка** эксперимента; **error** of experiment **»** – bax, *Statistik xəta*, *Təsadüfi xəta*.

XƏTA kvadratik orta **« ошибка** средняя квадратическая; mean root square **error »** – bax, *Kvadratik orta xəta.*

XƏTA sistematik **« ошибка** систематическая; systematic **error »** – bax, *Sistematik xəta.*

XƏTA standart **« ошибка** стандартная; standard **error »** – bax, *Standart xəta.*

XƏTA təsadüfi **« ошибка** случайная; random **error »** – bax, *Təsadüfi xəta.*

XƏTALAR İNTEQRALI « ошибок интеграл; error integral » – bax, *Ehtimali inteqral.*

XƏTALAR NƏZƏRİYYƏSİ « ошибок теория; theory of errors », Qauss xətalar nəzəriyyəsi, – riyazi statistikanın normal qanuna tabe seçmə üzərində işləmələrlə bağlı məsələsi ilə əlaqədar bir sıra klassik nəticələrinin ənənəvi adıdır. X. n.-nin əsasları K. Qauss (C. Gauss) tərəfindən işlənilmişdir. Bu nəzəriyyədə ingilis məktəbinin statistikləri U. Qosset (W. Gosset; Student, təxəllüsü Styudent, 1908) və R. Fişerin (R. Fisher, 1925) xidmətləri həlledici olmuşdur.

X. n. öz başlanğıcını fiziki məsələnin həllinin axtarışları ilə bağlı almışdır. Müşahidə olunan hər hansı fiziki parametrin əsl naməlum qiyməti (sabit qiyməti) kimi baxılan determinik a kəmiyyətinin ölçmə nəticələrinin $x_1, x_2, ..., x_n$ olduğu fərz olunur. Bu nəticələrin asılı olmayan identik sınaqlar seriyasında alındığı fərz olunur və a parametrinin naməlum əsl qiymətinə yaxın olan elə qiymətin qurulması tələb olunur ki, bu qiymət hər bir x_i nəticəsindən daha yaxşı olsun.

Bu məsələnin həlli üçün K. Qauss ehtimal modelindən istifadə etməyi təklif etmişdi və bu çərçivədə müşahidə nəticələri $x_1, ..., x_n$ -lərə asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyaları kimi baxılır. Bu cür yanaşmada hər bir X_i müşahidəsini

$$X_i = a + b + \delta_i,\ \ i = 1, 2, ..., n$$

cəmi şəklində ifadə etmək olar, burada a – ölçülən kəmiyyətin özü, $b = \mathbf{M}(X_i - a)$ – cihazın metroloji qeyri – mükəmməlliyi ilə şərtləndirilən *sistematik xəta* (meyl), δ_i *təsadüfi xətası* isə ayrı-ayrılıqda o qədər də mühüm olmayan və bir-birindən zəif asılı, nəzarət edilə bilinməyən faktorların təsirindən yaranan xətadır; bu faktorlar cihazın əqrəbinin titrəyişi, verilənlərin hesablanmasında yol verilən və s. xətalar ola bilər, belə ki, bütün $\delta_1, ..., \delta_n$ məğzən eyni qanunla paylanmış, riyazi gözləmələri $\mathbf{M}\delta_i = 0$ olan, eyni bir dispersiyaya malik, yəni $\sigma^2 = \mathbf{D}\delta_1 = ... = \mathbf{D}\delta_n$ naməlum dispersiyalı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\delta_1, ..., \delta_n$ təsadüfi xətalarının yaranması səbəblərinə görə K. Qauss bu təsadüfi kəmiyyətlərin normal qanunla paylandığı kimi prinsipial fərziyyə qəbul edərək, bunu onunla əsaslandırmışdır ki, bir çox praktiki hallarda, bu təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün mərkəzi limit teoreminin tətbiq olunma şərtləri ödənilir. Bir qayda olaraq, parametrin etalon qiymətini ölçərək, uyğun düzəlişlər daxil etməklə, sistematik xəta b-ni aradan qaldırmaq olur ki, bunun nəticəsində də sistematik xəta olmayan ($b = 0$) modelə baxmaq olur, yəni $X_i = a + \delta_i$, $i = 1, ..., n$ olduğu hala. Yuxarıda qeyd olunan fərziyyələrə əsasən, bu halda $X_1, ..., X_n$ müşahidələri üzrə qurulmuş doğruyaoxşarlıq funksiyası $p(X_1, ..., X_n \mid a, \sigma^2)$ –

$$p(X_1, ..., X_n \mid a, \sigma^2) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Müasir riyazi statistikada X. n.-nin belə ehtimal modeli asılı olmayan bərabərdəqiqlikli müşahidələrin Qauss modeli adlanır. X. n.-nin bu model çərçivəsində əsas məsələsi a və σ^2 üçün ən yaxşı statistik qiymətlərin qurulmasıdır. Asılı olmayan eynidəqiqlikli müşahidələrin Qauss modelində

$$T = \left(\sum_i X_i, \sum_i X_i^2 \right)$$

statistikası kafi statistikadır. T kafi statistikasının funksiyaları olan $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ və $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$ statistikaları uyğun olaraq, a və σ^2 üçün kvadratik riskin minimumu mənasında meylsiz statistik qiymətlərdir. $\overline{X}_n$ və S_n^2 statistik qiymətləri stoxastik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, $\overline{X}_n$ a və $\frac{\sigma^2}{n}$ parametrlərilə normal qanuna, $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$ isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$ olan χ^2 – paylanma qanununa tabedir. $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - a)/S_n$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-1)$-ə bərabər Styudent paylanmasına tabedir, bu statistikadan praktikada a parametrinin naməlum əsl qiyməti üçün

interval statistik qiymətinin (etibarlı intervalın) qurulmasında istifadə olunur.

Asılı olmayan eynidəqiqlikli müşahidələrin Qauss modeli çoxseçimli və dəqiqliyi eyni olmayan müşahidələr üçün ümumiləşdirilir. X. n.-nin ən tam inkişafı ən kiçik kvadratlar metodunda əks olunur; bu metodun özü də K. Qauss tərəfindən yaranmışdır.

Əd.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [2] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [3] Большев Л. Н., Ошибок теория, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984.

XƏTALAR VEKTORU « ошибок вектор; vector of errors » – bax, *Faktor analiz.*

XƏTTİ APPROKSİMASİYA « линейная аппроксимация; linear approximation » – bax, *Xətti interpolyasiya*(sı) reqressiya funksiyasının.

XƏTTİ ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « линейно независимые случайные величины; linearly independent random variables » –

$$\mathbf{P}\{\omega: \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i(\omega) = 0\} = 1$$

bərabərliyinin yalnız bütün a_i-lər sıfra bərabər olduqda ödənilməsini təmin edən, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega)$ *təsadüfi kəmiyyətlərinə* deyilir. Əgər $\{\xi_n(\omega)\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının ixtiyari sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlər toplusu X. a. o. t. k. olarsa, bu ardıcıllıq *xətti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı* adlanır.

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

XƏTTİ ASILI OLMAYAN TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICILLIĞI « последовательность линейно независимых случайных величин; sequence of linearly independent random variables » – bax, *Xətti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər.*

XƏTTİ CƏBR stoxastik **« линейная алгебра** стохастическая; stochastic **linear algebra »** – bax, *Stoxastik xətti cəbr.*

XƏTTİ FİLTR « линейный фильтр; linear filter », xətti sistem – qiymətləri $L^2(\Omega)$ Hilbert fəzasından olan *stasionar təsadüfi* $\zeta(t) \in L^2(\Omega)$ *prosesinin* t parametrinin funksiyası kimi xətti çevirməsidir və aşağıdakı kimi təyin olunur:

Diskret zaman halında

$$Y(t) = A(\zeta(t)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a(t-s)\,\zeta(s)$$

və kəsilməz zaman halında

$$Y(t) = A(\zeta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-s)\zeta(s)ds,$$

burada $a(t)$ elə $(r \times k)$ – matrislərdir ki,

diskret zaman halında

$$\sum_{t_1,\, t_2} a(t_1) B(t_2 - t_1)\, a^{\mathsf{T}}(t_2) < \infty,$$

kəsilməz zaman halında isə

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)\, B(t_2 - t_1)\, a(t_2)\, dt_1\, dt_2 < \infty$$

şərtlərini ödəyirlər [r $Y(t)$ prosesinin dim. – ölçüsü, k $\zeta(t)$ – nin dim. – ölçüsüdür], $B(t)$ isə $\zeta(t)$ prosesinin matris korrelyasion funksiyasıdır. Kompleksqiymətli $a(t)$ funksiyası impulsal keçid funksiyası (zaman xarakteristikası, filtrin «səda» (təsirə cavab) funksiyası) adlanır, $\varphi(\lambda)$ filtrinin spektral (matris) xarakteristikası isə

$$\varphi(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, a(t) \qquad \text{(diskret zaman)}$$

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, a(t)\, dt \qquad \text{(kəsilməz zaman)}$$

münasibətləri ilə bağlıdır.

$\zeta(t)$ prosesinin

$$\zeta(t) = \int e^{it\lambda}\, \Phi(d\lambda)$$

spektral ifadəsindən istifadə edərək stasionar $Y(t)$ prosesini

$$Y(t) = \int e^{it\lambda}\, \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \qquad \varphi \in L^2$$

şəklində ifadə etmək olar. F_Y spektral ölçüsü (matris) $\zeta(t)$ prosesinin spektral ölçüsü F_ζ ilə $dF_Y(\lambda) = \varphi(\lambda)\, dF_\zeta(\lambda) \times$ $\times \varphi^{\mathsf{T}}(\lambda)$ münasibətilə bağlıdır. Bu ölçülər mütləq kəsilməz olduqları halda onların spektral sıxlıqları, analoji olaraq, uyğun münasibətlə ifadə olunur, $f_Y(\lambda) = \varphi(\lambda) f_\zeta(\lambda) \varphi^{\mathsf{T}}(\lambda)$. Xüsusi halda, əgər $\zeta(t)$, $Y(t)$ skalyar proseslər olarsa, onda $f_Y(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_\zeta(\lambda)$ olur, burada $|\varphi(\lambda)|$ – filtrin λ tezliyində gücləndirmə əmsalı, $\arg\varphi(\lambda)$ – filtrin fazası, $|\varphi(\lambda)|^2$ – gücün gücləndirilməsi əmsalı adlanır.

Əgər $a(t) = 0$, $t < 0$ olarsa, X. f. fiziki mümkün (baş verəbilən) adlanır. Əgər stasionar proses standart, qeyri – korrelyar,

$$\mathbf{M}\varepsilon(t) = 0, \quad \mathbf{M}|\varepsilon(t)|^2 = s, \quad \mathbf{M}\,\varepsilon(t)\,\varepsilon(s) = 0, \quad t \neq s$$

şərtlərilə verilən $\varepsilon(t)$ bəyaz küy ardıcıllığından

$$Y(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a\,(t-s)\,\varepsilon(s)$$

fiziki mümkün xətti çevirməsi vasitəsilə alınırsa, o, xətti requlyar stasionar proses adlanır. $Y(t)$-nin bu son ifadəsi Vold ayrılışı adlanır. Spektral ölçüsü F olan $Y(t)$ stasionar prosesi, yalnız və yalnız, o halda xətti requlyar prosesdir ki, F mütləq kəsilməz ölçü olsun və onun spektral sıxlığı

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, d\lambda > -\infty \qquad \text{(diskret zaman)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln f(\lambda)\,\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} > -\infty \quad \text{(kəsilməz zaman)}$$

şərtlərini ödəsin. $[0,\ p]$ parçasından kənarda sıfra bərabər, impulsal keçid funksiyası $a(t)$ olan X. f.-in $\varepsilon(t)$ prosesinə tətbiqi

$$\zeta(t) = \sum_{s=t}^{t+p} a(t-s)\,\zeta(s)$$

prosesinin alınması ilə nəticələnir və bu halda bu proses p tərtib sürüşən orta proses adlanır, onun spektral sıxlığı

$$f_\zeta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{p} a_k\, e^{-i\lambda k}\right|^2$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əgər $[0,\ q]$ parçasından kənarda sıfra bərabər, impulsal keçid funksiyası olan X. f.-in geniş mənada stasionar $Y(t)$ prosesinə tətbiqi $\varepsilon(t)$ bəyaz küyünün alınmasına səbəb olursa, onda belə $\zeta(t)$ prosesi q tərtib avtoreqressiv proses adlanır. Məs.,

$$\zeta(t) + b_1\zeta(t-1) + \ldots + b_q\zeta(t-q) = \sigma^2\varepsilon(t)$$

tənliyinin stasionar həlli belə proses o halda ola bilər ki, $Q(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_q z^q$ çoxhədlisinin bütün sıfırları vahid radiuslu dairədən kənarda yerləşsin və bu halda bu prosesin spektral sıxlığı

$$f_\zeta(\lambda) = \sigma^2 \Big/ 2\pi\left|Q(e^{-i\lambda})\right|^2$$

düsturu ilə ifadə olunur.

1-ci tərtib avtoreqressiv proses Markov prosesidir. Avtoreqressiv və sürüşən orta modellərinin kombinasiyası aşağıdakı tənliyə gətirir:

$$\zeta(t) + b_1\zeta(t-1) + \ldots + b_q\zeta(t-q) = \sum_{k=0}^{p} q_k\,\varepsilon(t-k).$$

Əgər $Q(z)$ çoxhədlisinin sıfırları vahid radiuslu dairədən kənarda yerləşərsə, onda sonuncu tənliyin stasionar həlli vardır, bu həll $(q,\ p)$ tərtib avtoreqressiv sürüşən orta qarışıq prosesi, qısa şəkildə $(q,\ p)$ tərtib ARSO – prosesi (rus. – АРСС proses) adlanır.

Praktikada siqnalların ədədi filtrasiyasında ARSO – prosesinin konkret əmsallarının seçilməsi hesabına alınan çoxsaylı X. f.-lərdən tez-tez istifadə olunur (bax, [4] – [8]). Məs.,

$$\zeta(t) = \Phi(t-1)\,\zeta(t-1) + \varepsilon_1(t-1),$$
$$Y(t) = H(t)\zeta(t) + \varepsilon_2(t)$$

tənlikləri ilə təyin olunan Kalman filtri beləsidir. Məsələ $Y(t)$-nin müşahidələri üzrə $\zeta(t)$ üçün ən yaxşı xətti statistik qiymətin alınmasından ibarətdir (bax, [7]).

Siqnalların ədədi xətti filtrasiyası ilə bağlı çoxsaylı texniki və digər tətbiqlər üçün bax, [9], [10].

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Королюк В. С., [и др.] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 3 изд., М., 1987; [3] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [4] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980; [5] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [6] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [7] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [8] Отнес Р., Эноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [9] Рабинер Л., Голд Б., Теория и применение цифровой обработки сигналов, пер. с англ., М., 1978; [10] Handbook of statistics, v. 5, Time series in the time domains, Amst. – [a. o.], 1985.

XƏTTİ FUNKSİYA, meylsiz statistik qiymət almaq üçün « **линейная функция,** допускающая несмещенную оценку; **estimable linear function** » –

$$y = \Phi\theta + \varepsilon,\ y\in\mathbb{R}^N,\ \varepsilon\in\mathbb{R}^N,\ \theta\in\mathbb{R}^p,$$
$$\mathbf{M}\varepsilon = 0,\ \operatorname{cov}\varepsilon = \sigma^2 I$$

xətti reqression eksperimentinin naməlum parametrinin xətti forması $l^{\mathrm{T}}\theta$-dır ki, onun $a^{\mathrm{T}}y$ forması vardır, $\mathbf{M}a^{\mathrm{T}}y = l^{\mathrm{T}}\theta$. Əgər Φ reqression eksperimentin matrisi maksimal $p \geq N$ ranqına malikdirsə, onda bütün $l^{\mathrm{T}}\theta$ formaları belədir (qiymətləndirilən). $l^{\mathrm{T}}\theta$ qiymətləndirilə bilinəndir və $\Phi l = 0$ şərtləri ekvivalentdirlər. Əgər $l^{\mathrm{T}}\theta$ qiymətləndirilə bilinəndirsə və $\hat{\theta}$ $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\hat{\theta} = \Phi^{\mathrm{T}}y$ normal tənliklər sisteminin ixtiyari həllidirsə, onda $\mathbf{M}l^{\mathrm{T}}\hat{\theta}^{\mathrm{T}} = l^{\mathrm{T}}\theta$, $\mathbf{D}l^{\mathrm{T}}\hat{\theta} = \sigma^2 l^{\mathrm{T}}(\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-}l$ meylsiz statistik qiymətlər arasında minimalıdır. Burada A^{-}, – A-nın ixtiyari g – tərsidir, yəni $AA^{-}A = A$ şərtini ödəyir. Məs., $y_j = \theta_0 + \theta_1 + \varepsilon_j,\ j = 1,\ \ldots,\ N$ olduqda və $y_j = \theta_0 + \theta_2 + \varepsilon_j,\ j = n+1,\ \ldots,\ 2n$ olduqda münasibətlərilə verilən birfaktorlu model üçün $l_1\theta_1 + l_2\theta_2$ formasının qiymətləndirilməsi mümkünlüyü $l_1 + l_2 = 0$ bərabərliyinə ekvivalentdir (belə forma kontrast adlandırılır).

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Себер Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

XƏTTİ HİPOTEZ « линейная гипотеза; linear hypothesis » – riyazi statistikada istifadə olunan *statistik hipotezdir*: bu hipotezə görə n – ölçülü $N_n(a, \sigma^2 I)$ normal qanununun (I vahidi matrisdir) $s < n$ dim. – ölçülü $\Pi^s \subset R^n$ xətti altfəzasında yerləşən riyazi gözləməsi a $r \leq s$ dim. – ölçülü $\Pi^r \subset \Pi^s$ xətti altfəzasındandır.

Riyazi statistikanın bir çox məsələlərinə kanonik şəkildə ifadə olunan X. h.-in yoxlanılması məsələsi kimi baxmaq olur. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ komponentləri asılı olmayan, normal qanunla paylanmış təsadüfi vektor, $\mathbf{M}\xi_i = a_i,\ i = 1,\ \ldots,\ s,\ \mathbf{M}\xi_i = 0,$ əgər $i = s+1, \ldots, n$ olarsa və $\mathbf{D}\xi_i = \sigma^2,\ i = 1,\ \ldots,\ n$ olsun. $a_1, \ldots, a_s,\ \sigma^2$ naməlum parametrlərdir. Onda $a_1 = \ldots = a_r = 0$,

$r < s < n$ olması haqqında irəli sürülən H_0 hipotezi kanonik xətti hipotezdir.

Misal. $\eta_1, ..., \eta_n$ və $\xi_1, ..., \xi_m$, – $n+m$ sayda asılı olmayan uyğun olaraq, $N_1(a, \sigma^2)$ və $N_2(b, \sigma^2)$ normal qanunları ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun, a, b, σ^2 naməlum parametrlərdir. Onda $H_0 : a = b = 0$ hipotezi X. h.-dir, lakin $a_0 \neq b_0$ olduqda $a = a_0$, $b = b_0$ hipotezi X. h. deyildir.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

XƏTTİ İFADƏ OLUNABİLƏN TƏSADÜFİ PROSES « линейно представимый случайный процесс; linear filter of a random process » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

XƏTTİ İNTERPOLYASİYA(sı) reqressiya funksiyasının **« линейная интерполяция;** функции регрессии; **linear interpolation** of a regression function **»** – hər hansı təsadüfi vektorun qiymətinin xətti proqnozunu qurmaq üçün müşahidə olunan təsadüfi vektorun xətti çevirməsinin nəticəsidir. X. i. reqressiya funksiyasının xətti approksimasiyası da adlanır.

$\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^{\mathsf{T}}$ təsadüfi vektorunun $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^{\mathsf{T}}$ təsadüfi vektoruna reqressiyası $\mathbf{M}(Y \mid X)$-in $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))^{\mathsf{T}}$ funksiyası, $x = (x_1, ..., x_m)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^m$ vasitəsilə verildiyi fərz olunur, yəni Y-in X-ə reqressiyası tənliyi

$$\mathbf{M}(Y \mid X) = f(X)$$

şəklindədir.

$\hat{Y} = f(X)$ statistikasına $f(x)$ reqressiya funksiyasının köməyilə X təsadüfi vektorunun müşahidə olunmuş qiyməti üzrə Y təsadüfi vektorunun qiymətinin reqression proqnozu deyilir. Əgər reqressiya funksiyası $f(x)$ çox mürəkkəb olarsa, Y təsadüfi vektorunun qiymətini proqnozlamaq üçün $\hat{Y} = BX$ xətti çevirməsinin nəticəsi kimi təyin olunan, X vektoru üzrə $\hat{Y}$-in xətti proqnozunu qurmaq olur, burada B, – $(m \times n)$ – dim. – ölçülü bütün düzbucaqlı matrislər çoxluğu $\mathfrak{M}$-dən ixtiyari matrisdir. $\delta = Y - \hat{Y} = Y - BX$ fərqi X vektoru üzrə xətti B çəkili proqnoz xətası adlanır. Xətti proqnozun keyfiyyəti onun ixtiyari $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ üçün

$$z^{\mathsf{T}}\mathbf{M}(\delta\delta^{\mathsf{T}})z = z^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\{(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y})^{\mathsf{T}}\}z$$

düsturu ilə hesablanan kvadratik riski ilə təyin olunur. Y-in xətti proqnozu kimi elə $\overline{Y}$ xətti proqnozunu seçmək lazımdır ki, onun kvadratik riski minimal olsun, yəni onun üçün

$$z^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\{(Y - \overline{Y})(Y - \overline{Y})^{\mathsf{T}}\}z \leq z^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\{(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y})^{\mathsf{T}}\}z$$

bərabərsizliyi ixtiyari $z \in \mathbb{R}^n$ üçün ödənilsin. Göstərmək olur ki, $B = A$ olduqda $\overline{Y} = BX$ xətti proqnozu minimal kvadratik riskə malikdir, bu halda reqression əmsallar matrisi A $A\mathbf{M}(XX^{\mathsf{T}}) = \mathbf{M}(YX^{\mathsf{T}})$ tənliyindən təyin olunur, $A \in \mathfrak{M}$. $D = \mathbf{M}(XX^{\mathsf{T}})$ dispersion matrisi cırlaşmayan olduğu halda, reqression əmsalların ən yaxşı (kvadratik riskin minimumu mənada) proqnoz matrisi $A = \mathbf{M}(YX)^{\mathsf{T}}D^{-1}$ düsturu ilə verilir. Beləliklə, ən yaxşı xətti proqnoz elə reqression əmsallar matrisi ilə təyin olunur ki, onun vasitəsilə, reqressiya xətti olduğu halda, reqressiya tənliyi yazılır. Bu mənada AX ifadəsi reqressiya funksiyası $f(X) = \mathbf{M}(Y \mid X)$-in xətti approksimasiyası kimi anlaşılır. $f(X)$ reqressiya funksiyasının belə X. i. nəticəsində $\overline{Y} = AX$ proqnozu aşağıdakı xassələrə malik olur: 1) $\mathbf{M}\delta = 0$ (n – dim. – ölçülü sıfır vektor); 2) $\mathbf{M}(\delta X)^{\mathsf{T}} = 0$ ($\mathfrak{M}$-dən sıfır matris). İxtiyari reqressiya halında Y vektorunu X. i. vasitəsilə $Y = AX + \delta$ cəmi şəklində ifadə etmək olar, AX proqnozu isə δ ilə korrelyar deyildir və $\mathbf{M}\delta = 0$.

Bax, *Reqression analiz*, *Xətti reqressiya*, *Reqressiya tənliyi*, *Reqressiya.*

XƏTTİ KOD « линейный код; linear code » – bax, *Blok kod*.

XƏTTİ KORRELYASİYA « линейная корреляция; linear correlation » – X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında elə *korrelyasion asılılıqdır* ki, $\eta_{Y|X}$ və $\eta_{X|Y}$ *korrelyasion münasibətləri* korrelyasiya əmsalının mütləq qiymətinə, yəni $|\rho|$-ya bərabərdir, yəni reqressiya əyrisi düzxətdir. Bir neçə təsadüfi kəmiyyət arasında X. k. reqressiya səthi müstəvi olduğu halda analoji təyin olunur.

XƏTTİ KRİTERİ « линейный критерий; linear test » – *reqression eksperimentlərin planlaşdırılmasının* əsas kriterilərindən biridir.

XƏTTİ RANQ STATİSTİKASI « линейная ранговая статистика; linear rank statistic » – bax, *Ranq statistikası*.

XƏTTİ REQRESSİON EKSPERİMENT « линейный регрессионный эксперимент; linear regression experiment » – bax, *Reqression eksperiment*.

XƏTTİ REQRESSİYA « линейная регрессия; linear regression » – reqressiya funksiyası xətti olan parabolik reqressiyanın xüsusi halıdır. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^{\mathsf{T}}$ və $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^{\mathsf{T}}$ təsadüfi vektorlar olsun. Əgər reqressiya funksiyası $f(X) = \mathbf{M}(Y \mid \overline{X})$, – $f(X) = a + AX$ şəklində ifadə olunarsa, Y-in X-ə reqressiyası xətti reqressiya adlanır, burada $a = \mathbf{M}\,Y - A\,\mathbf{M}\,X$, $A = \|a_{ij}\|$, – $(n \times m)$ – dim. – ölçülü reqression matrisdir. Əgər $\mathbf{M}X$ və $\mathbf{M}Y$ uyğun olaraq, m və n dim. – ölçülü sıfır vektorlar olarsa, onda Y-in X-ə X. r.-sı halında reqresiya funksiyası $f(X)$ olduqca sadə şəkildə olur: $f(X) = AX$. Ümumiliyi pozmadan hesab etmək olar ki, X. r. tənliyi həmişə

$$\mathbf{M}(Y \mid X) = AX \qquad (1)$$

şəklində olur, belə ki, əgər $\mathbf{M}(Y \mid A) = a + AX$ olarsa,

$$Z = (1,\ X_1,..., X_m)^{\mathsf{T}},\quad B = \|a : A\|$$

olduğunu fərz edərək,

$$\mathbf{M}(Y \mid X) = \mathbf{M}(Y \mid Z) = BZ \qquad (2)$$

tənliyini ((2) şəklində) almaq olur. (burada B matrisi A matrisinə soldan a sütununun əlavə olunması nəticəsində alınır). (1)-in ödənilməsini fərz etmək, $\mathbf{M}X = O_m$ və $\mathbf{M}Y = O_n$ olduğunu fərz etməyə eynigüclüdür, burada $O_k = \underbrace{(o,..., o)}_{k \text{ sayda}}$. Daha sonra, əgər Y-in X-ə reqressiyası xətti olarsa, onda ümumi halda olduğu kimi Y təsadüfi vektorunun qiymətinin reqression proqnozu $\hat{Y}$, – $\hat{Y} = AX$ düsturu ilə ifadə olunur və bu pronozun xətası $\delta = Y - \hat{Y}$ aşağıdakı xassələrə malikdir: 1) $\mathbf{M}(\delta \mid X) = \mathbf{M}\delta = O_n$; 2) $\mathbf{M}(X\delta^{\mathsf{T}} \mid X) = \mathbf{M}(X\delta^{\mathsf{T}}) = O_{m\times n}$, burada $O_{m\times n}$ – bütün elementləri sıfra bərabər olan $m\times n$ tərtib düzbucaqlı matrisdir (bu isə onu ifadə edir ki, proqnozlanacaq $Y = \hat{Y} + \delta$ vektoru riyazi gözləmələri sıfra bərabər olan iki qeyri – korrelyar vektorun cəmi kimi ifadə olunur).

Reqression A matrisinin ehtimali mənasını A-nın ödədiyi $A\,\mathbf{M}(X X^{\mathsf{T}}) = \mathbf{M}(Y X^{\mathsf{T}})$ tənliyi açıqlayır. Əgər X təsadüfi vektorunun dispersion matrisi $D = \mathbf{M}(X X^{\mathsf{T}})$ cırlaşmayan olarsa, onda A reqression martisi $A = \mathbf{M}(Y X^{\mathsf{T}})D^{-1}$ düsturu ilə verilir.

X. r. – X vektorunun müşahidə olunmuş qiyməti üzrə müşahidə olunmayan Y təsadüfi vektorunun qiymətinin ən sadə proqnozunun qurulması üçün praktikada tez-tez tətbiq olunan modeldir.

Bax, həm də *Reqressiya tənliyi*, *Reqressiya*, *Xətti interpolyasiya*(sı) reqressiya funksiyasının.

XƏTTİ REQULYAR STASİONAR PROSES « линейно регулярный стационарный процесс; linear regular stationary process » – bax, *Xətti filtr*.

XƏTTİ SİSTEM « линейная система; linear system » – bax, *Xətti filtr*.

XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT « линейная оценка; linear estimator » – müşahidə olunan *təsadüfi kəmiyyətlərin* xətti funksiyasıdır, bu funksiyadan analiz olunan stoxastik sxemin naməlum parametrinin təqribi statistik qiyməti kimi (bu funksiyada müşahidə olunan kəmiyyətlərin konkret qiymətləri əvəz olunduqdan sonra) istifadə olunur. X. s. q.-lər sinfi «kompyuter erasına» qədər bu sinfə məxsus statistik qiymətlərin hesablanılması sadəliyinə görə, parametrlərdən asılı statistik qiymətlər ailəsinin təyin olunması və sonradan da bu ailədən olan ən məqbul statistik qiymətin seçilməsinə görə mühüm rola malik olmuşdur. Digər tərəfdən, X. s. q.-lər üçün, xüsusilə də, tutarlılıq, meylsizlik, effektivlik xassələrinin, uyğun etibarlı intervalların qurulması və s.-nin araşdırmaları, sadələklə statistik analiz olunur. Eyni zamanda, kifayət qədər geniş çərçivədə «ən məqbul» (müəyyən mənada) statistik qiymət axtarışı X. s. q.-lər sinfindən olmayan statistik qiymətlərin tapılması ilə nəticələnmir. Məs., $Y = X\Theta + \varepsilon$ reqression modelinin statistik analizi nəticəsində Θ parametri üçün statistik qiymətlərdən «ən məqbul» (ən kiçik kvadratlar metodu anlamında) olanı $\hat{\Theta} = (X'X)^{-1}X'Y$ statistik qiymətidir və o, araşdırılan Y təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş qiymətlərinə görə xəttidir. Burada Y – araşdırılan, nəticələndirən təsadüfi kəmiyyətin müşahidə olunmuş y_i, $i = 1, ..., n$ qiymətlərinin n – ölçülü sütun – vektorudur; X, – $n\times p$ – ölçülü (ranqı p-yə bərabər) x_i^k, $i = 1,..., n$, $k = 1, ..., p$ müşahidə olunan qiymətlərindən ibarət elə matrisdir ki, nəticələndirən Y təsadüfi kəmiyyəti p sayda təsadüfi olmayan faktor – arqumentlərdən asılıdır. θ naməlum Q_k parametrlərinin p – ölçülü sütun – vektoru, $k = 1,..., p$ və ε $\mathbf{M}\varepsilon = 0$, $\mathbf{M}(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$ (I vahidi matrisdir) şərtlərini ödəyən qalıq komponentlərin n – ölçülü sütun vektorudur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Р а о С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT ən kiçik dispersiyalı **« линейная оценка** с наименьшей дисперсией; **linear** minimum variance **estimator »** – xətti reqression $R(Y, \Phi_\beta, \sigma^2 w)$ eksperimentinin parametrlərinin xətti forması $l^{\mathsf{T}}\theta$-nın *meylsiz statistik qiymətidir*; baxılan eksperiment üçün müşahidələrin kovariasiya matrisi w müsbət müəyyən matrisdir (bu X. s. q. ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymət də adlanır). Ən kiçik dispersiyalı X. s. q. $\Phi l = 0$ olduqda mövcuddur və bu halda $l^{\mathsf{T}}\hat{\theta}$-nın ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinə bərabərdir, burada $\hat{\theta}$, – $\Phi^{\mathsf{T}}w^{-1}\Phi = \Phi^{\mathsf{T}}w^{-1}Y$ normal tənliklər sisteminin həllidir.

XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT məqbul **« линейная оценка** допустимая; admissible **linear estimator »** – bax, *Məqbul statistik qiymət* xətti.

XƏTTİ STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK « линейное стохастическое дифференциальное уравнение; linear stochastic differential equation » – bax, *Stoxastik differensial tənlik*.

XƏTTİ STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin dayanıqlılığı « линейное стохастическое дифференциальное уравнение; устойчивость решений; **linear stochastic differential equation;** stability of solutions **»** – $t \to \infty$ olduqda *stoxastik differensial tənliyin* həllinin sıfra yaxınlaşma şərtidir.

$\mathbb{R}^n$-də İto X. s. d. t. üçün, yəni

$$dX(t) = B(t)X(t)dt + \sum_{r=1}^{k}\sigma_r(t)X(t)dw_r(t) \qquad (*)$$

şəklində tənlik üçün dayanıqlılığın determinə olunmuş nəzəriyyəsinin bir çox teoremlərinin analoqları doğrudur, burada B və σ_r, – $n\times n$ ölçülü matrislər, $X(t)$, – $\mathbb{R}^n$-də vektor – sütun, $w_r(t)$ – asılı olmayan standart Viner prosesləridir. Əvvəla, məlumdur ki, (*) tənliyinin həllərinin momentləri adi differensial tənliklər sistemini ödəyir. Buna görə də, p cüt olduğu halda X. s. d. t.-in p – dayanıqlılığı məsələsi determinə olunmuş

sistemin dayanıqlılığına gətirilir. Daha sonra, (*) tənliyinin eksponensial p – dayanıqlılığı üçün zəruri (əmsallar üzərinə minimal şərtlərlə) və kafidir ki, x -ə görə bircins p tərtib elə $V(t,\ x)$ funksiyası olsun ki, bu funksiya üçün bəzi $k_i > 0$ qiymətlərində

$$k_1 |x|^p \le V(t,\ x) \le k_2 |x|^p ; \quad LV(t,\ x) \le -k_3 |x|^p ;$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \le k_4 |x|^{p-1} ; \quad \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right| \le k_4 |x|^{p-2}$$

şərtləri ödənilsin [L – (*) prosesinin doğuran differensial operatorudur].

t -dən asılı olmayan əmsallarlı (*) tənliyi üçün isbat olunmuşdur ki, ehtimala görə dayanıqlılıqdan olduqca kiçik $p > 0$ -lər üçün p – dayanıqlılıq alınır. Bu nəticə t üzrə tamamilə bircins olmayan müntəzəm dayanıqlı tənliklər üçün isbat olunmuşdur.

X. s. d. t.-lər üçün ehtimala görə dayanıqlılıq problemi $\mathbb{R}^n$ -də $|x| = 1$ kürəsində köməkçi diffuzion prosesin invariant ölçüsü üzrə hər hansı funksiyanın inteqralının işarəsinin araşdırılmasına gətirilir. $n = 2$ olduğu halda bu tənliyin əmsalları terminlərində ehtimala görə dayanıqlılıq üçün zəruri və kafi şərtləri almağa imkan verir (bax, [4]). Əmsalları bəyaz küylərlə kükrəntilənən n – tərtib tənliklər üçün Raus – Qurvitsin kvadratik orta dayanıqlılıq kriterisinin analoqu məlumdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, M., 1969.

XƏTTİ STOXASTİK PARABOLİK TƏNLİK ikinci tərtib **« линейное стохастическое параболическое уравнение** второго порядка; **linear stochastic differential parabolic equation** of second order **»** – ikinci tərtib xüsusi törəməli xətti *stoxastik differensial tənlikdir*, dissipativlik xassəsinə malik hər hansı stoxastik evolyusion tənliyə ekvivalentdir. İkinci tərtib X. s. p. t.-yə misal, məs., normalanmamış filtrasion sıxlıq üçün tənlik – *Liuvill stoxastik differensial tənliyidir*.

$$du(t,\ x) = \left[\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,\ x)\, u_{x_i x_j}(t,\ x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,\ x)\, u_{x_i}(t,\ x) + c(t,\ x)\, u(t,\ x) \right] dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{d} \sigma_{il}(t,\ x)\, u_{x_i}(t,\ x) + h_l(t,\ x)\, u(t,\ x) \right] dw_l(t)$$

stoxastik tənliyi üçün paraboliklik

$$\left\| a_{ij} - (1/2) \sum_{l} \sigma_{il} \sigma_{jl} \right\|$$

matrisinin müsbət müəyyən olması xassəsinə ekvivalentdir, burada $w(t)$ – Viner prosesi, tənlikdəki əmsallar ölçülən məhdud funksiyalardır.

XƏTTİ TƏNLİK; Monte–Karlo metodu ilə həll **« линейное уравнение;** решение методом Монте–Карло; **linear equation;** Monte–Carlo solution of **»** – xətti tənliyin həllinin verilmiş funksionallarının statistik qiymətləri olan (meylsiz, asimptotik meylsiz) X_i, $i = 1,\ 2,...,\ m$ *təsadüfi kəmiyyətlərinin* ədədi modelləşdirilməsidir.

$$\varphi = K\varphi + f$$

şəklində tənliklərin həlli alqoritmləri daha çox yayılmışdır və riyazi fizikanın, iqtisadiyyatın və b. bir çox məsələlərində bunlardan istifadə olunur; K inteqral operatorudur. X_i statistik qiymətlərinin qurulması:

1) $\varphi^n = K\varphi^n + f$ – ardıcıl yaxınlaşmalarının bircins Markov zənciri ilə modifikasiyasının əlaqəsinə; X_i Markov zənciri trayektoriyalarının funksionallarıdır – *Neyman – Ulam sxemi* və onun ümumiləşmələri;

2) xüsusi törəməli tənliklərlə stoxastik differensial tənliklər arasında əlaqəyə;

3) xətti tənliklə təsvir olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bilavasitə ədədi simulyasiyasına əsaslanır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, M., 1975; [2] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения уравнений математической физики, M., 1984.

XƏTTİVARİ MARKOV PROSESİ « линейчатый марковский процесс; Markov line-wise process » – ikikomponentli $\zeta(t) = \{X(t),\ Y(t)\}$ *Markov prosesidir*, burada $X(t) = t - t_k$ birinci tip sıçrayış anı t_k -dan ($t_k \le t < t_{k+1}$) sonra keçən müddətə uyğun komponent, $Y(t)$ isə hər bir $(t_k,\ t_{k+1})$ intervalında vəziyyətləri çoxluğu $\mathscr{E} = \{i\}$ olan diskret bircins Markov prosesinə uyğun komponentdir. t_k anlarında ikinci komponentlərin dəyişiklikləri $\zeta(t_{k+1} - 0) = (y,\ i)$ vəziyyətindən $(0,\ j)$ vəziyyətinə keçid ehtimalları P_{ij} -lərlə təyin olunur. X. M. p.-ləri sinfi *semi – Markov prosesləri* sinfinin təbii ümumiləşməsidir. İlk ötüm anının paylanması üçün stasionar ehtimalların hesablanması semi – Markov prosesləri üçün analoji xarakteristikaların hesablanmasından çətin deyildir. X. M. p. bəzi xidmət sistemlərinin və bərpalanabilinən elementlərli sistemlərin evolyusiyasını təsvir edir.

Əd.: [1] Беляев Ю. К., Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, в кн.: Тр. VI Всесоюзн. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, Вильнюс, 1962, с. 309–23.

Xİ – DAĞILMA « хи – расходимость; chi – divergence » – bax, *İnformasion ölçü*.

Xİ – KVADRAT KRİTERİ « хи – квадрат критерий; chi – square test », χ^2 – kriteri – *statistik kriteridir*, $H_0 : \nu = (\nu_1,...,\nu_k)$ – tezliklərin təsadüfi vektoru *polinomial paylanma* qanunu ilə paylanmışdır, – hipotezinin yoxlanılması üçün K. Pirson tərəfindən təklif olunmuşdur (K. Pearson, 1903).

n sayda asılı olmayan sınaqlar aparılır; hər bir sınaqda birbirilə uyuşmayan k sayda $E_1,...,E_k$ nəticələrindən, yalnız və yalnız, biri baş verə bilər ($i \ne j$ olduqda $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i,\ j = \overline{1,\ k}$). ν_i, – E_i nəticəsinin müşahidə olunduğu sınaqların

sayı olsun, $i=\overline{1,k}$. Bu halda ν_i tezlikləri mənfi olmayan n_i qiymətlərini alır və $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,...,\nu_k)$ vektoru polinomial paylanma qanununa tabedir, yəni

$$\mathbf{P}\{\nu_1=n_1,...,\nu_k=n_k\}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,...\,n_k!}\;p_1^{n_1}\,p_2^{n_2}\,...\,p_k^{n_k},$$

$$p_i=\mathbf{P}(E_i),\quad i=\overline{1,k}.$$

p_i ehtimalları və ν_i tezlikləri aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$$p_1+...+p_k=1,\ \nu_1+...+\nu_k=n,\ k<n,\ \mathbf{M}\nu_i=np_i,$$

$$\mathbf{D}\nu_i=np_i(1-p_i),\quad \operatorname*{cov}_{i\neq j}(\nu_i,\nu_j)=np_ip_j.$$

np_i hasili ν_i tezliklərinin o r t a və ya g ö z l ə n i l ə n qiymətləri adlanır. Əgər p_i ehtimalları məlum olmazsa və bu ehtimalların $p_1=p_1^{(0)},...,p_k=p_k^{(0)}$ ($p_i^{(0)}>0$, $\sum_{i=1}^{k}p_i^{(0)}=1$ şərtlərində) verilmiş qiymətləri alması hipotezi H_0 irəli sürülürsə, onda riyazi statistikada eksperiment nəticəsində ν_t üçün alınmış qiymətlərlə bu hipotezin uzlaşdığını yoxlamaq məqsədilə statistikası

$$X^2=\sum_{i=1}^{k}(\nu_i-np_i^{(0)})^2/np_i^{(0)}=-n+\sum_{i=1}^{k}\nu_i^2/np_i^{(0)}$$

düsturu ilə verilən kriteridən istifadə etmək məqsədəuyğundur. H_0 hipotezinin yoxlanılması proseduru X^2 statistikasının eksperimental qiymətinin x kritik qiyməti ilə müəyyən bir qaydaya əsasən müqayisəsindən ibarətdir: əgər $X^2\geq x$ olarsa, onda yoxlanılan H_0 hipotezi qəbul olunmur, əgər $X^2<x$ olarsa, onda müşahidələrin nəticələrinin H_0 hipotezi ilə uzlaşmış olduğu qəbul olunur. x-in qiyməti elə seçilir ki, H_0 hipotezi doğru olduğu halda, onun qəbul olunması ehtimalı verilmiş mühümlük ölçüsü α-nı ($0<\alpha<0{,}5$) aşmasın. Bundan əlavə, müəyyənlik üçün bir çox hallarda x-in diskret X^2 statistikasının

$$\mathbf{P}\{X^2\geq x\,|\,H_0\}\leq\alpha \qquad (*)$$

bərabərsizliyini ödəyən ən kiçik mümkün qiyməti olduğu hesab olunur. Verilmiş α-ya görə x-i hesablamaq üçün X^2 statistikasının dəqiq paylanmasından olduqca nadir hallarda istifadə olunur (bir qayda olaraq, yalnız k və n-in kiçik qiymətlərində), belə ki, bu paylanma çox mürəkkəb şəkildə ifadə olunur. Adətən, x x-in təqribi qiymətilə əvəz olunur; bu qiymət (*) bərabərsizliyinə analoji olan, sol tərəfi münasib təqribi ifadə ilə əvəzləmədən sonra alınmış bərabərsizliyin həllindən alınmış nəticə ilə təyin edilir. Belə approksimasiyalar P i r s o n t e o r e m i n ə əsaslanır: əgər $n\to\infty$ olduqda bütün gözlənilən $np_i^{(0)}$ tezlikləri sonsuzluğa yaxınlaşırsa, onda n, k və $p_i^{(0)}$ kəmiyyətlərinin dəyişməsindən asılı olmayaraq,

$$\sup_{|x|<\infty}\left|\mathbf{P}\{X^2\geq x\,|\,H_0\}-\mathbf{P}_{k-1}(x)\right|\underset{n\to\infty}{\to}\infty\ ;$$

burada

$$\mathbf{P}_{k-1}(x)=\mathbf{P}\{\chi^2_{k-1}\geq x\}=$$

$$=\frac{1}{2^{(k-1)/2}\Gamma((k-1)/2)}\int_x^{\infty}z^{k-2}e^{-z/2}\,dz$$

sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$-ə bərabər *xi – kvadrat paylanmanın* ehtimal inteqralıdır (bax, [23]).

[11]-ə əsasən, əgər $\min_i np_i^{(0)}\geq 5$ olarsa, xi – kvadrat approksimasiyasından istifadə etmək olar.

Ümumiyyətlə isə, bu teorem mühüm bir halı əhatə edir: sınaqların sayı n artdıqca $E_1,...,E_k$ hadisələrinin sayı k da artır, lakin sıfırdan fərqli $p_i^{(0)}=p_{in}^{(0)}$ ehtimalları n-dən asılıdır və $n\to\infty$ olduqda $k\to\infty$ olarsa, bu ehtimallar 0-a yaxınlaşa bilər. Lakin bununla belə $\min_i np_{in}^{(0)}\to\infty$ şərti ödənilərsə, onda [2]-də göstərildiyi kimi bu halda X^2 statistikasının limit paylanmasının normal approksimasiyası mümkündür və bu approksimasiyaya əsasən

$$\sup_{|x|<\infty}\left|\Phi\left(\frac{x-k+1}{\sqrt{2(k-1)}}\right)-\mathbf{P}\{X^2<x\,|\,H_0\}\right|\underset{k\to\infty}{\to}0,\ k\to\infty;$$

burada $\Phi(\cdot)$ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır. Əgər $k>30$, $\min_i np_{in}^{(0)}\geq 5$ olarsa, bu approksimasiyadan istifadə etmək məsləhətdir.

$\min_i np_{in}^{(0)}\to\infty$ şərti ödənilmədiyi halda X. - k. k.-nin tətbiq sahəsini U. Kokran [11]-də və C. Yarnold [10]-da olduqca genişləndirmişlər. Məhz $k>3$ olan sabit k üçün və n-in qeyri – məhdud artması ilə sıfırdan fərqli $p_{in}^{(0)}$ ehtimalları elə dəyişir ki, $i=1,2,...,r$ qiymətlərində $np_{in}^{(0)}\to m_i$, $i=r+1,r+2,...,k$ qiymətlərində $np_{in}^{(0)}\to\infty$ olur; $m_1,m_2,...,m_r$ – müsbət ədədlərdir (bu belə anlaşılır ki, $i=1,2,...,r$ qiymətlərində $n\to\infty$ olduqda $p_{in}^{(0)}\to 0$ olur). Onda $H: p_i=p_{in}^{(0)}$ hipotezi limitdə doğru olduğu halda X^2 statistikası $n\to\infty$ olduqda

$$\sum_{i=1}^{r}(U_i-m_i)^2/m_i+\chi^2_{k-r-1}$$

təsadüfi kəmiyyəti kimi paylanır, burada U_i, – m_i parametrli Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir, $U_1,...,U_r$, χ^2_{k-r-1} stoxastik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. X^2 – statistikasının limit yaxınlaşmasının bu approksimasiyasından $5r/k\leq\min_i np_{in}^{(0)}<5$ və gözlənilən $np_{in}^{(0)}$ qiymətlərinin sayı i 5-dən kiçik olan r ədədinə bərabər olduğu halda istifadə olunur.

Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyası $F(x, \theta)$-in $(|x| < \infty)$ kəsilməz funksiyalar ailəsi $\{F(x; \boldsymbol{\theta})\}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)^{\mathsf{T}} \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ ailəsindən olması haqqında mürəkkəb H_0 hipotezini yoxlamaq məqsədilə analoji surətdə qurulmuş X. - k. k. tipli kriteridən istifadə olunur. Bu halda həqiqi ox $x_0 < x_1 < ... < x_k$, ($x_0 = -\infty$, $x_k = +\infty$) nöqtələrilə k sayda ($k > m$) elə $(x_0, x_1], ..., (x_{k-1}, x_k]$ yarımintervallarına bölünür ki, ixtiyari $i = 1, 2, ..., k$ qiyməti üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$p_i(\theta) = \mathbf{P}\{X_1 \in (x_{i-1}, x_i] \,|\, H_0\} > 0,$$

$p_1(\theta) + p_2(\theta) + ... + p_k(\theta) = 1$ olsun və sonra bu yarımintervallar üzrə $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərini qruplaşdırmadan alınan $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_k)$ tezliklər vektoru müşahidə olunur. Tezliklər vektoru ν üzrə Pirson kvadratik forması –

$$X^2(\theta) = \sum_{i=1}^{k} [\nu_i - n p_i(\theta)]^2 / n p_i(\theta)$$

qurulur. H_0 hipotezini yoxlamaq üçün $X^2(\tilde{\theta}_n)$ statistikasından istifadə olunur, burada $\tilde{\theta}_n$ naməlum θ parametrinin xi – kvadrat minimumu metodu ilə hesablanmış statistik qiymətdir, yəni

$$X^2(\tilde{\theta}_n) = \min_{\theta \in \Theta} X^2(\theta).$$

Əgər qruplama intervalları elə seçilmişlərsə ki, bütün p_i-lər sıfırdan fərqlidir ($p_i(\theta) > 0$), $\partial^2 p_i(\theta) / \partial \theta_u \, \partial \theta_v$ funksiyaları isə θ-ya görə kəsilməzdir ($i = 1, 2, ..., k$; $u, v = 1, 2, ..., m$) və $\| \partial p_i(\theta) / \partial \theta_u \|$ matrisinin ranqı m-ə bərabərdir, onda [19]-da Fişerin göstərdiyinə əsasən H_0 hipotezi doğru seçilmişsə, $X^2(\tilde{\theta}_n)$ statistikası $n \to \infty$ olduqda sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k - m - 1)$ olan xi – kvadrat paylanması ilə paylanır və bununla da, X. - k. k. üzrə H_0 hipotezi yoxlanılır (bax, [1], [6], [8], [14], [17], [23]).

Əgər $X^2(\theta)$ statistikasında qruplaşma aparılmayan $X_1, X_2, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üzrə maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə hesablanmış $\hat{\theta}_n$ statistik qiyməti yerinə qoyularsa [yəni $\hat{\theta}_n$, – $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \theta)$, $f(x; \theta) = \frac{\partial}{\partial x} F(x; \theta)$ doğruyaoxşarlıq funksiyasının maksimum nöqtəsidir], onda H_0 hipotezi doğru olduğu halda, $X^2(\hat{\theta}_n)$ statistikası $n \to \infty$ olduqda limitdə

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_{k-m-1}^2 + \mu_1 \xi_{k-m}^2 + ... + \mu_m \xi_{k-1}^2$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə eyni olur (bax, [18]),

burada $\xi_1, ..., \xi_{k-1}$ $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = 1$ parametrli normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\mu_1, ..., \mu_m$ isə 0 və 1 arasında yerləşən və ümumiyyətlə də, naməlum parametrdən asılı ədədlərdir (bax, [18]). E. Leman və Q. Çernovun aldıqları bu nəticədən (bax, [18]) belə qənaətə gəlmək olur ki, mürəkkəb parametrik hipotezi yoxlama məsələsinə X. - k. k.-nin tətbiqində maksimal doğruyaoxşarlıq metodunun köməyilə hesablanan statistik qiymətlərdən istifadə edilməsi qeyri – standart (ümumi halda, naməlum parametrdən asılı olan) limit paylanmasının hesablanması ilə bağlı olan çətinliklər yaradır. Məhz R. Fişer [19], E. Leman və Q. Çernovun [18]-də aldıqları nəticələrdən aydın oldu ki, Pirson standart statistikasının limit paylanması dayanıqlı deyildir, naməlum parametrlərin qiymətləndirilmə metodlarından asılıdır və buna görə də, mürəkkəb parametrik hipotezləri yoxlamaq üçün xi – kvadrat tipli ümumiləşmiş kriterilər adlanan kriterilərin qurulması məsələsi qarşıya çıxdı. Bu kriterilərin statistikaları Pirson standart statistikasının özünəməxsus modifikasiyalarıdır ki, bunların limit paylanmaları xi – kvadrat paylanmaları sinfindəndir. Bu tipli kriterilər [3]-də: məs., normallığı, həmçinin yerinidəyişmə və miqyas parametrli ixtiyari kəsilməz paylanmaları yoxlamaq üçün; [13] və [16]-da seçmələrin bircinsliyi haqqında hipotezi yoxlama məsələsində, [15]-də müşahidələrin nəticələrinin Puasson binomial, mənfi binomial qanunla paylanması haqqında hipotezin yoxlanılması; [5], [7] – [9], [20]-də naməlum parametrin ixtiyari $\sqrt{n}$ – tutarlı statistik qiymətlərinin istifadə edilməsində; [5], [12], [21]-də maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə hesablanmış statistikaların tətbiqində təklif olunmuşdur.

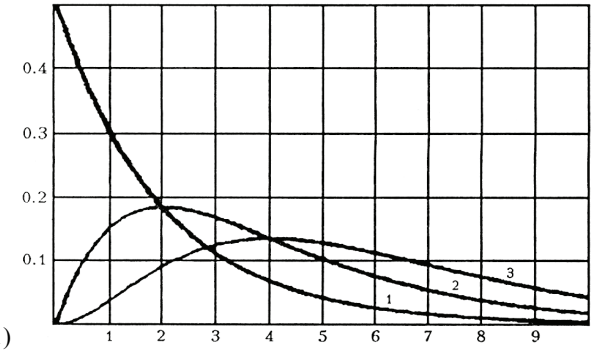
Xi – kvadrat tipli kriterilərin gücü və verilənlərin qruplaşma intervallarının sayının atılması məsələləri, məs., [2] – [5], [9], [14], [22], [23]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 1, с. 3–20; [3] Никулин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 583–92; [4] Гринвуд П., Никулин М. С., в кн.: Проблемы теории вероятностных распределений, в. 10, Л., 1987, с. 49–71; [5] Drost F. C., «Centrum voor Wiskunde en Informatica», 1988, v. 48; [6] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [7] Джапаридзе К. О., Никулин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 886–88; [8] Lauter H., Pincus R., Mathematisch – statistische Datenanalyse, B., 1989; [9] McCulloch C. E., «Communs Statist. P. A. Theory and Meth.», 1985, № 14 (3), p. 593–603; [10] Yarnold J. K., «JASA», 1970, v. 65, № 330, p. 864–86; [11] Cochran W. G., «Ann. Math. Statis.», 1952, v. 23, № 3, p. 315–45; [12] Никулин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 675–76; [13] Никулин М. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 2, с. 385–89; [14] Боровков А. А.., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 375–78; [15] Большев Л. Н., Мирвалиев М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 3, с. 481–94; [16] Большев Л. Н., Никулин М. С., «Сердика. Българского математическо спасение», 1975, т. 1, с. 104–09; [17] Watson G. S., «Biometrics», 1959, v. 15, p. 440–67; [18] Chernoff H., Lehmann E. L., «Ann. Math. Statist.», 1954, v. 25, p. 579–86; [19] Fisher R. A., «J. Roy. Statist. Soc.», 1924, v. 87, p. 442–50; [20] Dudley R. M., в кн.: Banach center publication, v. 5, Warsz., 1979, p. 75–87; [21] Moore D. C., «JASA», 1977, v. 72, № 357, p. 131–37; [22] Kallenberg W. C. M., Oosterhoff J., Schriever B. F., «JASA», 1985, v. 80, № 392, p. 959–68; [23] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A guide to chi – square testing, N. Y., 1996.

Xİ – KVADRAT PAYLANMA « хи – квадрат распределение; chi – square distribution », χ^2 – paylanma, – paylanmasının sıxlıq funksiyası (bax, şəkil) –

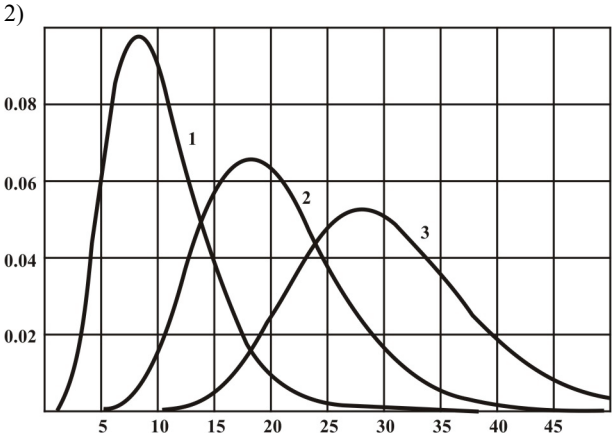
$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\; e^{-x/2}\; x^{n/2-1}$$

olan kəsilməz, $(0, \infty)$-da təyin olunmuş ehtimal *paylanmasıdır*; burada n müsbət tam ədəd olub, sərbəstlik dərəcəsi sayı adlanır.



1)

2)



Xi – kvadrat paylanmanın sıxlıq funksiyası: 1) (1) $n = 2$; (2) $n = 4$; (3) $n = 6$ və 2) (1) $n = 10$; (2) $n = 20$; (3) $n = 30$.

X. – k. p. *qamma paylanmanın* xüsusi halıdır və onun bütün xassələrini ödəyir; *Pirson paylanmaları* ailəsinin III tipinin xüsusi halıdır. X. – k. p.-nın paylanma funksiyası natamam (yarımçıq) qamma – funksiyadır. X. – k. p.-nın xarakteristik funksiyası $f(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$ düsturu ilə ifadə olunur; riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, n və $2n$-ə bərabərdir. X. – k. p.-lar ailəsi kompozisiya əməlinə görə qapalıdır.

Sərbəstlik dərəcəsi sayı n-ə bərabər X. – k. p.-nın riyazi gözləmələri sıfra, dispersiyası vahidə bərabər eyni normal paylanmaya malik asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kvadratları cəminin paylanması kimi almaq olar, burada $\chi_n^2 = X_1^2 + ... + X_n^2$. Normal paylanma ilə X. – k. p.-nın bu əlaqəsi sonuncunun ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada oynadığı rolu təyin edir.

Bir çox paylanmalar X. – k. p. vasitəsilə təyin olunur. Məs., komponentləri asılı olmayan, normal qanunla paylanmış $(\xi_1, ..., \xi_n)$ təsadüfi vektorunun uzunluğu – $\sqrt{\chi_n^2}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması (bəzən *xi – paylanma* adlanan; bax, *Maksvell paylanması*, *Reley paylanması*, *Styudent paylanması*, *Fişer* F *– paylanma*) belə paylanmadır. Bu paylanmalar, X. – k. p. ilə birlikdə riyazi statistikada müşahidələrin normal qanunla paylanmış nəticələrinin müxtəlif statistikalarının seçimi paylanmalarını ifadə edir və onlardan interval statistik qiymətlərinin və statistik kriterilərin təyin olunması üçün istifadə olunur. X. – k. p. ilə əlaqədar xüsusilə seçilən, Pirson xi – kvadrat statistikasına əsaslanan *xi – kvadrat kriteridir*.

Statistik hesablamalar üçün münasib sayılan X. – k. p.-nın müfəssəl tərtib olunmuş cədvəlləri mövcuddur. n-in böyük qiymətlərində normal paylanma ilə approksimasiyadan istifadə olunur: məs., *mərkəzi limit teoreminə* əsasən $(\chi_n^2 - n)/\sqrt{2n}$ normalanmış təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır.

$n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\chi_n^2 < x\} \to \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi\sqrt{2n-1})$$

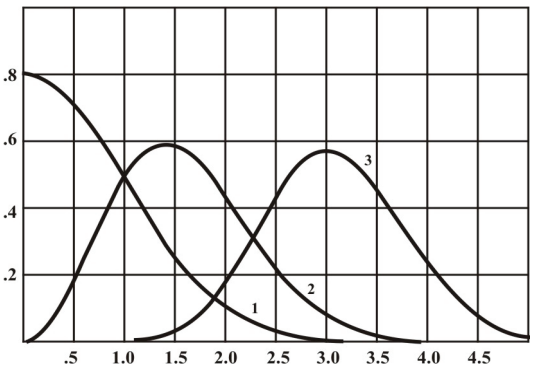
approksimasiyası daha dəqiqdir, burada $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. Bax, *Qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma.*

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Lancaster H., The chi-square distribution, N. Y., – [a. o.], 1969; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

Xİ – PAYLANMA « хи – распределение; chi – distribution », χ – paylanma, sərbəstlik dərəcəsi sayı n olan – paylanma sıxlığı

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2-1}\,\Gamma(n/2)}\; x^{n-1}\, e^{-x^2/2}, \quad n > 0$$

düsturu ilə təyin olunan (bax, şəkil), $(0, \infty)$-da topalanmış, kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*.



Xi - paylanmanın sıxlığı: (1) $n = 1$; (2) $n = 3$; (3) $n = 10$.

Xarakteristik funksiyası

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\sqrt{2t})^k}{k!}\; \Gamma((n+k)/2)$$

düsturu ilə; momentləri:

$$\mathbf{m}_k = 2^{k/2}\, \Gamma((n+k)/2)/\Gamma(n/2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Riyazi gözləməsi və dispersiyası, uyğun olaraq,

$$\sqrt{2}\,\Gamma((n+1)/2)/\Gamma(n/2) \text{ və } n+(2-\sqrt{2})\left(\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\right)^2$$

şəklindədir. Əgər $X_1, ..., X_n$ standart normal qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər X. – p. ilə paylanır; $n=2$ olduqda X. – p. *Reley paylanması*, $n=3$ olduqda isə *Maksvell paylanmasına* gətirilir.

XİDMƏT QAYDASI « обслуживания дисциплина; queueing discipline » – xidmət kanalları üzrə tələblərin paylanmasını və xidmət sistemində (bax, *Növbə*) növbələrin təşkil olunmasını təyin edən qaydalar toplusudur. X. q. qaydanın işləməsi prosesinin məntiqi cəhətini əks etdirir. Xidmət sisteminin riyazi modellərində X. q., adətən, sonlu ehtimali avtomat ilə təsvir olunur, yəni tələbin və cihazın seçilməsi yalnız xidmət kanallarında və növbədə olan tələblərin mövcud tərkibindən asılıdır. Daha mürəkkəb sistemlərdə keyfiyyət xarakteristikaları da nəzərə alınır (gözləmə müddəti, xidmətlər və s.). Dar mənada X. q. kanalda xidmət başa çatdıqda növbədən tələbi seçmə üçün qaydadır. X. q.-ları: düz (növbə qaydasında), invers (tələblərin daxil olmasına əks qaydada), təsadüfi (tələb növbədən eyniehtimallı qanunla seçilən) kimi növlərə ayrılır.

XİDMƏT SİSTEMİ « обслуживания система; queueing system » – tələblərə (sifarişlərə, müştərilərə) xidmət üçün hər hansı m $(1 \le m \le \infty)$ sayda kanaldan ibarət qurğudur; X. s.-nin riyazi nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyektidir. *Giriş axını* modeli, adətən, X. s. modelinə daxildir; giriş axınını hər hansı tələblər mənbəinin hasil etdiyi təsadüfi siqnallar ardıcıllığı kimi göstərmək münasibdir. Əgər bu mənbənin fəaliyyəti sistemin qalan hissəsinin işləməsindən asılı deyildirsə, X. s. açıq xidmət sistemi adlanır. Əksinə, qapalı sistemlərdə tələblər həmişə mövcud olub, vəziyyətlərin müxtəlif fazalarını keçirlər (xidmətolunma, gözləmə və s.). X. s. nəzəriyyəsinin nəticələrinin əksəriyyəti açıq sistemlərə aiddir (bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; burada bunlardan ən sadəsi klassik adlandırılan sistemin təsnifatı verilmişdir). Qeyri – klassik X. s. nəzəriyyəsi 20-ci əsrin 50-ci illərində inkişaf etməyə başlamışdır.

Tətbiq üçün ən çox əhəmiyyət kəsb edən prioritetli sistemlər adlandırılan sistemlərdir. Bu sistemlərdə tələblər bir neçə sinfə: $1, 2, ..., m$ sayda siniflərə aid olur; i sinfindəki tələb $i+1, ..., m$ siniflərindəki tələblərə görə prioritetlidir. Hər bir sinfin tələbləri özünün növbəsini yaradır. Prioritetlərin əsas növləri mütləq və nisbi prioritetlərdir. Mütləq prioritetdə daha yüksək prioritetli sinfin tələbinin daxil olduğu anda daha aşağı prioritetli sinfin tələbinə xidmət dayandırılır və yeni daxil olmuş tələbə xidmət başlanır. Bütün prioritetli tələblərə xidmət olunduqdan sonra dayandırılmış xidmət davam etdirilir. Bu zaman bütün xidmətlərə ya yenidən başlanılır (təkrarlı mütləq prioritet), ya da ki, sərf olunmuş xidmət müddəti nəzərə alınır (yaddaşlı mütləq prioritet). Nisbi prioritetdə prioritetli tələbə daha aşağı prioritetli sinfin tələbinin cari xidməti qurtardıqdan sonra birinci xidmət edilir.

Növbə ilə bir-birini əvəz edən prioritetli X. s.-ndə bu və ya digər sinfə aid tələblərdən hansına üstünlük verilməsi xidmət prosesində dəyişir. Məs., verilən sinfin prioriteti sistemdə bu sinifdən tələb olana qədər saxlanıla bilinər. Dinamik prioritetlər növbə ilə bir-birini əvəz edən prioritetlər (rus. чередующие приоритеты) növüdür və belə prioritetdə tələblərin üstünlüyü cari şəraitin hər hansı kriterisindən asılı olaraq təyin olunur: məs., kanalın iş zonasında tələblər olduğu halda üstünlük gözləmə müddəti minimal resurslu tələbə verilə bilinər.

Tələblərin ardıcıl surətdə bir neçə cihazdan keçdiyi çox-fazalı sistemlər – *şəbəkələrin xidmətinin* xüsusi halıdır (bax, *Xidmət sistemi* gözləməli, birkanallı xidmətli, *Xidmət sistemi* gözləməli, çoxkanallı, *Xidmət sistemi* imtinalarlı). X. s. nəzəriyyəsinin çoxsaylı tətbiqləri X. s.-nin spesifik modellərinin inkişafına səbəb olmuşdur: məs., kommunikasion sistemlərin; axın xətlərinin; ehtiyatları idarəetmə nəzəriyyəsinin; hesablama sistemlərinin; etibarlılıq nəzəriyyəsinin, müxtəlif nəqliyyat növlərinin və s.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [2] Саати Т., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1971; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Клейнрок Л., Теория массового обслуживания, пер. с англ., М., 1979; [5] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979.

XİDMƏT SİSTEMİ açıq **« обслуживания система** разамкнутая; open **queueing system »** – bax, *Xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ birxətli **« обслуживания система** однолинейная; single–server **queueing system »** – bax, *Birxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ birkanallı **« обслуживания система** одноканальная; single-channel **queueing system »** – bax, *Birxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ çoxxətli **« обслуживания система** многолинейная; multilinear **queueing system »** – bax, *Çoxxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ çoxkanallı **« обслуживания система** многоканальная; multichannel **queueing system »** – bax, *Çoxxətli xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ çoxkaskadlı **« обслуживания система** многокаскадная; multicascade **queueing system »** – bax, *Xidmət sistemi* imtinalarlı.

XİDMƏT SİSTEMİ; dayanıqlılıq **« обслуживания система;** устойчивость; stability of a **queueing system »** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) xidmət sistemlərinin.

XİDMƏT SİSTEMİ gözləməli, birkanallı **« обслуживания система** с ожиданием и одним каналом обслуживания; single-server **queueing system »** – eyni zamanda xidmət olunacaq tələblərdən yalnız birinə xidmət mümkün olan sistemdə növbənin əmələ gəlməsi prosesinin riyazi modelidir. Düzgün qaydalı xidmətli $M|G|1$ sistemi nəzəriyyəsi (burada və sonra Kendall simvolikasından istifadə olunur; bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*) müəyyən olunmuş rejimdə A. Ya. Xinçin tərəfindən araşdırılmışdır (1932).

λ – giriş axını parametri, $\psi(s) = \mathbf{M}\exp\{-s\eta\}$ olsun, burada η – tələbə xidmət müddətidir. Onda $\rho = \lambda\tau < 1$ olduqda tələbin gözləmə müddətinin stasionar paylanmasının Laplas çevirməsi –

$$\varphi(s) = (1-\rho)\Big/\left(1 - \frac{\lambda}{s}(1-\psi(s))\right), \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

Xinçin düsturu ilə təyin olunur, burada $\tau = \mathbf{M}\eta$.

Daha sonra, $\Gamma(s) = \mathbf{M}\exp\{-s\zeta\}$ olsun, ζ xidmət cihazının *məşğulluq periodudur*. ρ ixtiyari olduqda $\Gamma(s)$ funksiyası $\Gamma(s) = \psi(s + \lambda - \lambda\Gamma(s))$ funksional tənliyinin $\operatorname{Re} s \geq 0$ halında yeganə məhdud həlli, $s > 0$ halında həqiqi həlli kimi birqiymətli təyin olunur. *Daxil olunmuş Markov zəncirləri* metodu ilə müxtəlif *xidmət qaydalarında* $M|G|1$, $GI|M|1$, $E_k|G|1$, $GI|E_k|1$ sistemlərinin stasionar və qeyri – stasionar xarakteristikaları tədqiq olunmuşdur. $GI|G|1$ sistemi təsadüfi dolaşmalar nəzəriyyəsinin analitik metodları ilə öyrənilmişdir (bax, *Faktorizasiya metodu*). Verilən sistemin fəaliyyəti və təsadüfi dolaşma arasında əlaqə Birxətli (birkanallı) *xidmət sistemi* məqaləsində verilmiş rekurrent münasibətin köməyilə təyin olunur.

Baxılan X. s.-ləri üçün nəticələrin əksəriyyəti *virtual gözləmə müddəti* metodu ilə tapılmışdır. Xidmət sisteminin analizinin asimptotik metodları da inkişaf etdirilmişdir. X. s.-lərinin *dayanıqlılıq* problemi də araşdırılmışdır. Giriş axını və xidmət müddəti sırf stasionar təsadüfi ardıcıllıqlar olan sistemlər sinfi üçün erqodik nəzəriyyə inkişaf etdirilmişdir.

Əd.: [1] Климов Г. П., Стохастические системы обслуживания, М., 1966; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984; [4] Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982.

XİDMƏT SİSTEMİ gözləməli, çoxkanallı **« обслуживания система** с ожиданием многоканальная; multiserver **queueing system »** – bir neçə kanalda (xətlərdə, cihazlarda) tələblərə eyni zamanda xidmət mümkün olan sistemdə növbə yaranma prosesinin riyazi modelidir. $GI|G|m$ sistemi bu növ klassik X. s.-dir (işarələmə *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi* məqaləsində verilmişdir). Bu sistemdə növbəni və gözləmə müddətini kəmiyyətcə xarakterizə edən proseslər çoxölçülü məhdud *təsadüfi dolaşmalarla* təsvir olunur. Belə ki, n-ci tələbi gözləmə müddəti w_n $\min\{w_{n1}, ..., w_{nm}\}$ kəmiyyətinə bərabərdir, burada w_{ni}, – n-ci tələb daxil olduğu andan n-ci tələb də daxil olmaqla i-ci kanalın tələblərdən boşaldığı ana qədər keçən müddətdir. $\{w_{n1}, ..., w_{nm}\}$ təsadüfi vektorları xidmət prosesinin daxil olunmuş Markov zəncirini yaradır.

a tələblərin daxilolma anları arasında intervalın orta müddəti, τ tələbə xidmət müddətinin orta qiyməti olsun. $\tau < ma$ olduqda, qeyd olunan təsadüfi ardıcıllığın erqodik paylanması mövcuddur; gözləmə müddəti w_n-nin $n \to \infty$ olduqda özünün limit paylanması vardır. $\tau \geq ma$ olduqda, gözləmə müddətləri üçün ehtimala görə $w_n \to \infty$ münasibəti tələblərin daxil olma anları arasında intervallar a-ya bərabər və xidmət müddətləri ma-ya vahid ehtimalla bərabər olduğu hal istisna olunmaqla ödənilir.

$GI|G|m$ sisteminin əsas xarakteristikaları qapalı analitik şəkildə ifadə olunmur, lakin xidmət prosesinin, məs., ixtiyari zaman anında, xidmətə başlanan anda və xidmətin qurtardığı anda tələblər saylarının paylanmaları kimi xarakteristikaları arasında erqodik münasibətlər araşdırılmışdır. Xüsusi hallarda ($G\mathbf{I}|M|m$, $G\mathbf{I}|E_k|m$, $M|G|1, E_k|G|1$ və digər sistemlər üçün) analitik düsturlar vardır. Məs., $G\mathbf{I}|M|m$ sistemində hər hansı bir tələbin daxil olacağı ana qədər k sayda tələbin olduğu hadisəsinin stasionar ehtimalı p_k $k \geq m-1$ olduqda $p_k = A\omega^k$ düsturu ilə təyin olunur, burada A sabitdir, ω isə

$$\omega = \int e^{-(1-\omega)m\mu x}\, dF(x)$$

tənliyinin köküdür, burada μ – xidmət müddətinin eksponensial paylanmasının parametri, $F(x)$ – tələblərin sistemə daxil olma anları arasında intervalın paylanma funksiyasıdır. $\rho = \tau/a < m$ olduqda $M|M|m$ sistemində k sayda tələbin olduğu hadisəsinin stasionar ehtimalı π_k və gözləmə müddəti w-nin stasionar paylanması Kolmoqorov düsturları ilə verilir: xüsusi halda, $m = 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olarsa, $\pi_k = (1-\rho)\rho^{k-1}$, orta gözləmə müddəti isə $\rho\tau/(1-\rho)$-ya bərabər olur. Çoxkanallı X. s.-ləri üçün əsas hesablama metodu xidmət sistemlərinin *statistik modelləşdirilməsidir*.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Cooper R. B., Introduction to queueing theory, 2 ed., L., 1981.

XİDMƏT SİSTEMİ imtinalarlı **« обслуживания система** с отказами; **queueing loss / balk / blocking system »** – elə *xidmət sistemidir* ki, bu sistemə tələb daxil olduğu anda onun daxil ola biləcəyi bütün kanallar (xətlər) məşğul olduğundan ona xidmət olunmur (sistem üçün bu tələb itir). İmtinalarlı X. s.-nin əsas xarakteristikası sistemin stasionar rejimində tələbə imtina ehtimalıdır. $M|M|m|0$ sistemi ilk dəfə A. Erlanq (A. Erlang) və K. Palm (C. Palm) tərəfindən araşdırılmışdır (bax, *Erlanq düsturu*) və bu sistem *xidmət sistemi nəzəriyyəsinin* rabitə sistemlərinin hesablanması, xüsusilə də, telefon əlaqələri sistemlərinin çoxsaylı tətbiqləri üçün əsas olmuşdur. Digər klassik model qapalı xidmət sistemidir (bax, *Enqset düsturu*). Bu düsturların və onlara oxşar düsturların sistemin stasionar xarakteristikaları və imtina ehtimalı üçün ümumiləşmələri mövcuddur (bax, *Sevastyanov düsturu*, *Xidmət sistemi nəzəriyyəsi*; invariantlıq prinsipi). Ən sadə analitik şərtlərdə (keçmişi təsirsiz *giriş axını*, xidmət müddətinin *üstlü paylanmalı* olması kimi) Erlanq və Enqset sistemləri *doğum və ölüm prosesləri* metodları ilə araşdırılır.

Natamamgirişli sistemlərin araşdırılmasında mühüm çətinliklər yaranır; belə sistemlər onunla xarakterizə olunur ki, sistemdə müxtəlif tipli tələblər olur və bu tələblərdən hər birinə girişlər mümkün olan kanallar çoxluğu uyğun olur. Bu çoxluqlar bir qayda olaraq kəsişirlər; müxtəlif tipli tələblər üçün kanallara daxilolma prioritetləri verilir; bir kanaldan digər bir kanala o boşalan kimi tələblərin köçürülməsi mümkündür; başqa tələblər daxil olduqda bəzi tələblərə xidmətdən imtina da oluna bilinər.

Çoxkaskadlı imtinalarlı X. s.-ləri də öyrənilir: bu halda tələb bir neçə sistemin (kaskadların) kanallarını eyni zamanda məşğul edə bilər. İmtinalarlı X. s.-nin riyazi modellərinin bu və

digər xüsusiyyətlərini real mürəkkəb rabitə sistemlərindəki proseslər əks etdirir. İmtinalarlı X. s. nəzəriyyəsi real zaman miqyasında məsələlər həll edən hesablama kompleksinin işləmə modeli kimi də istifadə olunur. Təsadüfi prosesin sistemini təsvir edən, vəziyyətlərin çoxaldılmasının (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin çoxaldılması) təqribi modellərinin istifadə olunmasına əsaslanaraq mürəkkəb kommunikasiya şəbəkələrinin hesablanma nəzəriyyəsi yaradılmışdır (bax, [2]). İmtinalarlı X. s.-nin tədqiqatında kombinator – cəbri metodlar böyük rol oynayır. Məs., bu metodların köməyilə kommutasiyası mürəkkəb strukturlu telefon şəbəkəsinə verilmiş sayda abonentlərin eyni zamanda qoşula bilməsinin prinsipial imkanı olduğunu araşdırmaq olur. Kanalların sayı çox olduqda imtina ehtimalının araşdırılmasının asimptotik metodları inkişaf etdirilmişdir. İmtinalarlı X. s. hesabı məsələlərinin həllində xidmət sisteminin *statistik modelləşdirilməsi* tətbiq olunur, adətən, bu prosesin vəziyyətlərinin təqribi və ya dəqiq çoxaldılmasından sonra edilir.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А., Массовое обслуживание в телефонии, М., 1968; [3] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

XİDMƏT SİSTEMİ qapalı **« обслуживания система** замкнутая; closed **queueing system »** – bax, *Xidmət sistemi*.

XİDMƏT SİSTEMİ natamamgirişli **« обслуживания система** неполнодоступная; partially available **queueing system »** – bax, *Xidmət sistemi* imtinalarlı.

XİDMƏT SİSTEMİ tamgirişli **« система обслуживания** полнодоступная; fully accesible **queueing system »** – bax, *Xidmət sistemi nəzəriyyəsi*.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ « обслуживания систем теория; queueing theory », kütləvi xidmət nəzəriyyəsi, növbə nəzəriyyəsi – xidmət sistemlərinin rasional qurulmasına tətbiqən *xidmət sistemlərində* təsadüfi prosesləri öyrənən tətbiqi nəzəri – ehtimali fəndir. A. Ya. Xinçin X. s. n.-nin praktiki istiqamətini belə müəyyən etmişdi: «Elmdə, insanların praktiki fəaliyyətində və məişətdə hər gün elə vəziyyətlər yaranır ki, hər hansı xüsusi xidmət növünə xidmət üçün kütləvi tələbat yaranır, lakin bu hallarda xidmət göstərən vahidlərin sayı məhdud olduğundan bunlar daxil olan tələbləri onlar daxil olduğu anlarda yerinə yetirə bilmir… əslində nəzəriyyə qarşısında belə bir əsas məsələ yaranır: xidmət göstərən vahidlərlə və xidmət keyfiyyəti arasında mümkün ola bilən dəqiqliklə qarşılıqlı asılılığı təyin etmək» (bax, [1]).

X. s. n. üzrə ilk işləri A. Erlanq (A. Erlang) 20-ci əsrin 20-ci illərində görmüşdür, bu işlər telefon sistemlərinin hesablamalarına həsr olunmuşdur. A. Ya. Xinçin 1932 – 33-cü illərdə *birkanallı gözləməli xidmət sistemlərinin* əsas məsələlərini həll edir. A. N. Kolmoqorov 1931-də *çoxkanallı*, *gözləməli xidmət sistemini* araşdırmışdı. B. V. Qnedenko 1934-də dəzgahların dayanıb işləməməsi məsələsini həll etmişdir. A. Ya. Xinçin X. s. n.-nin elmi əsaslarını yaratmış və onun əsas məsələlərinin həllinin analitik metodlarını göstərmişdir (1955; bax, [1]).

X. s. n.-nin ixtiyari məsələsində xidmət sistemi – adətən, real sistemlərdən götürülmüş, intuitiv anlaşılan terminlərin köməyilə təsvir olunan riyazi modeli verilir. Bu modelə xidmət olunacaq tələblərin (sifarişlərin, istehsalçıların) giriş axınının təsviri; hər biri eyni zamanda bir tələbə xidmət göstərən xidmət kanallarının (cihazların, xətlərin) təsviri; tələbə xidmət müddətinin və *xidmət qaydasının* paylanmalarının təsviri daxildir. Bir qayda olaraq, tamgirişli sistemlərə – ixtiyari tələb ixtiyari boş kanalda xidmət olunan sistemlərə baxılır. Araşdırılan işlərin əksəriyyətində tələblərə xidmətin onların daxil olduğu qaydada aparıldığı fərz olunmuşdur (növbədəki tələbin inversiya qaydası ilə və təsadüfi seçilməsi qaydası da tədqiq olunmuşdur). Sistemin kanallarının sayı m -dən asılı olaraq, sistemlər birkanallı ($m=1$) və çoxkanallı ($m>1$) sistemlərə ayrılır. Sonsuz saylı kanallarlı sistemlərə də baxılır. Əgər tələbin daxil olduğu anda bütün kanallar məşğul olarsa, onda bu tələb gözləmə üçün r yerli qurğuya göndərilir. Bu yerlərin hamısı boş olmadıqda tələbdən imtina olunur (yəni tələb itir). Ən geniş yayılmış sistemlər gözləməli ($r=\infty$) və imtinalarlı ($r=0$) sistemlərdir.

Xidmət sisteminin analitik araşdırılma imkanları giriş axını və tələbin xidmət müddətinin paylanması haqqında analitik fərziyyələrdən olduqca asılıdır. 20-ci əsrin 50-ci illərinin ortalarından başlayaraq D. Kendallın (D. Kendall) təklif etdiyi sistemlərin təsnifatı ilə əlaqədar işlər çox yayılmışdır. Xidmət sistemi $A|B|m|r$ simvolları ilə kodlanır, burada m və r yuxarıda təyin olunmuş kəmiyyətlər, A – giriş axını simvolu, B – xidmət müddəti paylanmasının simvoludur. $A|B|m|\infty$ əvəzinə, adtən, $A|B|m$ simvolu yazılır. $A=GI$ (qısaldılmış – *general independent*) simvolu keçmişi məhdud təsirli giriş axınını ifadə edir, $B=G$ (*general* sözündən) simvolu xidmət müddətinin ixtiyari paylanmaya malik olması kimi anlaşılır. $A|B|$ əvəzinə M, E_k, D simvolları onu ifadə edir ki, tələblərin daxil olunma anları arasında intervallar (xidmət müddəti) uyğun olaraq, *üstlü paylanma*, *Erlanq paylanması* ilə paylanır. Bütün hallarda fərz olunur ki, tələblərin daxil olma anları arasında intervallar – Z_n -lər və xidmət müddətləri η_n -lər küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$M|M|m|r$ sistemlərinin elementar nəzəriyyəsi *doğum* və *ölüm proseslərinin* köməyi ilə qurulur. $\nu(t)$ t anında sistemdəki tələblərin (xidmət olunan və gözləmə qurğusunda olan) sayı olsun. Onda $\nu(t)$ $k>m$ olduqda $\lambda_k=\lambda$, $k\geq m+r$ olduqda $\lambda_k=0$, $k\leq m$ olduqda $\mu_k=k\mu$, $k>m$ olduqda $\mu_k=m\mu$ parametrlərli doğum və ölüm prosesidir, burada λ – giriş axınının parametri, μ – xidmət müddətinin eksponensial paylanmasının parametridir. Əgər $r<\infty$ və ya $\mu=\infty$ olarsa, t anında sistemdə k sayda tələbin olması ehtimalı $p_k(t)$ $t\to\infty$ olduqda erqodik paylanma əmələ gətirən π_k limitlərinə yığılır. Xüsusi halda, imtinalı sistem üçün bu ehtimal üçün *Erlanq düsturu* ödənilir. Giriş axınının ilk N tələbi üçün imtinaların erqodik orta qiymətinə bərabər imtina ehtimalı $N\to\infty$ olduqda π_{m+r} -ə bərabərdir. İmtinalı sistemlər üçün bu xarakteristika çox mühümdür. $r=\infty$ olduğu halda erqodik paylanma yalnız $\rho<m$ halında mövcuddur, burada $\rho=\lambda/\mu$; $\nu(t)$ stasionar proses olduğu halda sistemdə tələblərin orta sayı $\rho\uparrow m$ olduqda ∞-a yaxınlaşır. Bu nəticənin prinsipial tətbiqi əhəmiyyəti vardır; tələbin və xidmətin müntəzəm olmadığı şəraitdə sistemin $\lambda=m\mu$ tənliyi əsasında planlaşdırılması mümkün olmur, tələbatlarla müqayisədə sistemin müəyyən imkanları ehtiyatının olması zəruridir. $\rho<m$ olduqda növbə kəmiyyəti $\nu(t)$ -nin və gözləmə müddətinin erqodik paylanmaları Kolmoqorov düsturları ilə verilir (bax, *Xidmət sistemi* gözləməli, çoxkanallı). Müdaxilə olunmuş Markov zəncirləri metodu

(1953-də D. Kendall tərəfindən kəşf olunmuş) X. s. n. məsələləri dairəsini xeyli genişləndirdi: aydın oldu ki, Markov zəncirlərinin köməyilə xidmət sistemlərindəki bir çox Markov prosesləri olmayan prosesləri tədqiq etmək mümkündür. Bu metodu faktiki olaraq ilk dəfə A. Ya. Xinçin 20-ci əsrin 30-cu illərinin əvvəlində $M|G|1$ sistemi nəzəriyyəsini qurduqda tətbiq etmişdir.

X. s. n. aşağıdakı istiqamətlərdə inkişaf edir:

1. Struktur – mürəkkəb sistemlərin analitik tədqiqi. Bu istiqamət texnikanın, fizikanın, əməliyyatlar tədqiqinin mürəkkəb sistemlərinin riyazi nəzəriyyəsinin verilməsi zəruriliyi ilə sıx bağlıdır. Xidmət sistemlərini təsvir edən təsadüfi proseslərin (vəziyyətləri sayı hesabi Markov proses, semi – Markov prosesi və bunlarla bağlı xəttivari proses və bəzi başqa proseslərin) əsas sxemləri işlənilmişdir və bu sxemlər çərçivəsində stasionar paylanmalar kimi interpretasiya olunan xidmət prosesinin əsas xarakteristikaları üçün, vəziyyətlər çoxluğunda qalma müddətinin paylanması üçün düsturların çıxarılış alqoritmləri vardır. Əsas etibarilə xidmət prosesini təyin edən təsadüfi kəmiyyətlərin (xidmət müddəti, tələblərin daxilolma anları arasında intervallar) xarakteristik funksiyalarının rasional ifadələr şəklində düsturları geniş yayılmışdır. Belə düsturlar birxidmətedici kanallı prioritetli xidmət sistemlərinin bir çox sinfi üçün göstərilmişdir.

İnformasiyanın EHM-da yenidən işlənilmə modeli olan dinamik prioritetli xidmət sistemləri öyrənilmişdir. EHM yaddaşının layihələşdirilməsi ilə bağlı olaraq, gözləmə yerlərinin sayı məhdud olan prioritetli sistemlər araşdırılmışdır (bölünmüş və ya ümumi növbəli). *Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsi* məsələləri ilə bağlı etibarsız kanallı xidmət sistemləri də öyrənilir: kanalın imtinası prioritetli tələbin daxil olması kimi interpretasiya olunur. Tələblərin daxil olma anları arasındakı intervallar və xidmət müddətləri semi – Markov – asılılıqlı sistemlər tədqiq olunur. Təkrarlanan çağırışlarlı sistemlərə və məşğulluq intervalının başlanğıcında xidmət olunan tələb xidmət müddətinin xüsusi paylanması ilə xarakterizə olunan sistemlərə bir sıra işlər həsr olunmuşdur. Xidmət qaydaları adi növbəlikdən fərqli sistemlərin fəaliyyətinə baxılır.

Klassik sistemlərdə prosesin erqodiklik şərti intuitiv aydın olduğu halda (bax, *Xidmət sistemi* gözləməli çoxkanalı) daha mürəkkəb sistemlər üçün bu şərtin çıxarılışı olduqca mürəkkəbdir. Belə sistemlərə xarakterik misal müxtəlif texnoloji proseslərin modeli olan blokirovkalı ardıcıl xidmət sistemidir. Qeyri – klassik, böyük tətbiqi əhəmiyyəti olan xidmət sistemlərindən zaman məhdudiyyətlərli sistemi qeyd etmək olar. Məhdudiyyətlərin olduqca ümumi sxemi ondan ibarətdir ki, gözləmə müddəti x-ə bərabər olduğu halda tələbə kanalda paylanma funksiyası $F(z|x)$ olan təsadüfi zaman ərzində xidmət olunur. Belə sistemlərin erqodiklik şərtləri araşdırılmış, stasionar paylanma üçün tənliklərin aşkar həlli halları göstərilmişdir. X. s. n. məsələlərinin geniş sinfi xidmət sistemləri nəzəriyyəsində sərhəd məsələləri metodu ilə həll olunur (bax, *Xidmət sistemi* gözləməli, birkanallı).

2. Asimptotik nəticələr. Sistemin mürəkkəbləşməsi ilə, hətta onun xarakteristikaları üçün aşkar ifadələri prinsipial cəhətcə çıxarmaq mümkün olduqda belə, bu ifadələr analiz və hesablamalar üçün az yararlı olur. Buna görə də, parametrlərin bu və ya digər kritik qiymətlərində xidmət proseslərinin öyrənilməsinə uyğunlaşdırılmış X. s. n.-nin asimptotik metodları xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Ən tam nəzəriyyə yüklənmiş xidmət sistemləri üçün inkişaf etmişdir.

Diffuzion yaxınlaşma metodunun inkişafı, Yu. V. Proxorova məxsus olan $GI|G|1$ sistemlərilə bağlı təsadüfi dolaşmaların asimptotik analizindən başlayan nəzəriyyə A. A. Borovkovun toplayıcı (korreksiyalayıcı) limit teoremləri ilə təkmilləşdi, bu teoremlər isə xidmət sistemi strukturuna nəzərən müəyyən limit münasibətlərinin invariantlığını aşkar etmişdi. A. A. Borovkov kanallar sayı çox olan sistemlərdə xidmət prosesinin approksimasiyaları üzrə nəticələr də almışdır. Orta xidmət müddətinin tələblərin daxil olma anları arasında orta zaman intervalına nisbətinə kiçik kəmiyyət kimi baxılan kiçik yüklənməli sistemlər də tədqiqat üçün praktiki maraq obyektləridir. Belə sistemlər yüksək etibarlı sistemlərin təqribi hesablanma metodlarının qurulmasının əsasını təşkil edir (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*, *Ehtiyatda saxlama*). X. s. n. məsələlərinin həllinin ədədi metodları da inkişaf etməkdədir.

Xidmət sisteminin araşdırılmasında güclü hesablama metodu kiçik parametr metodudur. Sistemin bəzi xarakteristikalarının digərlərinə nisbətən kiçik olduğu müşahidə olunduqda (məs., yüksəketibarlı sistemdə orta bərpa müddəti orta fasiləsiz işləmə müddəti ilə müqayisədə kiçikdir) «sürətli» prosesləri «asta» proseslərdən ayırmaq mümkündür və bu da modelin olduqca sadələşməsinə səbəb olur. Kiçik parametr metodu nəzəriyyəsinə X. s. n. metodu kimi tətbiq edilən mühüm əhəmiyyətli nəticələr «çoxaltma» ideyalarına aid olmuşdu (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin çoxaldılması, *Xidmət sistemi* imtinalarlı).

3. İnvariantlıq problemi. Xidmət sisteminə giriş axınını çıxış axınına (tələblərə xidmətlərin sona çatdığı anlar çoxluğu) çevirən təsadüfi operator kimi baxmaq olar. Sistem vasitəsilə çevrilməyə nəzərən axının ehtimal xassələrinin invariantlığı olduqca mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Məs., $M|G|\infty$ sistemi orta xidmət müddəti sonlu olduğu halda ən sadə axını eyni parametrli ən sadə axına çevirir. $\rho \le m$ olduqda $M|M|m$ sistemi də bu xassəyə malik olur. Axının invariantlıq xassəsi xidmət şəbəkələrinin (yəni elə sistemlərin ki, bu sistemlərdə müəyyən kanallarda xidmət olunan tələblərin digər kanallara ötürülməsi təmin olunsun) analizinin əsası sayılır.

Digər problem – xidmət sistemləri nəzəriyyəsidə invariantlıq problemi – xidmət xarakteristikalarının yalnız müəyyənedici təsadüfi kəmiyyətlərinin orta qiymətlərindən asılı olduğu şərtlərin aydınlaşdırılması ilə bağlıdır. B. A. Sevastyanovun fundamental nəticəsi (bax, *Sevastyanov düsturu*) ilə başlanan invariantlıq (qeyri – həssaslıq) nəzəriyyəsi ümumiləşmiş sxemlər sırasında zəruri və kafi şərtlərin alınmasına qədər başa çatdırılmışdır, digər tərəfdən isə bu nəzəriyyənin xidmət sistemlərinin xarakteristikaları üçün sadə analitik düsturların çıxarılması üçün imkanlarla əlaqəli olduğu aşkar edilmişdir (o cümlədən, etibarlılıq nəzəriyyəsi proseslərini təsvir edən sistemlərin xarakteristikaları üçün də).

4. Hadisələr axınının araşdırılması. *Giriş axını* nəzəriyyəsi A. Ya. Xinçin tərəfindən (1955) yaradılmışdır. Xüsusilə də, o, *keçmişi təsirsiz giriş axınının* və *məhdud keçmişi – təsirsiz giriş axınının* təsvirini müfəssəl surətdə vermişdir, *Palm funksiyalarını* daxil etmiş və *Palm düsturunu* əsaslandırmışdır. Giriş axını nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafı axınların konstruktiv (ikinci dəfədən Puasson, semi – Markov axınları və s.) sxemlərinin tam bir sırası üçün yenidən işlənilmə və axınların ümumi siniflərinin yaranması ilə bağlı olmuşdur (bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*).

Axınlara müasir yanaşma nişanlanmış nöqtəvi proseslər bazasında erqodik X. s. n.-ni qurmağa imkan verir, buna görə isə müəyyənedici ardıcıllıqların asılı olmamazlığı haqqında klassik fərziyyəni stasionar təsadüfi ardıcıllığın olduqca ən ümumi xassəsilə əvəz etmək kifayətdir. Qeyd olunan sxem çərçivəsində aşağıdakılar əsaslandırılmışdır: intensivliyin qorunub saxlanılması qanunu. Bu qanuna ən sadə misalı A. Ya. Xinçin 1932-də göstərmişdir ($M|G|1$ sistemində tələbin daxil olduğu andan əvvəlki anda tələblər sayının paylanması ilə tələbin xidmətindən bilavasitə sonrakı anda tələblər sayının paylanmasının üst-üstə düşməsi); $L = \lambda w$ – Littl düsturu, burada L – növbənin orta qiyməti (xidmət olunan tələblər sayılmadan), λ – giriş axını parametri, w – tələbin orta gözləmə müddətidir; A. Ya. Xinçinin «stasionar növbənin əsas qanunu» adlandırdığı xassə belə ifadə olunur: ən

sadə axın halında, müəyyən olunmuş rejimdə ixtiyari zaman anında xidmətlə bağlı prosesin (sistemdə tələblərin sayı, virtual gözləmə müddəti və b.) paylanması tələbin daxil olduğu andakı paylanma ilə üst-üstə düşür.

5. Erqodik teoremlər, dayanıqlılıq haqqında teoremlər. Xidmət sistemlərinin araşdırılmasında erqodiklik, adətən, erqodik Markov zəncirləri nəzəriyyəsindən alınır. Bir çox hallarda Mustafa teoremi tətbiq olunur: əlaqəli vəziyyətlərli və keçid ehtimalları p_{ik} olan qeyri – periodik hesabi Markov zəncirinin erqodikliyi üçün kafi şərt, ola bilsin ki, sonlu sayda qiymətlərdən başqa bütün i-lər üçün hər hansı mənfi olmayan $\{f_k\}$ ardıcıllığı üçün $\sum_k (f_k - f_i)\, p_{ik} \le -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ münasibətinin ödənilməsidir. Bu halda bütün i-lər üçün $\sum_k f_k\, p_{ik} < \infty$ olur. Çoxölçülü Markov proseslərilə təsvir olunan sistemlər üçün erqodiklik Sevastyanov teoremi ilə təyin olunur (1956).

Daxil olunmuş *bərpa prosesli* sistemlərin ($M|G|m|r$ tipli) erqodikliyi bərpa prosesləri metodu ilə araşdırılır. $x(t)$ sistemlə bağlı proses, $f(x)$ mənfi olmayan və $|x| \to \infty$ olduqda $f(x) \to \infty$ şərtini ödəyən funksiya olarsa, xidmət sisteminin $t \ge 0$ olduqda $\mathbf{M} f(x(t))$-nin məhdudluğu tipli dayanıqlılıq xassəsi sınaq funksiyaları metodu ilə araşdırılır (bax, *Dayanıqlılıq teoremi*; sınaq funksiyaları metodu). Xidmət sistemi xarakteristikalarının müəyyənedici (idarəedici) ardıcıllıqlara nəzərən kəsilməzliyinin öyrənilməsinə qeyd olunan metodlardan başqa metrik yanaşma da effektiv surətdə tətbiq olunur. *Yeniləşdirici hadisələr* metodu erqodiklik, dayanıqlılıq və kəsilməzlik problemlərinə yeganə bir yanaşma müəyyənləşdirmiş oldu. Bax, *Dayanıqlılıq teoremi* xidmət sistemi nəzəriyyəsində.

6. Təsadüfi proseslərin konstruktiv sinifləri. Bir çox məsələlərin həllində, xüsusilə də, xidmət sistemlərinin modelləşdirilməsində konstruktiv verilən (yəni təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı vasitəsilə rekurrent düsturların köməyi ilə ifadə olunan) təsadüfi proseslərin qurulması məqsədəuyğundur. Məs., bir çox qeyri – klassik xidmət sistemlərini və bütün klassik xidmət sistemlərini təsvir etməyə imkan verən model – *hissəvi xətti proses* sxemi buna misaldır. Bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; əlavə dəyişənlər metodu.

7. X. s. n.-nin analitik və ədədi metodları. Bu metodlar xidmət sistemlərinin nəticə etibarilə sonda optimizasiyasında istifadə olunur; idarəolunan Markov zəncirlərinə və idarəolunan Markov proseslərinə əsaslanan bu optimizasiya metodları intensiv surətdə, xüsusilə də, texniki sistemlərin istismarının optimizasiyasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теории массового обслуживания, 2 изд., М., 1987; [3] Климов Г. П., Стохастические системы обслуживания, М., 1966; [4] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [5] Гнеденко Б. В., [и др.,] Приоритетные системы обслуживания, М., 1973; [6] Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982; [7] Клейнрок Л., Теория массового обслуживания, пер. с англ., М., 1979.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ; asimptotik metodlar « **асимптотические методы теории обслуживания систем; asymptotic methods of queueing theory** » – *xidmət sistemlərinin* öyrənilməsi üçün asimptotik qanunların (o cümlədən, ehtimal nəzəriyyəsinin limit qanunlarının) istifadəsidir. Araşdırma istiqamətlərini şərti olaraq ayırmaq olar, məqsəd – xidmət proseslərini onlar üçün məqbul yaxınlaşmaların tapılması yolu ilə öyrənməkdir.

1. Sistemin bu və ya digər xarakteristikasının paylanmasını (adətən, stasionar) təsvir edən aşkar düsturlar və ya tənliklərin asimptotik analizi. Belə analiz üçün belə aşkar düstur və ya tənliklərin varlığı və bundan başqa, sistemin özünün hər hansı kritik vəziyyətinə qeyri – məhdud yaxınlaşması fərz olunur. Məhz bu istiqamətdə yüklənmiş vəziyyətli birkanallı sistemlərin işləmə tərzi haqqında ilk nəticələr alınmış (bax, [1]), xidmət kanallarının sayı böyük olduqda imtinalarlı sistemlərin işləmə tərzi öyrənilmişdir (bax, [2], [3]). Bu zaman nisbətən sadə misallarda qeyd olunan qanunauyğunluqlar aşkar düsturların olmadığı daha ümumi şərtlərlə belə doğru olur.

2. İkinci istiqamət daha geniş olub, sistemi xarakterizə edən (yenə də sistemin özünün hər hansı kritik vəziyyətinə yaxınlaşdığı halda) təsadüfi proseslərin özlərinin limit yaxınlaşmalarının öyrənilməsi ilə bağlıdır. İsbat olunmuşdur ki (bax, [4]), qeyd olunmuş yüklənmiş sistemlərdə yaranan proseslərin əsasında Donsker – Proxorov invariantlıq prinsipi durur. Bu prinsip imkan verir ki, təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğurduğu proseslər Viner prosesinin köməyilə təqribi təsvir edilsin.

İkinci istiqamətin əsas məqsədi toplayıcı limit teoremlərinin müəyyənləşdirilməsi və bu toplayıcı asimptotik qanunların (məs., növbənin normalanmış uzunluğunun diffuzion prosesə yığılması haqqında qanun) ödənilməsi üçün ən geniş və ümumi şərtlərin aydınlaşdırılmasından ibarətdir. Bu istiqamətin metodları 1-ci bəndin metodlarından olduqca fərqlidir və bunlar, bir qayda olaraq, proseslər üçün ümumi yığılma teoremlərinə əsaslanır.

Kanalların sayı böyük, giriş axını intensiv olduğu halda çoxkanallı xidmət sistemlərinin öyrənilməsi deyilənlərə bir misaldır. Giriş axınının intensivliyi və kanalların sayı arasında münasibətdən asılı olaraq iş rejimi üç cür olur: «kritiküstü» (kanalların sayı asimptotik olaraq sonsuzluğa ekvivalentdir), «kritikaltı» (bütün kanalların demək olar ki, hamısı həmişə məşğuldur) və «kritik» – bu iki rejim arasındakı hal. Bu şərtlərdə məşğul xətlər sayını təsvir edən prosesin asimptotik cərəyanı tamamilə öyrənilə bilinər. Limit prosesləri kimi olduqca mürəkkəb təbiətli proseslər alınır və bu zaman qeyd olunan üç rejimdə aşkar olunan qanunauyğunluqlar olduqca müxtəlif olur.

X. s. n.-də limit prosesləri kimi ən çox, demək olar ki, diffuzion Markov prosesləri yaranır. Diffuzion proseslərə yığılmanı öyrənərkən xidmət proseslərinin onların konkret təbiəti ilə bağlı olmayan ən ümumi riyazi modellərinə baxaraq, onları üçölçülü $\zeta(t) = \{e(t),\, r(t),\, s(t);\, t \ge 0\}$ təsadüfi prosesi kimi təyin etmək olar, burada bütün komponentlər mənfi deyildir, monotondur və $q(t) = e(t) - r(t) - s(t) \ge 0$ xassəsinə malikdirlər. $e(t)$ komponenti t anına qədər sistemə daxil olan çağırışların sayı, $r(t)$ komponenti t anına qədər imtina olunan çağırışların sayı, $s(t)$ isə sistemin xidmət göstərdiyi çağırışların sayıdır. Sistemin, adətən, «növbə prosesi» $q(t)$ və «imtinalar prosesi» $\pi(t) = r(t)/e(t)$ kimi xarakteristikaları öyrənilir.

Real sistemlərdə e, r, s komponentlərinin birgə paylanması onların «lokal» xassələrinin (xidmət sisteminin paylanması və s.) və həmçinin, xidmət proseslərinin təbiətini təyin edən bəzi alqoritmlərin göstərilməsi yolu ilə verilir. Asimptotik yanaşma nöqteyi – nəzərindən $\zeta(t)$ prosesini nisbətən böyük zaman intervallarında e, r, s komponentlərinin artımlarının xassələrinin köməyilə xarakterizə etmək kifayət edir. Bu artımlar üzərinə qoyulan şərtlər, adətən, sadə və yoxlanılması mümkün olan formaya malik olur.

Bu zaman alınan nəticələrin ümumiliyi şübhəsiz ki, asimptotik yanaşmanın üstünlüyünü sübut edir (bax, [5]).

3. Üçüncü istiqamət bir qədər xüsusi xarakter daşıyır və bu istiqamət *dayanıqlılıq teoremləri* (və ya kəsilməzlik teoremləri) ilə bağlıdır. Mahiyyət etibarilə, bu halda da proseslər üçün limit teoremlərinə, lakin «toplayıcı» deyil, «individual» limit teoremlərinə baxılır. Məhz xidmət sistemlərinin verilən konkret sistemə yaxın olması (sistemi xarakterizə edən bu və ya digər prosesin paylanması mənada yaxın olması) üçün şərtlər müəyyənləşdirilir. «Dayanıqlılıq» termini onunla bağlıdır ki, dayanıqlı teoremlər sistem parametrlərinin məruz qaldığı kiçik dəyişikliklərdə stasionar xarakteristikaların kiçik dəyişiklikləri haqqında nəticə çıxarmağa imkan yaradır.

Dayanıqlılıq haqqında tədqiqatlar bir-birindən olduqca fərqli bir neçə müxtəlif yanaşmalarla aparılır. Məsələn, nöqtəvi proseslər nəzəriyyəsi (bax, [6]), ümumi metrik yanaşma (bax, [7]), Lyapunov sınaq funksiyaları metodu (bax, [8]), «yaxınlıq nöqtələrinin» qurulma metodu (bax, [9]), yeniləşmələr metodu (bax, [5]).

4. Daha bir yanaşmanı da qeyd etmək lazımdır. Bu yanaşma mürəkkəb xidmət sistemləri (şəbəkələri) üçün məhlul modellərinin (limitlərin) qurulması ilə bağlıdır (bax, [10] – [11]). Məs., $q(t) = (q_1(t), ..., q_N(t))$ $1, ..., d$ xidmət stansiyalarında növbələr uzunluqları vektoru və $N = \sum_{i=1}^{d} q_i(0) \to \infty$ olsun. $N \to \infty$ olduqda $\frac{1}{N} q(uN)$ proseslər ardıcıllığının limiti olan $\zeta(u) = (\zeta_1(u), ..., \zeta_d(u))$ prosesinə **məhlul limiti** deyilir. $\zeta(u)$ prosesləri əksər hallarda determinik, hissəvi xətti olub, birləşmiş qablar sistemində məhlulun həcminin dinamikasını təsvir edir və bu proseslər $q(t)$ proseslərinin erqodiklik şərtlərinin öyrənilməsində çox faydalı olur.

Asimptotik metodların daha geniş anlamında giriş axını üçün limit teoremlərini, erqodik teoremləri, stasionar paylanmaların axtarılması məsələlərini və b. bu metodlara aid etmək olar.

Əd.: [1] Kingman J. F. C., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1961, v. 57, p. 902–04; [2] Боровков А. А.., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А.., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 3, с. 458–68; [4] Прохоров Ю. В., «Лит. матем. сб.», 1963, т. 3, № 1, с. 199–205; [5] Боровков А. А.., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [6] Franken P., «Operationsforschung und Math. Stat.», 1970, № 2, S. 9–23; [7] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 834–47; [8] Калашников В. В.., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 1, с. 89–105; [9] Калашников В. В., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, М., 1980, с. 52–56; [10] Dai J. G., «Ann. Appl. Probab.», 1995, v. 5, p. 49–77; [11] Рыбко А. Н., Столяр А. Л., «Проблемы передачи информации», 1992, т. 28, с. 3–26.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ; əlavə dəyişənlər metodu « **обслуживания систем теория;** метод дополнительных переменных; **queueing theory;** supplementary variables method » – *xidmət sisteminin* $\xi(t) = (\nu(t); \xi_1(t), \xi_2(t), ...)$ çoxölçülü Markov prosesi şəklində işləməsi modelinin qurulması metodudur, burada $\nu(t)$ – əsas dəyişəndir (sistemin makrovəziyyəti), $\xi_i(t)$, – t anında baş verən əməliyyatların yerinə yetirilməsini xarakterizə edən əlavə dəyişənlərdir. Məs., $M|G|n$ xidmət sistemi üçün (ən sadə giriş axını halında gözləməyə malik n – xəttli sisteminin və xidmət müddəti paylanmasının ixtiyari olduğu halda) $\xi(t)$ Markov prosesini aşağıdakı kimi təyin etmək olar: $\xi(t) = (\nu(t); \xi_1(t), ..., \xi_n(t))$, burada $\nu(t)$ – məşğul xətlərin sayı, $\xi_i(t)$, – i-ci xətt məşğul olduğu halda bu xətdə xidmətə başlanılan andan keçən müddətdir; əks halda $\xi_i(t) = 0$. Metod D. R. Koks (D. R. Cox, 1955) tərəfindən əsaslandırılmış, sonra isə B. A. Sevastyanovun işlərində inkişaf etdirilmişdir (bax, *Sevastyanov düsturu*).

XİDMƏT SİSTEMLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ; invariantlıq problemi « **обслуживания систем теория;** проблема инвариантности; **queueing theory;** insensitivity problem/invariance problem », qeyri–həssaslıq problemi, *xidmət sisteminin* xarakteristikaları üzərinə qoyulan şərtlərin tapılması məsələsidir, bu şərtlər ödənildikdə vəziyyətlərin stasionar ehtimalları ilkin paylanma funksiyalarının növündən asılı olmayıb, sistemin orta xarakteristikaları terminlərilə təyin olunur. Bu sahədə ilk nəticələr Erlanq sistemi üçün alınmışdır (bax, [1]). İ. N. Kovalenko etibarlılıq nəzəriyyəsinin olduqca ümumi sxemi üçün xidmət müddətinin paylanma funksiyasının növünə nəzərən vəziyyətlərin stasionar ehtimallarının invariantlığının zəruri və kafi şərtini almışdır (1961). Tələblərin daxilolma anları arasında intervalların asılı olduğu və xidmət müddətlərinin də asılı olduğu xidmət sisteminin vəziyyətlərinin stasionar ehtimallarının qeyri – həssaslığının cəbri kriteriləri də alınmışdır.

Əd.: [1] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984.

XİDMƏT SİSTEMLƏRİNİN STATİSTİK MODELLƏŞDİRİLMƏSİ « обслуживания система статистическое моделирование; statistical simulation of queueing systems » – bax, *Statistik modelləşdirilmə*(si) xidmət sistemlərinin.

XİDMƏT ŞƏBƏKƏSİ « обслуживания сеть; queueing network » – bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan *xidmət sistemlərinin* (qovşaqların, stansiyaların) toplusudur. Qarşılıqlı təsir qovşaqlar arasında çağırışların (sifarişlərin, tələblərin) hərəkət marşrutlarının; xidmət qaydalarının; xidmət müddətlərinin və s. verilməsi ilə təyin olunur. X. ş.-ləri açıq və qapalı olur.

Açıq X. ş. onunla xarakterizə olunur ki, bu şəbəkələrə xaricdən daxil olan çağırışlar axını vardır və çağırışlar şəbəkəni tərk etmək imkanına malikdirlər. Qapalı X. ş.-ndə bu elementlərin heç biri yoxdur, bunlarda qeyd olunmuş sayda çağırışlar daima sirkulyasiya edir.

Ən sadə qapalı şəbəkələr aşağıdakı kimi təsvir olunur. N sayda stansiyadan (qovşaqdan) ibarət xidmət sistemində həmişə n sayda sifariş olur. j nömrəli xidmət sistemi paylanma funksiyası $G_j(x) = \mathbf{P}\{\tau_j < x\}$, $j = 1, ..., N$ olan asılı olmayan $\{\tau_j^{(k)}\}$, $k = 1, 2, ...$ (xidmət müddətlərinin) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı ilə idarəolunan gözləməli birkanallı sistemdir. Çağırışların bir stansiyadan digərinə keçməsi keçid ehtimallarının N tərtib $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ ayrılmayan matrisi ilə təyin olunur. i-ci stansiyada xidmət olunmuş çağırış xidmət olunmaq üçün π_{ij} ehtimalı ilə j-ci stansiyaya göndərilir. Əgər stansiya məşğul olarsa, çağırış növbəyə dayanır. Beləliklə, şəbəkənin təsadüfi proses kimi evolyusiyasının paylanması n, Π, G üçlüyü və şəbəkənin başlanğıc vəziyyəti ilə

tam mənası ilə təyin olunur, burada $G=(G_1,...,G_N)$ paylanma funksiyaları vektorudur.

Ən çox öyrənilmiş X. ş.-ləri xidmət müddətləri eksponensial qanuna tabe olan, yəni $G_j(x)=1-e^{-\mu_j x}$ olduğu şəbəkələrdir. Bu halda $q(t)=[q_2(t),...,q_N(t)]$ prosesi Markov prosesi olur, burada $q_j(t)$, – j-ci stansiyada t anında növbənin uzunluğu, $q_1(t)=n-q_2(t)-...-q_N(t)$. Bu proses üçün

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{q(t)=k\}=p_n(k),\quad k=(k_2,...,k_N),\qquad(1)$$

limiti həmişə mövcuddur, burada

$$p_n(k)=c\prod_{i=1}^{N}(\pi_i/\mu_i)^{k_i},\quad\sum_{i=1}^{N}k_i=n,$$

c – normalayıcı vuruq, π_i, – Π matrisinin finit ehtimallarıdır (bax, [1] – [4]).

Ən sadə açıq X. ş.-ləri eyni Π matrisi və G vektoru olduğu halda, qapalı X. ş.-lərindən $\tau_1^{(k)}$, $k=1,2,...$ intervallarından bir j, $j\geq 2$ saylı stansiyaya π_{ij} ehtimalı ilə daxil olan çağırışların giriş kanalına malik olması ilə fərqlənir. j-ci stansiyada xidmət olunmuş çağırış hər dəfə şəbəkəni π_{j1} ehtimalı ilə tərk edir. Digər $N-1$ sayda stansiyalarda (2-dən N-ciyə qədər) xidmət qapalı şəbəkədəki kimi aparılır. Belə açıq şəbəkənin evolyusiyası Π, G cütləri və başlanğıc şərtlərilə tam mənası ilə təyin olunur. Açıq şəbəkəni «qapalı şəbəkə» kimi ifadə etmək olar ki, bu şəbəkədə $q_1(t)=\infty$ olduğu fərz olunur. Əgər $G_j(x)=1-e^{-\mu_j x}$ olarsa, onda $q(t)$ prosesi qapalı şəbəkədə olduğu kimi Markov prosesi olacaqdır. Əgər bundan əlavə bütün $j\geq 2$ üçün

$$\pi_1/\mu_1>\pi_j/\mu_j\qquad(2)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{q(t)=k\}=p(k)\qquad(3)$$

limiti vardır, burada

$$p(k)=c\prod_{i=2}^{N}(\pi_i\mu_1/\pi_1\mu_i)^{k_i},$$

c – normalayıcı vuruqdur (bax, [1] – [4]).

(1) – (3) nəticələrinə analoji nəticələri çoxkanallı sistemlərdən ibarət şəbəkələr üçün də almaq olar (bax, [1] – [4]). (1), (3) limitlərinin varlığını $G_j(x)$-in eksponensial olması fərziyyəsini qəbul etmədən də, (2) şərtini $\pi_1\mathbf{M}\tau_1>\pi_j\mathbf{M}\tau_j$, $j\geq 2$ bərabərsizlikləri ilə əvəz etməklə isbat etmək olar. Bu şərt ödənildikdə, $n\to\infty$ olarsa, $p_n(k)\to p(k)$ yığılmasını da, yəni qapalı şəbəkələrin açıq şəbəkələrə məlum mənada yığılmasını da isbat etmək olur (bax, [9]). Digər asimptotik nəticələr də alınmışdır (bax, [8], [9]).

Tətbiqdə təsadüf olunan X. ş.-ləri daha mürəkkəb təbiətə malik ola bilər – çağırışlar müxtəlif tipli olur (hər bir tipə uyğun xidmət müddətinin özünün paylanması olur), xidmət qaydaları başqa cür ola bilər, bir qovşaqdan digər qovşağa keçid ehtimalları daha uzaq keçmişin tarixindən asılı ola bilər və s. X. ş. nəzəriyyəsi *xidmət sistemi nəzəriyyəsinin* yeni, sürətli inkişaf edən bölməsidir. Bu nəzəriyyə 20-ci əsrin 60-cı illərində yaranmış, 70-ci illərə qədər informatika problemlərilə əlaqədar formalaşmışdır; bu problemlər aparaturanın işləməsinin ehtimali – zaman xarakteristikalarının təyini məsələləri, hesablama sistemlərinin proqram təminatı məsələləri, informasiya ötürmə şəbəkələri, EHM şəbəkələri və b. məsələləri ilə yaranmış problemlərdir. Xidmət sistemi nəzəriyyəsinin artıq mövcud olan metodları ilə yanaşı X. ş. Nəzəriyyəsində yeni ehtimal modelləri və məsələlərini doğuran özünəməxsus spesifik yanaşmalardan istifadə olunur (bax, [10] – [13]).

Əd.: [1] Клейнрок Л., Теория массового обслуживания, пер. с англ., М., 1979; [2] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979; [3] Kelly F. P., Reversibility and stochastic Networks, N. Y., 1979; [4] Башарин Г. П., Толмачев А. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 21, М., 1983, с. 3–119; [5] Gnedenko B., Konig D., Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 2, B., 1984; [6] Franken P., [a. o.], Queues and point processes, B., 1981; [7] Goodman J., Massey W., «J. Appl. Probab.», 1984, v. 21, p. 860–69; [8] Боровков А. А.., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [9] Боровков А. А.., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1966; [10] Боровков А. А.., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 474–90; 1987, т. 31, в. 2, с. 282–98; [11] Кельберт М. Я., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 26, М., 1988, с. 3–96; [12] Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А., Анализ очередей в вычислительных сетях, М., 1989; [13] Dai I. G., «Ann. Appl. Probab.», 1955, v. 5, p. 49–77.

XİNÇİN BƏRABƏRSİZLİYİ asılı olmayan funksiyalar üçün **« Хинчина неравенство** для независимых функций; **Khinchin inequality** for independent random function **»** – asılı olmayan funksiyalar cəminin L_p – statistik qiymətidir.

f_k asılı olmayan funksiyalar sistemi və hər hansı $p>2$ üçün

$$\sup\|f_k\|_{L_p}<\infty,\quad\int_0^1 f_k(t)\,dt=0$$

olsun. Onda

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}c_k f_k\right\|_{L_p}\leq N\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2},$$

burada N, – c_k-lardan asılı olmayan sabitdir.

Əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\infty,$$

$r_k=\operatorname{sign}\sin 2^k\pi t$ Rademaxer funksiyası və $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k r_k(t)$ olarsa, onda ixtiyari $p>0$ üçün

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leq B_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}$$

münasibəti doğrudur, burada $B_p = (O\sqrt{p})$, $p \to \infty$ olduqda. Bu bərabərsizliyi A. Ya. Xinçin [1]-də isbat etmişdir. A_1 -in dəqiq qiyməti $1/\sqrt{2}$ -ə bərabərdir.

X. b.-nin analoqu Banax fəzalarında da doğrudur (bax, [4]). $0 < p, q < \infty$ olduqda elə $C(p, q)$ konstantı vardır ki, B Banax fəzasından olan ixtiyari x_k elementləri üçün

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_B \right\|_{L_p} \leq C(p, q) \left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_B \right\|_{L_p}$$

bərabərsizliyi doğrudur. X. b.-nin tətbiqlərindən biri: əgər

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty$$

şərti ödənilərsə, onda sanki bütün ± 1 topluları üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

funksiyası bütün L_p -lərə ($p < \infty$) aiddir.

Əd.: [1] K h i n c h i n A., «Math. Z.», 1923, Bd. 18, S. 109–16; [2] K a r l i n S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 66, p. 44–64; [3] Г а п о ш к и н В. Ф., «Успехи матем. наук.», 1966, т. 21, в. 6, с. 3–82; [4] К а х а н Ж. – П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [5] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

XİNÇİN DÜSTURU « Хинчина формула; Khinchin formula » – bax, *Virtual gözləmə müddəti*, *Xidmət sistemi* g ö z l ə m ə l i, b i r k a n a l l ı.

XİNÇİN SPEKTRAL FUNKSİYASI « Хинчина спектральная функция; Khinchin spectral function » – bax, *Sonsuz bölünən paylanma*.

XİNÇİN TEOREMİ « Хинчина теорема; Khinchin theorem » – *sonsuz kiçilənlik şərtinə* tabe olan asılı olmayan X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin $S_n = X_{n_1} + \ldots + X_{nn}$ cəmi haqqında limit teoremləri nəzəriyyəsinin əsas nəticələrindən biridir. Xinçin teoreminə görə $S_n - A_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin mümkün olan limit paylanmaları sinfi *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfi ilə üst-üstə düşür; A_n sabitlərdir. X. t.-nin xüsusi halı Q. M. Bavli tərəfindən alınmışdır (bax, [3]).

Bax, *Böyük ədədlər qanunu*, *Mərkəzi limit teoremi.*

Əd.: [1] Х и н ч и н А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938; [2] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Б а в л и Г. М., «Матем. сб.», 1936, т. 1(43), с. 917–30.

XİNÇİN TEOREMİ a y r ı l ı ş (f a k t o r i z a s i y a) h a q q ı n d a **« Хинчина теорема** о р а з л о ж е н и и (ф а к т о р и з а ц и и); **Khinchin factorization theorem »** – *ehtimal paylanmaları arifmetikasının* ən mühüm nəticələrindən biridir. Əgər $H = H_1 * H_2$ ifadəsindən H_k $(k = 1, 2)$ ya özü hər hansı çırlaşmış E_a paylanması olarsa və ya $H * E_{-a}$ şəklində kompozisiya olarsa, H a y r ı l m a y a n p a y l a n m a adlanır. Əgər G paylanmasının ayrılmayan komponentləri yoxdursa, G paylanması I_0 L i n n i k s i n f i n d ə n d i r. X i n ç i n t e o r e m i n d ə ([1]-də, bax, həm də [2]) hökm olunur ki, hər bir F paylanması $F = G * F_1 * F_2 \ldots$ şəklində ifadə olunur, burada $G \in I_0$ və $F_1, F_2 \ldots$ – ayrılmayan paylanmalardır (G kimi F_k -lar da cırlaşan ola bilərlər).

Əd.: [1] Х и н ч и н А. Я., «Бюлл. МГУ. Секц. А», 1937, т. 1, в. 1, с. 6–17; [2] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972.

XİNÇİN TEOREMİ x i d m ə t s i s t e m i n ə z ə r i y y ə s i n d ə **« Хинчина теорема** в т е о р и и с и с т е м о б с л у ж и в а н и я; **Khinchin theorem** i n t h e q u e u e i n g t h e o r y **»** – 1) Δ uzunluqlu intervalda stasionar axında hadisələr sayı $\nu(\Delta)$-nın

$$\lambda = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \mathbf{P}\{\nu(\Delta) > 0\}$$

parametrinin varlığı haqqında X. t. (qeyd olunmuş limitdə $+\infty$ qiyməti istisna olunmur);

2) Puasson axınının ümumi halı haqqında X. t. – bax, *Puasson axını*; a p a r ı c ı f u n k s i y a;

3) Keçmişin təsirsizlik xassəsinə malik stasionar axının ümumi halı haqqında X. t.: bu halda, sadə axın yaradan çağırış anlarında eyni qanunla paylanmış asılı olmayan tələblər daxil olur.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о в а л е н к о И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987.

XİNÇİN TEOREMİ s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r n ə z ə r i y y ə s i n d ə **« Хинчина теорема** в т е о р и и с т а ц и о н а р н ы х с л у ч а й н ы х п р о ц е с с о в; **Khinchin theorem** i n t h e t h e o r y o f s t a t i o n a r y r a n d o m p r o c e s s e s **»**, V i n e r – X i n ç i n t e o r e m i, – kvadratik orta mənada kəsilməz $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ stasionar təsadüfi proseslərinin bütün mümkün olan $B(\tau) = \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ *korrelyasion funksiyaları* toplusunun

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda) \qquad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilən funksiyalar toplusu ilə üst-üstə düşməsi haqqında teoremdir; $\zeta(t)$ prosesinin s p e k t r a l f u n k s i y a s ı adlanan $F(\lambda)$ məhdud, monoton azalmayan həqiqi funksiyadır. Bu formada X. t. 1934-də A. Ya. Xinçin tərəfindən (bax, [1]) isbat olunmuşdur. N. Viner (N. Wiener; bax, [2]) 1930-da təsadüfi olmayan elə $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ kompleks funksiyalar sinfinə baxmışdır ki,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau)\overline{x(t)}\, dt = B(\tau) \qquad (2)$$

limiti vardır və $B(\tau)$ τ-nun kəsilməz funksiyasıdır; bu halda o, $B(\tau)$ funksiyası üçün (1) ifadəsini almışdır (vahid ehtimalla $\mathbf{M}\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ ilə üst-üstə düşən; bu şərtlə ki, $x(t)$ $\zeta(t)$

erqodik stasionar prosesinin realizasiyasıdır). N. Viner göstərmişdir ki, $F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$ fərqini λ tezliklər oxunun $[\lambda_1,\ \lambda_2]$ intervalının $x(t)$ rəqsinin «intensivliyinə» (enerji və ya güc) bir əlavə kimi interpretasiya etmək olar.

Çox mühüm xüsusi bir halda, $B(\tau)$ funksiyası $|\tau|\to\infty$ olduqda olduqca sürətlə azaldıqda Furye inteqralı şəklində ayrılışla ifadə olunduğundan, X. t. elə bir hökm kimi ifadə olunur ki, stasionar prosesin korrelyasion funksiyası $B(\tau)$-nun Furye çevirməsi $f(\lambda)$ həmişə mənfi deyildir və bu halda $f(\lambda)d(\lambda)$ kiçik xüsusi $d\lambda$ intervalının $x(t)$ rəqsinin enerjisinə əlavəsini təyin edir. X. t. bu sonuncu formada [3]-də 1914-də A. Eynşteyn tərəfindən isbat olunmuşdu və qiymətləndirilməyən bu iş tezliklə unudulmuşdur (bax, [4], [5]).

Stasionar proseslər haqqında X. t.-ni stasionar $\zeta(t)$, $t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...$ ardıcıllığı üçün H. Vold [7]-də araşdırmışdır. Bu halda (1)-də inteqrallama sərhədləri $-\pi$ və π ilə əvəz olunmalıdır.

Əd.: [1] Х и н ч и н А. Я., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42–51; [2] В и н е р Н., Интеграл Фурье и некоторые ее приложения, пер. с англ., М., 1963, гл. 4; [3] E i n s t e i n A., «Arch. Sci. Phys. Natur.», 1914, Ser. 4, t. 37, p. 254–56; [4] Я г л о м А. М., «Пробл. передачи информ.», 1985, т. 21, в. 4, с. 101–07; [5] Я г л о м А. М., в кн.: Эйнштейновский сборник. 1982–1983, М., 1986, с. 25–56; [6] Я г л о м А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981, с. 145–46; [7] W o l d H., A study in the analysis of stationary time series. Uppsala, 1938.

XİNÇİN – KOLMOQOROV TEOREMİ « Хинчина – Колмогорова теорема; Khinchin – Kolmogorov theorem » – bax, *Rademaxer ardıcıllığı*.

XÜSUSİ KOHERENTLİK « частная когерентность; partial coherence » – bax, *Koherentlik*.

XÜSUSİ KORRELYASİON FUNKSİYA « частная корреляционная функция; partial correlation function » – tamqiymətli k arqumentinin funksiyası φ_{kk}-dır; k-nın hər bir qiymətində φ_{kk} funksiyasının qiyməti artan $k=1,\ 2,\ ...$ tərtibli avtoreqressiya modelləri ilə zaman sırasının ardıcıl approksimasiyasında avtoreqressiyanın sonuncu əmsalının qiyməti ilə üst-üstə düşür. X_t $(p,\ q)$ tərtib qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta prosesi, yəni ARSO$(p,\ q)$ – prosesi olsun; bu proses

$$\varphi(B)(X_t-\mathbf{M}X_t)=\theta(B)A_t \qquad (*)$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada $\varphi(B)=1-\varphi_1B-...-\varphi_pB^p$ – avtoreqressiya operatoru, $\theta(B)=1-\theta_1B-...-\theta_qB^q$ – sürüşən orta prosesi, $BX_t=X_{t-1}$, $\mathbf{M}X_t$, – X_t sırasının sabit orta qiyməti, A_t isə orta qiymətləri sıfra bərabər, dispersiyası σ_a^2 olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır. k tərtiblərli avtoreqressiv proses (AR – proses) modellərinin X_t sırası şəklinə salınmasından alınan avtoreqressiya əmsallarının φ_{kk}, $k=1,\ 2,\ ...$ ardıcıllığına X. k. f. deyilir (bax, [1]). Əgər (*)-da $q=0$ olarsa, yəni X_t p tərtib avtoreqressiv proses olarsa, onda $k>p$ olduqda $\varphi_{kk}=0$ olur. $p\neq0$, $q\neq0$ olduqda, $k>p$ olarsa, X. k. f. yalnız $\theta(B)$ operatoru ilə təyin olunur.

X. k. f. *parametrik modelin* tərtibinin seçilməsində, Boks – *Cenkins metodunda* ARİSS – modellərinin və Boks – Cenkinsə görə *diaqnostik yoxlamada* istifadə olunur.

Əd.: [1] Б о к с Д ж., Д ж е н к и н с Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ, в. 1–2, М., 1974.

XÜSUSİ KORRELYASİYA ƏMSALI « частный коэффициент корреляции; partial correlation coefficient » – təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı çoxluğundan olan iki *təsadüfi kəmiyyət* arasında digər kəmiyyətlərin təsiri olmamaq şərtilə xətti asılılıq ölçüsüdür. Daha dəqiq, fərz olunur ki, $X_1,\ ...,\ X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması $\mathbb{R}^n$-də verilmişdir və $X^*_{1\cdot34...n}$ və $X^*_{2\cdot34...n}$ X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq, $X_3,\ ...,\ X_n$ kəmiyyətləri ilə ən yaxşı xətti yaxınlaşmalarıdır. Onda X_1 və X_2 arasında X. k. ə. $\rho_{12\cdot34...n}$ kimi işarə olunur və o, $Y_1=X_1-X^*_{1\cdot34...n}$ və $Y_2=X_2-X^*_{2\cdot34...n}$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında adi *korrelyasiya əmsalı* kimi təyin olunur:

$$\rho_{12\cdot34...n}=\frac{\mathbf{M}\{(Y_1-\mathbf{M}Y_1)(Y_2-\mathbf{M}Y_2)\}}{\sqrt{\mathbf{D}Y_1\,\mathbf{D}Y_2}}.$$

Tərifdən aydındır ki, $-1\le\rho_{12\cdot34...n}\le1$. X. k. ə. korrelyasion matrisin elementləri vasitəsilə ifadə olunur. $\rho=\|\rho_{ij}\|$ olsun, burada ρ_{ij}, – X_i və X_j təsadüfi kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalıdır və fərz olunur ki, ρ_{ij} $|\rho|$ determinantında ρ_{ij} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır, onda

$$\rho_{12\cdot3...n}=-\frac{\rho_{12}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}}.$$

Məs., $n=3$ olduqda

$$\rho_{12\cdot3}=\frac{\rho_{12}\rho_{33}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}.$$

$X_1,\ ...,X_n$ çoxluğundan ixtiyari X_i və X_j kəmiyyətləri üçün X. k. ə. analoji təyin olunur. Ən ümumi halda X. k. ə. $\rho_{12\cdot34...n}$ X_1 və X_2 arasında (tam) korrelyasiya əmsalı ρ_{12}-dən fərqli olur. $\rho_{12\cdot34...n}$ və ρ_{12} arasında fərqə görə X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin asılılığı haqqında mülahizə aparmaq olar və ya bunların asılılığının bu kəmiyyətlərdən hər birinin $X_3,\ ...,X_n$ kəmiyyətlərindən asılılığının nəticəsi olduğu haqqında fikir yürütmək olar. Əgər $X_1,\ ...,X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri cüt-cüt qeyri – korrelyar olarlarsa, onda X. k. ə.-larının hamısı sıfra bərabərdir.

X. k. ə.-nın seçimi variantı

$$r_{12\cdot34...n}=-\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}$$

statistikasıdır, burada R_{ij}, – r_{ij} elementinin seçimi korrelyasiya əmsalları r_{ij}-lərin $R = \| r_{ij} \|$ matrisinin determinantında cəbri tamamlayıcısıdır. Əgər müşahidə nəticələri asılı olmayan və normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $r_{12 \cdot 34 \ldots n}$ statistikası ehtimal sıxlığı –

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((N-n+1)/2)}{\Gamma((N-n)/2)} (1-x^2)^{(N-n-2)/2},$$

$$-1 < x < 1$$

olan qanunla paylanır (N seçimin həcmidir). X. k. ə. haqqında hipotezi yoxlamaq üçün

$$t = \sqrt{N-n} \ \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad r = r_{12 \cdot 34 \ldots n}$$

statistikasının qeyd olunan şərtlər daxilində, sərbəstlik dərəcəsi sayı $(N-n)$ olan Styudent paylanmasına malik olması faktından istifadə olunur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

XÜSUSİ / MARGİNAL PAYLANMA « частное / маргинальное распределение; marginal distribution » – bax, *Çoxölçülü paylanma*.

XÜSUSİ SEMİ – QRUPLARIN HESABI / ARİFMETİKASI « специальных полугрупп арифметика; arithmetic of special semigroups » – ədəd oxu üzərində *ehtimal paylanmaları* hesabında Xinçinin iki fundamental teoreminə analoji teoremlər yerinə yetən topoloji semi – qruplar nəzəriyyəsidir. X. s. h. $\mathbb{R}^n$-də bütün ehtimal paylanmalarının konvolyusion semi – qrupundan fərqli semi – qrupları və ya lokal kompakt Abel qruplarını öyrənir. X. s. h.-nın inkişafı 20-ci əsrin 60-cı illərindən D. Kendall və R. Deyvidsonun delfi semi – qrupları üzrə (bax, [1]) və K. Urbanikin ümumiləşmiş konvolyusiyalar üzrə işlərilə əlaqədar başlanmışdır. X. s. h.-nın əsas nəticələri aşağıdakı siniflərin təsvirini verir: I – sonsuz bölünən elementlər (Levi – Xinçin düsturlarının analoqları) sinfi, I_0 – ayrılmayan bölünənləri olmayan elementlərin sinfi ($\mathbb{R}^n$-də bütün paylanmaların konvolyusion semi – qrupu üçün bu problem həll olunmamışdır; bax, *Sonsuz bölünən paylanma*; a y r ı l ı ş), N – ayrılmayan elementlər sinfi. Ayrılışların dayanıqlılıq problemləri də araşdırılır.

M i s a l. Kinqmen p – funksiyalar semi – qrupu $\mathscr{P}$. $\zeta(t)$, $t \geq 0$, – 0 və 1 qiymətlərini alan və bütün n və $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\zeta(t_1) = \ldots = \zeta(t_n) = 1\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{\zeta(t_i - t_{i-1}) = 1\}$$

şərtini ödəyən təsadüfi proses olsun. $t \downarrow 0$ olduqda $p(t) \to 1$ şərtini ödəyən $p(t) = \mathbf{P}\{\zeta(t) = 1\}$ funksiyası p – f u n k s i y a adlanır. Bütün p – funksiyaların çoxluğu $\mathscr{P}$ vurma və nöqtəvi yığılmaya nəzərən topoloji semi – qrupdur. $\mathscr{P}$-də Xinçinin hər iki teoreminin analoqu yerinə yetir.

I sinfi

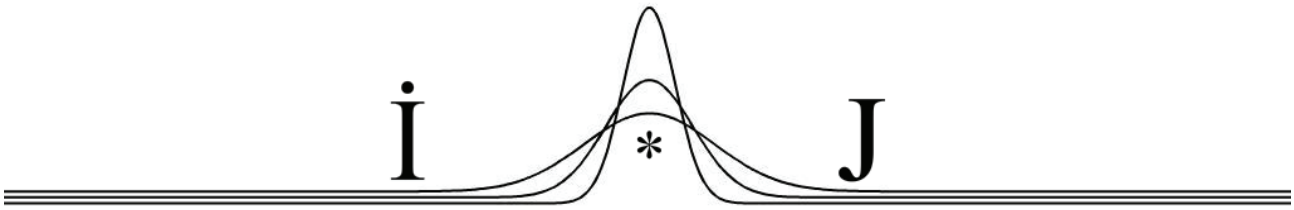
$$p(t) = \exp\left\{ \int_{-(0, \infty]} \frac{\min(t, x)}{1-e^{-x}} m(dx) \right\}$$

şəklində funksiyalar çoxluğudur, burada m, – $(0, \infty]$-da sonlu Borel ölçüsüdür; $I_0 = \{ e^{-\alpha t} : \alpha \geq 0 \}$, – $e^{-\alpha t}$ şəklində funksiyalar sinfidir; N sinfi G_δ tipli $\mathscr{P}$-də sıx çoxluqdur.

Yuxarıda qeyd olunmuş mənada aşağıdakı semi – qrupların arifmetikası öyrənilmişdir: 1) zəif yığılma topologiyası ilə verilmiş konvolyusion semi – qruplar: $n \geq 2$ olduqda $\mathbb{R}^n$-də sferik simmetrik paylanmalar; $n \geq 2$ olduqda $\mathbb{R}^n$ fəzasının fırlanmalarının $SO(n+1)$ qrupunda $SO(n)$-ə nəzərən ikitərəfli invariant paylanmalar; Lobaçevski fəzasında fırlanmalara nəzərən invariant paylanmalar. 2) Hər bir elementlər üzrə yığılma topologiyası ilə verilən, ardıcıllıqların multiplikativ semi – qrupları: müsbət bərpa ardıcıllıqları; Poya – Şur vuruqları ardıcıllıqları; Yakobi çoxhədliləri üzrə inteqrallar ardıcıllıqları. 3) Kompaktlarda müntəzəm yığılma topologiyası ilə verilən funksiyaların multiplikativ semi – qrupları: Yakobi çoxhədliləri, ikinci növ Lejandr funksiyaları üzrə mənfi olmayan əmsallarlı sıralarla ifadə olunan funksiyalar; Poya xarakteristik funksiyaları; zolaqda «zirvəli» funksiyalar, Levitan ümumiləşmiş xarakteristik funksiyalar.

Əd.: [1] Stochastic analysis, L. – [a. o.], 1973; [2] U r b a n i k K., «Stud. math.», 1964, v. 23, № 3, p. 217–45; [3] О с т р о в с к и й И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30; [4] Ч и с т я к о в В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 433–50; [5] R u z s a I., S z e k e l y G., Algebraic probability theory, 1988.

XÜSUSİ SEMİMARTİNQAL « специальный семимартингал; special semimartingale » – bax, *Semimartinqal*.



İDARƏEDİCİ ARDICILLIQ « управляющая последовательность; control sequence » – bax, *Giriş axını.*

İDARƏETMƏ paylanmış parametrlərli sistemləri « **управление** системами с распределенными параметрами; **control** of the systems with distributed parameters **»** – evolyusiyaları xüsusi törəmələrli inteqral tənliklərlə və digər funksional tənliklərlə təsvir olunan sistemlərin idarə olunmasıdır. Paylanmış parametrlərli sistemləri İ.-nin stoxastik aspekti təsadüfi kükrəntilərə məruz qalan sistemlərlə bağlıdır. Bu halda idarəolunan proses xüsusi törəmələrli stoxastik differensial tənliklərlə, inteqral və ya inteqro – differensial tənliklərlə verilir. İ., adətən, ya sərhəd şərtinə daxildir və ya oblastın daxilində nöqtəvi İ.-dir. Problem itki funksiyalarının seçildiyi halda optimal İ.-nin tapılmasıdır; optimallığın zəruri və kafi şərtləri öyrənilir. Məs., paylanmış parametrlərli İ. sistemi kimi

$$d\Phi(t,\,x) = [\,L\Phi(t,x) + l(t,x)\,u\,(t,x)]dt + b(t,x)d\boldsymbol{w}_t,$$

$$\Phi(t,\,x)|_{\partial D} = 0,\;\; \Phi(0,x) = \Phi(x)$$

şəklində verilmiş xüsusi törəmələrli stoxastik differensial tənliyə baxılır [L – hamar elliptik operator, $\boldsymbol{w}$ – standart Viner prosesi, $\Phi(x)$ – Qauss meydanı, l və b – məlum funksiyalar, $t\in\mathbb{R}_+$, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$]. Tam və natamam verilənlər üzrə kvadratik itki funksionalı verildiyi halda u – optimal İ.-ni tapmaq tələb olunur.

Ədd.: [1] Kushner H. J., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 4, p. 596–614; [2] Лионс Ж.-Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 15–46; [3] Bensoussan A., «J. Franklin Inst.», 1983, v. 315, p. 387–404; [4] Глонти О. А., Исследования по теории условно – гауссовских процессов, Тб., 1985; [5] Лионс Ж.–Л., Управление сингулярными распределенными системами, пер. с франц., М., 1987.

İDARƏOLUNAN DİFFUZİON PROSES « управляемый диффузионный процесс; controlled diffusion process » – d – ölçülü $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında elə kəsilməz *idarəolunan təsadüfi prosesdir* ki, idarəetmədən asılı olmayan hər hansı Viner prosesi üzrə *stoxastik differensiallana* bilinir. İ. d. p. nəzəriyyəsi hərəkət tənliyi $dx_t = b(\alpha_t,\,s+t,\,x_t)dt$, $t\geq 0$ (α_t idarəedici parametrdir) şəklində olan hər hansı $x_t\in\mathbb{R}^d$ nöqtəsinin determinik hərəkətini idarəetmə nəzəriyyəsinin ümumiləşməsi kimi yaranmışdır:

İ. d. p.-in formal təsviri İto stoxastik tənlikləri dilində verilir. $(\Omega,\,\mathcal{A},\,\mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $\{\mathcal{A}_t,\;t\geq 0\}$, – $\mathcal{A}$ -ya daxil olunmuş, genişləndirilə bilinən tam $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrləri ailəsi olsun. $\boldsymbol{w}_t = (\boldsymbol{w}_t^i,\;i=1,\ldots,d_1)$, – $t\geq 0$ olduqda $(\Omega,\,\mathcal{A},\,\mathbf{P})$ -də təyin olunmuş $\{\mathcal{A}_t\}$ -yə nəzərən d_1 – ölçülü Viner prosesi (yəni $\boldsymbol{w}_t^i$ hər bir i qiymətində birölçülü kəsilməz standart Viner prosesləri, $\boldsymbol{w}_t^1,\,\ldots,\,\boldsymbol{w}_t^{d_1}$ asılı olmayan proseslər, $\boldsymbol{w}_t^i$ ixtiyari t, i qiymətlərində $\mathcal{A}$ – ölçülən proseslər və t, $h\geq 0$ qiymətlərində $\{\boldsymbol{w}_{t+h}^i - \boldsymbol{w}_t^i,\;i=1,\ldots,d_1\}$ $(\mathcal{A}_t)$-dən asılı olmayan kəmiyyətlər) olsun. A-nın hər hansı separabel metrik fəza olduğu fərz olunur. $a\in A$, $t\geq 0$, $x=(x^i,\;i=1,\ldots,d)\in\mathbb{R}^d$ olduqda $\sigma(\alpha,\,t,\,x)$, $b(\alpha,\,t,\,x)$ funksiyalarının verildiyi fərz olunur; $\sigma(\alpha,\,t,\,x)$ $(d\times d_1)$ – ölçülü matris, $b(\alpha,\,t,\,x)$ d – ölçülü vektordur. σ, b-nin α, t, x-in elə Borel funksiyaları olduğu hesab edilir ki, onlar α, t-dən asılı olmayan sabitlə x-ə görə Lipşits şərtini ödəsinlər və $\left|\sigma^{ij}(\alpha,\,t,\,0)\right|$ və $\left|b^i(\alpha,\,t,\,0)\right|$ məhdud olsunlar. Qiymətlərini A-dan alan, $\{\mathcal{A}_t\}$-yə nəzərən proqressiv ölçülən ixtiyari $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$, $t\geq 0$, $\omega\in\Omega$ prosesi strategiya adlanır; $\mathfrak{A}$ bütün strategiyalar çoxluğudur. Bütün $s\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\alpha\in\mathfrak{A}$ qiymətləri üçün

$$dx_t = b(\alpha_t,\,s+t,\,x_t)dt + \sigma(\alpha_t,\,s+t,\,x_t)d\boldsymbol{w}_t,$$
$$x_0 = x \qquad (1)$$

– İto stoxastik tənliyinin həlli vardır və bu həll yeganədir (İto teoremi). Bu həll $x_t^{\alpha,\,s,x}$ ilə işarə olunur və idarəolunan diffuzion proses (diffuzion tipli idarəolunan proses) adlanır. $\mathfrak{A}$ strategiyalarından başqa strategiyaların digər siniflərinə də baxılır. $C([0,\,\infty),\,\mathbb{R}^d)$ qiymətləri $\mathbb{R}^d$-dən olan, $[0,\,\infty)$-da kəsilməz funksiyalar fəzası olsun. $[0,\,\infty)$ yarımoxu t zaman qiymətlərinin çoxluğu kimi anlaşılır. $C([0,\,\infty),\,\mathbb{R}^d)$-nin elementləri $x_{[0,\,\infty)}$ kimi işarə olunur. N_t $C([0,\,\infty),\,\mathbb{R}^d)$ fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş minimal σ – cəbr olsun və fərz olunur ki, s anında $C([0,\,\infty),\,\mathbb{R}^d)$ fəzasının x_s ($x_{[0,\,\infty)}$ elementinin qiyməti) funksiyası $s\leq t$ olduqda N_t σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndir. Qiymətləri A-dan olan $\alpha = \alpha_t(x_{[0,\,\infty)})$ funksiyası $\{N_t\}$-yə nəzərən proqressiv ölçülən olarsa və $\alpha_t = \alpha_t(x_{[0,\,\infty)})$ olduqda (1) tənliyinin heç olmasa $\{A_t\}$-yə nəzərən proqressiv ölçülən bir həlli vardırsa, $\alpha = \alpha_t(x_{[0,\,\infty)})$ funksiyasına, $(s,\,x)$ nöqtəsində məqbul təbii strategiya deyilir. $(s,\,x)$ nöqtəsində məqbul bütün təbii strategiyalar çoxluğu $\mathfrak{A}_T(s,\,x)$ ilə, onun $\alpha_t(x_t)$ tipli bütün təbii strategiyalarından ibarət

altçoxluğu – $\mathfrak{A}_{.M}(s, x)$ ilə işarə olunur və bu çoxluq (s, x) nöqtəsində məqbul Markov strategiyaları çoxluğu adlanır. Qəbul olunduğuna görə təbii strategiya $[0, t]$ müddəti ərzində x_r prosesinə müşahidələr əsasında t anı üçün idarəetməni, Markov strategiyası isə yalnız t anında prosesin müşahidəsi əsasında idarəetməni təyin edir. $\alpha \in \mathfrak{A}_T(s, x)$ olduqda [hətta $\alpha \in \mathfrak{A}_{.M}(s, x)$ olduqda belə] (1)-in həlli yeganə olmaya bilər. Buna görə də, hər bir $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathfrak{A}_T(s, x)$ qiymətləri üçün (1) tənliyinin hər hansı bir həlli ixtiyari qaydada qeyd olunur və bu həll $x_t^{\alpha, s, x}$ ilə işarə olunur. Bundan sonra, $\beta_t(\omega) = \alpha_t(x_{[0,\infty)}^{\alpha, s, x}(\omega))$ düsturu üzrə $\mathfrak{A}_T(s, x) \subset \mathfrak{A}$ daxiletməsi təyin olunur ki, bu müdaxilədə $x_t^{\beta, s, x} = x_t^{\alpha, s, x}$ bərabərliyi (sanki yəqin) doğru olur.

İdarəetmənin məqsədi, bir qayda olaraq, $x_t^{\alpha, s, \tau}$ trayektoriyasının bu və ya digər funksionalının riyazi gözləməsinin maksimizasiya və ya minimizasiyasıdır. Ən ümumi məsələ aşağıda şərh olunur. $A \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ fəzasında $C^\alpha(t, x) \geq 0$, $f^\alpha(t, x)$ Borel funksiyalarının və $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$-də $g(t, x)$ Borel funksiyasının təyin olunduğu fərz olunur. $\alpha \in \mathfrak{A}$, $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ üçün $(s + t, x_t^{\alpha, s, x})$-nin Q-dən ilk çıxış anı

$$\varphi_t^{\alpha, s, x} = \int_0^t C^{\alpha_r}(s + r, x_r^{\alpha, s, x}) dr,$$

$$v^\alpha(s, x) =$$

$$= \mathbf{M}_{s,x}^\alpha \left[\int_0^{\tau_a} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s + t, x_t) dt + g(s + \tau_Q, x_{\tau_Q}) e^{-\varphi_{\tau_Q}} \right]$$

münasibətlərilə təyin olunur, burada riyazi gözləmə işarəsindəki α, s, x indeksləri onu ifadə edir ki, onları riyazi gözləmə işarəsi altında mümkün olduğu yerdə yazmaq lazımdır. Onda $v^\alpha(s, x)$-i maksimallaşdıran α strategiyasının tapılması məsələsi və

$$v(s, x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} v^\alpha(s, x) \qquad (2)$$

– uduş funksiyasının (dəyərin) tapılması məsələsi yaranır. $v^\alpha(s, x) \geq v(s, x) - \varepsilon$ münasibətini ödəyən α strategiyaları (s, x) nöqtəsi üçün ε – optimal α – strategiyaları adlanır. 0 – startegiya, – optimal strategiya adlanır. Əgər (2)-də $\mathfrak{A}$ çoxluğu $\mathfrak{A}_T(s, x)$ $(\mathfrak{A}_{.M}(s, x))$ çoxluğu ilə əvəz olunarsa, onda uyğun sərhəd $v_T(s, x)$ $(v_{.M}(s, x))$ ilə işarə olunur. $\mathfrak{A}_{.M}(s, x) \subset$ $\subset \mathfrak{A}_T(s, x) \subset \mathfrak{A}$ daxiletmələri ödənildiyindən $v_{(.M)}(s, v) \leq$ $\leq v_{(T)}(s, x) \leq v(s, x)$ münasibəti də doğrudur. Kifayət qədər geniş fərziyyələrlə məlumdur ki (bax, [1]), $v_T = v$ [bu doğrudur, məs., σ, b, c, f, g funksiyaları (α, x) üzrə kəsilməz, ixtiyari t qiymətində α-ya nəzərən x-ə görə müntəzəm kəsilməzdirlər və α, t, x-in bütün qiymətlərində c, f, g mütləq kəmiyyətləri $K(1 + |x|)^m$ kəmiyyətini aşmırlar, K və m isə α, t, x-dən asılı deyildirlər]. Kifayət qədər ümumi halda $v_{(.M)} = v$ bərabərliyinin ödənilməsi araşdırılmamışdır. Dinamik proqramlama ideyalarının formal tətbiqi Bellman prinsipi adlandırılan

$$v(s, x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{M}_{s,x}^\alpha \times$$

$$\times \left[\int_0^\tau e^{-\varphi_t f^{\alpha_t}}(s + t, x_t) dt + v(s + \tau, x_\tau) e^{-\varphi_\tau} \right] \qquad (3)$$

münasibətinə gətirir, burada $\tau^{\alpha, s, x}$ anları $\tau_Q^{\alpha, s, x}$ kəmiyyətini aşmayan, ixtiyari qaydada təyin olunmuş Markov anlarıdır. (3)-də τ əvəzinə $t \wedge \tau_Q = \min(t, \tau_Q)$ götürərək, $v(s + \tau, x_\tau) e^{-\varphi_t}$-yə İto düsturunu tətbiq etdikdə, bəzi ciddi olmayan mülahizələrlə Bellman tənliyini–

$$\sup_{\alpha \in A} (L^{\alpha_v} + f^\alpha) = 0 \qquad (4)$$

tənliyini almaq olur, burada

$$L^{\alpha_v} = \frac{\partial v}{\partial s} + a_{ij}(\alpha, s, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ b_i(\alpha, s, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} - c^\alpha(s, x) v$$

burada i, j indekslərinə görə 1-dən d-yə qədər cəmləmə fərz olunur,

$$a(\alpha, s, x) = (a_{ij}(\alpha, s, x)) = \sigma(\alpha, s, x) \sigma^*(\alpha, s, x) / 2$$

matris üçün ifadədir.

Bellman tənliyi İ. d. p. nəzəriyyəsində mərkəzi rol oynayır, belə ki, bir çox hallarda elə olur ki, bu tənliyin kifayət qədər «yaxşı» sayılan həlli g-nin funksiyası ∂Q-yə bərabər olub, uduş funksiyasıdır, lakin əgər hər bir (s, x) qiymətlərində $\alpha = \alpha^0(s, x)$ (4)-də yuxarı sərhədin alınmasını təmin edərsə və $\alpha_t^0 =$ $= \alpha^0(s_0 + t, x_t)$ (s_0, x_0)-da məqbul Markov strategiyasıdırsa, onda $\alpha^0 = \{\alpha_t^0\}$ strategiyası (s_0, x_0) nöqtəsində optimal strategiyadır. Beləliklə, bəzən isbat etmək olur ki, $v_{(.M)}(s_0, x) = v(s_0, x_0)$ bərabərliyi doğrudur.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin metodları ilə isbat etmək olar ki, əgər $Q = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$, $T \leq \infty$ olarsa, kifayət qədər ümumi halda σ, b, c, f, g funksiyalarının hamarlılığı tipli bəzi fərziyyələrlə uduş funksiyası v (4) tənliyini ödəyir (bax, [1]).

Hərəkəti idarəetmə məsələləri ilə yanaşı İ. d. p. nəzəriyyəsində bir və ya iki nəfərlə idarəolunan prosesin optimal dayanması haqqında məsələlərə də baxılır. Məs., $\alpha \in \mathfrak{A}$ və ixtiyari Markov anı τ üçün

$$v^{\alpha, \tau}(s, x) = \mathbf{M}_{s,x}^\alpha \times$$

$$\times \left[\int_0^{\tau_Q \wedge \tau} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s + t, x_t) dt + g(s + \tau_Q \wedge \tau, x_{\tau_Q \wedge \tau}) e^{-\varphi_{\tau_Q \wedge \tau}} \right].$$

İ. d. p.-lər nəzəriyyəsi idarəolunan, qismən müşahidəolunan prosesləri və təsadüfi prosesləri idarəetmə məsələlərini araşdırır, diffuzion tipli proseslərə müvafiq bu və ya digər verilmiş ölçülər sinfindən olan $(C[0, \infty), \mathbb{R}^d, N_\infty)$ fəzasında ölçünün seçilməsi ilə həyata keçirilən, təsadüfi prosesləri idarəetmə məsələlərini əhatə edir.

Əd.: [1] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [2] Fleming W. H., Rishel R. W., Deterministic and stochastic optimal control, B. – [a. o], 1975; [3] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 3, с. 450–93; [4] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [5] Wonham W. M., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 2, p. 312–26; [6] Davis M. H. A., «SIAM J. Control», 1976, v. 14, № 1, p. 176–88.

İDARƏOLUNAN MARKOV PROSESİ « управляемый марковский процесс; controlled Markov process » – Markov strategiyasında Markov prosesinə çevrilən *idarəolunan təsadüfi prosesdir*, burada Markov strategiyası – prosesin hər bir baxılan anda vəziyyətindən asılı olaraq prosesin bu anda dəyişməsinin ehtimali xarakteristikalarını təyin edən qaydadır. İdarəetmənin məqsədi, adətən, hər hansı funksionalın maksimizasiyasından ibarətdir. İ. M. p.-nin formal tərifində ixtiyari strategiya üzrə (və başlanğıc vəziyyətə görə) trayektoriyalar fəzasında müvafiq ehtimal ölçüsünün qurulması əks olunmalıdır. Belə qurulma müxtəlif xüsusi hallarda müxtəlif üsullarla yerinə yetirilir və hələ ki, bütün bu halları özündə əks etdirən ümumi konstruksiya yoxdur. Diskret zamanlı İ. M. p. (*idarəolunan Markov zənciri*) və kəsilməz zamanlı İ. M. p. və hissəvi sabit trayektoriyalarlı İ. M. p.-ləri də qərar qəbuletmə Markov prosesləri adlanır; bu proseslər ardıcıl addımlar və ya sıçrayışlar üzrə induksiya ilə qurulur və *İonesku – Tulçi teoreminə* əsaslanır (bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*). Kəsilməz trayektoriyalarlı İ. M. p.-lərinin geniş sinfi stoxastik differensial tənliklərin köməyilə qurulur (bax, *İdarəolunan diffuzion proses*); bu metod sıçrayışlarlı diffuziya üçün də istifadə olunur, kiçik sıçrayışlar bu halda cəmlənir (bax, [4]). İ. M. p.-lərin xüsusi tipi impulsal idarəolunan proseslərdir (bax, [5], [6]); impulsal idarəetmə kəsilməz idarəetmə ilə birlikdə uzlaşa bilinər (bax, *Kvazivariasion bərabərsizliklər*). İ. M. p.-lərinin bir çoxu [7]-də təklif olunmuş martinqal idealogiyasından istifadə edən idarəolunan təsadüfi prosesin yeni konstruksiyası ilə ifadə olunur. Natamam verilənlərli İ. M. p.-ləri (belə proseslərdə sistemin vəziyyəti yalnız qismən müşahidə olunur) və adaptiv İ. M. p.-ləri (bu proseslərdə idarəolunan obyektin bəzi parametrləri məlum olmur) mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [2] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [3] Флеминг У., Ришел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, пер. с англ., М., 1978; [4] Прагаускас Г., «Литов. матем. сб.», 1978, т. 18, в. 1, с. 147–67; [5] Звонкин А. К., «Матем. сб.», 1971, т. 86 (128), с. 611–21; [6] Bensoussan A., Lions J. L., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 134, p. 5–22; [7] Chitashvili R. J., «Lect. Notes in Math.», 1983, v. 1021, p. 73–92.

İDARƏOLUNAN MARKOV ZƏNCİRİ « управляемая цепь Маркова; controlled Markov chain » – diskret zamanlı elə *idarəolunan təsadüfi prosesdir ki*, baxılan indiki məlum vəziyyətdə keçid funksiyası və məqbul idarəetmə çoxluqları keçmiş vəziyyətlər və idarəetmələrdən asılı olmur. Əksər hallarda İ. M. z. kimi təsadüfi prosesin özü deyil, yalnız uyğun idarəolunan obyekt anlaşılır; onda İ. M. z.-nin paylanması $\mathbf{P}_x^\pi$-nin (və bu paylanmaya uyğun riyazi gözləmə $\mathbf{M}_x^\pi$-nin) alınması üçün İ. M. z.-ndən başqa x başlanğıc vəziyyəti və π strategiyası da verilməlidir. İ. M. z. diskret zamanlı qərar qəbuletmə Markov prosesi kimi də adlandırılır. Stasionar dinamik proqramlama kimi də adlandırılan bircins İ. M. z. əsas maraq doğuran proseslərdəndir.

Ən sadə obyekt sonlu bircins İ. M. z.: 1) vəziyyətləri çoxluğu sonlu X ilə, 2) $x \in X$ vəziyyətində məqbul idarəetmələrin (qərarların) sonlu çoxluqları $A(x)$ ilə, 3) $a \in A(x)$ idarəetməsində x vəziyyətindən y vəziyyətinə keçid ehtimalları $p(y \mid x, a)$ ilə verilir. Tipik hallarda idarəetmənin məqsədi, ya

$$v^\pi(x) = \mathbf{M}_x^\pi \sum_{t=1}^{\infty} r(x_{t-1}, a_t)\beta^{t-1} \qquad (1)$$

– gözlənilən diskontlanmış gəlirin maksimizasiyası [$\beta \in (0, 1]$ konstantdır], yaxud bir addıma gözlənilən gəlirin orta qiyməti –

$$g^\pi(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathbf{M}_x^\pi \sum_{t=1}^{n} r(x_{t-1}, a_t) \qquad (2)$$

funksiyasının maksimizasiyasıdır, burada $r(x, a)$, $a \in A(x)$, $x \in X$ – cari gəlir funksiyasıdır [daha ümumi halda $r(x_{t-1}, a_t, x_t)$ r üzrə ortalanmış baxılan $p(x_t \mid x_{t-1}, a_t)$ keçid ehtimallarına gətirilir]. Bütün π-lər üzrə v^π (və ya g^π) gəlirinin supremumu modelin dəyəri (qiyməti) adlanır və v ilə işarə olunur [və ya g ; g funksiyası limiti olmayan strategiyalar üçün (2)-də yuxarı və ya aşağı limitin götürülməsindən asılı deyildir].

Əsas nəticələr aşağıdakı operatorlar terminləri vasitəsilə ifadə olunur:

$$P^a f(x) = \sum_{y \in X} f(y)\, p(y \mid x, a)$$

$$T_\beta^a f(x) = r(x, a) + \beta P^a f(x), \quad a \in A(x)$$

$$P f(x) = \sup_{a \in A(x)} P^a f(x),$$

$$T_\beta f(x) = \sup_{a \in A(x)} T_\beta^a f(x), \quad x \in X.$$

$\beta < 1$ olan (1) kriterisi halında v dəyəri $v = T_\beta v$ Bellman tənliyinin (və ya optimallıq tənliyinin) yeganə həllidir. (2) kriterisi halında g dəyəri

$$g = Pg, \quad h + g = T_1 h \qquad (3)$$

optimallıq tənliklərini orta qiymətcə ödəyir (h X çoxluğunda köməkçi funksiyadır) və (3)-dən aydın olur ki, ixtiyari h funksiyası üçün g dəyərdir. Hər iki halda optimallıq tənliklərində supremumu təmin edən $x \to A(x)$, $x \in X$ inikasının selektoru φ mövcuddur və φ stasionar optimal strategiya doğurur. v və g dəyərləri və optimal selektorlar, praktik olaraq, ardıcıl yaxınlaşmalar metodu və ya xətti proqramlama metodu ilə tapılır.

X hesabi vəziyyətlər çoxluğu və A hesabi olduğu halda İ. M. z.-ləri üçün hətta optimal strategiyalar əvəzinə ε – optimal strategiyalar götürdükdə belə yuxarıdakı nəticələri tamamilə almaq olmur (bax, [2], [3], [5], [7]); vəziyyətlər çoxluğunun hesabi olmadığı hallarda ölçülənliklə bağlı əlavə çətinliklər yaranır.

Bax, *İdarəolunan Markov prosesi* diskret zamanlı, *Dinamik proqramlama*; həssas kriterilər.

Əd.: [1] Ховард Р.-А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964; [2] Ширяев А. Н., « Trans. 4-th Prague Conf. Inform. Theory … », 1967, с. 131–203; [3] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [4] Майн Х., Осаки С., Марковские процессы принятия решений, пер. с англ., М., 1977; [5] Файнберг Е. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 1, с. 71–82; [6] Юшкевич А. А., Читашвили Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [7] Сонин И. М., Файнберг Е. А., «Докл. АН СССР», 1984, т. 275, с. 806–09.

İDARƏOLUNAN OBYEKT « управляемый объект; controlled object » – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

İDARƏOLUNAN SEMİ – MARKOV PROSESİ / semi–Markov qərar qəbuletmə prosesi **« управляемый полумарковский процесс** / полумарковский процесс принятия решений**; controlled semi – Markov process** / semi–Markov decision process **»** – sağdan kəsilməz, hissəvi sabit $x(t)$, $t \geq 0$ trayektoriyalarlı *idarəolunan təsadüfi prosesdir*, bu prosesdə növbəti $a_1, a_2, \ldots$ idarəetmələri ardıcıl sıçrayış anları $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ anlarında aparılır və $x(t_{n-1})$ a_n parametrlər cütü, keçmişdən asılı olmayaraq, növbəti sıçrayışa qədər $\tau = t_n - t_{n-1}$ müddəti və $x(t_n)$ növbəti vəziyyətinin birgə paylanmasını təyin edir. İ. s. – M. p. [1]-də U. Cuell tərəfindən öyrənilməyə başlanmışdır. Adətən, hesab olunur ki, $\mathbf{M}\tau$ bütün vəziyyətlər və idarəetmələr üzrə məhduddur və bu halda toplam diskontlanmış gəlirin və ya gəlirin vahid zaman ərzində orta qiymətinin maksimizasiyası məsələsi qoyulur. Belə halda İ. s. – M. p. nəzəriyyəsi $\tau = 1$ olduqda İ. s. – M. p.-nin çevrildiyi *idarəolunan Markov zənciri* nəzəriyyəsinə bir çox cəhətlərinə görə analoji olur.

Əd.: [1] Jewell W. S., «Operations Research», 1963, v. 11, p. 938–71; [2] Майн Х., Осаки С., Марковские процессы принятия решений, пер. с англ., М., 1977; [3] Denardo E. V., Fox B. L., «SIAM J. Appl. Math.», 1968, v. 16, p. 468–87; [4] Ross S. M., «J. Appl. Probab.», 1970, v. 7, p. 649–56; [5] Романовский И. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 208–23; [6] Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, с. 808–15.

İDARƏOLUNAN SIÇRAYIŞVARİ MARKOV PROSESİ « управляемый скачкообразный марковский процесс; controlled Markov jump process » – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*.

İDARƏOLUNAN SIÇRAYIŞVARİ PROSES « управляемый скачкообразный процесс; controlled jump process » – hissəvi sabit trayektoriyalarlı, kəsilməz zamanlı *idarəolunan təsadüfi prosesdir*. İ. s. p.-in trayektoriyalarının sağdan kəsilməz olduğu qəbul olunur. Adətən, fərz olunur ki, prosesin tarixi (Markov İ. s. p.-də – cari vəziyyət) və idarəetmə sıçrayışların infinitezimal ehtimali xarakteristikalarına təsir edir. Bu halda (həm də məhdudiyyətlər olmadıqda) uyğun idarəolunan obyekt aşağıdakı elementlərlə: 1) bütün birnöqtəvi çoxluqları ölçülən çoxluqlar olan vəziyyətlərin ölçülən fəzası $(X, \mathfrak{X})$ ilə; 2) analoji ölçülən idarəetmələr fəzası $(A, \mathscr{A})$ ilə; 3) başlanğıc vəziyyəti $x_0 \in X$ olduqda, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ ($t_1 > 0$) anlarında trayektoriyanın sıçrayışlarla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) vəziyyətlərinə keçməsi şərtilə $a \in A$ idarəetməsində prosesin $t \geq 0$ anında x vəziyyətinin ölçülən sıxlıq funksiyası $q(t, x_0 t_1 x_1 \ldots t_n x_n, a)$ ilə; 4) qeyd olunan şərtlərlə və $t_{n+1} = t$ şərtilə t_{n+1} anında $(n+1)$-ci sıçrayışın vəziyyəti x_{n+1}-in ehtimal paylanması $Q(\Gamma \mid t, x_0 t x_1 \ldots t_n x_n, a)$, yəni hər bir $\Gamma \in \mathfrak{X}$ üçün digər arqumentlər toplusundan ölçülən olaraq asılı, X-də ehtimal ölçüsü ilə verilir. Sıçrayışların çoxalmaması üçün, adətən, q sıxlıq funksiyasının məhdudluğu tələb olunur. Hər bir $x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots$ ardıcıllığına $t_n \uparrow \infty$ olmaqla $\omega = \{x(t)\}$ trayektoriyası uyğun olur:

$t_n \leq t < t_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ olduqda

$$x(t) = x_n \qquad (*)$$

(burada $t_0 = 0$ və hər hansı bir indeksdən başlayaraq t_n-lər $+\infty$ ola bilər). $\mathscr{A}_{t-}$, $t > 0$ $\Omega = \{\omega\}$ fəzasında minimal σ – cəbr olsun; bütün $x(s)$, $s < t$ trayektoriyaları $\mathscr{A}_{t-}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən fərz olunur. Qiymətləri A-dan olan, $\{\mathscr{A}_{t-}\}_{t=0}$ axınına nəzərən proqressiv ölçülən $a = \pi(t, \omega)$, $t > 0$, $\omega \in \Omega$ funksiyasına π *strategiyası* deyilir. Əslində $t_n(\omega) < t \leq t_{n+1}(\omega)$ olduqda $\pi(t, \omega) = \pi(x_0 t_1 x_1 \ldots t_n x_n, t)$ və burada sağ tərəf arqumentlərin küllüsü üzrə ölçüləndir. İdarəolunan obyekt, başlanğıc vəziyyət $x \in X$ və π strategiyası üzrə İ. s. p., sözün əsl mənasında, $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ təsadüfi prosesi kimi qurulur, bu prosesin ehtimal paylanmaları (*) düsturları ilə və

$$\mathbf{P}_x^{\pi}\{x_0 = x\} = 1,$$

$$\mathbf{P}_x^{\pi}\{t_{n+1} > t \mid x_0 t_1 x_1 \ldots t_n x_n\} =$$

$$= \exp\left[-\int_{t_n}^{t} q(s, x_0 t_1 x_1 \ldots t_n x_n, \pi(x_0 t_1 \ldots x_n, s))\, ds\right]$$

$$\mathbf{P}_x^{\pi}\{x_{n+1} \in \Gamma \mid x_0 t_1 x_1 \ldots t_n x_n t_{n+1}\} =$$

$$= Q(\Gamma \mid t_{n+1}, x_0 t_1 \ldots x_n, \pi(x_0 t_1 \ldots x_n, t_{n+1})), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

şərtlərilə təyin olunur. İ. s. p. (daha dəqiq idarəolunan obyekt), q və Q $x_0 t_1 \ldots x_n$ toplusunun yalnız x_n komponentindən asılı olarlarsa, bu proses Markov İ. s. p., əgər bu şərtlərlə yanaşı t-dən asılı olmazsa, onda bircins Markov İ. s. p. adlanır. Birinci halda $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ prosesi $\pi(t, \omega) = \pi(t, x(t_-))$ Markov strategiyasında Markov prosesi, ikinci halda $\pi(t, \omega) = \pi(t, x(t_-))$ stasionar strategiyasında bircins Markov prosesi olur.

$$v^{\pi}(x) = \mathbf{M}_x^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \alpha(s,\, x(s),\, \pi(s))\, ds} r(t,\, x(t),\, \pi(t))\, dt$$

şəklində kriterili (məqsəd funksionalı olan) Markov İ. s. p. bir çox cəhətlərinə görə gəlirli *idarəolunan Markov zəncirinə*, xüsusilə də, X, A sonlu və bircins halındakı zəncirə oxşardır (bircins halda həm də α və r parametrləri t -dən asılı olmur), burada $\mathbf{M}_x^{\pi}$, – $\mathbf{P}_x^{\pi}$ ölçüsünə uyğun riyazi gözləmə, r – gəlir sürəti, $\alpha \geq 0$ – diskontlama parametridir. Məs.,

$$v(x) = v(0, x) = \sup_{\pi} v^{\pi}(x), \quad x \in X$$

gəliri daxil edilir və ixtiyari $t \geq 0$ anında başlayan proses üçün $v(t,\, x)$ analoji təyin olunur. Geniş şərtlərlə dəyər

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \sup_{a \in A} [\, r(t, x, a) + q(t, x, a) \times$$

$$\times \int_X [\, v(t, y) - v(t, x)\,]\, Q(dy \mid t, x, a) - \alpha(t, x, a)\, v(t, x)]$$

optimallıq tənliyini (və ya Bellman tənliyini) ödəyir.

İdarəetmələrin seçilməsində məhdudiyyətlər olan, randomlanmış strategiyalarlı, impulsal idarəetmələrli, sıçrayışlar arasında determinə olunmuş aparılı, həmçinin natamam verilənlərli İ. s. p.-lərə də baxılır. İ. s. p.-in öyrənilməsində dinamik proqramlamadan başqa, martinqal yanaşma da tətbiq olunur. Sıçrayışları diffuziya ilə birləşən və ya kiçik sıçrayışları zaman üzrə hər yerdə sıx İ. s. p.-lər *idarəolunan diffuzion proseslər* nəzəriyyəsində tətbiq olunan metodlara analoji metodlarla öyrənilir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [2] Ю ш к е в и ч А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, с. 247–70; [3] Duyn Schouten F. A. van der, Markov decision process…, Amst., 1983.

İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ ARDICILLIQ « управляемая случайная последовательность; controlled random sequence » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ PROSES « управляемый случайный процесс; controlled random process » – ehtimali xarakteristikaları müşahidələr aparıldığı zaman dəyişə bilən *təsadüfi prosesdir*; ehtimali xarakteristikalar idarəetmə keyfiyyətini təyin edən bu və ya digər funksionalın minimizasiyası (maksimizasiyası) nəticəsində dəyişir. İ. t. p.-lər verilmə və təsviri qaydasına görə olduğu kimi idarəetmə məqsədlərinin tipi üzrə də fərqləndirilir (bax, *İdarəolunan diffuzion proses*, *İdarəolunan Markov prosesi*, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*).

İDARƏOLUNAN TƏSADÜFİ PROSES diskret zamanlı « **управляемый случайный процесс** с дискретным временем; **controlled discrete time random process** », idarəolunan təsadüfi ardıcıllıq – diskret zamanlı elə təsadüfi prosesdir ki, onun ehtimali xarakteristikaları hər bir addımda prosesin gedişinə müşahidədən asılı olaraq baxılan addım üçün idarəetmənin (qərar qəbuletmənin) seçilməsi ilə təyin olunur. Adətən, prosesdən və idarəetmədən asılı olan hər hansı funksionalın maksimizasiyası (minimizasiyası) məsələsi (kriteri adlandırılan) qoyulur. Məsələnin qoyuluşu ardıcıl analiz və oyunlar nəzəriyyəsinin təsiri nəticəsində yaranmışdır. İlk nəticələr dinamik proqramlamanın stoxastik variantı kimi R. Bellman (R. Bellman) tərəfindən alınmışdır (bax, [1]); o, qərar qəbuletmə prosesi (Markov prosesi) terminini də təklif etmişdir (bax, [2]). Sonradan kəsilməz zaman halına analoji olaraq və mühəndis tətbiqləri baxımından diskret zamanlı stoxastik optimal idarəetmə adı da qəbul olunmuşdur. Markov diskret zamanlı İ. t. p.-ini elementar situasiyada P. Xovard [3]-də araşdırmışdır. Borel modellərini öyrənən D. Blekuell və R. Ştraux uyğun olaraq, [5] – [6] və [7]-də diskret zamanlı İ. t. p.-ə müasir yanaşmanın əsaslarını qoymuşlar. Məs., onlar ölçülən seçim teoremi vasitəsilə deskriptiv çoxluq nəzəriyyəsinin dərin nəticələrinin əlaqəsini aşkar etmişlər. Sonlu – additiv inteqrallamadan istifadə edən L. Dyubins və L. Sevidc ölçülənlik problemlərinə digər yanaşma ilə diskret zamanlı İ. t. p.-i «qumar evi» terminlərilə ifadə etmişlər (bax, [8]); burada həmçinin yuxarıdan semi – kəsilməz modellərin mühüm sinfinin öyrənilməsinə başlanılmışdır. Verilənləri sayı tam olmayan idarəetmə halı üçün əsas anlayışlar A. N. Şiryayev (bax, [9], [10]) və Y. B. Dınkin (bax, [11]) tərəfindən daxil olunmuşdur. Qeyri – Markov diskret zamanlı İ. t. p.-lərin ətraflı analizinə [13]-də başlanmışdır. XX əsrin 70-ci illərindən başlayaraq diskret zamanlı İ. t. p. nəzəriyyəsi əsaslandırılma sahələrində və həmçinin struktur məsələlərdə intensiv surətdə yenidən inkişaf etməyə başlamışdır.

Tam informasiyalı diskret zamanlı İ. t. p., təsadüfi proses kimi idarəolunan obyektin başlanğıc vəziyyətinin və strategiyanın verilməsi ilə təyin olunur (digər təyin edilmə variantları da mümkündür). İdarəolunan obyekt $Z = \{X,\, A,\, A(h)_{h \in H},\, p\}$ aşağıdakı elementlərin toplusudur: 1) bütün birnöqtəli çoxluqları ölçülən $(X,\, \mathfrak{X})$ ölçülən vəziyyətlər fəzası; 2) analoji ölçülən idarəetmələr (qərarlar) fəzası $(A,\, \mathscr{A})$; 3) rekurrent təyin olunan $H = \bigcup H_t$, $t = 0,\, 1, \ldots$ tarixlər fəzası və $A(h)$, $h \in H$ məqbul idarəetmələrinin boş olmayan çoxluqları ($H_0 = X$ fərz olunur), $D_{t+1} = \{(h,\, a) : a \in A(h),\ h \in H_t\}$, – $H_t \times A$ və $H_{t+1} = D_{t+1} \times X$ fəzalarında məhdudiyyətlərin ölçülən çoxluğu; $h \in H_t$ elementləri t anında tarixlər adlanır və h_t ilə işarə olunur:

$$h_t = x_0\, a_1\, x_1 \ldots a_t\, x_t,\ x_i,\ x_t \in X,$$

$$a_{i+1} \in A(x_0\, a_1 \ldots x_i), \quad 0 \leq i < t, \qquad (1)$$

$a \in A(h_t)$ elementləri $t+1$ anında idarəetmələr adlanır və a_{t+1}-lə işarə olunur; 4) keçid funksiyası $p(\Gamma / ha)$, $\Gamma \in \mathfrak{X}$, $h \in H$, $a \in A(h)$ – ixtiyari $ha \in D_{t+1}$, $t = 0,\, 1,\, 2, \ldots$ üçün $(X,\, \mathfrak{X})$-də ölçülən ehtimal ölçüsü, ixtiyari $\Gamma \in \mathfrak{X}$ üçün hər bir D_{t+1}-də ha cütünün ölçülən funksiyasının. İxtiyari $x \in X$ nöqtəsi başlanğıc vəziyyətdir. π strategiyası ixtiyari h_t, $t \geq 0$ tarixində a_{t+1}-in seçilməsini təyin edir; təsadüfi seçim aparmaq mümkündür, belə ki, $\pi(\beta \mid h)$, $\beta \in \mathscr{A}$, $h \in H$ *strategiyası* formal olaraq, ixtiyari $h \in H$ üçün $A(h)$-da topalanmış və ixtiyari $\beta \in \mathscr{A}$ üçün hər bir $H(t)$-də ($t \geq 0$) h üzrə ölçülən $(A,\, \mathscr{A})$-da ehtimal ölçüsüdür. $H(t)$-də $\pi(\cdot \mid h)$ daralması $\pi_t(\cdot \mid h)$ kimi işarə olunur. [14], [20]-də göstərilmişdir ki, h üzrə ölçülənliyi daha zəif universal ölçülənlik

şərti ilə əvəz etdikdə strategiya anlayışını genişləndirmək bəzən məqsədəuyğun olur; belə π-lər universal ölçülən strategiyalar adlanır. Strategiyaların varlığı üçün hər bir t qiymətində nöqtəvi – çoxluq inikası $h \to A(h)$, $h \in H_t$ üçün ölçülən seçimin mümkünlüyü zəruri və kafidir [yəni bu inikasın ölçülən selektorunun olması, başqa sözlə, $\varphi_t(h) \in A(h)$ olan $\varphi_t : H_t \to A$ inikasının varlığı]. Bu şərtin idarəolunan obyektlərin tərifində əks olunması təbiidir. Selektorların ixtiyari $\{\varphi_t\}_{t\geq 1}$ toplusuna hər bir h_t tarixində $\varphi_t(h_t)$ idarəetməsindən istifadəni təyin edən randomlanmamış $\pi_t(\beta|h) = 1_\beta(\varphi_t(h))$, $h \in H_t$, $t \geq 1$ strategiyası uyğundur; digər π-lər randomlanmış strategiyalar adlanır. H_∞ ilə (1) şəkilli sonsuz h_∞ ardıcıllıqlarının – trayektoriyaların fəzası işarə olunur. *İonesku Tulçi teoreminin* köməyilə ixtiyari $x \in X$ başlanğıc vəziyyəti və ixtiyari universal ölçülən π strategiyasına H_∞-da elə yeganə $\mathbf{P}_x^\pi$ ölçüsü qarşı qoyulur ki, o, aşağıdakı şərtləri ödəmiş olsun:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P}_x^\pi\{x_0 = x\} = 1 \\ \mathbf{P}_x^\pi\{a_{t+1} \in B \,|\, x_0\, a_1 \ldots x_t\} = \pi(B \,|\, x_0\, a_1 \ldots x_t) \\ \qquad\qquad (\mathbf{P}_x^\pi - \text{sanki yəqin}) \\ \mathbf{P}_x^\pi\{x_{t+1} \in \Gamma \,|\, x_0\, a_1 \ldots x_t\, a_{t+1}\} = p(\Gamma \,|\, x_0\, a_1 \ldots x_t\, a_{t+1}) \\ \qquad\qquad (\mathbf{P}_x^\pi - \text{sanki yəqin}) \\ \mathbf{B} \in \mathscr{A}, \quad \Gamma \in \mathfrak{X}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right\}. \quad (2)$$

$\{x_t\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ təsadüfi prosesi ehtimal paylanması $\mathbf{P}_x^\pi$, başlanğıc vəziyyəti x və universal ölçülən strategiyası π olan idarəolunan Z obyektindən alınmış diskret zamanlı İ. t. p.-dir. $\mathbf{P}_x^\pi$ ölçüsünə müvafiq riyazi gözləmə $\mathbf{M}_x^\pi$ ilə işarə olunur.

Keçid funksiyası p əvəzinə bəzən sistemin tənliyi

$$x_{t+1} = f(h_t, a_{t+1}, \xi_{t+1}), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

verilir, burada $\{\xi_t\}_{t\geq 1}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır. Bu cür yanaşmanın geniş şərtlərdə yuxarıdakı tərifiə eynigüclü olduğu müəyyən olunur (bax, [19]).

Əgər

$$A(h_t) = A_t(x_t), \quad p(\cdot \,|\, h_t a_{t+1}) = p_t(\cdot \,|\, x_t a_{t+1}), \quad t \geq 0$$

olarsa, onda idarəolunan obyekt idarəolunan Markov zənciri adlanır [əgər $A_t(x) = A_x$, $p_t(\cdot \,|\, xa) = p(\cdot \,|\, xA)$, $a \in A(x)$, $x \in X$ olarsa, idarəolunan bircins Markov zənciri adlanır].

Əgər $\pi_t(\cdot \,|\, h_t) = \pi_t(\cdot \,|\, x_t)$, $t \geq 0$ olarsa, π Markov strategiyası, əgər bu şərtlə yanaşı $\pi_t(\cdot \,|\, x) = \pi(\cdot \,|\, x)$, $x \in X$ də olarsa, π stasionar Markov strategiyası adlanır. Əgər idarəolunan Markov zəncirinə Markov strategiyası (bircinslidə – stasionar) tətbiq olunursa, onda $\{x_t\}_{t\geq 0}$ təsadüfi prosesi Markov zənciri (bircins) olur.

Ən çox öyrənilən idarəetmə məsələsi

$$w^\pi(x) = \mathbf{M}_x^\pi \Phi(h_\infty) \quad (3)$$

– gözlənilən gəlir kriterisinin maksimizasiyasıdır, burada Φ, – H_∞-da ölçülən (və ya heç olmasa universal ölçülən) funksionaldır; (Z, Φ) cütü model, (3) funksiyası isə verilmiş modeldə π strategiyasının statistik qiyməti adlanır. Bəzən Φ əvəzinə yaxınlaşdırıcı $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$ funksionallar ardıcıllığına baxılır, strategiyanın statistik qiyməti kimi

$$w^\pi(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{M}_x^\pi \Phi_n(h_\infty)$$

kriterisi anlaşılır (maksimizasiya məsələsində aşağı limit yuxarı limitdən daha təbiidir, belə ki, o, n-in böyük qiymətlərində zəmanətlənmiş orta gəlirə uyğun olur). Ən mühüm misal bir addıma orta gəlir kriterisidir:

$$w^\pi(x) = \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{M}_x^\pi \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} r(x_{t-1}\, a_t)$$

(bax, *İdarəolunan Markov zənciri*). Strategiyaların daxil olunan statistik qiymətlərinin məna daşıması üçün model üzərinə bu və ya digər cəmləmə şərtləri qoyulur.

Optimallıq əlamətlərini ifadə etmək məqsədilə $\mathbf{P}_x^\pi$ ölçüləri, $\mathbf{M}_x^\pi$ riyazi gözləmələri və (3) statistik qiymətlərini $x \in X \subset H$ üçün ixtiyari $h \in H$ tarixlərinə genişləndirmək məqsədəuyğundur. (2) tərifində x-i $h \in H_n$, $n > 0$ ilə əvəz etdikdə, birinci münasibət

$$\mathbf{P}_h^\pi\{(x_0\, a_1 \ldots x_n) = h\} = 1$$

münasibətilə əvəz olunur, digərlərində $t \geq n$ hesab olunur.

Modelin dəyəri (və ya qiyməti)

$$w(h) = \sup_\pi w^\pi(h), \quad h \in H$$

kimi təyin olunur. H_t-də w və w^π daralmaları w_t və w_t^π kimi işarə olunur; əksər hallarda dəyər kimi yalnız w_0 anlaşılır. Sonradan $w(h)$-ın bütün h-lar üçün sonlu olduğu fərz olunur. Əgər $w^\pi(x) = w(x)$ olarsa, π $x \in X$ vəziyyətində optimal strategiya, bütün $x \in X$ üçün $w^\pi(x) = w(x)$ olarsa, π müntəzəm optimal strategiya, bütün $h \in H$ üçün $w^\pi(h) = w(h)$ olarsa, π – səbatlı (rus. неуклонно) optimal strategiya adlanır. Əgər $w^\pi(x) \geq w(x) - g(x)$, $x \in X$ bərabərsizliyi X-də ixtiyari $g \geq 0$ funksiyası üçün ödənilərsə, π strategiyası g – optimal strategiya adlanır ($g = \text{const} = \varepsilon > 0$ olduqda alınan ε – optimal strategiyalar xüsusilə seçilir). Praktiki məsələlərdə yalnız hər hansı vəziyyətdə optimal strategiyaya yaxın strategiya lazım olur, lakin dinamik proqramlamanın buradakı əsas metodu müntəzəm optimal, hətta səbatlı optimal strategiyalara yaxın strategiyaların cəlb olunmasını tələb edir və belə strategiyaları yerinə yetirir və buna görə də, bunlar ümumi nəzəriyyənin öyrənilməsi predmeti olmuşdur.

Φ funksionalı yalnız $h_N = h_N(h_\infty)$-dan asılı olduqda $(N \leq \infty)$ modelin üfüqü adlanır.

Ənənəvi dinamik proqramlamada

$$\Phi(h_\infty) = \sum_{t=1}^{\infty} R_t(h_t), \qquad (4)$$

burada R_t hər bir t addımında gəlir kimi interpretasiya olunur.

Əgər $R_t \geq 0$ $(R_t \leq 0)$ bütün t -lər üçün ödənilərsə, onda model müsbət (mənfi) model adlanır. (4) funksionalları üçün $n \geq 0$ anından başlayaraq statistik qiymətlər və dəyərlər daxil olunur:

$$\overline{w}_n^{\pi}(h_n) = \mathbf{M}_h^{\pi} \sum_{t>n} R_t(h_t),$$

$$\overline{w}_n(h) = \sup_{\pi} \overline{w}_n^{\pi}(h), \quad h \in H_n.$$

Əgər Z idarəolunan Markov zənciridirsə və (4)-də

$$R_t(h_t) = \left[\prod_{i=1}^{t} \beta_i(x_{i-1} a_i x_i)\right] r_t(x_{t-1} a_t x_t), \quad t \geq 1$$

olarsa, model Markov modeli adlanır, $\beta_i > 0$.

Burada $r_t(xay)$ və $\beta_t(xay)$, $xay \in X \times A \times X$ – uyğun olaraq, cari ödəmə və t addımında diskontlama (və ya endirmə) əmsalıdır; adətən, $\beta_t \leq 1$ hesab olunur.

$$\overline{w}_n(h_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} \beta_i(x_{i-1} a_i x_i)\right] v_n(x_n), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Markov modelində $v_n(x)$, $x \in X$, – $t = 0$ başlanğıc anı $t = n$ ilə əvəz olunduqda (Z, Φ) modelindən alınan model dəyəridir. Bircins Markov modelində (başqa cür stasionar dinamik proqramlamada) Z obyekti bircins idarəolunan Markov zənciridir, $r_t = r$ və $\beta_t = \beta$ funksiyaları isə t -dən asılı deyildirlər. Belə modeldə $v_n(x) = v(x) = w(x)$ n -dən asılı olmur. Bircins Markov zəncirində, adətən, $\beta = \text{const}$ olduğu fərz olunur; əgər $\beta < 1$ olarsa, (Z, Φ) diskontlu model, $\beta = 1$ olarsa, diskontsuz model adlanır. Z bircins idarəolunan Markov zənciri, $\beta_t \equiv 1$ və

$$r_t(xay) = \begin{cases} r(axy), & 1 \leq t \leq N \\ R(x), & t = N+1 \\ 0, & t > N+1 \end{cases}$$

olan qeyri – bircins Markov zənciri, o qədər də düzgün olmayaraq sonlu N üfüqlü bircins Markov modeli kimi adlandırılır. X -də R funksiyası final ödəmə adlanır.

Ümumi halda və (4) funksionallı modellərdə H_t -dəki funksiyaları H_{t-1} -dəki funksiyalara çevirən, Markov modellərində X -dəki funksiyaları X -dəki funksiyalara çevirən yenidənqiymətləndirmə operatorları mühüm rol oynayır. Uyğun modellərdə $t = 1, 2, \ldots$ olduqda

$$\left.\begin{aligned} U_t^a f(h) &= \int_X f(hay)\, p(dy \mid ha), \\ \overline{U}_t^a f(h) &= \int_X [R_t(hay) + f(hay)]\, p(dy \mid ha) \end{aligned}\right\}$$

$$a \in A(h), \; h \in H_{t-1},$$

$$T_t^a f(x) = \int_X [r_t(xay) + \beta_t(xay) f(y)]\, p_t(dy \mid xa),$$

$$a \in A_t(x), \quad x \in X$$

olur.

Ümumi modeldə

$$U_t f(h) = \sup_{a \in A(h)} U_t^a f(h),$$

$$U_t^{\pi} f(h) = \int_A U_t^a f(h)\, \pi(da \mid h), \quad h \in H_{t-1}$$

götürülür, burada π – ixtiyari strategiyadır; (4) funksionallı modeldə U_t və U_t^{π} operatorları analoji qaydada daxil olunur. Markov modelində

$$T_t f(x) = \sup_{a \in A_t(x)} T_t^{\alpha} f(x),$$

$$T_t^{\pi} f(x) = \int_A T_t^{\alpha} f(x)\, \pi_t(da \mid x), \quad x \in X$$

götürülür, burada π – Markov strategiyasıdır (bircins Markov modelində $T_t^a = T^a$ və $T_t = T$ t -dən asılı deyildir). Dinamik proqramlama mülahizələri optimallıq tənliyinə (və ya Bellman tənliyinə) gətirilir və bu tənlik uyğun modellərdə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\left.\begin{aligned} w_{t-1}(h) &= U_t w_t(h), \\ \overline{w}_{t-1}(h) &= \overline{U}_t \overline{w}_t(h), \end{aligned}\right\} \; h \in H_{t-1}, \; t = 1, 2, \ldots \qquad (5)-(6)$$

$$v_{t-1}(x) = T_t v_t(x), \quad x \in X, \quad t = 1, 2, \ldots, \qquad (7)$$

bircins Markov modelində isə

$$v(x) = T v(x), \quad x \in X$$

kimi, nəhayət, sonlu üfüqlü bircins Markov modelində

$$v_{t-1}(x) = T v_t(x), \quad x \in X, \quad 1 \leq t \leq N \qquad (8)$$

sistemi kimi ifadə olunur.

X qeyri – hesabi olduqda bu tənliklərin əsaslandırılması hətta sonlu üfüq üçün də trivial olmur. Lakin, əgər əvvəldən məlum olarsa ki, sonlu N üfüqündə dəyər optimallıq tənliklərini ödəyir, onda o, uyğun final şərtində $t = 1, 2, \ldots, N$ olan bu tənliklərin yeganə həlli olur [(5) sistemi üçün $w_N = \Phi$, (6) sistemi üçün $\overline{w}_N = 0$, (7) sistemi üçün $v_N = 0$, (8) sistemi üçün $v_N = R$]. Sonlu üfüq olduqda optimallıq tənliklərinin həllinin varlığından bir çox hallarda həllin modelin dəyəri olduğu nəticəsinə gəlmək olur.

Optimal strategiyalar yenidənqiymətləndirmə operatoru terminlərilə də xarakterizə olunur. İxtiyari səbatlı π optimal strategiyası (Markov modelində Markov strategiyası)

$$\left.\begin{aligned} w_{t-1}(h) &= U_t^{\pi} w_t(h), \\ \overline{w}_{t-1}(h) &= \overline{U}_t^{\pi} \overline{w}_t(h), \end{aligned}\right\} \; h \in H_{t-1}, \;\; t = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{t-1}(x) = T_t^{\pi} v_t(x), \; x \in X, \;\; t = 1, 2, \ldots,$$

dəyərini q o r u y u r və yaxşılaşmayan strategiyadır, yəni

$$\left.\begin{aligned} w_{t-1}^{\pi}(h) &= U_t w_t^{\pi}(h), \\ \overline{w}_{t-1}^{\pi}(h) &= \overline{U}_t \overline{w}_t^{\pi}(h), \end{aligned}\right\} \; h \in H_{t-1}, \;\; t = 1, 2, \ldots$$

$$v_{t-1}^{\pi}(x) = T_t v_t^{\pi}(x), \; x \in X, \;\; t = 1, 2, \ldots.$$

Sonlu üfüqdə bu şərtlərin hər biri strategiyanın səbatlı optimallığı üçün kifayətdir. Sonsuz üfüqdə strategiyanın səbatlı optimallığı üçün π-nin q o r u y u c u və d ü z ə l d i c i strategiya, yaxud yaxşılaşmayan və a s i m p t o t i k m ü s b ə t s t a t i s t i k q i y m ə t i olan strategiya olması zəruri və kafidir; (4) funksionallı modellər üçün bu şərtlər uyğun olaraq,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_h^{\pi} \overline{w}_n(h_n) = 0, \;\; h \in H \\ &\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{M}_h^{\sigma} \overline{w}_n^{\pi}(h_n) \geq 0, \text{ əgər } \; \overline{w}^{\sigma}(h) \neq \infty, \; h \in H \;\; \text{olarsa} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

şəklində ifadə olunur, burada σ ixtiyari strategiyadır. (9) düsturu «$=$» işarəsi əvəzinə «$\geq$» işarəsi ilə həmişə doğrudur. Ona görə də, mənfi modeldə ixtiyari strategiya düzəldici strategiya olur, müsbət modeldə asimptotik müsbət statistik qiymətə malik olur.

Hesabi olmayan X, A fəzaları halında optimallıq tənliklərinin əsaslandırılması üçün modelin dəyəri w və ya v-nin (heç olmasa universal olaraq) ölçülən olduğunu və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε – optimal strategiyaların (heç olmasa universal ölçülən) olduğunu bilmək lazımdır. Bunların hər ikisi aşağıdakı iki sualı doğurur: 1) U_t və ya T_t operatorları funksiyaların ölçülənliyini (universal) saxlayırmı; 2) $h \to A(h)$, $h \in H_{t-1}$ inikasının ölçülən (universal) elə $a = \varphi_t(h)$ selektorları və ya $x \to A_t(x)$, $x \in X$ inikasının $a = \varphi_t(x)$ selektorları varmı ki, bunlar uyğun olaraq ixtiyari $\varepsilon > 0$ dəqiqliklə $a \in A(h)$ üzrə sanki bütün $h \in H_{t-1}$ üçün eyni zamanda $U_t^a w_t(h)$ kəmiyyətinə supremumu və ya $a \in A_t(x)$ üzrə sanki yəqin bütün $x \in X$ üçün eyni zamanda $T_t^a v_t(x)$ kəmiyyətinə supremumu təmin etsinlər.

Sonlu üfüqlü modellərdə hər iki suala müsbət cavab optimallıq tənliyinin çıxarılması üçün kifayətdir, sonsuz üfüqdə digər mülahizələrdən istifadə olunur. U_t və ya T_t operatorlarının funksiyaların bu və ya digər «yaxşı» sinfini invariant saxlayan və tələb olunan selektorlara malik olan müxtəlif tip modelləri məlumdur. Belə modellərdən mühümləri aşağıdakılardır. Y u x a r ı d a n s e m i – k ə s i l m ə z m o d e l (ən sadə variantda) aşağıdakı şərtlərlə təyin olunur: 1) X və A separabel metrik fəzalardır; 2) A kompaktdır və D_t, $t \geq 1$ çoxluqları qapalıdırlar; 3) p keçid funksiyası Feller funksiyasıdır, yəni $t = 1, 2, \ldots$ olduqda, X-də ixtiyari f kəsilməz məhdud funksiyası üçün

$$F(ha) = \int_X f(x)\, p(dx \mid ha), \;\; ha \in D_t$$

funksiyası D_t-də kəsilməzdir; 4) Φ funksionalı H_{∞}-da yuxarıdan məhduddur və yuxarıdan semi – kəsilməzdir (fəzaların hasilində Tixonov topologiyasına baxılır); 5) (4) funksionalı halında R_t-dən olan hər bir funksiya da yuxarıdan məhdud və yuxarıdan semi – kəsilməzdir.

Markov modelində β_t və r_t funksiyaları yuxarıdan məhduddurlar, β_t kəsilməzdirlər, r_t isə yuxarıdan semi – kəsilməzdirlər. Yuxarıdan semi – kəsilməz modeldə w_t, $\overline{w}_t$ və ya v_t dəyərləri yuxarıdan məhdud və yuxarıdan semi – kəsilməzdirlər (və buna görə də, ölçüləndirlər), U_t, $\overline{U}_t$ və ya T_t yuxarıdan semi – kəsilməz funksiyaları belə funksiyalara çevirən operatorlardır, dəqiq supremumu təmin edən ölçülən φ_t selektorları da vardır; optimallıq tənliyi ödənilir və randomlanmayan səbatlı optimal strategiyalar (Markov modelində – Markov, bircins Markov modelində – stasionar strategiyalar) mövcuddur (son nəticələr [19], [23]-də alınmışdır). B o r e l m o d e l i aşağıdakı şərtlərlə verilir: 1) X və A standart Borel fəzalarıdır; 2) D_t, $t \geq 1$ çoxluqları və $p(\Gamma \mid \cdot)$ keçid funksiyası Borel mənada ölçüləndir; 3) Φ funksionalı Borel – ölçülən funksionaldır; 3′) (4) funksionalı halında R_t funksiyaları Borel – ölçülən funksiyalardır; 3″) Markov modelində β_t və r_t funksiyaları Borel – ölçülən funksiyalardır. Borel modelində U_t, $\overline{U}_t$ və ya T_t operatorlarının təsirindən sonra Borel funksiyaları sinfi invariant qalmır, dəyər Borel funksiyası deyil, yalnız universal ölçülən ola bilər, ölçülən φ_t selektorları isə, ümumiyyətlə, ε-a qədər dəqiqliklə h və ya x-in yalnız sanki hamısı üçün (lakin hamısı üçün deyil) supremumu təmin edir (H_{t-1} və ya X-də əvvəlcədən seçilmiş ixtiyari ölçü üzrə), optimallıq tənliyi doğrudur. Y u x a r ı d a n s e m i – a n a l i t i k m o d e l d ə (Borel modeli xüsusi halı olan) daha çox sonuclanmış nəticələr alınır (bax, [14], [20], [24]); burada X, A, $A(h)$, P və β_t üzərinə qoyulan eyni şərtlər saxlanılır, Φ, R_t və ya r_t isə yuxarıdan semi – analitik funksiyalar fərz olunur (belə funksiyalar üçün $\{z : f(z) > c\}$ sədli çoxluqlar analitik çoxluqlardır).

Yuxarıdan semi – analitik modeldə U_t, $\overline{U}_t$ və T_t operatorları yuxarıdan semi – analitik funksiyaları elə yuxarıdan semi – analitik funksiyalara çevirir, w_t, $\overline{w}_t$ dəyərləri və ya v_t yuxarıdan semi – analitik funksiyalardır (buna görə də, universal ölçüləndirlər), H_{t-1} və ya X-də hər yerdə ε-a qədər dəqiqliklə uyğun supremumları təmin edən universal ölçülən φ_t selektorları vardır (supremumun alındığı h və x-lər üçün hətta supremumu hökmən təmin edən). Bu modeldə optimallıq tənliyi ödənilir və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε – optimal universal ölçülən strategiyalar vardır.

Bu və ya digər modellərdə hər hansı bir K sinfinin s t r a t e g i y a l a r ı n ı n k a f i l i y i sualı böyük maraq doğurur. Kafilik müxtəlif mənalarda anlaşılır: 1) w^{π} statistik qiymətlərinin $\pi \in K$ üzrə supremumu w dəyərinə (qiymətinə) bərabərdir; 2) K sinfinə daxil olan optimal (ε – optimal və s.) π strategiya vardır; 3) ixtiyari σ strategiyası üçün $w^{\pi} \geq w^{\sigma}$ şərtini ödəyən $\pi \in K$ strategiyası vardır və s. K sinfi kimi randomlanmamış

strategiyalar çoxluğuna, Markov, stasionar, semi – Markov (yəni x_0 və x_1 elementləri və h_t tarixindən asılı olan) strategiyalar çoxluqları və bəzi başqa çoxluqlara baxılır. Ölçülənlik şərti olmadığı hesabi fəzalarlı diskret zamanlı İ. t. p. üçün bu suallar olduqca önə çəkilmişdir. Məs., mənfi bircins Markov modelində Markov statistikaları kafi olduğu halda, stasionar strategiyalar [1) anlamında] kifayət olmur və ya müsbət bircins Markov modelində stasionar ε – optimal strategiyalar olmaya bilər, lakin stasionar $\varepsilon\upsilon$ – optimal strategiyalar mövcuddur. Belə növ nəticələr haqqında məlumatlar [25], [26]-da şərh olunmuşdur.

X və A-nın sonlu fəzalar olduğu bircins Markov modelləri üçün dəyər və optimal strategiyaların tapılması üçün hesablama alqoritmləri daha çox işlənilmişdir. Bu ən əvvəl interativ qaydalar (üfüqün böyüdülməsindən və ya strategiyaların tədricən yaxşılaşmasından ibarət) və xətti proqramlama metodlarıdır.

Natamam informasiyalı diskret zamanlı İ. t. p.-də t anında x_t vəziyyəti $(y_t,\ z_t)$ cütüdür, burada y_t müşahidələnən, z_t müşahidələnməyən komponentlərdir. $A(h_t)$ çoxluqları və $\pi(B\,|\,h_t)$ strategiyaları burada yalnız müşahidəolunan $y_0\, a_1\, \ldots\, y_t$ tarixindən asılı olur. Başlanğıc vəziyyəti kimi $(y,\ \mu)$ cütü götürülür, burada μ müşahidələnməyən z_0 komponentinin aprior paylanmasıdır. Bu cür Beyes yanaşmasında t anında z_t komponentlərinin μ_t paylanmaları kafi statistikalar olur və $(y_t,\ z_t)$-nin $(y_t,\ \mu_t)$ ilə formal əvəz olunması məsələni tam informasiyalı prosesə gətirir. Bu nəticə natamam məlumatlar üzrə optimal idarəetmənin spesifik çətinliklərini aradan qaldırmır. Beyes yanaşmasından başqa minimaks yanaşma da mümkündür. Diskret zamanlı adaptiv İ. t. p.-lər də araşdırılır ki, bu halda idarəolunan obyekt tam şəkildə məlum olmur və funksionalın maksimizasiyası obyektin parametrlərinin identifikasiyası ilə eyni zamanda həll olunur (bax, [21]).

Diskret zamanlı İ. t. p.-in ümumi sxemi hər biri digərindən asılı olmayan tədqiqat oblastına çevrilən bir çox istiqamətləri əhatə edir. Bu (diskret zaman halında) ən yaxşı seçim məsələsi, optimal dayanma, ehtiyatları idarəetmə, ikiqollu bandit məsələsi, Kalman – Byusi filtri, iqtisadiyyatın ehtimal modelləridir.

Bax, *İdarəolunan Markov zənciri*, *Dinamik proqramlama*; həssas kriterilər.

Əd.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [2] Bellman R., «J. Math. Mech.», 1957, v. 6, p. 679–84; [3] Ховард Р.-А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964; [4] Blackwell D., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 719–26; [5] Blackwell D., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 226–35; [6] Blackwell D., «Proc. 5-th Berk. Symp.», 1967, v. 1, p. 415–18; [7] Strauch R. E., «Ann. Math. Statist.», 1966, v. 37, p. 871–90; [8] Dubins L. E., Savage L. J., How to gamble if you must, N. Y., 1965; [9] Ширяев А. Н., «Trans. 3-rd Prague Conf. Inform. Theory…», 1964, p. 657–81; [10] Ширяев А. Н., «Trans. 4-th Prague Conf. Inform. Theory…», 1967, p. 131–203; [11] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, с. 3–18; [12] Крылов Н. В., «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, с. 747–50; [13] Hinderer K., Foundations of non-stationary dynamic programming, B., 1970; [14] Blackwell D., Freedman D., Orkin M., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, p. 926–41; [15] Hordijk A., Dynamic programming and Markov potential theory, Amst., 1974; [16] Strieb e l Ch., Optimal control of discrete time stochastic systems, B., 1975; [17] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [18] Майн Х., Осаки С., Марковские процессы принятия решений, пер. с англ., М., 1977; [19] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [20] Бертсекас Д., Шрив С., Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени, пер. с англ., М., 1985; [21] Срагович В. Г., Адаптивное управление, М., 1981; [22] Whittle P., Optimization over time, v. 1–2, N. Y., 1982–83; [23] Schal M., «Proc. 6-th Conf. Probab. Theory», Bus., 1981, p. 205–19; [24] Юшкевич А. А., Читашвили Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [25] Файнберг Е. А., Сонин И. М., Statistics and control of stochastic processes: Steklov seminar 1984, N. Y., 1985, p. 69–101.

İDARƏOLUNMA « управляемость; controllability » – ixtiyari başlanğıc vəziyyətindən keçən müddət ərzində idarəolunan sistemin ixtiyari vəziyyətinə çata bilinmə mümkünlüyüdür. $\mathbf{x}$, – n – ölçülü vəziyyət vektoru, u , – n – ölçülü idarəetmə vektoru, $A(t)$, $B(t)$ – uyğun olaraq, $n\times n$ və $n\times r$ – ölçülü matrislər olsun; $\mathbf{x} = A(t)\,\mathbf{x} + B(t)\,u$ xətti sistemi $[s,\ t]$ zaman parçasında, yalnız və yalnız,

$$\int_s^t F(t,\ \upsilon)\,B(\upsilon)\,B^{\mathsf{T}}(\upsilon)\,F^{\mathsf{T}}(t,\ \upsilon)\,d\upsilon$$

matrisinin cırlaşmayan olduğu halında idarəolunan sistemdir (F sistemin keçid matrisidir).

Əgər A, B zamandan asılı olmayan sabitlərdirsə, onda

$$\operatorname{rang}\,[\,B\;AB\;A^2B\;\ldots\;A^{n-1}B\,] = n$$

şərti idarəolunma şərti adlanır. Bu halda $(A,\ B)$ matrislər cütü idarəolunan adlandırılır.

$$dx(t) = Ax(t)\,dt + B\,dw(t)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli olan $x(t)$ Qauss prosesinin hər bir $t > 0$ qiymətində cırlaşmayan kovariasion matrisi, yalnız və yalnız, o halda vardır ki, $(A,\ B)$ idarəolunan matrislər cütü olsun. İ. anlayışı Kalman – Byusi filtrinin asimptotik xassələrinin araşdırılmasında və sonsuz zaman intervalında stoxastik xətti sistemləri idarəetmə məsələlərində mühüm rola malikdir.

Əd.: [1] Kalman R. E., «Bol. Soc. Mat. Mexicana», 1960, v. 5, p. 102–19; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Дэвис М. Х. А., Линейное оценивание и стохастическое управление, пер. с англ., М., 1984.

İDEAL QAZ « идеальный газ; ideal gas » statistik mexanikada – bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəciklərin sonsuz sistemidir (xarici meydan olmadığı halda sərbəst qaz nəzərdə tutulur). İ. q. üçün ehtimali terminologiyada *Gibbs təsadüfi meydanı* – hissəcikləri sıxlığı $\lambda > 0$ parametri ilə təyin olunan Puasson nöqtəvi prosesidir (λ-nın qiyməti Gibbs konfiqurasion paylanmasının ümumi tərifində z-in aktivliyi ilə üst-üstə düşür). Sürətlər nəzərə alındıqda bu proses eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $p \in \mathbb{R}^d$ nişanlarlı (impulslarlı), $\mathbb{R}^d$-də Puasson – nişanlanmış nöqtəvi təsadüfi meydanıdır. İmpulsun «fərdi» («individual») paylanması paylanmasının sıxlığı

$$(2\pi\beta^{-1})^{-d/2}\,\exp\left(-\beta\,\|\,p\,\|^{d/2}\right)$$

olan Maksvell paylanmasıdır. Lakin İ. q. halında Gibbs paylanması invariant ölçülər çoxluğunu tamamilə əhatə etmir (bax, *Dinamik sistem*(i) statistik mexanikanın): Maksvell paylanmasını ixtiyari impuls paylanması $\pi(d\,p)$ ilə əvəz

etmək olar, $p \in \mathbb{R}^d$. Belə invariant ölçülü İ. q. dinamik sistemi sadəlik naminə İ. q.-ın tarazlıqlı dinamik sistemi adlanır. Əgər π-nin sıfırda atomu yoxdursa, İ. q.-ın tarazlıqlı dinamik sistemi K – sistemdir (bax, [1]) və bundan başqa, hətta B – sistemdir (bax, [2]). Əgər başlanğıc vəziyyəti μ əvəzinə $\mathcal{M}$ faza fəzasında ixtiyari, lakin bəzi «ortalanma» və fəzavi korrelyasiyaların zəifləndirilməsi şərtlərini ödəyən ehtimal ölçüsü götürülərsə, onda $\mu_t = \mu_0 S_t$ ölçüsü $t \to \pm\infty$ olduqda təsvir olunmuş tip invariant ölçüyə yığılır; $\lambda > 0$ və $\pi(d\,p)$ parametrləri μ ölçüsü üzrə təyin olunurlar.

İ. q. dinamik sisteminə harmonik ossilyatorlar sistemi yaxındır, burada invariant ölçülər kimi uyğun spektral funksiyaları ilə Qauss paylanmaları iştirak edir (bax, [3]).

İ. q. dinamik sistemi statistik mexanikanın tamamilə inteqrallanan sisteminin ən sadə misalıdır; digər misal $\mathbb{R}$ düzxətti üzərində bərk oxlu dinamik sistemdir ki (bax, [2], [4], [5]), bu sistemin araşdırılması İ. q. araşdırılmasına gətirilə bilinir. Son zamanlar İ. q.-ın «kükrəntilərinin» öyrənilməsinə başlanılmışdır (bax, [6], [7]). *Lorens qazı* xüsusilə qeyd olunmalıdır, belə ki, o, İ. q. ilə müqayisədə daha güclü erqodik xassələri aşkar edir.

Əd.: [1] Волковысский К. Л., Синай Я. Г., «Функц. анализ и его прилож.», 1971, т. 5, в. 3, с. 19–21; [2] Aizenman M., Goldstein S., Lebowitz J., «Comm. Math. Phys.», 1975, v. 39, № 4, p. 289–301; [3] Lanford O., Lebowitz J., в кн.: Lecture Notes in Physics, v. 38, Berk. – [a. o.], 1975, p. 144–77; [4] Синай Я. Г., «Функц. анализ и его прилож.», 1972, т. 6, в. 1, с. 41–50; [5] Добрушин Р. Л., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, М., 1979, с. 147–254; [6] «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 101, p. 363–82; [7] Malyshev V. A., Nikolaev I., «J. Stat. Phys.», 1984, v. 35, № 3-4, p. 375–79; [8] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 78, № 4, p. 479–97.

İDEAL METRİKA « идеальная метрика; ideal metric » s tərtib ideal metrika – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu $\mathfrak{X}$-də elə $\mu(X, Y)$ *ehtimal metrikasıdır* ki, $\mathfrak{X}$-də hər hansı $\mathbb{U}$ kommutativ əməlinə nəzərən requlyarlıq xassəsinə malikdir, yəni

$$\mu(X \mathbb{U} Z,\ Y \mathbb{U} Z) \le \mu(X,\ Y) \qquad (1)$$

və eyni zamanda müsbət ədədlərin multiplikativ qrupuna izomorf olan $T_c : \mathfrak{X} \leftrightarrow \mathfrak{X},\ c > 0$ inikaslar qrupu üçün s tərtib bircins metrikadır, yəni

$$\mu(T_c X,\ T_c Y) = c^s \mu(X,\ Y). \qquad (2)$$

Bu halda ehtimal metrikaları üçün tam mənada ehtimal metrikaları kimi sadə və mürəkkəb İ. m.-lar da təyin oluna bilinir.

Misallar. Həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunda $T_c X = cX$ çevirməsi və $X \mathbb{U} Y = X + Y$ əməlinə nəzərən mürəkkəb İ. m. halında requlyarlıq «geniş» mənada, sadə İ. m. halında «dar» mənada anlaşılır (*Ehtimali metrika*; requlyarlıq).

1. $\mu(X, Y) = \mathbf{M}\left|X - Y\right|^{\alpha},\quad 0 < \alpha \le 1$, – α tərtib mürəkkəb İ. m.-dır.

2. $\mu_2(X,\ Y) = \sup\{|\,\mathbf{M}((X + x)^s - (Y + x)^s)|\colon x \in \mathbb{R}^1\}$, – s tərtib sadə İ. m.-dır (s tam ədəddir və ≥ 1). μ_2 metrikasının sonlu olması üçün zəruri şərt

$$\mathbf{M}(X^k - Y^k) = 0,\quad k = 1, \ldots, s - 1 \qquad (3)$$

sistem tənliklərinin ödənilməsidir. (3) ödənildiyi halda İ. m. $\mu_2 = \left|\,\mathbf{M}(X^s - Y^s)\right|$ düsturu ilə ifadə olunur. $\mu_2(X,\ Y) = 0$ bərabərliyi isə $F_X = F_Y$ bərabərliyini doğurmur, burada F_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

3. m tam ədəd və $0 < \gamma \le 1$ olduqda, $s = m + \gamma > 0$ olsun. D_s, – m tərtib törəmələri olan,

$$\left|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)\right| \le \left|x - y\right|^{\gamma},\quad x,\ y \in \mathbb{R}^1$$

şərtini ödəyən, $\mathbb{R}^1$-də məhdud f funksiyalarının çoxluğu olsun;

$$\zeta_s(X,\ Y) = \sup\{\left|\mathbf{M}(f(X) - f(Y))\right|\colon f \in D_s\}_{\zeta}$$

s tərtib sadə İ. m.-dır. $s \ge 1$ tam ədəd olduqda bu metrika aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\zeta_s(X,\ Y) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int \left| \int_{-\infty}^{x} (x - t)^{s-1}\, d(F_X(t) - F_Y(t)) \right| dx,$$

burada Γ – qamma funksiyadır.

4. f_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası olsun. İxtiyari həqiqi s üçün

$$\mu_3(X,\ Y) = \sup\{|\,t|^{-s}\left|f_X(t) - f_Y(t)\right|\colon \mathbb{R}^1\}$$

– s tərtib sadə İ. m.-dır.

5. $L(X, Y)$ – *Levi metrikası* olsun, onda

$$\mu_4(X,\ Y) = \sup\left\{\frac{2}{r^2}\int_0^r L(xX,\ xY)\,dx\colon r > 0\right\}$$

birinci tərtib sadə İ. m.-dır. Əgər ρ *müntəzəm metrika* və $F_X^{-1}(x) = \sup\{u : F_X(u) \le x\}$, – F_X funksiyasına tərs funksiya olarsa, bu metrika digər şəkildə –

$$\mu_4(X,\ Y) = \rho(F_X^{-1},\ F_Y^{-1})$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Digər modellərdə İ. m.-ya aid misallar.

6. $\mu_5(X,\ Y) = \sup\{|\,x|^s\left|F_X(x) - F_Y(x)\right|\colon x \in \mathbb{R}^1\},\ s \ge 0$ – $T_c X = cX$ çevirməsi və $X \mathbb{U} Y = \max(X, Y)$ əməlinə nəzərən s tərtib sadə İ. m.-dır.

7. $\mu_6(X,\ Y) = \sup\{|\,t|^{-s}\left|W_X(t) - W_Y(t)\right|\colon t \in \mathbb{R}^1\},\ s \ge 0$ $T_c X = |\,x|^c \operatorname{sign} x$ çevirməsi və $X \mathbb{U} Y = XY$ əməlinə nəzərən sadə İ. m.-dır, burada W_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik çevirməsi, $\|\cdot\|$ – matrislər normasıdır.

8. Ehtimal metrikaları müxtəlif $\mathbb{U}$ kommutativ əməllərinə nəzərən İ. m. ola bilər. Məs., *orta metrika* $X \mathbb{U} Y = X + Y$, $X \mathbb{U} Y = \max(X, Y)$ əməllərinə və $T_c X = cX$ çevirməsinə nəzərən, $s = 1$ tərtib sadə İ. m.-dır.

İ. m.-lar xətti modellərlə əlaqəli xarakterizasiya məsələlərində (xüsusilə də, limit teoremlərinin yığılma sürətinin qiymətləndirilməsində) dayanıqlılığı kəmiyyətcə analiz etməkdə münasib alətdir.

$X_1, ..., X_n$, – $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 = 1$ şərtlərini ödəyən eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $Y_1, ..., Y_n$ – standart normal qanuna tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $S_n = (X_1 + ... + X_n)/\sqrt{n}$, $S_n^* = (Y_1 + ... + Y_n)/\sqrt{n}$ normalanmış cəmlərinə baxılır. S_n^* kəmiyyətləri n -in bütün qiymətlərində standart normal qanunla paylanır. $s > 2$ olduqda ζ_s metrikasının semi – additivlik və bircinslilik xassəsindən istifadə etdikdə

$$\zeta_s(S_n,\ Y_1) = \zeta_s((X_1 + ... + X_n)/\sqrt{n},\ (Y_1 + ... + Y_n)/\sqrt{n}) =$$
$$= n^{-s/2}\ \zeta_s(X_1 + ... + X_n,\ Y_1 + ... + Y_n) \le$$
$$\le n^{-s/2} \sum_{k=1}^{n} \zeta_s(X_k,\ Y_k) = n^{1-s/2}\ \zeta_s(X_1,\ Y_1) \qquad (4)$$

olduğu alınır.

Əgər $\zeta_s = (X_1,\ Y_1)$ sonlu olarsa, buna görə isə (3) və $\mathbf{M}\left|X\right|^s < \infty$ şərtlərinin ödənilməsi tələb olunur, onda (4) qiymətləndirilməsi məzmunlu xarakter daşıyır və ümumi vəziyyətdə $n \to \infty$ olduqda $\zeta_s(S_n,\ Y_1)$ -in dəyişmə qaydasını düzgün ifadə edir.

Əgər $\mathbb{U}$ əməli $\mathfrak{X}$ -də qrup xarakterli olarsa, onda bu əməllə bağlı $s = 0$ tərtib μ İ. m.– x ə t t i i n v a r i a n t m e t r i k a d ı r, bu isə aşağıdakı mənada anlaşılır: ixtiyari sabit a və $c > 0$ üçün

$$\mu(T_c(X\,\mathbb{U}a), T_c(Y\,\mathbb{U}a) = \mu(X,\ Y)$$
$$X,\ Y \in \mathfrak{X}.$$

Belə İ. m.-lar limit teoremləri nəzəriyyəsində xüsusi maraq doğurur, belə ki, bunlardan istifadə etdikdə $U_n = T_{1/Cn}X_n\,\mathbb{U}\,a_n$, $V_n = T_{1/Cn}Y_n\,\mathbb{U}a_n$ – təsadüfi kəmiyyətlərinin çevrilmiş ardıcıllıqlarından çevrilməmiş X_n, Y_n ardıcıllıqlarına keçdikdə və əksinə, approksimasiyanın dəqiqliyi dəyişmir.

İndikator metrikası və *tam variasiya metrikası* yuxarıda təsvir edilmiş ixtiyari $\mathbb{U}$ əmələri və T_c çevirmələri üçün $s = 0$ tərtib İ. m.-dır. T_c avtomorfizmlər sistemi olarsa, yəni ixtiyari $X,\ Y \in \mathfrak{X}$ üçün $T_c(X\,\mathbb{U}Y) = (T_cX)\,\mathbb{U}(T_cY)$, $c > 0$ olarsa, seçilmiş T_c və $\mathbb{U}$ əməlinə nəzərən arzuolunan tərtib İ. m.-nın qurulması üçün universal üsullar məlumdur. Məs., ν $\mathbb{U}$ və T_c çevirməsinə nəzərən δ tərtib İ. m. olsun. Əgər ν «dar mənada» requlyarlıq xassəsinə malik olarsa, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ olduqda Z təsadüfi kəmiyyəti X və Y -dən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət olarsa,

$$\mu(X,\ Y) = q\{x^\gamma \nu(X\,\mathbb{U}T_XU,\ Y\,\mathbb{U}T_XU)\}$$

funksionalını qurmaq olar və $q(w)$ funksionalı isə mənfi olmayan $w(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$ funksiyalarının $\mathfrak{W}$ çoxluğunda təyin olunmuşdur və ixtiyari $w,\ w_1, w_2 \in \mathfrak{W}$ üçün aşağıdakı xassələrə malikdir.

1) $q(w) \ge 0$, $q(0) = 0$;

2) $q(w_1) \le q(w_1 + w_2) \le q(w_1) + q(w_2)$;

3) $q(w(u/c)) \le c^\alpha q(w(u))$, $c > 0$;

4) $q(cw) \le c^\beta q(w)$,

burada $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^1$ sabitlərdir. Onda μ ν metrikasında olduğu kimi requlyarlıq tipi olan $s = d + \beta(\gamma + \delta)$ tərtib sadə İ. m.-dır.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 264–87; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986, гл. 1.

İDEMPOTENT ÖLÇÜ q r u p d a **« идемпотентная мера** н а г р у п п е; **idempotent measure** o n a g r o u p **»** – lokal kompakt qrupda $\mu * \mu = \mu$ xassəli *ehtimal ölçüsü* μ -dür, $*$ simvolu qrupda ölçülərin kompozisiya əməli (konvolyusiya) işarəsidir.

Lokal kompakt G qrupunda təyin olunmuş ehtimal ölçülərinin semi – qrupunda $\mu * \mu = \mu$ tənliyinin həlləri çoxluğu G qrupunun kompakt altqruplarında Haar paylanmalarından ibarətdir (bax, [1]). Deməli, kompakt qrupda qeyri – trivial idempotent ölçülər mövcuddur, məs., bütün qrupun Haar ölçüsü kimi, lakin lokal kompakt qeyri – periodik qrupda (yəni vahid olmayan kompakt altqruplara malik olmayan) yalnız trivial idempotent ölçü vardır və bu ölçü qrupun vahidində cırlaşan paylanma ilə üst-üstə düşür.

İ. ö.-yə baxılması kompakt qruplarda ehtimal paylanmaları üçün limit teoremlərində onların yaranması və burada onların mühüm rol oynaması ilə bağlıdır.

G kompakt qrupunda daşıyıcısı G ilə üst-üstə düşən İ. ö.-nün xarakteristik xassəsi G -nin ixtiyari elementinə sağdan (və ya soldan) vurulmaya görə invariantlıq xassəsidir. Belə xassəli skalyar vuruq dəqiqliyinə qədər yeganə ölçü ixtiyari lokal kompakt qrupda da təyin olunur və bu ölçü (sağ və ya sol) H a a r ö l ç ü s ü adlanır (bax, [2]).

Əd.: [1] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально-компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] В е й л ь А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950.

İFLAS MƏSƏLƏSİ « разорения задача; ruin problem / gambler's ruin problem » – *təsadüfi dolaşmanın* verilən intervaldan kənara çıxışı ilə bağlı məsələdir. $X_1, X_2, ...$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər,

$$S_n = X_1 + ... + X_n,$$
$$\tau = \tau(a,\ b) = \min\{n : S_n \notin (-a, b)\}$$

$S_1, S_2, ...$ ardıcıllığının $(-a,\ b)$ intervalından ilk çıxış anıdır, $-a < 0 < b$. Əgər $X_j \not\equiv 0$ olarsa, onda $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$ bərabərliyi həmişə ödənilir. İ. m. $\mathbf{P}\{S_\tau \le -a\}$, $\mathbf{P}\{S_\tau \ge b\}$ və

$$\mathbf{P}\{S_\tau \in A,\ \tau = n\},\quad \mathbf{P}\{S_n \in B,\ \tau > n\}, \qquad (*)$$
$$A \subset (-\infty, -a) \cup [b, \infty),\quad B \subset (-a, b)$$

– birgə paylanmalarının və onların ədədi xarakteristikalarının tapılması ilə bağlıdır. Bu araşdırmaların mühümlüyü riyazi statistikada (*Kolmoqorov kriterisi*, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*, *Ardıcıl analiz*), *xidmət sistemi nəzəriyyəsində* (məhdudiyyətlərli sistemlər), sığorta məsələlərində, ehtiyatların qorunub-saxlanılmasında və s.-də çoxsaylı tətbiqlərilə əsaslandırılır.

Tarixən bu məsələ ayrı-ayrı partiyalar ardıcıllığından ibarət, nəticəsi birqiymətli təyin olunmayan oyunlarla bağlı yaranmışdır. Hər bir partiyada, digər partiyaların nəticələrindən asılı olmayaraq,

oyunçu öz rəqibindən p ehtimalı ilə bir xal qazanır, $q=1-p$ ehtimalı ilə bir xal itirir. Əgər X_j oyunçunun j-ci partiyada uduşudursa, yəni

$$\mathbf{P}\{X_j=1\}=1-\mathbf{P}\{X_j=-1\}=p$$

olarsa, onda S_n oyunçunun n sayda partiyadakı uduşudur. Oyunçunun ilkin kapitalının a, onun rəqibinin ilkin kapitalının b vahid olduğu fərz olunur. Onda $\{S_\tau \le -a\}$ hadisəsi oyunçunun müflis olması, $\{S_\tau \ge b\}$ isə rəqibin müflis olması hadisələri olacaqdır. Bu hadisələrin ehtimalları:

$$\mathbf{P}\{S_\tau \le -a\}=\frac{1-(p/q)^b}{1-(p/q)^{a+b}}, \quad p\ne q;$$

$$\mathbf{P}\{S_\tau \le -a\}=\frac{b}{a+b}, \quad p=q=1/2$$

münasibəti ilə təyin olunur. İkinci düsturdan aydındır ki, rəqibin kapitalı b oyunçunun ilkin kapitalı a ilə müqayisədə çox olduqda, hətta $p=q=1/2$ olduqda, oyun oyunçu üçün vahidə yaxın ehtimalla sona çatır və bu halda

$$\mathbf{M}\tau=\frac{a}{q-p}-\frac{a+b}{q-p}\,\frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^{a+b}}, \quad p\ne q;$$

$$\mathbf{M}\tau=ab, \quad p=q.$$

Aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$\mathbf{P}\{S_\tau \le -a,\ \tau=n\}=\frac{2^n}{a+b}\,p^{(n-a)/2}q^{(n+a)/2}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{a-1}\cos^{n-1}\frac{\pi k}{a+b}\,\sin\frac{\pi k}{a+b}\,\sin\frac{\pi ak}{a+b},$$

$$\mathbf{P}\{\tau>n\}=\frac{(4pq)^{(n+1)/2}}{a+b}\sum_{k=1}^{a+b-1}\frac{\cos^n\frac{k\pi}{a+b}\sin\frac{k\pi}{a+b}}{1-2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{a+b}}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{b/2}\sin\frac{kb\pi}{a+b}+\left(\frac{q}{p}\right)^{a/2}\sin\frac{ka\pi}{a+b}\right].$$

Bu ehtimallar üçün binomial əmsallar terminlərilə də ifadələr vardır (bax, [3]) və burada A. Muavr (A. Moivre), N. Bernulli (N. Bernoulli), J. Laqranj (J. Lagrange), P. Laplas (P. Laplace) kimi alimlərin adları ilə bağlı, bu düsturların alınma tarixi də ətraflı şərh olunmuşdur.

Ümumi halda (*) paylanmalarının araşdırılması böyük çətinliklərə gətirir. Əgər X_j-nin paylanması elə olarsa ki, $\mathbf{M}(e^{i\lambda X_j},\ X_j<0)$ və ya $\mathbf{M}(e^{i\lambda X_j},\ X_j>0)$ rasional funksiyadır (tamqiymətli X_j-lər üçün $e^{i\lambda}$-ya nəzərən rasionaldır), onda (*) paylanmalarının ikiqat çevirmələri üçün aşkar düsturlar vardır (bax, [4]). Məs.,

$$\mathbf{P}\{X_1\ge x\}=Ce^{-\alpha x},\ C>0,\ \alpha>0,\ x>0$$

və ya tamqiymətli X_1-lər üçün

$$\mathbf{P}\{X_1=k\}=Cp_1^{k-1}, \quad C>0, \quad p_1\ge 0, \quad k=1,2,\ldots$$

şərtlərinin ödənilməsi belə hala misaldır. (*) ehtimalları üçün dəqiq ifadələrin alınması məqsədilə ikiqat çevirmələrin çevirməsi çətin analitik məsələ olub, yalnız bəzi xüsusi hallar üçün alınmışdır. Bununla belə, X_j – paylanması üçün geniş fərziyyələrlə (*) paylanmaları üçün $a,b\to\infty$ olduqda asimptotik ayrılışlar məlumdur (bax, [1], [2]).

Qeyd olunmuş nəticələrin çoxunun analoqları kəsilməz zamanlı təsadüfi proseslərin intervaldan çıxışının öyrənilməsi zamanı alınmışdır.

Əd.: [1] К о р о л ю к В. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1962, т. 7, в. 4, с. 393–409; [2] Л о т о в В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 475–85; в. 4, с. 873–79; [3] T a k a c s L., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1969, v. 64, № 327, p. 889–906; [4] K e m p e r m a n J. H. B., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 4, p. 1168–93.

***İKİ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT ARASINDA MƏSAFƏ « расстояние между двумя случайными величинами; distance between two random variables »** – $\xi=\xi(\omega)$ və $\eta=\eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri arasındakı məsafə

$$r(\xi,\eta)=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}\left|\mathbf{P}\{\omega:\xi(\omega)<x\}-\mathbf{P}\{\omega:\eta(\omega)<x\}\right|=$$

$$=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}\left|F_\xi(x)-F_\eta(x)\right|$$

münasibətilə təyin olunan $r(\xi,\eta)$ funksiyasına deyilir; bu funksiya K o l m o q o r o v məsafəsi və ya m ü n t ə z ə m məsafə də adlanır; $F_\xi(x)$ və $F_\eta(x)$ uyğun olaraq, $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyalarıdır. $r(\xi,\eta)$ əvəzinə bəzən $r(F_\xi,F_\eta)$ işarələməsindən də istifadə olunur. r funksiyası $\mathbb{R}^1$-də təyin olunmuş bütün paylanmalar fəzasında metrikadır. Doğrudan da,

1) $r(\xi,\eta)\ge 0$ və $r(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow\xi\overset{d}{=}\eta$;
2) $r(\xi,\eta)=r(\eta,\xi)$;
3) $r(\xi,\eta)\le r(\xi,\gamma)+r(\gamma,\eta)$.

Bu şərtlərdə ξ, η, γ – ixtiyari təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] С т о я н о в Й., Контрпримеры в теории вероятностей, М., 1999.

***İKİQAT ARDICILLIQ**(ğ ı) t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t l ə r i n **« двойная последовательность** с л у ч а й н ы х в е л и ч и н; **double sequence** o f r a n d o m v a r i a b l e s **»** – $\{X_{k,n}\}$; $k=1,2,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllığın n-ci sətrini (seriyasını) təşkil edən təsadüfi kəmiyyətlər qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, İ. a. s e r i y a l a r s x e m i adlanır (bax, *Seriyalar sxemi*, *üçbucaq sxemi*).

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Теория вероятность и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2., М., 1984.

İKİQAT STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES « двоично стационарный случайный процесс; dyadic stationary random process » – bax, *Spektral nəzəriyələr*(i) q e y r i – s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n.

İKİQAT STOXASTİK MATRİS « дважды стохастическая матрица; doubly stochastic matrix » – sətir elementlərinin cəmi və eyni zamanda sütun elementlərinin cəmi də 1-ə bərabər olan, $\| p_{ij} \|$ *stoxastik matrisinə* deyilir:

bütün i-lər üçün $\sum_j p_{ij} = 1$,

bütün j-lər üçün $\sum_i p_{ij} = 1$.

Əgər keçid ehtimalları matrisi İ. s. m. olan bircins Markov zəncirinin bütün vəziyyətləri qeyri – periodik mühüm vəziyyətlərin yeganə bir sinfini təşkil edərsə (bax, *Markov zəncirləri*; vəziyyətlərin təsnifatı), onda vəziyyətlər sayı sonlu olarsa, bütün final ehtimalları bir-birinə bərabər olur, lakin vəziyyətlər sayı sonsuz olarsa, onda bütün bu vəziyyətlər ya qayıdışsız və ya sıfır vəziyyətlərdir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

***İKİQAT STOXASTİK PUASSON PROSESİ (KOKS PROSESİ) « дважды стохастический пуассоновский процесс; doubly stochastic Poisson process »** – nüvə təbabətində, optikada, elektrofiziologiyada və digər sahələrdə istifadə olunan *təsadüfi prosesdir* ([1], [2], [3]). $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, $R = (-\infty, +\infty)$; $\mathscr{B}$, – R-in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr; M – tamqiymətli hesabi – additiv Borel ölçülərinin çoxluğu; $\mathscr{M}$ –

$$B = \{N(\cdot) : N(A_1) = r_1, ..., N(A_k) = r_k\}, \quad k \geq 1,$$

$$r_1 \geq 0, ..., r_k \geq 0,$$

$$A_1, ..., A_k \in \mathscr{B}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

tipli silindrik çoxluqların doğurduğu uyğun σ – cəbr; $Q(\cdot)$, – $\mathscr{F}$-də təyin olunmuş P paylanmasının doğurduğu $\mathscr{M}$-də təyin olunmuş paylanma olsun. Daha sonra, $N(\cdot)$ – sayıcı ölçü, $\Lambda(\cdot) = \mathbf{M}N(\cdot) \in W$ – hesabi – additiv Borel ölçülərinin çoxluğu, $\mathscr{U}$ –

$$C = \{\Lambda(\cdot) : \Lambda(A_i) = x_i, \ i = 1, ..., k\},$$

$$A_i \in \mathscr{B}, \ A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j, \ x \geq 0, \ i, j = 1, ..., k, \ k \geq 1$$

tipli silindrik çoxluqların doğurduğu, W-dan olan altçoxluqların σ – cəbri olsun.

Əgər ixtiyari məhdud $B \in \mathscr{B}$ çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}\{N(B) = k\} = \frac{[\Lambda(B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(B)}, \quad k = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

olarsa, $N(\cdot)$ nöqtəvi prosesi intensivlik ölçüsü $\Lambda(\cdot) \in W$ olan *Puasson nöqtəvi prosesi* adlanır; $N(B_1), ..., N(B_n)$, – $n \geq 1$, $B_i \in \mathscr{B}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$ şərtlərilə verilən ixtiyari çoxluqlar üçün asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Xüsusi halda, $\lambda < \infty$ intensivlikli stasionar Puasson prosesi üçün $\Lambda(B) = \lambda |B|$, $B \in \mathscr{B}$ olur, $|B|$, – B çoxluğunun Lebeq ölçüsüdür. İxtiyari $\Lambda(\cdot) \in W$ üçün $\mathscr{M}$-də təyin olunmuş və (1) münasibətini ödəyən nöqtəvi prosesin paylanması olan yeganə $Q_\Lambda(\cdot)$ ölçüsü vardır (bax, [4]).

$\pi(\cdot)$, – $(W, \mathscr{U})$-da təyin olunmuş hər hansı ehtimal ölçüsü olarsa, paylanması $\int_W Q_\Lambda(\cdot)\, \pi(d\Lambda)$ olan $N(\cdot)$ nöqtəvi prosesinə ikiqat stoxastik Puasson prosesi (Koks prosesi, [1]) deyilir. Başqa sözlə, İ. s. P. p.-nin intensivlik ölçüsü $\Lambda(\cdot) \in W$ paylanması $\pi(\cdot)$ olan təsadüfi elementdir.

Əgər $N(\cdot)$ İ. s. P. p.-dirsə və $\Lambda(\cdot)$ təsadüfi ölçüsünün paylanması $\pi(\cdot)$-dirsə, onda

$$\mathbf{P}\{N(B) = k\} = \int_W \frac{[\Lambda(B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(B)} \pi(d\Lambda) =$$

$$= M\left\{\frac{[\Lambda(B)]^k}{k!} e^{-\Lambda(B)}\right\}$$

bərabərliyi doğrudur.

Misal. $N(\cdot)$, – $t \geq 0$ qiymətlərində təyin olunmuş İ. s. P. p., $\Lambda(t) = \Lambda(0, t] = \xi G(t)$, $t \geq 0$; ξ – mənfi olmayan, paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \ \Gamma(\beta+1) = \int_0^{+\infty} t^\beta e^{-t}\, dt, \\ 0, & t < 0, \ \beta > -1, \ \alpha > 0 \end{cases}$$

(Γ – paylanma) olan təsadüfi kəmiyyət, $G(t)$ – mənfi olmayan monoton artan funksiya, $G(0) = 0$ olsun. Onda paylanması

$$\mathbf{P}\{N(t) = n\} = \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)} \left[\frac{\alpha}{\alpha + G(t)}\right]^{\beta+1} \times$$

$$\times \left[\frac{G(t)}{\alpha + G(t)}\right]^n, \quad n \geq 0$$

münasibətilə verilən $N(t) = N(0, t]$, $t \geq 0$ prosesinə bircins olmayan Poya prosesi deyilir.

İ. s. P. p.-ləri sinfi ilə digər proseslər sinifləri arasında əlaqələr mövcuddur.

İ. s. P. p.-ləri sinfinin digər proseslər sinfi ilə bəzi əlaqəsi aşağıdakı nəticələrdə şərh olunmuşdur.

1. $\Lambda(\cdot)$ təsadüfi ölçüsü ilə təyin olunan İ. s. P. p., yalnız və yalnız, o halda *bərpa prosesidir ki*, $\Lambda^{-1}(x)$ stasionar və *asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proses* olsun. 2. Bərpa prosesi, yalnız və yalnız, o halda İ. s. P. p.-dir ki,

$$f^*(s) = \frac{1}{1 - \ln g^*(s)}, \quad f_0^*(s) = g_0^*(s) f^*(s)$$

olsun, burada $g^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dG(x)$, $G(x)$ – hər hansı *sonsuz bölünən paylanma funksiyası*, $G(0) < 1$,

$g_0^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dG_0(x)$ hər hansı $G_0(x)$ paylanma funksiyası üçün təyin olunmuş funksiyalardır. 3. Bu iki ifadə

$$\mathbf{M}e^{-s\Lambda^{-1}(0)} = g_0^*(s), \quad \mathbf{M}e^{-s[\Lambda^{-1}(1) - \Lambda^{-1}(0)]} = g^*(s)$$

münasibətləri ilə əlaqəlidir.

4. Paylanma funksiyası $F(x)$ olan stasionar bərpa prosesi, yalnız və yalnız, o halda İ. s. P. p.-dir ki, elə $\lambda > 0$ və azalmayan $K(z)$, $z > 0$, $\int_0^{+\infty} z\, dK(z) < +\infty$ varsa ki, ixtiyari $s \geq 0$ üçün

$$f^*(s) = \lambda \left[\lambda + s + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-sz})\, dK(z) \right]^{-1} \qquad (*)$$

bərabərliyi ödənilsin. Bu halda uyğun $\lambda(t)$ prosesi yalnız iki: λ və 0 qiymətlərini alır. Fərz olunur ki, (*) ödənilir və $K(+\infty) - K(0) < \infty$. Əgər $K = 0$ olarsa, onda λ intensivlikli Puasson prosesi alınır. Əgər $K > 0$ olarsa, onda $G(z) = \frac{K(z) - K(0)}{K}$ paylanma funksiyasıdır və bu halda $\lambda(t)$ prosesi λ və 0 qiymətlərinə intervallarda növbə ilə bərabər olur; bu intervalın uzunluğu $\lambda(t) = \lambda$ halında orta qiyməti $1/K$ -ya bərabər eksponensial paylanan təsadüfi kəmiyyətdir, $\lambda(t) = 0$ halında paylanma funksiyası $G(x)$ olan təsadüfi kəmiyyətdir.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник. К., 1983; [2] Snyder D. L., Random point process, L. etc: Wiley and Sons, 1975; [3] Grandell J., Doubly stochastic Poisson process. – Lect. Notes. Math., 1976; [4] Kerstan J., Mattes K., Mecke J., Unbergrenzt teilbare Punktprozesse, Berlin: Akad. – Verlag, 1974.

İKİQOLLU BANDİT « двурукий бандит; two-armed bandit » – informasiya natamam olduğu halda təsadüfi ardıcıllığın optimal idarəolunması məsələlərindən biridir, evristik olaraq aşağıdakı kimi ifadə oluna bilinər. İkiidarəli qurğunun olduğu fərz olunur (ikiqollu avtomat). $t = 1, 2, \ldots$ anlarından hər birində idarələrdən birindən istifadə oluna bilinər və əgər j -ci idarədən istifadə olunursa, paylanması F_j olan təsadüfi kəmiyyət müşahidə olunur; $j = 1, 2$. Hipotezlər fəzasında aprior paylanma verilir, yəni (F_1, F_2) cütlərinin bütün mümkün hallarının verildiyi fərz olunur. Baxılan anda hansı idarədən istifadə olunacağı yalnız aprior paylanmadan və əvvəlcə hansı idarələrin istifadə olunduğundan və bu zaman hansı qiymətlərin müşahidə olunduğundan asılıdır. Müşahidə olunmuş qiymətlər cəmlənilir (ola bilsin ki, diskontlanaraq). Cəmin qeyd olunmuş $u \leq \infty$ müddəti ərzindəki riyazi gözləməsinin maksimizasiyası tələb olunur.

Məsələnin həlli qaydalarından biri vəziyyətlərinə aposterior paylanmalar olan, tam informasiyalı Markov zəncirinin idarəolunmasına gətirmədən ibarətdir.

Adətən, Bernulli halına – müşahidəolunan kəmiyyətlər iki qiymət: 0 və 1 qiymətlərini aldığı hala baxılır. Bu halda aprior paylanma elə (λ_1, λ_2) fəzasında verilir ki, bu cütlər uyğun idarədən istifadə olunduqda müvəffəqiyyət (vahidlərin) ehtimalını təyin edir. Bernulli halında asılı olmamazlıq halı (aprior paylanma elədir ki, λ_1 və λ_2 asılı olmayandırlar) və iki hipotez halı – hipotezlərdən birinin ehtimalının verildiyi və sətirləri (λ_1, λ_2) -nin mümkün qiymətləri olan (2×2) – ölçülü matris olduğu hal, xüsusilə, maraqlıdır.

İ. b. məsələsi ilk dəfə [1]-də şərh olunmuşdur və burada əsas etibarilə Bernulli asılı olmamazlığı halına baxılmışdır. Əgər birinci hipotezə görə (λ_1, λ_2) cütü (λ, μ) -yə bərabər, ikinci hipotezə görə isə (M, λ) -ya bərabər olarsa, $M > \lambda$, onda birinci hipotezin aposterior ehtimalı $1/2$ -i aşmır (uzağı görməmə strategiyası). Bu sadə faktın ciddi isbatı [2]-də alınmışdır.

Çoxsaylı ümumiləşmələrdən maraqlısı bir neçə qol halı, kəsilməz zaman halı və minimaks yanaşmadır. Asılı olmayan bir neçə qol (Bernulli halı olmaya də bilər) və həndəsi diskontlama halında optimal idarə Gittins indeksinin (bax, [3]) köməyilə aşkar şəkildə təyin olunur. [4]-də m qollu hala Bernulli halında n sayda diskontsuz hipotez olduqda baxılır və burada sonsuz zaman intervalında optimal stasionar (yalnız aposterior paylanmadan asılı) strategiyanın varlığı ilə bağlı, uyğun $(m \times n)$ tərtib matrislərin təsnifatı verilir. Burada kəsilməz zaman halı üçün $(m \times n)$ məsələsinin Puasson ümumiləşməsi verilir, bu halda Bernulli hadisələri axını əvəzinə Puasson axınına baxılır və (2×2) məsələsində optimal strategiyanın təsviri bu hal üçün verilir.

Bu tip məsələlərə maraq onunla izah olunur ki, belə məsələlər ən çox əyani və sadə məsələlər olur və bu məsələlərdə prosesin parametrləri haqqında informasiyadan cari gəlir və uduş arasında münasibət haqqında sual yaranır.

Əd.: [1] Thompson W., «Biometrika», 1933, v. 25, p. 285–94; [2] Feldman D., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 847–56; [3] Gittins J., Multi-armed bandit allocation indices, N. Y., 1988; [4] Пресман Э. Л., Сонин И. М., Последовательное управление по неполным данным, M., 1982; [5] Berry D., Fristedt B., Bandit problems, L. – N. Y., 1985.

İKİLİ MARKOV PROSESİ « двойственный марковский процесс; двойственный марковский процесс; dual Markov process » – *Dual Markov prosesi* ilə eynimənalıdır.

İKİLİK SİMMETRİK KANAL « двоичный симметричный канал; binary symmetric channel » – yaddaşsız stasionar kanaldır, keçid ehtimalları matrisi

$$\begin{Vmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{Vmatrix}$$

şəklindədir. $1 - p$ və p kəmiyyətləri uyğun olaraq kanalın düzgün ötürmə ehtimalı və kanalın səhv etmə ehtimalı adlanır. İ. s. k. informasiya nəzəriyyəsində mühüm və ən çox öyrənilən simmetrik kanaldır. İ. s. k. üçün *kanalın ötürücülük qabiliyyəti*

$$C = 1 + p \log p + (1 - p) \log (1 - p)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

İKİLİK VAHİD (i) informasiya miqdarının **« двоичная единица** количества информации; **binary digit** of an information quantity **»** – bax, *Bit*, *Entropiya.*

İKİNCİ LAPLAS QANUNU « второй закон Лапласа; Laplase second law / distribution » – bax, *Laplas paylanması.*

İKİÖLÇÜLÜ NORMAL PAYLANMA « двумерное нормальное распределение; bivariate / two dimensional normal distribution » – X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə (ikiölçülü) *ehtimal paylanmasıdır*, uyğun xarakteristik funksiyası

$$\varphi(t) = \exp\left\{ it^{\mathsf{T}} m - \frac{1}{2} t^{\mathsf{T}} C t \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $t = (t_1, t_2)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ – riyazi gözləmələr vektoru,

$$C = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}$$

X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasion matrisidir. Əgər $|\rho| < 1$ olarsa, onda İ. n. p.-nın sıxlıq funksiyası vardır və o,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur (şəkildə qrafiklər təsvir edilmişdir). $X_2 = x_2$ şərtinə nəzərən X_1 təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanma sıxlığı

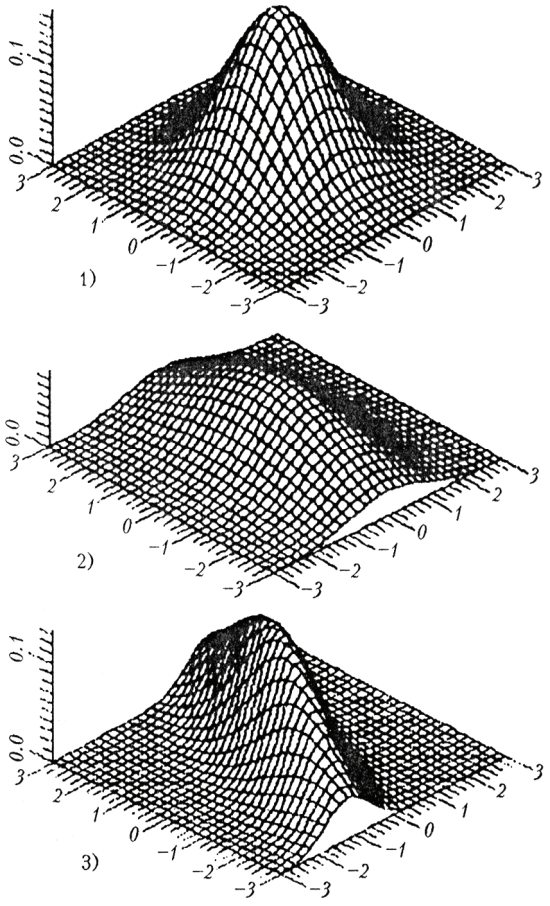
$$f(x_1 \mid X_2 = x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[x_1 - m_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - m_2) \right]^2 \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur. $|\rho| = 1$ olduqda bu paylanma cırlaşmış ikiölçülü normal paylanma adlanır. $m = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ olduğu halda ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanma funksiyası $F(x_1, x_2; \rho)$ aşağıdakı kimi ifadə oluna bilinər:

$$F(x_1, x_2; \rho) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1;\ \xi_2 < x_2\} =$$
$$= \Phi(x_1)\,\Phi(x_2) + \int_0^{\rho} f(x_1, x_2; \lambda)\, d\lambda .$$

Burada $f(x_1, x_2; \lambda)$, – $F(x_1, x_2; \lambda)$-ya uyğun sıxlıq funksiyası, $\Phi(x)$ birölçülü standart normal paylanma funksiyasıdır.



$m_1 = m_2 = 0$ olduqda, 1) $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0$; 2) $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\rho = 0$; 3) $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\rho = 0{,}8$ halları üçün ikiölçülü normal paylanmanın sıxlıq funksiyalarının qrafikləridir.

İ. n. p.-nın Ouen funksiyası vasitəsilə ifadəsi üçün bax, [1]. $F(x_1, x_2; \rho)$-nun tetrahor funksiyalar üzrə ayrılışı

$$F(x_1, x_2; \rho) = \Phi(x)\,\Phi(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(x)\,\tau_k(y)\,\rho^k$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada

$$\tau_k(x) = (2\pi)^{-2} H_{k-1}(x) \exp(-x^2/2)/k!\ ,\quad k = 1, 2, \ldots,$$

$H_k(x)$ – Hermit çoxhədlileridir.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., Большев Л. Н., Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, M., 1962.

İKİSEÇİMLİ T^2 – STATİSTİKASI « двувыборочная T^2 – статистика; two-sample T^2 – statistic » – bax, T^2 – *statistika.*

İKİSEÇİMLİ STYUDENT KRİTERİSİ « двувыборочный критерий Стьюдента; two-sample Student test » – bax, *Styudent kriterisi.*

İKİTƏRƏFLİ BERNULLİ YERİNİDƏYİŞMƏSİ « двусторонний сдвиг Бернулли; two-sided Bernoulli shift » – bax, *Bernulli yerinidəyişməsi.*

İKİTƏRƏFLİ EKSPONENSİAL PAYLANMA « двустороннее экспоненциальное распределение; double exponential distribution » – bax, *İkitərəfli üstlü paylanma.*

İKİTƏRƏFLİ ETİBARLI İNTERVAL « двусторонний доверительный интервал; two-sided confidence interval » – bax, *Ardıcıl etibarlı sərhədlər.*

İKİTƏRƏFLİ HİPOTEZ « двусторонняя гипотеза; two-sided hypothesis » – birölçülü θ parametrinin verilmiş intervalda yerləşmədiyi haqqında, yəni $H: \theta \notin (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 < \theta_2$ şəklində *statistik hipotezdir*. Belə hipotezə misal: hər hansı qarışıqdakı inqrediyentin faizi haqqında verilən tələblər ödənilirmi? Burada birinci növ səhv ondan ibarət ola bilər ki, θ məqbul sayılsın (əslində bu qərar səhvdir). Birparametrli eksponensial ailə üçün $K: \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ alternativ hipotezinə qarşı H İ. h.-nin yoxlanılması üçün *müntəzəm ən güclü kriteri* mövcuddur.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

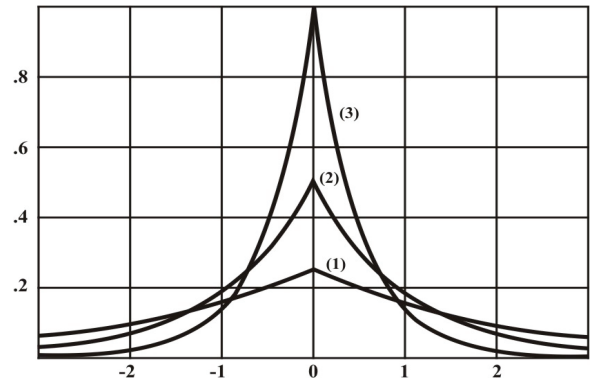
İKİTƏRƏFLİ MARKOV PROSESİ « двусторонний марковский процесс; two-sided Markov process » – bax, *Markov prosesi.*

İKİTƏRƏFLİ STYUDENT KRİTERİSİ « двусторонний критерий Стьюдента; two-sided Student test » – bax, *Styudent kriterisi.*

İKİTƏRƏFLİ ÜSTLÜ PAYLANMA « двустороннее показательное распределение; double exponential distribution », i k i q a t e k s p o n e n s i a l p a y l a n m a, L a p l a s p a y l a n m a s ı, L a p l a s ı n b i r i n c i q a n u n u, – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha |x-\beta|}/2$$

düsturu ilə təyin olunan, $(-\infty, +\infty)$-da topalanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada $\alpha > \infty$, $-\infty < \beta < \infty$ həqiqi parametrlərdir (bax, şəkil).



$\beta = 0$ halında (1) $\alpha = 0{,}5$; (2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha = 2$ qiymətlərində ikiölçülü üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyaları.

İ. ü. p. yerinidəyişmə dəqiqliyilə *üstlü paylanmanın* özünün sıfra görə əks olunmuş paylanma ilə kompozisiyasıdır, başqa sözlə, İ. ü. p. α parametrli eyni üstlü qanunla paylanmış asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərilə ifadə olunan, $\beta + \xi_1 - \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır.

İ. ü. p.-nın ixtiyari tərtib sonlu momentləri vardır; məs., bu paylanmanın riyazi gözləməsi β-ya, dispersiyası $2/\alpha^2$ -na, ekssesi $Es = 6\alpha - 3$-ə bərabərdir. Onun xarakteristik funksiyası $f(t) = \alpha^2 e^{it\beta}/(t^2 + \alpha^2)$ kəmiyyətinə bərabərdir və $\beta = 0$ olduqda, *Koşi paylanmasının* sıxlıq funksiyası ilə vuruq dəqiqliyilə üst-üstə düşür.

İ. ü. p. *sonsuz bölünən paylanmadır*. Bu paylanma əksərən təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənilməsi sxemində limit paylanması kimi yaranır.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

İKİZİRVƏLİ PAYLANMA « двувершинное распределение; bimodal distribution » – bax, *Bimodal paylanma.*

İQLİM / KLİMAT « климат; climate » – bir neçə onilliklər ərəfəsində i q l i m s i s t e m i n i n keçdiyi (o cümlədən, atmosfer, Yerin su örtüyü və qurunun üst fəaliyyət təbəqəsi də daxil olmaqla) vəziyyətlərin statistik ansamblıdır. İ.-in belə təyin edilməsində nəzərə alınır ki, atmosferin vəziyyətinə (bu vəziyyətlə hava anlayışı həmişə əlaqələndirilir) olduqca uzun zaman ərzində hidrosfer (ilk növbədə okeanlar), kriosfer (yerin buz və qar örtüyü) və torpaq örtüyü mühüm təsir göstərir (bəzən iqlim sisteminə biosfer də aid edilir).

Atmosfer, okean və qurunun olduqca fəza qeyri – bircinsliliyi nəticəsində onların ani vəziyyətlərinin kifayət qədər tam xarakteristikası üçün fəza koordinatlarının funksiyalarından, yəni meydanlardan istifadə etmək lazımdır. Beləliklə, iqlim sisteminin ani vəziyyəti çoxkomponentli meydan kimi, İ. isə çoxkomponentli təsadüfi meydan kimi anlaşıla bilinər. İ.-in tam təsviri bu meydanın fəza – zaman nöqtələrinin bütün mümkün komponentlərinin qiymətləri üçün bütün sonluölçülü ehtimal paylanmalarının göstərilməsi ilə oluna bilərdi. Lakin praktikada İ.-i təsvir edərkən, adətən, *iqlim zaman sıralarının* yalnız birinci və ikinci momentləri, yəni onların orta qiymətləri, dispersiyaları və korrelyasion funksiyaları haqqında verilənlərlə kifayətlənilir.

İ. – tərifə görə – tamamilə bütün Yer kürəsinə aid olan qlobal anlayışdır.

L o k a l i q l i m l ə r, yəni hər hansı məhdud oblastın nöqtələrində ehtimal paylanmaları qlobal iqlimin təzahürləridir. İ. dəyişiklikləri uzunillər üçün hesablanmış orta qiymətlərdən konkret illər üçün illik orta, mövsümi orta, aylıq orta qiymətlərdən – *iqlim normalarından* yayınmalardır. İ. dəyişiklikləri müşahidələrin müxtəlif, onilliklərdən az olmayan dövrlərində alınmış çoxillik orta qiymətlər və iqlim sisteminin digər empirik xarakteristikaları arasında fərqlərlə təyin olunur.

Əd.: [1] М о н и н А. С., Ш и ш к о в Ю. А., История климата, Л., 1979; [2] М о н и н А. С., Введение в теорию климата, Л., 1982; [3] Физические основы теории климата и его моделирование, пер. с англ., Л., 1977; [4] The global climate, Camb., 1984.

İQLİM NORMASI « климатическая норма; climatic norm / long-rang averaged value » – *iqlimin* çoxillik dövr üçün *iqlim zaman sıraları* üzrə qiymətləndirilən statistik xarakteristikasıdır. Əksər hallarda «İ. n.» anlayışı bəzi aylıq orta, mövsüm orta və illik orta xarakteristikalarının çoxillik orta qiymətləri üçün tətbiq olunur; lakin bəzən meteoroloji kəmiyyətlərin ekstremal

qiymətlərinin İ. n.-na da baxılır. İ. n., adətən, 30 – 100 il ərzində verilənlər üzrə aparılır. Beynəlxalq meteoroloji təşkilat İ. n.-nı müştərək surətdə otuzillik dövr, 1931 – 60-cı illər üçün təyin etməyi tövsiyyə etmişdir.

Əd.: [1] Методы климатологической обработки метеорологических наблюдений, Л., 1957.

İQLİM PROQNOZU « климатический прогноз; climate forecast » – bax, *Proqnozu, havanın.*

İQLİM SİSTEMİ « климатическая система; climatic system » – bax, *İqlim / klimat.*

İQLİM ZAMAN SIRALARI « климатические временные ряды; climatic time series » – bütün çoxillik müddət ərzində cihazlarla aparılan müşahidələrdə iqlim sisteminin vəziyyətini xarakterizə edən, *iqlim* haqqında fiziki kəmiyyətlər, yəni iqlim haqqında müşahidələrin verilənləridir. İ. z. s.-nın əksəriyyəti atmosfer (iqlim sisteminin ən dəyişkən hissəsi) və okean xarakteristikalarına aiddir. Ayrı-ayrı meteoroloji stansiyalarda müşahidələrin İ. z. s. 250 illik müddəti əhatə edir. Şimal yarımkürəsinin bəzi xarakteristikaları demək olar ki, 100 illik dövrü, cənub yarımkürəsinə və yüksəkliklərdə atmosferə aid verilənlər 30 ilə yaxın müddəti əhatə edir. Dünyada toplanmış hidrometeoroloji informasiyanın (peyklə müşahidələrsiz) həcmi $10^{12} - 10^{14}$ baytla qiymətləndirilir və bu həcm sürətlə artır. İ. z. s. haqqında məlumatlar dünya və milli meteoroloji mərkəzlərdə qorunub saxlanılır.

Əd.: [1] Груза Г. В., Рейтенбах Р. Г., Статистика и анализ гидрометеорологических данных, Л., 1982.

İQLİMİN STOXASTİK MODELLƏRİ « климата стохастические модели; stochastic model of climate / climatic stochastic models » – bax, *Stoxastik modellər*(i) iqlimin.

İLK ÇATIM ANI / İLK ÇIXIŞ MÜDDƏTİ « первого достижения момент / первого выхода момент; first passage time / hitting time » – *Markov prosesinin* trayektoriyasının verilmiş vəziyyətlər çoxluğunda olması anları ailəsinin dəqiq aşağı sərhədidir. $\mathscr{E}$, ümumiyyətlə, $\zeta = (\zeta_t, \zeta_0, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ qırılan Markov prosesinin vəziyyətləri çoxluğu olsun. $A \subset \mathscr{E}$ çoxluğuna İ. ç. a. $T_A = \inf\{t \geq 0;\ \zeta_t \in A\}$ münasibətilə, $t = 0$ anından sonra isə $\tau_A = \inf\{t > 0;\ \zeta_t \in A\}$ münasibətilə təyin olunur (burada $\zeta_0 = \inf \varnothing$). Sağ Markov prosesi və sanki Borel çoxluğu A üçün bu çatım anları Markov anlarıdır (bax, [1]). « A çoxluğuna İ. ç. a.» termini « $\mathscr{E} \setminus A$ çoxluğundan ilk çıxış anı» terminə ekvivalentdir.

ζ həqiqi proses olarsa, İ. ç. a.-na mühüm misal $T_{(a,\,b)}$-dir; burada $(a,\ b) \subset \mathbb{R}$, $T_{(a,\,\infty)}$ ζ prosesinin a həddindən ilk çıxış anıdır.

Əd.: [1] Getoor R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440.

İLK ÇIXIŞ ANI « первого выхода момент / первого достижения момент; first exit time » – bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

Əd.: [1] Getoor R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440.

İLK ÇIXIŞ MÜDDƏTİ « первого выхода время; first exit time / hitting time » – bax, *Sərhəd məsələləri* təsadüfi dolaşmalar üçün.

İLK DAXİLOLMA ANI / ÖTÜM ANI « первого попадания момент; first arrival time » – bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

İLK KEÇMƏ ANI, SƏRHƏDİ « первого прохождения границы время; boundary hitting time / first passage / time for a boundary » – $\eta_g = \inf\{t > 0 : \zeta_t \geq g(t)\}$ münasibətilə təyin olunan *təsadüfi kəmiyyətdir*; ζ_t – baxılan təsadüfi proses, $\zeta_0 = 0$, $g(t)$ verilmiş təsadüfi olmayan funksiyadır (sərhəd), $g(0) > 0$. S. i. k. a. düzxətli sərhədlər üçün və $\zeta_0 = 0$, $\zeta_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi ilə təyin olunan $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ təsadüfi dolaşması üçün hərtərəfli araşdırılmışdır. $\eta(x) = \inf\{k \geq 1 : \zeta_k \geq x\}$ təsadüfi kəmiyyəti $g(t) = x = \text{const}$ düzxətli sərhədinin S. i. k. a. olsun. $|z| < 1$, $\operatorname{Im} \lambda < 0$ olduqda

$$\mathbf{M}\,(z^{\eta(0+)};\ \eta(0+) < \infty) = 1 - A_+(z,\ 0) \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x}\, d_x\, \mathbf{M}(z^{\eta(x)};\ \eta(x) < \infty) = 1 - A_+(z,\ 0) \,/\, A_+(z,\ \lambda)$$

düsturları doğrudur (bax, [1] – [3]), burada

$$A_+(z,\ \lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\, \mathbf{M}\,(e^{i\lambda\zeta_k},\ \zeta_k > 0) \right\}$$

funksiyası $1 - z\,\mathbf{M}\,e^{i\lambda\zeta_1}$ faktorizasiya funksiyasının müsbət komponentidir (bax, *Faktorizasion eyniliklər*). (1) düsturundan aydındır ki, ilk müsbət cəmin alındığı $\eta(0+)$ anı (bu an pillə anı adlanır), yalnız və yalnız, sanki yəqin sonlu o halda olur ki, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\,\mathbf{P}\{\zeta_k > 0\}$ sırası dağılsın; bu sıranın dağılması üçün $\mathbf{M}\xi_1 \geq 0$ olması kafidir (bax, [1], [2]).

Əgər $\eta(0+)$ anı sonlu olarsa, onda: a) $\eta(0+)$ təsadüfi kəmiyyətinin α göstəricili ($0 < \alpha < 1$) spektral müsbət dayanıqlı qanunun cazibə oblastından olması üçün

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\zeta_n > 0\}$$

limitinin varlığı zəruri və kafidir; b) $\eta(0+)$ anının normal paylanmanın normal cazibə oblastından olması üçün

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\,(\mathbf{P}\{\zeta_k > 0\} - \alpha)$$

sırasının yığılması zəruri və kafidir (bax, [6]). $H(x) = \mathbf{M}\eta(x)$ funksiyası bərpa funksiyası adlanır. Əgər ξ_k toplananlarının hamısı mənfi olmazsa, onda

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,\{\zeta_k \leq x\}\,.$$

Əgər $a = \mathbf{M}\xi_1 > 0$ olarsa, onda $\eta(x) / x \to 1/a$ münasibəti sanki yəqin ödənilir və $x \to \infty$ olduqda $H(x) / x \to 1/a$ münasibəti ödənilir (bax, [1] – [3]).

$$\{\eta(x) \le n\} = \{ \max_{1 \le k \le n} \zeta_k \ge x\}$$

münasibətinin köməyilə isbat olunmuşdur ki, $x = x(n) \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\eta(x) \le n\} = \sqrt{2/\pi} \int_{x/\sigma\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt + o(1)$$

olur, burada $o(1)$ qiymətləndirilməsi x -ə görə müntəzəmdir.

Fərz olunur ki, Kramer şərti ödənilir, yəni elə $\delta > 0$ vardır ki, $|\lambda| \le \delta$ olduqda $\mathbf{M}\exp(\lambda\xi_1) < \infty$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda $x \to \infty$ olduqda və ξ_1-in paylanmasının hamar olması üçün məhdudiyyətlər olarsa,

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} = \frac{x}{n^{3/2}} e^{-n\Lambda(x/n)}\, \Xi(1/n,\ x/n) \qquad (2)$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda}\{\alpha\lambda - \ln \mathbf{M}e^{\lambda\xi_1}\}$ yayınmalar funksiyası, $\Xi(1/n,\ x/n)$ şəbəkəvari halda arifmetik struktura malik olan, $1/n,\ x/n$ mənfi olmayan qüvvət üstlərinə görə sıradır (bax, [4], [5]).

Əgər $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$, $0 < \sigma^2 < \infty$, $x/\sqrt{n} \to 0$ olarsa, onda $n\Lambda(x/n) \sim x^2/(2n\sigma^2) \to 0$ münasibəti ödənilir və (2)-dən

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = n\} \sim Cx/n^{3/2}$$

münasibəti alınır. Bu münasibət daha geniş şərtlərlə də doğrudur (bax, [7], [8]).

Əgər $f(t)$ kifayət dərəcədə hamar funksiya olarsa, $xg(t) = xf(t/x)$ sərhədi üçün S. i. k. a. paylanmasının asimptotik paylanması $x \to \infty$ olduqda hərtərəfli araşdırılmışdır. Əgər $a = \mathbf{M}\xi_1 > 0$, $0 < \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 < \infty$, $y = at$ və $y = f(t)$ əyriləri z və $b = f'(z) < a$ nöqtəsində kəsişərsə, onda η_{xg} təsadüfi kəmiyyətinin limit paylanması $\xi_k - b$ toplanarları ilə doğurulan $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \xi_1 - b, ...,$ $\zeta_1 = \xi_1 - b, ...,$ $\zeta_k = \xi_1 + ... + \xi_k - kb$ təsadüfi dolaşmasının S. i. k. a. – $\eta(xaz)$ ilə üst-üstə düşür. Bu isə $xaz/(a-b)$, $xaz\sigma^2/(a-b)^3$ parametrlərli normal paylanmadır (bax, [1], [3]).

Əgər $y_1 < z < y_2$ olarsa, onda aydındır ki,

$$\mathbf{P}\{\eta_{xg} < y_1 x\} \to 0, \quad \mathbf{P}\{\eta_{xg} > y_2 x\} \to 0 \qquad (3)$$

münasibətləri ödənilir.

Sərhəd məsələlərində böyük yayınmalar haqqında (3) ehtimallarının asimptotikası ilə bağlı məsələlər araşdırılmışdır.

Markov zəncirləri üçün S. i. k. a. məsələləri də tədqiq olunmuşdur (bax, [9], [10]). Çoxölçülü təsadüfi dolaşmalar ([11], [13]), Qauss prosesləri üçün də bəzi nəticələr alınmışdır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [3] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [4] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; [5] Боровков А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 137–71; [6] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 4, с. 593–613; [7] Нагаев А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 410–11; [8] Алешкявичене А. К., «Лит. матем. сб.», 1975, т. 15, № 1, с. 23–66; [9] Пресман Э. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 4, с. 861–900; [10] Королюк В. С., Шуренков В. М., «Укр. матем. ж.», 1977, т. 29, № 4, с. 464–71; [11] Гафуров М. У., «Докл. АН СССР», 1980, т. 254, № 5, с. 1042–44; [12] Erdos P., Kac M., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 52, № 4, p. 292–302; [13] Боровков А. А., «Докл. РАН», 1997, т. 353, № 6, с. 711–13.

İLK QAYIDIŞ ANI « первого возвращения момент; first return time » – bax, *Markov prosesi* və ziyyətləri çoxluğu hesabi.

İLK MÜHÜM RƏQƏM QANUNU « первой значащей цифры закон; first significant digit law » – olduqca geniş müşahidələr nəticəsində alınan statistik məlumatların nəzərə çarpan empirik qanunauyğunluğudur; bu qanunauyğunluğa görə, ilk mühüm rəqəm $d = 1, 2, 3, ..., 9$ qiymətini təqribən $\lg\frac{d+1}{d}$-yə bərabər tezliklə alır (lg – onluq loqarifmdir).

(bax, cədvəl 1.)

Cədvəl 1.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg\frac{d}{d+1}$	0,3010	0,1761	0,1249	0,0969	0,0792	0,0669	0,0580	0,0512	0,0458

İ. m. r. q.-nun kəşf olunma tarixi və əsaslandırılması [2] və [3]-də şərh olunmuş, orada bu qanunla əlaqədar geniş ədəbiyyat da verilmişdir.

Ayrı-ayrı hallarda İ. m. r. q.-nun riyazi əsaslandırılması aşağıdakı mülahizələrə istinadlanır. Əgər ξ, $0 \le \xi < 1$ $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\eta = 10^{\xi}$ təsadüfi kəmiyyətinin ilk mühüm rəqəmi $\lg\frac{d+1}{d}$ ehtimalı ilə d -yə bərabərdir. Əgər ξ^* təsadüfi kəmiyyətdirsə və onun kəsr hissəsi $\xi = \{\xi^*\}$ $[0, 1]$-də təqribi olaraq müntəzəm qanunla paylanmışdırsa, onda ilk mühüm rəqəm 10^{ξ^*} d qiymətini $\lg\frac{d+1}{d}$-yə yaxın ehtimal ilə alır. Bu halda, ξ^*-nun kəsri hissəsinin paylanmasının təqribi olaraq müntəzəm paylanma olması *Puassonun cəmləmə düsturu* ilə təyin oluna bilinir.

Misal 1. η təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_\eta(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^3 t\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln v - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & v > 0 \\ 0, & v \le 0 \end{cases}$$

olan loqarifmik normal qanunla paylanmış olduğu fərz edilir.

Onda $\lg\eta$ təsadüfi kəmiyyəti parametrləri $m\lg e$ və $\sigma^2\lg^2 e$ olan normal qanunla paylanmışdır və ilk mühüm rəqəmin d -yə bərabər olması ehtimalının qiyməti

$$p_d = \lg\frac{d+1}{d} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2k^2\pi^2\sigma^2\lg^2 e) \times$$
$$\times \frac{\sin[2k\pi(\lg(d+1) - m\lg e)] - \sin[2k\pi(\lg d - m\lg e)]}{2k\pi}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Məs., $m = 0{,}46$, $\sigma = 1$ olduğu halda (parametrlərin bu qiymətləri [4]-dən götürülmüşdür, səh. 246), $p_d = \lg\frac{d+1}{d} + R_d$; R_d -nin qiymətləri cədvəl 2-də verilmişdir.

Cədvəl 2.

d	1	2	3	4	5
R_d	$1{,}187\cdot10^{-2}$	$3{,}007\cdot10^{-3}$	$-3{,}146\cdot10^{-3}$	$-4{,}391\cdot10^{-3}$	$-3{,}674\cdot10^{-3}$
d	6	7	8	9	
R_d	$-2{,}450\cdot10^{-3}$	$-1{,}275\cdot10^{-3}$	$-3{,}254\cdot10^{-4}$	$3{,}767\cdot10^{-4}$	

Misal 2. $n = 1, 2, ..., N$ olduqda 2^n qüvvətlər ardıcıllığına baxılır. Əgər N kifayət qədər böyük olarsa, məs., $N = 100$ olarsa, onda 2^n ədədinin ilk mühüm rəqəmi d qiymətini $\lg\frac{d+1}{d}$-ə bərabər tezliklə alır. Bu onunla əlaqədardır ki, $2^n = 10^{\{n\lg 2\}} \cdot 10^{[n\lg 2]}$ və $\{n\alpha\}$, $n = 1, 2, ..., N$ kəsri hissələri α irrasional və $N \to \infty$ olduqda $[0, 1]$-də asimptotik olaraq müntəzəm qanunla paylanmışdır, burada $[z]$, – z ədədinin tam hissəsi, $\{z\}$ – onun kəsr hissəsidir.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Raimi R. A., «Amer. Math. Monthly», 1976, v. 83, № 7, p. 521–37; [3] Hill T. P., «Statist. Sci.», 1995, v. 10, № 4, p. 354–63; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

İLKİN HİPOTEZ « нулевая гипотеза; null hypothesis » – statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində iki *statistik hipotezdən* biridir. İ. h., adətən, H_0 ilə işarə olunur və yoxlanılacaq müəyyən əsas fərziyyə mənasında anlaşılır. Formal olaraq, İ. h. onunla seçilir ki, birinci növ səhv ehtimalının (birinci növ səhv səhvən İ. h.-i qəbul etməməkdir) verilmiş $\alpha > 0$ (kiçik olan) ədədini (mühümlük ölçüsünü) aşmaması tələb olunur.

İLKİN / BAŞLANĞIC PAYLANMA(sı) Markov zəncirinin (prosesinin) **« начальное распределение** цепи (процесса) Маркова; **initial distribution** of a Markov chain (process)**»** – Markov zəncirinin (prosesinin) s anında X_s vəziyyətinin ehtimal paylanmasıdır, burada $s = \min\{t : t \in T\}$, T zəncirin (prosesin) zaman parametrinin qiymətləri çoxluğudur. İ. / b. p. keçid ehtimalları ilə birlikdə zəncirin (prosesin) sonluölçülü paylanmalarını, yəni $\{X_{t_1}, ..., X_{t_n}\}$, $t_i \in T$ vektorunun paylanmasını təyin edir.

İLLÜSTRATİV DƏYİŞƏN « иллюстративная переменная; illustrative variable » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli.*

İMİTASİYASI, TƏSADÜFİ TƏZAHÜRÜN « имитация случайного явления; simulation of a random phenomenon » – təsadüfi təzahürün nəzəri olaraq verilmiş və ya eksperiment nəticəsində onun alınmış xarakteristikaları əsasında, xüsusi konstruksiya olunmuş qurğular vasitəsilə, yenidən ifadə olunmasıdır. T. t. i.-na sadə misal düzgün metal pulun atılması eksperimentinin eyniehtimal nəticələrinin imitasiyasıdır. EHM-nın köməyilə müxtəlif paylanma qanunları ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlərin imitasiyası *Monte – Karlo metodunun* əsasını təşkil edir (bax, *Ədədi simulyasiya*(sı) təsadüfi təzahürün).

İMMİQRASİYA şaxələnən prosesdə **« иммиграция** в ветвящемся процессе; **immigration** in a branching process **»** – bax, *Şaxələnən proses* immiqrasiyalı.

İMPULS ƏNGƏL « импульсная помеха; impulse noise » – *impuls küydür.*

İMPULS – FAZALI MODULYASİYA PROSESİ « импульсно – фазовой модуляции процесс; impulse – phase modulation process » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

İMPULSAL – BƏRPA PROSESİ « импульсный процесс восстановления; impulse renewal process » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

İMPULSAL KEÇİD FUNKSİYASI « импульсная переходная функция; impulse response function » xətti sistemin (və ya xətti filtrin) – elə $h(u)$ funksiyasıdır ki, bu funksiya $\mathscr{L}$ xətti sisteminin çıxışında $y(t)$ funksiyasını onun girişindəki $x(t)$ funksiyası vasitəsilə

$$y(t) = \mathscr{L}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du$$

düsturu ilə ifadə etməyə xidmət edir. Əgər $x(t)$ funksiyası hər hansı real fiziki kəmiyyətin zaman üzrə dəyişməsini təsvir edirsə, $\mathscr{L}$ xətti sistemi isə fiziki elementlərin (məs., cərəyan və mexaniki) hər hansı çoxluğu şəklində reallaşdırıla bilinərsə, onda İ. k. f. $h(u)$ aşağıdakı fiziki reallaşma şərtini ödəməlidir: yəni $h(u)$ $u < 0$ olduqda $h(u) = 0$ zaminlik şərtini – $y(t)$-nin qiymətinin sistemin girişindəki funksiyanın sonrakı zaman anlarındakı qiymətlərindən asılı olmaması şərtini ödəməlidir (yəni sistemin çıxışına təsir onun girişinə verilən təsirə qədər yarana bilməz). İ. k. f. adi olduğu kimi, ümumiləşmiş funksiya da ola bilər; məs., $x(t)$-ni $x(t-\tau)$ funksiyasına çevirən sistemin İ. k. f. $\delta(u-\tau)$ δ – funksiyası ilə üst-üstə düşür. $h(u)$ İ. k. f.-nın Furye çevirməsi baxılan xətti sistemin ötürücü funksiyası $H(\omega)$-dır. Bax, *Xətti filtr.*

İMPULSAL KÜY « импульсный шум; impulse noise », impuls maneə, – parametrləri (forma, davamiyyət, qonşu impulslar arasında intervallar və s.) təsadüfi kəmiyyətlər də ola bilən impulslar ardıcıllığından ibarət maneədir. İ. k.-ün mühün xüsusi halı Puasson küyüdür; bu halda hər bir zaman intervalında ayrı-ayrı impulsların baş verməsi anları

asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bu təsadüfi kəmiyyətlər müntəzəm qanunla paylanır. Belə ki, hər bir intervalda baş verə biləcək impulsların sayı təsadüfi kəmiyyət olub, Puasson qanunu ilə paylanır (bax, [1]). İ. k. və impulsal təsadüfi prosesləri təsvir etmək üçün spektral nəzəriyyədən geniş istifadə olunur (bax, [2]). Puasson maneələrinə misal atmosfer və industrial əngəllərdir.

Əd.: [1] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1, М., 1961; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 2, М., 1975.

İMPULSAL PROSES taktlı intervallarla modullanmış « **импульсный процесс** с модулированными тактовыми интервалами; **impulsive process** with the modulated tacts by intervals » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

İMPULSAL PROSES, SABİT TAKT İNTERVALLARLI « импульсный процесс с постоянными тактовыми интервалами; impulse process with constant tact by intervals » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

İMPULSAL PUASSON PROSESİ « импульсный пуассоновский процесс; impulse Poisson process », filtrlənmiş Puasson prosesi – impulslarının baş vermə momentləri Puasson ardıcıllığına uyğun *impulsal təsadüfi prosesdir.*

İMPULSAL SƏDA FUNKSİYASI « импульсная функция отклика; impulse response function » – bax, *Xətti filtr.*

İMPULSAL TƏSADÜFİ PROSES « импульсный случайный процесс; impulse random process » – bəzi xarakteristikaları (məs., amplitud, en, baş vermə anı) təsadüfi kəmiyyətlər olan impulslar ardıcıllığından ibarət *təsadüfi prosesdir*. İ. t. p.-lərin geniş bir sinfi

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(t - t_n, \mathbf{A}_n) \qquad (1)$$

düsturu ilə verilir, burada $\Gamma(t, \mathbf{A})$ – impulsun $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_k)$ təsadüfi parametrindən asılı formasını müəyyən edən funksiyadır; $\mathbf{A}$ impulsun elə xarakteristikalarından təşkil olunur ki, bu xarakteristikalar təsadüfi qiymətlər alır və t_n, $n = ... -1, 0, 1 ...$ anları (adətən, bu anlar impulsların baş vermə anları adlanır) isə təsadüfi olduğu kimi, determinik də ola bilr. Bəzən daha ümumi olan

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(t - t_n, \mathbf{A}_n) \qquad (1a)$$

düsturu ilə ifadə olunan İ. t. p.-lərə də baxılır; yəni fərz olunur ki, n-ci impulsun forması n nömrəsi ilə qanunauyğun dəyişir. (1a) düsturunun tətbiqi məsələlərdə rast gəlinən digər modifikasiyası (məs., [1]) impulslar qruplarının ardıcıllığından təşkil olunmuş İ. t. p.-i ifadə edən düsturdur; lakin aşağıda yalnız ən sadə və geniş istifadə olunan (1) tipli İ. t. p.-lərə baxılır.

İ. t. p.-lər nəzəriyyəsinin tətbiqində (əsasən elektrotexnika və radioelektronikada), adətən, $\Gamma(t)$ funksiyasının müəyyən sonlu intervaldan kənarda sıfra çevrildiyini (dəqiqliklə və ya yüksək dərəcədə dəqiqliklə); $\{\mathbf{A}_n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ ardıcıllığının vektor stasionar təsadüfi ardıcıllıq (və ya hətta eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı) olduğunu; $\{t_n,\ n = 0, \pm 1, ...\}$ ardıcıllığının $\{\mathbf{A}_n\}$ ardıcıllığından asılı olmadığını hesab etmək olar. Bir çox hallarda $\mathbf{A}_n = (A_n, B_n)$-in ikiölçülü vektor olduğu halla da kifayətlənmək olur, burada A_n, – n-ci impulsun amplitudu, B_n impulsun enidir, odur ki,

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Gamma((t - t_n)/B_n). \qquad (2)$$

Xüsusi halda, $B_n = \text{const}$ olduqda, yəni impulsların eni dəyişmədikdə, $\zeta(t)$ prosesi amplitud–modullanmış impulsal proses və ya amplitud–impulsal modulyasiya prosesi adlanır; əgər bu halda A_n amplitudlarının hamısı eyni olarsa, lakin yalnız t_n zaman anları ardıcıllığı təsadüfi olarsa, onda $\zeta(t)$ kəsri küy prosesi dir; əgər bütün A_n amplitudları dəyişmirsə, lakin n-ci impulsun eni B_n təsadüfi olarsa, onda $\zeta(t)$ enliklə impulsal modulyasiya prosesidir və ya, başqa sözlə, impulsların davamiyyət üzrə modulyasiya prosesidir.

İ. t. p. nəzəriyyəsində $\{t_n,\ n = 0, \pm 1, ...\}$ impulsların baş vermə anları ardıcıllığının xüsusiyyəti mühüm rol oynayır. Tətbiqi məsələlərdə elə $\zeta(t)$ İ. t. p.-lərinə təsadüf olunur ki, bu proseslərdə $\{t_n\}$ ardıcıllığını λ intensivliyi (yəni vahid zaman ərzində t_n nöqtələrinin orta sayı λ-ya bərabər) ilə verilmiş Puasson nöqtələr sistemi hesab etmək olur, bu halda $\zeta(t)$ prosesi impulsal Puasson prosesi (və ya filtrlənmiş Puasson prosesi; bax, məs., [2]) adlanır. Əgər $\{\mathbf{A}_n;\ n = 0, \pm 1, ...\}$ t_n nöqtələrinin Puasson ardıcıllığından asılı olmayan stasionar təsadüfi ardıcıllıqdırsa, onda Puasson İ. t. p. stasionar təsadüfi prosesdir. Puasson İ. t. p.-lərinin ümumiləşməsi elə İ. t. p.-lərdir ki, $t_{n+1} - t_n$ fərqləri ehtimal paylanmaları ilə verilmiş (ümumiyyətlə isə, ixtiyari də ola bilər), asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, bu halda $\zeta(t)$ prosesi impulsal bərpa proses adlanır.

Elektro- və radiorabitədə elə İ. t. p.-lər böyük rol oynayır ki, bu proseslərdə impulslar ciddi periodikliklə baş verir, yəni eyni bir T_0 zaman intervalından bir anlarda və ya elə anlarda baş verir ki, bu anlar T_0 zaman intervalından bir requlyar olaraq, təkrarlanan anlarla sıx əlaqəli olsun, bu hallarda impulsların baş vermə anları t_n-ləri $t_n = nT_0 + \eta_n$ kimi ifadə etmək məqsədəuyğun olur. Əgər $\eta_n = \eta = \text{const}$ (yəni impulslar ciddi periodikliklə baş verir) olarsa, onda $\zeta(t)$ İ. t. p. sabit takt intervallarlı impulsal proses adlanır. Əgər bu halda η qeyd olunmuş ədəd (məs., $\eta = 0$), $\{\mathbf{A}_n\}$ – stasionar təsadüfi ardıcıllıq olarsa, onda $\zeta(t)$ prosesi qeyri – stasionar periodik korrelyar (və ya əgər $\{\mathbf{A}_n\}$ dar mənada stasionar ardıcıllıq olarsa, hətta periodik olaraq paylanmaya malik) prosesdir; bununla belə, əgər η təsadüfi kəmiyyəti T_0 uzunluqlu

intervalda müntəzəm paylanmış olarsa, onda $\zeta(t)$ – stasionar prosesdir. η_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, – $\{\mathbf{A}_n\}$ ardıcıllığından asılı olmayan, orta qiyməti sıfra bərabər stasionar ardıcıllıq olarsa, İ. t. p.-də periodik korrelyar prosesdir və o, takt intervallarla modullanmış impulsal proses adlanır (t_n anlarının nT_0-dan yayınmasının təsadüfi xarakterli olduğunu xüsusilə qeyd etmək istədikdə, bu proses impuls–fazalı modulyasiya prosesi və impulsların vəziyyətlərinin modulyasiya prosesi adlanır). Elektro- və radiorabitədə impuls modulyasiyasının (yəni İ. t. p.-ə aid modulyasiya; bax, məs., [1]) digər tiplərindən də istifadə olunur.

İ. t. p.-lərin müxtəlif modelləri üçün korrelyasion və spektral xarakteristikaların hesablamaları aparılmışdır.

Əd.: [1] Коновалов Г. В., Тарасенко Е. М., Импульсные случайные процессы в электросвязи, М., 1973; [2] Тихонов В. И., Статистическая радиотехника, 2 изд., М., 1982; [3] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 1, М., 1974; [4] Рытов С. М., в кн.: Введение в статистическую радиофизику, 2 изд., ч. 1., М.; [5] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1–2, 1961–62; [6] Френкс Л., Теория сигналов, пер. с англ., М., 1974; [7] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983.

İMTİNA (SIRADAN ÇIXMA) « отказ; failure » – sistemin sıradan çıxması, işqabiliyyətini itirməsidir.

Bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*, *Dubllaşdırma* texnikada.

İMTİNA AXTARIŞI « отказов поиск; failure hunting » – sıradan çıxmış elementin (və ya elementlərin) aşkar olunması və lokalizasiyası üçün diaqnostik prosedurdur. Prosedur testlər ardıcıllığı və kombinasiyası kimi həyata keçirilir və onların hər birinin tətbiqi nəticəsində test tətbiq-edilən elementlərin hər hansı bir çoxluğundan bütün elementlərin işəqabiliyyətliliyini və ya heç olmazsa onlardan birinin imtina etməsini təyin etməyə xidmət edir. Adətən, testlərin aparılması vaxt itkisi və ya dəyər itkisinə səbəb olur və bununla əlaqədar olaraq, hər hansı bir kriteri üçün sistemə daxil olan elementlərin etibarlılığının ehtimal xarakteristikalarından asılı olaraq optimizasiya məsələləri həll olunur. Məsələlərin həllində dinamik proqramlama metodu, rekursiv metod, elementləri bir-bir ardıcıl yoxlama metodu və s. istifadə olunur.

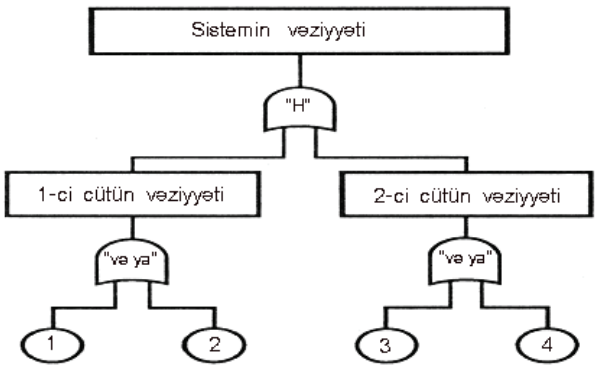
Əd.: [1] Надежность технических систем, М., 1985.

İMTİNA ÜÇÜN ORTA İŞLƏMƏ MÜDDƏTİ « средняя наработка на отказ; average operating age to failure » – bərpaolunan sistemin işləmə müddətinin bu işləmə müddətindəki imtinaları sayının riyazi gözləməsinə nisbətidir.

Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin*, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNALAR AĞACI « отказов дерево; fault tree » – sistemin strukturunun *qrafik* təsviridir (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*). İ. a. sistemin imtinasına səbəb olan imtina edən elementlərin toplusunu aşkar etməyi sadələşdirir. Şəkildə dubllanmış – iki cüt: 1, 2 və 3, 4 elementlərdən ibarət sistem üçün İ. a. təsvir olunmuşdur.

Hər bir cütdəki elementlərdən heç olmazsa bir element sıradan çıxdıqda sistem də sıradan çıxır. İ. a. sistemin etibarlılıq göstəricilərini hesablamaq üçün istifadə olunur.



Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

İMTİNASI, ELEMENTİN « отказ элемента; failure of element » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNASI, SİSTEMİN « отказ системы; failure of system » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNASIZ / FASİLƏSİZ İŞLƏMƏ EHTİMALI « безотказной работы вероятность; probability of breakdown free / failure – free operation / survival function » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNASIZ İŞLƏMƏ MÜDDƏTİNİN PAYLANMA FUNKSİYASI α_1 rejimində **« безотказной работы продолжительности функция распределения** в режиме α_1; **distribution function of failure rate** in the rejim α_1 **»** – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNASIZLIQ « безотказность; failureless » – sistemin müəyyən müddət ərzində fasiləsiz olaraq işəqabiliyyətliliyini saxlama xassəsidir. İ. etibarlılığın əsas xassəsidir. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin*, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNAYA QƏDƏR QAMMA – FAİZLİ İŞLƏMƏ MÜDDƏTİ « гамма – процентная наработка до отказа; gamma – percent age operating before failure » – sistemin γ ehtimalı ilə fasiləsiz (sıradan çıxmadan) işləmə müddəti t_γ-dır, yəni $\mathbf{P}(t_\gamma) = \gamma$. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin*, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

İMTİNAYA QƏDƏR ORTA İŞLƏNİLMƏ MÜDDƏTİ « средняя наработка до отказа; average operating age before failure » – sistemin ilk imtinasına qədər işləmə müddəti X-in riyazi gözləməsi $\mathbf{M}X$-dir.

İNDEKS(i) təsadüfi kəmiyyətin, paylanmanın **« индекс** случайной величины, **индекс** распределения; **index** of a random variable, **index** of a distribution **»** – ξ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanmasının* $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiyası vasitəsilə,

$$\Delta(\xi) = \sup\{h:\ \min(|f_\xi(t)|:|t|\le h) > 0\}$$

bərabərliyilə təyin olunan ədədi xarakteristikasıdır.

İ. anlayışı [1]-də ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün $C_r(\xi)$ *mərkəz* və $B_r(\xi)$ *səpələnmə* anlayışları ilə yanaşı daxil olunmuşdur.

İxtiyari $0 < r < \Delta(\xi)$ üçün hər iki xarakteristika mövcuddur (bax, [2]).

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 5, с. 1010–12; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

İNDİKATOR(u) hadisənin **« индикатор события; indicator of event »**, A hadisəsinin indikatoru –

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \quad \text{olarsa} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan *təsadüfi kəmiyyətdir.*

İNDİKATOR DƏYİŞƏN « индикаторная переменная; indicator variable » – bax, *Kovariasion analiz*.

İNDİKATOR METRİKA « индикаторная метрика; indicator metric » –

$$i(X, Y) = \mathbf{M} I(X \neq Y) = \mathbf{P}\{X \neq Y\}$$

şəklində mürəkkəb *ehtimali metrikadır*, burada I – hadisənin indikatorudur. İ. m. σ *metrikasının tam variasiyası* üçün *protominimal metrikadır*. Metrikanın tam variasiyası ehtimal nəzəriyyəsində *metrik məsafələr metodunda* (xüsusilə) və *ideal metrikaların* qurulmasında böyük əhəmiyyətə malikdir. İ. m., σ metrikası kimi, təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətləri fəzasının ixtiyari qarşılıqlı birqiymətli çevirmələrinə nəzərən invariantdır, yəni $i(T(X), T(Y)) = i(X, Y)$. i İ.m.-sı Ki – Fan metrikası $\mathcal{K}$ ilə

$$\mathcal{K}(X, Y) \leq i(X, Y)$$

bərabərsizliyi ilə bağlıdır.

İNDİKATORU, ÇOXLUĞUN « индикатор множества; indicator of set » – ixtiyari A çoxluğu üçün

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A, \\ 1, & \omega \in A \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan, ω-nın funksiyası $I_A(\omega)$ *təsadüfi kəmiyyətidir*. Əksinə, ω-nın funksiyası olan və ω-lar çoxluğunda yalnız 0 və 1 qiymətlərini alan hər bir funksiya bu ω-lar çoxluğunun indikatorudur. Aydındır ki,

$$I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B, \quad I_A = I_B \Leftrightarrow A = B,$$
$$I_{AB} = 0 \Leftrightarrow AB = \varnothing,$$
$$I_\varnothing = 0, \quad I_\Omega = 1, \quad I_A + I_{\bar{A}} = 1$$
$$I \inf A_t = \inf I_{A_t}, \quad I \sup A_t = \sup I_{A_t},$$
$$I_{\cap A_n} = \prod I_{A_n}, \quad I_{\Sigma A_n} = \sum I_{A_n}$$
$$I_{\cup A_n} = I_{A_1} + (1 - I_{A_1}) I_{A_2} + (1 - I_{A_1})(1 - I_{A_2}) I_{A_3} + \ldots,$$
$$I_{\liminf A_n} = \liminf I_{A_n},$$
$$I_{\limsup A_n} = \limsup I_{A_n}, \quad I_{\lim A_n} = \lim I_{A_n}.$$

İxtiyari A təsadüfi hadisəsinin indikatorunun riyazi gözləməsi üçün

$$\mathbf{M} I_A(\omega) = 1 \cdot \mathbf{P}\{\omega \in A\} + 0 \cdot \mathbf{P}\{\omega \in \bar{A}\} = \mathbf{P}\{\omega \in A\}$$

münasibəti doğrudur.

İNDİVİDUAL ERQODİK TEOREM « индивидуальная эргодическая теорема; pointwise ergodic theorem » – bax, *Erqodik teoremlər*.

İNERSİON PROQNOZ « инерционный прогноз; persistant forecast » – bax, *Proqnozu*, *havanın*.

İNFİNİTEZİMAL MATRİS « инфинитезимальная матрица; infinitesimal matrix » – bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu.

İNFİNİTEZİMAL OPERATOR « инфинитезимальный оператор, производящий оператор, генератор; generator / infinitesimal operator », doğuran operator, generator – 1) güclü infinitezimal operator – normalanmış fəzada xətti operatorların semi – qrupu P^t-də, $t \geq 0$ operatordur, aşağıdakı kimi təyin olunur: fəzanın f elementi A operatorunun təyin olunma oblastı D_A-dandır, əgər

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (P^t f - f)$$

limiti normaya görə yığılma mənada vardırsa, bu limit f elementində Af operatorunun qiyməti kimi götürülür. İsbat olunur ki, İ. o. sıxan operatorlar semi – qrupunu onun təyin olunma oblastının tamamlayıcısında birqiymətli təyin edir.

2) Markov prosesləri nəzəriyyəsində məhdud, kəsilməz (və ya yalnız ölçülən) funksiyalar fəzasında operatorlar semi – qrupunun İ. o.-a baxılır və bu operator

$$P^t f(x) = \mathbf{M}_x f(\zeta_t)$$

düsturu ilə verilir; $(\zeta_t, \mathbf{P}_x)$ bircins Markov prosesinin İ. o.-u bu halda

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\mathbf{M}_x f(\zeta_t) - f(x))$$

düsturu ilə verilir, limit x-ə görə müntəzəm olmalıdır ($\mathbf{M}_x$, – $\mathbf{P}_x$ ehtimalına uyğun riyazi gözləmədir). ζ_t prosesi üzərinə qoyulan bəzi zəif kəsilməzlik şərtlərilə İ. o. sonluölçülü paylanmalar dəqiqliyilə prosesi birqiymətli olaraq təyin edir.

Ciddi Markov prosesi üçün İ. o. proseslə

$$\mathbf{M}_x f(\zeta_\tau) - f(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau Af(\zeta_t)\, dt$$

münasibətilə əlaqəlidir; τ elə dayanma anıdır ki, $F_x(\tau) < \infty$, f isə $f \in D_A$ şərtini ödəməlidir (düstur Dınkin düsturu kimi də adlanır). Diffuzion proseslər üçün İ. o. 2-ci tərtib differensial operatorun daralmasıdır.

Qeyri – bircins $(\zeta_t, \mathbf{P}_{s,x})$ Markov prosesi üçün İ. o.

$$A_t f(x) = \lim_{t' \downarrow t} (t' - t)^{-1} (\mathbf{M}_{t,x} f(\zeta_{t'}) - f(x))$$

düsturu ilə təyin olunur; bu halda varlıq və yeganəlik məsələləri çox mürəkkəbdir.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2 , М., 1973.

3) Ölçülərin konvolyusion semi–qrupunun İ. o. «И. о. сверточной полугруппы мер; infinitesimal operator / generator of a convolution of measures» – G qrupunda ölçülərin kəsilməz konvolyusion semi – qrupu μ_t -yə müvafiq xətti operatorların kəsilməz $\{S_t,\ t \geq 0\}$ semi – qrupunun infinitezimal operatorudur.

Fərz olunur ki, $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ ehtimal ölçülərinin G qrupunda elə kəsilməz konvolyusion semi – qrupdur ki, $\lim\limits_{t \to 0} \mu_t = \delta_e$ şərtini ödəyir, burada δ_e, – G qrupunun vahidi e -də cırlaşmış ehtimal paylanmasıdır.

$t > 0$ olduqda hər bir μ_t ölçüsünə

$$S_t f(x) := \int_G f(x \cdot y)\, \mu_t(dy)$$

ehtimal operatoru qarşı qoyulur, burada f funksiyası G qrupunda kəsilməz məhdud funksiyaların Banax fəzası $\mathfrak{S}^b(G)$ -dəndir. G -də bütün məhdud müntəzəm kəsilməz həqiqi funksiyaların Banax fəzası $\mathfrak{S}_u(G)$ üzərinə məhdudiyyətlərlə $\{S_t,\ t > 0\}$ operatorlar ailəsi daraldıcı operatorların güclü kəsilməz semi – qrupunu əmələ gətirir. $S_t,\ t > 0$ semi – qrupunun

$$N f(x) := \lim_{t \to 0}\ t^{-1}(S_t f(x) - f(x))$$

münasibətilə təyin olunan İ. o.-u N $\mathfrak{S}_u(G)$ -də sıx hər hansı D_N altfəzasından olan bütün f -lər üçün, $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$ ölçülərinin G qrupunda konvolyusion semi – qrupunun infinitezimal operatoru adlanır.

Ölçülərin konvolyusion semi – qrupunun *doğuran funksionalı* $Af := Nf(e)$ qaydası ilə təyin olunur və İ. o. ilə sıx əlaqəlidir. Aydındır ki, $Nf(x) = A(Z_x f)$, burada Z_x, – G qrupunda x elementinə sol yerinidəyişmə ilə doğurulan $\mathfrak{S}^b(G)$ fəzasında xətti operatordur. N operatoru və A funksionalı $S_t,\ t > 0$ semi – qrupunu (deməli, μ_t qrupunu da) birqiymətli təyin edir.

Bax, *Konvolyusion semi – qrupu, ölçülərin*; kanonik ifadə.

Əd.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

İNFİNİTEZİMAL SİSTEMİ, ÖLÇÜLƏRİN « инфинитезимальная система мер; infinitesimal system of measures » – G qrupunda μ_{nk}, $k = 1, ..., k_n$, $n \geq 1$ ehtimal ölçülərinin aşağıdakı şərti ödəyən üçbucaq sistemidir: G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün

$$\lim_{n \to \infty}\ \sup_{1 \leq k \leq k_n} \mu_{nk}(G \setminus U) = 0.$$

Əgər $\hat{\mu}_{nk}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, – μ_{nk} ehtimal paylanmalarının *Furye çevirməsidirsə*, onda $\{\mu_{nk}\}$ ölçülən sistemi, yalnız və yalnız, T_γ -nın ifadəsi fəzasından olan bütün u -lar üçün

$$\lim_{n \to \infty}\ \sup_{1 \leq k \leq k_n} \left\| \hat{\mu}_{nk}(\gamma) u - u \right\| = 0$$

münasibəti ödənildikdə infinitezimal sistemdir.

Əgər G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı və G qrupunun qeyd olunmuş (məxsusi) kompakt altqrupu K üçün

$$\lim_{n \to \infty}\ \sup_{1 \leq k \leq k_n} \mu_{nk}(G \setminus KU) = 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\mu_{nk}\}$ ölçülər sistemi K – kompaktozimal ölçülər sistemi adlanır.

Əd.: [1] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., 1965; [2] Собко Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 3, с. 549–57.

İNFORMANT « информант; informant » – loqarifmik *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* qradiyentidir. İ. anlayışı riyazi statistikanın parametrik məsələlərilə əlaqədar yaranmışdır. Aprior informasiyaya görə məlumdur ki, müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya proses $\{\mathbf{P}^t,\ t \in \Theta\}$ ailəsindən olan $\mathbf{P}^\theta(d\omega)$ ehtimal paylanması ilə ifadə olunur; t ədədi və ya vektor parametrdir, θ -nın əsl qiyməti isə məlum deyildir. Aparılan müşahidənin (asılı olmayan müşahidələr seriyasının) nəticəsi ω (seriyanın nəticəsi $\omega^{(1)}, ..., \omega^{(N)}$) olmuşdur. Müşahidə nəticələrinə əsasən θ -nı qiymətləndirmək tələb olunur. Fərz olunur ki, $\{\mathbf{P}^t\}$ ailəsi müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bütün mümkün nəticələri fəzası Ω -da təyin olunmuş $\mu(d\omega)$ ölçüsünə nəzərən $p(\omega; t)$ sıxlıq funksiyaları ailəsi ilə verilir. Ω diskret fəza olduğu halda $p(\omega; t)$ əvəzinə nəticələrin ehtimalları $\mathbf{P}^t(\omega)$ -lar götürülür. ω qeyd olunduqda $p(\omega; t)$ kəmiyyəti $t = (t_1, ..., t_m)$ parametrinin funksiyası kimi doğruyaoxşarlıq funksiyası, bu funksiyanın natural loqarifmi – loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyası adlanır.

Hamar ailələr üçün İ.-ı vektor kimi aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$\operatorname{grad}_t \ln p(\omega; t) =$$

$$= \left(\frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_1}, ..., \frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_n} \right);$$

bu şəkildə İ. loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyasından fərqli olaraq μ ölçüsünün seçilməsindən asılı olmur. İ. θ -nın qiymətləndirilməsi məsələsində müşahidələrdən alınan və eyni zamanda əvvəlcədən məlum olan, mühüm əhəmiyyət kəsb edən bütün informasiyanı özündə ehtiva edir. Bundan əlavə, o additivdir: asılı olmayan müşahidələrdə, yəni

$$p(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(N)}; t) = \prod_{k=1}^{N} p_k(\omega^{(k)}; t)$$

olduqda İ. cəmlənir:

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(N)}; t) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{grad} \ln p_k(\omega^{(k)}; t).$$

Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində İ.-ın təsadüfi vektor-funksiya kimi xassələri mühüm əhəmiyyətə malikdir. Loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyasının requlyar olduğu fərz olunarsa, məsələn, iki dəfə differensiallanan, törəmələrinin inteqrallanan və

parametrə görə differensiallanma ilə nəticələr üzrə inteqrallanmanın yerlərini dəyişdirilmə şərtlərini ödədiyi halda bütün j, k qiymətlərində

$$\mathbf{M}_t \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} = \int_{\Omega} \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} p(\omega; t)\, d\mu = 0,$$

$$-\mathbf{M}_t \frac{\partial^2 \ln p(\omega; t)}{\partial t_j \partial t_k} = \mathbf{I}_{jk}(t) = \mathbf{M}_t \frac{\partial \ln p}{\partial t_j} \frac{\partial \ln p}{\partial t_k}$$

eynilikləri doğrudur. $\left\| \mathbf{I}_{jk}(t) \right\|_{j;k=1}^{m}$ kovariasion matrisi *informasiya matrisi* adlanır. Bu matris vasitəsilə θ parametrinin statistik qiymətlərinin dəqiqlik sərhədini təyin edən informasiya bərabərsizlikləri ifadə olunur.

θ parametrini maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə qiymətləndirdikdə müşahidə olunan ω nəticəsinə (və ya $\omega^{(1)}, ..., \omega^{(N)}$ seriyasına) qarşı elə $t = \theta^*(\omega)$ qiyməti götürülür ki, bu qiymət əsl qiymətə ən yaxın – doğruyaoxşar olur, yəni o, doğruyaoxşarlıq funksiyası və loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyasının maksimum qiymətini təmin edir. Lakin alınan

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega; t) = 0$$

doğruyaoxşarlıq tənliyinin $t = \theta^*$-dan başqa əlavə elə kökləri ola bilər ki, bu köklər loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyasının lokal maksimumlarına (və ya minimumlarına) uyğun olur və bu halda bunlar nəzərə alınmamalıdır. Əgər $t = \theta$ qiymətinin hər hansı ətrafında

$$\det \left\| \mathbf{I}_{jk}(t) \right\| \neq 0$$

olarsa, onda İ.-ın qeyd olunmuş xassələrindən, müşahidələr sayı N artdıqca, doğruyaoxşarlıq maksimumunun θ_N^* statistik qiymətinin asimptotik optimallığı alınır.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

İNFORMASİON ARDICILLIQ « информационная последовательность; information sequence » – bax, *Konvolyusion kod.*

İNFORMASİON DAYANIQLILIQ « информационная устойчивость; information stability » – böyük ədədlər qanununun nəzəri – informasion analoqudur. $0 < I(Z^n : \widetilde{Z}^n) < \infty$ şərtini ödəyən $(Z^n, \widetilde{Z}^n)$ təsadüfi kəmiyyətlərin cütləri ardıcıllığı ixtiyari $\delta > 0$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{i_{Z^n;\widetilde{Z}^n}(Z^n : \widetilde{Z}^n)}{I(Z^n : \widetilde{Z}^n)} - 1 \right| < \delta \right\} = 1$$

münasibətini ödəyərsə, o, informasion dayanıqlı ardıcıllıq adlanır, burada $I(Z^n : \widetilde{Z}^n)$ – informasiya miqdarı, $i_{Z^n;\widetilde{Z}^n}(\cdot : \cdot)$ – informasion sıxlıq, yəni $i_{Z^n;\widetilde{Z}^n}(\cdot\,;\cdot) = \log a_{Z^n;\widetilde{Z}^n}(\cdot\,;\cdot)$, burada $a_{Z^n;\widetilde{Z}^n}(\cdot\,;\cdot)$, – $(Z^n; \widetilde{Z}^n)$ cütünün ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}_{Z^n;\widetilde{Z}^n}$-in Z^n və $\widetilde{Z}^n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ölçülərinin hasili $\mathbf{P}_{Z^n} \times \mathbf{P}_{\widetilde{Z}^n}$-ə görə Radon – Nikodim törəməsidir.

İ. d.-ın olması olduqca ümumi hallar üçün müəyyən olunmuşdur. Məs., vəziyyətləri sayı sonlu olan $(Z, \widetilde{Z}) = \{(Z_j, \widetilde{Z}_j), j = 1, 2, ...\}$ stasionar erqodik proseslər cütünün parçaları cütləri – $(Z^n, \widetilde{Z}^n) = ((Z_1, \widetilde{Z}_1), ..., (Z_n, \widetilde{Z}_n))$ ardıcıllığı informasion dayanıqlıdır.

$I(Z^n : \widetilde{Z}^n) \to \infty$ şərti $(Z^n, \widetilde{Z}^n)$ cütləri Qauss tipli olduğu halda İ. d. üçün zəruri və kafidir.

$Z^n = \widetilde{Z}^n$ olduğu halda, $I(Z^n : \widetilde{Z}^n) = H(Z^n)$ Z^n təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır, entropik dayanıqlılıq asimptotik olaraq eynipaylananlıq xassəsinə çevrilir: yəni ixtiyari δ, $\varkappa > 0$ üçün elə $n_0(\delta, \varkappa)$ vardır ki, bütün $n > n_0(\delta, \varkappa)$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \frac{-\log \mathbf{P}(Z^n)}{n} - \frac{H(Z^n)}{n} \right| > \delta \right\} < \varkappa$$

münasibəti ödənilir.

U^n məlumatlar mənbəinin verildiyi fərz olunur; bu mənbə qiymətləri ölçülən $(\mathscr{X}_n, S_{\mathscr{X}^n})$ fəzasından, uyğun ehtimal paylanmaları $P_{X^n}(\cdot) = p_n(\cdot)$ olan X^n məlumatını hasil edir, $(\widetilde{\mathscr{X}}_n, S_{\widetilde{\mathscr{X}}^n})$ – verilmiş məlumatın bərpa olunan qiymətlərinin ölçülən fəzasıdır. $H_{\varepsilon_n}(X^n)$ isə X^n məlumatının ε_n – entropiyası olsun (bax, *Epsilon – entropiya*). Dəqiqlik şərti

$$\mathbf{M}\rho_n(X^n, \widetilde{X}^n) \leq \varepsilon_n, \ \varepsilon_n \geq 0 \qquad (*)$$

bərabərsizliyi ilə verilir, burada mənfi olmayan, ölçülən $\rho(x^n, \widetilde{x}^n)$, $x^n \in \mathscr{X}^n$, $\widetilde{x}^n \in \widetilde{\mathscr{X}}^n$ funksiyası təhrif ölçüsüdür. Əgər (*) bərabərsizliyini ödəyən, ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}_{X^n}(\cdot) = p_n(\cdot)$ olan $(X^n, \widetilde{X}^n)$ təsadüfi kəmiyyətlər cütlərinin informasion dayanıqlı ardıcıllığı varsa və

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(X^n : \widetilde{X}^n)}{H_{\varepsilon_n}(X^n)} = 1$$

münasibəti ödənilərsə, onda U^n informasion dayanıqlı mənbələr ardıcıllığı adlanır.

(Q^n, V^n) rabitə kanalının verildiyi fərz olunur; $(\mathscr{Y}^n, S_{\mathscr{Y}^n})$ və $(\widetilde{\mathscr{Y}}^n, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}^n})$ uyğun olaraq, bu kanalın giriş və çıxış siqnallarının ölçülən fəzaları, $Q(y^n, A)$, $y \in \mathscr{Y}^n$, $A \in S_{\widetilde{\mathscr{Y}}^n}$ keçid funksiyası olsun. Kanalın giriş siqnalları fəzası $(\mathscr{Y}^n, S_{\mathscr{Y}^n})$-də ehtimal paylanmaları V^n-lərin çoxluğunun verildiyi fərz olunur. $C(Q^n, V^n)$ isə (Q^n, V^n) kanalının ötürücülük qabiliyyəti olsun. Əgər ixtiyari $A \in S_{\widetilde{\mathscr{Y}}^n}$ çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Y}^n \in A \mid Y^n\} = Q(Y^n, A)$$

bərabərliyi ödənilərsə, Y^n və $\widetilde{Y}^n$ təsadüfi kəmiyyətləri kanalla sanki yəqin əlaqələnmişlər. Əgər rabitə kanalı ilə bağlı $(Y^n, \widetilde{Y}^n)$ təsadüfi kəmiyyətlər cütlərinin elə informasion dayanıqlı ardıcıllığı varsa ki,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(Y^n : \widetilde{Y}^n)}{C(Q^n, V^n)} = 1$$

münasibətini ödəsin, onda (Q^n, A^n) – informasion dayanıqlı kanallar ardıcıllığı adlanır.

Məlumatları və siqnalları təsadüfi proseslərin parçaları olan mənbə və kanallar ardıcıllıqlarının geniş sinfi üçün İ. d. xassəsi ödənilir.

Əgər məlumatın ε – entropiyası kanalın ötürücülük qabiliyyətindən az olarsa, onda mənbə və kanalların İ. d.-ı kanalla məlumatların ötürülməsi mümkünlüyünün asimptotik mənada zəruri və kafi şərtidir.

Əd.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1960, в. 7, с. 1–201; [4] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

***İNFORMASİON EHTİYATDA SAXLAMA « информационное резервирование; informated redundancy »** – tipli İ. e. s.-da (bax, *Ehtiyatda saxlama*) həddindən artıq informasiyanın yığıldığı nəzərdə tutulur və bu informasiyanın bir hissəsinin itkisi sistemin imtinasına səbəb olmur.

İNFORMASİON KORRELYASİYA ƏMSALI « информационный коэффициент корреляции; informational correlation coefficient » – bir təsadüfi kəmiyyətdə informasiya miqdarı kəmiyyətinin digərinin funksiyası kimi

$$R(X, Y) = \sqrt{1 - e^{-2\mathbf{I}(X:Y)}}$$

düsturu ilə təyin olunan, X və Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında asılılıq ölçüsüdür, burada $I(X:Y)$ – informasiya miqdarıdır.

İ. k. ə. $R(X, Y)$-in xassələri asılılıq ölçüsü kimi X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin asılılıq xarakteristikasını ifadə edən $I(X:Y)$ kəmiyyətinin xassələri ilə tam mənası ilə təyin olunur. Lakin İ. k. ə. R-dən adi korrelyasiya əmsalı ρ-nun informasion analoqu kimi asılılıq ölçüsünü təyin etmək məqsədilə istifadənin bir üstünlüyü vardır: informasiya miqdarının xassələrinə əsasən $R = 0$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda doğru olur. Əgər X və Y ikiölçülü normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, bu iki əmsal üst-üstə düşür, yəni $R = \rho$ olur; belə ki, bu halda $I = -2^{-1}\ln(1-\rho^2)$.

Təsadüfi kəmiyyətlər arasında asılılığın İ. k. ə. vasitəsilə praktiki cəhətdən araşdırılması – əlamətlərin qoşmalığı cədvəlləri tipli informasiya miqdarı üçün cədvəllərlə analizlə eynidir. R-ə analoq seçimi əmsal $\hat{R} = \sqrt{1 - e^{-2\hat{I}}}$,

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \frac{n_{if}}{n} \ln \frac{n n_{ij}}{n_{i.}\, n_{.j}}$$

informasion statistikasından istifadə olunaraq hesablanılır, n – müşahidələrin sayı, s və t – iki əlamətə görə qruplardakı siniflərin sayı, n_{ij}, – (i, j) sinfində müşahidələrin sayıdır,

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}\ , \quad n_{.j} = \sum_{i=1}^{s} n_{ij}\ .$$

Beləliklə, seçimi İ. k. ə.-nın paylanması haqqında məsələ seçimi informasiyanın paylanması məsələsinə gətirilir. Seçimi informasiyanın asılılıq ölçüsü kimi analizi onunla mürəkkəbləşir ki, $\hat{I}$ statistikası müşahidələrin qruplaşmasından olduqca asılı olur.

Əd.: [1] Linfoot E., «Information and Control», 1957, v. 1, № 1, p. 85–89; [2] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967.

İNFORMASİON MATRİS « информационная матрица; information matrix », reqression matrisin – $\mathbf{y} = \Phi\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$, $\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\theta}}$-ya tərs $\operatorname{cov}\boldsymbol{\varepsilon} = W^{-1}$ (əgər $\det\Xi \neq 0$ olarsa) *reqression eksperimenti* üçün $\Xi = \Phi^{\mathrm{T}} W \Phi$ matrisidir; $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\boldsymbol{\theta}$ üçün ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətdir. İ. m.-in maksimizasiya məsələsi münasib mənada qoyulur (bax, məs., *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*, *Ardıcıl planlaşdırılması eksperimentin*).

İNFORMASİON MATRİS Fişer informasiyası üzrə **« информационная матрица;** информация по Фишеру; **information matrix;** Fisher information **»** – *informantın* kovariasiyalar matrisidir. $P^t(d\omega)$ ehtimal paylanmalarının dominar ailəsi üçün bu paylanmaların sıxlıq funksiyaları $p(\omega;\, t)$-lər $t = (t_1, ..., t_m) \in \Theta$ vektor (xüsusi halda, ədədi) parametrindən asılı olan olduqca hamar funksiyalar olduqda İ. m.-in elementləri $t = \theta$ olduğu halda

$$\mathbf{I}_{jk}(\theta) = \int_{\Omega} \frac{\partial \ln p(\omega;\, t)}{\partial t_j} \left.\frac{\partial \ln p(\omega;\, t)}{\partial t_k}\right|_{t=\theta} p(\omega;\theta)\, d\mu \qquad (1)$$

inteqralı ilə təyin olunur, burada $j,\ k = 1, ..., m$. t skalyar parametr olduqda İ. m. yeganə bir ədədlə informant dispersiyası ilə təsvir olunur.

$\mathbf{I}(\theta)$ İ. m.-i mənfi olmayan

$$\sum_{j,k} \mathbf{I}_{jk}(\theta)\, dt_j dt_k = \Delta_\theta \qquad (2)$$

differensial kvadratik formasını təyin edir ki, bu da $\{\mathbf{P}^t\}$ ailəsini Riman metrikası ilə təmin edir. ω nəticələri fəzası Ω sonlu olduqda

$$\Delta_P = \sum_j (d\, p_j)^2 / p_j\ ; \quad p_j = \mathbf{P}(\omega_j)\ , \quad \omega_j \in \Omega$$

olur. Differensial kvadratik Fişer forması (2) sabit vuruq dəqiqliyi ilə statistik həllər qaydaları kateqoriyasına nəzərən invariant yeganə differensial kvadratik formadır. Buna görə də, bu forma bir çox statistik qanunauyğunluqların ifadə olunmasında yaranır.

Nəticələrin Ω fəzasının ixtiyari ölçülən f inikası İ. m.-i $\mathbf{I}^{\mathbf{Q}}(\theta)$ olan $\mathbf{Q}^t = \mathbf{P}^t f^{-1}$ yeni hamar paylanmaları ailəsini doğurur. Bu halda İ. m. monoton artmır, yəni ixtiyari $z_1, ..., z_m$ üçün

$$\sum_{j,k} \mathbf{I}^{\mathbf{Q}}_{j,k} z_j z_k \leq \sum_{j,k} \mathbf{I}^{\mathbf{P}}_{j,k} z_j z_k$$

olur. İ. m. additivlik xassəsinə də malikdir. Əgər $\mathbf{I}^{(i)}(\theta)$ paylanmasının sıxlıq funksiyası $p_i(\omega^i; t)$ olan ailənin İ. m.-idirsə, onda

$$p(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(N)}; t) = \prod_{i=1}^{N} p_i(\omega^{(i)}; t)$$

ailəsi üçün $\mathbf{I}_N(\theta) = \sum_i \mathbf{I}^{(i)}(\theta)$ olur. Məs., N sayda asılı olmayan eyni qanunla paylanmış sınaqlar olduğu halda $\mathbf{I}_N(\theta) = N\mathbf{I}(\theta)$. İ. m. paylanma qanununun parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsində həlledici qaydaların dəqiqliyini xarakterizə etməyə imkan verir. Skalyar t parametrinin ixtiyari $\tau(\omega) = \tau(\omega^{(1)}, ..., \omega^{(N)})$ meylsiz statistik qiymətinin dispersiyası üçün $\mathbf{D}_\theta \tau \geq [N\mathbf{I}(\theta)]^{-1}$ bərabərsizliyi doğrudur. Vektor parametrin statistik qiymətləri üçün analoji matris informasiya bərabərsizliyi ödənilir. Onun skalyar nəticəsi

$$\mathbf{M}_\theta \sum_{j,k=1}^{m} [\tau_j(\omega) - \theta_j][\tau_k(\omega) - \theta_k] \mathbf{I}_{jk}(\theta) \geq mN^{-1} \qquad (3)$$

bərabərsizliyindən aydındır ki, meylsiz qiymətləndirmə heç yerdə olduqca dəqiq ola bilməz. İxtiyari statistik qiymətlər üçün sonuncu müddəa doğru deyildir. Lakin, məs., orta dəqiqliyə məhdudiyyətlər qalır:

$$\mathbf{M}_{\Theta'} \mathbf{M}_\theta \langle \tau - \theta \big| \mathbf{I}(\theta) \big| \tau - \theta \rangle \geq mN^{-1} + o(N^{-1}), \qquad (4)$$

burada (3)-ün sol tərəfində $\mathbf{M}$ ortalaması ixtiyari kompakt $\Theta' \subset \Theta$ altoblastının invariant V həcmi üzrə aparılmışdır.

$$dV|\theta| = \sqrt{\det \mathbf{I}(\theta)}\, d\theta_1 \ldots d\theta_m$$

qalıq həddi Θ'-in ölçüsündən asılıdır. (4) bərabərsizlikləri asimptotik olaraq dəqiqdir və bu mənada maksimum doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti asimptotik optimal olur.

$\det \mathbf{I}(\theta) = 0$ cırlaşma nöqtələrində parametrlərin birgə qiymətləndirilməsi çətinləşir; əgər hər hansı oblastda $\det \mathbf{I}(\theta) = 0$ olarsa, onda birgə qiymətləndirilmə, ümumiyyətlə, mümkün deyildir. Beləliklə, R. Fişer kimi ehtiyatla demək olar ki, İ. m. paylanma qanununun parametrləri haqqında təsadüfi seçimdəki orta informasiya miqdarını təsvir edir (bax, [1]).

Əd.: [1] Fisher R. A., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1925, v. 22, p. 700–25; [2] Барра Ж.–Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., M., 1974; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, M., 1972.

İNFORMASİON METRİKA(sı) Riman « **информационная метрика** римановa; Riemann **information metric** » – bax, *Riman informasion metrikası.*

İNFORMASİON MƏSAFƏ « **информационное расстояние; information distance** » – eyni $(\Omega, \mathscr{A})$ elementar nəticələr fəzasında $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ ehtimalları ilə təyin olunmuş bütün təsadüfi hadisə və ya proseslər cütlərinin «oxşar olmadıqlarını» xarakterizə edən $J(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ kəmiyyətidir. İ. m.-yə *ehtimali məsafənin* xüsusi halı kimi baxmaq olar. İ. m.-yə ən sadə misallar: *tam variasiya metrikası* –

$$\delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \left\{ \int_\Omega |\, \mathbf{P}(d\omega) - \mathbf{Q}(d\omega)\, | \right\} \qquad (1)$$

ehtimali metrikası və Fişerin informasion Riman metrikasında Rao–Bhattaçarya məsafəsi–

$$S(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 2 \arccos \int_\Omega \sqrt{\mathbf{P}(d\omega)\, \mathbf{Q}(d\omega)} \qquad (2)$$

düsturu ilə təyin olunan ehtimal metrikalarıdır.

Asılı olmayan müşahidələr üzrə $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ ehtimallarının müqayisəsi məsələsində eksperimentin informativlik ölçüləri ilə bağlı İ. m.-lər çox maraqlıdır (bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*). Müşahidə nəticələri üzərində işləyən statistik hər bir konkret məsələdə müşahidə olunmuş təsadüfi hadisə və ya proses haqqında nəticələr çıxarmalıdır. Bu nəticələr, ümumiyyətlə, tamamilə dəqiq olmur, çünki müşahidələrin nəticələri təsadüfi olur. İntuitiv olaraq aydındır ki, hər bir seçim müəyyən miqdarda faydalı informasiya daşıyır və bununla yanaşı: A) müşahidə nəticələri üzərində işləyərkən informasiya yalnız itə bilər, B) asılı olmayan mənbələrdən alınan (məs., asılı olmayan seçimlərdən) informasiya cəmlənir. Beləliklə, əgər eksperimentin informativliyinə müşahidədəki orta informasiya miqdarı kimi baxılarsa, onda informativlik üçün A) və B) aksiomları ödənilir. İnformasiya anlayışının intuitivliyinə baxmayaraq, bəzən A) və B) aksiomlarını ödəyən elə J kəmiyyətini göstərmək mümkündür ki, bu kəmiyyət informativlik kimi təbii olaraq qəbul olunmalıdır və o, müşahidələrin sayı artdıqca, statistik həllər məsələsində, nəticələrin orta dəqiqliyinin asimptotikasını təsvir edə bilər. İnformativlik ədədi və ya matris kəmiyyət ola bilər [məs., Fişer informasion matrisi; bax, (2)].

Neyman – Pirson nəzəriyyəsinə əsasən, hadisələr cəbri $\mathscr{A}$ olan, ω nəticələrinin Ω ümumi fəzasında verilmiş $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ ehtimal paylanmalarının müxtəlifliyi haqqında bütün faydalı informasiya doğruyaoxşarlıq nisbəti və onun loqarifmi

$$l(\omega) = \ln \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}(\omega), \quad \omega \in \Omega \qquad (3)$$

kəmiyyətində ehtiva olunur və sıfır ehtimallı nəticələr çoxluğundakı qiymətlər dəqiqliyi ilə təyin olunur.

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q}) = \int_\Omega \mathbf{P}(d\omega) = \int_\Omega \left[\frac{\mathbf{P}(d\omega)}{\mathbf{Q}(d\omega)} \ln \frac{\mathbf{P}(d\omega)}{\mathbf{Q}(d\omega)} \right] \mathbf{Q}(d\omega) \quad (4)$$

münasibətindəki kəmiyyətin riyazi gözləməsi $\mathbf{Q}$-yə qarşı $\mathbf{P}$-nin xeyrinə orta fərqlənmə informasiyası adlanır (burada $0 \cdot \ln 0 = 0$ qəbul olunur); bu kəmiyyət eyni zamanda nisbi entropiya, *Kullbak – Leybnits informasiya miqdarı*, Kullbak–Leybler–Sanov informasion yayınması kimi də adlandırılır. Mənfi olmayan (amma

sonsuzluq ola bilər) $\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q})$ kəmiyyəti A) və B) aksiomlarını ödəyir. Bu kəmiyyət $\mathbf{P}$-nin $\mathbf{Q}$-dən birtərəfli fərqlənməsinin dəqiqliyini xarakterizə edir, asılı olmayan sınaqlar sayı N artdıqda 2-ci növ səhvin (yəni $\mathbf{P}$ hipotezi səhv olduğu halda, onun qəbul edilməsi) ehtimalı β_N-in azalmasının maksimal tərtibini təyin edir, 1-ci növ səhv ehtimalı – mühümlük ölçüsü α_n-in ixtiyari qeyd olunmuş qiymətində, $0 \le a_0 \le \alpha_N \le a_1 < 1$ olduqda

$$\ln \beta_N \sim -N\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q})$$

münasibəti ödənilir. $0 < b_0 \le \beta_N \le b_1 \le 1$ olduqda $\mathbf{I}(\mathbf{Q}:\mathbf{P})$ analoji kəmiyyəti də α_n-in azalmasının maksimal tərtibini təyin edir. «Oxşarlıq» münasibəti, məs., təsadüfi hadisə və ya prosesların «oxşarlığı», ümumiyyətlə, simmetrik deyildir və bir qayda olaraq, $\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q}) \ne \mathbf{I}(\mathbf{Q}:\mathbf{P})$. $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$-nün bir-birinə «oxşar» olmamasının təbii simmetrik xarakteristikası onların minimaks testlənməsində yaranır. Optimal test üçün

$$\ln \alpha_N = \ln \beta_N \sim -N\mathbf{I}_{\mathbf{PQ}},$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{PQ}} = -\ln \min_{\alpha} \int_{\Omega} [\mathbf{P}(d\omega)]^{\alpha} [\mathbf{Q}(d\omega)]^{(1-\alpha)} =$$

$$= \min_{R} \max \{\mathbf{I}(\mathbf{R}:\mathbf{P}),\ \mathbf{I}(\mathbf{R}:\mathbf{Q})\}$$

münasibətləri doğrudur.

A) aksiomunun nəticələrindən biri

$$J(\mathbf{P},\ \mathbf{Q}) \ge J(\mathbf{P}\Pi,\ \mathbf{Q}\Pi) \qquad (5)$$

bərabərsizliyidir; Π, – $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında ω nəticələrinə tətbiq olunan ixtiyari statistik həlledici qaydadır. Bu bərabərsizlikdən aydındır ki, A) aksiomunu ödəyən ixtiyari informasiya miqdarı J kateqoriyanın statistik həllər qaydalarına görə monoton invariantdır. $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ cütlərinin belə invariantlarının tam sistemlərini

$$\mu^{+}(z) = \sup [\mathbf{P}](A) - z\mathbf{Q}(A) : A \in \mathscr{A},$$

$$\mu^{-}(z) = -\inf [\mathbf{P}](A) - z\mathbf{Q}(A) : A \in \mathscr{A}$$

variasiyaları təyin edir və bunlar vasitəsilə $0 \le z \le \infty$ olduqda (3) düsturundan $l(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti nəticələrin paylanması $\mathbf{P}$ (və ya $\mathbf{Q}$) ilə tam mənası ilə təyin olunur. (1) və (2) daxil olmaqla, digər bütün monoton invariantları, həm də Çisar informasion divergensiyalarını (bax, [3]) $\mu^{+}(z)$ və $\mu^{-}(z) = \mu^{+}(z) + z - 1$ vasitəsilə ifadə etmək olur, məs.:

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \int_0^1 \mu^{(-)}(z) z^{-1} dz + \int_1^{\infty} \mu^{(+)}(z) z^{-1} dz .$$

İxtiyari J İ. m. müntəzəm struktur doğurur və $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında təyin olunmuş bütün ehtimal ölçülərinin hər bir $\mathrm{cap}(\Omega, \mathbf{P})$ çoxluğunda uyğun müntəzəm τ_J topologiyasını təyin edir. Əgər J (5) münasibətini ödəyirsə, onda bu topologiya (1) variasiyası üzrə yaranmış τ_σ topologiyasını majorlayır. Məs., əgər λ monoton informasion metrikadırsa, onda

$$\lambda(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \ge \frac{1}{8} \lambda(R_{0,5}, R_{0,25})^{\delta}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada R_θ – ikiatomlu $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ fəzasında ehtimal paylanmasıdır və $R_\theta(\varepsilon_1) = \theta$, $R_\theta(\varepsilon_2) = 1 - \theta$, $0 \le \mathbf{Q} \le 1$.

B) aksiomuna əsasən, ortoqonal informativliklər katetlərin uzunluqlarının kvadratları kimi cəmlənilir. Nə İ. m.-lər, nə də onların kvadratları oxşar additivlik xassəsinə malik deyildirlər. (4) nisbi entropiyası üçün B) aksiomununun ödənilməsi $\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q})$-nü $\mathbf{Q}$-dən $\mathbf{P}$-yə qədər məsafənin kvadratının yarısının qeyri – simmetrik analoqu kimi interpretasiya etməyə əsas verir. Belə həndəsi interpretasiya statistikanın bir sıra məsələlərdə təbiidir. Xüsusi halda, paylanmaların eksponensial ailəsi nəzəriyyəsində, nisbi entropiya üçün Pifaqor teoreminin qeyri – simmetrik variantı aşağıdakı kimi təyin olunur:
«qeyri – simmetrik» ortoqonallıq şərtində

$$\int_{\Omega} l(\omega)\left[\mathbf{R}(d\omega) + \mathbf{Q}(d\omega)\right] =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\ln \mathbf{P}(d\omega) - \ln \mathbf{Q}(d\omega)\right]\left[\mathbf{R}(d\omega) - \mathbf{Q}(d\omega)\right] = 0,$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{R}:\mathbf{P}) = \mathbf{I}(\mathbf{R}:\mathbf{Q}) + \mathbf{I}(\mathbf{Q}:\mathbf{P}).$$

Oxşar xassə $\mathrm{cap}(\Omega, \mathbf{P})$ çoxluqlarının ekvivariant xətti əlaqəlilikləri nəzəriyyəsində də aşkar olunmuşdur (bax, [4]).

Bir-birinə olduqca yaxınlaşmaqda olan $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ üçün $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ diaqonalında hamar, invariant informasion $J(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ miqdarının baş hissəsi Fişer kvadratik forması vasitəsilə sabit $c(\mathbf{I})$ vuruğu dəqiqliyi ilə verilir. Nisbi entropiya üçün $c(J) = 0{,}5$.

Əd.: [1] К у л ь б а к С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] Ч и с а р И., К е р н е р Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [4] A m a r i S h u n i c h i, Differential-geometrical methods in statistics, B., 1985; [5] M o r o z o v a E. A., C e n c o v N. N., в кн. Probability theory and mathematical statistics, v. 2 (Vilnius, 1985), Utrecht, 1987, p. 287–310.

İNFORMASİON ÖLÇÜ « информационная мера; information measure » – təsadüfi hadisə və ya təsadüfi kəmiyyətin informativlik ölçüsüdür. Konkret haldan asılı olaraq müxtəlif İ. ö.-lər istifadə olunur.

Diskret halda İ. ö.-nün daxil olunduğu ümumi sxem ondan ibarətdir ki, hər bir elementar təsadüfi A hadisəsi üçün onun informativliyi $\mathbf{I}(A)$ təyin olunur, yəni A hadisəsinin, doğrudan da, baş verdiyi haqqında alınmış informasiya kəmiyyətcə ifadə olunur və sonradan bu alınmış $\mathbf{I}(A)$ kəmiyyətlərinin orta qiyməti müəyyən bir qayda ilə hesablanılır. Bu halda, İ. ö. anlayışı nəzəri – informasion anlayış kimi $\mathbf{I}(A)$-nın yalnız A_f hadisəsinin baş vermə ehtimalı $\mathbf{P}(A) = p$-dən asılı olmasına əsaslanır, yəni $\mathbf{I}(A) = f(p)$. $f(p)$ funksiyası təbii olaraq müsbət funksiyadır [$0 \le p \le 1$ olduqda $f(p) \ge 0$: mənfi informasiya mövcud deyildir] və monoton funksiya olmalıdır [$f(p)$ azalır: ehtimalı

daha az olan hadisə daha çox informativdir]. Sonlu sayda $x_1, ..., x_n$ qiymətlərini uyğun olaraq $p_1, ..., p_n$ ehtimalları ilə alan diskret X təsadüfi kəmiyyətinin İ. ö. $\mathbf{I}(A_i)$ kəmiyyətlərinin orta qiymətinin müəyyən bir qayda ilə hesablanması yolu ilə təyin olunur; $A_i = \{X = x_i\}$ təsadüfi hadisədir. İnformasiya nəzəriyyəsində istifadə olunan İ. ö. – X təsadüfi kəmiyyətinin İ. ö. – Şennon entropiyası $H(x) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$ kəmiyyətidir ki, o, $f(p) = -\log_2 p$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə bərabərdir.

Bu entropiyanın müxtəlif ümumiləşmələri bir sıra İ. ö.-lərin alınmasına gətirir. Məs., sonlu seçim üzrə naməlum ehtimal paylanmalarının qiymətləndirilməsi kimi statistik məsələlərdə

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{P} \| \mathbf{Q}) = \sum_i q_i f(p_i/q_i)$$

düsturu ilə ifadə olunan f – fərqlənmə (rus. f – расхождимость) tez-tez təsadüf olunur, burada $\mathbf{P} = (p_1, ..., p_n)$, $\mathbf{Q} = (q_1, ..., q_n)$ – ehtimal paylanmaları, $f(t)$ – ixtiyari qabarıq funksiyadır. $f(t) = t \log t$ olduqda Kullbak – Leybler fərqlənməsi, $f(t) = (t-1)^2$ olduqda χ^2 – fərqlənmə, $f(t) = |t-1|$ olduqda isə iki ehtimal paylanması arasında variasiyaya görə məsafə alınır.

Riyazi gözləmə əvəzinə digər ortalanmalar götürdükdə, müxtəlif entropiyalar almaq olur. $\alpha \neq 1$ olduqda

$$H_\alpha(p_1, ..., p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_i p_i^\alpha \right)$$

α tərtib Renyi entropiyası alınır. Adətən, $H_1 = H$ Şennon entropiyası qəbul edilir. $\alpha = 0$ olduqda Renyi entropiyası

$$H_0(p_1, ..., p_n) = \log_2 N(p_1, ..., p_n)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $N(p_1, ..., p_n)$, – $p_1, ..., p_n$ ehtimalları arasında sıfra bərabər olmayan ehtimallar sayıdır. H_0 bəzən Hartli entropiyası da adlandırılır. α tərtib Renyi entropiyası məlumatlar mənbəinin kodlanması nəzəriyyəsində ortaya çıxır, bu şərtlə ki, kodun xarakteristikası kimi α qüvvət üstlü kod sözü uzunluğunun orta qiyməti götürülməlidir.

Digər bir ümumiləşmə

$$H(X; \alpha, \beta) = \frac{1}{2^{1-\beta} - 1} \left[\sum_i (p_i^\alpha)^{(\beta-1)/(\alpha-1)} - 1 \right]$$

$$\alpha > 0, \ \beta > 0, \ \alpha \neq \beta, \ \alpha \neq 1, \ \beta \neq 1$$

ifadəsilə verilən α tərtib və β tipli entropiyadır.

Baxılan İ. ö.-lərin əksəriyyəti kəsilməz paylanmalar üçün də təyin oluna bilinir. Bu halda Şennon entropiyası əvəzinə differensial entropiya götürülür. $\mathbf{I}_f(\mathbf{P} \| \mathbf{Q})$ f – fərqlənmə isə

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{P} \| \mathbf{Q}) = \int q(x) f(p(x)/q(x)) \, d\mu(x)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $p(x)$, $q(x)$, – $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmalarının μ ölçüsünə görə sıxlıq funksiyalarıdır.

Əd.: [1] Aczel J., Daroczy Z., On measures of information and their characterizations, N. Y., 1975; [2] Csiszar I., «Trans. 7th Praque Conf. Inform. Theory, Statist. Decis Funct., Random Process. Eur. Meet. Statist., 1974», 1978, v. B, p. 73–86.

İNFORMASİON SIXLIQ « информационная плотность; information density » – bax, *İnformasion dayanıqlılıq*.

İNFORMASİON YAYINMA(sı) Kullbak–Leybler–Sanovun **« информационное уклонение** Кульбака – Лейблера – Санова; Kullback – Leibler – Sanov **information »** – bax, *Nisbi entropiya*.

İNFORMASİYA « информация; information » – bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi*.

İNFORMASİYA aprior **« информация** априори; aprior **information »** – bax, *Aprior informasiya*.

İNFORMASİYA MİQDARI « информации количество; amount of information » – bir təsadüfi kəmiyyətdə digərinə nəzərən olan informasiyanın nəzəri – informasion kəmiyyət ölçüsüdür.

X və Y hər hansı $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, uyğun olaraq $(\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}})$ və $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər; $\mathbf{P}_{XY}(C)$, $C \in S_{\mathcal{X}} \times S_{\mathcal{Y}}$ və $\mathbf{P}_X(A)$, $A \in S_{\mathcal{X}}$, $\mathbf{P}_Y(B)$, $B \in S_{\mathcal{Y}}$ – uyğun olaraq, bu təsadüfi kəmiyyətlərin birgə (ikiölçülü) və marginal ehtimal paylanmaları olsun. İnformasiya miqdarı $\mathbf{I}(X:Y)$, əgər $\mathbf{P}_{XY}$ ölçüsü $\mathbf{P}_X \times \mathbf{P}_Y$ düz hasilinə nəzərən mütləq kəsilməz olarsa,

$$\mathbf{I}(X:Y) = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} a_{XY}(x, y) \log a_{XY}(x, y) \mathbf{P}_X(dx) \mathbf{P}_Y(dy)$$

düsturu ilə təyin olunur (loqarifmlər, adətən, 2 və ya e əsasına görə götürülür), burada a_{XY}, – $\mathbf{P}_{XY}$ ölçüsünün $\mathbf{P}_X \times \mathbf{P}_Y$ ölçüsünə nəzərən Radon – Nikodim sıxlığıdır. Əgər $\mathbf{P}_{XY}$ ölçüsü $\mathbf{P}_X \times \mathbf{P}_Y$ ölçülər hasilinə nəzərən mütləq kəsilməz olmazsa, onda tərifə görə $\mathbf{I}(X:Y) = \infty$ qəbul olunur.

X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda İ. m. $\mathbf{I}(X:Y)$

$$\mathbf{I}(X:Y) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $\{p_i\}$, $\{q_j\}$ və $\{p_{ij}\}$, – X, Y -in və (X, Y) cütünün uyğun ehtimal paylanmalarıdır. Məs., $\mathbf{I}(X:X) = H(X)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin *entropiyasıdır*.

Əgər (X, Y) cütü mütləq kəsilməz ehtimal paylanma sıxlığı $p_{XY}(x, y)$ ilə verilərsə, onda İ. m.

$$\mathbf{I}(X:Y) = \int p_{XY}(x, y) \log \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x) \, p_Y(y)} \, dx \, dy \qquad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $p_X(x)$ və $p_Y(y)$, – X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun ehtimal paylanmalarının sıxlıq funksiyalarıdır. Məlumdur ki, ümumi halda

$$\mathbf{I}(X:Y) = \sup \mathbf{I}(\varphi(X):\psi(Y)), \qquad (2)$$

burada yuxarı sərhəd sonlu sayda qiymətləri olan bütün ölçülən $\varphi(\cdot)$ və $\psi(\cdot)$ funksiyaları üzrə götürülür.

X, Y və Z diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda

$$\mathbf{I}(X:Y|Z) = \sum_k r_k \sum_{i,j} p_{ij|k} \log \frac{p_{ij|k}}{p_{i|k}\, q_{j|k}}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan şərti informasiya miqdarından da istifadə olunur, burada $\{p_{i|k}\}$, $\{q_{j|k}\}$, $\{p_{ij|k}\}$ – uyğun olaraq X, Y və (X, Y) cütünün Z-ə nəzərən şərti ehtimal paylanmaları, $\{r_k\}$, – Z təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır. $\mathbf{I}(X:Y|Z)$ üçün (1) və (2)-yə analoji hökmlər doğrudur. İ. m.-nın əsas xassələrindən aşağıdakılar xüsusilə qeyd olunmalıdır:

1) $\mathbf{I}(X:Y) = \mathbf{I}(Y:X) \geq 0$; belə ki, bərabərlik X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda ödənilir;

2) X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda İ. m. və entropiyanı əlaqələndirən

$$\mathbf{I}(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) =$$
$$= H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

bərabərliyi doğrudur; X və Y cütü mütləq kəsilməz paylanmaya malik olduğu halda

$$\mathbf{I}(X:Y) = h(X) + h(Y) - h(X,Y) =$$
$$= h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X)$$

analoji bərabərliyi doğrudur ki, bu bərabərliklə İ. m. və *differensial entropiya* arasında əlaqə ifadə olunur;

3) $$\mathbf{I}((X,Y):Z) = \mathbf{I}(X:Z) + \mathbf{I}(Y:Z|X)$$

«şərti informasiya» düsturu və

$$\mathbf{I}((X,Z):Y) + \mathbf{I}(X:Z) = \mathbf{I}(X:(Z,Y)) + \mathbf{I}(Y:Z)$$

«üçqat informasiya» düsturu doğrudur.

İ. m.-nın aşkar surətdə hesablanmasına misal olaraq Qauss təsadüfi kəmiyyətləri üçün İ. m.-nın düsturu aşağıda verilmişdir. Əgər X və Y n – ölçülü Qauss təsadüfi kəmiyyətləri olarsa və (X, Y) cütü də Qauss paylanması ilə verilərsə, onda

$$\mathbf{I}(X:Y) = -\frac{1}{2} \log \frac{D_{XY}}{D_X D_Y},$$

burada D_X, D_Y və D_{XY} – uyğun olaraq, X, Y və (X, Y) cütünün korrelyasion matrislərinin determinantlarıdır. Xüsusi, birölçülü halda

$$\mathbf{I}(X:Y) = -\frac{1}{2} \log (1 - r^2),$$

burada r, – X və Y-in korrelyasiya əmsalıdır. İ. m. anlayışı informasiya nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır.

Ədb.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [4] Шеннон К., Математическая теория связи его в кн.: Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

İNFORMASİYA MİQDARI qeyri–parametrik **« информационное количество** непараметрическое; non–parametric **Fisher information »** – bax, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə*.

İNFORMASİYA NƏZƏRİYYƏSİ « информации теория; information theory » – informasiyanın təsnifatı və onun ötürülməsi, qorunub saxlanılması, seçilməsi metodlarının təsviri, keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi və optimizasiyası ilə bağlı tətbiqi riyaziyyat oblastıdır.

İ. n., əsas etibarilə, informasiyanın optimal ötürülmə nəzəriyyəsi kimi hesab olunur və riyazi ədəbiyyatda, adətən, bu sadəcə olaraq, İ. n. kimi adlandırılır. İ. n.-nin yaranması K. Şennonun (C. Shannon) adı ilə bağlıdır. O, 1948-də əvvəlcədən verilmiş keyfiyyətlə, *kodlama* və *dekodlamanın* optimal metodlarının tətbiqində informasiyanın ötürülməsi və qorunub saxlanılmasının mümkünlüyü probleminin ümumi həllini təklif etmişdir. İnformasiyanın ötürülməsi və saxlanılması ilə bağlı məsələlər mahiyyətcə bir-birindən fərqlənmir: informasiyanın qorunub saxlanılmasına fəzada deyil, zamana görə informasiya ötürülməsi kimi baxmaq olar.

İnformasiyanı ötürmə nəzəriyyəsinin əsas teoremləri, əvvəllər, varlıq teoremləri xarakteri daşıyırdı və bu teoremlərdə kodlama və dekodlama metodlarının varlığı isbat olunurdu, lakin bu metodların qurulması qaydalarına və praktiki realizasiyalarına baxılmırdı. Sonralar İ. n.-nin kodlama və dekodlamanın konkret və nisbətən sadə alqoritmlərinin qurulmasına həsr olunmuş istiqamətləri geniş surətdə inkişaf etməyə başladı ki, bu alqoritmlər öz xarakteristikalarına görə mövcudluqları olduqları əvvəllər isbat olunmuş optimal alqoritmlərə yaxınlaşırdı. Bununla əlaqədar olaraq, İ. n.-nin yeni bir istiqaməti – kodların konkret qurulması metodlarını öyrənən – kodlama nəzəriyyəsi yaranır və inkişaf etməyə başlayır; bu nəzəriyyədə verilən kodlama və dekodlama metodları çox da mürəkkəb olmayıb, praktik cəhətdən reallaşan metodlardır. Müasir kodlama nəzəriyyəsində statistik metodlardan başqa kombinator metodlar, müasir cəbrin (qruplar nəzəriyyəsi, sonlu meydanlar nəzəriyyəsi, cəbri həndəsə) metodları həlledici rol oynamağa başladığından, kodlama nəzəriyyəsi bu ensiklopediya çərçivəsində verilməmişdir.

Texniki ədəbiyyatda İ. n.-nə *kanalın* giriş və çıxış siqnallarının seçilməsi və çevrilməsinə həsr olunmuş bütün araşdırmalar toplusu aid olunur; xüsusi halda rabitə kanallarında kodlama və dekodlamaya siqnalların modulyasiyası və demodulyasiyası ilə birlikdə baxılır. Bu istiqamətin müasir nöqteyi – nəzərdən araşdırılmasını texniki rabitə məsələlərinə təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslərin statistikasının tətbiqi kimi interpretasiya etmək olar. İ. n.-nin problemlərinə A. N. Kolmoqorovun (bax, [7]) adı ilə bağlı alqoritmlər nəzəriyyəsi ideyalarına əsaslanan yanaşma böyük maraq doğurur.

İlk dəfə K. Şennon tərəfindən baxılan informasiya ötürülməsinin ümumi sxemi aşağıda şərh olunur. *Məlumatlar mənbəi* kanal üzrə qəbuledənə ötürüləcək məlumat hasil edir. Adətən, fərz olunur ki, məlumat – ehtimal paylanması $p(\cdot)$, qiymətləri hər hansı $(\mathscr{X}, S_{\mathscr{X}})$ ölçülən fəzasında verilmiş, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş X təsadüfi kəmiyyətidir. Məs., $X = \{X(t), a \leq t \leq b\}$ diskret və ya kəsilməz zamanlı təsadüfi prosesdir, $X(t)$ isə hər hansı $(\mathscr{X}^0, S_{\mathscr{X}^0})$ ölçülən fəzasından qiymətlər alır.

Diskret zaman halında $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ toplularına (X^n ölçülən $(\mathscr{X}^n, S_{\mathscr{X}^n})$ fəzasında, yəni $(\mathscr{X}^0, S_{\mathscr{X}^0})$ fəzalarının n – qat hasilində qiymətlər alır) – girişdə n uzunluqlu məlumatlar parçaları deyilir, X_k isə k anında mənbədən hasil olunan məlumat və ya sadəcə məlumat komponenti adlanır; $k = 1, \dots, n$.

Məlumat kəsilməz zamanlı təsadüfi proses olduğu halda uyğun anlayışlar analoji təyin olunur. Çıxışdakı məlumat (ötürülmüş məlumatın bərpa olunmuşu), yəni ünvan olunan tərəfdən qəbul edilən məlumat, – eyni $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, ölçülən $(\widetilde{\mathscr{X}}, S_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ fəzasından qiymətlər alan $\widetilde{X}_k$ təsadüfi kəmiyyətidir. Əgər $\widetilde{X}$ diskret və ya kəsilməz zamanlı təsadüfi proses olarsa, giriş məlumatına analoji olaraq, onun qiymətlərini $(\mathscr{X}^0, S_{\mathscr{X}^0})$ fəzasından alan komponentləri üçün anlayışlar təyin olunur. Məlumatın rabitə kanalı üzrə ötürülməsinin keyfiyyət ölçüsü – *məlumatların bərpaolunma dəqiqliyidir*. Əgər məlumat ötürmə maneələrli rabitə kanalı ilə aparılırsa, hətta $\mathscr{X}$ və $\widetilde{\mathscr{X}}$ çoxluqları üst-üstə düşdükləri halda belə, bir qayda olaraq, mütləq dəqiqliyə nail olunmur, yəni ötürülən və bərpaolunacaq məlumatların tamamilə üst-üstə düşməsinə nail olmaq mümkün olmur. İ. n.-ndə dəqiqlik üçün qoyulan tələblər, adətən, statistik izah olunur və bu zaman ötürülən və bərpaolunan $(X, \widetilde{X})$ məlumatlar cütünün $(\mathscr{X} \times \widetilde{\mathscr{X}},\ S_{\mathscr{X}} \times S_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ ölçülən fəzalar hasilində mümkün olan birgə paylanmaları sinfi – W sinfi seçilir. W sinfi, adətən, mənfi olmayan ölçülən m – ölçülü $\rho(x, \widetilde{x})$ vektor – funksiyası, $x \in \mathscr{X}$, $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathscr{X}}$ və komponentləri müsbət ε_j, $j = 1, 2, \dots, m$ olan $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ vasitəsilə verilir. Fərz olunur ki, $(X, \widetilde{X})$ cütünün ehtimal paylanması yalnız o halda W sinfindəndir ki,

$$\mathbf{M}\rho_j(X, \widetilde{X}) \le \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{1}$$

münasibəti ödənilsin (adətən, $m = 1$ qəbul olunur).

Beləliklə, məlumatların bərpaolunma dəqiqliyinin şərtindən aydın olur ki, bərpaolunan məlumatlar ötürülən məlumatlardan nə dərəcədə fərqlənir; (1) şərtindən aydındır ki, bu fərq ε -u aşmır. Mənbənin hasil etdiyi məlumatlar (Q, V) rabitə kanalı ilə ötürülür. (Q, V) kanalı iki – $(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}}), (\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ ölçülən fəzaları, A qeyd olunduqda $S_{\widetilde{\mathscr{Y}}}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən və $y \in \mathscr{Y}$ qeyd olunduqda $(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ fəzasında ehtimal ölçüsü olan keçid funksiyası $Q(y, A)$, $y \in \mathscr{Y}$, $A \in S_{\widetilde{\mathscr{Y}}}$ və $(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$ fəzasında ehtimal ölçülərinin çoxluğu V ilə verilir. $(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$, $(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ fəzaları uyğun olaraq kanalın giriş və çıxış siqnalları fəzaları adlanır; $Q(y, A)$ – çıxış siqnallarının şərti ehtimalıdır, bu şərtlə ki, kanalın girişinə daxil olan siqnal y-dir; V – kanalın giriş siqnalının paylanmasına olan məhdudiyyəti təyin edir.

Əgər Y və $\widetilde{Y}$ təsadüfi kəmiyyətləri $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuşlarsa və uyğun olaraq, $(\mathscr{Y}, S_{\mathscr{Y}})$ və $(\widetilde{\mathscr{Y}}, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ fəzalarından qiymətlər alırlarsa, onda bu təsadüfi kəmiyyətlər (Q, V) kanalı ilə əlaqəlidir, deyilir; $A \in S_{\widetilde{\mathscr{Y}}}$ olan ixtiyari A çoxluğu üçün vahid ehtimalla

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Y} \in A \mid Y\} = Q(Y, A) \tag{2}$$

olur və Y -in ehtimal paylanması V çoxluğundandır. V çoxluğu, adətən, $\boldsymbol{\pi}(y) = (\pi_1(y), \dots, \pi_l(y))$, $y \in \mathscr{Y}$ ölçülən vektor – funksiyası və $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ vektoru vasitəsilə verilir; fərz olunur ki, Y -in paylanması V çoxluğuna yalnız o halda aid olur ki,

$$\mathbf{M}\pi_j(Y) \le \gamma_j, \quad j = 1, \dots, l \tag{3}$$

şərti ödənilsin.

Diskret kanallar halında ($\mathscr{Y}$ çoxluğu sonlu olduğu halda) V çoxluğu, bir qayda olaraq, bütün mümkün olan ehtimal paylanmaları çoxluğu ilə üst-üstə düşür, yəni hər hansı məhdudiyyətlər istisna olunur. Aydınlıq nöqteyi – nəzərindən $\mathscr{Y}$ – ötürülən siqnallar çoxluğu, $\widetilde{\mathscr{Y}}$ – qəbulolunan siqnallar çoxluğudur (bir çox məsələlərdə $\mathscr{Y}$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}$ fəzaları üst-üstə düşür). Əgər giriş siqnalı Y -in paylanması verilirsə, onda (2) münasibətinə əsasən çıxış siqnalı $\widetilde{Y}$ -in paylanmasını tapmaq mümkün olur. V -yə məhdudiyyətin qoyulması onunla əlaqədardır ki, bir çox hallarda giriş siqnalının paylanmasının ixtiyari olduğu fərz olunmur (məs., giriş siqnalının kvadratının orta qiymətinin verilmiş konstantı aşmadığı hal, yəni giriş siqnalının gücü və ya enerjisinə qoyulan məhdudiyyət verildiyi tipik hal).

Tətbiqi məsələlərdə mühüm olan xüsusi hal, kanalın giriş və çıxış siqnalları həqiqi oxun hər hansı sonlu və ya sonsuz intervalında təyin olunmuş (diskret və ya kəsilməz zamanlı), uyğun olaraq ölçülən $(\mathscr{Y}^0, S_{\mathscr{Y}^0})$, $(\widetilde{\mathscr{Y}}^0, S_{\widetilde{\mathscr{Y}}^0})$ fəzalarından qiymətlər alan $Y = \{Y(t)\}$, $\widetilde{Y} = \{\widetilde{Y}(t)\}$ təsadüfi proseslər olduğu haldır. Əgər $Y = (Y_1, \dots, Y_n, \dots)$ və $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n, \dots)$ elə təsadüfi ardıcıllıqlar olarsa ki, n -in ixtiyari $n = 1, 2, \dots$ qiymətində Y, $Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ və $\widetilde{Y}^n = (\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n)$ üçlükləri Markov zənciri təşkil edir, onda uyğun kanal – qeyri–antisipativ kanal adlanır; aydındır ki, belə kanalla qeyd olunmuş anlamda kanallar ardıcıllığı əlaqələnir, bunlar ilkin kanalın parçaları adlandırılır. Bu parçaların giriş və çıxış siqnalları uyğun olaraq, $Y^n = (Y_1, \dots, Y_n)$ və $\widetilde{Y}^n = (\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n)$ təsadüfi vektorlarıdır.

Girişdəki məlumatı rabitə kanalı ilə ötürülən siqnala, çıxışda qəbul olunmuş siqnalı isə bərpaolunacaq məlumata çevirmək üçün məlumatların kodlanma və dekodlanması aparılmalıdır. Kodla(n)ma – qiymətləri $\mathscr{Y}$ -dən olan ölçülən x -in $f(x)$ funksiyasına deyilir, $x \in \mathscr{X}$, dekodlama isə qiymətləri $\widetilde{\mathscr{X}}$ -dən olan, $\widetilde{\mathscr{Y}}$ -də təyin olunmuş $\varphi(\widetilde{y})$ funksiyasına deyilir, $f(x)$, $x \in \mathscr{X}$ funksiyasının qiymətləri çoxluğu, adətən, kod, kodun ayrı-ayrı elementləri kod sözləri adlanır [adətən, $f(x)$ hər hansı sonlu çoxluğun, kod əlifbasının simvolları ardıcıllığıdır]. Kodlama və dekodlama, yəni $f(x)$ və $\varphi(\widetilde{y})$ onu ifadə edir ki, əgər mənbə $x \in \mathscr{X}$ məlumatını hasil etmişdirsə, onda kanal ilə $y = f(x)$ siqnalı ötürülür; əgər çıxışda $\widetilde{y}$ siqnalı qəbul olunmuşdursa, onda bu siqnal bərpaolunacaq $\widetilde{x} = \varphi(\widetilde{y})$ məlumatına dekodlanır.

İ. n.-ndə əksər hallarda *təsadüfi kodlamaya* baxılır; bu halda kod sözləri hər hansı statistik eksperiment nəticəsində seçilir. Təsadüfi kodlama – ehtimal paylanması ilə verilmiş statistik asılı olmayan *seçimdir.* Ehtimal paylanması $p(\cdot)$ olan mənbənin hasil etdiyi məlumat, bərpa dəqiqliyi W olan $(Q,\ V)$ kanalı üzrə, $f(\cdot)$ kodlaması və $\varphi(\cdot)$ dekodlamasından istifadə olunmaqla o halda ötürülə bilinir ki, əgər Markov zənciri təşkil edən elə X, Y, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri olarsa (qurmaq olarsa) ki, X -in ehtimal paylanması $p(\cdot)$ olsun, $(X,\ \widetilde{X})$ cütünün ehtimal paylanması W -dən olsun, $(Y,\ \widetilde{Y})$ cütü $(Q,\ V)$ kanalı ilə əlaqələnmiş və

$$Y = f(X), \quad \widetilde{X} = \varphi(\widetilde{Y}) \tag{4}$$

münasibətləri ödənilmiş olsun. (4) münasibətinə əsasən X, Y, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin Markov zənciri əmələ gətirməsi fərziyyəsi elə fərziyyəyə gətirir ki, $\widetilde{Y}$ -in şərti paylanması X və Y -in verilmiş qiymətlərində yalnız Y -dən asılıdır, yəni bu onu ifadə edir ki, məlumat ötürülməsində çıxış siqnalı yalnız giriş siqnalından asılıdır və o, məlumatın hansı qiymətinin bu siqnalla kodlandırılmasından asılı deyildir.

İ. n.-nin əsas problemini aşağıdakı qaydada ifadə etmək olar. Fərz olunur ki, məlumatı $p(\cdot)$ ehtimal paylanması ilə hasil edən mənbə, bərpa dəqiqliyi şərtləri W, rabitə kanalı $(Q,\ V)$ verilmişdir. Məsələnin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, kanal üzrə ötürmənin nə zaman mümkün olduğu təyin edilsin, yəni hansı şərtlər ödənilməlidir ki, bu şərtlərin ödənildiyi halında elə $f(\cdot)$ kodlaması və $\varphi(\cdot)$ dekodlaması mümkün olsun ki, mənbənin hasil etdiyi məlumat $(Q,\ V)$ kanalı üzrə bərpa dəqiqliyi W ilə ötürülsün. $p(\cdot)$, W, $(Q,\ V)$ üçün müxtəlif fərziyyələrlə bu məsələnin həlli, kodlama teoremləri və ya *Şennon teoremi* adlanır. Ötürmə mümkün olduğu halda, digər problemin yaranması da təbiidir: bu halda bu ötürməni təmin edən kodlama və dekodlamanı sadə və effektiv surətdə qurmaq tələb olunur.

Qoyulmuş problemlərdən birincisinə cavabı ifadə etmək üçün K. Şennon [15]-də müəyyən kəmiyyətlər daxil etmişdir. Bunlardan əsasları – *informasiya miqdarı* $\mathbf{I}(\cdot\,;\cdot)$; *kanalın ötürücülük qabiliyyəti* $C = C(Q,\ V) = \sup \mathbf{I}(Y : \widetilde{Y})$ [burada yuxarı sərhəd $(Q,\ V)$ kanalı ilə əlaqəli bütün $(Y,\ \widetilde{Y})$ cütləri üzrə götürülür]; $H_W(p) = \inf \mathbf{I}(X : \widetilde{X})$ W – entropiya [[1] şərti halında $H_\varepsilon(p) = H_W(p)$ ε – entropiya daxil olunur]; burada infimum bütün elə $(X, \widetilde{X})$ cütləri üzrə götürülür ki, $(X,\ \widetilde{X})$ cütünün birgə ehtimal paylanması W -dən olsun; X -in ehtimal paylanması $p(\cdot)$ kimi kəmiyyətlərdir. Aşağıda verilən tərs Şennon teoremi doğrudur: əgər ehtimal paylanması $p(\cdot)$ olan məlumat W dəqiqlik şərtilə $(Q,\ V)$ kanalı üzrə ötürülə bilinirsə, onda

$$H_W(p) \le C(Q,\ V) \tag{5}$$

münasibəti doğrudur.

(5) şərti ödənildiyi halda informasiyanın ötürülməsi mümkünlüyü üçün kafi şərtlər daha mürəkkəbdir. Bu şərtlər yalnız müəyyən asimptotik mənada doğrudur, əsas fərziyyə ondan ibarətdir ki, $H_W(p) \to \infty$ olmalıdır, belə ki, (5) şərti yalnız kifayət qədər böyük həcmli informasiya ötürülməsi halında ola bilsin ki, zəruri və kafi ola bilər. Digər lazımlı fərziyyələr requlyarlıq fərziyyələri xarakteri daşıyır (böyük ədədlər qanunu tipli) və bunlar konkret hallarda, adətən, yerinə yetirilir. Ötürülmə mümkünlüyünün kafi şərtlərini dəqiq terminlərlə ifadə etmək üçün bəzi əlavə anlayışlar tələb olunur.

Əgər $(Q^t,\ V^t)$ kanalı ilə əlaqələnmiş elə $(Y^t,\ \widetilde{Y}^t)$ informasion – dayanıqlı təsadüfi kəmiyyətlər cütləri ardıcıllığı varsa ki, bu ardıcıllıq üçün

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{I}(Y^t : \widetilde{Y}^t)}{C(Q^t,\ V^t)} = 1$$

münasibəti ödənilsin, onda $C(Q^t,\ V^t) < \infty$ şərtilə verilən $\{(Q^t,\ V^t),\ t = 1,\ 2,\ ...\}$ kanallar ardıcıllığı informasion - dayanıqlı kanallar ardıcıllığı adlanır.

Əgər X^t -nin ehtimal paylanması $p^t(\cdot)$ varsa, $(X^t, \widetilde{X}^t)$ cütünün paylanması W^t çoxluğundandırsa və

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{I}(X^t : \widetilde{X}^t)}{H_{W^t}(p^t)} = 1$$

münasibətinin ödənilməsini təmin edən $(X^t, \widetilde{X}^t)$ cütləri ardıcıllığı varsa, ehtimal paylanması $p^t(\cdot)$ olan, $H_{W^t}(p^t) < \infty$ şərtini ödəyən dəqiqlik şərti W^t olan məlumatlar ardıcıllığı informasion dayanıqlı məlumatlar ardıcıllığı adlanır.

Məlumatlar ardıcıllığı və kanallar ardıcıllığının informasion dayanıqlılığı praktiki cəhətdən maraqlı xüsusi halların əksəriyyətində həmişə ödənilir; məs., $t \to \infty$ olduqda $C(Q^t,\ V^t) \to \infty$, $H_{W^t}(p^t) \to \infty$ münasibətləri ödənilən Qauss kanalları və Qauss mənbələri ardıcıllıqları informasion dayanıqlı ardıcıllıqlardır.

V_δ elə ehtimal paylanmaları çoxluğu olsun ki, (3) münasibətində γ -nı $\gamma + \delta$ ilə əvəz etdikdə də bu münasibət ödənilsin, (1) münasibətində isə ε -nu $\varepsilon + \delta$, $\delta > 0$ ilə əvəz etdikdə alınan W_δ dəqiqlik şərti olsun. Bu halda kodlama teoremi (Şennon teoremi) aşağıdakı kimi ifadə olunur: ehtimal paylanması $p^t(\cdot)$ və dəqiqlik şərti W^t olan informasion – dayanıqlı məlumatlar ardıcıllığı və informasion – dayanıqlı kanallar ardıcıllığı $(Q^t,\ V^t)$ verilir; bu kanallar üçün $\pi^t(\cdot)$ və $p^t(\cdot,\ \cdot)$ funksiyaları t -yə görə müntəzəm məhduddurlar, $t \to \infty$ olduqda $H_{W^t}(p^t) \to \infty$ və

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(Q^t,\ V^t)}{H_{W^t}(p^t)} > 1$$

şərtlərinin ödənildiyi fərz olunur, onda ixtiyari $\delta > 0$ üçün elə böyük t_0 qiyməti vardır ki, $t \ge t_0$ şərtini ödəyən bütün t qiymətlərində ehtimal paylanması $p^t(\cdot)$ olan məlumat, $(Q^t,\ V_\varepsilon^t)$ kanalı üzrə bərpa dəqiqliyi W_ε^t ilə ötürülə bilinir. Belə ifadədə

kodlama teoremi ümumi xarakter daşıyır. π^t və $p^t(\cdot)$ funksiyalarının məhdudluğu fərziyyəsini olduqca zəiflətmək mümkündür. Nəhayət, qeyd olunmuş teoremdə bəzi şərtlərlə W_ε^t-ni W^t və V_ε^t-ni V^t ilə əvəz etmək olar. Bu isə Qauss mənbələri və Qauss kanalları halında mümkündür.

Kanallar ardıcıllığı qeyd olunmuş kanalın parçaları ardıcıllığı, məlumatlar ardıcıllığı isə komponentlər sayı artan (artan uzunluqlu) qeyd olunmuş mənbənin məlumatlar parçalarının ardıcıllığı halları tətbiq üçün ən maraqlı hallardır. Aşağıda bu hal üçün kodlama teoreminin variantı və onun əvvəlki formadan bir qədər fərqli çevirməsi ifadə olunmuşdur.

Diskret stasionar U mənbəsi vahid zaman ərzində bir simvol ötürmə sürəti ilə $X = \{X_k,\ k = ..., -1,\ 0,\ 1, ...\}$ məlumatını hasil edir; ayrı-ayrı komponentlər (X_k simvolları) M həcmli müəyyən bir $\mathscr{X}^0$ əlifbasından qiymətlər alır. $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_k,\ k = ..., -1,\ 0,\ +1, ...\}$ məlumatının komponentləri də (adresat tərəfindən alınan məlumat nəzərdə tutulur) eyni $\mathscr{X}^0$ əlifbasından qiymətlər alır (yəni $\widetilde{\mathscr{X}}^0 = \mathscr{X}^0$). Daha sonra fərz olunur ki, məlumat ötürülməsi üçün hər hansı τ zaman intervalı ərzində bir simvol ötürmə sürətli diskret stasionar yaddaşsız kanaldan istifadə olunur. Kanalın girişində siqnalın ehtimal paylanmasına məhdudiyyət qoyulmur. Fərz olunur ki, $L = L_N$ uzunluqlu məlumat parçası $X^L = (X_1, ..., X_L)$ N uzunluqlu kanal parçası ilə yuxarıda təsvir olunmuş tipli (bax, [4]) bəzi kodlama metodlarının köməyilə ötürülür; $N = [LL/\tau]$ ($[x]$, – x ədədinin tam hissəsini ifadə edir). Əgər bu zaman $\widetilde{X}^L = (\widetilde{X}_1, ..., \widetilde{X}_L)$ adresat tərəfindən alınmış uyğun məlumat parçası, $\hat{P}_e$ isə

$$\hat{P}_e = L^{-1} \sum_{l=1}^{L} \mathbf{P}\{\widetilde{X}_l \neq X_l\}$$

düsturu ilə təyin olunan mənbənin hər hərfinə orta xəta ehtimalıdırsa, onda aşağıdakı teorem doğrudur. Kodlama teoreminə çevirmə teoremi: $\overline{H}(U)$ verilmiş diskret stasionar mənbənin məlumatlar yaratma sürəti, C isə kanalın ötürücülük qabiliyyətidirsə, onda bütün L-lər üçün

$$\hat{P}_e \log(M-1) + h(\hat{P}_e) \geq \overline{H}(U) - \tau^{-1}C$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada $h(x) = -x\log_2 x - (1-x) \times \times \log_2(1-x)$.

Beləliklə, məlumatları yaratma sürəti $\overline{H}(U)$ $\tau^{-1}C$-dən (mənbənin hər bir hərfinə kanalın ötürücülük qabiliyyətindən) böyük olarsa, onda ixtiyari L üçün mənbənin hər bir hərfinə xətanın orta ehtimalı ixtiyari kodlama və dekodlama metodları üçün sıfırdan fərqli konstantla aşağıdan məhduddur və deməli, $L \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşmır. Teoremin tərs hökmünü ifadə etmək məqsədilə

$$R_N = \frac{\log_2 M^{L_N}}{N}$$

kəmiyyəti daxil olunur.

L_N/τ tam ədəd olduğu halda, R_N/τ nisbəti əlifbası M olan U mənbəsinin məlumatları hasil etmə sürəti $\overline{H}(U)$ ilə üst-üstə düşür; mənbənin komponentləri isə asılı olmayan müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bundan başqa, $M = 2$ olarsa, onda $R_N = \tau$ ikilik simvolların sayıdır; bu simvollar da kanal üzrə bir simvolun ötürülməsi müddətində mənbənin hasil etdiyi siqnallardır. Mənbənin blok xətasının ehtimalı və blok xətasının orta ehtimalı uyğun olaraq

$$P_{e,x^L} = \mathbf{P}_{x^L}\{\widetilde{X}^L \neq X^L\}$$

$$\overline{P}_e = \sum_{x^L} \mathbf{P}\{X^L = x^L\}\, \mathbf{P}_{e,\,x^L} = \mathbf{P}\{\widetilde{X}^L \neq X^L\}$$

düsturları ilə təyin olunur, burada $\mathbf{P}_{x^L}\{\cdot\}$, – $X^L = x^L \in \mathscr{X}^L$ şərtində şərti ehtimaldır. Aşağıdakı kodlama teoremi doğrudur: bütün N və $R < C$ olan ixtiyari R-lər üçün elə kodlama və dekodlama metodu vardır ki, $R_n \leq R$ olduqda $x^L \in \mathscr{X}^L$ olan bütün x^L-lər üçün

$$P_{e,\,x^L} \leq \exp\{-NE(R)\}$$

qiymətləndirilməsi təmin olunur (qiymətləndirilmə $\overline{P}_e$ üçün də doğrudur), lakin nəzərə alınmalıdır ki, $E(R)$ funksiyası müsbət, qabarıq və R-in artması ilə azalan funksiyadır (bax, *Səhv dekodlama ehtimalı*). Beləliklə, bu teorem onu ifadə edir ki, $R < C$ münasibətini ödəyən bütün R-lər üçün N artdıqca səhv ehtimalı eksponensial sürətlə sıfra yaxınlaşır. Bu teoremin şərtləri ödənildikdə gücləndirilmiş tərs kodlama teoremi doğrudur, yəni: $R > C$ şərtini ödəyən bütün R-lər üçün $N \to \infty$ olduqda $\overline{P}_e \to 1$ münasibəti doğrudur. Küysüz kanal halında, yəni $\mathscr{Y} = \overline{\mathscr{Y}}$, $Q(y,\ \{y\}) = 1$ və $C = \log_2 S$ olduğu halda, kodlama teoremləri məlumatlar mənbəinin kodlama teoremlərinə çevrilir, burada S rabitə kanalının simvollar əlifbasının gücüdür.

İnformasiya ötürməsinin real sistemlərində kodlama və dekodlama *modulyasiya* və *demodulyasiya* ilə uyğunlaşdırılır, yəni kanalın giriş və çıxışındakı siqnallara kod simvolu kimi baxılan siqnalların qurulması ilə uyğunlaşdırılır.

Şennon teoremləri naməlum parametrli kanallar və məlumatlar üçün ümumiləşdirilir. Belə ümumiləşmələrə maraq onunla əlaqədardır ki, praktikada, adətən, rabitə kanalı və məlumatlar mənbəinin statistik parametrlərinin tamamilə məlum olduğu hesab olunmur, belə ki, bu parametrlər ötürülmə prosesində dəyişə bilər. Buna görə də, məlumatlar mənbəi və rabitə kanalının mümkün ola bilən məlumat mənbələri və rabitə kanallarının sinfində olmasını fərz etmək məqsədəuyğun olur. Bu zaman, baxılan sinifdən olan, mümkün ola bilən ən əlverişsiz mənbələr və kanallar üçün verilmiş ötürülmə metodunun keyfiyyəti qiymətləndirilir, ötürmə keyfiyyəti üçün minimaks kriteri daxil edilir.

Şennon teoremləri mənbələr və kanallar şəbəkələri üçün də, o cümlədən, çoxsaylı istifadə – terminallı mənbələr və kanallar şəbəkələri üçün də şamil olunmuşdur. Məs., $k+1$ sayda $X^{(0)}$, $X^{(1)}, ..., f_j(X^{(j)})$ terminallarlı mənbələr üçün hər bir $X^{(j)}$ mənbəinin ayrı-ayrılıqda $Y^j = f_j(X^{(j)})$ kodlanması məsələsi qoyulur, $(j = 1, ..., k)$ və bu halda $(Y^{(1)}, ..., Y^{(k)})$ üzrə $X^{(0)}$ mənbəini verilən dəqiqliklə yenidən bərpaetməyə nail olunmalıdır.

Çoxsaylı istifadə – terminallı kanallar arasında çoxgirişli kanallar, çoxçıxışlı kanallar, tərs rabitəli kanallar, təsadüfi parametrli kanallar fərqləndirilir.

Adi ötürmə sxemində tamamilə tərs əlaqənin olması onu ifadə edir ki, t anında kanala girişdə $t' < t$ şərtini ödəyən bütün t' anlarında kanalın çıxışındakı siqnalların dəqiq qiymətləri məlumdur. Xüsusi halda, tərs əlaqəli yaddaşsız kanallar üçün əsas nəticə ondan ibarətdir ki, tərs əlaqənin varlığı yaddaşsız kanalın ötürücülük qabiliyyətini artırmır, lakin kodlayıcı və dekodlayıcı qurğuların mürəkkəbliyini olduqca azaltmağa imkan yaradır.

Digər ümumiləşmələrdən sinxronizasiya xətaları olan kanallar üzrə informasiya ötürməsini qeyd etmək lazımdır, bu kanallarda sinxronizasiya ilə bağlı təsadüfi sıradan çıxmalar yaranır və bunun nəticəsində giriş və çıxış kanalları arasında birqiymətli uyğunluq pozulur.

Əd.: [1] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [2] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [5] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [6] Колмогоров А. Н., в кн.: Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 29–58; [7] Колмогоров А. Н., в кн.: Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 213–23; [8] Key papers in the development of information theory, N. Y., 1974; [9] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радио-техники, 2 изд., кн. 2, М., 1975; [10] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1960, в. 7, с. 3–202; [11] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [12] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [13] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [14] Чисар И., Кернер Я., Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, пер. с англ., М., 1985; [15] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

İNFORMASİYA ÖTÜRMƏ SÜRƏTİ « информации скорость передачи; rate of information transmission » – rabitə kanalının giriş siqnalına nəzərən kanalın çıxış siqnalında vahid zaman ərzində *informasiya miqdarını* ifadə edən kəmiyyətdir. Giriş və çıxış siqnalları uyğun olaraq, $Y = \{Y(t),\ -\infty < t < \infty\}$ və $\widetilde{Y} = \{\widetilde{Y}(t),\ -\infty < t < \infty\}$ təsadüfi prosesləri olan kanal üçün informasiya ötürmə sürəti –

$$R = \lim_{T-t\to\infty} (T-t)^{-1} \cdot \mathbf{I}(Y_t^T : \widetilde{Y}_t^T) \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunan kəmiyyətə deyilir, burada $\mathbf{I}(Y_t^T : \widetilde{Y}_t^T)$, – Y və $\widetilde{Y}$ proseslərinin $(t, T]$ parçaları arasındakı informasiya miqdarıdır. (*) limitinin varlığı isbat olunmuşdur, məs., giriş və çıxış siqnalları stasionar və stasionar əlaqəli təsadüfi proseslər olan kanalların geniş sinfi üçün bu limitin varlığı isbat olunmuşdur. Bəzi hallarda, məs., Qauss kanalları üçün İ. ö. s.-ni aşkar şəkildə hesablamaq mümkündür.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1960, в. 7, с. 1–201.

İNFORMATİVLİK « информативность; amount of information » – bax, *İnformasion ölçü*.

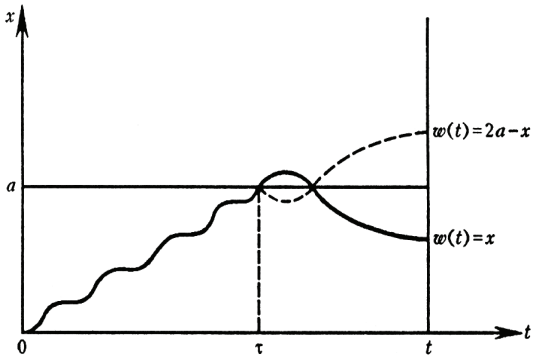
İNFORMATİVLİK (yi) dəyişənlər toplusunun **« информативность** набора переменных; **informativity** of set of variables **»** – q sayda əlamətlərin ilkin (apriori) $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_p)$ çoxluğunun əlamətlərini və onların kombinasiyalarını ifadə edən p sayda dəyişənlərin $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_q)$ toplusunun xassəsidir; müəyyən informativlik kriterisi $I_p(\mathbf{z})$ ilə kəmiyyətcə ölçülür. İnformativlik kriterisi statistik araşdırma məsələsinin məzmunlu qoyuluşundan asılı olaraq bu və ya digər qayda ilə dəyişənlər toplusunun İ.-ni formalaşdırır. İnformativlik kriterisinin üç əsas qrupu mövcuddur. Birinci qrupa aid olan kriterilərdə $\mathbf{z}$ toplusu üzrə $\mathbf{y}$ kəmiyyət dəyişəninin reqression proqnozunun keyfiyyəti qiymətləndirilir. İkinci qrupa $\mathbf{z}$ toplusu üzrə obyektin siniflərdən birinə aid edilməsi məsələsinin həllinin keyfiyyətini qiymətləndirən kriterilər daxil edilir. Nəhayət, üçüncü qrupa $p < q$ olduqda, $\mathbf{z}$ toplusu üzrə ilkin $\mathbf{x}$ əlamətlərinin dəyişənlərlə nə dərəcədə dəqiqliklə ifadə edildiyinin dəqiqliyini qiymətləndirən kriterilər aiddir.

İNİKAS PRİNSİPİ « отражения принцип; reflection principle » – Viner prosesi $w(t)$-nin hər hansı a səddinə ilk çatım anı τ üçün *ciddi Markov xassəsinin* xüsusi halı olub, a nöqtəsinə nəzərən $w(t+s)$, $s \geq 0$ prosesinin paylanmasının simmetriyasından ibarətdir. Fərz olunur ki, $w(0) = 0$, $a > 0$ və $m^*(t) = \max\limits_{0\leq s\leq t} w(s)$, $t \geq 0$. Onda

$$\mathbf{P}\{m^*(t) > a\} = \mathbf{P}\{\tau < t\}. \qquad (1)$$

(bax, şəkil). İ. p.-nə görə $w(\cdot)$ trayektoriyasının paylanması τ anından sonra a -ya nəzərən simmetrikdir (şəkildə bütöv və qırıq xətlər eyni ehtimallıdır):

$$\mathbf{P}\{w(t) > a \,|\, \tau < t\} = \mathbf{P}\{w(t) < a \,|\, \tau < t\} = 1/2. \qquad (2)$$



$w(t) > a$ olduqda $x < t$ olması zəruridir, onda

$$2\mathbf{P}\{w(t) > a\} = \mathbf{P}\{\tau < t\}\,\mathbf{P}\{w(t) > a \,|\, \tau < t\}. \qquad (3)$$

(1) – (3) bərabərliklərinə əsasən, Andre inikas prinsipi adlanan

$$\mathbf{P}\{m^*(t) > a\} = 2\mathbf{P}\{w(t) > a\}$$

bərabərliyilə ifadə olunan İ. p. doğrudur. $m^*(t)$ kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$p(t, y) = 2\varphi(t, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-y^2/2t}, \quad y \geq 0$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\varphi(t, x)$ funksiyası $w(t)$ kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasıdır. Bu mülahizələrə görə $w(t)$ və $m^*(t)$-nin ikiölçülü paylanma qanunu alınır və a nöqtəsində udulan [yəni $m^*(t) < a$ şərti ilə] Viner prosesinin sıxlıq funksiyaları aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur, yəni:

$$p(t, x) = \varphi(t, x) - \varphi(t, 2a - x), \quad x < a,$$

və ya a nöqtəsində inikas ilə

$$p(t, x) = \varphi(t, x) + \varphi(t, 2a - x), \quad x < a.$$

İ. p.-nin çoxsaylı tətbiqi ilə $w(t)$, $m_*(t) = \min\limits_{0 \le s \le t} w(s)$ və $m^*(t)$ kəmiyyətlərinin birgə paylanmasını və $a > 0$ və $-c < 0$ nöqtələrində udulan Viner prosesinin [yəni $-c < m_*(t)$, $m^*(t) < a$ şərtlərilə] sıxlıq funksiyalarını tapmaq mümkün olur, yəni:

$$p(t, x) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\varphi(t, x - 2k(a + c)) - \varphi(t, 2a - x - 2k(a + c))],$$

$$-c < x < a$$

və ya $-c$ və a nöqtələrində inikas ilə

$$p(t, x) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\varphi(t, x - 2k(a + c)) + \varphi(t, 2a - x - 2k(a + c))],$$

$$-c < x < a.$$

Əd.: [1] Л е в и П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [2] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] Д ы н к и н Е. Б., Ю ш к е в и ч А. А., Теоремы и задачи о процессах Маркова, М., 1967.

İNTEQRAL BƏRPA TEOREMİ « интегральная теорема восстановления; integral renewal theorem » – bax, *Bərpa teoremi.*

İNTEQRAL ÇEVİRMƏ « интегральное преобразование; integral transform » – $\{\mathbf{P}\}$ paylanmalar çoxluğunun (və ya onların uyğun $\{F\}$ paylanma funksiyalarının və ya hər hansı $\mathbb{R}^n$ fəzasında verilmiş paylanmaların sıxlıq funksiyaları $\{p\}$ çoxluqlarının) n kompleks dəyişəni $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathbb{C}^n$-in funksiyaları çoxluğu $\{\psi\}$-yə

$$\psi(s) = U\mathbf{P}(s) = \int_{R^n} k(s, u)\, \mathbf{P}(du) \qquad (*)$$

münasibətilə ifadə olunan xətti qarşılıqlı birqiymətli U inikasıdır, burada k, – $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$-də qeyd olunmuş funksiyadır (İ. ç.-nin n ü v ə s i). k nüvəsinin bu oblastda sinqulyar nöqtələri ola bilər və bu halda (*) inteqralı müəyyən bir xüsusi mənada anlaşılır (məs., baş qiymət mənasında). ψ funksiyası üzrə $\mathbf{P}$ paylanmasını (paylanma funksiyası F və ya sıxlıq funksiyası p-ni) müəyyən etməyə imkan verən $(U^{-1}\psi)(u)$ tərs çevirməsinin aşkar ifadələri – ç e v i r m ə d ü s t u r l a r ı adlanır. İ. ç.-inə aid çevirmələr aşağıdakılardır:

1) Furye – Stiltyes çevirməsi (*xarakteristik funksional*), $k(s, u) = \exp(i(s, u))$, burada $(\cdot, \cdot)$ skalyar hasili ifadə edir;

2) $\mathbb{R}^n$-də Laplas – Stiltyes çevirməsi, $k(s, u) = \exp(-(s, u))$;

3) *Mellin – Stiltyes çevirməsi* $(n = 1)$, $k(s, u) = 0$, $u \le 0$, $k(s, u) = u^s$, $u > 0$;

4) Hankel çevirməsi $(n = 1)$, $k(s, u) = 0$, $s \le 0$, $k(s, u) = J_\nu(s, u)(su)^{1/2}$, $u > 0$, burada J_ν Bessel funksiyasıdır;

5) kosinus (sinus) çevirmə $(n = 1)$, $k(s, u) = 0$, $u \le 0$, $k(s, u) = \cos su$ $(\sin su)$, $u > 0$.

İ. ç. ehtimal nəzəriyyəsində o halda xüsusi maraq kəsb edir ki, $\{P\}$ hər hansı $\circ$ binar əməlinə görə Abel semi – qrupu olsun, nüvə isə elə seçilmiş olsun ki, U inikası $\{\mathbf{P}\}$-nin $\{\psi\}$-yə izomorfizmini $U(\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2)(s) = \psi_1(s)\psi_2(s)$ münasibətilə təmin etsin.

İ. ç.-lərinin əksəriyyəti bir-birilə əlaqəlidirlər (bax, [1], [2]). Bəzi hallarda İ. ç. anlayışı daha ümumi təbiətə malik fəzalarda (Hilbert, Banax, qruplar, semiqruplarda) təyin oluna bilinir.

Əd.: [1] Т и т ч м а р ш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М. – Л., 1948; [2] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 444–69; [3] Б е й т м е н Г., Э р д е й и А., Таблицы интегральных преобразований, пер. с англ, т. 1–2, М., 1969–70.

İNTEQRAL EHTİMALİ « интеграл вероятности; probability integral », x ə t a l a r i n t e q r a l ı, –

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad |x| < \infty$$

funksiyasıdır.

Ehtimal nəzəriyyəsində E. i. deyil,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})]$$

normal paylanma funksiyası istifadə olunur; bu inteqral Q a u s s e h t i m a l i n t e q r a l ı adlanır. Riyazi gözləməsi 0, dispersiyası 1 olan ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün $\mathbf{P}\{|\xi| \le t\} = \operatorname{erf}(t/\sqrt{2})$. Bəzən aşağıdakı işarələmələr də istifadə olunur:

$$\Theta(x) = H(x) = \Phi(x) = \operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erf} c(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \operatorname{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt - 1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Erf}(x/\sqrt{2}).$$

Əd.: [1] Я н к е Е., Э м д е Ф., Л ё ш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1974.

İNTEQRAL HƏNDƏSƏ « интегральная геометрия; integral geometry » – həndəsə və ölçü nəzəriyyəsinin qovuşmasında riyaziyyat bölməsidir, *həndəsi ehtimallar* və *həndəsi proseslər* məsələlərində bir aparat kimi istifadə olunur.

Müstəvi üzərində düzxətlər fəzasında ölçünün təyin olunması ideyası iynə haqqında *Byuffon məsələsində* öz əksini tapmışdır. Bu ideya sonradan C. Silvestr (J. Sylvester), H. Puankare (H. Poincaré), V. Blyaşke (W. Blaschke) və başqa alimlərin işlərində inkişaf etdirilmişdir. Ənənəyə görə İ. h.-də əsas tədqiqat obyekti əsas fəzada təsir edən çevirmələr qrupuna nəzərən invariant həndəsi fiqurlar (düzxətlər, müstəvilər, qabarıq cisimlər və s.) fəzalarında ölçülərdir.

Ən çox istifadə olunan ölçülər $\mathbb{R}^n$ fəzasının Evklid hərəkətlərinin M_n qrupuna nəzərən invariant olan, $\mathbb{R}^n$-in k – ölçülü müstəvilərinin ölçüləridir. k, n-in verilmiş qiymətlərində belə ölçü sabit vuruğa qədər dəqiqliklə yeganədir. Məs., müstəvi üzərində g düzxətləri fəzasında M_2 – invariant ölçünün elementi $dg = dp\,d\varphi$ kimi ifadə olunur, burada $(p,\ \varphi)$ koordinat başlanğıcından g düzxətti üzərinə endirilmiş perpendikulyarların oturacağının polyar koordinatlarıdır.

Əgər ölçülərin invariantlığı yalnız $\mathbb{R}^n$-in paralel yerinidəyişmələr qrupu T_n-ə nəzərən tələb olunarsa, onda bu fəzalarda invariant ölçülərin yeganəlik xassəsi itir ($k = 0$ halından başqa). Məs., düzxətlər fəzasında T_2 qrupuna nəzərən invariant ixtiyari ölçü $m(dg) = dp\,\mu(d\varphi)$ kimi ifadə olunur, burada μ, – $[0,\ 2\pi]$-də hər hansı bir ölçüdür (bax, *İntensivlik qızılgülü*). Əksinə, qeyd edilən faktorizasiya olunmuş tipli bütün ölçülər T_2 – invariantdırlar.

Əgər $\mathbb{R}^n$-də həndəsi fiqurların fəzası $\mathcal{F}$ fəzaların hasili $H \times B$ şəklində göstərilərsə, onda $\mathcal{F}$-də H – invariant ölçü iki vuruğa faktorizə olunur, bu vuruqlardan biri H qrupunun Haar ölçüsüdür (bax, *Təsadüfi şeyp*, burada $H = M_2$ və $H = A$, A vahid determinantlı matrislər qrupu olduğu hallar üçün faktorizasiya misalları araşdırılmışdır), burada H, – $\mathbb{R}^n$-in çevirmələrinin lokal kompakt qrupudur.

İ. h.-də invariant ölçülər üzrə inteqralların hesablanması xüsusi yer tutur (bax, *Riyazi stereologiya*). İnvariant ölçülər üzrə inteqrallama həndəsi araşdırmaların, o cümlədən, həndəsi bərabərsizliklərin müəyyənləşdirilməsi metodlarının araşdırılmasında effektiv vasitə olmuşdur (bax, [1]).

İ. h.-nin mühüm bölməsi k o m b i n a t o r i n t e q r a l h ə n d ə s ə d i r (bax, [4]), bu bölmə *Byuffon – Silvestr məsələsinin* həlli ilə bağlı inkişaf etmişdir (bax, [4]). Müstəvi üzərində düzxətlər fəzası G üçün bu nəzəriyyənin əsas nəticəsi aşağıda şərh olunmuşdur. G üçün model kimi polyusu xaric olunmuş, kənarında (ekvatorda) diametral qarşı yerləşən nöqtələri eyniləşdirilən yarımsfera seçilir. Belə modelin yaxşı cəhəti ondan ibarətdir ki, müstəvi üzərində düzxətlər dəstəsinə, yəni $[P] = \{g \in G:\ g \quad P \in \mathbb{R}^2$ nöqtəsindən keçir$\}$ çoxluqlarına böyük dairələrin qövsləri (geodeji) uyğun olur.

Ekvator üzərində yerləşən geodeji qövslərin uc nöqtələri eyniləşdirilir, nəticədə modeldəki hər $[P]$ dəstəsi qapalı əyri ilə təsvir olunur. Hər iki – $[P_1]$ və $[P_2]$ dəstəsi bir nöqtədə kəsişir, bu nöqtəyə $P_1\ P_2$ düzxətti uyğun olur. Müstəvidə iki nöqtə i y n ə adlanır və $\nu = \{P_1,\ P_2\}$ simvolu ilə işarə olunur; $[\nu]$ ν iynəsinin P_1, P_2 uclarını ayıran düzxətlər çoxluğudur, $[P_1]$ və $[P_2]$ dəstələri $[\nu] \subset G$ çoxluğunun sərhədini təşkil edirlər. $G \setminus ([P_1] \cup [P_2])$ çoxluğu t ə k t ə p ə adlanan iki bir-birilə əlaqəli komponentə ayrılır; bu komponentlərdən biri məhduddur (yəni onun tamamlayıcısı kompaktdır), digəri isə məhdud deyildir. Əgər A xaric edilmiş polyusun ətrafını özündə saxlayırsa, $A \subset G$ çoxluğu məhdud deyildir (bölünəndir: əgər polyusu örtürsə). $[\nu]$ əlaqəli və məhdud çoxluq olduğundan, onda onu polyusu örtməyən təktəpə ilə eyniləşdirmək lazımdır.

Müstəvidə tərəfləri a, b, c olan üçbucaqlıya baxılır. Üçbucaqlının hər hansı bir tərəfindən üçbucaqlıya daxil olan düzxəttin onun digər tərəflərindən birindən keçərək çıxmasını aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$I_{[c]}(g) = I_{[c]\cap[a]}(g) + I_{[c]\cap[b]}(g);$$

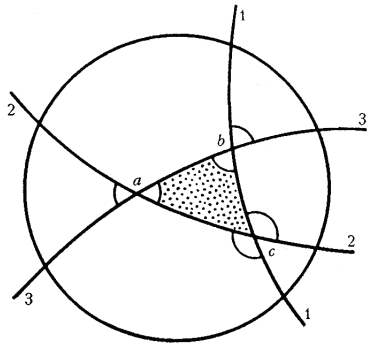
$$I_{[a]}(g) = I_{[a]\cap[b]}(g) + I_{[a]\cap[c]}(g);$$

$$I_{[b]}(g) = I_{[b]\cap[a]}(g) + I_{[b]\cap[c]}(g),$$

burada $I_A(g)$, – $A \subset G$ çoxluğunun indikatorudur. Bu bərabərliklər (aşağıdakı indikatorlar üçün də analoji bərabərliklər) sonlu sayda dəstələrlə örtülə bilən düzxətlər çoxluğuna qədər dəqiqliklə doğrudur (baxılan halda üçbucaqlının üç təpəsinə uyğun dəstələrlə). Sonuncu iki bərabərliyin cəmindən birincisini çıxdıqda aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$2I_{[a]\cap[b]}(g) = I_{[a]}(g) + I_{[b]}(g) - I_{[c]}(g).$$

Şəkil 1-ə baxdıqda, modeldə bu bərabərliyi bilavasitə yoxlamaq olar və bu halda nəzərə alınmalıdır ki, ekvator birləşdirilmişdir (Şəkil 1-də polyus $[c]$-nin tamamlayıcısında $[a] \bigcap [b]$-dən xaricdə yerləşir; $[a]$, $[b]$, $[c]$ çoxluqları qövslərlə işarə olunmuşdur). Şəkil 1-dən aydındır ki, modeldəki hər bir məhdud üçbucaqlının iki daxili bucağı məhdud təktəpələrə aiddir, üçüncü, daxili bucaq isə qeyri – məhdud təktəpəyə mənsubdur.



şəkil 1.

D baxılan modeldə qabarıq məhdud geodeji çoxbucaqlı, $\{\tau_i\}$, – D-nin adi trianqulyasiya vasitəsilə bölündüyü üçbucaqlılar olsun. Yuxarıdakı düstur hər bir τ_i üçbucaqlısı üçün

$$2I_{\tau_i}(g) = I_{[a_i]}(g) + I_{[c_i]}(g) - 1$$

şəklində ifadə olunur, burada $[a_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$, – τ_i üçbucaqlısının daxili bucaqlarını özündə saxlayan təktəpələrdir. i üzrə cəmləmədə indikatorların additiv xassəsindən istifadə edərək

$$2I_D(g) = \sum_i I_{[d_i]}(g) - N$$

olduğu alınır, burada N trianqulyasiyada iştirak edən üçbucaqlıların sayı, $[d_i]$, – D çoxbucaqlısının daxili bucaqlarını özündə saxlayan təktəpələrdir.

Fərz olunur ki, $\{[d_i]\} = \{[d_i']\} \cup \{[d_i'']\}$, $\{d_i'\}$ məhdud təktəpələr, $[d_i'']$ qeyri – məhdud təktəpələrdir. Müxtəlif $[d_i'']$ təktəpələr sayını r-lə, tamamlayıcısını isə yuxarı indeks c ilə işarə etdikdə,

$$2I_D(g) = \sum_i I_{[d_i']}(g) - \sum_i I_{[d_i'']^c}(g) + r - N$$

düsturu alınır, bu halda $r = N$. Bu ondan alınır ki, verilən d_i''-in trianqulyasiyada bölündüyü təktəpələrdən yalnız biri məhdud olur (yəni yalnız bir təktəpə polyusu örtür). Beləliklə,

$$2I_D(g) = \sum_i I_{[d_i']}(g) - \sum_i I_{[d_i'']^c}(g).$$

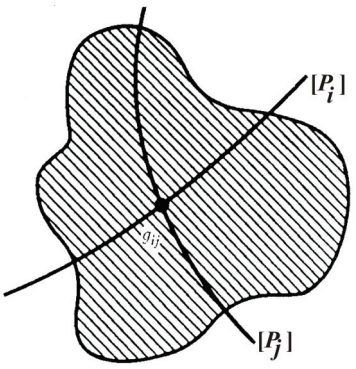
Təsvir olunmuş çoxbucaqlılara oxşar çoxbucaqlılar, təbii surətdə, Byuffon halqaları adlanan halqaların atomları kimi yaranır (bax, aşağı və [3], [4]).

Müstəvidə $\nu_1, \ldots, \nu_n$ iynələrinin qeyd olunduğu fərz olunur. Bunlara G fəzasında $[\nu_1], \ldots, [\nu_n]$ çoxluqları uyğundur. $\mathfrak{A}\{\nu_i\}$ ilə bütün $[\nu_i]$ çoxluqlarını özündə saxlayan, G-nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş minimal (sonlu) cəbr işarə olunmuşdur. $\mathfrak{A}\{\nu_i\}$ cəbrinin məhdud altçoxluqlarının halqasına **Byuffon halqası** deyilir və $\mathrm{Br}\{\nu_i\}$ simvolu ilə işarə olunur. Əgər G fəzasında $m(\cdot)$ ölçüsü hər bir $P \in \mathbb{R}^2$ üçün $m([P]) = 0$ şərtini ödəyərsə, $m(\cdot)$ **dəstəsiz ölçü** adlanır. Aşağıdakı teorem doğrudur: G-də ixtiyari lokal sonlu dəstəsiz $m(\cdot)$ ölçüsü və hər bir $B \in \mathrm{Br}\{\nu_i\}$ üçün

$$m(B) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} c_{ij}(B)\, m([\nu_{ij}])$$

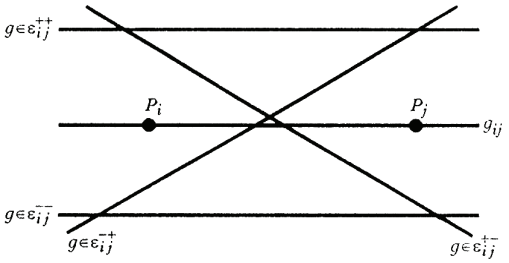
ifadəsi doğrudur, burada cəmləmə bütün $\{P_i, P_j\} = \nu_{ij}$ cütləri üzrə aparılır, $\{P_i\}$, – $\{\nu_j\}$ iynəsinin ucları çoxluğu, $c_{ij}(B)$, – $m(\cdot)$ ölçüsünün seçilməsindən asılı olmayan tamqiymətli əmsallardır.

Əgər $\{P_i\}$-nin heç bir üç nöqtəsi bir düzxətt üzərində yerləşmirsə, $c_{ij}(B)$ əmsallarının qiymətlərini aşağıdakı alqoritmlə hesablamaq olar. ε_{ij}, – P_i və P_j nöqtələrindən keçən $g_{ij} \in G$ düzxəttinin kifayət qədər kiçik ətrafı olsun. $\varepsilon \setminus ([P_i] \cup [P_j])$ çoxluğu bir-birilə əlaqəli olmayan dörd komponentə ayrılır; bu komponentlər g_{ij} **düzxəttinin hissəvi ətrafları** kimi adlandırılır (şəkil 2). Hissəvi ətraflardan ikisi, məs., ε_{ij}^{++} və ε_{ij}^{--} qeyri – məhdud $[\nu_{ij}]^c$ təktəpəyə mənsubdur, digər hissəvi ətraflar, məs., ε_{ij}^{+-} və ε_{ij}^{-+} isə məhdud $[\nu_{ij}]^c$ təktəpəsinə mənsubdurlar. Şəkil 3-də



şəkil 2.

daxil olunmuş hissəvi ətraflardan hər birinin nümayəndələri təsvir edilmişdir, bunlar g_{ij} düzxəttinin kiçik «tərpənişləri» ilə alınır.



şəkil 3.

$I_n(i^{\pm}, j^{\pm})$ uyğun hissəvi $\varepsilon_{i,j}^{\pm\pm}$ ətrafında $I_n(g)$ indikatorunun qiyməti olsun. Onda $c_{ij}(B)$ əmsalı

$$c_{ij}(B) = I_B(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}) + I_B(\overset{-}{i}, \overset{+}{j}) - I_B(\overset{-}{i}, \overset{-}{j}) - I_B(\overset{+}{i}, \overset{+}{j})$$

düsturu ilə təyin olunur.

Analoji kombinator ayrılışlar səthlərdə geodeji əyrilər fəzalarında, $\mathbb{R}^3$-də müstəvilər fəzalarında, müstəvidə dairələr fəzalarında, $\mathbb{R}^3$-də sferalar, $\mathbb{R}^3$-də düzxətlər fəzalarında vardır.

Əd.: [1] Бляшке В., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 97–149; [2] Сантало Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983.

İNTEQRAL LİMİT TEOREMİ « интегральная предельная теорема; integral limit theorem » – paylanma funksiyaları ardıcıllığının bir paylanma funksiyasına və ya seçilmiş paylanma funksiyalar çoxluğuna müəyyən mənada *yığılması* haqqında müddəadır. Birinci hala aid *mərkəzi limit teoremini* misal göstərmək olar ki, burada yığılma *Levi metrikası mənada* və *müntəzəm metrika* mənada nəzərdə tutulur, *orta qiymət metrikası* və onun ümumiləşmələri mənada yığılma istifadə olunan *qlobal limit teoremi* də bu hala aiddir. İkinci hala aid misal *Kolmoqorov – Arak teoremidir* (həm də onun analoqlarıdır) ki, burada paylanmaların kompozisiyaları müntəzəm metrikada sonsuz bölünən qanunların bütün sinfi ilə yığılır. İ. l. t. bir metrikadan

istifadə edilməklə, eyni zamanda digər metrika ilə bağlı *lokal limit teoremi* də ola bilər. Eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün İ. l. t.-ində limit paylanması normal qanun və bu *tam variasiya metrikasından* (bax, [1]) istifadə olunduqda, İ. l. t. paylanma sıxlıqları üçün orta qiymət metrikalı lokal limit teoremi olur, bu paylanmaların sıxlıq funksiyalarının varlığı asimptotik zəruri şərt olur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 3, с. 112.

İNTEQRAL MİQYAS(ı) korrelyasiyanın **« интегральный масштаб** корреляции; **integral scale** of correlation **»** – bax, *Korrelyasiya radiusu*.

İNTEQRAL STRUKTUR(u) ehtimali metrikanın **« интегральная структура** вероятностной метрики; **integral structure** of a probabilistic metric **»** – bax, *Ehtimal metrikası*, struktur.

İNTEQRAL, TRAYEKTORİYALAR ÜZRƏ « интеграл по траекториям; path integral » – bax, *Kontinual inteqral*.

İNTEQRALLANMA Boxnerə görə **« интегрируемость** по Бохнеру; Bochner **integrability »** – bax, *Boxner inteqralı*.

İNTEQRALLANMA Pettisə görə **« интегрируемость** по Петтису; Pettis **integrability »** – bax, *Pettis inteqralı*.

İNTEQRALLANMASI, TƏSADÜFİ PROSESİN « интегрирование случайного процесса; integration of random process » – bax, *Təsadüfi proses*; inteqrallanma.

İNTEQRALLANMIŞ SPEKTR(i) qeyri–stasionar prosesin **« проинтегрированный спектр** нестационарного процесса; **integrated spectrum** of a nonstationary process **»** – bax, *Ortalanmış spektral funksiya.*

İNTENSİVLİK « интенсивность; intensity » – 1) stasionar hadisələr axınının İ.-liyi – vahid zaman intervalında hadisələr sayının orta qiyməti λ-dır. t müddəti ərzində hadisələrin orta sayı λt-yə bərabərdir. Korolyuk teoreminə əsasən İ. stasionar axın parametrinə bərabərdir (bax, *Xinçin teoremi*). Xidmət sistemlərinin geniş sinfi üçün stasionar rejimin olması giriş axını və orta xidmət müddətinin intensivliyi terminlərilə ifadə olunur. Qeyri – stasionar axın üçün $\lambda(t)$ ani intensivlik anlayışı daxil olunmuşdur. Ani intensivlik $(a,\ b)$ intervalında axındakı hadisələr sayının riyazi gözləməsi $\int_a^b \lambda(t)\,dt$ inteqralıdır. Ordinar axın halı üçün axının k – intensivliyi anlayışı daxil olunmuşdur, k – intensivlik $\lambda_k(t_1, ..., t_k)dt_1 \dots dt_k$ $(t_1,\ t_1 + dt_1)$, ... , $(t_k,\ t_k + dt_k)$ intervallarının hər birində axın hadisələrinin baş vermə ehtimalıdır; $\lambda_k(t_1, \dots, t_k)$, – k – intensivlikdir.

2) İmtina intensivliyi – $\lambda(t) = F'(t)/[1 - F(t)]$ bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyadır; $F(t)$ hər hansı bir obyektin imtinasız işləmə müddətinin paylanma funksiyasıdır.

İNTENSİVLİK(yi) axının **« интенсивность** потока; **intensity** of flow **»** – bax, *Təsadüfi axın.*

İNTENSİVLİK ani **« интенсивность** мгновенная; **instantaneous intensity »** – bax, *İntensivlik.*

İNTENSİVLİK(yi) düzxətlər prosesinin **« интенсивность** процесса прямых; **intensity** of straight lines process **»** – bax, *Həndəsi proses*, *İnteqral həndəsə.*

İNTENSİVLİK FUNKSİYASI, İMTİNANIN « интенсивности отказа функция; hazard function / hazard rate function / failure rate function » – differensiallanan paylanma funksiyası $F(t)$ üçün

$$\lambda(t) = f(t)/\overline{F}(t) \qquad (*)$$

münasibətilə təyin olunan funksiyadır, burada $f(t) = dF(t)/dt$, $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$. Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsində $\lambda(t)dt$ ehtimalı $(t,\ t + dt)$ intervalında imtinanın baş verdiyi t anına qədər imtina baş vermədiyi şərtinə nəzərən şərti ehtimalı ifadə edir. (*) münasibətindən

$$\overline{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\,ds\right\}$$

olduğu alınır. $F(t)$ eksponensial paylanma funksiyası olarsa,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \lambda(t) \equiv \lambda$$

olur.

İNTENSİVLİK QIZILGÜLÜ « интенсивности роза; rose of intensites » – $\mathbb{R}^n$-də ξ istiqamətində vahid uzunluqlu parçanı kəsən hipermüstəvilər çoxluğunun *ölçüsünə* bərabər $H(\xi)$ funksiyasıdır. Bu halda hipermüstəvilər fəzasında ölçünün lokal finit və $\mathbb{R}^n$-də paralel yerinidəyişmələrin T_n qrupuna nəzərən invariant ölçü olduğu fərz olunur. Belə ölçülər zəruri olaraq $m \times \mathscr{L}$ şəklində ifadə olunduğundan,

$$H(\xi) = \int_{S^{n-1}} \left|\cos\,\hat{\xi}\omega\right| m(d\omega)$$

olur, burada m , – $(n-1)$ – ölçülü sferada hər hansı cüt ölçü, $\mathscr{L}$, – $\mathbb{R}^1$-də Lebeq ölçüsü, S^{n-1} isə $\mathbb{R}^n$-də $(n-1)$ – ölçülü sferadır.

$H(\xi)$ funksiyası, əksər hallarda, $\mathbb{R}^n$-də ξ istiqamətində düzxət üzərində hipermüstəvilərin invariant prosesinin T_n kəsişmələri prosesinin intensivliyi kimi interpretasiya olunur. H veridikdə, m ölçüsünün tapılması *riyazi stereologiyanın* məsələlərindən biridir.

İntensivlik qızılgülü kəmiyyəti riyazi stereologiya məsələlərində istifadə olunur.

Bax, *Riyazi stereologiya.*

Əd.: [1] Stoyan D., Mecke J., Stochastische Geometrie, B., 1983; [2] Schneider R., Weil W., в кн.: Convexity and its applications, Basel, 1983, p. 296–317.

İNTENSİVLİK ÖLÇÜSÜ « интенсивности мера; intensity measure » – bax, *Puasson ölçüsü*.

İNTENSİVLİYİ, LİF PROSESİNİN « интенсивность процесса волокон; intensity of a fibre process » – bax, *Riyazi stereologiya.*

İNTENSİVLİYİ, PROSESİN « интенсивность процесса; intensity of process » – bax, *Həndəsi proses*, *Nöqtəvi proses.*

İNTERDESİL AÇIM (GENİŞLİK) « интердецильная размах (широта); interdecile range » – bax, *Desil.*

İNTERDESİL GENİŞLİK « интердецильная широта; interdecile range » – bax, *Kvantil*, *Desil.*

İNTERFERENS KANAL « интерференционный канал; interference channel » – informasiya nəzəriyyəsində kanallar şəbəkəsinin məlumatları iki ötürücüdən iki qəbulediciyə ötürməsini təsvir edən adi misallardan biridir. Kanallar şəbəkəsinin ümumi tərifinin terminologiyasında İ. k. iki girişə $(K = 2)$, iki çıxışa $(L = 2)$ malikdir və o, ikikomponentli mənbədən $(M = 2)$ informasiya ötürməsini təsvir edir. İki kodlandırıcı qurğudan hər biri mənbədəki öz komponentini kodlandırır $(A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\})$. İki dekodlandırıcı qurğudan hər biri mənbədəki öz komponentini dekodlandırır $(B_1 = \{1\},\ B_2 = \{2\})$ və bu zaman özünün kanaldan çıxışındakı məlumatlardan istifadə olunur $(C_1 = \{1\},\ C_2 = \{2\})$. Ümumi İ. k. üçün kanalın ötürücülük qabiliyyəti oblastı hesablanmamışdır; bu oblastın yalnız bəzi sərhədləri və bəzi xüsusi kanallar (məs., Qauss kanalları) üçün nəticələr məlumdur.

Əd.: [1] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [2] Гельфанд С. И., Прелов В. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1978, т. 15, с. 123–62.

İNTERVAL STATİSTİK QİYMƏTİ « интервальная оценка; interval estimator » – *statistik qiymətdir*, qiymətləndirilən parametr və ya parametrik funksiya fəzasının nöqtələri çoxluqları (altçoxluqlar) bu statistik qiymətin hərlləri ola bilər (bax, *Nöqtəvi statistik qiymət*). İ. s. t.-lərdən, əsas etibarilə, onların etibarlılıq səddinin interpretasiyası ilə seçilən etibarlı intervallar (Neymana görə), fidusial intervallar (Fişerə görə), Beyes etibarlı intervalları; müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının kvantili üçün etibarlı intervallar kimi götürülən tolerant intervallar ən geniş yayılmış İ. s. q.-lərdəndır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

İNTERVAL VERİLƏNLƏRİNİN STATİSTİKASI « интервальных данных статистика; interval data statistics » – obyektləri qeyri – ədədi təbiətli *statistika* bölməsidir, bu bölmədə seçimin elementləri $\mathbb{R}^1$-in intervallarıdır, məsələn, təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinə ölçmə xətalarının əlavə olunmasından yaranan intervallar. İ. v. s. statistik prosedurların dayanıqlılığı (robastlığı) nəzəriyyəsinə daxildir (bax, [1]) və bu statistika interval riyaziyyatında da istifadə olunur (bax, [2]).

İ. v. s.-nda reqression analizin problemləri, eksperimentin planlaşdırılması, alternativlərin müqayisəsi, interval qeyri – müəyyənliyi şəraitində qərarların qəbul edilməsi problemləri öyrənilmişdir (bax, [3] – [6]).

Seçimlərin həcmlərinin böyük, ölçmə xətalarının kiçik olduğu hallarda interval verilənlərinin statistik analizinin asimptotik metodları inkişaf etdirilmişdir. Klassik riyazi statistikadan fərqli olaraq, bu metodlarda, əvvəlcə seçimin həcmi sonsuzluğa yaxınlaşdırılır və yalnız sonra xətalar sıfra kimi azaldılır. Araşdırmaların ümumi sxemi işlənilmişdir; bu sxemə İ. v. s.-nın iki əsas xarakteristikasının – notnların (ilkin verilənlərin interval şəklində olmasından yaranan statistikanın mümkün maksimal yayınması) və seçimin rasional həcminin (əgər bu həcm artıq götürülərsə, qiymətləndirmə dəqiqliyini və hipotezlərin yoxlanılması ilə bağlı statistik nəticələrin dəqiqliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırmaq mümkün olmur) hesablanılması daxil olan ümumi tədqiqat sxemi işlənilmişdir (bax, [7]). Bu sxem qamma – paylanmanın parametrlərinin, riyazi gözləməsinin və dispersiyasının, median və variasiya əmsalının qiymətləndirilməsində (bax, [9], [10]) və normal paylanmanın parametrləri haqqında hipotezlərin Styudent kriterisi ilə yoxlanılması, iki seçimin bircinsliyi haqqında hipotezin Smirnov kriterisi ilə yoxlanması üçün, additiv statistikaların xarakteristikalarının qiymətləndirilməsi üçün tətbiq olunur.

Reqression, diskriminant və klaster analizlərin əsas məsələlərinin qoyuluşlarında İ. v. s.-nın yanaşmaları işlənilmişdir (bax, [8]).

İ. v. s.-nın bir çox müddəaları klassik riyazi statistikanın analoqlarından fərqlənir. Məs., tutarlı statistik qiymətlər mövcud deyildir: statistik qiymət xətasının kvadratının orta qiyməti, bir qayda olaraq, asimptotik olaraq, klassik nəzəriyyəyə görə hesablanan bu statistik qiymətin dispersiyası və notnun kvadratının cəminə bərabərdir. Momentlər metodu bəzən maksimal doğruyaoxşarlıq metodundan daha dəqiq olur (bax, [9], [10]). Nəticələrin dəqiqliyini artırmaq məqsədilə seçimin həcmini müəyyən həddən artıq götürmək məqsədəuyğun deyildir.

İ. v. s.-nda klassik etibarlı intervallar notn kəmiyyəti qədər sağa və sola genişləndirilməlidir və seçimin həcmi artdıqca bunların uzunluğu sıfra yaxınlaşmır.

Klassik riyazi statistikanın bir çox məsələlərinə İ. v. s.-nın uyğun elə məsələlərini qarşı qoymaq olur ki, bu məsələlərdə seçimin elementləri – həqiqi ədədlər intervallarla əvəz olunur. İ. v. s.-nın alqoritmləri statistik proqram təminatına daxil olunur, bu alqoritmlər onların klassik riyazi statistikadan olan analoqlarına «paralel» sayılır. Bu isə müşahidə nəticələrindəki xətaları nəzərə almağa imkan yaradır.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Шокин Ю. И., Интервальный анализ. Новосибирск, 1981; [3] Вощинин А. П., Метод оптимизации объектов по интервальным моделям целевой функции, М., 1987; [4] Вощинин А. П., Сотиров Г. П., Оптимизация в условиях неопределенности, М. – София, 1989; [5] Кузнецов В. П., Интервальные статистические модели, М., 1991; [6] Сборник трудов Международной конференции по интервальным и стохастическим методам в науке и технике (ИНТЕРВАЛ – 92), т. 1–2, М., 1992; [7] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1990, с. 89–99; [8] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1993, с. 149–58; [9] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. научн. тр. Пермь, 1995, с. 114–24; [10] ГОСТ 11.011–83. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма – распределения, М., 1984.

İNTERVALLAR ŞKALASI « интервалов шкала; interval scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi.*

σ – İNVARİANT HALQA « σ – инвариантное кольцо; σ – invariant ring » – bax, *Ölçülü fəza.*

İNVARİANT KRİTERİ « инвариантный критерий; invariant test » – *invariant statistika* üzrə qurulmuş *statistik kriteridir.* Daha ətraflı: əgər bütün g-lər üçün $g\Theta_0 = \theta_0$ olarsa, $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ hipotezinin

yoxlanılması məsələsi – paylanmaların bircins ailəsi üçün G qrupunun təsirinə nəzərən invariantdır. Əgər $\varphi(x)$ invariant statistikadırsa, $\varphi(x)$ invariant kriteridir. Verilmiş məsələnin İ. k.-sinin texniki cəhətdən rahat təsvirində maksimal invariant anlayışından istifadə olunur. $T(x)$ statistikası invariant statistika olarsa və müxtəlif orbitlərdə müxtəlif qiymətlər alarsa, $T(x)$ maksimal invariantdır. İ. k. x-dən $T(x)$ vasitəsilə asılı olur.

Əgər G qrupu Θ-da tranzitiv təsir edirsə, onda müntəzəm ən güclü İ. k. mövcuddur və bu halda məsələ sadə alternativ hipotezə qarşı sadə hipotezin yoxlanılması məsələsinə çevrilir.

Praktiki cəhətdən mühüm bir çox misallar üçün ümumi halda kafi statistikalardan istifadə olunmaqla, müntəzəm ən güclü meylsiz İ. k.-lər qurulmuşdur. Əgər $\varphi(gx) = \varphi(x)$ bərabərliyi bütün g-lər üçün sanki yəqin ödənilərsə, $\varphi(x)$ kriterisi sanki yəqin invariant kriteri adlanır. Paylanmaların məhdud tam ailəsi üçün invariant güc funksiyalarına malik olan bütün kriterilər sinfində müntəzəm ən güclü kriteri olan müntəzəm ən güclü sanki invariant kriteri mövcuddur. Bu nəticə məhdud tam kafi statistika olduğu halda faydalıdır və statistikaya əsasən də, məsələ invariant məsələ olur.

İ. k. invariant etibarlı çoxluqlara uyğundur, bu çoxluqlar isə $gS(x) = S(gx)$ eynilikləri ilə xarakterizə olunur. Müntəzəm ən güclü İ. k.-lərdən müntəzəm ən dəqiq etibarlı çoxluqların qurulmasında istifadə olunur və əksinə.

Optimal İ. k.-lər maksimin xassəlidirlər. Hant – Steyn teoremi (bax, [1], [2]) hər bir φ kriterisi üçün

$$\inf_g \mathbf{M}_{g\theta}\varphi(x) \le \mathbf{M}_0\psi(x) \le \sup_g \mathbf{M}_{g\theta}\varphi(x)$$

bərabərsizliklərini sanki bütün θ-lar üçün ödəyən, sanki invariant ψ kriterisinin varlığını təmin edir. Belə müddəalar üçün mühüm şərt G qrupunda ehtimal ölçülərinin asimptotik sağinvariant ardıcıllığının varlığı şərtidir.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Kiefer J., «Ann. Math. Statist.», 1957, v. 28, № 3, p. 573–601.

İNVARİANT ÖLÇÜ « инвариантная мера; invariant measure » – 1) $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasının özünə ölçülən T inikası üçün İ. ö. – $\mathscr{A}$-da verilmiş elə μ ölçüsüdür ki, ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. T üçün ölçünün invariantlığı

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f(Tx)\, d\mu(x)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

Bax, *Ölçülü fəza.*

2) $x \in X$, $A \in \mathscr{A}$, $(X, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza olduqda, $\mathbf{P}(x, A)$ stoxastik operatoru üçün İ. ö. μ $\mathscr{A}$-da elə ölçüdür ki, ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün

$$\mu(A) = \int_X \mathbf{P}(x, A)\, d\mu(x).$$

Bax, *Stasionar paylanma*(sı) bircins Markov zəncirinin.

σ – İNVARİANT ÖLÇÜ « σ – инвариантная мера; σ – invariant measure » – bax, *Ölçülü fəza*.

İNVARİANT PAYLANMA « инвариантное распределение; invariant distribution » – T həqiqi oxunda təyin olunmuş, bircins $X(t)$ Markov təsadüfi prosesinin $(\Omega, \mathscr{A})$ faza fəzasında $\mathbf{P}^0 = \mathbf{P}^0(A)$ ehtimal paylanmasıdır; $X(t)$ prosesinin keçid funksiyası $\mathbf{P}(t, x, A)$ ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ və $t \in T$-lər üçün

$$\mathbf{P}^0(A) = \int_\Omega P(t, x, A)\, \mathbf{P}^0(dx) \qquad (*)$$

münasibətini ödəyir. $\mathbf{P}^0$ elə ehtimal paylanmasıdır ki, keçid funksiyası $P(t, x, A)$ və paylanmaları $\mathbf{P}_t(A) = \mathbf{P}\{\widetilde{X}(t) \in A\} = \mathbf{P}^0(A)$ olan bircins $\widetilde{X}(t)$ Markov prosesi dar mənada stasionar prosesdir.

Yalnız və yalnız (*) münasibətini ödəyən İ. p. mövcud olduğu halda keçid funksiyası ilə verilmiş stasionar Markov prosesi mövcuddur. Əgər $X(t)$ prosesinin faza fəzası sonlu olarsa, onda İ. p. həmişə vardır. Hesabi Ω çoxluğunda təyin olunmuş diskret zamanlı prosesin İ. p.-sının varlığı üçün elə $\Psi \subset \Omega$ əlaqəli vəziyyətlər sinfinin mövcud olması şərtdir ki, ixtiyari $y_1 \in \Psi$ vəziyyətindən ixtiyari $y_2 \in \Psi$ vəziyyətinə orta keçid müddəti sonlu olsun (bax, [1]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 183–97; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

İNVARİANT PAYLANMALAR AİLƏSİ « семейство инвариантных распределений; family of invariant distribution » – bax, *Fidusial paylanma.*

İNVARİANT STATİSTİK QİYMƏT « инвариантная оценка; invariant estimator » – paylanmalar ailəsinin hər hansı (adətən, mane olan) parametrinə nəzərən invariant *statistik qiymətə* deyilir. Mane olan qrup parametrinin xaric edilməsi üçün istifadə olunur.

İNVARİANT STATİSTİK STRUKTUR « инвариантная статистическая структура; invariance statistical structure » – bax, *Statistik məsələlər* qruplarda və bircins fəzalarda.

İNVARİANT STATİSTİKA « инвариантная статистика; invariant statistic » – dəyişənlərin uzlaşdırılmış çevirmələrinə nəzərən invariant *statistikadır*; invariant statistik modellər nəzəriyyəsinin əsas anlayışıdır. Əgər x müşahidəsi və naməlum θ parametrinə G qrupundan hər hansı bir g əməli tətbiq olunursa və bu qrupa nəzərən statistik model invariantdırsa və buna görə də, $x \mapsto gx$, $\theta \mapsto g\theta$ olursa, onda $t(x)$ statistikasının invariantlığı üçün

$$t(gx) = t(x)$$

eyniliyinin ödənilməsi tələb olunur.

Əd.: [1] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

İNVARİANTLIQ statistik oyunlar nəzəriyyəsində **« инвариантность** в теории статистических игр; **invariance** in the statistical game / decision theory **»** – yalnız invariant həlledici qaydalardan istifadə edilməsi hesabına bütün *həlledici qaydalar*

sinfinin daralması prinsipidir. Statistik həllin invariantlıq probleminin müəyyən olunması *statistik oyunun* tərifindəki $\mathscr{D}$ həllər fəzası, Θ parametrik fəzası və seçimi $\mathscr{X}$ fəzasının hər birində çevirmələr qrupları ilə əlaqədardır. Tərifdə fərz olunur ki, $\mathscr{X}$ fəzasının çevirmələrinin G qrupu vardır və bu qrupun vahidi – eynilik çevirməsi e-dir; qrup əməli kompozisiyadır, yəni $g_2 g_1$ x-i $g_2(g_1 x)$-ə çevirir, g^{-1} isə g-yə tərs çevirmədir. Fərz olunur ki, G ölçülən qrupdur, yəni gX qiymətləri $\mathscr{X}$-dən olan X təsadüfi kəmiyyətidir.

Əgər ixtiyari $g \in G$, $\theta \in \Theta$ üçün elə $\theta_g \in \Theta$ varsa ki, ixtiyari ölçülən A üçün

$$\mathbf{P}_\theta(gX \in A) = \mathbf{P}_{\theta_g}(X \in A) \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənilsin, onda $\mathbf{P}_\theta$ invariant ailədir.

Θ-nı özünə çevirən, $\overline{g}\theta = \theta_g$ bərabərliyi ilə təyin olunan $\overline{g}$ çevirmələri $\theta \to P_\theta$ inikasının qarşılıqlı birqiymətli inikas olduğu halında G qrupunu əmələ gətirir. Riyazi gözləmələr terminlərilə (1) şərti onu ifadə edir ki, ixtiyari inteqrallanan φ funksiyası üçün

$$\mathbf{M}_\theta \varphi(gX) = \mathbf{M}_{\overline{g}\theta} \varphi(X)$$

bərabərliyi doğrudur.

$(\mathscr{D}, \Theta, W), (X, \mathbf{P}_\theta)$ statistik oyunu ilə bağlı statistik həllər problemi: $\mathbf{P}_\theta$ ailəsi G-yə nəzərən invariant olarsa, itki funksiyası w isə ixtiyari $\delta \in \mathscr{D}$, $g \in G$ üçün elə yeganə $\delta' \in \mathscr{D}$ həlli tapılarsa ki, bütün $\theta \in \Theta$ üçün

$$w(\delta, \theta) = w(\delta', \overline{g}\theta) \qquad (2)$$

bərabərliyini ödəsin – mənasında G qrupuna nəzərən invariant olarsa, G qrupuna nəzərən **invariant** problem adlanır.

g-yə görə birqiymətli təyin olunan δ' qiyməti aşağıda $g'\delta$ kimi işarə olunmuşdur.

$\mathscr{D}$ fəzasını özünə çevirən, G qrupunun doğurduğu g' çevirmələri G' qrupunu əmələ gətirir. Beləliklə, $\mathscr{X}$-i özünə çevirən g çevirmələrinin əsas G qrupu ilə Θ və $\mathscr{D}$ fəzaları özündə çevirmələrinin iki $\overline{G}$ və G' qrupları bağlıdır. Eyni zamanda g, $\overline{g}$ və g' çevirmələrinin tətbiqi həll problemini dəyişmir (invariantlıq). Buna görə də, elə həlledici qaydalar seçilməlidir ki, bunlar ekvivalent həllər probleminin birindən digərinə keçdikdə dəyişilməsinlər.

Əgər $\delta(gX) = g'\delta(X)$ olarsa, invariant həll probleminin *həlledici funksiyası* $\delta(X)$ **invariant həlledici funksiya** adlanır. Randomlanmış invariant $\pi(X)$ qaydası invariant həlledici qaydalarda topalanmış ixtiyari paylanma kimi təyin olunur.

İ. prinsipinin tətbiq məsələləri *ekvivariant statistik qiymətlərin* və *invariant kriterilərin* istifadə olunmasını verir. Bu xüsusi hallar müəyyən özünəməxsusluğa malikdirlər.

Qiymətləndirmə probleminde G' çevirmələr qrupu, ümumiyyətlə, daxil olunmur. Bu halda, $\mathscr{D}$ və Θ çoxluqları üst-üstə düşür və fərz olunur ki, $g'\delta = \overline{g}\delta$. Buna görə də, ekvivariant statistik qiymətlər $\theta^*(gX) = \overline{g}\theta^*(X)$ bərabərliyi ilə təyin olunurlar.

Hipotezləri yoxlama nəzəriyyəsində g' çevirməsinin ona eynilklə bərabər $g' = e$ çevirməsinə bərabər olduğu fərz olunur, belə ki, invariant π kriterisi $\pi(gX) = \pi(X)$ münasibətilə təyin olunur. Bu halda $\{\theta \in \Theta_1\}$ və $\{\theta \in \Theta_2\}$ hipotezlərinin yoxlanılmasının invariantlıq problemi üçün də fərz olunmalıdır ki, $g\Theta_i = \Theta_i$, $i = 1, 2$ (bax, [2]).

Bu iki yanaşmada müəyyən fərqin olması iki müxtəlif terminin – «ekvivariantlıq» (statistik qiymətlər üçün) və «invariantlıq» (hipotezlərin yoxlanılması üçün) terminlərinin istifadəsi, invariant həllər qaydalarının işarə olunması ilə izah olunur.

Əd.: [1] bax, *Kafilik* statistik oyunlar nəzəriyyəsində.

İNVARİANTLIQ (ğı) statistik prosedurun **«инвариантность** статистической процедуры; **invariance** of a statistical procedure» – hər hansı bir statistik məsələdə hər hansı *həlledici qaydanın* xassəsidir. Fərz olunur ki, G elə qrupdur ki, bu qrupa nəzərən statistik model invariantdır və o, mümkün həllər fəzası D-də təsir göstərir. Əgər $\delta(gx) = g\delta(x)$ eyniliyi ödənilərsə, $\delta(x)$ invariant statistik prosedurdur, deyilir; g, – G qrupundan çevirmədir. İnvariant statistik prosedurun mühüm xassəsi – itki funksiyasının invariantlığı halında da $R(\delta) = R(\delta|\theta) = \mathbf{M}L(\delta(x)|\theta)$ risk funksiyasının $\theta \in \Theta$ naməlum parametri üzrə sabit olmasıdır; itki funksiyasının invariantlığı $L(gd|g\theta) = L(d|\theta)$ eyniliyinin ödənilməsi kimi anlaşılır. Bu zaman Θ-da G qrupunun təsirinin tranzitivliyi fərz olunur. Bu halda requlyarlıq şərtləri də ödənildikdə optimal invariant statistik prosedur mövcuddur.

Mühüm bir haldır ki, optimal invariant statistik prosedur minimaks prosedurdur. Təsirin tranzitivliyi pozulduqda modifikasiyalanmış minimakslıq xassəsi ödənilir. $G = \Theta$ olarsa, prosedurun varlığı və minimakslığı üçün kafi şərtləri aşağıdakılardır. Şərt 1: Hər hansı $c: X \to \Theta$ ölçülən inikası üçün $s(x) = c(x)^{-1}x$ statistikası invariantdır. Şərt 2: hər bir qeyd olunmuş $s(x)$ qiymətinə nəzərən $c(x)$ paylanması mövcuddur. Şərt 3: hər hansı $x \in X$ üçün $\theta x = x$ olarsa, bütün d-lər üçün $\theta d = d$ olur. Şərt 4: $L(d/\theta)$ funksiyası d üzrə aşağıdan semi – kəsilməzdir və $d \to \infty$ olduqda $+\infty$-a yaxınlaşır. Fərz olunur ki, D metrik fəzadır və $d \to \infty$ onu ifadə edir ki, d_n ardıcıllığı hər bir kompaktı sonlu zaman müddətinə tərk edir. Şərt 5: G-də υ_n ehtimal ölçülərinin hər hansı ardıcıllığı üçün, bütün g-lər üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sup_B \left|\nu_n(Bg) - \nu_n(B)\right| = 0$$

münasibəti, yəni asimptotik sağinvariantlıq xassəsi ödənilir.

Qeyd olunan şərtlər ödənildikdə geniş mənada Beyes xassəsi, yəni

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int R(\delta|\theta)\,\nu_n(d\theta) = R(\delta_0)$$

münasibəti də ödənilir, burada δ_0 optimal invariant statistik prosedurdur.

Θ-da ehtimal ölçülərinin çoxluğu ilə üst-üstə düşən, həllər fəzası D olan statistik prosedur kimi baxılan fidusial $\mathbf{P}_x^*$ paylanması

bütün α, β-lar üçün $L(\alpha|\beta) \geq L(\beta|\beta)$ tipli meylsizlik xassəsinə malik olan $L(\alpha|\beta)$ itki funksiyaları üçün optimal invariant statistik prosedurdur. Əgər $L(\alpha|\beta)$ qiyməti $\mathbf{P}_\alpha$ ölçüsünə nəzərən $\mathbf{P}_\theta$ entropiyasına bərabər götürülərsə, bu belə itki funksiyasına maraqlı bir misaldır, burada

$$\mathbf{P}_\alpha(B) = \int \mathbf{P}_\theta(B)\,\alpha(d\theta) \quad \text{və}$$

$$L(\alpha|\beta) = \int L(\alpha|\theta)\,\beta(d\theta).$$

Əd.: [1] Климов Г. П., Кузьмин А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 309–31; [2] Wesler O., «Ann. Math. Statist.», 1959, v. 30, № 1, p. 1–20; [3] Кузьмин А. Д., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн.», 1977; № 2, с. 58–66.

İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ Banax fəzalarında « **инвариантности принцип** в банаховых пространствах; **invariance principle** in Banach spaces » – qiymətləri Banax fəzasından olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqları üçün *invariantlıq prinsipidir*. $\{\xi_i\}$ – qiymətləri separabel Banax fəzası $\left(B, \|\cdot\|\right)$-dən olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; fərz olunur ki, ξ_i-lərin riyazi gözləmələri sıfra bərabərdir, normanın ikinci momentləri isə sonludur. Əgər ilkin ehtimal fəzasında elə asılı olmayan mərkəzlənmiş $\{\eta_i\}$ Qauss təsadüfi kəmiyyətləri qurmaq olarsa ki, $\{\eta_i\}$-lərin kovariasion operatorları $\{\xi_i\}$-lərin kovariasion operatorları ilə eyni olsun və bu təsadüfi kəmiyyətlər üçün $\varepsilon > 0$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \max_{k\leq n} \left\| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - \eta_i) \right\| > \varepsilon\sqrt{n} \right\} = 0 \qquad (*)$$

münasibəti ödənilsin, onda $\{\xi_i\}$ ardıcıllığı üçün invariantlıq prinsipi ödənilir, deyilir.

Banax fəzalarında İ. p. separabel olmayan Banax fəzaları üçün də yayılmışdır. Bu halda, (*) münasibətində ya xarici ölçü, ya da ki, norma üçün ölçülən majorantdan istifadə olunur (bax, [1], [2]). Təsadüfi proseslər üçün, o cümlədən, empirik proseslər və empirik ölçülər üçün Banax fəzalarında İ. p.-nə misaldır (bax, *Yığılma*(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin, [1], [2]).

Əd.: [1] Dudley R. M., Philipp W., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983, Bd 62, H. 4, S. 509–52; [2] Борисов И. С., «Тр. Новосиб. ин-та матем.», 1985, т. 5, с. 3–27; [3] Боровков А. А., Саханенко А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 4, с. 734–44.

İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ xidmət sistemi nəzəriyyəsində « **инвариантности проблема** в теории систем обслуживания; **insensitivity / invariance problem in theory** » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; invariantlıq problemi.

İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ sanki yəqin « **инвариантности принцип** почти наверное; strong / almost sure **invariance principle** » – təsadüfi kəmiyyətlərin ardıcıl cəmlərinin doğurduğu təsadüfi proseslərin Viner prosesinə sanki yəqin yığılma terminologiyasında yığılması haqqında *limit teoremidir.* Əgər eyni bir ehtimal fəzasında $\zeta(\cdot)$ prosesi ilə elə standart Viner prosesi $w(\cdot)$ qurmaq olarsa ki, $t \to \infty$ olduqda

$$\zeta(t) - w(t) = O(v(t))$$

münasibəti ödənilsin, onda $v(\cdot)$ (təsadüfi olmayan) funksiyasına $\zeta(\cdot)$ və $w(\cdot)$ proseslərinin paylanmalarının yaxınlıq xarakteristikası kimi baxmaq olar.

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = 1$, $k \leq t < k+1$ olduqda

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i + (t-k)\xi_{k+1}$$

olsun. V. Ştrassen isbat etmişdir ki, $v(t) = o((t \ln\ln t)^{1/2})$ olarsa, (*) münasibəti doğrudur (bax, [1]). Bu fakt və Viner prosesi üçün təkrar loqarifm qanunundan $\zeta(\cdot)$ prosesi üçün təkrar loqarifm qanununun doğruluğu alınır, yəni

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} \sup \zeta(t)/(2t\ln\ln t)^{1/2} = 1\} = 1.$$

Əgər $\alpha > 2$ olduqda $\mathbf{M}|\xi_1|^\alpha < \infty$ olarsa, onda $v(t) = o(t^{1/2})$ olduqda (*) münasibəti doğrudur. Əgər hər hansı $t > 0$ qiymətində $\mathbf{M}e^{t|\xi_1|} < \infty$ olarsa, onda $v(t) = \ln t$ olduqda (*) münasibəti doğrudur (bax, [2]). Bu nəticələri yaxşılaşdırmaq olmur. Qeyd olunmuş müddəaların martinqallar (bax, [1]) və qarışdırma şərtlərilə zəif asılı çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün (bax, [3]) müxtəlif ümumiləşmələri vardır. Bu istiqamətdə alınan bütün nəticələr əsasən *bir ehtimal fəzası metodunda* istifadə olunur.

Əd.: [1] Strassen V., «Proc. 5-th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab.», 1967, v. 2, № 1, p. 315–43; [2] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, № 1, S. 33–58; [3] Berkes I., Philipp W., «Ann. Probab.», 1979, v. 7, № 1, p. 29–54.

İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ təsadüfi proseslər üçün « **инвариантности принцип** для случайных процессов; **invariance principle** for stochastic/random process » – təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri ardıcıllıqlarının doğurduğu təsadüfi proseslərin Viner prosesinə yığılması haqqında *limit teoremidir.* İ. p. *Mərkəzi limit teoreminin* təbii ümumiləşməsidir. $\{X_j^{(n)},\ j = 1, \ldots, m_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ hər bir seriyada asılı olmayan X_{jn} təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllıqlar seriyası olsun, belə ki, bütün n və j-lər üçün

$$\mathbf{M}X_j^{(n)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{D}X_j^{(n)} = 1.$$

$t_k^{(n)} = \sum_{j\leq k} \mathbf{D}X_j^{(n)}$ olduqda $s_n = s_n(\cdot)$ qiymətləri

$$s_n(t_k^{(n)}) = \sum_{j\leq k} X_j^{(n)}$$

olan, $t_k^{(n)} \leq t \leq t_{k+1}^{(n)}$ olduqda xətti, kəsilməz təsadüfi sınıq xətt (təsadüfi proses), $\mathbf{P}_n$ isə müntəzəm normalı və Borel σ – cəbrli

kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0,1]$-də s_n prosesinin paylanması olsun; $\mathbf{W}$-nin bu fəzada standart Viner prosesi w-nin paylanması olduğu fərz olunur.

$C[0,1]$ fəzasında $n\to\infty$ olduqda

$$P_n \Rightarrow \mathbf{W} \qquad (1)$$

zəif yığılması üçün

$$\sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{M}\{(X_j^{(n)})^2;\ |X_j^{(n)}|>\varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;\quad \varepsilon>0$$

Lindeberq şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

(1) yığılması invariantlıq prinsipi kimi adlandırılır. Qeyd olunan nəticə Yu. V. Proxorova məxsusdur (bax, [2]). Xüsusi halda, $X_j^{(n)} = X_j/n^{1/2}$ və $m_n = n$ olarsa, $X_1, X_2, \dots$ riyazi gözləmələri sıfır, dispersiyaları vahid olan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda, bu nəticə M. Donsker tərəfindən [1]-də daha əvvəl alınmışdır. «İ. p.» adı o faktı qeyd edir ki, limit paylanması $\mathbf{W}$ $\{X_j^{(n)}\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmasından asılı olmur. İ. p. təsadüfi proseslər üçün ən çox tətbiq olunan limit teoremlərindən biridir. (1) yığılması bütün kəsilməz $f(\cdot)$ funksionalları üçün

$$\mathbf{P}\{f(s_n)<u\} \Rightarrow \mathbf{P}\{f(w)<u\} \qquad (2)$$

şəklində də yazılır. $f(x)=x$ üçün (1) və (2)-dən Lindeberq formasında mərkəzi limit teoremi alınır. Hal-hazırda İ. p.-nin ümumiləşmələri $\{X_j^{(n)}\}$ kəmiyyətləri çoxölçülü, zəif asılı, martinqal–fərqlər əmələ gətirən və s. hallar üçün də məlumdur. (1) və (2)-yə mühüm əlavələr İ. p.-ndə yığılma sürətini müəyyənləşdirən münasibətlər və İ. p.-ndə böyük yayınmalar haqqında teoremlərdir (bax, *İnvariantlıq prinsipi*; yığılma sürəti).

Əd.: [1] Donsker M., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 6, p. 1–12; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [3] Биллингслей П., «Сходимость вероятностных мер», пер. с англ., М., 1977.

İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ; yığılma sürəti **« инвариантности принцип;** скорость сходимости; **invariance principle;** rate of convergence **»** – təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğurduğu təsadüfi s_n sınıq xəttinin $\mathbf{P}_n$ paylanmalarının w Viner prosesinin paylanması $\mathbf{W}$-yə yaxınlıq xarakterizasiyası ilə bağlı araşdırmaların istiqamətidir. Bu istiqamətdə alınmış nəticələrin əksəriyyəti $C[0,1]$ kəsilməz funksiyalar fəzasında $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{W}$ paylanmaları arasında Levi – Proxorov məsafəsi üçün $\pi_n = \pi(\mathbf{P}_n, \mathbf{W})$ statistik qiymətləridir. İlk belə statistik qiymət

$$L_\alpha^{(n)} \equiv \sum_{j=1}^{m_n} \mathbf{M}\left|\xi_j^{(n)}\right|^\alpha,\quad \alpha>2$$

Lyapunov münasibəti terminlərilə Y. V. Proxorov tərəfindən alınmış (bax, [1]) və (4)-də

$$\pi_n \le C(\alpha)(L_\alpha^{(n)})^{1/(\alpha+1)},\quad \alpha>2 \qquad (1)$$

statistik qiymətinə qədər hesablanılmışdır.

($\xi_j^{(n)}$ toplananları haqqında *İnvariantlıq prinsipi* təsadüfi proseslər üçün məq.-nə bax). Əgər $m_n = n$, $\xi_j^{(n)} = \xi_j/\sqrt{n}$ və $\alpha>2$ olduqda $\mathbf{M}|\xi_1|^\alpha<\infty$, $\xi_1, \xi_2, \dots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $n\to\infty$ olduqda

$$\pi_n = o(n^{-(\alpha-2)/2(\alpha+1)}) \qquad (2)$$

olur. Əgər hər hansı t üçün $\mathbf{M}\, e^{t|\xi_1|}<\infty$ olarsa, onda

$$\pi_n = O(n^{-1/2}\ln n) \qquad (3)$$

olur. (1), (2), (3) statistik qiymətləri yaxşılaşmayan statistik qiymətlərdir. $\{\xi_j^{(n)}\}$ asılı təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda da nəticələr alınmışdır. Alınmış statistik qiymətlərin hesablanılmasında *bir ehtimal fəzası metodu* əsas bir üsul kimi istifadə olunmuşdur. Lakin digər yanaşmalar da məlumdur.

π_n məsafəsinin sıfra yığılma sürətinin tədqiqi ilə yanaşı $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{W}$ paylanmalarının yaxınlaşmasının öyrənilməsinin digər istiqamətləri də vardır. Məs.,

$$\Delta_n(B) \equiv \left|\mathbf{P}\{s_n\in B\} - \mathbf{P}\{w\in B\}\right|,$$

$$\Delta_n(f,\ u) \equiv \left|\mathbf{P}\{f(s_n)<u\} - \mathbf{P}\{f(w)<u\}\right|$$

xarakteristikalarının qiymətləndirilməsi məsələləri bunlardandır, burada B, – $C[0,1]$ fəzasının Borel altçoxluğu, $f(\cdot)$, – $C[0,1]$-də həqiqi ölçülən funksionaldır. Əgər B Lipşits çoxluğu, yəni

$$\mathbf{P}\{w\in(\partial B)^{(\varepsilon)}\} \le C_B\varepsilon,\quad \varepsilon>0$$

olarsa, onda $\Delta_n(B)$ xarakteristikasının qiymətləndirilməsi üçün

$$\Delta_n(B) \le (1+C_B)\pi_n \qquad (4)$$

bərabərsizliyi faydalıdır, burada $(\partial B)^{(\varepsilon)}$, – B çoxluğunun ∂B sərhədinin ε – ətrafıdır.

Analoji olaraq, əgər $f(\cdot)$ funksionalı

$$|f(x)-f(y)| \le C_1(f)\|x-y\|,$$
$$x, y\in C[0,1]$$

Lipşits şərtini ödəyərsə, $f(\omega)$ paylanması $C_2(f)$ konstantı ilə məhdud sıxlıq funksiyasına malik olarsa, onda

$$\Delta_n(f,\ u) \le (1+C_1(f)C_2(f))\pi_n \qquad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(4) və (5) bərabərsizlikləri və (1), (2) və ya (3) münasibətlərindən $\Delta_n(B)$ və $\Delta_n(f,\ u)$ üçün yaxşılaşdırıla bilinən məlum statistik qiymətlər almaq olar. Məs., əgər B Lipşits çoxluğudursa, onda

$$\Delta_n(B) \le C(B,\ \alpha)(L_\alpha^{(n)})^{1/\alpha}\ln(1+(L_\alpha^{(n)})^{1/\alpha}),\quad \alpha>2$$

bərabərsizliyi doğrudur.

$$f(x) \equiv \max_{0\le t\le 1} x(t)$$

və

$$f(x) = \int_0^1 g(x(t),\ t)dt$$

funksionalları üçün daha dəqiq statistik qiymətlər alınmışdır.

Əgər $B = \{x \in C[0,\ 1]:\ g_-(t) \le x(t) \le g_+(t),\ t \in [0,\ 1]\}$

$$\left| g_\pm(t+h) - g_\pm(t) \right| \le Kh, \quad 0 \le t \le t+h \le 1$$

Lipşits şərtini ödəyən sərhədləri olan zolaqdırsa, $m_n = n$, $\xi_j = \sqrt{n}\xi_j^{(n)}$ bütün $j = 1, ..., n$ qiymətlərində eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\Delta_n(B) \le C_{\text{abs}}(K+1)\,\mathbf{M}\left|\xi_1\right|^3 / n^{1/2}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, № 1, S. 33–58; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 227–54; [4] Саханенко А. И., «Тр. Ин-та математики СО АН СССР»,1985, т. 5, с. 27–44.

İNVERSİYA « инверсия; inversion » – bax, *Yerdəyişmə.*

İONESKU TULÇİ TEOREMİ « Ионеску Тулчи теорема; Ionescu Tulcea theorem » – ölçülən fəzaların hesabi hasilində şərti paylanmalar toplusu üzrə *ehtimal ölçüsünün* qurulmasının əsaslandırılması üçün teoremdir. $(S_n, \mathcal{A}_n)$ – ixtiyari ölçülən fəzalar, $p_n(x_0,\ x_1, \dots, dx_{n+1})$ – $(S_0 \times S_1 \times \dots \times S_n,\ \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ fəzasından $(S_{n+1},\ \mathcal{A}_{n+1})$, $n = 0,\ 1,\ 2, \dots$ fəzasına keçid ehtimalları (keçid funksiyası, stoxastik nüvə) olsun. [1]-də isbat olunmuş İ. T. t.-ndə $(\Omega,\ \mathcal{A}) = (S_0 \times S_1 \times \dots,\ \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \dots)$ – fəzaların sonsuz hasilində, hər bir $x \in S_0$ üçün elə yeganə $\mathbf{P}(x,\ d\omega)$ ehtimal ölçüsünün varlığı hökm olunur ki, hər bir n üçün bu ölçünün $(S_0 \times \dots \times S_n)$ fəzasına proyeksiyası

$$\mathbf{1}_x(dx_0)\ p_0(x_0,\ dx_1)\ p_1(x_0,\ x_1,\ dx_2),$$
$$,\dots,\ p_{n-1}(x_0, x_1, \dots,\ x_{n-1},\ dx_n)$$

ölçüsü ilə üst-üstə düşür. $\mathbf{P}(x,\ d\omega)$ ölçüsü x-ə görə $\mathcal{A}_0$ – ölçüləndir. İ. T. t.-ndən diskret zamanlı təsadüfi proseslərin trayektoriyaları fəzasında ölçünün qurulması üçün, o cümlədən, $t = 0,\ 1,\ 2, \dots$ diskret zamanlı Markov prosesi, həmçinin keçmişdən ixtiyari asılılıqla verilən təsadüfi prosesin, məs., strategiyası ilə verilmiş diskret zamanlı idarəolunan təsadüfi prosesin trayektoriyaları fəzasında ölçünün qurulması üçün istifadə olunur. $\mathbf{P}(x, d\omega)$-nı S_0-da ehtimal ölçüsü $\mu(dx)$-ə görə inteqraladıqda, ilkin paylanması μ və keçid ehtimallarının verilmiş toplusu ilə təyin olunan təsadüfi prosesin ölçüsü alınır.

Əd.: [1] Ionescu Tulcea C. T., «Atti Acad. Naz. Lincei Rend.», 1949, v. 7, p. 208–11; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

İRREQULYAR NÖQTƏ « иррегулярная точка; irregular point » – bax, *Requlyar nöqtə* çoxluq üçün, *Limit teoremləri* Markov prosesində nisbətlər üçün.

İSTİQAMƏT QIZILGÜLÜ « направления роза; rose of direction » – bax, *Həndəsi proses.*

İSTİQAMƏTLƏNDİRİCİ STATİSTİKA « направляющая статистика; direction statistic » – bax, *Kanonik və natural parametrizasiya.*

İSTİQAMƏTLƏNMİŞ ÇOXLUQ « направленное множество; directed set » – bax, *Şəbəkə*(si) ölçülərin.

İŞARƏ METODU, KORRELYASİON ANALİZİN « знаковый метод корреляционного анализа; sign method of correlation analysis » – bax, *Polyar korrelyasion funksiya.*

İŞARƏLƏR KRİTERİSİ « знаков критерий; sign test » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin $(n;\ p = 1/2)$ parametrlərli binomial paylanma qanununa tabe olması haqqında H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *qeyri – parametrik kriteridir.* Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda

$$\mathbf{P}\{\mu \le k \mid n,\ 1/2\} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i (1/2)^n = \mathbf{I}_{0,5}(n-k,\ k+1),$$

$$k = 0,\ 1, \dots, n;$$

burada

$$\mathbf{I}_z(a,\ b) = \frac{1}{B(a,\ b)} \int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \quad 0 \le z \le 1,$$

$B(a,\ b)$ beta funksiyadır. İ. k.-nə əsasən *mühümlük ölçüsü* $0 < \alpha \le 0{,}5$ bərabərsizliyini ödəyən α olan H_0 hipotezi

$$\min\{\mu,\ n-\mu\} \le m$$

olduğu halda, qəbul olunmur, burada $m = m(\alpha,\ n)$ İ. k.-nin kritik qiymətidir və

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i (1/2)^n \le \alpha/2, \quad \sum_{i=0}^{m+1} C_n^i (1/2)^n > \alpha/2$$

bərabərsizliklərinin tamqiymətli həllidir. İ. k.-ni eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin naməlum kəsilməz paylanmasının sıfra görə simmetrik olması, yəni ixtiyari həqiqi x ədədi üçün

$$\mathbf{P}\{\xi_i < -x\} = \mathbf{P}\{\xi_i > x\}$$

bərabərliyinin doğruluğu haqqında irəli sürülən H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq etmək olar.

Bu halda İ. k.

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta(\xi_i), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x > 0, \\ 0, & \text{əgər } x < 0 \end{cases}$$

statistikasına əsaslanır, belə ki, H_0 hipotezi doğru olarsa, μ statistikası $(n;\ p=0{,}5)$ parametrlərli binomial qanunla paylanır.

İ. k. asılı olmayan $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin naməlum kəsilməz paylanmasının medianının ξ_0-a bərabər olması haqqında irəli sürülən H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün də analoji istifadə olunur; bu halda $\eta_1 = \xi_1 - \xi_0, ..., \eta_n = \xi_n - \xi_0$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün analoji olaraq ξ statistikası təyin olunur.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [3 изд.], М., 1983; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

İŞARƏVİ – İNVARİANT AİLƏ(si) təsadüfi kəmiyyətlərin « **знакоинвариантное семейство** случайных величин; **sign – invariant family** of random variables » – *təsadüfi kəmiyyətlərin* elə bir ailəsidir ki, bu ailədən olan təsadüfi kəmiyyətlərin işarələrinin ixtiyari qoyuluşunda onların paylanmaları dəyişmir. Daha dəqiq, ölçülən vektor fəzasında təsadüfi elementlərin sonlu $(X_1, ..., X_n)$ ailəsi üçün, əgər $\theta_k = \pm 1,\ k = 1, ..., n$ ədədlərinin ixtiyari toplusu üçün təsadüfi $(X_1, ..., X_n)$ və $(\theta_1 X_1, ..., \theta_n X_n)$ elementləri eyni qanunla paylanmış olarsa, bu ailə işarəvi–invariant ailə adlanır. Əgər təsadüfi elementlərin sonsuz $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ailəsinin ixtiyari sonlu altailəsi İ. - i. a. olarsa, $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ İ. - i. a. adlanır. İ. - i. a.-ə aid geniş yayılmış misal simmetrik təsadüfi elementlər ailəsidir. Separabel normalanmış fəzada təsadüfi elementlərin işarəvi – invariant ardıcıllığından təşkil olunmuş sıra ehtimala görə yığılarsa, onda bu sıra sanki yəqin yığılır.

İŞARƏVİ KORRELYASİYA FUNKSİYASI « знаковая корреляционная функция; sign correlation function » – bax, *Polyar korrelyasion funksiya.*

İTKİ FUNKSİYASI « потерь функция; loss function » – Θ parametrik fəzasının həllər (qərarlar) fəzası D-yə düz hasili $\Theta\times D$-də təyin olunan, müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin paylanma parametrinin əsl qiyməti θ-ya bərabər olduqda ($\theta\in\Theta$) qəbul edilən d qərarını ($d\in D$) qəbul edən statistikin itkilərini ifadə edən (müəyyən ölçü vahidlərilə) $L(\theta,\ d)$ funksiyasıdır. Ənənəvi İ. f.-ları:

θ vektor parametrini ($\Theta\subseteq\mathbb{R}^k$) qiymətləndirmə nəzəriyyəsində ($D=\Theta$) kvadratik itki funksiyası – $L(\theta,\ d) = \| \theta - d \|^2$ düsturu ilə ifadə olunur,

$H_i: \theta\in\Theta_i,\ i = 1, ..., k$ hipotezlərini müqayisə məsələlərində $0-1$ tipli itki funksiyası

$$L(\theta,\ d) = \begin{cases} 0, & \text{əgər}\quad \theta\in\Theta_i,\ d = d_i,\quad i=1,...,k; \\ 1, & \text{əks halda} \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur; d_i, – H_i hipotezinin doğruluğu haqqında qərardır.

Bax, *Statistik oyun.*

Əd.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, пер. с англ., в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300–522.

İTO DÜSTURU « Ито формула; Ito formula », dəyişənləri əvəzetmə düsturu, – $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ trayektoriyaları sağdan kəsilməz, soldan limitləri olan *semimartinqal* və $f\in C^2(\mathbb{R}^1)$ olduqda $(f(\zeta_t))_{t\geq 0}$ təsadüfi prosesinin aşağıdakı düsturla ifadəsidir:

$$f(\zeta_t) = f(\zeta_0) + \int_0^t f'(\zeta_s)\, d\zeta_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\zeta_{s-})\, d\left\langle \zeta^c,\ \zeta^c \right\rangle_s + \sum_{s\leq t} [f(\zeta_s) - f(\zeta_{s-}) - f'(\zeta_s)(\zeta_s - \zeta_{s-})].$$

Sağ tərəfdə sonuncu cəmdəki toplananların sayı hesabidən artıq deyildir, sıra 1 ehtimalla mütləq yığılandır, $d\zeta$ üzrə inteqral ζ semimartinqalı üzrə stoxastik inteqraldır, $d\left\langle \zeta^c,\ \zeta^c \right\rangle$ üzrə inteqral, $\left\langle \zeta^c,\ \zeta^c \right\rangle$ prosesi üzrə Lebeq – Stiltyes inteqralıdır. $\left\langle \zeta^c,\ \zeta^c \right\rangle$ prosesi m^{c^2} submartinqalı üçün Dub – Meyer ayrılışındakı prosesdir, burada m^c, – $\zeta = m + A$ semimartinqalının ayrılışında martinqalın kəsilməz həddi m-dir, A isə məhdud variasiyalı prosesdir. ζ Viner prosesi olduğu hal üçün ($\left\langle \zeta^c,\ \zeta^c \right\rangle_t \equiv t$ olduğu halda) düsturu K. İto isbat etmişdir (bax, [1]).

Əd.: [1] Ито К., «Математика», 1959, т. 3, № 5, с. 131–41; [2] Dellacherie C., Meyer P. A., Probabilites et potentiel, pt. 2, ch. 5–8. Theorie des martingales, P., 1980.

İTO İFADƏSİ « Ито представление; Ito representation » – qiymətləri $\mathbb{R}^d$-dən olan, stoxastik kəsilməz, sanki yəqin sağdan kəsilməz asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t),\ t\geq 0$ təsadüfi prosesinin aşağıdakı şəkildə ifadəsidir:

$$\zeta(t) = \zeta_c(t) + \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\mu - \nu)(dt, dx) + \int_0^t \int_{|x|>1} x\,\mu(dt, dx), \qquad (*)$$

burada $\zeta_c(t)$ – asılı olmayan artımlarlı kəsilməz Qauss prosesidir, $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d))$ fəzasında təyin olunmuş $\mu(\omega, dt, dx)$ Puasson ölçüsündən asılı deyildir və bu ölçü $\zeta(t)$ prosesinin sıçrayışları üzrə aşağıdakı kimi qurulmuşdur:

$$\mu(\omega, A) = \sum_{t\geq 0} I(\Delta\zeta(t)\neq 0)\, I((t,\ \Delta\zeta(t))\in A),$$

$$\Delta\zeta(t) = \zeta(t) - \zeta(t-0),\quad \nu(A) = \mathbf{M}\mu(\omega,\ A).$$

Asılı olmayan artımlarlı prosesin strukturunun sıçrayışlar ölçüsü μ-nün köməyilə tədqiqi K. İto tərəfindən [2]-də təklif olunmuşdur; o, ilk dəfə (*) ifadəsinə yaxın bir ifadə almışdır.

Əd.: [1] Ito K., «Japan. J. Math.», 1942, v. 18, № 2, p. 261–301; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

İTO PROSESİ « Ито процесс; Ito process » –

$$\zeta_t = \zeta_0 + \int_0^t a(s,\ \omega)ds + \int_0^t b(s,\ \omega)d\boldsymbol{w}_s, \quad t\in[0,\ T] \quad (*)$$

şəklində *təsadüfi prosesdir*, burada $\boldsymbol{w}$ – hər hansı $\mathbb{A}=(\mathscr{A}_t)$ σ – cəbri ilə uzlaşdırılmış Viner prosesi, a və b, – $\mathbb{A}$ ilə uzlaşmış elə proseslərdir ki, $a(\cdot,\ \omega)\in L^1([0,\ T])$, $b(\cdot,\ \omega)\in L^2([0,\ T])$ münasibətləri sanki bütün ω-lar üçün ödənilir. Bu zaman Viner prosesi də $\mathbb{A}$ axını ilə uzlaşmış hesab olunur, əgər bundan başqa bütün $t\in[0,T]$ üçün $\boldsymbol{w}(t)$ $\mathscr{A}_t$ – ölçülən olarsa, $h>0$, $s\in[0,\ T-h]$ olduqda, $\boldsymbol{w}(s+h)-\boldsymbol{w}(s)$ artımlarının $\mathscr{A}_s$ σ – cəbrindən asılı olmamazlıq şərti ödənilir. Bu şərt ödənildikdə, (*) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqral İto stoxastik inteqralı adlanır.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

İTO STOXASTİK İNTEQRALI « Ито стохастический интеграл; Ito stochastic integral » – bax, *Stoxastik inteqral.*

İTO – NİSİO TEOREMİ « Ито – Нисио теорема; Ito – Nishio theorem » – bax, *Təsadüfi proses*; trayektoriyaların regulyarlığı.

İTO – VENTSEL DÜSTURU « Ито – Вентцеля формула; Ito – Wentzel formula » – parametrdən asılı semimartinqalda dəyişəni digər stoxastik differensialı mümkün semimartinqalla əvəz etdikdə, həmin semimartinqalın *stoxastik differensialının* hesablanması üçün düsturdur.

$f(t,x)$ aşağıdakı şəkildə stoxastik differensialı mümkün olan

$$df(t,x)=\mathscr{I}(t,x)\,dt + H(t,x)d\boldsymbol{w}(t)$$

semimartinqal olsun, burada $\boldsymbol{w}(t)$, – $\{\mathscr{A}_t\}$ σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən Viner prosesi, $\mathscr{I}(t,x)$ və $H(t,x)$ – bu ailə ilə uzlaşan təsadüfi (ölçülən) funksiyalardır. $\xi(t)$, – $\{\mathscr{A}_t\}$ ailəsinə nəzərən

$$d\xi(t)=b(t)\,dt + \sigma(t)d\boldsymbol{w}(t)$$

stoxastik differensialı mümkün olan semimartinqal olsun. Onda f, $\mathscr{I}$, H funksiyalarının hamarlığı haqqında təbii fərziyyələrlə

$$df(t,\ \xi(t)) = \mathscr{I}(t,\ \xi(t))\,dt +$$
$$+\left\{\sum_l H_l(t,\ \xi(t))\,d\boldsymbol{w}_l(t) + \sum_i b_i(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}f(t,\ \xi(t)) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,l,\ j\ldots}\sigma^{il}(t)\,\sigma^{jl}(t)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + f(t,\ \xi(t)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i,l}\sigma^{il}(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}H_l(t,\ \xi(t))\right\}dt +$$
$$+\sum_{i,l}\sigma^{il}(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}f(t,\ \xi(t))\,d\boldsymbol{w}_l(t)$$

düsturu doğrudur.

Bu düstur *İto düsturunun* ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] Вентцель А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 390–93; [2] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1938, с. 208.

İYERARX PROSEDURLARI, TƏSNİFATIN « иерархические процедуры классификации; hierarchical classification procedures » – təsnif olunan N sayda obyektlər arasında, yaxınlıq matrisi D əsasında obyektlərin ardıcıl birləşdirilməsindən ibarət prosedurlardır və bu matris ya obyekti xarakterizə edən dəyişənlərin qiymətləri əsasında yaxınlıq ölçülərinin hesablanılması yolu ilə və ya eksperimentlərdən bilavasitə alınır. Prosedurun aparılmasından alınan nəticələr N obyektin hər dəfə daha böyük siniflərə və ya klasterlərə $N-1$ sayda birləşmələrinin ardıcıllığını qrafik təsvir edən dendoqram şəklində göstərilir. Birinci addımda bir-birinə ən yaxın iki obyekt birləşdirilir. Bu zaman yaxınlıq matrisi dəyişir: bu matrisdən birləşdirilən obyektlərə qədər olan məsafələr xaric olunur və birləşmə nəticəsində alınan klasterə qədər məsafələr əlavə olunur, yəni matrisin dim. – ölçüsü bir vahid azalır. İkinci və sonrakı addımlarda təsvir olunan əməliyyatlar yalnız bir fərqlə təkrar olunur ki, yalnız obyektlər deyil, klasterlər də birləşə bilər. Birləşmə nəticəsində alınan klasterə qədər digər obyektlərdən və ya klasterlərdən olan məsafələr müxtəlif üsullarla hesablana bilinir. Seçilmiş üsuldan asılı olaraq, alqoritmlər – «orta əlaqəli», «yaxın qonşu», «uzaq qonşu» və s. kimi alqoritmlərə ayrılır. Ən çox istifadə olunan orta əlaqəli alqoritmdir. Belə alqoritmdə ixtiyari k klasterindən i və j klasterlərinin birləşməsindən alınan $i+j$ klasterinə qədər məsafə (yaxınlıq), bu klasterlərə daxil olan obyektlərin sayı uyğun olaraq, n_i və n_j olduqda

$$d_{k,\ i+j}=(n_i d_{ki} + n_j d_{kj})\,/(n_i+n_j)$$

düsturu ilə hesablanır, burada d_{ki} və d_{kj}, – k klasterindən i və j klasterlərinə qədər olan məsafələrdir. T. i. p.-nın müxtəlif metodları mövcuddur.

Əd.: [1] Дюран Б., Оделл П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977.

İYNƏ « игла; needle » – bax, *İnteqral həndəsə.*

İZİNQ MODELİ « Изинга модель; Ising model » – statistik mexanikanın ən sadə və ən yaxşı öyrənilmiş şəbəkəvari modelidir. d – ölçülü İ. m.-ndə dipollar d – ölçülü tamqiymətli şəbəkənin $t\in\mathbb{Z}^d$ düyünlərində yerləşir, vəziyyələr fəzası $\{x_s\}$ isə iki $\{-1,\ +1\}$ elementlərindən ibarətdir. Ehtimal paylanması potensialı U olan Gibbs paylanmasıdır:

$$U_{\{s,\ t\}}(x_s,\ x_t) = -I\,x_s x_t, \quad |s-t|=1,$$

$$U_{\{s\}}(x_s) = -h\,x_s, \quad s,\ t\in\mathbb{Z}^d,$$

digər hallarda isə U sıfra bərabərdir. h parametri xarici maqnit sahəsi adlanır. Vəziyyətləri $\{y_s\}$ və potensialı

aşağıdakı münasibətlərlə verilən U olan İ. m.-ni şəbəkəvari qaz kimi təsvir etmək olar:

$$\overline{U}_{\{s,\,t\}}(y_s,\,y_t) = -4I\,y_s y_t\,,\quad |\,s-t\,| = 1\,,\quad s,\,t\in\mathbb{Z}^d$$

$$\overline{U}_{\{s\}}(y_s) = -(4dI+h)\,y_s\,,\quad y_s,\,y_t\in\{0,\,1\}\,.$$

$I>0$ olduqda ferromaqnit İ. m., $I<0$ olduqda anti–ferromaqnit İ. m. adlanır.

Ferromaqnit İ. m. üçün Li – Yanq teoremi və bir çox korrelyasion bərabərsizliklər doğrudur.

Ferromaqnit İ. m.-nin öyrənilməsinə [1]-dəki işlə başlanılmışdır, burada $d=2$ halında $f_d(\beta,\,h=0)$ limit sərhəd enerjisi üçün aşkar düstur alınmışdır. Aydın olmuşdur ki, f_2 funksiyası $\beta_{\rm cr}(2)=\ln(\sqrt{2}+1)$ nöqtəsində 2-ci növ faza keçidinə uyğun yeganə xüsusiyyətə malikdir. $d>2$ olduqda $f_d(\beta,\,h=0)$ funksiyalarının da heç olmasa bir kritik $\beta_{\rm cr}(d)$ nöqtəsi olur. $\beta_d(\beta,\,h)$ funksiyasının h parametrindən asılılığı haqqında məlumdur ki (bax, [2]), $d\geq 2$, $\beta>>1$ olduqda $h=0$ nöqtəsi mahiyyətcə xüsusi nöqtədir. $d=1$ olduqda $f_1(\beta,\,h)$ funksiyası aşkar hesablanır və $\beta>0$, $-\infty<h<\infty$ dəyişənlərinin hər ikisi üzrə analitikdir.

Ferromaqnit İ. m.-nin Gibbs vəziyyətlərinin strukturu aşağıdakı kimidir. $h\neq 0$ olduqda və $h=0,\ \beta<\beta_{\rm cr}(d)$ olduqda bu modeldə yeganə Gibbs meydanı vardır. Bu vəziyyət üzrə orta qiymətlər $\langle\ \rangle^{h,\beta}$ kimi işarə olunur. Bu vəziyyət korrelyasiyaların azalma sürətinin eksponensial olması ilə səciyyəvidir.

$$\lim_{h\to 0\pm}\langle\ \rangle^{h,\beta} = \langle\ \rangle_{\pm}^{\beta}$$

limitləri Gibbs vəziyyətləri olub, β tərs temperaturunun qiymətinə və $\beta>\beta_{\rm cr}(d)$ olduqda $h=0$ halına uyğundurlar və üst-üstə düşmürlər. Bundan başqa,

$$\langle x_0\rangle_{+}^{\beta} = -\langle x_0\rangle^{\beta} > 0\,,\quad \langle x_0\rangle_{+}^{\beta}\to +1\,,\quad \beta\to+\infty\,.$$

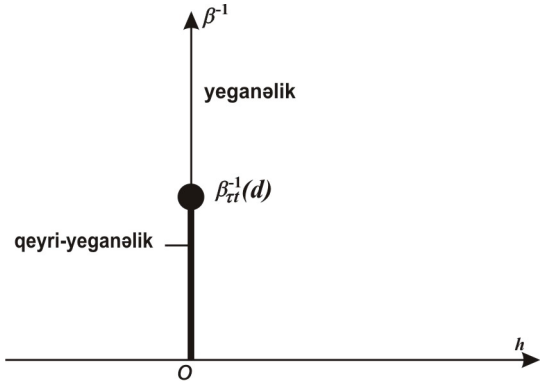
Bu hökm konturların daxil olması və Payerls metodunun (bax, [3] – [6]) tətbiq olunması vasitəsilə istifadə olunur. $\langle\ \rangle_{+}^{\beta}$, $\langle\ \rangle_{-}^{\beta}$ vəziyyətləri invariantdırlar və digər ixtiyari translyasion invariant vəziyyət bu vəziyyətlərin qabarıq xətti kombinasiyasıdır. $d=2$, $h=0$ olduqda qeyri – translyasion invariant vəziyyətlər yoxdur (bax, [7], [8]). $d\geq 3$, $h=0$ olduqda «fazaların ayrılmasına» uyğun vəziyyətlər yaranır. Məs., əgər $\beta>\beta_r(d)\geq\beta_{\rm cr}(d)$ olarsa,

$$\langle x_t\rangle^{\pm\beta}\begin{cases}>0, & t^{(1)}\geq 0,\\ <0, & t^{(1)}<0\end{cases}$$

olan $\langle\ \rangle^{\pm,\beta}$ vəziyyəti vardır. $d\geq 4$, $\beta_r(3)>\beta_{cr}(3)$ olduqda $\beta_r(d)=\beta_{\rm cr}(d)$ olması hipotezi isbat olunmamışdır. $\beta_r(d)$-nin qiyməti faza keçidinin kələ-kötürlənmə nöqtəsi (rus. точка ошершавливания) adlanır. İ. m.-ndə bütün Gibbs paylanmaları çoxluğunun strukturunun tam təsviri hələ ki, yoxdur (bax, [10]).

Kritik $\beta_{\rm cr}(d)$ nöqtəsində də yeganə Gibbs vəziyyəti vardır. Lakin bu vəziyyət üçün korrelyasiyaların azalma sürəti yalnız üstlü olur. Fərz olunur ki, burada qeyri – trivial limit avtomodel təsadüfi meydanları yarana bilər.

Nəhayət, $d=1$ olduqda İ. m.-ndə Gibbs vəziyyəti parametrlərin ixtiyari qiymətləri üçün yeganədir. Ferromaqnit İ. m.-nin faza diaqramı $d\geq 2$ halı üçün şəkildə verilmişdir.



Antiferromaqnit İ. m. üçün Gibbs vəziyyətlərinin strukturu tamamilə fərqlidir.

Əd.: [1] Onsager L., «Phys. Rev.», 1944, v. 65, № 2, p. 117–49; [2] Isakov S. N., «Comm. Math. Phys.», 1984, v. 95, № 4, 427–43; [3] Peierls R., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1936, v. 32, № 3, p. 477–81; [4] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 209–30; [5] Griffiths R., « Phys. Rev.», 1964, v. 136A, № 2, p. 437–39; [6] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М, 1980; [7] Aizenman M., «Comm. Math. Phys.», 1980, v. 73, № 1, p. 83–94; [8] Higuchi Y., в кн.: Random fields, v. 1, Amst. – N. Y. – Oxf., 1981, p. 517–34; [9] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 619–39; [10] Dobrushin R. L., Shlosman S. B., «Sov. Sci. Rev.», 1985, v. C5, p. 53–195.

İZİNVERMƏ QABİLİYYƏTİ « разрещающая способность; rezolution » – bax, *Faktor eksperiment.*

İZOMORFİZMİ, DİNAMİK SİSTEMLƏRİN metrik **« изоморфизм динамических систем** метрический; metric **isomorphism of dynamical systems »** – iki dinamik sistemdən birinin faza fəzasının digərinin faza fəzasına uyğun gələn surətdə inikası ilə keçməsi xassəsidir. $(\Omega,\,\mathscr{A},\,\mathbf{P})$ və $(\Omega_1,\,\mathscr{A}_1,\,\mathbf{P}_1)$ ölçülü fəzalar olsun. Əgər elə $\varphi:\Omega\to\Omega_1$ ölçülən inikası vardırsa ki,

1) $\varphi\Omega=\Omega_1$;

2) φ çevriləndir və φ^{-1} tərs çevirməsi ölçüləndir;

3) φ inikası $\mathbf{P}$ ölçüsünü $\mathbf{P}_1$ ölçüsünə çevirir, yəni $\mathbf{P}(\varphi^{-1}A_1)=\mathbf{P}_1(A_1)$ münasibəti ixtiyari $A_1\in\mathscr{A}_1$ üçün ödənilir;

4) $(\Omega,\,\mathscr{A},\,\mathbf{P})$-də təsir edən $\{T^t\}$ dinamik sistemini (diskret və ya kəsilməz zamanlı) φ inikası $(\Omega_1,\,\mathscr{A}_1,\,\mathbf{P}_1)$-də təsir edən $\{T_1^t\}$ dinamik sisteminə çevirirsə, yəni bütün t qiymətlərində və $\mathbf{P}$ – sanki bütün $\omega\in\Omega$-lar üçün (sıfır ölçülü istisna çoxluq

t-dən asılı ola bilər) $\varphi T^t \omega = T_1^t \varphi\omega$ olarsa, $\{T^t\}$ dinamik sistemi $\{T_1^t\}$ dinamik sisteminə izomorfdur. Adətən, izomorfizm və $\mathrm{mod}\,0$ izomorfizm arasında fərq qoyulmur; $\mathrm{mod}\,0$ izomorfizminin tərifi qeyd olunan izomorfizmin tərifindən onunla fərqlənir ki, Ω, Ω_1 fəzaları burada uyğun olaraq, $\{T^t\}$– və $\{T_1^t\}$– invariant tam ölçülü ixtiyari çoxluqlarla əvəz olunur.

1), 3), 4) şərtləri ödənildikdə, $\{T_1^t\}$ dinamik sistemi $\{T^t\}$ dinamik sisteminin homomorf obrazı (və ya faktor sistem) adlanır. İki sistemdən hər biri digərinin homomorf obrazı olarsa, bu sistemlər zəif homomorf sistemlər adlanır (bax, [1]).

Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və ζ bu fəzada təyin olunmuş ixtiyari təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda ζ_t təsadüfi prosesinin realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmələr $\{T^t\}$ sisteminin homomorf obrazı olan $\{T_1^t\}$ dinamik sistemini əmələ gətirir, burada $\zeta_t(\omega) = \zeta(T^t\omega)$, $\omega \in \Omega$. Bu sistemlər, yalnız və yalnız, o halda izomorfdurlar ki, bütün ζ_t-lərin doğurduğu σ – cəbr sıfır ölçülü çoxluq dəqiqliyi ilə $\mathcal{A}$ ilə üst-üstə düşsün. Belə hal, bir qayda olaraq, qiymətləri çoxluğu hesabi, bəzi hallarda isə sonlu olan ζ təsadüfi kəmiyyətlərinin sinfində alına bilinir (bax, [2] – [4]). Əgər $\{T^t\}$ sisteminin özü hər hansı dar mənada stasionar Y_t təsadüfi prosesinin realizasiyaları fəzasında yerinidəyişmələr nəticəsində doğurulmuş olarsa, onda $\{T^t\}$-ni $\{T_1^t\}$-ə keçirən inikasa ζ_t prosesinin realizasiyaları ilə Y_t prosesinin realizasiyalarının yerinidəyişməsi ilə uzlaşdırılmış kodlama (stasionar) kimi baxmaq olar. Əgər bu halda birqiymətli dekodlama sanki yəqin mümkün olarsa, onda izomorfizm vardır.

Dinamik sistemin homomorf obrazına keçdikdə, *erqodiklik*, *qarışdırma*, *çoxqat qarışdırma*, K *– qarışma* kimi xassələr saxlanılır, *entropiya* isə artmır; ixtiyari *Bernulli yerinidəyişməsinin* obrazı hər hansı Bernulli yerinidəyişməsinə izomorfdur (bax, [5], [8]).

Dinamik sistemin xassələri və bu sistemin doğurduğu obyektlər (məs., entropiya və spektr kimi) izomorf sistemlərdə üst-üstə düşdüyündən, bunlar metrik invariantlar adlanır. D. s. m. i. problemi ondan ibarətdir ki, bu və ya digər sistemlər sinfi üçün tam və kifayət qədər aydın invariantlar toplusunu tapmaq mümkün olsun. Diskret spektrli dinamik sistem üçün belə toplu bir spektrdən (bax, [6]), Bernulli yerinidəyişmələri üçün entropiyadan ibarət olur (bax, [7], [8]); dinamik sistemlərin bəzi digər sinifləri üçün invariantların tam topluları məlumdur (bax, [8] – [10]).

Əd.: [1] Синай Я. Г., «Доклады АН СССР», 1962, т. 147, № 4, 797–800; [2] Рохлин В. А., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1963, № 1, с. 26–32; 1965, № 13, с. 68–72; [3] Krieger W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 149, № 2, p. 453–64; [4] Krengel U., «J. Math. Anal. and Appl.», 1971, v. 35, № 3, p. 611–20; [5] Ornstein D., «Adv. Math.», 1970, v. 5, № 3, p. 349–64; [6] Neumann J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 3, p. 587–642; [7] Ornstein D., «Adv. Math.», 1970, v. 4, № 3, p. 337–52; [8] Орнстейн Д., Эргодическая теория, Случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [9] Абрамов Л. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 513–30; [10] Вершик А. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 2, с. 255–57.

İZOTROP SONLU FƏZA « изотропное конечное пространство; isotropic random space » – bax, *Monoton paylanma.*

İZOTROP TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « изотропное случайное множество; isotropic random set » – bütün mümkün ola bilən ortoqonal çevirmələrdə paylanması dəyişməz qalan Evklid fəzasında *təsadüfi çoxluqdur*.

İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDAN « изотропное случайное поле; isotropic random field » – müəyyən xarakteristikaları qeyd olunmuş nöqtə ətrafında fırlanmalar qrupuna nəzərən invariant olan Evklid fəzasında *təsadüfi funksiyadır*. Adətən, ilk iki moment – orta qiymət və kovariasiya funksiyasının invariantlığı fərz olunur. Koordinat başlanğıcı ətrafında ixtiyari g fırlanması üçün $\mathbf{M}\,X(t) = \mathbf{M}X(gt)$, $\mathbf{M}\,X(t)X(s) = \mathbf{M}\,X(gt)X(gs)$ şərtlərini ödəyən $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ təsadüfi funksiyası izotrop təsadüfi meydan adlanır. İ. t. m.

$$X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{h(m,\,n)} X_m^l(r)\, S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$$

bərabərliyi ilə ifadə oluna bilinir, burada $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$, – t nöqtəsinin sferik koordinatları, $S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$, – m üstlü sferik harmoniklər, $h(m,\,n)$ belə harmoniklərin sayı, $S_m^l(r)$ elə qarşılıqlı qeyri – korrelyar təsadüfi proseslər toplusudur ki, bunlar üçün

$$\mathbf{M}\,X_m^l(r)X_{m_1}^{l_1}(s) = b_m(r,\,s)\,\delta_m^{m_1}\,\delta_l^{l_1} \qquad (*)$$

bərabərliyi ödənilir, burada δ_i^j Kroneker simvolu, $b_m(r,\,s)$ isə $m \neq 0$ olduqda

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,\,n)\, b_m(r,\,s) < +\infty, \quad b_m(0,\,s) = 0$$

şərtlərini ödəyən müsbət-müəyyən nüvələr ardıcıllığıdır. İ. t. m. müstəvidə

$$X(r,\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \{\, X_k^1(r)\cos k\varphi + X_k^2(r)\sin k\varphi\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $X_k^l(r)$, $l = 1,\,2$ (*) şərtini ödəyən təsadüfi proseslər ardıcıllığıdır. Bircins və izotrop təsadüfi meydan, çoxparametrli Levi Braun hərəkəti İ. t. m.-lar sinfindəndir.

Əd.: [1] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980.

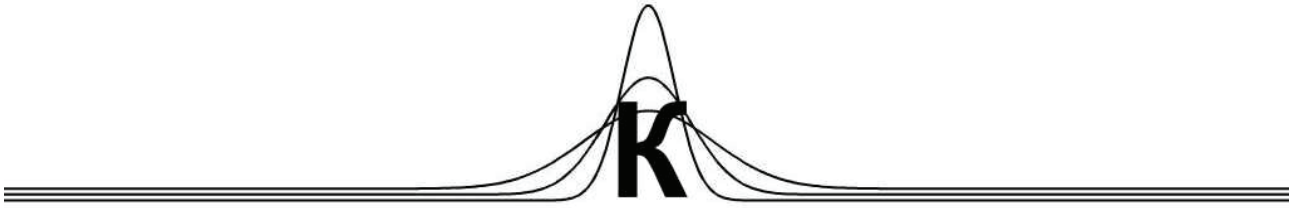
İZOTROP TƏSADÜFİ PROSES « изотропный случайный процесс; isotropic random process » asılı olmayan artımlarlı – riyazi gözləməsi sıfra bərabər, kumulyantı $K(z)$ yalnız $|z| = \sqrt{\sum_{k=1}^{l} z_k^2}$ kəmiyyətindən asılı olan, $\mathbb{R}^d$-dən qiymətlər alan bircins $X(t)$ *təsadüfi*

prosesidir; bu $X(t)$-nin paylanmasının ixtiyari anda $\mathbb{R}^d$-də koordinat başlanğıcı ətrafında fırlanmalara nəzərən i n v a r i a n t olması kimi anlaşılır. Kumulyantı $K(z) = -|z|^2$ olan d – ölçülü $X(t) = \{w_1(t), ..., w_d(t)\}$ Viner prosesi, kumulyantı $K(z) = -c|z|^{\gamma/2}$, $c > 0$, $0 < \gamma < 2$ olan γ üstlü d – ölçülü dayanıqlı izotrop proses belə proseslərdəndir.

JİRİNA PROSESİ « Ирджины процесс; Jirina process » – vəziyyətləri çoxluğu $[0, \infty)$ olan, keçid operatorları ailəsi $t > 0$ müddəti ərzində şaxələnmə şərtini ödəyən, yəni konvolyusiya əməlinə nəzərən birparametrik semi – qrup əmələ gətirən (parametr mənfi olmayan ədədlərin additiv semi – qrupuna aid ilkin vəziyyətdir) *Markov prosesidir*. M. Jirina tərəfindən, [1]-də daxil edilmiş bu proses bəzi seriyalar sxemində adi şaxələnən proseslər üçün limit prosesidir. Bu istiqamətdə sonrakı ümumiləşmələr, qiymətləri ölçülər fəzasından olan, verilmiş fəzada şaxələnən təsadüfi proseslərdir.

Əd.: [1] J i r i n a M., «Чехосл. матем. ж.», 1958, т. 8, № 2, c. 292–313.

JORDAN AYRILIŞI « Жордана разложения; Jordan decomposition » – bax, *Atom*.



KAFİ STATİSTİK QİYMƏT « достаточная оценка; sufficient estimator » – *kafi statistikanın* funksiyası olan *statistik qiymətdir.* Kafi statistika tamamilə məlum olduğu halda K. s. q. özünün riyazi gözləməsinin ixtiyari qabarıq itki funksiyasına nəzərən optimal meylsiz statistik qiymətidir. K. s. q.-lər çoxluğu riskin qabarıq itki funksiyası ilə təyin olunduğu halda tam sinif təşkil edir.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

KAFİ STATİSTİKA « достаточная статистика; sufficient statistics » – şərti ehtimal paylanması baxılan ailənin bütün paylanmaları üçün eyni olan *statistikadır.* Beləliklə, K. s.-nın «hüdudları müstəvisində» araşdırılan ailənin paylanmaları bir-birindən fərqlənmir və ailənin parametri haqqında statistik nəticələr üçün K. s. əksər hallarda daha da mürəkkəb təbiətli ilkin müşahidədə olduğu qədər də informativdir. Bu fakt K. s. vasitəsilə müşahidələrin reduksiya prinsipini izah edir.

$\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta\}$, – x müşahidələrinin $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ ölçülən çoxluğunda ehtimal paylanmaları ailəsi, $\mathbf{M}_\theta$, – $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına nəzərən şərti riyazi gözləmə olsun. Ailənin $\theta \in \Theta$ parametri ixtiyari təbiətlidir. Əgər $\mathbf{M}_\theta |\varphi| < \infty$, $\theta \in \Theta$ şərtini ödəyən ixtiyari $\varphi(x)$ funksiyası (ölçülən) üçün θ-dan asılı olmayan $\hat{\varphi}(t)$ funksiyası varsa ki,

$$\mathbf{M}_\theta (\varphi | T) = \hat{\varphi} \qquad (*)$$

bərabərliyi $\mathbf{P}_\theta$-ya nəzərən şərti yəqin (vahid ehtimalla) ödənilsin, $\theta \in \Theta$, onda t qiymətləri ölçülən $(\mathscr{T}, \mathscr{D})$ fəzasından olan T statistikası $\mathscr{P}$ ailəsi üçün kafi statistika adlanır.

Əgər $\mathscr{P}$ ailəsi dominar ailədirsə, yəni bütün $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$ paylanmaları hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə görə mütləq kəsilməzdirsə, onda T statistikasının məqbulluq kriterisi faktorizasiya teoremi adlanan teoremlə ifadə olunur (bax, [2]): T statistikası, yalnız və yalnız, o halda $\mathscr{P}$ ailəsi üçün K. s.-dır ki, $p(x; \theta) = d\mathbf{P}_\theta / d\mu$ sıxlıq funksiyaları μ-yə nəzərən sanki yəqin

$$p(x; \theta) = R(T(x); \theta) r(x)$$

şəklində faktorizasiya oluna bilinsin.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində K. s.-nın rolu Rao – Blekuell teoremi (bax, [2]) ilə təyin olunur: əgər $g = g(x)$ parametrik $\gamma = \gamma(\theta)$ funksiyasının statistik qiymətidirsə və itki funksiyası $\rho(g, \gamma)$ birinci arqumentinə görə qabarıqdırsa, onda elə $\tilde{g} = \tilde{g}(t)$ statistik qiyməti vardır ki,

$$\mathbf{M}_\theta \rho(\tilde{g}, \gamma(\theta)) \leq \mathbf{M}_\theta \rho(g, \gamma(\theta)), \quad \theta \in \Theta$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Başqa sözlə, K. s.-dan asılı, itki funksiyası qabarıq statistik qiymətlər sinfi tam sinifdir. Dominar ailələr üçün R. Bahadur tərəfindən alınmış, K. s.-nı xarakterizə edən tərs nəticə də doğrudur (bax, [2]). Əgər $\mathscr{P}$ T K. s.-na nəzərən tam sinifdirsə, onda Rao – Blekuell teoremi optimal meylsiz qiymətləndirmə məsələsini həll edir.

Fərz olunur ki, $\mathscr{P}$ dominar ailədir və Θ parametrik çoxluğu ədəd oxunun intervalıdır. Onda $\mathscr{P}$ ailəsi üzərinə qoyulan ümumi şərtlərlə

$$I(\theta) = \mathbf{M}_\theta (\partial \ln p(x; \theta) / \partial \theta)^2$$

– Fişer informasiyası təyin etmək olar; bu informasiya $\rho(x; \theta)$ sıxlıq funksiyalı müşahidədir və o, T statistikasında olan (ixtiyari) $I_T(\theta)$ Fişer informasiyasına analojidir. $I_T(\theta) \leq I(\theta)$ bərabərsizliyi həmişə doğrudur, bu bərabərsizlikdə bütün $\theta \in \Theta$ qiymətləri üçün bərabərlik halı, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, T K. s. olsun (bax, [1]). Bu riyazi dəqiq xülasə müşahidədən alınmış bütün informasiyanın yalnız K. s.-da cəmləşməsi prinsipinin ifadəsidir.

Əgər $\mathscr{P}$ prodakt – ailədirsə, yəni $\mathbf{P}_\theta$, sıxlıq funksiyası $f(y; \theta)$ hər hansı «birölçülü» ailədən olduqda, sıxlıq funksiyası $p(x; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta)$ olan $(y_1, ..., y_n) = x$ təkrar seçiminin paylanmasıdırsa, onda təbii olaraq, elə $f(y; \theta)$-lərlə maraqlanmaq gərəkdir ki, onlar üçün $\mathscr{P}$-nin trivial olmayan K. s.-sı vardır (kobud deyimdə, seçimin özünə heç bir ətrafda ekvivalent olmayan).

Belə vəziyyət requlyarlıq tipli müəyyən şərtlərdə, yalnız seçimlərin eksponensial paylanmalar ailəsindən olduğu halda mümkündür.

Verilmiş $\mathscr{P}$ ailəsi üçün K. s.-lar ailəsinin, əgər $T_1 = h(T_2)$ olarsa, $T_1 < T_2$ təbii qaydası ilə nizamlanması hökm deyildir. Lakin, əgər $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ Borel çoxluqları σ – cəbrli Evklid fəzası, $\mathscr{P}$ ailəsi isə dominar olarsa, onda minimal K. s. həmişə vardır. Requlyar prodakt – ailə üçün minimal K. s. $T(x)$ həmişə hər hansı bir m qiymətində

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} t_1(y_i), ..., \sum_{i=1}^{n} t_m(y_i) \right)$$

toplam statistikası şəklində olur.

K. s. üçün qeyri – ortodoksal tərifl ər də mövcuddur. Məs., Beyes tərifi: θ parametrinin aprior paylanması ixtiyari olduqda, aposterior paylanma yalnız T vasitəsilə x müşahidəsindən asılı olarsa,

T statistikası $\mathscr{P}$ ailəsi üçün K. s.-dır. Kifayət qədər ümumi şərtlərlə K. s.-nın Beyes tərifi (*) münasibətilə verilmiş tərifə ekvivalentdir.

Bütün riyazi statistika üçün fundamental K. s. konsepsiyası R. Fişerə məxsusdur. Onun tərəfindən «K. s.» termini daxil olunmuş, faktorizasiya teoreminin variantı C. Neyman (J. Neymann) tərəfindən 1935-də verilmişdir. İxtiyari dominar ailə üçün bu teorem C. Halmoş (P. Halmos) və L. Sevic (L. Savage) tərəfindən 1949-da isbat edilmişdir. Minimal K. s. anlayışı E. Leman və H. Şeffe (H. Scheffé) tərəfindən daxil olunmuşdur. K. s.-nın tərifinə Beyes yanaşması A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif olunmuşdur.

Əd.: [1] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [2] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Леман Э., Теория статистических оценок, пер. с англ., М., 1991; [5] Bahadur R. R., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, № 3, p. 490–97; [6] Fisher R. A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1922, v. 222, p. 309–68.

KAFİ STATİSTİKA minimal **« достаточная статистика** минимальная; minimal **sufficient statistic »** – bax, *Minimal kafi statistika*.

KAFİ STATİSTİKA zəruri **« достаточная статистика** необходимая; necessary **sufficient statistic »** – bax, *Minimal kafi statistika*.

KAFİ TOPOLOGİYA « достаточная топология; sufficient topology » – lokal qabarıq fəzaya qoşma fəzada aşağıdakı şərti ödəyən topologiyadır. Əgər sıfırda vahidə bərabər olan hər hansı müsbət müəyyən funksional bu topologiyada kəsilməz olarsa, onda bu funksional hər hansı ehtimal ölçüsünün xarakteristik funksionalıdır. T fəzasına qoşma T_k^* fəzasında nöqtəvi yığılma topologiyası $\sigma(T^*,\ T)$ K. t.-dır; bu topologiyada kəsilməz müsbət müəyyən funksiyalara sonluölçülü altfəzaların hesabi birləşmələrində topalanmış ölçülər uyğun olur. K. t.-ya digər misal T^*-da *Sazonov topologiyasıdır.* Əgər K. t. eyni zamanda *zəruri topologiyadırsa*, onda bu topologiya *məqbul topologiyadır.* Sonsuzölçülü Banax fəzasında K. t.-dan güclü topologiya yoxdur.

Əd.: [1] Вершик А. М., Судаков В. Н., «Записки научных семинаров ЛОМИ», 1969, т. 12, с. 7–67; [2] Муштари Д. Х., Вероятности и топология в банаховых пространствах, Казань, 1989.

KAFİLİK statistik oyunlar nəzəriyyəsində **« достаточность** в теории статистических игр; **sufficiency** in the game theory **»** – yalnız *kafi statistikalardan* istifadə olunması hesabına bütün həlledici qaydalar sinfinin daralması prinsipidir. $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasından olan X seçiminin verildiyi fərz olunur, $\theta\in\Theta$, S, – θ parametri üçün kafi statistika olsun. Θ parametrik çoxluğunda ixtiyarı Q aprior paylanması üçün aposterior paylanma seçimdən yalnız S vasitəsilə asılı olacaqdır. Beyes prinsipinə uyğun olaraq (bax, *Statistik oyun*), Beyes minimaks strategiyaları və tam sinif strategiyaları yalnız S-in funksiyaları olacaqdır. Bu onu ifadə edir ki, K. prinsipi istifadə edildikdə heç bir yaxşılaşmayan strategiya kənarda qalmır.

$w(\delta,\ \theta) = w(\delta - \theta)$ şəklində $w(\delta,\ \theta)$ itki funksiyası halında θ ($\Theta\subset\mathbb{R}^k$) parametrinin qiymətləndirilməsi məsələlərində K. prinsipinə tam sinfi effektiv xarakterizə etməyə imkan yaradan daha konstruktiv forma vermək olar, burada $w(u)$, – $\mathbb{R}^k$-da qabarıq funksiyadır.

Doğrudan da, aşağıdakı müddəa doğrudur: ixtiyari $\theta^* = \delta(X)$ həlledici funksiyası (statistik qiyməti) üçün $\theta\in\Theta$ ixtiyarı qiymətində θ^*-dan pis olmayan $\theta_S^* = \mathbf{M}_\theta(\theta^*/S)$ statistik qiyməti vardır, yəni

$$\mathbf{M}_\theta\ w(\theta_S^* - \theta) \le \mathbf{M}_\theta\ w(\theta^* - \theta)\,.$$

Əgər S kafi statistikası tam statistika olarsa, onda meylsiz statistik qiymətlər sinfində müntəzəm ən yaxşı statistik qiyməti birqiymətli olaraq təyin etmək olur.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Заке Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Боровков А. А., Математическая статистика. (Дополнительные главы), М., 1984.

KAHAN DARALMA PRİNSİPİ « Кахана принцип сжатия; Kahane's contraction principle » – təsadüfi sıralar üçün müqayisə prinsipidir: əgər $\{X_k\}$ separabel Banax fəzası B-də asılı olmayan simmetrik təsadüfi elementlərin ardıcıllığı, $\{\lambda_k\}$ həqiqi ədədlərin məhdud ardıcıllığı olarsa və $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ sırası B-də sanki yəqin yığılarsa, onda $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k X_k$ sırası da B-də sanki yəqin yığılır. Əgər $\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n\ge 1\right\}$ ardıcıllığı B-də sanki yəqin məhdud olarsa, onda $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k X_k,\ \ n\ge 1\right\}$ ardıcıllığı da B-də sanki yəqin məhduddur. Rademaher təsadüfi ardıcıllıqları üçün K. d. p. təsadüfi Furye sıralarının məhdudluğu və yığılma problemlərinin öyrənilməsində, [1]-də C. – P. Kahan tərəfindən müəyyən olunmuşdur və sistematik tətbiq olunmuşdur. Sonralar bu prinsip bir çox alimlər tərəfindən dəqiqləşdirilmiş və ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [2] Hoffmann-Jørgensen J., «Studia Math.», 1974, v. 52, № 2, p. 159–89.

KALİBRLƏMƏ MODELİ statistik mexanikanın **« калибровочная модель** статистической механики; **gauge model** of statistical mechanics**»** – kvant Evklid kalibrlənmə meydanının elə şəbəkəvari modelidir, bu modelin öyrənilməsi münasib Gibbs statistik ansamblının qurulmasına və öyrənilməsinə kimi sadələşdirilir.

Kompakt kalibrləmələr qrupu G ilə verilən şəbəkəvari kalibrlənmə meydanının konfiqurasiyası d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin (istiqamətlənmiş) τ tillərinin çoxluğunda təyin olunmuş, G qrupundan qiymətlər alan və $g_{-\tau} = g_\tau^{-1}$ şərtini ödəyən $g = \{g_\tau\}$ funksiyasına deyilir, burada $(-\tau)$, – $\mathbb{Z}^d$-nin τ istiqamətinə əks istiqamətli tildir. Tillərin ixtiyari sonlu çoxluğu Λ üçün Λ-da «meydan əməli» (rus. «действие поля») $S_\Lambda(g)$

$$S(g) = \sum_{p:\,\partial p\subset\Lambda} f(g_p) \qquad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada cəmlənmə $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin iki-ölçülü (istiqamətlənmiş) p üzləri üzrə aparılır, bu üzlərin sərhədləri Λ-dandır, $g_p = \prod_{\tau \in \partial p} g_\tau$ və burada vurma əməli p üzünün sərhədinin hər hansı birindən keçilmək qaydası ilə aparılır, f funksiyası isə G-nin qoşma elementlərinin siniflərində sabit olan, $f(g) = f(g^{-1})$ şərtini ödəyən, G-də verilmiş funksiyadır. (*)-nun köməyilə meydanın konfiqurasiyalarının fəzası Ω-da

$$d\mu_\Lambda / d\mu^0 = \frac{1}{\mathbb{Z}_\Lambda} \exp\{-S_\Lambda(g)\}$$

düsturu vasitəsilə sonlu Gibbs paylanması μ_Λ daxil olunur, burada $d\mu^0 = \prod_\tau dx_\tau$, – G-də normalanmış χ Haar ölçüsünün hesabi sayda ekzemplyarlarının (bütün istiqamətlənmiş tillər üzrə) hasilidir, $\mathbb{Z}_\Lambda$ normalayıcı vuruqdur. $\mu = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^\nu} \mu_\Lambda$ – limit Gibbs paylanması (*) əməli ilə kalibrlənmə meydanını təyin edir (Yanq – Mills meydanı; bax, [1]). (*)-dakı f funksiyası əksər hallarda

$$f(g) = (\chi_\alpha(g) + \chi_\alpha(g^{-1})) / e^2$$

şəklində seçilir, burada χ_α, – G qrupunun hər hansı «ən sadə» ayrılmayan ifadəsinin xarakteridir, e – qarşılıqlıtəsir konstantıdır (Vilson əməli; bax, [2]).

Oxşar surətdə daha ümumi kalibrləmə modelləri daxil olunur və araşdırılır; belə modellər «materiya meydanı» $\varphi = \{\varphi_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ olan kalibrlənmə meydanının qarşılıqlı təsirini təsvir edir, burada φ_x, – G qrupunun $g \to U_g$ ifadəsi təsir edən hər hansı $\mathscr{M}$ fəzasından qiymətlər alır (Higgs modeli; bax, [1]).

Yanq – Mills kalibrləmə meydanı (həm də Higgs modelindəki meydanlar)

$$g_\tau \to \gamma(x_1) g_\tau \gamma^{-1}(x_2), \quad \tau = \{x_1, x_2\}$$

kalibrləmə çevirmələrinin qrupuna nəzərən invariantdır (və $\varphi_x \to u_{\gamma(x)} \varphi_x$ Higgs modellərində «materiya meydanı» üçün, burada $\gamma = \{\gamma_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$ – qiymətləri G-dən olan $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində ixtiyari funksiyadır. Kalibrləmə modellərində çox zəngin simmetriya qrupu olduğundan, bir sıra spesifik hadisə və proseslər baş verir ki, bunlar kvant meydan nəzəriyyəsinin bir çox fiziki effektlərini izah etməyə imkan verir.

Əd.: [1] Зайлер Э., Калибровочные теории, пер. с англ., М., 1985; [2] Wilson K., «Phys. Rev.», D., 1974, v. 10, № 8, p. 2445–59; [3] Osterwalder K., Seiler E., «Ann. Phys.», 1978, v. 110, № 2, p. 440–71.

KALMAN FİLTRİ « Калмана фильтр; Kalman filter » – $w = \{w(t), t \geq 0\}$ Viner prosesi üzrə

$$d\zeta_t = a(t)\zeta_t dt + b(t) dw_t$$

İto stoxastik tənliyi ilə təyin olunan $\zeta = \{\zeta_t, t \geq 0\}$ Qauss diffuzion prosesində ζ_t (prosesin t anındakı qiyməti – təsadüfi kəmiyyət) üçün Y_s, $0 \leq s \leq t$ müşahidələri üzrə kvadratik orta mənada statistik $\pi_t(Y)$ qiymətinin hesablanması alqoritmidir. Bu halda $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ prosesi üçün w Viner prosesindən asılı olmayaraq, $\widetilde{w} = \{\widetilde{w}_t, t \geq 0\}$ Viner prosesi üzrə

$$dY_t = A(t)\zeta_t dt + B(t) d\omega_t$$

İto differensialı təyin oluna bilinir və $t > 0$,

$$\int_0^t [|a(s)| + A^2(s)]\, ds < \infty, \quad \inf_{t \geq 0} B^2(t) > 0$$

olması şərtilə o, ζ ilə birgə Qauss prosesidir; bu proses

$$d\pi_t(Y) = a(t)\pi_t(Y)dt + \frac{P_t A(t)}{B^2(t)} [dY_t - A(t)\pi_t(Y)dt] \quad (1)$$

$$\frac{dP_t}{dt} = 2a(t)P_t + b^2(t) - \frac{P_t^2 A^2(t)}{B^2(t)} \quad (2)$$

tənlikləri vasitəsilə verilir. (1) və (2) tənlikləri

$$\left.\begin{aligned} \pi_0(Y) &= \mathbf{M}\zeta_0 + \frac{\operatorname{cov}(\zeta_0, Y_0)}{\operatorname{cov}(Y_0, Y_0)}(Y_0 - \mathbf{M}Y_0), \\ P_0 &= \operatorname{cov}(\zeta_0, \zeta_0) - \frac{\operatorname{cov}^2(\zeta_0, Y_0)}{\operatorname{cov}(Y_0, Y_0)}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərilə həll olunur; burada $\frac{0}{0} = 0$, $P_t = \mathbf{M}(\zeta_t - \pi_t(y))^2$.

Əgər ζ və Y prosesləri qeyri – korrelyar geniş mənada w və $\widetilde{w}$ Viner prosesləri ilə qeyd olunmuş münasibətlərlə təyin olunarsa və ζ_0, Y_0 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikinci momentləri vardırsa, w, $\widetilde{w}$ ilə qeyri – korrelyardırlarsa, onda (1) və (2) tənlikləri (3) başlanğıc şərtlərilə yalnız kvadratik orta mənada xətti optimal $\pi_t(Y)$ statistik qiymətini və qiymətləndirmənin kvadratik orta xətası P_t-ni təyin edir.

Bax, *Xətti filtr.*

Əd.: [1] Калман Р. Е., Бьюси Р. С., «Технич. механика», сер. Д., 1961, № 1, с. 123–41; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

KALMAN – BYUSİ METODU « Калмана – Бьюси метод; Kalman – Busy method » – bax, *Təsadüfi proses*; filtrasiya.

KANAL additiv küylü **« канал** с аддитивным шумом; **channel** with additive noise **»** – ötürülən siqnal üzərinə asılı olmayan additiv maneə əlavə olunan rabitə *kanalıdır.* Additiv küylü K. halında çıxış siqnalı $\widetilde{Y} = Y + Z$ şəklində olur, burada Y – giriş siqnalı, Z isə additiv küy adlanan Y-dən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətdir (və ya təsadüfi prosesdir). Adətən, Z təsadüfi kəmiyyəti normal qanunla paylanmış olduğu halda (və ya Z Qauss prosesi olduqda) additiv küylü K.-lara baxılır. Çoxötürücü additiv küylü K. və çoxgirişli additiv küylü K. analoji təyin olunur. Məs., çoxgirişli (ikigirişli) additiv küylü K. $\widetilde{Y} = Y_1 + Y_2 + Z$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada Y_1 və Y_2 uyğun olaraq kanalın birinci və ikinci girişindəki siqnallar, Z isə Y_1 və Y_2-dən asılı olmayan additiv küydür.

Əd.: [1] Галлер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

KANAL asimmetrik « **канал** асимметрический; asymmetric **channel** » – bax, *Genişyayımlı kanal.*

KANAL asinxron « **канал** асинхронный; asynchronous **channel** » – bax, *Çoxgirişli kanal.*

KANAL bircins « **канал** однородный; homogeneous **channel** » – bax, *Kanal* yaddaşsız.

KANAL çoxgirişli « **канал** множественного доступа; multiple access **channel** » – bax, *Çoxgirişli kanal*.

KANAL çoxkomponentli « **канал** многокомпонентный; multiterminal **channel** » – bax, *Çoxkomponentli kanal*.

KANAL çoxtərəfli « **канал** многосторонний; multiway **channel** » – bax, *Çoxtərəfli kanal*.

KANAL determinik « **канал** детерминированный; deterministic **channel** » – bax, *Determinik kanal*.

KANAL genişyayımlı « **канал** широковещательный; broadcast **channel** » – bax, *Genişyayımlı kanal*.

KANAL ikilik simmetrik « **канал** двоичный-симметричный; binary symmetric **channel** » – bax, *İkilik simmetrik kanal*.

KANAL interferens « **канал** интерференционный; interference **channel** » – bax, *İnterferens kanal*.

KANAL kvant rabitə kanalı « **канал** связи квантовый; quantum communication **channel** » – bax, *Kvant rabitə kanalı.*

KANAL(ı) Qauss « **канал** гауссовский; Gaussian **channel** » – bax, *Qauss kanalı*.

KANAL qeyri–antisipativ « **канал** безпредвосхищения; non–antisipativ **channel** » – bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi.*

KANAL; ötürücülük qabiliyyəti « **канал;** пропускная способность; **channel** capacity » – rabitə kanalı ilə informasiyanın maksimal mümkün sürətlə ötürülmə imkanlarının nəzəri – informasion ölçüsü olub, kanalın əsas xarakteristikalarından biridir.

Bax, *Ötürücülük*, *qabiliyyəti kanalın*.

KANAL pisləşmiş « **канал** ухудшенный; degraded **channel** » – bax, *Genişyayımlı kanal*.

KANAL; rabitə kanalı « **канал** связи; communication **channel** » – real rabitə kanalının riyazi təsvirində istifadə edilən nəzəri – informasion termindir, yəni fiziki rabitə xətti və ötürücüdən qəbuledicyə qədər siqnallar yayılan mühit ilə məlumatların ötürücüdən qəbuledicyə qədər ötürülməsi üçün texniki qurğular toplusudur. Rabitə K. informasiyanın ötürmə nəzəriyyəsində baxılan informasiyanı ötürmə sistemlərinin əsas tərkib hissələrindən biridir.

Ötürücüdən qəbuledicyə informasiyanın bir istiqamətdə ötürülməsi üçün bir ötürücü və bir qəbuledicidən ibarət rabitə K.: – iki $(\mathscr{X},\ \mathbf{S}_{\mathscr{X}})$, $(\widetilde{\mathscr{X}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ ölçülən fəzaları (yəni uyğun olaraq ötürülən və qəbuledici ilə qəbul edilən siqnallar fəzaları); qeyd olunmuş $A\in \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}}$ üçün $\mathbf{S}_{\mathscr{X}}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən və qeyd olunmuş $x\in X$ üçün $(\widetilde{\mathscr{X}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ fəzasında ehtimal ölçüsü olan $Q(x,\ A),\ x\in\mathscr{X},\ A\in\mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}}$ keçid funksiyası və $(\mathscr{X},\ \mathbf{S}_{\mathscr{X}})$ fəzasında bütün ehtimal ölçülərinin fəzasında V altçoxluğundan ibarət toplu ilə verilir. $Q(x,\ A)$ funksiyası ötürücünün ötürdüyü siqnalın x olduğu şərtinə nəzərən qəbuledicinin qəbul etdiyi siqnalın şərti paylanmasıdır; V isə ötürücü ilə ötürülən siqnalın paylanmasına məhdudiyyəti təyin edir. Hər hansı $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş X və $\widetilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri uyğun olaraq $(\mathscr{X},\ \mathbf{S}_{\mathscr{X}})$ və $(\widetilde{\mathscr{X}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ fəzalarından qiymətlər alırsa və ixtiyari $A\in\mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}}$ üçün $\mathbf{P}\{\widetilde{\mathscr{X}}\in A\,|\,X=x\}=Q(x,\ A)$ şərti ehtimalı sanki yəqin və X-in paylanması V çoxluğundandırsa, X və $\widetilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri $(Q,\ V)$ kanalı ilə əlaqəlidir, deyilir.

Tətbiqi məsələlərdə ən çoxu $(\mathscr{X},\ \mathbf{S}_{\mathscr{X}})$ və $(\widetilde{\mathscr{X}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}})$ $[a,\ b]$ parçasında təyin olunmuş ölçülən funksiyalar fəzaları olduqda və bu funksiyalar ölçülən silindrik çoxluqların doğurduğu σ – cəbrləri ilə verilmiş hər hansı $(\mathscr{Y},\ \mathbf{S}_{\mathscr{Y}})$, $(\widetilde{\mathscr{Y}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər aldığı hallardakı rabitə R. k.-larına baxılır. Bu halda

$$(\mathscr{X},\ \mathbf{S}_{\mathscr{X}})=\left(\mathscr{Y}[a,\ b],\ \mathbf{S}_{\mathscr{Y}[a,\ b]}\right),$$

$$(\widetilde{\mathscr{X}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{X}}})=\left(\widetilde{\mathscr{Y}}[a,\ b],\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{Y}}[a,b]}\right)$$

işarələmələri qəbul edilir və $[a,\ b]$ parçasında kəsilməz zamanlı rabitə K.-na baxılır;

$$Y=\{Y(t),\ t\in[a,\ b]\}\quad\text{və}\quad\widetilde{Y}=\{\widetilde{Y}(t),\ t\in[a,\ b]\},$$

uyğun olaraq $(\mathscr{Y},\ \mathbf{S}_{\mathscr{Y}})$, $(\widetilde{\mathscr{Y}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ fəzalarından qiymətlər alan təsadüfi proseslərdir, $Y(t)$ və $\widetilde{Y}(t)$ isə uyğun olaraq t anında ötürülmüş və qəbul olunmuş siqnal kimi interpretasiya olunur.

Analoji olaraq, diskret zamanlı K.-ın giriş və çıxışında sıqnallar, komponentləri uyğun olaraq $(\mathscr{Y},\ \mathbf{S}_{\mathscr{Y}})$ və $(\widetilde{\mathscr{Y}},\ \mathbf{S}_{\widetilde{\mathscr{Y}}})$ ölçülən fəzalarından qiymətlər alan $\mathbf{Y}_k^n=(Y_k,\ Y_{k+1},\ ...,\ Y_n)$ və $\widetilde{\mathbf{Y}}_k^n=(\widetilde{Y}_k,\ \widetilde{Y}_{k+1},\ ...,\ \widetilde{Y}_n)$ təsadüfi vektorlarıdır; bu halda Y_j və $\widetilde{Y}_j$, – $j\tau$ anında ötürülmüş və qəbuledilmiş siqnallardır və $\tau=\text{const}$ rabitə K. ilə ötürülən iki ardıcıl siqnal arasındakı müddətdir.

Bir çox hallarda yarısonsuz və ya $(-\infty,\ \infty)$ intervalında kəsilməz və ya diskret t zamanlı rabitə K.-larına da baxılır.

R. k.-ları Q şərti paylanmalarının növündən və V-nin məhdudiyyətlərindən asılı olaraq müxtəlif siniflərə bölünür (bax, məs., *Kanal* yaddaşsız, *Kanal* sonlu yaddaşlı, *Kanal*

vəziyyətləri sayı sonlu və s.). Rabitə K.-nın əsas xarakteristikası kanalın ötürücülük qabiliyyətidir ki, bu isə rabitə K. ilə ötürülən informasiyanın mümkün ola bilən maksimal surəti ilə xarakterizə olunur (bax, *İnformasiyanın ötürülmə sürəti*).

Rabitə K.-nın yuxarıda verilmiş tərifinin informasiya ötürülməsinin daha ümumi və mürəkkəb sistemlərinə uyğun müxtəlif ümumiləşmələri mümkündür (bax, məs., *Kanal tərs rabitəli*, *Çoxkomponentli kanal*, *Çoxtərəfli kanal*).

Əd.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Добрушин Р. Л., « Успехи матем.наук », 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [4] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [5] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [7] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., 1985; [8] Шеннон К., Работы по теории и кибернетике, пер. с англ., 1963, с. 243–332.

KANAL semideterminik « **канал** полудетерминированный; semideterministic **channel** » – bax, *Semideterminik kanal*.

KANAL sıfır xətalı « **канал** с нулевой ошибкой; zero-error **channel** » – bax, *Ötürücülük qabiliyyəti kanalın.*

KANAL simmetrik « **канал** симметричный; symmetric **channel** » – bax, *Simmetrik kanal*.

KANAL sinxron « **канал** синхронный; synchronous **channel** » – bax, *Çoxgirişli kanal*.

KANAL sinxronizasiya xətalarlı « **канал** с ошибками синхронизации; **chanell** with synchronization » – giriş və çıxışında siqnallarının düzgün növbələnmədiyi *rabitə kanalıdır*. Diskret zamanlı rabitə kanalları üçün simvolların əvəz olunması, itməsi və yerdəyişmələri – sinxronizasiya xətalarıdır. Əgər kanalın çıxışında $(\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_{n'})$ ardıcıllığı –

$j < i$ olduqda $n' = n - c$ və $c = 1,\ \widetilde{y}_j = y_j;$

$j > i$ olduqda $c = -1,\quad \widetilde{y}_i = a,\ \widetilde{y}_{i+1} = y_i,\quad \widetilde{y}_{j-c} = y_j$

– şərtilə alınmışdırsa, onda rabitə kanalının girişində daxil olan $(y_1, ..., y_n)$ ardıcıllığında i-ci simvol ötürülərkən itmişdir, (a simvolu ilə əvəz olunma) deyilir.

Sinxronizasiya xətaları olan K. modellərindən ən sadəsi – t, $t = 0, 1, ...$ anlarında y_i simvolunun ötürülməsi ilə əlaqədar p, p_- və p_+ ehtimalları ilə bir-birindən asılı olmayan üç hadisədən biri baş verə bilər: simvol düzgün ötürülmüşdür; simvol itmişdir; $p(a)$ ehtimalı ilə a simvolu əvəz olunmuşdur, belə ki, y_i simvolu $t + 1$ anında ötürülməlidir. Sinxronizasiya xətalarlı K.-ın daha mürəkkəb modelləri ötürüləcək elementin (simvollarının yerdəyişmələrinə uyğun) təsadüfi seçilməsi olan, ötürüləcək simvolun təhrifi olan modellərdir.

Sinxronizasiya xətalarlı K. bir riyazi model kimi elm və texnikanın müxtəlif sahələrində: rabitə texnikasında, informatikada, EHM şəbəkələrində və s. sahələrdə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Стиффлер Дж. Дж., Теория синхронной связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Левенштейн В. И., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 845–48; [3] Мизин И. А., Богатырев В. А., Кулешов А. П., Сети коммутации пакетов, М., 1986; [4] Добрушин Р. Л., «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, № 4 с. 18–36; [5] Стамблер С. З., «Проблемы передачи информации», 1970, т. 6, № 3, с. 43–49.

KANAL sonlu yaddaşlı « **канал** с конечной памятью; finite-memory **channel** » – ixtiyari t və $\tau > 0$ qiymətlərində $[t,\ t + \tau]$ intervalındakı çıxış siqnallarının statistik xassələri yalnız $(t - m,\ t + \tau]$ intervalındakı giriş siqnallarından asılı olan rabitə *kanalıdır*, bu şərtlə ki, zaman uzunluğu heç olmasa m-ə bərabər intervallarda baxılan hadisələr, şərti asılı olmayan hadisələr (girişdə siqnalların verilmiş qiymətlərində) olsun. Aşağıda diskret zamanlı K. halında sonlu yaddaşlı stasionar kanalın ciddi tərifi verilir, bu kanalın giriş və çıxış siqnalları uyğun olaraq, $Y = (..., Y_1,\ Y_0,\ Y_1, ...)$ və $\widetilde{Y} = (..., \widetilde{Y}_1,\ \widetilde{Y}_0,\ \widetilde{Y}_1, ...)$ təsadüfi ardıcıllıqlarıdır; Y_i və $\widetilde{Y}_i$ komponentləri uyğun olaraq $\mathscr{Y}$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}$ sonlu çoxluqlarından qiymətlər alırlar. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, belə kanal sonlu yaddaşlı kanal adlanır:

1) elə qeyd olunmuş müsbət m ədədi vardır ki, ixtiyari $y_i' = y_i \in \mathscr{Y},\quad i = t - m, ..., t + n - 1$ qiymətlərində ixtiyari $\widetilde{y}_t, ..., \widetilde{y}_{t+n-1} \in \widetilde{\mathscr{Y}}$ qiymətləri üçün

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Y}_t = \widetilde{y}_t, ..., \widetilde{Y}_{t+n-1} = \widetilde{y}_{t+n-1} \mid Y_k = y_k,\ k = ..., -1, 0, 1, ...\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\widetilde{Y}_t = \widetilde{y}_t, ..., \widetilde{Y}_{t+n-1} = \widetilde{y}_{t+n-1} \mid Y_k = y_k',\ k = ..., -1, 0, 1, ...\}$$

bərabərliyi ödənilir;

2) $j + m < k$ olduqda ixtiyari $\widetilde{y}_i, ..., \widetilde{y}_j \in \widetilde{\mathscr{Y}}$ və $\widetilde{y}_k, ..., \widetilde{y}_n \in \widetilde{\mathscr{Y}}$ qiymətləri və bütün $y_l \in \mathscr{Y},\ l = ..., -1, 0, 1, ...$ qiymətləri üçün

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Y}_i = \widetilde{y}_i, ..., \widetilde{Y}_j = \widetilde{y}_j;$$

$$\widetilde{Y}_k = \widetilde{y}_k, ..., \widetilde{Y}_n = \widetilde{y}_n \mid \widetilde{Y}_l = \widetilde{y}_l,\ l = ..., -1, 0, 1, ...\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\widetilde{Y}_i = \widetilde{y}_i, ..., \widetilde{Y}_j = \widetilde{y}_j \mid \widetilde{Y}_l = \widetilde{y}_l,\ l = ..., -1, 0, 1, ...\} \times$$

$$\times\ \mathbf{P}\{\widetilde{Y}_k = \widetilde{y}_k, ..., \widetilde{Y}_n = \widetilde{y}_n \mid \widetilde{Y}_l = \widetilde{y}_l,\ l = ..., -1, 0, 1, ...\}$$

münasibəti doğrudur.

Verilmiş kanal üçün yuxarıdakı iki şərti ödəyən ən kiçik m kəmiyyəti kanalın yaddaş (müddəti) kəmiyyəti adlanır, $m = 0$ olduqda, yəni sıfır yaddaşlı kanal, sadəcə yaddaşsız *kanal* adlanır.

Əd.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [3] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 17–75.

KANAL stasionar « **канал** стационарный; stationary **channel** » – bax, *Kanal* yaddaşsız.

KANAL; şəbəkə « **канал;** сеть; network of **channel** » – bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkəsi.*

KANAL tərs rabitəli « **канал** с обратной связью; **channel** with feedback » – kanalın girişində ixtiyari zaman anında, kanalın bu ana qədər çıxışında alınmış siqnallar haqqında müəyyən informasiya məlum olan *rabitə kanalıdır*; bu informasiya kanalla ötürüləcək növbəti siqnalın seçilməsində istifadə oluna bilər. Yaddaşsız kanal üçün tərs rabitəli K.-ın ötürücülük qabiliyyəti elə bu kanalın tərs rabitəli olmadığı haldakı ötürücülük qabiliyyəti ilə üst-üstə düşür. Ümumi halda tərs rabitənin olması K.-ın ötürücülük qabiliyyətini

artıra bilər. Bəzi çoxtərəfli K.-lar üçün tərs rabitənin olması ötürücülük qabiliyyəti oblastını hətta yaddaşsız halda belə artıra bilər. Tərs rabitənin olması, yüksəkeffektli kodlama və dekodlama alqoritmlərinin qurulmasını olduqca sadələşdirməyə imkan verir.

Əd.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 464–87; [2] Турин Дж., Лекции о цифровой связи, пер. с англ., М., 1972.

KANAL vəziyyətləri sayı sonlu **« канал** с конечным числом состояний; **channel** with finite number of states **»** – mümkün vəziyyətləri sayı sonlu kanalın t anında çıxış siqnalının statistik xassələri elə bu anda kanala giriş siqnalı və əvvəlki zaman anında kanalın vəziyyəti ilə təyin olunan rabitə *kanalıdır*. Vəziyyətləri sayı sonlu K.-ı sonlu ehtimal avtomatı ilə verilmiş kanal kimi də təyin etmək olar.

Diskret zamanlı, giriş və çıxış siqnallarının komponentlərinin qiymətlərinin sonlu fəzaları $\mathscr{Y}$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}$ olan vəziyyətləri sayı sonlu bircins kanalın ciddi tərifi aşağıda şərh olunmuşdur.

$\mathscr{S}$, – K.-ın vəziyyətləri çoxluğu adlanan sonlu çoxluq olduqda, $q(y,\ s';\ \widetilde{y},\ s'')$, $y\in\mathscr{Y}$, $\widetilde{y}\in\widetilde{\mathscr{Y}}$, $s', s''\in\mathscr{S}$ funksiyalarının və $\{p_{s_0},\ s_0\in\mathscr{S}\}$ ehtimal paylanmalarının verildiyi fərz olunur. $q(y,\ s';\ \widetilde{y},\ s'')$ funksiyası k anında vəziyyətləri sayı sonlu K.-ın çıxışında $\widetilde{y}$ siqnalının alınacağı və kanalın s'' vəziyyətinə keçəcəyinin, y siqnalı ötürüldüyü halda və əvvəlki $(k-1)$ anında kanalın s' vəziyyətində olması şərtinə nəzərən şərti ehtimaldır. $\{p_{s_0},\ s_0\in\mathscr{S}\}$ paylanması başlanğıc 0 anında K.-ın başlanğıc vəziyyətinin ehtimal paylanmasıdır. $Q_n(y^n,\ s_0;\ \widetilde{y}^n,\ s_n)$ funksiyasının aşağıdakı bərabərliklərlə rekurrent olaraq təyin olunduğu fərz edilir:

$$Q_n(y^n,\ s_0;\ \widetilde{y}^n,\ s_n) =$$
$$= \sum_{s_{n-1}\in\mathscr{S}} q(y_n,\ s_{n-1};\ \widetilde{y}_n,\ s_n)\, Q_{n-1}(y^{n-1},\ s_0;\ \widetilde{y}^{n-1},\ s_{n-1})$$
$$Q_1(y,\ s_0;\ \widetilde{y},\ s_1) = q(y,\ s_0;\ \widetilde{y},\ s_1),$$
$$y^n = (y_1, ..., y_n),\ y^{n-1} = (y_1, ..., y_{n-1}),\ y_i\in\mathscr{Y},$$
$$\widetilde{y}^n = (\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_n),\ \widetilde{y}^{n-1} = (\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_{n-1}),$$
$$\widetilde{y}_i\in\widetilde{\mathscr{Y}},\ i = 1, ..., n:\ s_k\in\mathscr{S},\ k = 0, 1, ..., n.$$
$$Q_n(y^n,\ s_0;\ \widetilde{y}^n) = \sum_{s_n\in\mathscr{S}} Q_n(y^n,\ s_0;\ \widetilde{y}^n,\ s_n)$$

olsun. Onda vəziyyətləri sayı sonlu K.-ın n uzunluqlu parçasının keçid funksiyası $Q_n(y^n, \widetilde{y}^n) = \mathbf{P}\{\widetilde{Y}^n = \widetilde{y}^n \mid Y^n = y^n\}$ ixtiyari n üçün tərifə görə

$$Q_n(y^n,\ \widetilde{y}^n) = \sum_{s_0\in\mathscr{S}} p_{s_0}\, Q_n(y^n,\ s_0;\ \widetilde{y}^n)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $Y^n = (Y_1, ..., Y_n)$ və $\widetilde{Y}^n = (\widetilde{Y}_1, ..., \widetilde{Y}_n)$ K.-ın giriş və çıxış siqnallarının n uzunluqlu parçalarıdır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации, пер. с. англ., М., 1974; [2] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967.

KANAL yaddaşsız **« канал** без памяти; memoryless **channel »** – ixtiyari qeyd olunmuş anda siqnalın çıxışdakı statistik xassələri yalnız bu anda girişdə ötürülmüş siqnal ilə təyin olunan rabitə *kanalıdır*. Giriş və çıxış siqnalları $Y = (Y_1, Y_2, ...)$ və $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, ...)$ təsadüfi ardıcıllıqları olan diskret zamanlı rabitə K.-ı üçün

$$\mathbf{P}\{\widetilde{Y}_1 = \widetilde{y}_1, ..., \widetilde{Y}_n = \widetilde{y}_n \mid Y_1 = y_1, ..., Y_n = y_n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\widetilde{Y}_1 = \widetilde{y}_1 \mid Y_1 = y_1\} \cdot ... \cdot \mathbf{P}\{\widetilde{Y}_n = \widetilde{y}_n \mid Y_n = y_n\}$$

bərabərliyi ixtiyari n və ixtiyari $y_i\in\mathscr{Y}$, $\widetilde{y}_i\in\widetilde{\mathscr{Y}}$, $i = 1, ..., n$ qiymətlərində ödənilərsə, belə kanal yaddaşsız kanal adlanır, burada Y_i və $\widetilde{Y}_i$, $i, j = 1, 2, ...$ uyğun olaraq $\mathscr{Y}$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}$ sonlu çoxluqlarından qiymətlər alır. «Yaddaşsız» sözü o faktı vurğulayır ki, kanal növbəti ötürmədə əvvəlki ötürmələrin nəticələrini xatırlamır. Əgər $\mathbf{P}\{\widetilde{Y}_i = \widetilde{y}_i \mid Y_i = y_i\}$ şərti ehtimalları i-dən asılı olmazsa, yaddaşsız K. stasionar (və ya bircins) yaddaşsız kanal adlanır. Stasionar yaddaşsız K. sonlu və ya hesabi $\mathscr{Y}$ və $\widetilde{\mathscr{Y}}$ sonlu çoxluqları ilə

$$\|q(y,\ \widetilde{y})\|,\ y\in\mathscr{Y},\ \widetilde{y}\in\widetilde{\mathscr{Y}}$$

keçid matrisləri ilə tamamilə təyin olunur, burada $q(y,\ \widetilde{y}) = \mathbf{P}\{\widetilde{Y}_i = \widetilde{y} \mid Y_i = y\}$, $i = 1, 2, ...$.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с. англ., М., 1974; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

KANONİK KƏMİYYƏT « каноническая величина; canonical variable » – bax, *Kanonik korrelyasiyalar analizi.*

KANONİK KORRELYASİYA « каноническая корреляция; canonical correlation » – təsadüfi kəmiyyətlər çoxluqlarının xətti funksiyaları arasında, korrelyasiya əmsallarının maksimal mümkün qiymətlərilə xarakterizə olunan *korrelyasiyadır.* K. k. nəzəriyyəsində $\xi_1, ..., \xi_s$ və $\xi_{s+1}, ..., \xi_{s+t}$, $s\le t$ təsadüfi kəmiyyətləri xətti olaraq kanonik təsadüfi kəmiyyətlər adlanan elə $\eta_1, ..., \eta_s$ və $\eta_{s+1}, ..., \eta_{s+t}$ kəmiyyətlərinə çevrilir ki: 1) η_i təsadüfi kəmiyyətlərinin hamısının riyazi gözləməsi sıfra, dispersiyası 1-ə bərabərdir, 2) iki çoxluqdan hər birində η_i kəmiyyətləri korrelyar deyildir, 3) birinci çoxluqdan ixtiyari η kəmiyyəti ikinci çoxluqdan bir təsadüfi kəmiyyətlə korrelyardır, 4) müxtəlif çoxluqlardan olan η təsadüfi kəmiyyətləri arasında sıfırdan fərqli korrelyasiya əmsalları maksimal qiymətə malikdir.

$s = 1$ olduğu xüsusi halda, K. k. ξ_1 və $\xi_2, ..., \xi_{1+t}$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında toplam korrelyasiyadır. Kanonik təsadüfi kəmiyyətlərə çevirmə kvadratik formaların kanonik şəklə çevrilməsi cəbri məsələsinə uyğundur. K. k. analiz edildiyi zaman ola bilər ki, iki çoxluq arasında qarşılıqlı əlaqə bir neçə kanonik təsadüfi kəmiyyət arasındakı korrelyasiya ilə tamamilə ifadə oluna bilinsin.

Bax, *Kanonik korrelyasiyalar analizi.*

Əd.: [1] Hotelling N., «Biometrica», 1936, v. 28, p. 321–77; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический

анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

KANONİK KORRELYASİYA ƏMSALLARI « канонические коэффициенты корреляции; canonical correlation coefficients » – $\xi_1, ..., \xi_s$ və $\xi_{s+1}, ..., \xi_{s+t}$, $s \le t$ təsadüfi kəmiyyətlərinin iki çoxluqlarının xətti funksiyaları –

$$U = \alpha_1\xi_1 + ... + \alpha_s\xi_s \quad \text{və} \quad V = \beta_1\xi_{s+1} + ... + \beta_t\xi_{s+t}$$

arasındakı *korrelyasiya əmsallarının* maksimal qiymətləridir; U və V – uyğun olaraq, $\xi_1, ..., \xi_s$ və $\xi_{s+1}, ..., \xi_{s+t}$ təsadüfi kəmiyyətləri topluları üçün kanonik təsadüfi kəmiyyətlərdir (bax, *Kanonik korrelyasiya*). $\mathbf{M}U = \mathbf{M}V = 0$ və $\mathbf{M}U^2 = \mathbf{M}V^2 = 1$ şərtləri daxilində U və V arasında korrelyasiya əmsalının maksimal qiymətinin təyin edilməsi məsələsi Laqranjın qeyri-müəyyən vuruqlar metodu ilə həll olunur. K. k. ə.

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0$$

tənliyinin $\lambda_1 \ge ... \ge \lambda_s > 0$ şərtini ödəyən kökləridir; Σ_{11} və Σ_{22} – uyğun olaraq, $\xi_1, ..., \xi_s$ və $\xi_{s+1}, ..., \xi_{s+t}$ kəmiyyətlərinin *kovariasion matrisləridir*, $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ isə 1-ci və 2-ci çoxluğun kəmiyyətləri arasındakı kovariasiyalar matrisidir. Bu halda tənliyin r-ci kökü bu çoxluqlar arasındakı r-ci k a n o n i k k o r r e l y a s i y a ə m s a l ı adlanır və bu əmsal elə kanonik təsadüfi kəmiyyətlərin xətti funksiyaları cütü $U^{(r)}$ və $V^{(r)}$ arasındakı korrelyasiya əmsallarının maksimal qiymətinə bərabərdir ki, bu kəmiyyətlərin hər birinin dispersiyası 1-ə bərabərdir və hər biri U və V -nin ilk $r-1$ sayda cütü ilə korrelyar deyildir. $U^{(r)}$ və $V^{(r)}$ xətti funksiyalarının əmsalları $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, ..., \alpha_s^{(r)})^{\mathsf{T}}$, $\beta^{(r)} = (\beta_1^{(r)}, ..., \beta_t^{(r)})^{\mathsf{T}}$

$$\begin{Vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \end{Vmatrix} = 0$$

tənliyini $\lambda = \lambda_r$ şərtilə ödəyir.

KANONİK KORRELYASİYALAR ANALİZİ « канонических корреляций анализ; canonical correlation analysis » – riyazi gözləməsi sıfra bərabər, kovariasion matrisi $c = \mathbf{M}(\mathbf{x}\,\mathbf{x}^{\mathsf{T}})$ olan $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{x}_1^{\mathsf{T}}, \mathbf{x}_2^{\mathsf{T}})$ təsadüfi vektorunun altvektorları $\mathbf{x}_1^{\mathsf{T}} = (x_1, ..., x_n)^{\mathsf{T}}$ və $\mathbf{x}_2^{\mathsf{T}} = (x_{n+1}, ..., x_{n+m})^{\mathsf{T}}$ arasında qarşılıqlı əlaqənin tədqiqidir. K. k. a.-də k a n o n i k k ə m i y y ə t l ə r adlanan kəmiyyətlər hər bir altçoxluğun elementlərinin xətti kombinasiyaları olan $\xi = \mathbf{x}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{a}$ və $\eta = \mathbf{x}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$ və bunlar arasında c ü t l ü k k o r r e y a s i y a ə m s a l ı, yəni

$$\rho = \frac{\mathbf{M}(\xi\,\eta)}{\sqrt{\mathbf{M}(\xi^2)\mathbf{M}(\eta^2)}} = \frac{\mathbf{a}^{\mathsf{T}} c_{12}\,\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{a}^{\mathsf{T}} c_{11}\,\mathbf{a})\,(\mathbf{b}^{\mathsf{T}} c_{22}\,\mathbf{b})}} \qquad (1)$$

k a n o n i k k o r r e l y a s i y a s ı təyin olunur, burada c_{11} və c_{22} – qrupdaxili kovariasiyalar matrisləri, c_{12} isə qruplar arası kovariasiyalar matrisi, yəni $\mathbf{x}$ vektorunun iki altvektora bölgüsünə uyğun olan bloklardır (c matrisinin blokları). $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = (a_1, ..., a_n)$ və $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} = (b_1, ..., b_n)$ əmsalları elə təyin olunur ki, (1)-in aqreqar əlamətləri arasında (1) korrelyasiyası maksimal olsun (ξ və η-nın normalanmış dispersiyaları 1-ə bərabər olmaq şərtilə). Onda (1) kanonik korrelyasiyası

$$\rho = \mathbf{a}^{\mathsf{T}} c_{12}\,\mathbf{b} - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a}^{\mathsf{T}} c_{11}\mathbf{a} - 1) - \frac{\mu}{2}(\mathbf{b}^{\mathsf{T}} c_{22}\mathbf{b} - 1) \to \max \qquad (2)$$

funksionalı şəklində ifadə olunur, burada λ və μ – qeyri – müəyyən Laqranj vuruqlarıdır. (2)-nin həllindən, $\lambda = \mu$ və

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\lambda} c_{11}^{-1} c_{12}\,\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\lambda} c_{22}^{-1} c_{21}\,\mathbf{a} \qquad (3)$$

münasibətləri alınır, burada $c_{21} = c_{12}^{\mathsf{T}}$. (3)-lə bağlı olaraq

$$c_{11}^{-1} c_{12} c_{22}^{-1} c_{21}\,\mathbf{a} = \lambda^2\,\mathbf{a}, \quad c_{22}^{-1} c_{21} c_{11}^{-1} c_{12}\,\mathbf{b} = \lambda^2\,\mathbf{b} \qquad (4)$$

xüsusi qiymətləri üçün məsələlər qoyulur.

(1) və (2)-nin ekstremal qiymətləri $\rho_i = \sqrt{\lambda_i^2} = \mathbf{a}_i^{\mathsf{T}} c_{12} b_i$ -yə bərabərdir. $\lambda_1^2 \ge \lambda_2^2 \ge ... \ge \lambda_n^2$ nizamlamasında kanonik korrelyasiyanın birinci əmsalı $\rho_1 = \sqrt{\lambda_1^2}$ -ə bərabər olur, uyğun $\mathbf{a}_1$ və $\mathbf{b}_1$ vektorları isə ilk ξ_1 və η_1 kanonik kəmiyyətlərini yaradır. İkinci və sonrakı kanonik korrelyasiyalar əvvəlki kombinasiyalar ilə korrelyar olmayan və korrelyasiya əmsalı qiymətcə sonrakı olan, qalmış qrupdaxili korrelyasiyanı izah edən, xətti kombinasiyalar ilə təyin olunur (bax, *Kanonik korrelyasiya*). Sıfra bərabər olmayan kanonik korrelyasiyaların sayı $\min(n, m)$-dən artıq deyildir. Praktikada kovariasiyalar matrislərinin seçimi analoqları istifadə olunur, (4) məsələlərindən dim. – ölçüsü kiçik olan bir məsələ həll olunur, (3) üzrə vektorların ikinci toplusu tapılır. K. k. a.-in bir sıra modifikasiyaları işlənilmişdir.

Əd.: [1] H o t e l l i n g N., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321–77; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] V a n d e n W o l l e n b e r g A. L., «Psychometrika», 1977, v. 42, № 2, p. 207–19; [4] Д у б р о в с к и й С. А., Прикладной многомерный статистический анализ, М., 1982; [5] Л и п о в е ц к и й С. С., «Заводская лаборатория», 1984, № 10, с. 50–56.

KANONİK KORRELYASİYALAR VƏ KƏMİYYƏTLƏR « канонических корреляций и величины; canonical correlations and variables » – bax, *Təsadüfi proses*; k a n o n i k k o r r e l y a s i y a l a r v ə k ə m i y y ə t l ə r.

KANONİK ÖLÇ(ÜL)MƏ « каноническое измерение; canonical measurement » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

KANONİK PARAMETR « канонический параметр; canonical parameter », e k s p o n e n s i a l p a y l a n m a l a r a i l ə s i p a r a m e t r i, – bax, *Kanonik və natural parametrizasiya.*

KANONİK PAYLANMA « каноническое распределение; canonical distribution » – *Gibbs paylanmasının* sinonimidir. Hissəciklərin sayı qeyd olunduqda, şərti paylanma kimi təyin olunan kiçik kanonik ansamblda Gibbs paylanması və hissəciklərin sayı təsadüfi olan böyük kanonik ansamblda təyin olunan Gibbs paylanması bir-birilə fərqli paylanmalardır.

KANONİK SPEKTRAL TƏNLİK « каноническое спектральное уравнение; canonical spectral equation » – *simmetrik təsadüfi matrislər* üçün limit spektral $\mu(x)$ funksiyasının Stiltyes çevirməsi üçün tənlikdir.

$$\Xi_n = \left\| \xi_{ij}^{(n)} - \alpha_{ij}^{(n)} \right\|$$

simmetrik matrisinin eyni ehtimal fəzasında verilmiş, $\xi_{ij}^{(n)}$, $i \geq j$, $i, j = 1, ..., n$ – asılı olmayan təsadüfi elementlərinin ehtimala görə sonsuz kiçik olduqları və $K_n(u, v, z)$ funksiyalarının $K(u, v, z)$ funksiyasına zəif yığıldığı fərz olunur, burada

$$\alpha_{ij}^{(n)} = \int_{|x|<\tau} x \, d\, \mathbf{P}\{\xi_{ij}^{(n)} < n\},$$

$\tau > 0$ – sabit ədəd, $i/n \leq u < (i+1)/n$, $j/n \leq v < (j+1)/n$ olduqda

$$K_n(u, v, z) = n \int_{-\infty}^{z} \frac{y^2}{1+y^2} \, d\, \mathbf{P}\{\xi_{ij}^{(n)} - \alpha_{ij}^{(n)} < y\};$$

$K(u, v, z)$, – $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ oblastında u və v_k üzrə kəsilməz, z üzrə məhdud variasiyalı və azalmayan funksiyadır,

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} F(\lambda_k - x),$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 0 \text{ olduqda}, \\ 1, & y < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və λ_k, – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləridir. Onda 1 ehtimalla $\lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = \mu(x)$ münasibəti təsadüfi olmayan spektral $\mu(x)$ funksiyasının hər bir kəsilməzlik nöqtəsində ödənilir, $\mu(x)$-in Stiltyes çevirməsi –

$$\int (1+itx)^{-1} d\mu(x) = \lim_{a \downarrow 0} \int_0^1 \int_0^1 x \, d\, G_a(x, z, t) \, dz$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $G_a(x, z, t)$, – x-ə görə ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $|t| < \infty$) paylanma funksiyasıdır, kəsilməzlik nöqtələrində

$$G_a(x, z, t) = \mathbf{P}\{[1 + t^2 \xi_a(G_a(\cdot, \cdot, t), z)]^{-1} < x\}$$

kanonik spektral tənliyini ödəyir; $\xi_a(G_a(\cdot, \cdot, t), z)$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün Laplas çevirməsi tapılır (bax, [1]).

K. s. t.-in həlli vardır və bu həll ixtiyari qeyd olunmuş $0 \leq z \leq 1$, $|t| < \infty$ qiymətlərində x üzrə ($0 \leq x \leq 1$) paylanma funksiyası olan $G(x, z, t)$ funksiyalarının L sinfində yeganədir və ixtiyari tam $k > 0$ və $0 \leq z \leq 1$, üçün

$$\int_0^1 x^k \, d\, G(x, z, t)$$

funksiyaları t üzrə (ola bilər ki, sıfır nöqtəsi istisna olmaqla) analitik funksiyalardır.

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, K., 1980.

KANONİK VƏ NATURAL PARAMETRİZASİYA « каноническая и натуральная параметризация; canonical and mean – value parameterization », eksponensial ehtimal paylanmaları ailəsinin K. və n. p.-sı – ailənin bir-birilə Lejandr çevirməsi ilə bağlı, affin çevirməsi dəqiqliyilə təyin olunmuş fəzasında μ ölçüsü ilə dominarlanmış ehtimal paylanmaları $\{\mathbf{P}_s, s \in \mathrm{Dom}\,\gamma \subset \mathbb{R}^n\}$ ailəsi γ, əgər $d\,\mathbf{P}_s / d\mu$ sıxlıq funksiyaları ailəsi ilə

$$p(\omega; s) = p_0(\omega) \exp[s^i q_i(\omega) - \Psi(s)] \qquad (1)$$

kanonik şəklində ifadə olunarsa, bu ailə – kanonik parametri s olan istiqamətləndirici statistikaları $q_1(\omega), ..., q_n(\omega)$ olan eksponensial ailə adlanır, burada aşağı və yuxarı indeksləri üst-üstə düşən indekslər üzrə cəmlənmə fərz olunur, $\Psi(s)$ – normalaşdırıcı bölənin loqarifmidir, yəni

$$\Psi(s) = \ln \int p_0(\omega) \exp[s^i q_i(\omega)] \, \mu\{d\omega\} \qquad (2)$$

və $\mathrm{Dom}\,\gamma$ (2) ifadəsindəki inteqralın sonlu olduğu bütün $s \in \mathbb{R}^n$ qiymətlərindən ibarətdir.

$\mathrm{Dom}\,\gamma$ çoxluğu hökmən qabarıqdır, belə ki, analitik $\Psi(s)$ funksiyası qabarıqdır (bax, [1]), lakin ola bilər ki, $\dim \mathrm{Dom}\,\gamma < n$ və hətta $\mathrm{Dom}\,\gamma = \varnothing$. $\dim \mathrm{Dom}\,\gamma = n$ və $1(\omega) = 1$, $q_1(\omega), ..., q_n(\omega)$ statistikaları $\mathrm{mod}\,\mu$ xətti asılı deyildirlər, odur ki, sıxlıq funksiyası ilə kanonik parametr arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir. (1) ifadəsilə bağlı $t = (t_1, ..., t_n)(s)$ vektorunun komponentləri

$$t_j(\sigma) = \int_\Omega q_j(\omega) \mathbf{P}_\sigma\{d\omega\} = (\partial / \partial s^j)\, \Psi(s)\big|_{s=\sigma} \qquad (3)$$

olarsa, t vektoru natural parametr adlanır. $\Psi(s)$ ciddi qabarıq olduğundan s və t arasında uyğunluq $\mathrm{int}\,\mathrm{Dom}\,\gamma$-da qarşılıqlı birqiymətlidir. Natural parametrizasiyanın statistik mənası aşağıdakı teoremdən aydın olur: əgər $\mathbf{P}_t\{\cdot\}$ ehtimal paylanmalarının hamar ailəsinin $t = (t_1, ..., t_n)$ parametri üçün $q(\omega)$ effektiv statistik qiyməti varsa, onda ehtimal paylanmaları ailəsi (2) kanonik istiqamətləndirici $q(\omega) = (q_1(\omega), ..., q_n(\omega))$

statistikası olan eksponensial ailədir, t (3) ifadəsinə görə $q(\omega)$-ya uyğun ailənin natural parametrizasiyasıdır (bax, [2], [3]).

$0 \in \mathrm{Dom}\,\gamma$ olduqda (bunu kanonik parametrizasiyanın yerinidəyişilməsilə almaq olur: $s \to s' = s - \sigma$) sıxlıq funksiyalarının standart ifadəsi daha sadə, yəni

$$p(\omega,\ s) = p(\omega,\ 0)\exp[s^i q_i(\omega,\ 0) - I(\mathbf{P}_0 : \mathbf{P}_s)] \qquad (4)$$

olur, burada normalaşdırıcı bölənin loqarifmi $\mathbf{P}_s$-ə nəzərən $\mathbf{P}_0$-ın *nisbi entropiyası* ilə üst-üstə düşür və $q_i(\omega;\ 0) = (\partial/\partial s^i)\ \ln p(\omega;\ s)\big|_{s=0}$ isə ilkin $q_i(\omega)$-lardan sabit toplananla fərqlənir.

Eksponensial ailələr statistik həlledici qaydalar kateqoriyasına nəzərən və şərti paylanmalara keçidə nəzərən ekvivariantdır. K. və n. p. yalnız kovariasion matrisi və parametri – riyazi gözləmələr vektoru qeyd olunmuş normal paylanmalar üçün üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Л е м а н Ж., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] B a r n d o r f f - N i e l s e n O., Information and exponential families in statistical theory, N. Y., 1979; [4] A m a r i S., Differential-geometrical methods in statistics, N. Y. – L., 1985; [5] Х и н ч и н А. Я., Математические основания статистической механики, М. – Л., 1943; [6] У л е н б е к Д ж., Ф о р д Д ж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965.

KANTOR PAYLANMASI « Кантора распределение; Cantor's distribution » – $(0,\ 1)$ intervalında topalanmış kəsilməz *sinqulyar paylanmadır* və

$$\eta = 3\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i} / 2^{2i}$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması kimi təyin olunur, burada ξ_i – qarşılıqlı asılı olmayan, $1/2$ ehtimalı ilə 0 və 1 qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$$\eta^* = (3/2)\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i-1} \Big/ 2^{2i-1}$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması da K. p.-dır.

$A \neq 0$ və B sabit olduqda $A\eta + B$ tipli təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları da Kantor paylanması tipli olub, $\mathbb{R}^1$-in sonlu intervalında topalanmış kəsilməz sinqulyar paylanmalardır.

$(0,\ 1)$-də müntəzəm paylanmanı iki K. p.-nın kompozisiyası kimi ifadə etmək mümkündür: $u = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i / 2^i$ təsadüfi kəmiyyəti $(0,\ 1)$-də müntəzəm paylanma qanunu ilə paylanmışdır, lakin bununla belə $u = \eta/3 + 2\eta^*/3$.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

KANTOROVİÇ METRİKASI « Канторовича метрика; Kantorovich metric » – aşağıdakı konstruksiya ilə təyin olunan sadə *ehtimal metrikasıdır.* $(X,\ \mathscr{S})$ – ölçülən fəza, d isə X-də elə metrika olsun ki, d-yə nəzərən Borel çoxluqlarının P çoxluğu $(X,\ \mathscr{S})$-də bütün ehtimal ölçülərinin fəzası olsun. $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in P$ olduqda K a n t o r o v i ç m e t r i k a s ı (m ə s a f ə s i)

$$\mu(\mathbf{P},\ \mathbf{Q}) = \inf \int_{X\times X} d(x_1,\ x_2)\ H(d\,x_1,\ d\,x_2) \qquad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada infimum uyğun marginal ölçüləri $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$-yə bərabər olan, $(X,\ \mathscr{S})\times(X,\ \mathscr{S})$-də bütün H ehtimal ölçülərinin çoxluğu üzrə götürülür. Beləliklə, μ metrikası (1) münasibətindəki inteqralla ifadə olunan mürəkkəb metrikaya nəzərən *minimal metrikadır.* Bu məsafə xətti proqramlaşdırmanın nəqliyyat məsələsi terminlərində aşağıdakı interpretasiya ilə bağlı L. V. Kantoroviç tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur. Əgər $\mathbf{P}$ – yüklərin yola salınma məntəqələrində bunların paylanması, $\mathbf{Q}$ – yüklərin çatdığı məntəqələrdəki paylanması, $d(x_1,\ x_2)$, – x_1 məntəqəsindən x_2 məntəqəsinə daşınma xərcini xarakterizə edirsə, onda μ optimal daşınma planı üçün daşınma xərcidir. Zəif əlavə məhdudiyyətlər qoyulduqda Kantoroviç məsafəsi digər şəkildə aşağıdakı formada yazılır:

$$\mu(\mathbf{P},\ \mathbf{Q}) = \sup\left|\int_X f(x)\,(\mathbf{P}(dx) - \mathbf{Q}(dx))\right|, \qquad (2)$$

burada supremum $|f(x) - f(y)| \le d(x_1, x_2)$, $x, y \in X$ şəklində Lipşits şərtini ödəyən, X-də verilən bütün məhdud f funksiyaları üzrə götürülür. Əgər X – kompakt və $\mathscr{S}$, – X-də Borel σ – cəbridirsə, μ metrikası *zəif yığılma* topologiyasını doğurur. Bu hal üçün (2) ifadəsini L. V. Kantoroviç [1]-də isbat etmişdir. Hal-hazırda (2) müddəası əksər hallarda K a n t o r o v i ç t e o r e m i adlandırılır, bu teorem olduqca daha ümumi fərziyyələrlə isbat olunmuşdur (bax, [4], [2]).

μ-nün qiymətinin aşkar tapılması mümkün olan hallar çox deyildir. Məs., əgər d, – $\mathbb{R}^n$-də Evklid fəzası və $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A - a)$, $a \in \mathbb{R}^n$ olarsa, onda $\mu(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = a$. Əgər $d(x,\ y) = I(x \neq y)$ olarsa (I indikator funksiyasıdır), onda μ *tam variasiya metrikası* olur. Bununla belə Kantroviç məsafəsi bir çox ehtimal konstruksiyaları üçün çox faydalı olmuşdur, belə ki, onu yuxarıdan asanlıqla qiymətləndirmək olur: buna görə hər hansı H ölçüsünü vermək kifayətdir. Məs., bu məsafə Gibbs təsadüfi meydanlarının yeganəliyi kriterilərində tətbiq olunur (bax, [3]).

K. m. bir çox müəlliflər tərəfindən istifadə olunmuşdur və yenidən kəşf olunmuşdur. Bununla bağlı olaraq, riyazi ədəbiyyatda müxtəlif adlarla ifadə olunur.

Əd.: [1] К а н т о р о в и ч Л. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 37, № 7–8, с. 227–29; [2] Р а ч е в С. Т, «Теория вероятн и примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 625–53; [3] D o b r u s c h i n R. L., S h l o s m a n S. B., «Progr. in Phys.», 1985, v. 10, p. 347–70; [4] S z u l g a A., «Теория вероятн и примен.», 1982, т. 27, в. 2, с. 401–05.

KANTOROVİÇ MƏSAFƏSİ « Канторовича расстояние; Kantorovich distance » – bax, *Kantoroviç metrikası.*

KANTOROVİÇ TEOREMİ « Канторовича теорема; Kantorovich theorem » – bax, *Kantoroviç metrikası*.

KARATEODORİ TEOREMİ ölçülər haqqında **« Каратеодори теорема** о мерах; **Caratheodory theorem »** – bax, *Davamolunması, ölçünün*.

KARLEMAN KRİTERİSİ « Карлемана критерий; Carleman criterion » – bax, *Qüvvət üstlü momentlər problemi*.

KARLEMAN ŞƏRTİ « Карлемана условие; Carleman condition » – bax, *Moment.*

KARUNEN TEOREMİ « Карунена теорема; Karhunen theorem » – təsadüfi funksiyaların ümumiləşmiş *spektral ayrılışı* haqqında teoremdir: $m(S)$, $S \in \mathscr{B}$ – hər hansı $(A, \mathscr{B}, m)$ ölçülən fəzasında mənfi olmayan ölçü, $\{\psi(t; a)\}$, – $t \in T$ parametrindən asılı, $L^2(m)$ fəzasından olan, $a \in A$ dəyişəninin funksiyaları ailəsi olduqda, $B(t, s) = \mathbf{M}\, X(t)\overline{X(s)}$ – ixtiyari $T = \{t\}$ çoxluğunda verilmiş kompleks $X(t)$ təsadüfi funksiyasının korrelyasion funksiyası

$$B(t, s) = \int_A \psi(t; a)\, \overline{\psi(s; a)}\, m(da) \qquad (1)$$

şəklində ifadə olunarsa, onda $X(t)$ təsadüfi funksiyası

$$X(t) = \int_A \psi(t; a)\, Z(da) \qquad (2)$$

stoxastik inteqralı şəklində ifadə oluna bilir, burada $Z(da)$, – A-da elə təsadüfi ölçüdür ki, $\mathbf{M}\, Z(S_1)\overline{Z(S_2)} = m(S_1 \cap S_2)$. Tərsinə, $X(t)$ təsadüfi funksiyası (2) şəklində ifadə olunarsa, onda onun korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ (1) şəklində ifadə oluna bilinir. $Z(S)$ təsadüfi ölçüsünün qiymətləri $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyasının qiymətlərinin xətti H_X örtüyünə, yalnız və yalnız, o halda aiddir ki, $\{\psi(t; a), t \in T\}$ funksiyalar ailəsi $L^2(m)$-də sıx ailə olsun.

Bu teorem K. Karunenə məxsusdur (bax, [1], həm də [2] – [4]). Bu teoremin çoxölçülü ümumiləşməsi vardır (bax, [2], [3]). K. t.-nin digər ümumiləşməsi təsadüfi funksiyaların ifadə olunması haqqında *Kramer teoremidir*.

Misallar. 1) $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ – diskret zamanlı elə stasionar təsadüfi proses olsun ki, $|\tau| \geq n$ olduqda $\mathbf{M}\, X(t+\tau)\overline{X(t)} = B(\tau) = 0$. Bu halda

$$B(\tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-\tau} b_{k+\tau}\bar{b}_k, & \tau = 0, 1, \ldots, n \text{ olduqda,} \\ 0, & \tau > n \text{ olduqda} \end{cases} \qquad (3)$$

münasibətlərini ödəyən $b_0, b_1, \ldots, b_n$ kompleks ədədləri həmişə vardır (bax, [5]). $B(-\tau) = \overline{B(\tau)}$ olduğundan, (3) düsturunu

$$\mathbf{M}X(t)\overline{X(s)} = B(t-s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{t-j}\bar{b}_{s-j}, \quad t = 0, \pm 1, \ldots$$

şəklində yazmaq olar (burada $s < 0$ və ya $s > n$ olduqda, $b_s = 0$), bu düstur isə (1)-in xüsusi halıdır ki, bu halda hər iki T və A çoxluqları bütün tam ədədlərin çoxluğudur. K. t.-inə əsasən

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k Z(t-k), \quad t = 0, \pm 1, \ldots,$$

burada $\mathbf{M}\, Z(t)\overline{Z(s)} = \delta_{ts}$ (yəni $Z(t)$ diskret zamanlı bəyaz küydür). Əgər $|\tau| > n$ olduqda $B(\tau) = 0$ olarsa, onda $X(t)$ diskret zamanlı *sürüşən orta prosesidir*.

2) $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ – kəsilməz zamanlı stasionar təsadüfi proses, $f(\lambda)$ – prosesin spektral sıxlığı olsun, $g(\lambda)$ elə ixtiyari funksiyadır ki, $|g(\lambda)|^2 = f(\lambda)$. $b(t)$, – $g(s)$ funksiyasının (L^2 fəzasından olan) Furye çevirməsi olsun; bu halda $X(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B(\tau)$-nun spektral ayrılışı və Planşerel tənliyindən istifadə edərək göstərmək olur ki,

$$\mathbf{M}\, X(t)\, \overline{X(s)} = B(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t-u)\overline{b(s-u)}\, du. \qquad (4)$$

(4) düsturu (1)-in xüsusi halıdır ki, bu halda $A = (-\infty, \infty)$, m – Lebeq ölçüsüdür; buna görə də,

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t-u)\, dZ(u)$$

olduğu alınır, burada $\mathbf{M}\, dZ(u)\overline{dZ(v)} = \delta(u-v)\, du\, dv$, yəni $Z(u)$ standart Viner prosesidir. Spektral sıxlığa malik standart proses, həmişə kəsilməz zamanlı ikitərəfli sürüşən orta prosesidir. Əgər $f(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{-1} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty \qquad (5)$$

bərabərsizliyini ödəyərsə, onda Peli – Viner teoreminə əsasən (bax, [6]) $g(\lambda)$ funksiyasını elə seçmək olar ki, onun Furye çevirməsi $b(t)$ mənfi yarımoxda sıfra çevrilsin; (5) şərti ödənilərsə, spektral sıxlığı $f(\lambda)$-ya bərabər stasionar təsadüfi proses birtərəfli sürüşən orta proses kimi ifadə oluna bilər.

K. t.-nin digər tətbiqləri də mövcuddur (bax, məs., *Spektral ayrılış*(ı) təsadüfi funksiyanın).

Əd.: [1] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A», 1947, Bd1, № 37, S. 3–79; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971, с. 292–4; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977, с. 269–71; [4] Rao M. M., в кн.: Handbook of Statistics, v. 5, Amst., 1985, p. 279–310; [5] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976, с. 252–53; [6] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, пер. с англ., М., 1964, с. 32.

KARUNEN – LOEV AYRILIŞI « Карунена – Лоэва разложение; Karhunen – Loeve expansion », ortoqonal ayrılış, ortoqonal sıraya ayrılış, təsadüfi prosesin K. – L. a. – $a \leq t \leq b$ sonlu

intervalında verilmiş kvadratik orta mənada kəsilməz, ixtiyari kompleks $X(t)$ *təsadüfi prosesinin*

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\,\psi_k(t)\,Z_k$$

şəklində ifadəsidir, burada sağ tərəfdəki cəm kvadratik orta mənada yığılır, $\psi_k(t)$, $k=1, 2, ...,$ –

$$\int_a^b B(t,\,s)\psi(s)\,ds=\lambda\,\psi(t),\qquad a\le t\le b \tag{2}$$

interqal tənliyinin məxsusi funksiyalarının ortonormalanmış sistemi [$B(t,\,s)=\mathbf{M}\,X(t)\overline{X(s)}$, – $X(t)$-nin korrelyasion funksiyasıdır], λ_k, $k=1,2,...,$ – $\psi_k(t)$ funksiyalarına uyğun məxsusi qiymətlər,

$$Z_k=(\lambda_k)^{-1/2}\int_a^b X(t)\overline{\psi_k(t)}\;dt\,,\quad k=1,\,2\,,\,...$$

– $\mathbf{M}\,Z_k\,\overline{Z}_j=\delta_{kj}$ şərtini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdir. K. – L. a. çoxölçülü statistik analizdə istifadə olunan, baş komponentlər üzrə ayrılışın sonsuzölçülü hal üçün ümumiləşməsidir; bu ayrılış bir-birindən asılı olmayaraq bir çox tətqiqatçılar tərəfindən alınmasına baxmayaraq (bax, məs., [1] – [6]), adətən, bunlardan ikisinin adı ilə adlandırılmışdır. (1) və (2) düsturlarındakı sonlu $a\le t\le b$ intervalında verilən $X(t)$ təsadüfi prosesini $X(t)$, $t\in T$ təsadüfi funksiyası ilə əvəz etmək olar, burada T – ixtiyari əlaqəli kompakt topoloji fəza, Lebeq ölçüsü ds ilə T-də ixtiyari $m(ds)$ ölçüsü ilə elədir ki, T-nin bütün açıq altçoxluqları ölçüləndir və müsbət ölçüyə malikdirlər. Məs., $X(t)$ $\mathbb{R}^n$ fəzasının əlaqəli məhdud çoxluğunda təsadüfi meydan kimi, ds isə $m(s)ds=m(s_1,\,...\,,\,s_n)\,ds_1\,...\,ds_n$ ölçüsü kimi interpretasiya oluna bilər. Əgər $X(t)$ – riyazi gözləməsi sıfra bərabər həqiqi Qauss prosesi olarsa, onda Z_k, $k=1,\,2,\,...$ – normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, bu halda (1)-in sağ tərəfindəki sıra artıq 1 ehtimalla yığılmış olur (bax, məs., [7], [8]).

K. – L. a.-nın bir sıra mühəndis tətbiqləri vardır (bax, məs., [9] – [13]). Meteorologiya məsələlərində də bu ayrılışlar geniş tətbiq olunur (bax, *Empirik ortoqonal funksiyalar*).

M i s a l l a r. 1) $B(t,\,s)=\min(t,\,s)$, $a=0$, $b=1$ olsun. Onda (2) tənliyi sərhəd şərtləri $\psi(0)=0$, $\psi'(1)=1$ olan $\lambda\psi''(t)+\psi(t)=0$ differensial tənliyinə gətirilə bilinir, bu halda K. – L. a. aşağıdakı şəkildə olur:

$$X(t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k-1/2)\pi t}{(k-1/2)\pi t}\;Z_k\,. \tag{3}$$

$X(t)$ Viner prosesi olduğu xüsusi halda (3) ayrılışı N. Viner (N. Wiener) tərəfindən 20-ci əsrin 30-cu illərində bir qədər başqa formada alınmışdır (bax, məs., [14]).

2) Əgər $B(t,\,s)=\exp[-\alpha(t-s)]$, $a=-T$, $b=T$ olarsa, onda (2) tənliyi sərhəd şərtləri $\psi'(T)+\alpha\psi(T)=0$, $\psi'(-T)-\alpha\psi(-T)=0$ olan $\psi''(t)+[\alpha(2-\alpha\lambda)/\lambda]\times$ $\times\psi(t)=0$ differensial tənliyinə gətirilə bilinir. Buna görə də, bu halda K. – L. a.

$$X(t)\;=\sum_{k=0}^{\infty}\;(A_k\cos a_k t\;Z_k^{(1)}+\;B_k\;\sin b_k t\;Z_k^{(2)})$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada A_k və B_k – normalayıcı sabitlərdir, $\mathbf{M}\,Z_k^{(p)}\overline{Z_j^{(q)}}=\delta_{pq}\delta_{kj}$, a_k və b_k, $k=1,\,2,\,...$ – $a_k\,\mathrm{tg}\,T\,a_k=\alpha$, $b_k\,\mathrm{ctg}\,T\,b_k=\alpha$ transsendent tənliklərinin həllidir.

Digər bəzi misallar [9] – [13], [15], [16]-da şərh olunmuşdur. Spektral sıxlığı $f(\lambda)$ rasional olan stasionar təsadüfi $X(t)$ proseslərinə tətbiqdə (2) inteqral tənliyinin ümumi həll metodu [17]-də təklif olunmuş, sonradan [15] və [18]-də sadələşdirilmişdir.

Əd.: [1] K o s a m b i D. D., «J. Indian Math. Soc.», 1943, v. 7, p. 76–88; [2] K a r h u n e n K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A», 1946, Bd 1, № 34, p. 3–7; [3] L o e v e M., «Rev. Sci.», 1946, v. 84, p. 195–206; [4] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 499–502; [5] П у г а ч е в В. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, т. 17, № 5, с. 401–20; [6] О б у х о в А. М., «Тр. Геофиз. ин.-та АН СССР», 1954, в. 24, с. 3–42; [7] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977, с. 257–58; [8] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971, с. 275–79; [9] П у г а ч е в В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управление, 3 изд., М., 1962; [10] Д а в е н п о р т В. Б., Р у т В. Л., Введение теорию случайных сигналов и шумов, пер. с англ., М., 1960; [11] М и д д л т о н Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1, М., 1961; [12] Х е л с т р о м К., Статистическая теория обнаружения сигналов, пер. с англ., М., 1963; [13] В а н Т р и с Г., Теория обнаружения оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [14] В и н е р Н., П э л и Р., Преобразование Фурье в комплексной области, пер. с англ., М., 1964, с. 215–29; [15] Ф о р т у с М. И., «Изв. АН СССР. Сер. физики атмосф. и океана», 1973, т. 9, № 1, с. 34–46; [16] Ф о р т у с М. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1977, в. 16, с. 135–41; [17] Г е л ь ф а н д И. М., Я г л о м А. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 1, с. 3–52; [18] S l e p i a n D., K a d o t a T. T., «SIAM J. Appl. Math.», 1969, v. 17, p. 1102–17.

KARUNEN – LOEV AYRILIŞI d i s k r e t « **Карунена – Лоэва разложения** д и с к р е т н о е; d i s c r e t e **Karhunen – Loeve decomposition** » – kovariasion matrisin məxsusi vektorları üzrə təsadüfi vektorun ayrılışıdır. Əlamətlərin seçilməsi məsələlərində, yəni ilkin ölçmələrin daha effektivlərinə çevrilməsində istifadə olunur. $\boldsymbol{x}$, – n – ölçülü təsadüfi vektor olsun. Onda aşağıdakı ayrılış doğrudur:

$$\boldsymbol{x}\;=\sum_{i=1}^{n}\;y_i\;\boldsymbol{\Phi}_i\;=\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{y}$$

burada $\boldsymbol{\Phi}=(\boldsymbol{\Phi}_1,\,...,\boldsymbol{\Phi}_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\,...\,,\,y_n)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{\Phi}$ matrisi determinik matrisdir və n sayda xətti asılı olmayan vektor sütundan ibarətdir, yəni $\det\boldsymbol{\Phi}\ne 0$. Beləliklə, $\boldsymbol{\Phi}$-in sütunlarının xətti kombinasiyaları, $\boldsymbol{x}$-i özündə saxlayan n – ölçülü fəza əmələ gətirir. $\boldsymbol{\Phi}$-in sütunları bazis vektorlar adlanır. Fərz olunur ki, bunlar ortonormalanmışlar, onda $\boldsymbol{y}$ vektorunun komponentləri aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$y_i=\boldsymbol{\Phi}_i\,\boldsymbol{x}\,,\quad i=1,\,...\,,\,n\,.$$

Deməli, $\boldsymbol{y}$ təsadüfi $\boldsymbol{x}$ vektorunun ortoqonal çevirməsidir və təsadüfi vektordur. $\boldsymbol{y}$ vektorunun hər bir komponenti əlamət olub, $\boldsymbol{x}$ -in ifadəsində əks olunur.

$\boldsymbol{y}$ vektorunun m komponentinin təyin olunduğu fərz olunur, $m < n$. Əgər ($\boldsymbol{x}$ -in qiymətləndirilməsi üçün) $\boldsymbol{y}$ -in hesablanmamış komponentləri konstantlarla əvəz olunursa, onda

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m} y_i \Phi_i + \sum_{i=m+1}^{n} b_i \Phi_i .$$

Qiymətləndirmə xətası

$$\Delta \boldsymbol{x} = \sum_{i=m+1}^{n} (y_i - b_i) \Phi_i$$

ifadəsi ilə təyin olunur. m komponentdən ibarət altçoxluğun effektivliyinin ölçülməsi üçün kriteri kimi $\Delta \boldsymbol{x}$ -in kvadratının orta qiymətindən istifadə olunur:

$$\varepsilon^2(m) = \mathbf{M}\{\|\Delta x\|\}^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \mathbf{M}\{(y_i - b_i)^2\} .$$

Konstantların qiymətlərinin və bazis vektorların hər bir toplusuna $\varepsilon^2(m)$ -in müəyyən bir qiyməti uyğun olur. b_i konstantlarının optimal seçimi aşağıdakı kimi aparılır:

$$b_i = \mathbf{M}\, y_i = \Phi_i^{\mathrm{T}} \mathbf{M}\, \boldsymbol{x} ,$$

onda kvadratik orta xəta

$$\varepsilon^2(m) = \sum_{i=m+1}^{n} \Phi_i^{\mathrm{T}} \Xi \Phi_i$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada Ξ – kovariasion matrisdir. Φ matrisinin optimal seçilməsi $\Xi \Phi_i = \lambda_i \Phi_i$ şərtini ödəyir, yəni optimal bazis vektorlar Ξ martisinin məxsusi vektorudur. Beləliklə, minimal kvadratik orta xəta $\varepsilon^2_{\mathrm{opt}}(m) = \sum_{i=m+1}^{n} \chi_i$ olur.

Əd.: [1] Ф у к у н а г а К., Введение в статистическую теорию разпознования образов, пер. с англ., М., 1979.

KASKAD DESİMASİYA « каскадная децимация; cascade decimation » – bax, *Desimasiya*.

KASKAD KOD « каскадный код; cascade cod » – B əlifbası üzərində V blok kodundan A əlifbasının hərflərinin U blok kodunun sözlərinə əvəz olunması ilə alınan, A əlifbası üzərində *blok kodudur*. Bu zaman B -nin U kodlarına kodlanmasındakı əvəz olunmalar, V kodunun müxtəlif mövqelərində duran hərflər üçün müxtəlif ola bilər (U kodlarının özü də). Kodlama və dekodlamanın n üzrə polinomial *mürəkkəbliyi* halında (bax, [1], [2]) *kod məsafəsinin* xətti artmasını (kod uzunluğu n üzrə) və *səhv dekodlama ehtimalının* (n üzrə) eksponensial azalmasını (yaddaşsız kanalın ötürücülük qabiliyyətindən kiçik olan bütün sürətlər üçün) təmin edən K. k.-un varlığı isbat olunmuşdur. Məlum olan yaxşı kodlardan bir çoxu K. k.-lardır və ya onların ümumiləşmələridir (bax, [3]), bu kodlar informasiyanın ötürülməsi və qorunub saxlanılması sistemlərində geniş tətbiq olunur.

K. k.-lar D. Forni tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Ф о р н и Д., Каскадные коды, пер. с англ., М., 1970; [2] З я б л о в В. В., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, № 1, с. 5–13; [3] З и н о в ь е в В. А., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, № 1, с. 5–15.

KATEQORİK HAVA PROQNOZU « категорический прогноз погоды; categorical weather forecast » – mümkün olan xətaları özündə əks etdirməyən proqnozdur və bu proqnoz yalnız meteoroloji kəmiyyətin öngörül qiyməti və ya havanın gözlənilən tipi (məs., yağıntılı olub-olmayacağı) haqqında məlumat verir.

K. h. p.-ları özünü yüz faiz doğrultmur və şərtri proqnozlar adlandırılır. Bütün məlum proqnoz metodları, praktik olaraq, yalnız şərti hava proqnozlarını verməyə imkan yaradır. Mümkün ola bilən xətalar və öngörül tip əvəzinə havanın digər tiplərinin (fazaların) baş verməsi ehtimalları haqqında proqnozistə məlum informasiyaların yoxluğu K. h. p.-nun dəyərini azaldır. Buna görə də, istehsal fəaliyyətinin planlaşdırılmasında istifadə olunan, daha da əsaslandırılmış sayılan ehtimali hava proqnozu metodlarının işlənilməsi istiqamətində cəhdlər edilir.

KEÇİD EHTİMALI Markov zəncirində **« переходная вероятность** в цепи Маркова; **transition probability** in a Markov chain **»** – bax, *Ehtimal*, *keçid ehtimalı.*

KEÇİD EHTİMALI SIXLIĞI « перехода плотность вероятности; transition rate / density » – bax, *Sıxlıq*(ğı) keçid ehtimallrının.

KEÇİD FUNKSİYASI « переходная функция; transition function » Markov prosesinin – *Markov prosesinin* başlanğıc zaman anı və başlanğıc vəziyyətindən asılı olmaqla müəyyən vəziyyətlər çoxluğuna daxil olması ehtimalını təyin edən funksiyadır. Dəqiq ifadə ilə bu funksiya aşağıdakı kimi təyin olunur. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ – ölçülən fəza olsun. $p(s, x; t, \Gamma)$, $s < t \in (-\infty, \infty)$, $x \in \mathscr{E}$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ funksiyası x -ə görə ölçüləndirsə, Γ -yə görə subehtimal ölçüdürsə və ixtiyari $s < t < u$, $x \in \mathscr{E}$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ üçün

$$\int p(s, x; t, dy)\, p(t, y; u, \Gamma) = p(s, x; u, \Gamma) \qquad (*)$$

– Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyirsə, $p(s, x; t, \Gamma)$ -yə keçid funksiyası deyilir. $p(s, x; t, \mathscr{E}) \equiv 1$ olarsa, K. f. Markov K. f. və ya konservativ K. f., əks halda isə submarkov K. f. adlanır. Əgər $\lim_{t \downarrow s} p(s, x; t, \mathscr{E}) \equiv 1$ olarsa, K. f. normal K. f. adlanır.

ζ_t, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ -də verilmiş, qiymətləri $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ -dən olan Markov xassəli təsadüfi proses olsun. Əgər

$$\mathbf{P}\{\zeta_t \in \Gamma \mid \zeta_s\} = p(s, \zeta_s; t, \Gamma)$$

bərabərliyi $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilərsə, onda $p(s, x; t, \Gamma)$ Markov K. f. ζ_t prosesinin keçid funksiyasıdır, deyilir.

Əgər $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ Borel σ – cəbrli tam separabel metrik fəzadırsa, onda ixtiyari Markov K. f.-na müəyyən bir Markov prosesi uyğundur və əksinə ixtiyari Markov prosesinə müəyyən bir K. f. uyğundur (bax, [1] – [3]). Əgər qırılan proseslərə də baxılarsa, bu mülahizələr submarkov K. f.-ları üçün də doğru olur.

Verilmiş K. f. üçün trayektoriyalarının xassələri məlum Markov prosesinin varlığı şərtləri [4], [5]-də (bax, *Markov prosesi*) şərh olunmuşdur.

$\mathscr{E}$ hesabi və ya sonlu çoxluq olarsa, K. f.

$$P(s,\ t) = \left\| p_{ij}(s,\ t) \right\|$$

matrisi şəklində verilir; $i,\ j \in \mathscr{E},\ p_{ij}(s,\ t) = p(s, i; t, \{j\})$.

K. f. anlayışı, təbii olaraq, hər hansı $I \subset (-\infty,\ \infty)$ altçoxluğundan (məs., tam ədədlər çoxluğundan) yalnız s, t üçün təyin olunmuş funksiyalar üçün də təyin olunur.

K. f. $p(s,\ x; t, \Gamma)$ ilə aşağıdakı düsturlarla verilən P_t^s, $s < t$ operatorlarını əlaqələndirmək olar:

$$P_t^s f(x) = \int\limits_{\mathscr{E}} p(s,\ x;\ t,\ dy)\ f(y)$$

düsturu ilə məhdud ölçülən funksiyalara təsir edən və

$$\mu P_t^s(\Gamma) = \int\limits_{\mathscr{E}} \mu(dx)\ p(s,\ x;\ t,\ \Gamma)$$

düsturu ilə σ – sonlu ölçülərə təsir edən operatorları.

K. f. yalnız s, t arqumentlərinin fərqindən asılı olarsa, yəni $p(s, x; t, \Gamma) \equiv p(t-s, x; \Gamma)$ şəklində ifadə olunarsa, onda o, b i r c i n s K. f. adlanır. Bircins K. f. üçün $P_t^s = P_{t-s}$ işarələməsindən istifadə olunur; P_t^s operatorlar terminlərilə (*) tənliyi $P_t^s P_u^t = P_u^s$ şəklində, bircins halda isə $P_t P_s = P_{t+s}$ şəklində yazılır; yəni P_t operatorları Markov semi – qrupu təşkil edir.

$\mathscr{E}$ – topoloji fəza, $\mathscr{B}$, – $\mathscr{E}$-də Borel σ – cəbri olsun. Əgər ixtiyari açıq U çoxluğu və ixtiyari $x \in U$ üçün $\lim\limits_{t \downarrow s} p(s, x;\ t,\ U) = 1$ olarsa, K. f. s t o x a s t i k k ə s i l m ə z K. f. adlanır. Əgər K. f.-na uyğun P_t^s operatorları məhdud kəsilməz funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirirsə (uyğun olaraq, məhdud ölçülən funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirərsə), onda K. f. F e l l e r K. f. (uyğun olaraq, g ü c l ü F e l l e r K. f.) adlanır. Feller K. f.-na c i d d i M a r k o v p r o s e s l ə r i uyğundur.

Bircins K. f.-nın təsviri və şərhinin mühüm elementi onun infinitezimal operatoru və rezolventidir (bax, *Markov prosesi*; r e z o l v e n t).

Əd.: [1] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] К у з н е ц о в С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 389–93; [4] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [5] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

KEÇİD İNTENSİVLİYİ « переходa интенсивность; infinitezimal transition rate » – bax, *Sıxlıq*(ğ ı) k e ç i d e h t i m a l l a r ı n ı n.

KEÇİD MATRİSİ « переходная матрица; transition matrix » – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi bircins Markov zəncirinin *keçid ehtimallarından* təşkil olunmuş $P = \left\| p_{ij} \right\|$ kvadrat matrisdir. K. m.-lərinin çoxluğu ixtiyari i qiymətində $p_{ij} \geq 0,\ \sum\limits_j p_{ij} = 1$ şərtlərilə təyin olunan *stoxastik matrislər çoxluğu* ilə üst-üstə düşür.

Bircins Markov zənciri üçün P^n K. m.-nin natural qüvvət üstlü elementləri i vəziyyətindən j vəziyyətinə n addıma keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$-lərdir. Əgər E zəncirin vəziyyətləri çoxluğu sonludursa və mühüm $C_1, ..., C_k$ sinifləri və qeyri – mühüm R sinfindən ibarətdirsə, onda K. m. vəziyyətləri yenidən nömrələnmə nəticəsində

$$\left\| \begin{array}{cc} P_1 & 0 \\ \cdots\cdots & \\ 0 & P_k \\ \hline & Q \end{array} \right\|$$

şəklinə gətirilir, burada $P_1, ..., P_k$ – uyğun $C_1, ..., C_k$ siniflərində Markov zəncirinin keçid matrisləri, Q blokunun sətirləri isə qeyri-mühüm vəziyyətlərə uyğundur.

Bəzən K. m. vəziyyətləri sonlu və ya hesabi kəsilməz zamanlı Markov prosesinin keçid funksiyasına da deyilir.

KEÇİD SIXLIĞI « переходная плотность; transition density » – Markov prosesinin *keçid funksiyası* və ya Markov zəncirinin keçid ehtimalı $p(s, x; t, \Gamma)$-nin hər hansı σ – sonlu $\lambda(\Gamma)$ ölçüsünə nəzərən Radon – Nikodim törəməsi $f(s, x; t, y)$-dir, bu şərtlə ki, $p(s, x; t, \cdot)$ ölçülərinin $s < t$ olduqda λ-ya nəzərən mütləq kəsilməz olduğu fərz olunur [$s < t$ zaman parametrinin dəyişmə oblastı T-yə daxildir, $x \in \mathscr{E},\ y \in \mathscr{E},\ \Gamma \in \mathscr{B},\ (\mathscr{E}, \mathscr{B})$ – prosesin faza fəzasıdır]. Beləliklə,

$$p(s, x; t, \Gamma) = \int\limits_{\Gamma} f(s, x; t, y)\ \lambda(dy),$$
$$s < t,\ x \in \mathscr{E},\ \Gamma \in \mathscr{B}\ ; \qquad (1)$$

məs.,

$$\int\limits_{\mathscr{E}} f(s, x; t, y)\ \lambda(dy) \leq 1, \quad s < t,\ x \in \mathscr{E}\ . \qquad (2)$$

Adətən, tələb olunur ki: 1) K. s. mənfi olmasın; 2) K. s. $(x,\ y)$-ə görə $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$ – ölçülən olsun; 3) K. s.

$$f(s, x; u, y) = \int\limits_{\mathscr{E}} f(s, x; t, z)\ f(t, z; u, y)\ \lambda(dz) \qquad (3)$$

– Kolmoqorov – Çepmen tənliyini bütün $s < t < u$, $x \in \mathscr{E},\ y \in \mathscr{E}$ qiymətlərində ödəsin [keçid funksiyasının tərifindən 1) və 3) şərtləri λ – sanki bütün y-lər üçün alınır]. 1) – 3) şərtləri ödənildiyi halda (2) xassələrinə malik olan ixtiyari f funksiyasına (1) düsturuna əsasən keçid funksiyası uyğun olur. Bircins halda K. s. $f(t, x, y) = f(s, x; s+t, y)$ funksiyasına deyilir.

KEMENİ MEDİANI « Кемени медиана; Kemeny median » – *Kemeni məsafəsi* vasitəsilə, müəyyən binar münasibətlərlə (tolerantlıqlar, ranqlanmalar, bölgülərlə və s.) $\{C\}$ fəzasında təyin olunan seçimi ortadır. $A_1, A_2, ..., A_n \in \{C\}$ seçimi üçün K e m e n i m e d i a n ı

$$\sum_{i=1}^{n} d(A_i, A^*) = \min_{A \in \{C\}} \sum_{i=1}^{n} d(A_i, A)$$

münasibətini ödəyən $A^* \in \{C\}$ binar münasibətidir, burada $d(A_i, A)$, – $\{C\}$-dən olan A_i və A binar münasibətləri arasında Kemeni məsafəsidir. K. m. ilk dəfə ranqlanmalar fəzaları üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]). K. m. *binar münasibətlər statistikasında* öyrənilən əsas obyektdən biridir (bax, [2]).

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения, пер с англ., М., 1972; [2] Орлов А. И., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 58–92.

KEMENİ MƏSAFƏSİ « Кемени расстояние; Kemeny distance » – sonlu $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ çoxluğunda A və B binar münasibətləri arasında məsafədir. K. m.-ni təyin etmək üçün X çoxluğunda binar C münasibətlərinin toplusu $\{C\}$ və $(k \times k)$ – tərtib $\|f_{ij}(C)\|$ $(0, 1)$ – matrislərinin çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluqdan istifadə olunur və bu uyğunluqda $f_{ij}(C) = 1$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, x_i və x_j C münasibətində olsunlar; $f_{ij}(C) = 0$ bərabərliyi isə əks halda doğru olur. K. m.

$$d(A, B) = \sum_{i,j=1}^{k} \left| f_{ij}(A) - f_{ij}(B) \right|$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur və o, ranqlama fəzasına müəyyən aksiomlar sistemi ilə daxil olunmuşdur (bax, [1]). K. m.-ni almaq üçün analoji aksiomlar sistemi bir qədər sonralar tolerantlıq, bölgülər fəzaları və b. üçün də təklif olunmuşdur (bax, [2]). K. m. qeyri – ədədi təbiətli obyektlər *statistikasında* geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения, пер. с англ., М., 1972; [2] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

KEMPBELL ÖLÇÜSÜ « Кэмпбелла мера; Campbell measure » – nöqtəvi prosesin moment ölçüsünü ümumiləşdirən, təsadüfi nöqtəvi prosesin ədədi xarakteristikası olan ölçüdür.

$$\Phi(\cdot) = \sum_{\alpha \in S_\Phi} \Phi(\{a\})\, \delta_a(\cdot)$$

– ədəd oxunda verilmiş Φ təsadüfi nöqtəvi prosesinin realizasiyası, $S_\Phi = \{a : \Phi(\{a\}) > 0\} \subset \mathbb{R}^1$ olsun, burada $\delta_a(\cdot)$, – a nöqtəsində topalanmış vahidi ölçüdür. Realizasiyaları

$$\Phi^\Lambda(\cdot) = \sum_{a \in S_\Phi} \Phi(\{a\})\, \delta_{(a\Phi(\cdot))}(\cdot)$$

şəklində olan yeni nöqtəvi prosesə baxılır. Φ^Λ prosesi $\mathbb{R}^1$-də verilən elə nişanlanmış nöqtəvi proses kimi anlaşılır ki, bu prosesin hər bir $a \in S_\Phi$ nöqtəsində nişan əvəzinə bütün $\Phi(\cdot)$ realizasiyasına baxılır. Φ^Λ prosesi $\mathfrak{A}^\Lambda = A^\Lambda \cap \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$ σ – cəbrinin məhdud altçoxluqlarında təyin olunmuşdur, burada $A^\Lambda = \{(a, \varphi(\cdot)) : a \in \mathbb{R}^1,\ \varphi(\cdot) \in M,\ a \in S_\varphi\} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$, – $\mathbb{R}^1$-də Borel çoxluqlarının σ – cəbri, M, – $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B})$-də lokal məhdud $\varphi(\cdot)$ sayıcı ölçülər çoxluğu, $\mathfrak{M}$, – M-də, $\{\varphi(\cdot) : \varphi(B) = k,\ B \in \mathfrak{B}\} \subset M$ altçoxluqlarının doğurduğu altçoxluqlar σ – cəbridir.

Φ nöqtəvi təsadüfi prosesinin $(M, \mathfrak{M})$-də ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ ilə təyin olunduğu fərz olunur. Φ^Λ prosesinin *moment ölçüsü* – $C_{\mathbf{P}}(\cdot)$ Kempbell ölçüsüdür, yəni ixtiyari $K \in \mathfrak{A}^\Lambda$ üçün $C_{\mathbf{P}}(K)$ kəmiyyəti Φ^Λ prosesinin K altçoxluğundakı nöqtələrinin orta sayına bərabərdir. Əgər $K = A^\Lambda \cap B \times M$ olarsa, onda $C_{\mathbf{P}}(K) = \mathbf{M}_{\mathbf{P}}\Phi(B)$ olur, yəni $C_{\mathbf{P}}(K)$ ilkin təsadüfi Φ nöqtəvi prosesinin K-dakı nöqtələrinin orta sayına bərabərdir.

İxtiyar $\mathfrak{A}^\Lambda$ – ölçülən, mənfi olmayan $f(c)$, $c = (a, \Phi) \in A^\wedge$ funksiyası üçün

$$\mathbf{M}_{\mathbf{P}} \int_K f(c)\, \Phi(da) = \int_K f(c)\, C_{\mathbf{P}}(dc)$$

bərabərliyi doğrudur, bu isə *Kempbell teoreminin* ümumiləşməsidir.

K. ö. vəziyyətlərinin faza fəzası tam separabel metrik fəza olan nişanlanmış nöqtəvi proseslər üçün də ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

KEMPBELL TEOREMİ « Кэмпбелла теорема; Campbell theorem » – təsadüfi nöqtəvi prosesin realizasiyası üzrə *stoxastik inteqralın* orta qiymətini təyin edən teoremdir. $\Lambda(\cdot)$, – Φ təsadüfi nöqtəvi prosesinin *moment ölçüsü*, Φ prosesinin vəziyyətlərinin faza fəzası $(A, \mathfrak{A})$-nun məhdud ölçülən B çoxluqları üçün $\Lambda(B) < \infty$ olsun. Onda ixtiyari $\mathfrak{A}$ – ölçülən $f(a)$, $a \in A$ mənfi olmayan funksiyası və $B \in \mathfrak{A}$ üçün

$$\mathbf{M} \int_B f(a)\, \Phi(da) = \int_B f(a)\, \Lambda(da)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bax, *Kəsri küy prosesi.*

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

KENDALL ƏMSALI ranq korrelyasiyasının **« Кендалла коэффициент** ранговой корреляции; **Kendall rank** correlation coefficient **»** – müşahidə olunan X və Y *təsadüfi kəmiyyətləri* (əlamətləri) üçün alınmış $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ seçim elementlərinin ranqlaşdırılmasına əsaslanan, bu təsadüfi kəmiyyətlərin asılılığının seçimi ölçülərindən biridir. Beləliklə, ranq korrelyasiyasının K. ə. ranq statistikalarına aid olub,

$$\tau = 2S(r_1, ..., r_n)/n(n-1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada r_i, – Y-in ranqı olub, elə (X, Y) cütünə aiddir ki, bu cütdə X-in ranqı i-yə bərabərdir, $S = 2N - n(n-1)/2$, N seçimin elə elementləri sayıdır ki,

bunlar üçün eyni zamanda $j > i$ və $r_j > r_i$ şərtləri ödənilir. $-1 \le \tau \le 1$ bərabərliyi həmişə ödənilir. Ranq korrelyasiyasının K. ə. M. Kendall tərəfindən geniş istifadə olunmuşdur (M. Kendall, bax, [1]).

Ranq korrelyasiyasının K. ə. təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığı hipotezlərinin yoxlanılması üçün istifadə olunur. Əgər asılı olmamazlıq hipotezi doğrudursa, onda $\mathbf{M}\tau = 0$ və $\mathbf{D}\tau = 2(2n+5)/9n(n-1)$ olur. Kiçik həcmli seçimlər halında ($4 \le n \le 10$) asılı olmamazlıq statistik hipotezi xüsusi cədvəllər vasitəsilə yoxlanılır (bax, [3]). $n > 10$ olduqda τ-nun paylanması üçün normal yaxınlaşmadan istifadə olunur: əgər

$$|\tau| > u_{\alpha/2}\sqrt{2(2n+5)/9n(n-1)}$$

olarsa, onda asılı olmamazlıq haqqında hipotez qəbul olunmur, əks halda isə qəbul olunur. Burada α – mühümlük ölçüsüdür, $u_{\alpha/2}$ – normal paylanmanın $100 \cdot \alpha/2$ faiz nöqtəsidir. Ranq korrelyasiyasının K. ə. digər ixtiyari ranq statistikası kimi, iki keyfiyyət əlamətlərinin asılılığının aşkar edilməsi üçün də istifadə oluna bilinər, lakin bu halda seçimin elementlərini bu əlamətlərə görə nizamlamaq mümkün olarsa. Əgər X, Y korrelyasiya əmsalı ρ-ya bərabər ikiölçülü normal qanunla paylanmışlarsa, onda ranq korrelyasiyasının K. ə. arasında əlaqə $\mathbf{M}\tau = 2\pi^{-1}\arcsin\rho$ şəklində olur.

Bax, *Spirmen əmsalı* ranq korrelyasiyasının, *Ranq kriterisi*.

Əd.: [1] Кендэл M., Ранговые корреляции, пер. с англ., M., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., M., 1960; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., M., 1 983.

KEPSTR « КЕПСТР; KEPSTR – Kolmogorov equation Power Series Time Responce » – diskret zamanlı $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ *requlyar stasionar təsadüfi prosesinin* KEPSTR-i –

$$\exp\{\upsilon_0 + \upsilon_1(z) + \ldots\} = a_0 + a_1 z + \ldots \qquad (1)$$

şərtindən təyin olunan $\{\upsilon_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ ədədlər ardıcıllığıdır, burada $\{a_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, – $\zeta(t)$ üçün Vold ayrılışının əmsallarıdır, z – kompleks dəyişəndir, $|z| < 1$.

$\{\upsilon_k\}$ ardıcıllığı stasionar təsadüfi ardıcıllıqlar nəzəriyyəsinin qurulması üçün D. Seqyö və A. N. Kolmoqorov tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1] – [3]). (1) münasibəti bu nəzəriyyədə mühüm rol oynayır və Kolmoqorov tənliyi adlanır. $f(\lambda)$ requlyar stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral sıxlığı olsun. Onda

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|\Phi(e^{-i\lambda})\right|^2, \qquad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad (2)$$

ifadəsi doğrudur, burada $\{a_k\}$, – $\zeta(t)$ üçün Vold ayrılışının əmsallarıdır. (2)-ni (1)-də yerinə yazdıqda K.-i $\ln\Phi(z)$ funksiyasının

$$\ln\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k z^k \qquad (3)$$

qüvvət sırasına ayrılışının əmsalları ardıcıllığı kimi təyin etmək olur. (3) ayrılışı Kolmoqorov tənliyinin qüvvət sırası adlanır. (3) münasibəti $\{\upsilon_k\}$ ardıcıllığını hər hansı xətti filtrin impuls keçid funksiyası kimi, $\ln\Phi(z)$-i isə uyğun tezlik xarakteristikası kimi interpretasiya etməyə əsas verir.

20-ci əsrin 60-cı illərindən başlayaraq, K. bir çox mütəxəssislərin diqqətini yalnız onun təsadüfi ardıcıllıqların fundamental nəzəriyyəsində istifadə olunması ilə deyil, həm də bir çox məsələlərin həlli üçün, ilk növbədə geofiziki məlumatların ədədi işlənilməsi məsələlərinin həlli üçün faydalı bir vasitə kimi cəlb etmişdir. Tətbiq nöqteyi – nəzərincə K.-in əsas xassəsi belə ifadə olunur: müşahidə olunan siqnalın iki ardıcıllığın kompozisiyası –

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \zeta(k) Y(t-k)$$

olduğu fərz olunur. Onda $R(t)$ siqnalının K.-i $\zeta(t)$ və $Y(t)$ ardıcıllıqlarının K.-lərinin cəminə bərabərdir: $\hat{\upsilon}_k^{(R)} = \upsilon_k^{(\zeta)} + \upsilon_k^{(Y)}$, $k = 0, 1, \ldots$. Əgər, məs., konvolyusiya məsələsini, yəni kompozisiyanın komponentlərindən birini [məs., $\zeta(t)$-ni] müşahidələr üzrə bərpa etmə məsələsini həll etmək tələb olunursa, onda K.-in statistik qiymətlərinin $\{\hat{\upsilon}_0^{(R)}, \ldots, \upsilon_N^{(R)}\}$ ardıcıllığı filtrasiya olunur (kepstral oblastda), bu şərtlə ki, $\upsilon_k^{(Y)}$ toplananı nəzərə alınmır. Sonra isə filtrlənmiş K.-dən əksinə – zaman oblastına keçirilir (bax, [4], [5]).

Tətbiqi araşdırmalara həsr olunmuş ədəbiyyatda əksər hallarda [4]-də olduğu kimi $\ln f(\lambda) = 2\ln\left|\Phi(e^{-i\lambda})\right|$ funksiyasının Furye sırasına ayrılışı əmsalları kepstr adlandırılır.

Əd.: [1] Szego G., «Math. Ann.», 1915, Bd 76, S. 490–503; [2] Kolmogorov A. N., «C. r. Acad. sci.», 1939, t. 208, p. 2043–45; [3] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 215–63; [4] Bogert B., Healy M., Tukey J., «Proc. Simp. Time Ser. Analysis», N. Y., 1963, p. 209–43; [5] Оппенгейм А., Шафер Р., Цифровая обработка сигналов, пер. с англ., M., 1979.

KEPTEYN PAYLANMALARI « Кептейна распределения; Kepteyn distributions » – qiymətləri çoxsaylı zəif asılı səbəblərin təsirinin nəticəsi olan, lakin bilavasitə çox sayda kəmiyyətlər cəmi olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının təsviri üçün C. Kepteyn (1916) tərəfindən təklif olunmuş *paylanmalar* ailəsidir. Olduqca ümumi şərtlərlə ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması o halda K. p. ailəsindəndir ki, hər hansı $G(\xi)$ funksiyası normal paylanmaya malik olsun. Məs., verilən səbəbin təsir effekti artıq təsadüfi kəmiyyətin almış olduğu qiymətə mütənasib olarsa, onda $G(\xi) = \ln\xi$ olur və loqarifmik normal paylanma alınır.

Əd.: [1] Арлей Н., Бух К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., M., 1951.

KESTEN AMENABELLİK KRİTERİSİ « Кестена критерий аменабельности; Kesten condition / criterion of amenability » – bax, *Təsadüfi dolaşma* qrupda.

KEYFİYYƏTCƏ DAYANIQLILIQ(ğı) stoxastik modellərin **« качественная устойчивость** стохастических моделей; **qualitative stability** of stochastic models **»** – ehtimal nəzəriyyəsinin approksimasiya məsələlərində istifadə olunan anlayışdır. Bu məsələlər

aşağıda təsvir olunan uyğun xarakterizasiya məsələləri ilə bilavasitə və ya digər şəkildə bağlıdırlar. $\mathscr{X}=\{x\}$ və $\mathscr{Y}=\{y\}$ – elementləri: təsadüfi kəmiyyətlər, onların topluları və ya onlara uyğun paylanmalar ola bilən hər hansı çoxluqlar olsun. $J:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ inikası və hər hansı $\mathfrak{A}\subset\mathscr{X}$, $\mathfrak{L}\subset\mathscr{Y}$ çoxluqlarının verildiyi fərz olunur, $J^{-1}\mathfrak{L}$ isə $\mathfrak{L}$ çoxluğunun $\mathscr{X}$-ə tam proobrazıdır. Əgər $\mathfrak{L}=\mathfrak{A}\bigcap(J^{-1}\mathfrak{L})$ çoxluğu tələb olunan hər hansı xassələrə malik olarsa, onda onun təsvirini

$$x\in\mathfrak{L}\ \Leftrightarrow\ (x\in\mathfrak{A},\ Jx\in\mathfrak{L}) \qquad (1)$$

formasında münasibət ilə ifadə etmək olar.

Əgər $\mathscr{X}$ və $\mathscr{Y}$-də $\mu(x',x'')$ və $\nu(y',y'')$ məsafələri verilmişdirsə, onda (1) münasibəti aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mu(x,\mathfrak{L})=0\Leftrightarrow\mu(x,\mathfrak{A})+\nu(Ix,\mathfrak{L})=0,$$

burada

$$\mu(x,\mathfrak{L})=\inf(\mu(x,x'):x'\in\mathfrak{L}).$$

$\mathfrak{D}=(J\mathfrak{A})\bigcap\mathfrak{L}$ çoxluğunun xarakterizasiyası məsələsi formal olaraq bir qədər başqa cürdür, lakin əgər J inikasının birqiymətli olmadığı fərz olunarsa, onda bu çoxluğun xarakterizasiyası $\mathfrak{L}$-in təsviri məsələsindən fərqlənir.

$(\mathscr{X},\mathscr{Y};J,\mathfrak{A},\mathfrak{L})$ modelində $\mathfrak{L}$-in keyfiyyətcə dayanıqlılığı

$$\mu(x,\mathfrak{L})\to 0\ \Leftrightarrow\ \mu(x,\mathfrak{A})+\nu(Jx,\mathfrak{L})\to 0 \qquad (2)$$

münasibətinin ödənilməsi kimi anlaşılır. (2)-dəki ikitərəfli implikasiya $\mathfrak{L}$ çoxluğunun xarakterizasiyasının dayanıqlılığına uyğundur. (2) xassəsinin olub-olmaması, tamamilə, seçilmiş məsafələrin xassələrindən asılıdır. K. d. effektinin dəqiqləşməsi ona müvafiq kəmiyyət statistik qiymətləridir (bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) stoxastik modelin; kəmiyyəti statistik qiymətlər).

Əd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.» 1976, т. 101, № 3, с. 416–54.

KEYFİYYƏTLİ ROBASTLIQ « качественная робастность; qualitative robustness » – bax, *Robast statistik qiymət*.

KƏMİYYƏT ROBASTLIĞI « количественная робастность; quantitative robustness » – bax, *Robast statistik qiymət*.

KƏMİYYƏTCƏ DAYANIQLILIQ(ğ ı) stoxastik modellərin **« количественная устойчивость** стохастических моделей; **quantitative stability** of stochastic models **»** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) stoxastik modelin; kəmiyyət statistik qiymətlər.

KƏNAR FUNKSİYA « крайняя функция; extreme function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

***KƏSİK – EKVİVALENT TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICILLIQLARI « остаточно-эквивалентные случайных величин последовательность; remot – equivalence sequences »** – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət.*

***KƏSİK PAYLANMA « усеченное распределение; truncated distribution »** – ehtimal *paylanmasıdır*, verilən paylanmadan hər hansı qeyd olunmuş parçadan kənarda topalanmış kütlənin bu parçaya köçürülməsi yolu ilə alınır. Fərz olunur ki, ədəd oxunda ehtimal paylanması paylanma funksiyası $F(x)$ ilə verilmişdir. F-ə uyğun kəsik paylanma paylanma funksiyası

$$F_{a,b}(x)=\begin{cases}0, & \text{əgər } x\le a,\\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}, & \text{əgər } a<x\le b,\\ 1, & \text{əgər } x>b,\ a<b\end{cases} \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunan paylanmaya deyilir.

$a=-\infty$ $(b=\infty)$ xüsusi halında K. p. sağdan (soldan) kəsik paylanma adlanır.

(1)-lə yanaşı aşağıdakı münasibətlərlə verilən K. p.-lara da baxılır:

$$F_{a,b}(x)=\begin{cases}0, & \text{əgər } x\le a,\\ F(x)-F(a), & \text{əgər } a<x\le c,\\ F(x)+1-F(b), & \text{əgər } c<x\le b,\\ 1, & \text{əgər } x>b \text{ olarsa}\end{cases} \qquad (2)$$

və ya

$$F_{a,b}(x)=\begin{cases}0, & \text{əgər } x<a,\\ F(x), & \text{əgər } a\le x<b,\\ 1, & \text{əgər } x\ge b \text{ olarsa.}\end{cases} \qquad (3)$$

$[a,b]$ parçasından kənarda topalanmış $[1]$-dəki kütlə bütün $[a,b]$ parçasında paylanır, (2)-də $c\in[a,b]$ nöqtəsinə keçir ($a<0<b$ olduqda c əvəzinə əksər hallarda $c=0$ götürülür), (3)-də isə bu kütlə kənar a və b nöqtələrinə keçir.

(1) şəklində K. p.-ni aşağıdakı kimi interpretasiya etmək olar. X paylanma funksiyası $F(x)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. Onda K. p. $a<X\le b$ şərtinə nəzərən X təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması ilə üst-üstə düşür.

K. p. anlayışı *kəsik təsadüfi kəmiyyət* anlayışı ilə sıx bağlıdır. X^h-in paylanması X-in paylanmasına nəzərən (3) şəklində K. p.-dır ($a=-h$, $b=h$, $c=0$).

Kəsmə əməliyyatı – K. p. və ya kəsik təsadüfi kəmiyyətlərə keçmə – olduqca geniş yayılmış texniki üsuldur. Bu əməliyyat nəticəsində «ilkin paylanmanı» bir qədər dəyişməklə, analitik xassə almaq olur – bütün momentlərin varlığını.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Крамер Г., Математичексие методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [4] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

KƏSİK SEÇİM « усеченная выборка; truncated sample », I tip senzurlanma, – F paylanmasına mənsub asılı olmayan təkrarlanan $X_1,\ldots,X_n$ seçiminin qiymətlərinin həqiqi oxun hər hansı L altçoxluğundan olan hədlərindən ibarət *seçimdir*. Əgər $L=(-\infty,a]$ (və ya $L=[a,+\infty)$)

olarsa, seçim a nöqtəsində sağdan (soldan) kəsilmişdir. Seçimin kəsilməsində seçimin «müşahidəolunan» hədlərinin paylanması «kəsik» paylanma olur; yəni əgər $\mathbf{P}\{X_1 \in L\} \neq 0$ olarsa, $F \,/\, \mathbf{P}\{X_1 \in L\}$ olur.

Əd.: [1] Кендалл M., Стьюарт A., Статистические выводы и связи, пер. с англ., M., 1973.

KƏSİK TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « усеченная случайная величина; truncated random variable » – ξ təsadüfi kəmiyyətilə sonlu $c > 0$ nöqtəsində

$$\underset{<c}{\xi} = \begin{cases} \xi, & \text{əgər } |\xi| < c \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{əgər } |\xi| \geq c \text{ olarsa,} \end{cases} \qquad (*)$$

münasibətilə bağlı məhdud $\underset{<c}{\xi}$ *təsadüfi kəmiyyətinə* deyilir, (*) münasibətilə təyin olunan $\underset{<c}{\xi}$, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin c *nöqtəsində kəsiyidir* (və ya budanmasıdır). ξ təsadüfi kəmiyyətinin $\underset{<c}{\xi}$ K. t. k. ilə əvəz olunması *budama metodu* adlanır. $\underset{<c}{\xi}$ K. t. k. və ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyaları $F_{\underset{<c}{\xi}}(x)$ və $F_\xi(x)$ bir-birilə aşağıdakı münasibətlə bağlıdır:

$$F_{\underset{<c}{\xi}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \xi < -c, \\ F_\xi(x) - F_\xi(-c-0), & \text{əgər } -c \leq x \leq 0, \\ F_\xi(x) + 1 - F_\xi(c), & \text{əgər } 0 \leq x \leq c, \\ 1, & \text{əgər } x \geq c \text{ olarsa.} \end{cases}$$

ξ təsadüfi kəmiyyətinə uyğun K. t. k.-dən böyük ədədlər qanununun və limit teoremlərinin isbatında istifadə olunur.

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası F-dirsə, onda $\underset{<c}{\xi}$ K. t. k.-nin bütün momentləri, yəni

$$\mathbf{M}\underset{<c}{\xi} = \int\limits_{|x|<c} x\,dF, \quad \mathbf{M}\underset{<c}{\xi}^2 = \int\limits_{|x|<c} x^2\,dF, \ldots$$

vardır və sonludur. c-ni həmişə elə böyük seçmək olar ki, $\mathbf{P}\{\xi \neq \underset{<c}{\xi}\} = \mathbf{P}\{|\xi| \geq c\}$ ehtimalını ixtiyari qədər kiçik etmək mümkün olsun. Hətta $\xi_1, \xi_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün uyğun olaraq, həmişə olduqca böyükqiymətli elə $c_1, c_2, \ldots$ seçmək mümkündür ki, $\mathbf{P}(\bigcup\{\xi_k \neq \underset{<c_k}{\xi_k}\})$ ehtimalını ixtiyari qədər kiçik etmək mümkün olsun; doğrudan da, məs., əgər $\mathbf{P}\{|\xi_k| \geq c_k\} < \varepsilon/2^k$ münasibətini təmin edən c_k seçmək mümkün olarsa, onda

$$\mathbf{P}(\bigcup\{\xi_k \neq \underset{<c_k}{\xi_k}\}) \leq \sum \mathbf{P}\{|\xi_k| \geq c_k\} < \varepsilon$$

münasibəti alınır.

Beləliklə, hər bir hesabi saylı təsadüfi kəmiyyətlər ailəsinə uyğun olaraq, bu ailədən ixtiyari kiçik ehtimallı hadisə qədər fərqlənən *məhdud təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi* qarşı olar. Əgər təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının, əsas etibarilə, limit xassələri araşdırılırsa, onda yuxarıda qeyd olunan «ixtiyari kiçik ehtimal» tələbinə ehtiyac olmur. Aşağıdakı mülahizələr bunu təsdiq edir.

$\{\xi_n\}$ və $\{\xi'_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqları bir-birindən yalnız sonlu sayda elementləri ilə sanki yəqin fərqlənirsə, başqa sözlə, əgər bütün ω-lar ($\omega \in \Omega$) üçün elə sonlu $n(\omega)$ ədədi olarsa ki, $n \geq n(\omega)$ olduqda, $\{\xi_n(\omega)\}$ və $\{\xi'_n(\omega)\}$ ardıcıllıqları üst-üstə düşərsə, bu ardıcıllıqlara *kəsik-ekvivalent* (*qalıq-ekvivalent*) *ardıcıllıqlar* deyilir; yəni simvolik olaraq

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \neq \xi'_n(\omega) \text{ sonsuz say dəfə}\} = 0.$$

Əgər $\{\xi_n\}$ və $\{\xi'_n\}$ ardıcıllıqları eyni bir hadisədə (çoxluqda) sıfır ehtimallı hadisə dəqiqliyilə yığılırsa, onda bu ardıcıllıqlar *ekvivalent – yığılan ardıcıllıqlar* adlanır. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi'_k$ olsun.

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \neq \xi'_n(\omega) \text{ sonsuz say dəfə}\} =$$

$$= \lim_n \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega : \xi_k(\omega) \neq \xi'_k(\omega)\}\right\} \leq$$

$$\leq \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}\{\omega : \xi_k(\omega) \neq \xi'_k(\omega)\}$$

münasibətindən aşağıdakı *ekvivalentlik lemması* alınır:

Əgər $\sum\limits_n \mathbf{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \neq \xi'_n(\omega)\}$ sırası yığırılsa, onda $\{\xi_n\}$ və $\{\xi'_n\}$ kəsik-ekvivalent ardıcıllıqlardır, buna görə də, $\sum \xi_n$ və $\sum \xi'_n$ ekvivalent – yığılan sıralardır, $\frac{S_n}{b_n}$ və $\frac{S'_n}{b_n}$ ardıcıllıqları $b_n \to \infty$ olduqda eyni bir hadisədə sıfır ehtimallı hadisə dəqiqliyilə eyni bir limitə yığılır.

Əd.: [1] Лоэв M., Теория вероятностей, M., 1962.

KƏSİLMƏZ AXIN « непрерывный поток; continuous flow » – ölçülü $(X, \mathscr{A}, \mu)$ fəzasının *axın* olan $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ avtomorfizmlərinin elə ailəsidir ki, ixtiyari $f \in L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ funksiyası üçün $\mathbb{R} \to L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ inikası, $t \in \mathbb{R}$ olduqda, $g(x) = f(T^t x)$, $x \in X$ münasibətinə kəsilməz surətdə çevrilir.

σ – KƏSİLMƏZ FUNKSİYA « σ – непрерывная функция; σ – continuous function » – bax, σ – *Ölçülən funksiya*.

KƏSİLMƏZ PAYLANMA « непрерывное распределение; continuous distribution » – atomları olmayan *ehtimal paylanmasıdır* (bax, *Atomik paylanma*). Ehtimal paylanması düzxətdə, yalnız və yalnız, o halda K. p.-dır ki, onun uyğun paylanma funksiyası kəsilməz olsun. K. p. – mütləq kəsilməz (bu – K. p.-lar sinfinin ən mühüm altsinfidir), sinqulyar və ya mütləq kəsilməz və sinqulyar paylanmaların qarışığı ola bilər.

K. p., bəzən, *mütləq kəsilməz paylanma* adlandırılır.

KƏSİLMƏZ SEMİ – QRUP « непрерывная полугруппа; continuous semi-group » – bax, *Semi – qrup.*

KƏSİŞMƏ(si) / **HASİL**(i) təsadüfi hadisələrin **« пересечение (произведение, совмещение) случайных событий; crossing of random events »** – yalnız və yalnız eksperimentdə müşahidə oluna bilən A və B *təsadüfi hadisələrindən* hər ikisi baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir, $A \cap B$ və ya $\inf(A, B)$ kimi işarə olunur.

A_i – eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisə, $i \in J$, J isə i-nin qiymətlər aldığı ixtiyari çoxluqdursa, A_i hadisələrinin kəsişməsi hadisəsi – $\bigcap_{i \in J} A_i$, yalnız və yalnız, A_i hadisələrinin hamısı baş verdikdə baş verən hadisəyə deyilir.

Ω – elementar hadisələr fəzası, A – müşahidə oluna bilən ixtiyari təsadüfi hadisədirsə $(A \subset \Omega)$, onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap \Omega = \mathrm{A},$$
$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

Əgər $C \subset A \cap B$ olarsa, onda $C \subset A$, $C \subset B$ münasibətləri doğrudur, yəni $A \cap B$ hadisəsi A və B hadisələrinin dəqiq aşağı sərhədidir. Hadisələr üçün kəsişmə əməli

kommutativlik: $A \cap B = B \cap A$;

assosiativlik: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

distributivlik: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

idempotentlik: $A \cap A = A$

xassələrinə tabedir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теории вероятностей и математическая статистика. K., 1979; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, M., 1969.

KƏSKİN FƏRQLƏNƏN MÜŞAHİDƏLƏR, aşmaenmələr **« резко выделяющиеся наблюдения, выбросы; outliers »** – *seçimin* elementlərinin əsas toplusundan kəskin surətdə fərqlənən müşahidələrdir. Bunlar, adətən, kobud xətalar kimi anlaşılır, belə ki, bu xətalar təsadüfən düzgün hesablanılmama nəticəsində, ölçmə cihazının göstəricilərinin düzgün oxunulmaması və s. nəticəsində yaranır. Əgər bu xətalar aşkar olunmazsa bunlar son nəticənin olduqca güclü təhrifinə səbəb ola bilir. Ən məqsədəuyğun hesab olunan üsul kobud xətaları aşkar edib, onları aradan qaldırmaq, müşahidələrin bilavasitə analizi, onların diqqətlə yoxlanılmasıdır. Statistik metodlardan yalnız şübhə yaradan hallarda istifadə etmək olar. Kobud xətaları aradan qaldırmaq üçün statistik metodların iki sinfi vardır. Bunlardan birincisi (klassik) kobud xətaların (anomal müşahidələrin) aşkar olunması üçün bir sıra kriterilər sinfidir, ikincisi (ənənəvi) hər hansı bir kriteri baxımından K. f. m. hesab edilən müşahilərin «atılması», sonra isə maraq doğuran parametrləri qiymətləndirmək üçün statistik metodların sinfidir.

K. f. m.-in «atılmasını», parametrlərin növbəti qiymətləndirilməsində ənənəvi mühümlük ölçülərində deyil, hər hansı mənada optimal sayılan statistik qiymətlərin verdiyi ölçülərdə aparmaq məqsədəuyğundur. Adətən, K. f. m.-in hamısından imtina etmək lazım deyildir, əksər hallarda, bu müşahiləri kiçik çəkili götürdükdə yaxşı statistik qiymətlər alınır. Normal qanunlu çoxluqlarda kobud xətaların aradan qaldırılması üçün məşhur kriterilər E. Pirson (E. Pearson), N. V. Smirnov, F. Qrabbs (F. Grubbs), F. Anskomba (F. Anscombe) məxsusdur (bax, [1], [2]).

Eksponensial qanunlu çoxluqlar üçün K. f. m.-in atılması kriteriləri A. Lorent (A. Lorent) və A. Basu (A. Basu) tərəfindən işlənilmişdir (bax, [1], [3]). Bu kriterilər qaydalı statistikalara, həmçinin

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{və} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

statistikalarına əsaslanır, burada $x_1, ..., x_n$ – müşahidə olunan seçimdir. K. f. m.-lərdən azad olmaq məqsədilə K. f. m.-lərə az həssas statistik qiymətlərdən – robast statistik qiymətlərdən istifadə olunur. Robast prosedurlarda K. f. m., bir qayda olaraq atılmır, bunlar «tipik» müşahidələrdən fərqli olaraq, az çəki ilə götürülür (bax, [4]). Robastlıq nəzəriyyəsində K. f. m.-in təsviri üçün kobud xətalar modelindən istifadə olunur. Ənənəvi $\bar{x}$ və s^2 statistikaları əvəzinə, median tipli robast statistikalardan istifadə edərkən K. f. m.-in atılması üçün kriterilər təklif olunmuşdur (bax, [3]). Smirnov – Pirson statistikası – $\max \left| x_i - \bar{x} \right| / s$ kəmiyyətinin robast variantı –

$$\frac{\max \left| x_i - \operatorname{med}\{x_i\} \right|}{\operatorname{med} \left| x_i - \operatorname{med}\{x_i\} \right|}$$

şəklindədir, burada $\operatorname{med}\{x_i\}$, – $x_1, \ldots, x_n$ müşahidələrinin seçimi medianıdır.

Əd.: [1] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., M., 1979; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., M., 1983; [3] Смоляк С. А., Титаренко Б. П., Устойчивые методы оценивания, M., 1980; [4] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., M., 1984.

KƏSMƏ METODU « усечения метод; truncation method » – ehtimal nəzəriyyəsi teoremlərinin isbat metodudur. İlkin təsadüfi kəmiyyətlə yanaşı *kəsik təsadüfi kəmiyyətlərin* daxil olunmasına əsaslanır. İxtiyari X təsadüfi kəmiyyətinə $c > 0$ olduqda

$$\hat{X} = \begin{cases} X, & \text{əgər } |X| \le c, \\ 0, & \text{əgər } |X| > c \text{ olarsa} \end{cases}$$

təsadüfi kəmiyyətinin qarşı qoyulması – ixtiyari tərtib momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlərlə iş görmək və ilkin kəmiyyətlərin uyğun momentləri olmadıqda bunlara kəsik təsadüfi kəmiyyətlərə tətbiq olunan nəticələri tətbiq etmək mümkün olmadığından, kəsik təsadüfi kəmiyyətlərə bu nəticələri tətbiq etmək imkanını yaradır. Bu metod ehtimali bərabərsizliklər və limit teoremlərinin isbatlarında geniş istifadə olunur.

KƏSRİ BƏYAZ KÜY « дробный белый шум; fractional white noise », kəsri Braun hərəkəti – birinci tərtib stasionar artımlarlı, orta qiyməti sıfra bərabər, üstlü *struktur funksiyası*

$$\mathbf{D}(\tau) = \mathbf{M} \left| \zeta(t+\tau) - \zeta(t) \right|^2 = C |\tau|^m, \quad 0 < m \le 2$$

olan, $m < 2$ olduqda, $\mathbf{D}(\tau)$-ya müvafiq spektral sıxlıq funksiyası

$$f(\lambda) = C_1 \lambda^{-1-m}, \quad C_1 = (2\pi)^{-1} \Gamma(1+m) \sin \frac{\pi m}{2} C$$

düsturu ilə ifadə olunan $\zeta(t)$ avtomodel *Qauss prosesidir*. K. b. k.-ü Viner prosesindən (yəni Braun hərəkəti prosesindən)

kəsr tərtibli inteqrallama ilə almaq mümkündür; bu proses avtomodel təsadüfi prosesdir, belə ki, $\zeta(t)$-nin artımlarının ehtimal paylanmaları ixtiyari $h>0$ qiymətində $t \to ht$, $\zeta \to h^{-m/2}\zeta$ oxşarlıq çevirmələrinə nəzərən invariantdır. Bəzən, $n>3$ olduqda üstlü spektral sıxlıq funksiyası $f(\lambda) = C_1 \lambda^{-n}$ olan yüksək tərtibli stasionar artımlarlı avtomodel Qauss prosesləri və spektral sıxlıq funksiyası $f(\lambda) = C_1 \lambda^{-n}$, $n<-1$ olan ümumiləşmiş stasionar Qauss prosesləri də K. b. k. prosesləri adlanır.

Əd.: [1] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1955, т. 19, с. 319–44; [2] Mandelbrot B. B., Van Ness J. W., «SIAM Rev.», 1968, v. 10, № 4, p. 422–37.

KƏSRİ BRAUN HƏRƏKƏTİ « дробное броуновское движение; fractional Brownian motion » – bax, *Kəsri bəyaz küy.*

KƏSRİ FAKTOR EKSPERİMENT « дробный факторный эксперимент; fractional factorial experiment » – ölçmələr sayı tam faktor eksperimentdəkindən az olan, yəni $s_1, s_2, ..., s_m$-dən az olan *faktor eksperimentdir*, burada s_i, – i-ci faktorun səviyyələri sayı, m – faktorların sayıdır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983.

KƏSRİ FAKTOR PLAN « дробный факторный план; fractional factorial design » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin.*

KƏSRİ KÜY PROSESİ « дробнового шума процесс; shot noise process » –

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(t - t_n) \qquad (1)$$

tipli *impulsal təsadüfi prosesdir*, burada $\Gamma(t)$ – kvadratı ilə inteqrallanan, verilmiş həqiqi inteqrallanan funksiya, t_n, $n = 0, 1, ...$ – nöqtələrin təsadüfi ardıcıllığıdır (adətən, impulsların baş vermə anları Puasson ardıcıllığı fərz olunan). K. k. p. radiotexnikada kəsri küyü – elektron lampanın çıxışında katodla qızan elektronların emissiyasının xüsusiyyətindən yaranan, cərəyanın nizamsız fluktuasiyalarını təsvir etmək üçün geniş istifadə olunur (bax, məs., [1] – [3]). $\{t_n\}$ nöqtələrin Puasson ardıcıllığıdırsa, $\zeta(t)$-nin riyazi gözləməsi və dispersiyası

$$\mathbf{M}\zeta(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t)\,dt \qquad (2)$$

$$\mathbf{D}\zeta(t) = \mathbf{M}\left[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)\right]^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^2(t)\,dt \qquad (3)$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada λ – vahid zaman ərzində t_n nöqtələrinin sayının orta qiymətidir. Bu düsturları N. Kempbell [4]-də almışdır və çox vaxt bunlar Kempbell teoremi adlandırılır (bax, [3]; [5]). (2) və (3) düsturlarının ümumiləşmiş ifadələri – amplitudları eyni qanunla paylanmış qarşılıqlı asılı olmayan amplitud – modelləşmiş prosesin riyazi gözləməsi və korrelyasiya funksiyası üçün düsturlardır, bu amplitudlar isə impulsların baş vermə anlarının Puasson ardıcıllığına müvafiq amplitudlardır. K. k. p. $\zeta(t)$-nin birölçülü ehtimal paylanması və $\zeta(t)$-nin ixtiyari tərtib semiinvariantlarının düsturları ilə [3]-də tanış olmaq olar.

Əd.: [1] Давенпорт В. Б., Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, пер. с англ., М., 1960; [2] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, пер. с англ., т. 1, М., 1961; [3] Rice S. O., «Bell System Techn. J.», 1944, v. 23, № 3, p. 282–332; [4] Campbell N., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1909, v. 15, p. 117–36; 310–28; [5] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956.

Kİ FAN METRİKASI « Ки Фан метрика; Ky Fan metric » – ehtimala görə yığılma topologiyasını reallaşdıran mürəkkəb *ehtimal metrikasıdır*. Qiymətləri hər hansı separabel $(\mathbf{U}, d)$ metrik fəzasından olan ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün bu metrika

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : \mathbf{P}(d(\xi, \eta) > \varepsilon) < \varepsilon\}$$

münasibətilə təyin olunur. *Levi – Proxorov metrikasına* görə K. F. m. *protominimal metrikadır* (bax, *Ştrassen teoremi*).

KİÇİK KANONİK ANSAMBL « малый канонический ансамбль; small canonical ensemble » – bax, *Gibbs paylanması.*

KİÇİK YAYINMALAR təsadüfi proseslər və dolaşmalar üçün **« малые уклонения** для случайных процессов и блужданий; **small deviations** for random processes and walks **»** – Y, – $(X, \mathcal{B})$ ölçülən fəzasında təsadüfi proses və ya dolaşmaya uyğun təsadüfi element olarsa, $G \in \mathcal{B}$ və $\varepsilon \to 0$ olduqda $\mathbf{P}\{Y \in \varepsilon G\} \to 0$ şərtini ödəyən $\{Y \in \varepsilon\, G\}$ şəklində hadisələrdir. K. y. ehtimalları haqqında teoremlər funksional fəzalarda lokal teoremlər rolunu oynayır və Çjun formasında təkrar loqarifm qanunu tipli teoremlərin isbatı üçün mühüm əhəmiyyətə malikdirlər (bax, [1]).

G oblastları

$$G = G(g^-, g^+) = \{f = f(t) : g^-(t) < f(t) < g^+(t)\},$$

$$g^-(0) < 0 < g^+(0),\ g^-(t) < g^+(t),\ 0 \le t \le 1$$

münasibətlərilə təyin olunan zolaqlar olduqda, K. y. ehtimalları daha çox öyrənilmişdir. Əgər $Y = \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t)$ standart Viner prosesi $[0, 1]$ parçasında verilmişdirsə və $g^{\pm}(t)$ funksiyaları olduqca hamardırlarsa, onda

$$\mathbf{P}\{\boldsymbol{w} \in \varepsilon G(g^-, g^+)\} \sim c \exp\left\{-\frac{\pi^2}{8\varepsilon^2} \int_0^1 (g^+(t) - g^-(t))^{-2}\,dt\right\}$$

münasibəti doğrudur, burada $c = c(g^-, g^+)$ konstantı aşkar şəkildə tapılmışdır (bax, [2], [4]).

$Y = s_n = s_n(t)$, – $(k/n,\ S_k/\sigma\sqrt{n})$, $k = 0, 1, ..., n$ nöqtələri üzrə qurulmuş təsadüfi sınıq xətt olsun; $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + ... + X_k$ və X_k toplananları asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir, $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Əgər $g^{\pm}(t) \equiv a^{\pm} \equiv \text{const}$ olarsa, onda geniş fərziyyələrlə $\mathbf{P}\{s_n(\varepsilon G)\}$ ehtimalının asimptotikası $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$,

$\varepsilon\sqrt{n} \to \infty$ yayınmalarının bütün spektri üçün tapılmışdır (bax, [1]):

$$\mathbf{P}\{\varepsilon a^- \sqrt{n} < S_k < \varepsilon a^+ \sqrt{n},\ k = 1, ..., n\} \sim c\lambda^n (\varepsilon\sqrt{n}(a^+ - a^-)/2)$$

burada $\lambda(a)$, – $T_a \varphi(x) = \mathbf{M}\{\varphi(X_1/a + x),\ |X_1/a + x| < 1\}$ operatorunun modula görə maksimal məxsusi ədəddir; bu halda $a \to \infty$ olduqda $\ln\lambda(a) \sim -\pi^2\sigma^2/8a^2$. Əgər $g^{\pm}(t)$ sərhədləri əyrixətli olarsa, onda K. y. ehtimallarının kobud (loqarifmik) asimptotikası üçün ixtiyari $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon\sqrt{n} \to \infty$ şərtlərini ödəyən ixtiyari ε, n üçün

$$\ln \mathbf{P}\{s_n \in \varepsilon G(g^-,\ g^+)\} \sim \ln \mathbf{P}\{w \in \varepsilon G(g^-,\ g^+)\}$$

müddəası doğrudur (bax, [3], [5]).

Qauss təsadüfi proseslərinin müəyyən bir sinfinin zolaqları üçün (bax, [4], [6]) və Hilbert fəzasında kürələr üçün (bax, [7]) K. y. ehtimallarının asimptotikası məlumdur.

Əd.: [1] Могульский А. А., «Тр. Ин-та матем. СО АН СССР», 1985, т. 5, с. 45–56; [2] Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1982, т. 23, № 3, с. 161–74; [3] Могульский А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 755–65; [4] Новиков А. А., «Матем. заметки», 1981, т. 29, № 2, с. 291–301; [5] Новиков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1980, т. 44, № 4, с. 868–85; [6] Сытая Г. Н., в кн.: Аналитические методы в теории вероятностей, К., 1979, с. 95–98; [7] Сытая Г. Н., в сб.: Теория случайных процессов. Республиканский межведомственный сборник, К., 1974, в. 2, с. 93–104.

KİFER – VEYS MƏSƏLƏSİ « Кифера – Вейса задача; Kiefer – Weiss problem » – bax, *Ardıcıl yoxlanılması*, *hipotezlərin*.

KİFER – VOLFOVİTS PROSEDURU stoxastik approksimasiyanın **« Кифера – Вольфовица процедура** стохастической аппроксимации; **Kiefer – Wolfowitz procedure** of stochastic approximation **»** – naməlum *reqressiya* funksiyasının ekstremum nöqtələrini tapmaq üçün prosedurdur. J. Kifer və J. Volfovits stoxastik approksimasiyanın *Robbins – Monro proseduru* ideyasına əsaslanaraq, naməlum rerqessiya funksiyasının maksimum nöqtələrinin tapılması ilə əlaqədar aşağıdakı məsələyə baxmışlar (bax, [1]). $R(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – $x = x_0$ nöqtəsində yeganə maksimuma malik, kəsilməz differensiallanan raqressiya funksiyası olsun. Məsələ ondan ibarətdir ki, $G(n, x)$ orta qiymətləri sıfra bərabər təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $Y(n, x) = R(x) + G(n, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$ asılı olmayan ölçmələri üzrə x_0 kəmiyyəti tapılmalıdır. Məsələnin həlli üçün aşağıdakı prosedur təklif olunmuşdur (K. – V. p.):

$$X(1) = x,\ X(n+1) - X(n) =$$

$$= \frac{a(n)}{c(n)}[Y(n+1, X(n) + c(n)) - Y(n+1, X(n) - c(n))], (*)$$

burada x – ixtiyari başlanğıc nöqtə, $a(n)$ və $c(n)$ – hər hansı xüsusi olaraq seçilən ardıcıllıqlardır. İsbat olunmuşdur ki, $R(x)$ və $G(n, x)$ üzərinə qoyulan bəzi şərtlərlə (*) K. – V. p. n artdıqca ehtimala görə x_0 -a yığılır. Məs., X_n -in x_0 -a 1 ehtimalla yığıldığı isbat olunmuşdur (bax, [3]). Xüsusi surətdə normalanmış $X(n) - x_0$ prosesinin paylanmalarının xassələri öyrənilmişdir (bax, [4] – [6]).

Əd.: [1] Kiefer J., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, № 3, p. 462–66; [2] Базан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [3] Blum J., «Ann. Math. Statist.», 1954, v. 25, № 4, p. 737–44; [4] Derman C., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 532–36; [5] Dupac V., «Casopic pestov. mat.», 1957, v. 82, p. 47–75; [6] Sacks J., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 2, p. 373–405.

KİMYƏVİ POTENSİAL « химический потенциал; chemical potential » – bax, *Potensial*(ı) Gibbs meydanının.

KİNETİK KÖÇÜRTMƏ TƏNLİYİ bir hissəcik halında paylanma funksiyası üçün **« кинетическое уравнение переноса** для одночастичной функции распределения; **kinetic transfer equation** for one-particle distribution function **»** – qeyri – tarazlıqlı statistik fizikada kinetik nəzəriyyənin əsas tənliklərindən biridir. Kinetik qaz nəzəriyyəsində Boltsman tənlikləri, Vlasov tənlikləri, plazma fizikasında Balesku – Lenard tənliyi, neytronlar, fotonlar, elektron və s. kimi hissəciklərin müxtəlif köçürtmə tənlikləri – mühüm K. k. t.-ləridir.

Hissəciyin faza fəzası $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının oblastı olduğu halda, az qarışığı olan hissəciklər mühitində K. k. t.-lərinin çoxunu asimptotik olaraq, $Af = g$ şəklində, hər hansı xətti A operatoru ilə stasionar köçürtmə prosesi üçün [və adətən, $(\partial/\partial f) f + Af = g$ şəklində qeyri – stasionar proses üçün] ehtimal sıxlığı f və ya axın üçün uyğun sərhəd şərtlərilə

$$\sum_{i=1}^{n} [(\partial/\partial x^i)\, a^i(x) f] - \sum_{i,j=1}^{n} [(\partial^2/\partial x^i \partial x^j)\, b^{ij}(x) f] +$$

$$+ \lambda(x) f - \int f(x')\mathcal{K}(x', x)\, dx' = (Af)(x) \qquad (*)$$

tənliyi şəklində yazmaq olar. $A = D + \Lambda - K$ ayrılışından differensial D operatorunun 1-ci və 2-ci tərtib hədləri uyğun olaraq, hamar (orta) hərəkəti və hissəciklərin kəsilməz diffuziyasını təsvir edir, toqquşmalar tezliyi $\lambda(x)$-ə vurma operatoru Λ kəsilməz hərəkətin stoxastik qırılma (hissəciklərin udulma, səpələnmə və ya bölünməsi aktında) qanununu, K inteqral operatorunun nüvəsi $\mathcal{K}(x', x)$ səpələnmə və bölünmə (əgər varsa) qanununu təyin edir. Qoşma A^* operatoru (bax, *Qoşma köçürtmə məsələsi*) əmsallar və nüvə üzərində təbii şərtlərlə, $\mathbb{R}^n$-də zaman üzrə bircins qırılan Markov prosesi $X(t)$-nin (bu şaxələnən proses ola bilər) infinitezimal operatorudur. Bu halda D operatoru $Y(t)$ kəsilməz Markov prosesinin infinitezimal operatoru olur. $X(t)$ prosesinin trayektoriyaları $Y(t)$, $t_{n-1} < t < t_n$ Markov prosesinin $t_1, ..., t_n, ...$ anlarında iki ardıcıl sıçrayışları arasında mühitin hissəcikləri ilə toqquşmalarında yaranan trayektoriyanın parçalarından ibarətdir. Sıçrayışlar (və artımların) kəmiyyətinin statistikası $X(t_n - 0) \to X(t_n + 0)$ $\mathcal{K}$ nüvəsi ilə (və ya onun uyğun toplananlara dekompozisiyası ilə) təyin olunur, sıçrayışlar arasındakı zaman müddətinin statistikası $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ $Y(t)$ Markov prosesinin (bax, yuxarı) trayekto-

riyalarında $Y(t_{n-1}) = X(t_{n-1}+0)$ şərti ödənilməklə multiplikativ inteqralla təyin olunur; yəni

$$\mathbf{P}\{\tau_n > t\} = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(Y(t_{n-1}+s))\,ds\right\}.$$

Beləliklə, şaxələnən olmayan proseslər üçün $A^* = D^* + \Lambda - K$ operatoru köçürtmə prosesinin tam stoxastik differensial təsvirini verir (bax, [4]). K. k. t.-nin belə ehtimali şərhi köçürtmə məsələlərinin *statistik modelləşdirilməsi* üçün əsas olur. (*) K. k. t. ilə köçürtmənin təsviri Payerls tənliyi (ümumiləşmiş) ilə bağlıdır. Bir qayda olaraq, (*) K. k. t.-nin tətbiqində hədlərin bir hissəsi iştirak etmir, məs., səpələnmə ya xalis sıçrayışvari və ya xalis diffuzion fərz olunur.

Əd.: [1] А х и е з е р А. И., П е л е т м и н с к и й С. В., Методы статистической физики, М., 1977; [2] С и п и н В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971; [3] Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [4] Ф р о л о в А. С., Ч е н ц о в Н. Н., в кн.: Метод Монте – Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967, с. 5–52; [5] Кинетическое уравнение, Матем. энц., т. 2, М., 1979; [6] Переноса уравнения, Матем. энц., т. 4, М., 1984; [7] Переноса излучения теория, Матем. энц., т. 4, М., 1984.

KLARK DÜSTURU « Кларка формула; Clark formula » – $w = (w_t)_{t\in[0,1]}$ Viner prosesinin hamar $f(w)$ funksionalını stoxastik inteqral şəklində ifadə edən düsturdur. Əgər f funksionalı $C_{[0,1]}$ kəsilməz funksiyalar fəzasında Freşe mənada differensiallanan olarsa və müəyyən artım şərtlərini ödəyərsə, $\lambda(dt, x)$ isə Riss teoreminə görə $f'(x)$ (x nöqtəsində Freşe törəməsi) xətti funksionalına uyğun, $[0,1]$-də ölçü olarsa, onda

$$f(w) = \boldsymbol{E} f(w) + \int_0^1 \boldsymbol{E}[\lambda([t,1], w)\,|\,\mathcal{F}_t^w]\,dw_t.$$

Bəzən

$$\xi = \boldsymbol{E}\xi + \int_0^1 \varphi_t\,dw_t$$

ifadəsi də K. d. adlandırılır, bu ifadə ixtiyari kvadratik inteqrallanan $\xi = g(w)$ təsadüfi kəmiyyəti üçün doğrudur, burada uzlaşdırılmış $\varphi = (\varphi_t)$ prosesi

$$\boldsymbol{E}\int_0^1 \varphi_t^2 dt < \infty$$

şərti ödənildikdə, birqiymətli təyin olunur.

Əd.: [1] C l a r k J. M. C., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 4, p. 1282–95.

KLASSİFİKATOR « классификатор; classifier » – təsnifat məsələlərində, diskriminant analiz və obrazların müəyyənləşdirilməsi məsələlərində yaranan statistik *həlledici qaydanın* xüsusi halıdır. Sözün dar mənasında K. siqnalları, obrazları təsnifedici texniki qurğudur.

KLASTER « кластер; cluster » – bax, *İyerarx prosedurları*, *təsnifatın.*

KLASTER – ANALİZ « кластер – анализ; cluster analysis » – verilənlərin bu və ya digər çoxluqlarının əsası olan iyerarxları (bölgüləri) formalaşdıran və ya aşkara çıxaran hesablama prosedurları toplusudur. Bu bölgüləri reallaşdıran alqoritmlər, bir qayda olaraq, iki əsas addımdan ibarətdir: metrikanın və ya oxşarlıq göstəricilərinin hesablanması və klasterlərin addımba-addım qurulması. K. – a. məsələləri iki əsas tipə ayrılır. Birinci tip məsələlər n obyektdən ibarət I çoxluğunun $m<n$, m klasterə bölünməsi tipli məsələlərdir, yəni klasterlərin sayını apriori seçmək olar və bu say əvvəlcədən verilə bilinər. İkinci tipdə klasterlərin sayı çoxluğun klasterlərə bölünmə prosesində, hər hansı məqsədli funksiyanın optimizasiyasına əsaslanaraq təyin olunur.

Əd.: [1] Д ю р а н Б., О д е л л П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977; [2] Классификация и кластер, пер. с англ., М., 1980.

KLASTER MODEL « кластерная модель; cluster model » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli*.

KLASTER – PROSEDUR « кластер – процедура; cluster procedure » – verilən metrika mənasında bir-birinə yaxın yerləşən iki obyektin (klasterin) bir klasterə birləşdirilməsi prosedurudur. Bu onunla nəticələnir ki, obyektlərin əvvəlki sayı azalır və bunların sayı $(n-1)$-ə bərabər olur, belə ki, bir klaster iki obyektdən ibarət olub, digər $n-2$ sayda klasterlərin hər birində bir obyekt olur. K. - p. klasterlərin biraddımla qurulmasında tətbiq olunur.

Əd.: [1] Д ю р а н Б., О д е л л П., Кластерный анализ, пер. с англ., М., 1977; [2] Классификация и кластер, пер. с англ., М., 1980.

KLASTERLƏRƏ AYRILIŞ METODU « кластерных разложений метод; method of cluster expansion » – statistik fizika və kvant meydan nəzəriyyəsində fiziki sistem və meydanların tədqiqatında tətbiq olunan analitik metodlardan biridir. $\{\varphi_t,\ t\in\mathbb{R}^d$ və ya $t\in\mathbb{Z}^d\}$, – d – ölçülü $\mathbb{R}^d$ fəzasında (və ya d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində) təyin olunmuş təsadüfi meydan, f_A, $A\subset\mathbb{R}^d$ $(A\subset\mathbb{Z}^d)$ – meydanın lokal funksionalı olsun (yəni məhdud A çoxluğunda yalnız konfiqurasiyaların qiymətlərindən asılı olan, meydan konfiqurasiyasının funksiyası olsun). Bu funksionalın orta qiyməti $\langle f_A\rangle$-nın k l a s t e r a y r ı l ı ş ı

$$\langle f_A\rangle = \sum_R b_R(f_A) \qquad (1)$$

şəklində ifadəyə deyilir, burada cəmləmə müəyyən «yaxşı görünən» R indekslərinin toplusu üzrə aparılır, $b_R(f_A)$ kəmiyyətləri isə f_A-nın qiymətləri və meydanı təyin edən «parametrin» qiymətinə görə «olduqca aşkar şəkildə» ifadə olunurlar. (Məs., ən tipik sayılan Gibbs təsadüfi meydan halında «parametr» qarşılıqlıtəsir potensialıdır; bax, [1]). (1)-ə analoji klaster ayrılışlarını təsadüfi meydanın digər xarakteristikaları üçün də almaq olar (məs., Gibbs təsadüfi meydanları üçün xüsusi entropiya, xüsusi sərbəst enerji, vakuum vəziyyəti üzrə $\langle\cdot\rangle$ orta qiymətləri üçün də).

Daha ətrafli, bax, B. и M. C. Э., M., 1999, səh. 232 .

Əd.: [1] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [2] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984; [3] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [4] И ц и к с о н К., З ю б е р Ж. Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

KOBUD XƏTALAR MODELİ « модель грубых ошибок; rough errors model » – bax, *Robast qiymət.*

KOD « код; code » – A əlifbasında bütün sözlər çoxluğunun ixtiyari altçoxluğudur. İnformasiya nəzəriyyəsində A əlifbası kimi rabitə kanalının girişində siqnallar çoxluğu $\mathscr{Y}$ seçilir və baxılan K.-lara müəyyən məhdudiyyətlərlə K.-un bəzi funksionallarının optimizasiya məsələləri araşdırılır.

Əsas məsələlər: 1) K.-un birqiymətli dekodlanması şərtilə onun orta uzunluğunun minimizasiyası; 2) *səhv dekodlama ehtimalının* minimizasiyası; 3) K.-ların müxtəlif siniflərində *kod məsafəsinin* maksimizasiyası kimi məsələlərdir. Əlifbada $A = \{0, 1\}$ olduğu hallara, yəni ikilik kodlara daha çox baxılır.

Birinci məsələ məlumatlar mənbəinin *kodlanması* probleminə aiddir. Bu problemin həllinin bəzi prinsipial anları yaddaşsız diskret məlumatlar mənbəinin ikilik kodlanması misalında göstərilmişdir; bu halda mənbənin bir-birindən asılı olmadan $p_1, ..., p_m$ ehtimalları ilə uyğun olaraq $x_1, ..., x_m$ məlumatlarını doğurduğu fərz olunur. Hər bir x_i məlumatına l_i uzunluqlu $y_i = (y_i^{(1)}, ..., y_i^{(l_i)})$ kod sözü qarşı qoyulur (yəni x_i kodlaşdırılır). Birqiymətli dekodlanma şərtindən (yəni ixtiyari ardıcıllıq ard-ardınca gələn kod sözlərinə birdən artıq olmayan yeganə üsulla bölünə bilər) aydındır ki, $\sum 2^{-l_i} \le 1$ bərabərsizliyi ödənilir (Kraft – Mak-Millan bərabərsizliyi) və orta uzunluq $l = \sum p_i l_i$ mənbəinin entropiyası $H = -\sum p_i \log_2 p_i$ -dan kiçik deyildir. l -in H -a yaxınlaşması üçün təyin edilən məlum konstruksiyaların kodlar adlandırılmasına baxmayaraq, bu konstruksiyalara *kodlanma* kimi baxmaq düzgün olardı, belə ki, orta uzunluqlu K.-un funksionalı üçün hansı məlumata hansı kod sözünün uyğun olması mühümdür.

İkinci məsələnin həllində səhvləri korrektləyici K.-lar mühüm rol oynayır. Məs., additiv küylü kanal halında (giriş əlifbasının çıxış əlifbası ilə üst-üstə düşdüyü və Abel qrupu strukturlu olduğu halında) deyilir ki, « y siqnalı ötürüldükdə $e = \tilde{y} - y \ne 0$ xətası baş vermişdir», burada $\tilde{y}$ rabitə kanalının çıxışındakı siqnaldır. Onda tərifə görə C kodu xətaların hər hansı E çoxluğunun səhvlərini korrektləyir, bu şərtlə ki, $c + e = c + e'$ bərabərliyindən $c = c'$ olduğu alınsın ($c, c' \in C$, $e, e' \in E$). Belə kanallar üçün səhv dekodlama ehtimalı kiçik olan K.-un qurulması, mahiyyətcə, verilən kanal üçün «tipik» səhvlər çoxluğu E -nin səhvlərini korrektləyici K.-un qurulmasına gətirilir. Məs., ikilik simmetrik kanal üçün «tipik» çoxluq kimi səhvlər çoxluğu E_t -ni götürmək olar ki, bu səhvlər kod sözünün mövqelərindən t -dən artıq saydasına aid olmur. C kodu ilə E_t səhvlər çoxluğunda səhvlərin korrektlənməsi – E_t -nin kod məsafəsinin Hemminq metrikası ilə uzunluğu $2t + 1$ -dən az olmur və belə K. t sayda səhv korrektləyici kod adlanır. $t \le \delta n$ sayda səhvlər düzəldən, n uzunluqlu yaxşı ikilik blok K.-un sürəti R_δ^2 üçün

$$R_\delta \ge 1 - h_2(\delta)$$

Varşamov – Hilbert bərabərsizliyi doğrudur, burada

$$h_q(x) = x \log_2(q-1) - (x \log_2 x + (1-x)\log_2(1-x)).$$

Əgər Varşamov – Hilbert sərhədi asimptotik dəqiq olarsa (bu geniş yayılmış hipotezdir), onda ikilik giriş əlifbası olan yaddaşsız ixtiyari diskret kanal üçün etibarlılıq funksiyasının məlum aşağı sərhədinin dəqiqliyi nəticə kimi alınır (bax, *Səhv dekodlama ehtimalı*).

Rabitə kanallarının bir çox tipləri üçün ikinci və qismən üçüncü məsələnin həlli münasib ansamblda (ehtimal fəzasında) araşdırılan funksionalın orta qiymətinin hesablanmasına əsaslanır (bax, *Təsadüfi kodla(n)ma*). Bu halda olduqca tipik hal səhv kodlama ehtimalının və kod məsafələrinin ya «orta hesabla», ya da «sanki hamısı» üçün doğru olan qiymətlərinin konstruktiv metodlarla alınmadığı bir haldır. $q \ge 49$ olduqda q -lük K.-lar üçün ($A = \{0, 1, ..., q-1\}$ olduqda) Varşamov – Hilbert sərhədinin yaxşılaşması istisna haldır, lakin qeyd etmək lazımdır ki, bu $R_\delta^{(q)} \ge 1 - h_q(2\delta)$ sərhədi xətti K.-ların «sanki hamısı» üçün dəqiqdir.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ, М., 1985; [4] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., Теория кодов, исправляющие ошибки, пер. с англ., М., 1979; [5] Гоппа В. Д., «Докл. АН СССР», 1981, т. 259, № 6, с. 1289–90; [6] Влэдуц С. Г., Кацман Г. Л., Цфасман М. А., «Проблема передачи информации», 1984, т. 20, № 1, с. 47–55.

KOD ağacvari **« код** древовидный; tree **code »** – bax, *Ağacvari kod*.

KOD(u) blok **« код** блоковый; block **code »** – bax, *Blok kod*.

KOD xətti **« код** линейный; linear **code »** – bax, *Blok kod*.

KOD(u) kaskad **« код** каскадный; cascade **code »** – bax, *Kaskad kod*.

KOD konvolyusion **« код** сверточный; convolutional **code »** – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD qeyri–müntəzəm **« код** неравномерный; variable–length **code »** – bax, *Qeyri – müntəzəm kod.*

KOD qruplu **« код** групповой; group **code »** – bax, *Blok kod*.

KOD rekurrent **« код** рекуррентный; recurrent **code »** – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD; sürət **« код;** скорость; **code** rate **»** – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD şəbəkəvari **« код** решетчатый; trellis **code »** – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD şəbəkəvari xətti **« код** решетчатый линейный; trellis linear **code »** – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD tsiklik **« код** циклический; cyclic **code »** – bax, *Blok kod*.

KOD uzunluğu **« код** длина; **code length »** – bax, *Blok kod*.

KOD; yaddaş **« код;** память; **code** memory **»** – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD ARDICILLIĞI « кодовая последовательность; code sequence » – bax, *Konvolyusion kod*.

KOD MƏSAFƏSİ « кодовое расстояние; code distance » – *kodun* müxtəlif sözləri arasında məsafələrdən minimalıdır. Giriş və çıxış əlifbaları üst-üstə düşən rabitə kanalında əgər giriş siqnalı y və çıxış siqnalı $\tilde{y}$ arasında $d(y, \tilde{y})$ məsafəsi K. m.-nin yarısından kiçik olarsa, onda kod məlumatı düzgün bərpa edə bilir (dekodlaya bilir).

Kodlama nəzəriyyəsində sözlər fəzasında araşdırılan metrikalar müəyyən rabitə kanalları ilə əlaqədardırlar. Məs., $y = (y_1, ..., y_n)$ və $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)$ sözlərində üst-üstə düşməyən mövqelərin sayı kimi təyin olunan Heminq metrikası $d_H(y, \tilde{y})$ və ikilik simmetrik kanalın keçid funksiyası $p(\tilde{y} \mid y)$

$$p(\tilde{y} \mid y) = p^{d_H(y,\tilde{y})} (1-p)^{n-d_H(y,\tilde{y})}$$

münasibətilə əlaqəlidirlər; buradan aydındır ki, məs., $p < 1/2$ olduqda, doğruyaoxşarlıq maksimumu üzrə və məsafənin minimumu üzrə dekodlamalar üst-üstə düşür.

Digər metrikalarda – Evklid, Li, asimmetrik, paket, arifmetik və s. kimi metrikalarda da K. m. öyrənilmişdir. Kod sürəti qeyd olunduğu halda K. m.-nin asimptotikası *səhv dekodlama ehtimalının* eksponensial azalma xarakteri ilə sıx əlaqədardır. Hal-hazırda yuxarıda qeyd olunan metrikaların heç biri üçün K. m.-nin dəqiq asimptotikası məlum deyildir (bununla belə, Heminq metrikası halında bu asimptotika «sanki bütün» xətti kodlar üçün məlumdur).

Əd.: [1] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [2] Левенштейн В. И., «Проблемы кибернетики», 1983, в. 40, с. 43–110; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

KOD SÖZ « кодовое слово; code word » – bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi*.

KODER « кодер; coder » – bax, *Konvolyusion kod*.

KODLAMA baxışla **« кодирование** с подглядыванием; **eribbing encoding »** – bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkəsi.*

KODLA(N)MA « кодирование; encoding » – $\mathscr{X}$ çoxluğunun $\mathscr{Y}$ əlifbasının sözləri çoxluğuna inikasıdır. İnformasiya nəzəriyyəsində $\mathscr{X}$ məlumatlar mənbəinin doğurduğu hər hansı çoxluq, $\mathscr{Y}$ rabitə kanalının girişində siqnallar çoxluğu olduğu halda K. araşdırılır. İnformasiya nəzəriyyəsində həll olunacaq məsələlərdən asılı olaraq müxtəlif K.-lar istifadə olunur: məlumatlar mənbəinin *kodlanması*, *təsadüfi kodlanma*, *universal kodlanma*.

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

KODLA(N)MA ehtimali (stoxastik) **« кодирование** вероятностное (стохастическое); stochastic source **encoding »** – bax, *Kodlanma*(sı) məlumatlar mənbəinin.

KODLA(N)MA kombinator **« кодирование** комбинаторное; combinatorial **encoding »** – bax, *Kodlanma*(sı) məlumatlar mənbəinin.

KODLA(N)MA; mürəkkəblik **« кодирование;** сложность; complexity of **coding »** – bax, *Mürəkkəblik*(yi) kodlama və dekodlamanın.

KODLA(N)MA təsadüfi **« кодирование** случайное; random **encoding »** – bax, *Təsadüfi kodlanma*.

KODLA(N)MA universal **« кодирование** универсальное; universal **encoding »** – bax, *Universal kodlanma*.

KODLA(N)MA BAXIŞLA « кодирование с подглядыванием; eribbing encoding » – kodlayıcı qurğular arasında müxtəlif tip əlaqələr daxil edilməsi mümkün olan *kodlamadır.*

Bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkələri.*

KODLAMA TEOREMLƏRİ « кодирования теоремы; coding theorems » – bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi*.

KODLANMA(sı) əlavə informasiyalı mənbənin **« кодирование** источника с дополнительной информацией; **source encoding** with side information **»** – çoxkomponentli məlumatlar mənbəinin kodlanma məsələlərindən biridir. Ümumi sxemin terminlərində (bax, *Mənbələr və kanallar şəbəkəsi*) bu məsələ aşağıdakı şəkildə ifadə olunur. İkikomponentli $U = (X_1, X_2)$ mənbəinə $(M = 2)$ baxılır. $A_1 = \{1\}$ və $A_2 = \{2\}$ çoxluqları ilə verilən iki kodlayıcı qurğu $(K = 2)$ və $B_1 = \{1\}, C_1 = \{1, 2\}$ çoxluqları ilə verilən bir dekodlayıcı qurğu $(J = 1)$ vardır. Beləliklə, dekodlayıcı qurğu yalnız X_1 komponentini bərpa etməlidir. X_2 komponenti isə köməkçi komponentdir (əlavə informasiya). U – ehtimal paylanması $p(x_1, x_2)$ ilə verilən, yaddaşsız, diskret stasionar ikikomponentli mənbə olduqda kodlamanın məqbul sürətlər oblastı $\mathfrak{R} = \{(R_1, R_2)\}$ aşağıdakı qayda ilə hesablanmışdır. $\mathfrak{P}$, – (X_1, X_2, V) təsadüfi kəmiyyətlərinin üçlüyü çoxluğu olsun və $p(x_1, x_2)$ isə (X_1, X_2)-nin paylanması, $X_1 - X_2 - V$-nin Markov zənciri (yəni X_1, V_2 X_2 verildiyi halda şərti asılı deyildirlər) əmələ gətirdiyi fərz olunur və V-nin aldığı qiymətlərin sayı $a + 2$-dən çox deyildir, burada a ədədi U mənbəinin X_2 komponentinin qiymətləri sayıdır. H şərti entropiya, I qarşılıqlı informasiya olduqda (bax, *İnformasiya miqdarı*) $(X_1, X_2, V) \in \mathfrak{P}$ üçün

$$\mathfrak{R}(X_1, X_2, V) = \{(R_1, R_2) : R_1 \geq H(x_1/V), R_2 \geq \geq I(X_2; V)\}$$

olsun. Onda

$$\mathfrak{R} = \text{co}(U(X_1, X_2, V) \in \mathfrak{P}\mathfrak{R}(X_1, X_2, V)\}$$

bərabərliyi doğrudur, burada co – qabarıq örtüyün işarəsidir.

Təsvir olunan məsələnin bir sıra ümumiləşmələri araşdırılmışdır. Məs., əlavə informasiyalı mənbənin K.-na Qauss mənbələri üçün baxılmışdır, məlumatların ümumi dəqiqlik kriterisi ilə bərpasına da baxılmışdır.

Əd.: [1] Гельфанд С. И., Прелов В. В., в кн.: Итоги науки. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 15, М., 1978, с. 123–62; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Ahlswede R., Korner J., «IEEE Trans. Inf. Theory», 1975, v. IT 21, № 6, p. 629–37; [4] Wyner A., «IEEE Trans. Inf. Theory», № 3, p. 294–300.

KODLANMA(sı) məlumatlar mənbəinin **« кодирование** источника сообщений; source **encoding »** – informasiya nəzəriyyəsinin informasiyanın yığcamlaşdırılmasını (kompakt ifadə edilməsini) öyrənən bölməsi-

dir. Məlumatlar mənbəi iki növə ayrılır: ilkin əlifbanın bütün sözlər çoxluğunun hər hansı altçoxluğunu doğuran k o m b i n a t o r m ə l u m a t l a r m ə n b ə i və bu sözləri müəyyən ehtimallarla doğuran e h t i m a l i (s t o x a s t i k) m ə l u m a t l a r m ə n b ə i. Məlumatlar mənbəinin K. – doğurulmuş sözlərin çıxış əlifbasının sözlərinə eynilə (inyektiv) inikasıdır; C d ə y ə r i ehtimali mənbə üçün bir giriş hərfinə uyğun çıxış hərflərinin orta sayı, kombinator mənbə üçün isə maksimal sayıdır. Məlumatlar mənbəinin K. nəzəriyyəsinin əsas faktı: C dəyərinin infimumu mənbənin entropiyası H -a bərabərdir ($\inf C = H$); bu fakt mənbələrin geniş sinfi və K. üçün isbat olunmuşdur. C dəyəri H entropiyasına yaxın kodların qurulması metodları işlənilmişdir. Məlumatlar mənbəinin K. nəzəriyyəsi informasiyanın kompyuterdə yerləşdirilməsində və rabitə praktikasında istifadə olunur.

Əd.: [1] Г а л л а г е р P., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., M., 1974.

KOHERENTLİK « когерентность; coherencity » – iki $X(t)$ və $Y(t)$, $-\infty < t < \infty$ *stasionar təsadüfi proseslərinin* uzlaşmasının, bu proseslər arasında xətti asılılıqdan (bax, *Xətti filtr*) yayınmasını ölçən xarakteristikadır. Xətalar sırası

$$Z(t) = Y(t) - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u)X(u), \quad t = 0, \pm 1, \ldots,$$

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |a(u)| < \infty$$

(diskret zaman halında) və

$$Z(t) = Y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} a(t-u)X(u)\,du \quad -\infty < t < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(u)|\,du < \infty$$

(kəsilməz zaman halında) $Y(t)$ və $X(t)$ sıraları arasındakı xətti asılılıqdan yayınmanı xarakterizə edir. $Z(t)$ prosesinin spektral sıxlığı

$$f_{ZZ}(\lambda) = f_{YY}(\lambda)\left[1 - \frac{|f_{YX}(\lambda)|^2}{f_{XX}(\lambda) f_{YY}(\lambda)}\right], \quad -\infty < \lambda < \infty$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $f_{XX}(\lambda)$, $f_{YY}(\lambda)$ və $f_{YX}(\lambda)$ – uyğun olaraq, $X(t)$ və $Y(t)$ skalyar proseslərinin spektral sıxlıq və qarşılıqlı spektral sıxlıq funksiyalarıdır.

$$K_{YX}(\lambda) = \frac{f_{YX}(\lambda)}{[f_{XX}(\lambda) f_{YY}(\lambda)]^{1/2}}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

funksiyası k o h e r e n t l i k f u n k s i y a s ı və ya k o h e r e n t l i k s p e k t r i adlanır; ədəbiyyatda bəzən bu funksiya k o h e r e n t l i k də adlanır.

Əgər $K_{YX}(\lambda) \equiv 1$ və ya $K_{YX}(\lambda) \equiv -1$ olarsa, onda xətalar sırası $Z(t)$-nin olmadığını ifadə edir, bu isə $X(t)$ və $Y(t)$ zaman sıralarının xətti asılılığına dəlalət edir. Əgər $K_{YX}(\lambda) \equiv 0$ olarsa, onda $Y(t)$ sırası filtrin çıxışında xətalar sırası $Z(t)$ ilə üst-üstə düşür və bu halda xətti asılılıq yoxdur. $0 < |K_{YX}(\lambda)|^2 < 1$ halında aralıq vəziyyət olur.

$K_{YX}(\lambda)$ funksiyası tezlik oblastında korrelyasiya funksiyasının kompleks ümumiləşməsidir və

$$K_{YX}(\lambda) = |K_{YX}(\lambda)| e^{iF_{YX}(\lambda)}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

şəklində ifadə oluna bilər;

$$F_{YX}(\lambda) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{Im} f_{YX}(\lambda)}{\operatorname{Re} f_{YX}(\lambda)}\right)$$

funksiyası f a z a adlanır. $X(t)$ və $Y(t)$ prosesləri xətti asılı olduqda faza ya $F_{YX}(\lambda) \equiv 0$ və ya $F_{YX}(\lambda) \equiv \pm\pi$ qiymətlərini, xətti asılılıq olmadığı halda isə $F_{YX}(\lambda) = \pm\pi/2$ qiymətini alır. $X(t)$ və $Y(t)$, $t = 0, 1, \ldots, N-1$ seçimləri üzrə K. funksiyasının tutarlı və meylsiz statistik qiyməti

$$\hat{K}_{YX}(\lambda) = \hat{f}_{YX}(\lambda)\left[\hat{f}_{XX}(\lambda)\,\hat{f}_{YY}(\lambda)\right]^{-1/2} \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur; $\hat{f}_{YX}(\lambda)$, $\hat{f}_{XX}(\lambda)$, $\hat{f}_{YY}(\lambda)$ spektral sıxlığın asimptotik tutarlı və asimptotik meylsiz qeyri – parametrik statistik qiymətləridir.

K o h e r e n t l i k ə m s a l ı və ya koherentlik spektrinin modulunun kvadratı $X(t)$ və $Y(t)$ skalyar proseslərinin iki tezlik komponentləri arasındakı λ tezliyində korrelyasiyanı xarakterizə edir və $0 \le |K_{YX}(\lambda)|^2 \le 1$ bərabərsizliklərini ödəyir.

$X(t)$ və $Y(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots, N-1$ seçimləri üzrə K. əmsalının asimptotik tutarlı və asimptotik meylsiz statistik qiyməti

$$|K_{YX}(\lambda)|^2 = \left|\hat{f}_{YX}(\lambda)\right|^2 \left|\hat{f}_{XX}(\lambda)\,\hat{f}_{YY}(\lambda)\right|^{-1} \qquad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Birölçülü $Y(t)$ prosesi üçün (və ya çoxölçülü prosesin ayrılıqda götürülmüş hər bir komponenti üçün) və r – ölçülü $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ vektor prosesi üçün t o p l a m k o h e r e n t l i k (rus. множественная когерентность)

$$|K_{YX}(\lambda)|^2 = f_{YX}(\lambda) f_{XX}^{-1}(\lambda) f_{XY}(\lambda) f_{YY}^{-1}(\lambda), \qquad (3)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $f_{YX}(\lambda)$, $f_{XY}(\lambda)$, – $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin qarşılıqlı spektral sıxlıqlarının matrisləridir, $f_{XX}(\lambda)$, – $X(t)$ prosesinin spektral sıxlığının cırlaşmayan matrisidir, $f_{YY}(\lambda) > 0$ isə $Y(t)$ prosesinin spektral sıxlığıdır.

Toplam K. üçün statistik qiymət K. əmsalının statistik qiymətinə analoji olaraq (3) matrisinin hər bir elementi üçün təyin olunur və o, (2) statistik qiymətinə xas olan bütün xassələri ödəyir.

X ü s u s i k o h e r e n t l i k $Y(t)$-dən xətti filtr vasitəsilə r – ölçülü $X(t)$ sırasının xətti təsirinin xaric edilməsindən sonra s – ölçülü $Y(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ sırasının komponentləri arasında xətti asılılığı təyin edən funksiyadır, yəni

$$Z(t) = Y(t) - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u)X(t-u), \quad t = 0, \pm 1, \ldots,$$

$$\mathbf{M}\,Y(t)=0\,,\quad \sum_{u=-\infty}^{\infty}\left|a(u)\right|<\infty\,.$$

Əgər kovariasiya funksiyaları $C_{XX}(u)$ və $C_{YY}(u)$ mütləq cəmlənən, spektral sıxlıq matrisi $f_{XX}(\lambda)$ cırlaşmayan olarsa, onda xüsusi K.

$$K_{Y_aY_bX}(\lambda)\;=f_{Y_aY_bX}(\lambda)[\,f_{Y_aY_aX}(\lambda)\,f_{Y_bY_bX}(\lambda)\,]^{-1/2}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $f_{Y_iY_jX}(\lambda)=f_{Z_iZ_jX}(\lambda)$, $i,j=a,b$ xüsusi spektral sıxlıq, $Y_a(t)$ və $Y_b(t)$, – s – ölçülü $Y(t)$ sırasının komponentləridir. $K_{Y_aY_bX}(\lambda)$, $f_{Y_aY_bX}(\lambda)$, $f_{Y_aY_aX}(\lambda)$, $f_{Y_bY_bX}(\lambda)$ funksiyaları onu ifadə edir ki, $Y_a(t)$ və $Y_b(t)$ sıraları arasında zamana görə invariant münasibətin olması bu sıraların hər birinin $X(t)$ sırası ilə xətti əlaqəsinin olmasından nə dərəcədə asılıdır. Xüsusi K. üçün statistik qiymət (1) düsturuna əsasən analoji olaraq, $Z(t)$ və $Y(t)$ sıraları üçün təyin edilir və eyni xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер., с англ., М., 1976; [2] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [3] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 2, М., 1972; [4] Отнес Р., Энокссон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [5] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

KOHERENTLİK ƏMSALI « когерентности коэффициент; coherence coefficient » – bax, *Koherentlik.*

KOHERENTLİK SPEKTRİ « когерентности спектр; coherence spectrum » – bax, *Koherentlik.*

KOKRAN TEOREMİ « Кокрана теорема; Cochran theorem » – bax, *Dispersion analiz.*

KOKS NÖQTƏVİ PROSESİ « Кокса точечный процесс; Cox point process » – *nöqtəvi Puasson proseslərinin* qarışığı olan *təsadüfi nöqtəvi prosesdir.* $\mathbf{P}_\Lambda(\cdot)$ lokal məhdud sayıcı ölçülər çoxluğu $(M,\mathfrak{M})$-də ehtimal paylanması olsun; bu paylanma moment ölçüsü $\Lambda(\cdot)$ olan nöqtəvi Puasson prosesini təyin edir, $G(\cdot)$ isə $(A,\mathfrak{A})$ faza fəzasında bütün lokal məhdud ölçülər çoxluğunda ehtimal paylanması olsun. Onda bu paylanmaların qarışığı

$$\mathbf{Q}(\cdot)\;=\int\;\mathbf{P}_\Lambda(\cdot)\,G\,(d\,\Lambda)$$

K. n. p.-ni təyin edir; bu proses ikiqat stoxastik nöqtəvi Puasson prosesi, yəni moment ölçüsü Λ – təsadüfi ölçü olan nöqtəvi Puasson prosesi kimi anlaşıla bilinər.

Əgər təsadüfi nöqtəvi prosesin paylanması $\mathbf{Q}$ ixtiyari $c\in(0,\,1)$ qiymətində c ehtimalı ilə hər hansı nöqtəvi təsadüfi prosesin realizasiyalarının nöqtələrinin asılı olmayan kəsilmələri nəticəsində alınarsa, onda $\mathbf{Q}$ paylanması K. n. p.-ni təyin edir.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [2] Grandell J., Duobly stochastic Poisson processes, B. – [a. o.], 1976.

KOKS PROSESİ « Кокса процесс; Cox process » – bax, *Həndəsi proses*.

KOLMOQOROV AKSİOMATİKASI ehtimal nəzəriyyəsinin **« Колмогорова аксиоматика** теории вероятностей; **Kolmogorov's axiomatics** of the probability **»** – *ehtimal nəzəriyyəsinə* müasir riyaziyyatda qəbul edilmiş üslub vermiş, ehtimal modellərinin riyazi şərhi üçün ümumən qəbul olunmuş, ən geniş yayılmış yanaşmadır. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlaşdırılması problemi D. Hilbertin (D. Hilbert) 8 avqust 1900-də riyaziyyatçıların Parisdə keçirilmiş II Beynəlxalq konqresindəki məşhur məruzəsindəki 6-cı problemdə (bax, [1]) formalaşmışdır və bu problemdə şərh olunan «… artıq riyaziyyat görkəmli rol oynayır: bu ilk növbədə ehtimal nəzəriyyəsi və mexanikadır. …» fikri bəlkə də ehtimal nəzəriyyəsinin mükəmməl aksiomatikasının yaranması üçün bir təkan rolunu oynamışdır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik şərhinə bir çox alimlər: Q. Bohlmann (1908, [2]), S. N. Bernşteyn (1917, [3]), R. Mizes (1919, [4]; 1928, [5]), A. Lomnitski (1923, [6]) ehtimal nəzəriyyəsinin ölçü nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi barədə E. Borelin (E. Borel) ideyaları əsasında müxtəlif cəhdlər etmişlər. 1929-da (bax, [7]) və sona çatdırılmış formada 1933-də (bax, [8]) A. N. Kolmoqorov çoxluqlar nəzəriyyəsi, ölçü və inteqrallama nəzəriyyələrinin ümumi ideyaları və funksiyalar nəzəriyyəsinə yeni nöqteyi – nəzərdən yanaşaraq, müasir ehtimal nəzəriyyəsini, ehtimal modeli anlayışını (məntiqi nöqteyi – nəzərdən, ümumiyyətlə, yeganə olmayan aksiomlar sistemini) formalaşdırmışdır; bu aksiomatika sadə olduğu qədər, o dərəcədə də ümumidir ki o, ehtimal nəzəriyyəsinin klasssik bölmələrini əhatə etməklə yanaşı, onun yeni fəsillərinin yaranmasına, xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin yaranmasına təməl qoymuş oldu.

Kolmoqorov aksiomatikası sisteminin əsası $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ ehtimal fəzası anlayışından ibarətdir. Bu fəza üç obyektdən ibarətdir:

1) $\Omega=\{\omega\}$ – «aksiomlaşdırılan ehtimal modelində» bütün mümkün ola bilən nəticələrin çoxluğu – elementar nəticələr (hadisələr) fəzası;

2) $\mathscr{A}$ Ω-nın hadisə kimi interpretasiya olunan altçoxluqlarından ($A\subseteq\Omega$) təşkil olunmuş, inkar əməli və hesabi sayda birləşmə əməlinə görə, təbii tələb olunan, qapalı boş olmayan bir sinif (yəni $\mathscr{A}$ Ω-nın altçoxluqlarının σ – cəbridir);

3) $\mathbf{P}$ – hesabi – additiv mənfi olmayan və vahidlə normalanmış çoxluq funksiyasıdır: $A\in\mathscr{A}$ olduqda $\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)$ [yəni $\{A_i\}$, $A_i\in\mathscr{A}$, cüt-cüt uyuşmayan hadisələr ardıcıllığı üçün $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_i)$, $0\le\mathbf{P}(A)\le1$, $\mathbf{P}(\Omega)=1$]; $\mathbf{P}(A)$ A hadisəsinin ehtimalı adlanır. [Bəzi hallarda genişlənmiş $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ ehtimal modellərinə baxılır, bu halda: $\mathscr{A}$ cəbr, $\mathbf{P}$ isə sonlu – additiv mənfi olmayan normalanmış funksiyadır və $A\in\mathscr{A}$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}(A)$].

Kolmoqorov aksiomlar sistemi ziddiyyətli deyildir və bütün bu aksiomlara tabe olan real obyektlər kifayət qədərdir.

Kolmoqorov aksiomlar sistemi ehtimal nəzəriyyəsinin elə bir riyazi təməlidir ki, bu aksiomatika müasir riyaziyyatın bütün sahələrindən, o cümlədən, ölçü nəzəriyyəsindən, funksiyaların metrik nəzəriyyəsindən istifadə etməyə imkan verir. 20-ci əsrin 60-cı illərdə A. N. Kolmoqorovun təşəbbüsü ilə alqoritmlər nəzəriyyəsi baxımından «təsadüfilik» anlayışına yeni bir yanaşmanın əsası qoyulmuşdur (bax, [8] – [10]).

Əd.: [1] Проблемы Гильберта, M., 1969; [2] B o h l m a n n G., «Atti IV Congr. Intern . Math. (Roma, 6-11 Apr., 1908)», 1909, v. 3, p. 244–78; [3] Б е р н ш т е й н С. Н., «Сообщ., Харьк. матем. общества», 1917, т. 15, с. 209–74; [4] M i s e s R., «Math . Z.», 1919, Bd 5, S. 52–99; [5] M i s e s R., Wahrscheinlichkeit Statistik und Wahrheit, W., 1928; [6] L o m n i c k i A., «Fundam. math.», 1923, t. 4, p. 34–71; [7] К о л м о г о р о в А. Н., кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 48–57; [8] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., M., 1974; [9] К о л м о г о р о в А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, M., 1974; [10] К о л м о г о р о в А. Н., У с п е н с к и й В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 3, с. 425–55.

KOLMOQOROV BƏRABƏRSİZLİYİ « Колмогорова неравенство; Kolmogorov inequality » – əgər $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ dispersiyaları sonlu olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{1\le m\le n} \left| \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k .$$

Tərs K. b.: əgər $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ c ədədi ilə sanki yəqin məhdud asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, yəni $k = 1, 2, ...$ qiymətlərində $|\xi_k| \le c$ bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilərsə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{1\le m\le n} \left| \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \ge \varepsilon \right\} \ge 1 - \frac{(\varepsilon + 2c)^2}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k} .$$

Hər iki bərabərsizlik 1928-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən yuxarıda verilmiş formada isbat olunmuşdur.

K. b. və tərs K. b.-nin böyük ədədlər qanununun isbatında, təkrar loqarifm qanununun isbatında, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən təşkil olunmuş sıraların sanki yəqin yığılma şərtlərinin araşdırılmasında çoxsaylı tətbiqləri məlumdur. *Kolmoqorovun üç sıra haqqında teoremi* də bu bərabərsizliklər vasitəsilə isbat olunur.

1) K. b. - n i n ü m u m i l ə ş m ə l ə r i. K. b.-nin bir sıra ümumiləşmələri mövcuddur. Aşağıda bunlardan ikisi şərh olunur. İxtiyari $r < n$ və $0 < c_n \le c_{n-1} \le ... \le c_1$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{r\le m\le n} c_m \left| \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \ge \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \left(c_r \sum_{k=1}^{r} \mathbf{D}\xi_k + \sum_{k=r+1}^{n} c_k \mathbf{D}\xi_k \right).$$

K. b.-nin bu ümumiləşməsi ilk dəfə [3]-də nəşr olunmuşdur (bax, [2]).

K. b.-nin digər ümumiləşməsi

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{1\le m\le n} \left| \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \ge \varepsilon + c \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{P}\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| \ge \varepsilon \right\}$$

bərabərsizliyidir, bu şərtlə ki,

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \sum_{k=r}^{n} (\xi_k - \mathbf{M}\xi_k) \right| > c \right\} \le \alpha < 1, \quad r = 1, ..., n$$

olsun.

2) T ə s a d ü f i e l e m e n t l ə r ü ç ü n K. b. – Banax fəzasında *təsadüfi elementlər* üçün K. b.-nin (və tərs K. b.-nin) ümumiləşməsidir. Bu bərabərsizliklərin hər ikisi Hilbert fəzası halında qüvvədə olur (bu halda mütləq qiyməti norma ilə əvəz etmək kifayətdir, bax, [6]). Lakin Banax fəzasının ümumi halında bərabərsizliklərin formaları bir qədər dəyişir.

$X_1, ..., X_n, ...$ $\mathbb{B}$ Banax fəzasında asılı olmayan separabelqiymətli güclü ikinci tərtibli təsadüfi elementlər, $\mathbf{M}\|X_k\|^2 < \infty$, $k = 1, 2, ...$ olsun. Onda hər bir $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{1\le m\le n} \left\| \sum_{k=1}^{m} (X_k - \mathbf{M}X_k) \right\| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} \left\| \sum_{k=1}^{n} X_k \right\|^2$$

K. b. doğrudur (bax, [8] və [7]).

Əgər $\mathbb{B}$ sabitinin tipi C-yə bərabər olan 2 tip Banax fəzasıdırsa, onda sonuncu bərabərsizlikdən

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{1\le m\le n} \left\| \sum_{k=1}^{m} (X_k - \mathbf{M}X_k) \right\| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\|X_k\|^2 \quad (1)$$

olduğu alınır.

Tərsi də doğrudur: əgər hər hansı bir $C > 0$ sabiti və $\mathbb{B}$ Banax fəzasında $\mathbf{M}\|X_k\|^2 < \infty$ şərtini ödəyən separabelqiymətli asılı olmayan $X_1, ..., X_n, ...$ təsadüfi elementlər ardıcıllığı üçün (1) bərabərsizliyi doğrudursa, onda $\mathbb{B}$ 2 tip fəzadır.

2. Buna görə də, 2 tip fəza üçün (və yalnız belə fəzalar üçün) «Üç sıra» haqqında Kolmoqorov teoreminin kafilik hissəsi qüvvədə qalır.

$X_1, ..., X_n, ...$ $\mathbb{B}$ Banax fəzasında separabelqiymətli asılı olmayan elə təsadüfi kəmiyyətlər olsun ki, hər hansı bir $c > 0$ üçün $\|X_k\| \le c$, $k = 1, 2, ...$ münasibəti sanki yəqin ödənilsin. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün tərs K. b. doğrudur (bax, [9], [7]):

$$\mathbf{P}\left\{ \max_{1\le m\le n} \left\| \sum_{k=1}^{m} (X_k - \mathbf{M}X_k) \right\| \ge \varepsilon \right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\varepsilon + c)^2 + \varepsilon^2}{\mathbf{M}\left\| \sum_{k=1}^{n} X_k \right\|^2} \right).$$

Bu bərabərsizlikdən alınır ki, əgər $\mathbb{B}$ sabitinin kotipi K-ya bərabər olan 2 kotip Banax fəzasıdırsa, onda

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\le m\le n}\left\|\sum_{k=1}^{m}(X_k-\mathbf{M}X_k)\right\|\ge\varepsilon\right\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(1-K\frac{(\varepsilon+c)^2+\varepsilon^2}{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\|X_k\|^2}\right) \qquad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur və tərsinə, əgər elə $\mathbb{B}$ Banax fəzası və elə $K>0$ sabiti vardırsa ki, $\mathbb{B}$-də hər bir separabelqiymətli asılı olmayan $X_1,...,X_n,...$ təsadüfi elementləri üçün $\|X_k\|\le 1$, $k=1,2,...$ olduqda, $c=1$ halı üçün (2) bərabərsizliyi doğru olarsa, onda $\mathbb{B}$ – 2 kotip fəzadır. Buna görə də, «Üç sıra» haqqında Kolmoqorov teoreminin bərabərsizlik hissəsi 2 kotip fəzalar üçün (və yalnız belə fəzalar üçün) doğrudur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 20–34; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Hajek J., Renyi A., «Acta Math. Acad. Sci. Hung.», 1955, t. 6, № 3–4, p. 281–83; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [5] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [6] Кахан Ж. - П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [7] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985; [8] Jain N. C., в кн.: Probability in Banach spaces. Proceedings 1975, B. – [a. o.], 1976, p. 113–30; [9] Acosta A. de, Samur J., «Studia Math.», 1979, v. 66, p. 143–60.

KOLMOQOROV DÜSTURU « Колмогорова формула; Kolmogorov's formula » – *Levi – Xinçin kanonik ifadəsinin* təsvirinin xüsusi halıdır, $\mathfrak{G}$ sonsuz bölünən paylanmalar çoxluğundan ikinci momentləri sonlu olan paylanmaların $\mathfrak{G}_0$ altçoxluğunu fərqləndirən düsturdur. Əgər f F paylanmasının xarakteristik funksiyasıdırsa, onda $F\in\mathfrak{G}_0$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilər ki, f xarakteristik funksiyası aşağıdakı düstur ilə ifadə olunsun:

$$f(t)=\exp\left\{it\gamma+\int(e^{itx}-1-itx)\,\frac{dK(x)}{x^2}\right\}$$

burada $\gamma\in\mathbb{R}^1$, $K(x)=\lambda U(x)$, $\lambda\ge 0$ və U $\mathbb{R}^1$-də hər hansı paylanma funksiyasıdır. 1932-də isbat olunmuş (bax, [1]) K. d. B. de Finetti tərəfindən [2]-də qoyulmuş $\mathfrak{G}$ çoxluğunun təsviri probleminin həllində ilk ciddi irəliləyiş olmuşdur. Əgər $F\in\mathfrak{G}_0$ olarsa, onda

$$\int x\,dF(x)=\gamma,\quad \int x^2dF(x)-\gamma^2=\lambda$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 117–23; [2] Finetti B. de, «Rend. Reali Accad. naz. Lincei», ser. 6, 1929, v. 10, p. 163–68.

KOLMOQOROV KRİTERİSİ « Колмогорова критерий; Kolmogorov test » – tam mənası ilə təyin olunmuş kəsilməz paylanma funksiyası [məs., $F(\cdot)$] məlum olan ümumi çoxluqdan skalyar seçim aparılması hipotezinin yoxlaması üçün *statistik kriteridir*. n – seçimin həcmi, $F_n(\cdot)$ – seçimin paylanma funksiyası, $G(\cdot)$ – əsl paylanma funksiyası olsun. K. k. $G\equiv F$ hipotezini yoxlamaq məqsədilə tətbiq olunur.

$$D_n=\sup_x|F_n(x)-F(x)|$$

Kolmoqorov statistikası (K. k. statistikası) adlanır.

Qeyd olunan hipotezlə D_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanması seçimin əsl paylanmasından asılı olmur (başqa sözlə, D_n statistikası hipotezə əsasən sərbəst paylanır – $G\equiv F$ eyniliyinin təsirindən azad olduğu nəzərdə tutulur). Qeyd olunmuş hipotezlə və $n\to\infty$ olduqda D_n statistikası sıfra yaxınlaşır. Buna görə də, əksər hallarda paylanmasının cırlaşmayan limiti olan, $\sqrt{n}\,D_n$ statistikasından istifadə olunur.

1933-də A. N. Kolmoqorov isbat etmişdir ki, $z>0$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\sqrt{n}D_n<z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2}$$

(bax, [1]).

Əgər $G\not\equiv F$ olarsa, onda $n\to\infty$ olduqda D_n statistikası üçün

$$D_n\to\sup_x|G(x)-F(x)|>0$$

münasibəti ödənilir, odur ki, $\sqrt{n}D_n\to\infty$. Bu xassələrdən belə bir qayda alınır: əgər D_n statistikası üçün müşahidələr nəticəsində alınmış qiymət çox böyük olarsa, onda $G\equiv F$ hipotezi qəbul olunmur.

Qeyd olunmuş hipotezlə D_n (və ya $\sqrt{n}D_n$) statistikasının faiz nöqtələri üçün cədvəllər, hal-hazırda həm kiçik, həm də böyük həcmli seçimlər üçün tərtib olunmuşdur (bax, məs., [2]). Qeyd olunmuş hipotezlə paylanması praktik olaraq n-dən asılı olmayan D_n statistikasının modifikasiyası təklif olunmuşdur (bax, [3]) və bu hal üçün də faiz nöqtələri cədvəli tərtib olunmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Pearson E. S., Hartley H. O. (eds.) Biometrika tables for statisticians, v. 2, Camb., 1972.

KOLMOQOROV METRİKASI « Колмогорова метрика; Kolmogorov metric » – bax, *Müntəzəm metrika*.

KOLMOQOROV MODELİ « Колмогорова модель; Kolmogorov model » – asılı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlərin* normalanmış artan cəmlər sxemini və Puasson teoremində istifadə olunan sxemi (bax, *Limit teoremləri*) ümumiləşdirən modeldir. A. N. Kolmoqorov tərəfindən 1932–33-cü illərdə təklif olunmuşdur.

KOLMOQOROV OXŞARLIQ HİPOTEZİ « Колмогорова гипотеза подобия; Kolmogorov's similarity hypothesis » – bax, *Kolmoqorovun üçdə iki qanunu*.

KOLMOQOROV ORTA KƏMİYYƏTLƏRİ « Колмогорова средние; Kolmogorov means » həqiqi $x_1,x_2,...,x_n$ ədədləri üçün

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) = \psi\left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + ... + \varphi(x_n)}{n}\right) \quad (*)$$

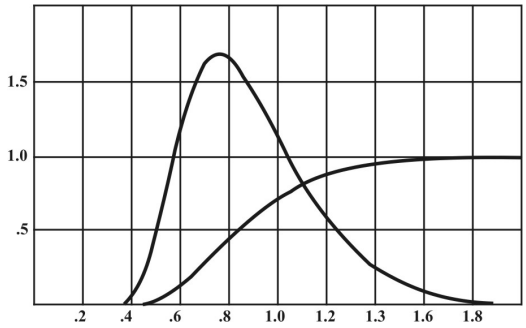
şəklində kəmiyyətlərdir, burada φ – kəsilməz ciddi monoton funksiya, ψ, – φ-yə tərs funksiyadır. $\varphi(x) = x$ olduqda ədədi orta, $\varphi(x) = \log x$ olduqda həndəsi orta, $\varphi(x) = x^{-1}$ olduqda harmonik orta, $\varphi(x) = x^2$ olduqda kvadratik orta, $\varphi(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ olduqda isə qüvvət üstlü orta alınır. A. N. Kolmoqorov 1930-da göstərmişdir ki (bax, [1]), ixtiyari orta kəmiyyət – $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyası, bu funksiya hər bir x_i, $i = 1, 2, ..., n$ üzrə kəsilməz, monoton, simmetrik olan elə funksiya olarsa ki, eyni ədədlərin orta qiyməti onların ümumi qiymətinə bərabər olsun, qiymətlərin hər hansı qrupunu isə onların öz orta qiyməti ilə, ümumi ortanı dəyişmədən əvəz etmək mümkün olarsa, – (*) düsturu ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Математика и механика, М., 1985, с. 136–38.

KOLMOQOROV PAYLANMASI « Колмогорова распределение; Kolmogorov distribution » –

$$\lambda_n = \sqrt{n} \max_{-\infty < x < \infty} \left| F_n(x) - F(x) \right|$$

statistikasının paylanmasının $n \to \infty$ olduqda yaxınlaşdığı limit paylanmasıdır,



Kolmoqorov paylanmasının paylanma funksiyası və sıxlıq funksiyasının qrafiki.

burada $F_n(x)$ – kəsilməz olan nəzəri paylanma funksiyası $F(x)$ üçün meylsiz nöqtəvi statistik qiymət seçimi paylanma funksiyasıdır. K. p. F -dən asılı deyildir.

KOLMOQOROV STATİSTİKASI « Колмогорова статистика; Kolmogorov statistic » – bax, *Kolmoqorov kriterisi*, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi.*

KOLMOQOROV ŞƏRTİ « Колмогорова условие; Kolmogorov condition » – bax, *Böyük dim. – ölçülər effekti*, *Kolmoqorov teoremi* seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında.

KOLMOQOROV TEOREMİ seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında **« Колмогорова теорема** о непрерывности выборочных функций; **Kolmogorov theorem** on continuity of sample functions **»** – A. N. Kolmoqorovun 1934-də isbat etdiyi və [1]-də nəşr olunmuş aşağıdakı teoremdir: $\zeta(t)$ $[0, 1]$ parçasında təyin olunmuş,

$$\mathbf{M}\left|\zeta(t) - \zeta(s)\right|^p \leq k\left|t - s\right|^q \quad (*)$$

(burada $p > 0$, $q > 1$, $k > 0$ sabitlərdir) Kolmoqorov şərtini ödəyən *təsadüfi funksiya* olsun; onda $\zeta(t)$-yə ekvivalent elə $\widetilde{\zeta}(t)$ təsadüfi funksiyası vardır ki, onun trayektoriyaları sanki yəqin kəsilməzdir (yəni bütün t qiymətlərində $\mathbf{P}\{\zeta(t) = \widetilde{\zeta}(t)\} = 1$ bərabərliyi doğrudur).

Bu teoremin böyük əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, birincisi, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin fundamental faktı qeyd olunmuşdur, ikincisi isə teoremin (*) münasibətilə verilən şərti yoxlama üçün çox rahatdır. Bu sonuncu şərt K. t.-nin ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif bölmələrində, xüsusilə də, limit teoremlərinin isbatında mühüm tətbiqi əhəmiyyəti olmuşdur.

(*) şərtinin kafi olub, zəruri olmaması bir sıra elmi işlərin yaranmasına səbəb olmuşdur və bu işlərin müəllifləri həmin şərti yaxşılaşdırmağa səy göstərərək onu zəruri şərtə gətirməyə çalışmışlar. Sonralar (bax, [6] – [8]) bu tip nəticələr və daxiletmə teoremləri arasında hamar funksiyalar üçün əlaqənin olduğu aşkar edilmişdir. Bu sahədə bir sıra nəticələr alınmışdır, məs., $\varphi(t)$ mənfi olmayan, azalmayan kəsilməz funksiya,

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(h_1 + h_2) \leq \varphi(h_1) + \varphi(h_2),$$

və

$$\varsigma_{p,k}^{\varphi} = \left\{ \zeta(t) : \sup \mathbf{M}^{1/p} \left|\Delta_h^k \zeta(t)\right|^p = O(\varphi(\delta)),\ \delta \searrow 0 \right\}$$

olsun, burada supremum $0 < h < \delta$, t, $t + k\delta \in [0, 1]$ olduqda təyin olunur.

$$\Delta_h \zeta(t) = \zeta(t + h) - \zeta(t),\ \Delta_h^k = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} \zeta(t))$$

isə $[0, 1]$ parçasında $\zeta(t)$ separabel təsadüfi proseslər sinfidir; onda ixtiyari $\zeta(t) \in \varsigma_{p,k}^{\varphi}$ prosesinin seçimi funksiyalarının 1 ehtimalla kəsilməz olması üçün

$$\int_0^1 \frac{\varphi(h)}{h^{1+1/p}}\, dh < \infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Xüsusi halda $\varphi(h) = h^{(1+\alpha)/p}$, $\alpha > 0$, $k = 1$ olduqda kafilik hökmü K. t.-də vardır (bax, *Seçimi kəsilməzlik*(yi) təsadüfi prosesin).

Əd.: [1] Slutsky E., «Giorn. Inst. italiano degli Attuari», 1937, № 8, p. 193–96; [2] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Dudley R., «Ann. Probab.», 1973, v. 1, № 1, p. 66–103; [4] Fernique X., Régularitè des trajectories des functions aléatoires gaussiennes, в кн.: Lecture Notes in Mathematics, v. 480, B. – Hdlb. – N.Y., 1975; [5] Pisier G., « Sem. d'anal. Fonct.», 1979–1980, Exp. XIII–XIV, [P., 1980]; [6] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в.3, с. 468–80; [7] Ibragimov I., «C. r. Acad. sci.», 1979, t. 289A, p. 545–47; [8] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 229–49.

KOLMOQOROV TEOREMİ sonluölçülü paylanmalar haqqında « **Колмогорова теорема** о конечномерных распределениях; **Kolmogorov theorem** on finite dimensional distributions / **Kolmogorov extension theorem** » – *təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsinin əsas teoremlərindən biridir. T indekslərin ixtiyari çoxluğu olsun və hər bir $t \in T$ indeksi üçün $\mathbb{R}_t$ $\mathbb{R}$ ədəd oxunu ifadə etmiş olsun. Cüt-cüt müxtəlif t_i, $1 \le i \le n$ indekslərinin hər bir boş olmayan sonlu $\alpha = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ çoxluğuna $\mathbb{R}^\alpha = \mathbb{R}_{t_1} \times \ldots \times \mathbb{R}_{t_n}$ Evklid fəzasında verilmiş Borel ehtimal ölçüsü μ_α-nın uyğun olduğu və bütün bu ölçülər ailəsi üçün isə aşağıdakı uzlaşma şərtinin ödənildiyi fərz olunur: $\beta \subset \gamma$ şərtini ödəyən ixtiyari $\beta = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset T$, $\gamma = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset T$ çoxluqları və $\mathbb{R}^\beta$ Evklid fəzasında ixtiyari B Borel çoxluğu üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir:

$$\mu_\beta(\{(x_{u_1}, \ldots, x_{u_k}) : (x_{u_1}, \ldots, x_{u_k}) \in B\}) =$$

$$= \mu_\gamma(\{(x_{v_1}, \ldots, x_{v_m}) : (x_{v_1}, \ldots, x_{v_k}) \in B\}).$$

Onda $\mathbb{R}^T$ fəzasının silindrik σ – cəbrində elə μ ölçüsü vardır ki, bu ölçü yeganədir və

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\}) = \mu_\alpha(A)$$

bərabərliyi, T -dən olan cüt-cüt müxtəlif indekslərin boş olmayan $\alpha = \{t_1, \ldots, t_n\}$ çoxluğu və ixtiyari $A \subset \mathbb{R}^\alpha$ Borel çoxluğu üçün doğrudur. μ_α ölçüləri μ ölçüsünün sonluölçülü paylanmaları adlanır.

K. t. ölçü nəzəriyyəsinin teoremi kimi hesab edilmir. Bu teoremin isbatında topoloji kompaktlıq mülahizələrindən istifadə olunur. Lakin çoxluqların abstrakt kompakt sinfi anlayışını daxil edərək sırf ölçü nəzəriyyəsi üçün də K. t.-ni ümumi şəkildə ifadə edib, onu isbat etmək olur.

Əgər K. t.-ndə indekslər çoxluğu T hesabi olarsa, onda μ ölçüsü $\mathbb{R}^T$ fəzasının Borel σ – cəbrində təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

KOLMOQOROV TEOREMİ uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında « **Колмогорова теорема** о согласованных распределениях; **Kolmogorov theorem** of consistent distributions» – bax, *Ehtimal fəzası.*

KOLMOQOROV TEOREMİ «üç sıra» haqqında « **Колмогорова теорема** о трех рядах; **Kolmogorov three-series theorem** »: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ asılı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlərinin* cəmi – $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ sırasının vahid ehtimalla yığılması üçün bütün $c > 0$ qiymətlərində

$$\sum_n \mathbf{P}\{|\xi_n| > c\},$$

$$\sum_n \mathbf{M}\, \xi_n I_{[|\xi_n| \le c]},$$

$$\sum \mathbf{M}\left|\xi_n I_{[|\xi_n| \le c]} - \mathbf{M}\, \xi_n I_{[|\xi_n| \le c]}\right|^2$$

sıralarının yığılması zəruri;

Hər hansı $c > 0$ qiymətləri üçün yığılması kafidir, burada I_A, – A hadisəsinin indikatorudur.

Teorem 1928-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən isbat olunmuşdur (bax, [1]). Bu teorem *Kolmoqorov bərabərsizliyi* vasitəsilə isbat olunur. Hilbert fəzası halında da K. t. dəyişiklik olmadan doğrudur (bu halda yalnız mütləq qiymətlər norma ilə əvəz olunur). 2 tip Banax fəzaları halında «Üç sıra» haqqında K. t.-nin yalnız kafilik hissəsi doğrudur (bax, [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 20–34; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Acosta A. de, Samur J., «Studia Math.», 1979, v. 66, p. 143–60; [4] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

KOLMOQOROV TƏNLİKLƏRİ « **Колмогорова уравнения; Kolmogorov equations** » – *Markov prosesinin* keçid funksiyası və ya keçid sıxlıq funksiyasının zamana görə törəməsini verilmiş an üçün bu funksiyanın qiymətləri və prosesin infinitezimal xarakteristikaları ilə ifadə edən tənliklərdir. Tənliklər 1931-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən alınmışdır (bax, [1]) və kəsilməz zamanlı Markov prosesi nəzəriyyəsinin əsaslarını qoyulmuşdur. Bəzi xüsusi hallar əvvəllər məlum idi (bax, misal 2). Kəsilməz zamanlı Markov proseslərinin qurulması və burada araşdırılmasında K. t. semi – qruplar nəzəriyyəsi və stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsinin metodlarının cəlb olunmasına qədər əsas vasitə idi. Markov proseslərinin tətbiqində K. t. indi də birinci dərəcəli əhəmiyyətə malikdir.

Müxtəlif quruluşlu Markov prosesləri üçün K. t.-ləri müxtəlif növlü xətti tənliklərdir. Bu halda 1-ci tərtib adi differensial tənliklər sistemi, 2-ci tərtib xüsusi törəməli parabolik tipli differensial tənliklər, inteqro – differensial tənliklər (bax, misallar, 1–3) ola bilər. Qeyd olunan variantların kombinasiyaları və cırlaşma halları da mümkündür (bax, əgər proses determinik olarsa). Müxtəlif tipli Markov prosesləri üçün K. t.-ni aşağıdakı ümumi sxem əhatə edir. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_s^t, \mathbf{P}_{s,x})$ Markov prosesinin $\mathbf{P}_{s,x}$ ölçüsünə nəzərən riyazi gözləməsi $\mathbf{M}_{s,x}$ olsun. ζ proseslərinin geniş bir sinfi üçün Φ ζ prosesinin trayektoriyalarının $\mathscr{A}_1^\infty$ – ölçülən ixtiyari məhdud funksionalı olduqda

$$u(s, x) = \mathbf{M}_{s,x}\Phi, \quad s \le t, \ x \in \mathscr{E} \tag{1}$$

(t qeyd olunmuş zamandır) funksiyası

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = L_s u(s, x), \quad s < t, \ x \in \mathscr{E} \tag{2}$$

tərs Kolmoqorov tənliyini ödəyir; L_s, – x arqumentinin funksiyalarına təsir edən xətti operatordur, bəzən infinitezimal operator və ya doğuran operator və ya da s anında ζ prosesinin generatoru adlandırılan), ζ bircins proses olarsa, onda L_s s -dən asılı olmur. Ən «yaxşı» hallarda $\{L_s\}$ operatorlar ailəsi ζ prosesinin keçid ehtimallarını birqiymətli təyin edir. Xüsusi halda, əgər $\Phi = \mathbf{1}_\Gamma(\zeta_t)$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ olarsa, onda

$$u(s,x)=\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_t\in\Gamma\}=p(s,x;t,\Gamma) \qquad (3)$$

və (2) p keçid funksiyası üçün tərs K. t. olur.

$s=t$ olduqda, (1)-dən (2) tənliyinin (3) həlli üçün sonuncu $u(t,x)=\mathbf{1}_\Gamma(x)$ şərti alınır və beləliklə, keçid ehtimalı p üçün s və x-in funksiyası kimi Koşi məsələsi alınır (zaman s götürülür). X prosesinin keçid sıxlıq funksiyası

$$u(s,x)=\frac{p(s,x;t,dy)}{\mu(dy)}=f(s,x;t,y),\quad y\in\mathscr{E} \qquad (4)$$

üçün tərs K. t. p keçid funksiyası üçün (2) tənliyinin hər iki tərəfini μ-yə görə differensiallama nəticəsində formal olaraq alınır (bütün $p(s,x;t,\cdot)$, $s<t$, $x\in\mathscr{E}$ ölçüləri $\mathscr{E}$-də təyin olunmuş «standart» μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülərdir). (2) tənliyinin həlli (4) üçün son şərt, $s\to t$ olduqda sıxlığı $u(s,x)$ olan ölçünün y nöqtəsində topalanmış vahidi ölçüyə çevrilməsidir. Əslinə qaldıqda, (1) düsturu (2) tənliyinin həllini uyğun sərhəd şərtlərilə, yalnız $s<t$ yarımmüstəvisində deyil, digər ümumi fəza – zaman oblastlarında da təyin edir. Differensial tənliklərin ehtimali həlli də buna əsaslanır.

K o l m o q o r o v d ü z t ə n l i y i tərs tənliyin ikili variantı olan,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=L_t^*\,v(t,y),\ t>s,\ y\in\mathscr{E} \qquad (5)$$

tənliyidir, burada L_t^*, – L_t operatoruna qoşma operatordur (s qeyd olunmuş zamandır). Bu halda, ehtimali baxımdan həllər sinfi (2) tənliyi halında olduğundan daha dar sinifdir. Fərz olunur ki, $\{\upsilon_t\}$, $t\geq s$ ölçülər ailəsi $(\mathscr{E},\mathscr{B})$ fəzasında ζ prosesi ilə

$$\upsilon_t(\Gamma)=\int_{\mathscr{E}}\mathbf{P}_{s,x}\{\xi_t\in\Gamma\}\,\upsilon_s(dx),\ t\geq s,\ \Gamma\in\mathscr{B}$$

münasibətilə uzlaşır. Onda ζ prosesinin geniş sinfi üçün (5) tənliyini ya

$$\upsilon(t,y)=\upsilon_t(\{y\})=\int_{\mathscr{E}}p(s,x,t,y)\,\upsilon_s(dx) \qquad (6)$$

funksiyası (əgər $\mathscr{E}$ diskret fəzadırsa), ya da

$$\upsilon(t,y)=\frac{\upsilon_t(dy)}{\mu(dy)}=\int_{\mathscr{E}}f(s,x;t,y)\,\upsilon_s(dx) \qquad (7)$$

funksiyası ödəyir (əgər $\mathscr{E}$ kəsilməz fəzadırsa və $p(s,x;t,\cdot)$, $t>s$ «standart» μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülərdirsə). Əgər υ_s x nöqtəsində topalanmış vahidi ölçüdürsə, onda (6)-da $\upsilon(t,y)=p(s,x;t,y)$, (7)-də isə $\upsilon(t,x)=f(s,x;t,y)$ olur və (5) tənliyi keçid ehtimalı və ya keçid sıxlıq funksiyası üçün Kolmoqorov düz tənliyinə çevrilir; birinci halda (5) tənliyinə başlanğıc şərt kimi $\upsilon(s,x)=\mathbf{1}_\Gamma(x)$, ikinci halda isə $f(s,x;t,\cdot)$ sıxlıqlı ölçü $t\to s$ olduqda x-də topalanmış vahidi ölçü əlavə olunur. (5) tənliyi ζ prosesilə uzlaşmış başlanğıc υ_s ölçüləri olmayan (bunlar bəzən ζ prosesi üçün g i r i ş q a n u n u adlanır) $\{\upsilon_t\}$ ölçülər axınlarına da şamil olunur.

M i s a l 1 (sonlu və ya hesabi ζ prosesi). Əgər $\mathscr{E}$ fəzası sonlu və ya hesabidirsə, onda ζ prosesinin keçid funksiyası

$$P(s,t)=\left\|\,p_{xy}(s,t)\,\right\|$$

keçid matrisinə gətirilir, burada $p_{xy}(s,t)=\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_t=y\}$, $s\leq t$, $x\in\mathscr{E}$, $y\in\mathscr{E}$. ζ prosesinin infinitezimal xarakteristikaları: çıxış ehtimalı sıxlıqları

$$q(s,x)=-q_{xx}(s)=\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\,\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_t\neq x\},\ x\in\mathscr{E} \qquad (8)$$

və k e ç i d e h t i m a l ı s ı x l ı q l a r ı

$$q_{xy}(s)=\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\,\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_t=y\},\ x\neq y\in\mathscr{E} \qquad (9)$$

funksiyalarıdır. Requlyar halda $\sum_y q_{xy}(s)=0$. K. t.-ndən hər biri (2) və ya (5) uyğun olaraq: t və y qeyd olunduqda keçid ehtimalları ailəsi $\{p_{xy}(s,t)\}$, $s\leq t$, $x\in\mathscr{E}$ üçün və ya s və x qeyd olunduqda $\{p_{xy}(s,t)\}$, $s\leq t$, $y\in\mathscr{E}$ keçid ehtimalları ailəsi üçün adi differensial tənliklərin qapalı sistemlərinə ayrılır; bunlar da hamısı birlikdə matris formasında kompakt ifadə olunur. $Q(s)=\left\|q_{xy}(s)\right\|$ olsun. K. t. tərs sistemi $\mathbf{P}(t,t)=1$ son şərtilə

$$-\frac{\partial\mathbf{P}(s,t)}{\partial t}=Q(s)\,\mathbf{P}(s,t),\quad s\leq t \qquad (10)$$

düz sistemi, $\mathbf{P}(s,s)=\mathbf{I}$ başlanğıc şərtilə,

$$\frac{\partial\mathbf{P}(s,t)}{\partial t}=\mathbf{P}(s,t)Q(t),\quad t\geq s \qquad (11)$$

münasibətlərilə ifadə olunur ($\mathbf{I}$ vahidi matrisdir).

(8) və (9) limitlərinin varlığı haqqında (10) və (11) sistemlərinin hər birinin doğruluğu, bunların əvvəlcədən verilmiş Q matrisləri üçün həllərinin varlığı və yeganəliyi haqqında məsələlər ən çox bircins proseslər üçün araşdırılmışdır (bax, *Markov prosesi* v ə z i y y ə t l ə r i ç o x l u ğ u s o n l u, *Markov prosesi* v ə z i y y ə t l ə r i ç o x l u ğ u h e s a b i).

M i s a l 2 (ζ diffuzion prosesi). $\zeta_t=(\zeta_1(t),\ldots,\zeta_n(t))$ keçid sıxlığı (Lebeq ölçüsünə nəzərən) $f(s,x;t,y)$, $s<t$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ olan $\mathbb{R}^n$-də Markov prosesi olsun. İxtiyari $\varepsilon>0$ üçün

$$\lim_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\,\mathbf{P}_{s,x}\{|\zeta_t-x|\geq\varepsilon\}=0,\ x\in\mathbb{R}^n$$

münasibəti s və x-ə görə müntəzəm ödənilərsə, ζ_t prosesinin kəsilməz olduğunu hesab etmək olar və bu halda onun infinitezimal xarakteristikaları (ε ədədindən asılı olmayaraq) – a p a r ı ə m s a l l a r ı

$$a_i(s,x) = \lim_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s}\mathbf{M}_{s,x}[\zeta_i(t)-x_i]_\varepsilon,$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\ i=1,\ldots,n \qquad (12)$$

və diffuziya əmsalları

$$b_{ij}(s,x) = \lim_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s}\mathbf{M}_{s,x}[\zeta_i(t)-x_i]_\varepsilon[\zeta_j(t)-x_j]_\varepsilon,$$

$$i,j=1,\ldots,n \qquad (13)$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada

$$[c]_\varepsilon = \begin{cases} c, & \text{əgər } |c|\le\varepsilon, \\ 0, & \text{əgər } |c|>\varepsilon. \end{cases}$$

(12) və (13) limitlərindəki yığılmanın müntəzəm olduğu və f sıxlıq funksiyasının kifayət qədər hamar olduğu fərz olunduqda, bu sıxlıq s və x-in funksiyası kimi t və y-in qeyd olunmuş qiymətlərində tərs K. t.-ni, yəni son şərti $f(t,x;t,y)=\delta(x-y)$ olan,

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{i=1}^n a_i(s,x)\frac{\partial f}{\partial x_i} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_{ij}(s,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\quad s<t,\quad x\in\mathbb{R}^n \qquad (14)$$

tənliyini ödəyir, burada $\delta(x)$, $-\mathbb{R}^n$-də ümumiləşmiş Dirak funksiyasıdır və t və y-in funksiyası kimi s və x-in qeyd olunmuş qiymətlərində, Kolmoqorov düz tənliyini (Fokker – Plank tənliyini), yəni başlanğıc şərti $f(t,x;t,y)=\delta(y-x)$ olan

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}[a_i(t,y)f] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j}[b_{ij}(t,y)f],\quad t\ge s,\quad y\in\mathbb{R}^n \qquad (15)$$

tənliyini ödəyir.

Xüsusi törəməli differensial tənliklər terminologiyasında f sıxlığı (14), (15) parabolik tənliklərinin fundamental həllidir. (14)-ü y-ə görə inteqrallayaraq keçid ehtimalı üçün

$$p(s,x;t,\Gamma) = \int_\Gamma f(s,x;t,y)\,dy$$

düsturu alınır. Xüsusi halda, $n=1$, $a_1=0$, $b_{11}=1$ olarsa, ζ Viner prosesidir və bu halda keçid sıxlığı

$$f(s,x;t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-(y-x)^2/2(t-s)}$$

düsturu ilə ifadə olunur, (14) və (15)-lə ifadə olunan K. t. isə istilikkeçirmənin klassik tənliyinə çevrilir, yəni

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

olur.

K. t.-nin həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsi ilk dəfə hərtərəfli V. Feller tərəfindən araşdırılmışdır (bax, [2]). Diffuziya prosesini (12) – (14) şərtlərilə verməyərək, onu a_i və b_{ij} əmsallarına görə stoxastik differensial tənliklər vasitəsilə də qurmaq olar. Bu istiqamətdə K. t. həllərinin varlığı haqqında yeni nəticələr alınır.

Tarixi qeydlər. A. N. Kolmoqorovun 1931-dəki bu sahədəki əsaslandırılmış işlərinə qədər (bax, [1]), (14) və (15) tənlikləri yalnız zamandan asılı əmsallarla çox da əsaslandırılmayaraq, L. Başelye tərəfindən araşdırılmış və həll olunmuşdu (bax, [4], [5]). Digər tərəfdən (15) düz tənliyi A. N. Kolmoqorova qədər bir sıra fiziki işlərdə meydana gəlmişdi: Braun hərəkəti üzrə A. Eynşteyn və M. Smoluxovskinin (bax, [6] və [8]) işləri; şüalanma sahəsində elektrik dimeydanının cərəyan etməsi haqqında A. Fokkerin (bax, [8]); kvant nəzəriyyəsi üzrə M. Plankın (bax, [9]) işlərində. Fizikada (15) tənliyi, bilavasitə, sonuncu iki alimin adı ilə bağlıdır.

Misal 3 (sıçrayışvari ζ prosesi). Bu halda misal 1-də olduğu kimi sonlu (8) limitləri vardır, lakin keçid ehtimal sıxlıqları (9) əvəzinə sıçrayışların lokal

$$\pi(s,x,\Gamma) = \lim_{t\downarrow s}\frac{\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_t\ne x,\ \zeta_t\in\Gamma\}}{\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_t\ne x\}},\quad x\in\mathscr{E},\ \Gamma\in\mathscr{B}$$

ölçülərinin varlığı qəbul olunur və tələb olunur ki, bu ölçülər Γ üzrə ehtimal ölçüləri olsun. Requlyar halda keçid funksiyası p üçün son şərti $p(t,x;t,\Gamma)=\mathbf{1}_\Gamma(x)$ olan (t və $\Gamma\in\mathscr{B}$ qeyd olunmuşdur)

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = q(s,x)\left[\int_{\mathscr{E}} p(s,z;t,\Gamma)\,\pi(s,x,dz) - p(s,x;t,\Gamma)\right],$$

$$s\le t,\ x\in\mathscr{E}$$

inteqro – differensial Kolmoqorov tərs tənliyi və başlanğıc şərti $p(s,x;s,\Gamma)=1_\Gamma(x)$ olan

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\int_\Gamma q(t,z)\,p(s,x;t,dz) +$$

$$+\int_{\mathscr{E}} q(t,z)\,\pi(t,z,\Gamma)\,p(s,x;t,dz),\ t\ge s,\Gamma\in\mathscr{B}$$

Kolmoqorov düz tənliyi doğrudur. Mütləq kəsilməzlik halında, uyğun şərtlərlə, bu tənlikləri (4) keçid sıxlıqları üçün analoji tənliklərlə əvəz etmək mümkündür. Sıçrayışlar arasında diffuziyalı Markov proseslərində (2)-dəki L_s operatorları 2 və 3-cü misallardakı operatorların xətti kombinasiyalarıdır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [2] Феллер В., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 57–96; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2., М.,1973; [4] Bachelier L., «Ann. sci. Ecole norm. super.», 1900, t. 17, p. 21–86; [5] Bachelier L., «Ann. sci Ecole norm. super.», 1910, t. 27, p. 339–60; [6] Einstein A., «Ann. Phys.», 1905, Bd 17, S. 549–60; [7] Smoluchowski M., «Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie (A)», 1913, p. 418–34; [8] Fokker A. D., «Ann. Phys.», 1914, Bd 43, S. 810–20; [9] Planck M., «Sitzungsber. Akad., Wiss.», 1917, S. 324–41.

KOLMOQOROV TƏNLİKLƏRİ ikinci momentlər üçün « **Колмогорова уравнения** для вторых моментов; **Kolmogorov equations** for second moments » – $n=2$ və 3 olduqda lokal izotrop

turbulentliyin sürət meydanı üçün $\left\langle [u_L(x+r,\ t)-u_L(x,\ t)]^n \right\rangle$ eninə (r -ə nəzərən) struktur funksiyalarını əlaqələndirən tənliklərdir:

$$D_{LLL}(r)\ -\ \nu\partial D_{LL}(r)/\partial r\ =\ -4\mathscr{E}r/5\,.$$

Burada $\mathscr{E}$ – turbulent enerjinin dissipasiya sürəti, υ özlülükdür (A. N. Kolmoqorov, 1941, bax, [1]). İzotropluq fərz olunmadığı hal üçün bu hökmü A. S. Monin [2]-də isbat etmişdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Математическая механика, М., 1985, с. 290–293; [2] Монин А. С., «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 3, с. 515–18.

KOLMOQOROV TƏNLİYİ düz « **Колмогорова уравнение** прямое; **Kolmogorov** forward **equation** » – bax, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Statistik hidromexanika.*

KOLMOQOROV TƏNLİYİ tərs « **Колмогорова уравнение** обратное; **Kolmogorov** backward **equation** » – bax, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı, *Statistik hidromexanika.*

KOLMOQOROV ÜÇDƏ İKİ QANUNU « Колмогорова закон двух третей; Kolmogorov's two-thirds law » – miqyasları r olan inersion intervalda yayılmış turbulentliyin statistik strukturunun yeganə ε parametri ilə təyin olunmasını ifadə edən Kolmoqorovun oxşarlıq hipotezinin nəticəsi olan,

$$D(r)=\left\langle [u(x+r,\ t)\ -\ u(x,\ t)]^2 \right\rangle = C(\varepsilon r)^{2/3} \qquad (*)$$

münasibətidir. ε – turbulent enerjinin özüllü dissipasiyasının orta sürəti, C – ədədi konstant, < mötərizəsi isə ortalamanı ifadə edir. K. ü. i. q.-nun dəfələrlə empirik yoxlanılması nəzəriyyə ilə eksperimentin yaxşı uzlaşdığını təsdiq etmişdir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303; т. 31, № 2, с. 99–101 (Избранные труды. Математика и механика, М., 1985, с. 281–87, Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 264–67).

KOLMOQOROV – ARAK TEOREMİ « Колмогорова – Арака теорема; Kolmogorov – Arak theorem » – ixtiyari F paylanma funksiyasının n – qat kompozisiyası F^{n^*}-nun sonsuz bölünən paylanmalar çoxluğu $\mathfrak{G}$-ya yaxınlığının statistik qiyməti – $\rho(F^n, \mathfrak{G})$ kəmiyyətidir (müntəzəm ρ metrikası mənasında).

$$\Delta_n\ =\ \sup\{\rho(F^{n^*},\ \mathfrak{G}):F\}$$

kəmiyyətinin qiymətləndirilmə məsələsi [1]-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən qoyulmuşdur. Burada isbat olunmuşdur ki,

$$\Delta_n \le C n^{-1/5},$$

burada C – mütləq sabitdir. Sonradan bu qiymət bir sıra müəlliflər tərəfindən yaxşılaşdırılmış və dəqiqləşdirilmişdir. Məs., L. D. Meşalkin isbat etmişdir ki,

$$\Delta_n \ge C' n^{-2/3}(\log n)^{-4}\,.$$

T. Arak [2]-də müəyyən mənada, problemi sona çatdıraraq, isbat etmişdir ki,

$$C_1 n^{-2/3} \le \Delta_n \le C n^{-2/3}$$

burada C' müsbət mütləq sabitdir. Analoji problematikanın inkişafı haqqında, bax, [3], [4].

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 4, с. 426–36; [2] Арак Т., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 2, с. 225–45; [3] Арак Т., Зайцев А. Ю., Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1986, т. 174, с. 3–212; [4] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в.1, с. 178–89.

KOLMOQOROV – DEYEV ŞƏRTİ « Колмогорова – Деева условие; Kolmogorov – Deev condition » – bax, *Ümumi statistik analizi*, *müşahidələrin*.

KOLMOQOROV – DUB BƏRABƏRSİZLİYİ « Колмогорова – Дуба неравенство; Kolmogorov – Doob inequality » – bax, *Dub bərabərsizlikləri.*

KOLMOQOROV – DUB BƏRABƏRSİZLİYİ kvazimartinqallar üçün **« Колмогорова – Дуба неравенство** для квазимартингал; **Kolmogorov – Doob inequality** for quasi–martingales » – bax, *Kvazimartinqal.*

KOLMOQOROV – PETROVSKİ MƏSƏLƏSİ « Колмогорова – Петровского задача; Kolmogorov – Petrovsky problem » – bax, *Sərhəd məsələləri* təsadüfi dolaşmalar üçün.

KOLMOQOROV – SMİRNOV KRİTERİSİ « Колмогорова – Смирнова критерий; Kolmogorov – Smirnov test » – statistikaları empirik və nəzəri paylanma funksiyaları və ya onların statistik qiymətləri arasındakı fərqin maksimal (minimal) qiymətilə ifadə olunan, *statistik kriterilər* üçün ümumiləşdirilmiş addır. K. – S. k. bir, iki və bir neçə seçim üçün tətbiq olunur.

Bir seçim üçün K. – S. k.. $F_n(x)$ kəsilməz $G(x)$ paylanma funksiyalı n həcmli skalyar seçim üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, $F(x)$ verilmiş paylanma funksiyası olsun. $H: G(x) \equiv F(x)$ hipotezinin yoxlanılması fərz olunur.

$$D_n^+\ =\ \sup_x\ [F_n(x)-F(x)]\,,$$

$$D_n^-\ =\ -\inf_x\ [F_n(x)-F(x)]\,,$$

$$D_n = \max\,(D_n^+,\ D_n^-)\ =\ \sup_x \left|F_n(x)-F(x)\right|$$

kəmiyyətləri Kolmoqorov–Smirnov statistikaları adlanır. Daha dəqiq: D_n^+, D_n^- – Smirnov statistikaları (birseçimli, bax, [4]), D_n – Kolmoqorov statistikasıdır (bax, [2]). Əgər statistika üçün eksperiment nəticəsində alınmış qiymət olduqca böyük olarsa (H hipotezi nöqteyi – nəzərincə doğruyaoxşar olmayandırsa), onda H hipotezi qəbul olunmur. H hipotezi şərtində D_n^+, D_n^-, D_n statistikalarının paylanmaları ilkin paylanma funksiyasının konkret nə cür olmasından asılı olmur (əgər ilkin paylanma funksiyası kəsilməz olarsa); bu halda D_n^+, D_n^- statistikalarının paylanmaları üst-üstə düşür. D_n^+, D_n statistikaları üçün (irəli sürülmüş hipotezdə) faiz nöqtələri cədvəlləri tərtib olunmuşdur (bax, məs., [1]).

D_n statistikasına əsaslanan kriteri bütün $G \neq F$ alternativ hipotezlərinə qarşı tutarlı kriteridir; D_n^+ statistikasına əsaslanan kriteri $G \geq F$ alternativlərinə qarşı tutarlı kriteridir (analoji olaraq, D_n^- $F \geq G$ hipotezlərinə qarşı).

n -in böyük qiymətlərində ($n \geq 100$) D_n^+, D_n^-, D_n statistikalarının faiz nöqtələrini hesablamaq üçün asimptotik nəzəriyyənin nəticələrindən istifadə etmək olar ki, bu halda $\beta > 0$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n}\, D_n^+ > \beta\} = e^{-2\beta^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n}\, D_n > \beta\} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2\beta^2}$$

asimptotik qiymətləri alınır.

Yuxarıda qeyd olunan hipotezin yoxlanılması üçün istifadədən başqa, Kolmoqorov – Smirnov statistikaları əsl paylanma funksiyasının etibarlı sərhədlərini də təyin etməyə imkan verir. Məs., G üçün ikitərəfli etibarlı sərhədlər (etibarlılıq əmsalı $1-\alpha$ olduğu halda) aşağıdakı şəkildə olur:

$$\{G(x) : |F_n(x) - G(x)| < D_{n,\,1-\alpha}\},$$

burada $D_{n,\,1-\alpha}$, – D_n təsadüfi kəmiyyətinin $1-\alpha$ səviyyəli kvantilidir. D_n^+, D_n^- statistikaları vasitəsilə G üçün birtərəfli etibarlı sərhədlər analoji qaydada təyin olunur.

Praktikada, əksər hallarda, verilmiş seçimin bu və ya digər tip paylanmalı olması, yəni onun paylanma funksiyasının sonluölçülü parametrə qədər dəqiqliklə məlum olması haqqında hipotezin yoxlanılması tələb olunur (əgər hipotez doğru seçilmişdirsə, sonrakı statistik nəticələr üçün müvafiq olan analitik düsturlardan istifadə etmək olar). $F(x, \theta)$ – hipotetik paylanma funksiyası, θ – naməlum parametr, $\hat{\theta}$ – bu parametrin müşahidə nəticəsindəki seçim üzrə alınmış statistik qiyməti olsun. Əksər hallarda, $\hat{\theta}$ kimi maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti götürülür.

Klassik Kolmoqorov – Smirnov statistikalarına analoji modifikasiya olunmuş Kolmoqorov – Smirnov statistikaları aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur:

$$\hat{D}_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x, \hat{\theta})],$$

$$\hat{D}_n = \sup_x |F_n(x) - F(x, \hat{\theta})|.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, $\hat{D}_n^+$ və $\hat{D}_n$ statistikalarının paylanmaları onların klassik prototiplərinin paylanmaları ilə üst-üstə düşmür. Hətta bu paylanmalar $F(x, \theta)$ funksiyasının ifadəsindən, ümumiyyətlə isə, θ parametrinin əsl qiymətindən asılı olur. Bir sıra praktiki mühüm paylanmalar ailəsi üçün (normal, üstlü və s., miqyas – yerinidəyişməli ailələr) və parametrin təbii (ekvivariant) statistik qiymətləri üçün θ parametrindən asılılıq yox olur.

$\hat{D}_n^+$, $\hat{D}_n^-$, $\hat{D}_n$ statistikalarının paylanma funksiyaları və faiz nöqtələrinin analitik hesablanması üçün ümumi metodlar yoxdur. $F(x, \theta)$ paylanmalarının bir sıra ailələri üçün mövcud cədvəllər EHM-da Monte – Karlo metodu ilə modelləşdirmə ilə alınmışdır və $\hat{\theta}$ statistik qiyməti kimi isə maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti götürülmüşdür. n -in böyük qiymətləri üçün asimptotik nəzəriyyənin nəticələrindən istifadə etmək olur. Məs., [5]-də aşağıdakı təqribi düstur kimi düsturlar alınmışdır. $\beta > 0$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n}\, \hat{D}_n^+ > \beta\} \backsimeq a\, e^{-b\beta^2},$$

burada a, b – müəyyən sabitlərdir. Mövcud cədvəllərlə müqayisədən aydın olmuşdur ki, $n \geq 100$ və $\leq 0{,}20$ olan ehtimallar üçün bu düsturlar məqbulsayılan dəqiqliyi verir (β -nın artması ilə artan). Xüsusi halda, normal Φ paylanmalı seçim üçün, hər iki parametr seçim üzrə təyin olunduğu halda, n -in böyük qiymətlərində yuxarı kritik qiymətlərin tapılması üçün

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{n}\, \sup_x \left| F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)\right| > \beta\right\} \backsimeq$$

$$\backsimeq 2\sqrt{\frac{2\pi}{\pi-2}}\, \exp\left(-\frac{2\pi}{\pi-2}\beta^2\right)$$

təqribi düsturundan istifadə etmək olar. Burada $\bar{x}$, s^2 – uyğun olaraq, empirik paylanma funksiyası $F_n(x)$ -in qurulduğu seçimin orta qiyməti və dispersiyasıdır.

İ k i s e ç i m l i və ç o x s e ç i m l i K. – S. k.-ləri əsas etibarilə bircinslik haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün tətbiq olunur. $F_m(x)$ və $G_n(x)$ – iki asılı olmayan, m və n həcmli seçimlər üzrə qurulmuş seçimi paylanma funksiyaları, bunların nəzəri paylanma funksiyaları isə uyğun olaraq, $F(x)$ və $G(x)$ olsun. Bircinslik hipotezi $H : F(x) \equiv G(x)$ olsun. İkiseçimli Smirnov kriterisi

$$D_{m,n} = \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$$

statistikasına əsaslanır ($D_{m,n}^+$ və $D_{m,n}^-$ üçün statistikalar analoji təyin olunur). Sınaqda $D_{m,n}$ statistikası üçün alınmış qiymət böyük olduğu halda, H hipotezi qəbul olunmamalıdır. $F \neq G$ hipotezinə hər bir alternativ üçün kriteri tutarlıdır. Hipotez şərtində $D_{m,n}$ statistikasının paylanması, $F = G$ paylanma funksiyası kəsilməz olduğu halda, ümumi paylanma funksiyası F -dən asılı olmur. Bu halda faiz nöqtələrinin hesablanması mürəkkəb kombinatorika məsələsi olur ki, onun həlli üçün çox cəhdlər edilmişdir. Hal-hazırda bu istiqamətdə ətraflı cədvəllər, alqoritmlər və EHM üçün proqramlar vardır. $m, n \to \infty$ olduqda, $\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\, D_{m,n}$ və $\sqrt{n}\, D_n$ statistikaları asimptotik olaraq eyni qanunla paylanmışlar (uyğun hipotezlərdə). $\sqrt{n}\, D_n$ -in asimptotik paylanması yuxarıda verilmişdir.

Çoxölçülü seçimlər üçün bircinsliyin K. – S. k. ilə yoxlanılması da analojidir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41; [3] С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика, Избр. труды, М., 1970, с. 117–27, 133–59; [4] Т ю р и н Ю. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1984, т. 48, № 6, с. 1314–43; [5] Т и м о н и н В. И., Ч е р н о м о р д и к О. М., «Teo-

рия вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 572–73; [6] Pearson E. S., Hartley H. O. (eds.), Biometrika tables for statisticians, v. 2, Camb., 1972.

KOLMOQOROV – SMİRNOV STATİSTİKASI « Колмогорова – Смирнова статистика; Kolmogorov – Smirnov statistic » – bax, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*.

KOMBİNATOR ANALİZ « комбинаторный анализ; combinatorial analysis », kombinator riyaziyyat, kombinatorika, – hər hansı, adətən, sonlu çoxluğun hissələrinin verilmiş qaydalara uyğun olaraq seçilməsi və yerləşdirilməsi məsələlərinin həllinə həsr olunmuş riyaziyyat bölməsidir. Hər bir belə qayda ilkin çoxluğun elementlərinin hər hansı kombinator konfiqurasiya adlandırılan konstruksiyasının xarakterik cəhətlərini təyin edir. Buna görə də, K. a.-in məqsədinin kombinator konfiqurasiyaların öyrənilməsi olduğunu söyləmək olar. Bu isə kombinator konfiqurasiyaların varlığı məsələlərini, onların qurulması alqoritmlərini, belə alqoritmlərin optimizasiyasını, hesablama məsələlərinin həllinin, o cümlədən, verilmiş sinfin konfiqurasiyaları sayının təyin olunmasını əhatə edir. Kombinator konfiqurasiyalara ən sadə misallar *birləşmələr* (kombinezonlar), *yerləşmələr* (aranjemanlar) *və yerdəyişmələrdir* (permutasyonlardır). n elementli Ω çoxluğu n – çoxluq adlanır; onun ixtiyari m – altçoxluğu, $m \le n$, m – həcmli birləşmə adlanır. n müxtəlif elementdən m həcmli birləşmələrin sayı

$$C(n, m) = C_n^m = \binom{n}{m} = n(n-1)...(n-m+1)/m! = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

düsturu ilə təyin olunur.

$$(1+t)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m t^m, \qquad C_n^0 = 1$$

düsturu Nyuton binom düsturu, C_n^m ədədləri binomial əmsallar adlanır. Nizamlanmış m – altçoxluq m – ölçülü yerləşmə adlanır. n müxtəlif elementli çoxluğun m həcmli yerləşmələrinin sayı

$$A(n, m) = A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$$

ədədinə bərabərdir. $m = n$ olduqda, yerləşmə Ω çoxluğunun elementlərinin yerdəyişməsidir. Belə yerdəyişmələrin sayı

$$P(n) = P_n = n!, \quad 0! = 1$$

düsturu ilə təyin olunur.

K. a.-in əsas anlayışlarının yaranması və inkişafı riyaziyyatın cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi kimi bölmələrinin inkişafı ilə paralel olmuşdur. Hələ Qədim Şərqin riyaziyyatçılarına birləşmələr sayının binomial əmsallarla ifadəsi və qüvvət üstü natural n ədədinə bərabər olan Nyuton binom düsturu məlum idi. K. a. riyaziyyatın bölməsi kimi qumar oyunları ilə bağlı B. Paskalın (B. Pascal) və P. Fermanın (P. Fermat) işlərilə əlaqədar yaranmışdır. Bu işlər ehtimal nəzəriyyəsinin əsasını təşkil etməklə yanaşı, eyni zamanda sonlu çoxluğun elementlərinin kombinasiyaları sayının təyin edilmə prinsiplərini əhatə edərək, bununla da K. a.-in ehtimal nəzəriyyəsi ilə ənənəvi əlaqəsini müəyyən etmişdir.

Q. Leybnits (G. Leibniz) «Ars combinatoria» («Kombinator bacarıq») adlı dissertasiyası ilə kombinator metodların sistematik inkişafında böyük rol oynamışdır, deyəsən, «kombinator» termini də ilk dəfə burada daxil olunmuşdur. K. a.-in özünü təsbit etməsində Ya. Bernullinin (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» («Fərziyyə etmələr bacarığı») adlı işi mühüm rol oynamışdır; bu iş ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarına həsr olunmuş, bir sıra kombinator anlayışlar burada ətraflı şərh olunmuş, onların ehtimalların hesablanması üçün tətbiqləri göstərilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, Q. Leybnits və Ya. Bernullinin işlərilə kombinator metodlar riyaziyyatın müstəqil bir sahəsinə çevrilmiş oldu.

Kombinator metodların inkişafında L. Eylerin (L. Euler) böyük xidməti olmuşdur. Onun bölgülərlə və natural ədədlərin toplananlara kompozisiyaları ilə bağlı işlərilə kombinator konfiqurasiyaların əsas hesablama metodlarından biri – doğuran funksiyalar metodunun əsası qoyuldu.

K. a.-ə marağın təzədən yaranması 20-ci əsrin 50-ci illərindən başlayır ki, bu da kibernetika və diskret riyaziyyatın, elektron-hesablama texnikasının geniş istifadə edilməsi ilə bağlı olmuşdur. Bu zaman *klassik kombinator məsələlərə* maraq artmış, çoxlu yeni problemlər qoyulmuşdur.

Araşdırma istiqamətlərinin formalaşmasına, sonradan iki faktor təsir göstərmişdir: bir tərəfdən araşdırma obyektinin seçilməsi, digər tərəfdən öyrənilən obyektin mürəkkəblik dərəcəsindən asılı olan məqsədin qısaca dürüst ifadə olunması. Əgər tədqiq olunan konfiqurasiya ödənilməsi aydın olmayan şərtlər sistemi ilə təyin olunursa, onda tədqiqatın məqsədi konfiqurasiyanın varlığı şərtlərinin müəyyən edilməsi və onun qurulması alqoritminin tərtib olunmasından ibarətdir.

K. a.-in inkişafda olan bölməsi blok – sxem nəzəriyyəsidir (bax, [2], [3], [11]); bu bölmənin əsas problemləri təsnifatla, varlıq şərtlərilə və blok – sxemlərin bəzi siniflərinin qurulması metodları ilə bağlıdır. Blok – sxemin xüsusi halı tənləşdirilmiş natamam blok – sxemlər və ya $(b, \upsilon, r, k, \lambda)$ – konfiqurasiyalarıdır ki, bunlar hər hansı υ çoxluğunun b, k – altçoxluqları kimi (bunlar bloklar adlandırılır), hər bir elementin yalnız r blokda, iki müxtəlif element cütünün isə yalnız λ blokda olması şərtilə təyin olunur. $b = \upsilon$ olarsa, aydındır ki, $r = k(b, \upsilon, r, k, \lambda)$ – konfiqurasiyası, (υ, k, λ) – konfiqurasiya və ya simmetrik tənləşdirilmiş natamam blok – sxem adlanır. Hətta (υ, k, λ) – konfiqurasiyaları üçün bunların varlığı haqqında zəruri və kafi şərtlər haqqında suala hələlik cavab verilməmişdir. (υ, k, λ) – konfiqurasiyalarının varlığı üçün zəruridir ki, υ cüt olduqda, $k - \lambda$ kvadrat, υ tək ədəd olduqda isə $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(\upsilon-1)/2} \lambda y^2$ tənliyinin həlli tam və eyni zamanda sıfra bərabər olmayan x, y, z ədədləri olsun.

$\upsilon = n^2 + n + 1$, $k = n + 1$, $\lambda = 1$ olduqda (υ, k, λ) – konfiqurasiyası n tərtib proyektiv müstəvi olub, sonlu sayda nöqtələr və insidentlik şərtləri ilə verilmiş düzxətlərdən ibarət sonlu həndəsənin xüsusi halıdır. Hər bir $(n-1)$ tərtib proyektiv müstəviyə qarşılıqlı birqiymətli olaraq, $(n-1)$ sayda cüt-cüt ortoqonal n tərtib *latın kvadratlarını* uyğun qoymaq olar. n tərtib proyektiv müstəvinin varlığı üçün $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ olduqda, $n = a^2 + b^2$ bərabərliyini ödəyən a və b tam ədədlərinin olması zəruridir. n tərtib proyektiv müstəvilərin varlığı haqqında sual yalnız, $n = p^\alpha$, p sadə ədəd, α isə natural ədəd olan halda müsbət həll olunmuşdur. Hətta $n = 10$ olduqda, bu sual öz cavabını tapmamışdır. Bu suallar çərçivəsində, $n = 4k + 2$, $k = 1, 2, \dots$ tərtib ortoqonal latın

kvadratları cütünün mövcud olmaması haqqında Eyler hipotezini $k > 1$ halında inkar edən nəticə alınmışdır.

K. a.-in digər istiqaməti seçim haqqında teoremlərlə bağlıdır. Bu istiqamətdə alınmış bir sıra nəticələrin əsasını Holl teoremi (Hall theorem) təşkil edir, bu teorem X çoxluğunun $(X_1, ..., X_n)$ altçoxluqları ailəsinin müxtəlif təmsilediciləri (transversalları) sisteminin varlığı, yəni $(x_1, ..., x_n)$ elementlər sisteminin varlığı haqqındadır: $i \neq j$ olduqda $x_i \in X_i$ və $x_i \neq x_j$ şərtlərini ödəyən transversal, yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki, $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$ şərtini ödəyən ixtiyari $i_1, ..., i_k$ üçün $\left| X_{i_1} \cup ... \cup X_{i_k} \right| \geq k$ olsun, burada $\left| Y \right|$, – Y çoxluğunun elementlərinin sayıdır. Holl teoremindən latın kvadratının varlığı haqqında teorem alınır: $(k \times n)$ – ölçülü ixtiyari latın kvadratını n tərtib latın kvadratına qədər tamamlamaq olar, $1 \leq k \leq n-1$. Holl teoreminin digər nəticəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur: mənfi olmayan ixtiyari $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i, j = 1, ..., n$ matrisini

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t > 0$$

olarsa,

$$A = \alpha_1 \Pi_1 + ... + \alpha_s \Pi_s$$

şəklində ifadə etmək olar, burada $\Pi_1, ..., \Pi_s$, – n tərtib əvəzləmə matrisləridir və $s \leq (n-1)^2 + 1$. Holl teoremindən belə bir teorem də alınır ki, bütün müsbət elementlərdən tərtib olunmuş mənfi olmayan matrisin sətir və sütunlarının minimal sayı onun elə müsbət elementlərinin maksimal sayına bərabərdir ki, bu elementlərdən heç bir ikisi eyni bir sətirdə və ya eyni bir sütunda yerləşmiş olmasın. Bu teoremə analoji – hissəvi nizamlanmış çoxluqların ekstremal xassəsini müəyyən edən teoremdə hökm olunur ki, kəsişməyən zəncirlərin minimal sayı cüt-cüt müqayisə olunmayan elementlərdən ibarət altçoxluğun maksimal gücü ilə üst-üstə düşür. Aşağıdakı nəticə də ekstremal xassə daşıyır (Ramsey teoremi): əgər X n – çoxluğu üçün r elementli bütün C_n^r sayda birləşmələri təşkil edərək, onları k sayda kəsişməyən siniflərə ayırdıqda, tam m ədədi üçün elə $n_0 = n_0(m, r, k)$ ədədi vardır ki, $n \geq n_0$ olduqda, bu siniflər arasında X -in m elementili $Y \subset X$ altçoxluğunu özündə saxlayan C_m^r birləşmələrinin hamısına aid olduğu sinif tamaq olar.

Ekstremal sayılan kommivoyajor məsələsində n sayda şəhərin hər birində olaraq əvvəlki şəhərə ən qısa yolla qayıtmaq üçün marşrut seçilməsi tələb olunur, bu şərtlə ki, şəhərlər arasında məsafələr məlum olsun. Bu məsələ nəqliyyat şəbəkələrinin öyrənilməsində tətbiq edilir. Ekstremal xüsusiyyətli kombinator məsələlər şəbəkələrdə axınlar nəzəriyyəsində və qraflar nəzəriyyəsində yaranır.

K. a.-in əsas hissəsini hesablama məsələləri təşkil edir. Bu məsələlərin həllində ya verilmiş sinifdən kombinator konfiqurasiyaların seçilməsi metodu göstərilir, ya onların sayı təyin olunur, ya da ki, bunların hər ikisi edilir. Hesablama məsələsinin tipik nəticələri aşağıdakılardır:

k tsiklli n dərəcəli əvəzləmələrin sayı $\left| S(n, k) \right|$ ədədinə bərabərdir, $S(n, k)$ 1-ci növ Stirlinq ədədi olub,

$$x(x-1) ... (x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) x^k$$

bərabərliyi ilə təyin olunur;

n elementli çoxluğun k sayda altçoxluqlara bölgüsü sayı 2-ci növ Stirlinq ədədi $\sigma(n, k)$ -ya bərabərdir və

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (k-j)^n ;$$

n sayda müxtəlif oyuqda m sayda müxtəlif əşyanın, bütün oyuqlar dolu olması şərtilə, yerləşmələrinin sayı $n! \sigma(m, n)$ ədədinə bərabərdir.

Hesablama məsələlərinin həlli üçün faydalı vasitə – matris permanentidir. Elementləri hər hansı halqadan olan $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, $n \leq m$ matrisinin permanenti

$$\operatorname{per} A = \sum_{(j_1, ..., j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} ... a_{n j_n}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada cəmləmə m müxtəlif elementdən n həcmli bütün mümkün yerləşmələr üzrə aparılır. Sonlu çoxluğun altçoxluqlarının ixtiyari ailəsinin transversallarının sayı – uyğun insidentlik matrisinin permanentinə bərabərdir.

Məhdud pozisiyalı yerdəyişmələrin sayının təyin olunması üzrə məsələlərin tam bir sinfi permanentlərin hesablanmasına gətirilir. Bu məsələlər rahatlıq məqsədilə, bəzən, $n \times n$ ölçülü şahmat lövhəsində qarşılıqlı hücum vəziyyətində olmayan fiqurların yerləşdirilməsi məsələsi kimi də ifadə olunur. Matrislərin bəzi siniflərinin permanentlərinin təyin olunması ilə dimerlər haqqında məsələnin variantları da bağlıdır, dimerlər adsorbsiyanın öyrənilməsində yaranır və məsələ də bu halda atomların hər hansı müstəvidə ikiatomlu molekullara birləşmə üsullarının sayını təyin etməkdən ibarət olur. Bu məsələnin həlli, determinantlara yaxın, matrislərin müəyyən funksiyaları – pfaffianlar vasitəsilə alına bilinir. Latın düzbucaqlılarının (kvadratlarının) sayı haqqında problem də bəzi $(0, 1)$ matrislərinin permanentlərinin effektiv həll metodlarının üzərində işlənilmə ilə bağlıdır.

Permanentlərin hesablanması üçün

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=m-n}^{m} (-1)^{k-m+n} C_k^{m-n} S_k ,$$

düsturundan istifadə olunur.

$$S_k = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_k \leq m} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} a_{il} - \sum_{r=1}^{k} a_{ij_r} \right).$$

Matrislərin bəzi siniflərində permanent kəmiyyətini qiymətləndirən çoxsaylı bərabərsizliklər vardır. Maraq doğuran məsələlərdən biri də mənfi olmayan matrislərin bu və ya digər siniflərində permanentin ekstremal qiymətlərinin təyin olunmasıdır. İkiqat stoxastik matrislər sinfi üçün belə məsələ 1980-da Q. P. Yeqoriçev və həm də D. İ. Falikman (bax, [7]) tərəfindən həll olunmuşdur; onlar isbat etmişlər ki, n tərtib ikiqat stoxastik matrisin permanentinin minimumu $n!/n^n$-ə bərabərdir. Bu da hələ 1926-da

B. Van der Vardenin (B. Van der Waerden) irəli sürdüyü məşhur hipotezi təsdiq etmiş oldu.

Hesablama məsələlərinin həllində *doğuran funksiyalar* metodu böyük rol oynayır.

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n t^n$$

doğuran funksiyası elementləri hər hansı meydandan olan $(a_0, a_1, ...)$ ardıcıllığına uyğun, formal qüvvət üstlü sıra kimi götürülür. Belə təriflə verilən doğuran funksiyalar hesablama məsələlərinin həllində rekurrent münasibətlər və sonlu fərqlər tənlikləri metodları ilə yanaşı effektiv surətdə istifadə olunur. Asimptotik düsturların doğuran funksiyalar kimi alınmasında, adətən, həqiqi və ya kompleks dəyişənli analitik funksiyalardan istifadə olunur. Sonuncu halda əmsalların ifadələrinin tapılması üçün Koşi inteqral düsturundan istifadə olunur.

İnsidentlik cəbrlərinə baxılmaqla və hissəvi nizamlanmış çoxluqlarda (bax, məs., [1]) Mebius funksiyalarından istifadə edilməklə bağlı olan hesablama metodlarının mümkün unifikasiyaları istiqamətində nəticələr alınmışdır. Hesablama məsələlərinin həllində obyektlərin fərqlənməməzlik anlayışının dürüst və səlis ifadə olunması mühüm rol oynayır. Bu məqsədlə obyektlərin hər hansı əvəzləmələr qrupuna nəzərən ekvivalentlik anlayışı ilə doğuran funksiyalar metodunun tətbiqi birlikdə Poya hesablama nəzəriyyəsinin əsasını təşkil etmişdir (bax, [11]). Bu nəzəriyyənin məğzi aşağıdakı kimidir. $|X| = m$, $|Y| = n$ olsun. $f : X \to Y$ konfiqurasiyalarının çoxluğu Y^X-ə baxılır. X çoxluğunda əvəzləmələr qrupu A təsir göstərir və bu qrup Y^X-də elə $\sim$ ekvivalentlik münasibətini təyin edir ki, əgər elə $\alpha \in A$ olarsa ki, bütün $x \in X$ üçün $f(\alpha(x)) = f_1(x)$ olsun, onda $f \sim f_1$ olur; $f, f_1 \in Y^X$. Hər bir $y \in Y$ üçün $[y] = (s_1, ..., s_k)$ xarakteristikası ona qarşı qoyulur, burada s_i, $i = 1, ..., k$ – Abel qrupunun elementləridir. f konfiqurasiyasının xarakteristikası

$$[f] = \sum_{x \in X} [f(x)]$$

bərabərliyi ilə verilir. Əgər $a(s_1, ..., s_k)$, y-in $(y \in Y)$ xarakteristikanın verilmiş qiymətlərli elementlərinin sayı və $b_m(s_1, ..., s_k)$ – ekvivalent olmayan f konfiqurasiyalarının sayıdırsa, $f \in Y^X$,

$$F(y_1, ..., y_k) = \sum_{(s_1,...,s_k)} a(s_1, ..., s_k) y_1^{s_1} ... y_k^{s_k} ,$$

$$\Phi_m(y_1, ..., y_k) = \sum_{(s_1,...,s_k)} b_m(s_1, ..., s_k) y_1^{s_1} ... y_k^{s_k}$$

olduqda, onda Poya teoremində hökm olunur ki,

$$\Phi_m(y_1,...,y_k) = Z(F(y_1,...,y_k), F(y_1^2,...,y_k^2),...,F(y_1^m,...,y_k^m))$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada Z, – A qrupunun tsiklik indeksi olub,

$$Z(t_1,...,t_m;\ A) = \sum_{j_1+2j_2+...+mj_m=n} C(j_1,...,j_m;A)\, t_1^{j_1} ... t_m^{j_m}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, $C(j_1, ..., j_m; A)$, – A qrupunun $\{1^{j_1} 2^{j_2} ... m^{j_m}\}$ tsiklik sinfinin elementləri sayıdır. Bu teorem Bernsayd lemmasına əsaslanır; bu lemmaya görə əvəzləmələrin A qrupu ilə X çoxluğunda təyin olunan ekvivalentlik siniflərinin sayı $N(A)$

$$N(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha)$$

düsturu ilə verilir, burada $j_1(\alpha)$, – $\alpha \in A$ vahidi tsikllərinin sayıdır. Poya nəzəriyyəsi qraflar nəzəriyyəsinin hesablama məsələlərinin həllində və karbon kimyəvi birləşmələrinin hesablanmasında tətbiq olunur. Uyğun olaraq, X və Y-də təsir göstərən G və H qruplarının konfiqurasiyalarının ekvivalentliyi halında Poya teoreminin ümumiləşməsi vardır (bax, [4], [11]). Bu şəkildə teorem, məs., izomorf olmayan abstrakt avtomatların sayını təyin etmək üçün tətbiq olunur.

Əgər $X = \{1,...,m\}$, $Y = \{a_1,...,a_n\}$ və $\sigma : X \to Y$ olarsa, a_j isə obraz kimi α_j dəfə istifadə olunarsa, onda

$$[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} ... a_n^{\alpha_n}] \ , \ \alpha_1 + ... + \alpha_n = m$$

ifadəsi σ-nin ilkin spesifikasiyası adlanır. Əgər $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ədədlərində β_0 sayda sıfır, β_1 sayda vahid və s. varsa, onda

$$[[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} ... m^{\beta_m}]], \ \beta_0 + ... + \beta_m = n \ , \ \beta_1 + 2\beta_2 + ... + m\beta_m = m$$

ifadəsi ikinci spesifikasiya adlanır. $\sigma : X \to Y$ konfiqurasiyalarının ekvivalentliyini təyin edən G və H qruplarının müəyyən spesializasiyası halında ekvivalent olmayan konfiqurasiyaların hesablanması üçün doğuran funksiyaların qurulması qaydasını göstərmək olur. Bu qayda ümumi kombinator sxem adlandırılır və dörd xüsusi hala ayrılır; bu da G və H qruplarının uyğun dərəcəli vahidi E qrupunun və ya simmetrik S_n qrupunun hansı qiymətlər almasına uyğun olaraq edilir. Bu xüsusi hallar məlum kombinator sxemlərin əksəriyyəti üçün modellərdir (bax, [10], [11]).

1. Kommutativ qeyri–simmetrik n–bazis: $G = S_m$, $H = E$. Eyni əşyaların müxtəlif oyuqlara birləşmələri, yerləşmələri sxemlərini modelləşdirir.

$$[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} ... a_n^{\alpha_n}],$$

$$\alpha_i \in \Lambda_i \subseteq N_0 = \{0, 1, ...\}, \ \Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$$

şərtlərilə təyin olunan, ekvivalent olmayan σ konfiqurasiyalarının təyin olunması üçün doğuran funksiya aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\Phi(t; x_1, ..., x_n; \Lambda) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} (t x_j)^{\alpha_j} .$$

2. Qeyri–kommutativ qeyri–simmetrik n–bazis: $G = E$, $H = E$. Müxtəlif əşyaların müxtəlif oyuqlara birləşmələri, yerləşmələri sxemlərini modelləşdirir.

$$[\sigma] = [a_1^{\alpha_1} ... a_n^{\alpha_n}],$$

$$\alpha_i \in \Lambda_i, \ \Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_n)$$

şərtlərilə təyin olunan, ekvivalent olmayan σ konfiqurasiyalarının hesablanması üçün doğuran funksiya aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\widetilde{\Phi}(t; x_1, ..., x_n; \Lambda) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!} \; x_j^{\alpha_j} .$$

3. Kommutativ simmetrik n – bazis: $G = S_m$, $H = S_n$. Eyni əşyaların eyni oyuqlara yerləşdirilməsi, natural ədədlərin ayrılışlarının hesablanması sxemlərini modelləşdirir.

$$[[\sigma]] = [[\, 0^{\beta_0} 1^{\beta_1} ... \, m^{\beta_m} \,]] ,$$

$$\beta_j \in \Lambda_j , \;\; \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, ...)$$

şərtlərilə verilən σ konfiqurasiyalarının hesablanması

$$\Psi(t; x_1, ..., \Lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} (x_j t^j)^{\beta_j}$$

şəklində doğuran funksiyadan istifadəyə əsaslanır.

4. Qeyri–kommutativ simmetrik n –bazis: $G = E$, $H = S_n$. Sonlu çoxluqların bloklara bölgülərini, müxtəlif əşyaların eyni olan oyuqlara yerləşdirilməsi sxemlərini modelləşdirir.

$$[[\sigma]] = [\, 0^{\beta_0} 1^{\beta_1} ... \, m^{\beta_m} \,]] ,$$

$$\beta_j \in \Lambda_j , \;\; \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, ...)$$

şərtlərilə verilən σ konfiqurasiyalarının hesablanması

$$\widetilde{\Psi}(t; x_1, ..., \Lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}$$

şəklində doğuran funksiyadan istifadəyə əsaslanır.

K. a.-də asimptotik metodlar əsas yer tutur. Bunlar həm mürəkkəb sonlu ifadələri bu ifadədəki parametrlərin qiymətləri böyük olduğu halda sadələşdirmək üçün, həm də dəqiq düsturlar məlum olmadıqda, başqa yollarla, təqribi düsturları almaq üçün tətbiq olunur. Hesablama xarakterli kombinator məsələni bəzən hər hansı təsadüfi kəmiyyətin paylanma xarakteristikasının tapılması məsələsi kimi də ifadə etmək məqsədəuyğundur. Belə interpretasiya ehtimal nəzəriyyəsinin inkişaf etmiş aparatından istifadə etməyə, asimptotikaların tapılması üçün isə limit teoremlərindən istifadə etməyə imkan yaradır. Bu nöqteyi – nəzərdən, əşyaların oyuqlara təsadüfi qaydada yerləşdirilməsi, çoxluqların təsadüfi bölgüləri, təsadüfi əvəzetmələrin tsiklik strukturları, təsadüfi qrafların müxtəlif sinifləri, o cümlədən, inikaslar qrafları da daxil olmaqla ətraflı araşdırılmışdır (bax, [9], [10]).

Simmetrik qrup və semi – qrupların kombinator xassələrinin öyrənilməsində ehtimali yanaşma tətbiq olunur. $n \to \infty$ olduqda, simmetrik S_n qrupunun təsadüfi elementinin tərtibinin limit paylanması, onun təsadüfi elementlərlə doğurulması ehtimalının asimptotikası araşdırılmışdır. Təsadüfi mənfi olmayan matrislərin bəzi sinifləri üçün matrisdə sıfırlı xətlərin və permanentlərin sayının paylanmaları öyrənilmiş, belə matrislərin primitivliyi ehtimalı qiymətləndirilmişdir. Kombinator konfiqurasiyaların konstruksiya edilmədən varlığını isbat etmək üçün bəzən, xüsusi ehtimal qaydası istifadə olunur. Bu qaydanın mahiyyəti hər hansı bir hadisənin ehtimalının qiymətləndirilməsinin köməyilə konfiqurasiyaların varlığının müəyyən olunmasından ibarətdir (bax, [7]).

Bax, həmçinin *Ehtimal kombinatorikası.*

Əd.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ.. М., 1973; [5] Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов, пер. с англ., М., 1977; [6] Эрдеш П., Спенсер Дж., Вероятностные методы в комбинаторике, пер. с англ., М., 1976; [7] Минк Х., Перманенты, пер. с англ., М., 1982; [8] Гулден Я. П., Джексон Д., Перечислительная комбинаторика, пер. с англ., М., 1990; [9] Колчин В. Ф., Чистяков В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 11, М., 1974; с. 5–45; [10] Сачков В. Н., в кн.: Вопросы кибернетики. Тр. Семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 146–64; [11] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

KOMBİNATOR ƏDƏDLƏR « комбинаторные числа; combinatorial numbers » – kombinatorikanın müxtəlif saytəyinetmə məsələlərində yaranan, ədədi kəmiyyətlərin böyük toplusunu özündə birləşdirən termindir. Bir qayda olaraq, bu kəmiyyətlər aşkar interpretasiya (çox halda birqiymətli olmayaraq) olunur, bu interpretasiya verilən sinfin konfiqurasiyalarına gətirən, hər hansı, adətən, sonlu çoxluğun elementlərinin seçilməsi və yerləşməsi üsullarının sayı (və ya hər hansı obyektlər çoxluğunun bu və ya digər xassəli obyektlərinin sayı) terminlərində ifadə olunur.

K. ə.-ə ən sadə misallar *birləşmələrin*, *yerləşmələrin* (rus. размещения) və *yerdəyişmələrin* (rus. перестановка) saylarıdır. Ω, – N sayda müxtəlif elementdən ibarət çoxluq olsun; bu çoxluğun altçoxluqları birləşmələr adlanır; Ω çoxluğunun n həcmli müxtəlif birləşmələrinin sayı

$$C_N^n = \binom{N}{n} = N(N-1)...(N-n+1)/n! = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

düsturu ilə təyin olunur. Ω-nın müxtəlif elementlərindən təşkil olunan nizamlanmış toplular yerləşmələr adlanır; n həcmli (elementli) müxtəlif yerləşmələrin sayı

$$A_N^n = n! C_N^n = (N)_n = N(N-1)...(N-n+1)$$

düsturu ilə hesablanır. $n = N$ olduqda yerləşmələr (çoxluğun elementlərinin bütün mümkün olan müxtəlif yerləşmələri) yerdəyişmələr (permutasiyonlar) adlanır. N elementli çoxluğun bütün mümkün yerdəyişmələrinin sayı

$$P_N = N!$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər elementlər məhdudluq qoyulmadan təkrarlana bilinərsə, onda N müxtəlif elementli çoxluğun n elementli bütün birləşmələrinin sayı C_{N+n-1}^n ədədinə, n həcmli bütün nizamlanmış toplularının sayı N^n-ə bərabərdir (bax, [3]). Bu ədədlər müxtəlif hadisələrin ehtimallarının tapılmasında, ehtimalın klassik tərifi sxemində geniş istifadə olunur. Məs., urnda $1, 2, ..., N$ ədədləri ilə nizamlanmış kürəciklər vardırsa, bu kürəciklərin M saydası ağ rəngli, $N - M$ saydası isə qara rənglidirsə, onda urndan ixtiyari qaydada çıxarılmış n sayda kürəciyin m saydasının ağ rəngli olması ehtimalı

$$\frac{C_n^m A_M^m A_{N-M}^{n-m}}{A_N^n} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

(qaytarmamaq şərtilə sxemi) ədədinə bərabərdir, əgər kürəciklər qaytarmaq şərtilə sxemi üzrə seçilirsə, onda bu ehtimal

$$\frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

ədədinə bərabərdir.

Xüsusi sayılan K. ə.-dən ən çox istifadə olunanı – $\Delta^k 0^n$ Morqan ədədləri [Δ – fərq operatorudur: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$]:

$$\Delta^k 0^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (k-j)^n,$$

uyğun olaraq, 1-ci və 2-ci növ Stirlinq ədədləri $S(n,k)$ və $\sigma(n,k)$ və

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

– Bell ədədləridir, Bell ədədlərinin kombinator interpretasiyalarından biri: n elementli çoxluğun kəsişməyən altçoxluqlara müxtəlif bölgülərinin sayıdır.

K. ə.-in xassələrinin araşdırılmasında rekurrent münasibətlər və sonlu fərqlər tənliklər metodları ilə paralel olaraq, doğuran funksiyalar metodlarından da geniş istifadə olunur. Bir çox hallarda obyektlərin baxılan çoxluğunda münasib ehtimal modeli qurmaq olur və bununla da hesablanma xarakterli kombinator məsələni uyğun təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının müəyyənləşdirilməsi məsələsi kimi ifadə etmək olur. Belə interpretasiya K. ə.-in öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif metodlarını (məs., limit teoremlərini) tətbiq etməyə imkan yaradır.

Ədd.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [4] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения, М., 1982.

KOMBİNATOR İNTEQRAL HƏNDƏSƏ « комбинаторная интегральная геометрия; combinatorial integral geometry » – bax, *İnteqral həndəsə*.

KOMBİNATOR KODLAMA « комбинаторное кодирование; combinatorial coding » – bax, *Kodla(n)ma*(sı) məlumatlar mənbəinin.

KOMBİNATOR KONFİQURASİYA « комбинаторная конфигурация; combinatorial configuration » – bax, *Kombinator analiz*.

KOMBİNATOR MƏSƏLƏLƏR klassik **« комбинаторные задачи** классические; classical **combinatorial problems »** – elementləri tapmaca tipli, əyləncə məzmunlu hər hansı qısa və dürüst ifada oluna bilinən sonlu çoxluğun elementlərinin seçilmə və yerləşməsi məsələləridir.

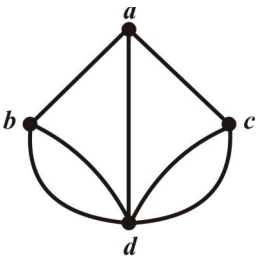
Klassik K. m.-dən biri, hələ Qədim Şərq əfsanələrində də adı çəkilən sehrli kvadratın qurulması məsələsidir. Bu məsələdə n^2 sayda ilk natural ədədlərin $n \times n$ kvadratında elə qaydada düzülməsi tələb olunur ki, sətirlər, sütunlar və diaqonallar üzrə ədədlərin cəmi eyni bir ədədə bərabər olsun. Məs., $n = 3$ olduqda sehrli kvadrat

4	9	2
3	5	7
8	1	6

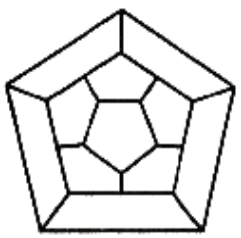
şəklində olur. Belə kvadratların qurulması üçün bir sıra metodlar məlumdur (bax, məs., [1]). $n > 4$ olduqda n tərtib sehrli kvadratlar sayını təyin etmək çətin və hələ də həlli tapılmamış məsələlərdən biri hesab olunur.

Bir sıra K. m.-ə L. Eyler (L. Euler) tərəfindən baxılmışdır. Bunlardan biri 36 zabit haqqında məsələdir; bu məsələdə 6×6 ölçülü kvadratın oyuqlarında (kare) 6 müxtəlif polkdan 6 müxtəlif hərbi rütbəli 36 zabiti elə yerləşdirmək tələb olunur ki, hər bir sütun (kolonna) və hər bir cərgədə hər bir rütbədən və hər bir polkdan, yalnız və yalnız, bir zabit olsun. $n \times n$ ölçülü, $1, 2, ..., n$ elementlərindən ibarət kvadratın hər bir sətir və sütununda yerləşən elementləri müxtəlif olarsa, belə kvadrat latın kvadratı adlanır. İki latın kvadratını üst-üstə qoyduqda oyuqlardakı bütün n^2 sayda elementlər cütləri müxtəlif olarsa, bunlar ortoqonal latın kvadratı adlanır. 36 zabit haqqında məsələ 6 tərtib ortoqonal latın kvadratlarının cütünün varlığı haqqında məsələyə ekvivalentdir. L. Eyler $n = 4k + 2$ tərtib, $k = 1, 2, ...$ ortoqonal latın kvadratlarının mövcud olmaması haqqında hipotezi söyləmişdir. 1900-də Q. Tarri (G. Tarry) bu hipotezi $n = 6$ olduqda təsdiq etmişdir və bununla da o, 36 zabit haqqında məsələnin həlli olmadığını isbat etmiş oldu. 1959-60-cı illərdə hər bir $n = 4k + 2$, $k = 2, 3, ...$ üçün ortoqonal latın kvadratları cütünün varlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur (bax, [2]).

L. Eyler tərəfindən baxılan digər məsələ keniqsberq körpüləri haqqında məsələdir. Bu məsələ aşağıdakı kimi ifadə olunur. Çayın sahillərini və bu çayda yerləşən iki adanı yeddi körpü birləşdirir, bu çay şəhərin içərisindən keçir. Hər bir körpüdən yalnız bir dəfə keçərək əvvəlki nöqtəyə qayıtmaq olarmı? Bu məsələni şəkil 1-də təpələri qurunu təsvir edən qrafın bütün tərəflərindən yalnız bir dəfə keçmək şərtilə başlanğıc nöqtəyə qayıtmaq mümkünlüyü haqqında qoyulan məsələ kimi ifadə etmək olar. Əgər qrafda belə keçilmə mümkün olarsa, belə qraf Eyler tsiklinə malikdir, deyir. L. Eyler göstərmişdir ki, qraf Eyler tsiklinə, yalnız və yalnız, o halda malikdir ki, o, əlaqəli qrafdır və onun hər təpəsindən çıxan tillərinin sayı cütdür. Şəkil 1-də təsvir olunan qraf bu tələbi ödəmədiyindən keniqsberq körpüləri haqqında məsələnin həlli yoxdur. Başlanğıc nöqtə ilə sonda qayıdış nöqtəsinin üst-üstə düşməsi şərti qoyulmadığı halda belə, bu məsələnin həlli yoxdur. Bu halda qrafda Eyler zəncirinin varlığı haqqında sual qoymaq olar. Qraf, yalnız və yalnız, o halda Eyler zəncirinə malikdir ki, o, əlaqəli qrafdır və onun tək sayda tillər çıxan təpələrinin sayı ya 0 və ya 2-yə bərabərdir. Şəkil 1-dəki qraf bu şərti də ödəmir (bax, [3]).



Şəkil 1


Şəkil 2

1859-da U. Hamilton (W. Hamilton) «Dövrü – aləm səyahəti» oyununu fikirləşmişdir, burada şəkil 2-də təsvir olunmuş qrafın bütün təpələrdən (şəhərlərdən) keçən elə yolun tapılması məsələsi qoyulur ki, hər bir təpədən yalnız bir dəfə keçilsin və sonda başlanğıc təpəyə qayıdılsın. Bu xassəli yollara malik qraflardakı yollar Hamilton tsikllər i adlanır. Qrafda Hamilton tsikllərinin varlığının zəruri və kafi şərtləri hələ ki, məlum deyildir (bax, [3]).

Qrafda Hamilton tsikllər i haqqında məsələnin müxtəlif ümumiləşmələri vardır. Ümumiləşmələrdən biri kommivoyajör (ticarət agenti) məsələsidir; bu məsələnin əməliyyatlar tədqiqində bir sıra tətbiqləri, xüsusi halda, bəzi nəqliyyat problemlərinin həllində tətbiqləri vardır. Bu məsələ aşağıdakı kimi qoyulur: bir neçə şəhər və bunlar arasında məsafələr məlum olduğu halda, bütün şəhərlərdən keçmək və ilk dəfə çıxılmış şəhərə qayıtmaq şərtilə ən qısa yolu müəyyən etmək tələb olunur.

1847-də R. Kirkman (R. Kirkman) 15 məktəbli haqqında məsələ qoymuş və onu həll etmişdir. Hər gün hər qrupda 3 məktəbli olmaqla 5 qrupa bölünərək gəzintiyə çıxmalıdırlar. Bu zaman bu gəzintilər üçün siyahı tərtib olunduqda nəzərə alınmalıdır ki, hər bir məktəbli yeddi gün ərzində yalnız bir dəfə bir qrupda başqa qrupların hər biri ilə eyni zamanda iştirak edə bilər. Bu məsələ Ya. Şteyner (J. Steiner, 1853) tərəfindən qoyulmuş, üçlüklər sisteminin qurulması məsələsi ilə bağlıdır. v tərtib Şteyner üçlüklər sistemi v elementli çoxluqdan elə üçlüklər toplusuna deyilir ki, hər elementlər cütü hökmən bir üçlüyə daxil olsun. Şteyner üçlüklər sistemi $v \le 15$ üçün təsvir olunmuşdur. Aydın olmuşdur ki, $v = 3, 7, 9$ olduqda üçlüklər sistemi ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganədir (v sayda elementin əvəz olunması, üçlüklər yerdəyişməsi), $v = 13$ halında ekvivalent olmayan iki üçlük sistemi vardır; $v = 15$ olduqda belə üçlüklərin sayı 80-ə bərabərdir. $v > 15$ olduqda Şteyner üçlüklərinin müxtəlif sistemlərin sayı, hələ ki, məlum deyildir. $v > 3$ olduqda Şteyner üçlüklər sistemi natamam qismən tarazlaşdırılmış bloksxemin xüsusi halıdır.

Görüş haqqında klassik məsələ aşağıdakı kimi ifadə olunur. Hər birində müxtəlif n kart olan iki eyni oyun kartı dəsti vardır. Birinci və ikinci kart dəstinin uyğun kartların müqayisəsində üst-üstə düşmə sayı r olduqda belə kartların yerləşmə sayı $D_{n,r}$ -i tapmaq tələb olunur, $r = 0, 1, ..., n$. $r = 0$ olduğu xüsusi hal P. Monmor (P. Montmort, 1708) tərəfindən ilk dəfə araşdırılmışdır. L. Eyler, D_{n0} kəmiyyətinin təyin olunmasına ekvivalent məsələni, baş diaqonal elementləri ilə ümumi elementləri olmayan determinantın hədləri sayı məsələsini tədqiq etmişdir.

Görüş məsələsi kombinator analizin məhdud pozisiyalarlı yerdəyişmələri ilə bağlı bölməsinin yaranmasında əsas rol oynamışdır. X çoxluğunda təsir göstərən n dərəcəli əvəzləmələrin çoxluğu S_n -də ρ məsafəsini aşağıdakı münasibətlə daxil etmək olar;

$$\rho(s, s') = \left|\{x : s(x) \ne s'(x), x \in X\}\right|, \; s, s' \in S_n .$$

Onda

$$D_{nr} = \left|\{s : \rho(s, s') = n - r, \; s \in S_n\}\right|,$$

belə ki,

$$D_{nr} = \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \frac{1}{k!}, \qquad r = 0, \; ..., \; n .$$

Əvəzləmələr arasında məsafələr terminlərində digər klassik K. m.-ni, adətən, ailə cütləri məsələsi adlandırılan məsələni ifadə etmək olur. Bu məsələdə dairəvi miz arxasında $2n$ sayda yerdə n sayda ailə cütlərinin oturması üçün müxtəlif hallarda elələrinin sayını tapmaq tələb olunur ki, bu hallardan heç birində ərlə arvad yanaşı oturmasın. Bu kəmiyyət M_n ilə işarə olunarsa,

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot U_n \, , U_n = \left|\{s : \rho(s, e) = n, \rho(s, c) = n, s \in S_n\}\right|,$$

e – vahid əvəzləmə, $c = (1, 2, ..., n)$.

$$U_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^{k} (n-k)!$$

düsturu alınmışdır.

Əgər

$$U_n(s_1, s_2) = \left|\{s : \rho(s, s_1) = n, \; \rho(s, s_2) = n, \; s \in S_n\}\right|,$$

olarsa, $U_n(s_1, s_2)$ kəmiyyəti yalnız $s_1^{-1} s_2$ -nin tsikl strukturundan asılı olur və Çebışev çoxhədlilərindən istifadə olunmaqla düstur şəklində ifadə oluna bilinir (bax, [4]).

Qeyd olunmuş məsələlərlə sıx bağlı olan problem $k \times n$ *latın düzbucaqlılarının* sayı L_{kn} və Latın kvadratları sayı L_n -i təyin etmək problemidir. Latın düzbucaqlısı $k \times n$ n dərəcəli $s_1, s_2, ..., s_k$ əvəzləmələrinin elə nizamlanmış toplusudur ki, $i \ne j$ olduqda, $\rho(s_i, s_j) = n$. İsbat olunmuşdur ki,

$$L_{1n} = n! , \quad L_{2n} = D_n n! , \quad D_n = D_{n0} ,$$

$$L_{3n} = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^k D_k D_{n-k} U_{n-2k} ,$$

$$U_0 = D_0 = 1 ;$$

$k < n^{1/3-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ olduqda və $n \to \infty$ olduqda $\delta_n \to 0$ olarsa,

$$L_{kn} = (n!)^k e^{-} C_k^2 (1 + \delta_n) .$$

n tərtib latın kvadratları sayı $n = 9$ qiymətləri üçün məlumdur (bax, *Latın kvadratı*).

Natural n ədədinin toplananlara ayrılışı sayı haqqında məsələyə ilk dəfə Q. Leybnitsin (G. Leibniz) Y. Bernulliyə (J. Bernoulli) 1669-da yazdığı məktubda toxunulmuşdur. Lakin belə tip məsələlərin tam bir sinfinin həll metodları L. Eyler tərəfindən həyata keçirilmişdir. Bu məqsədlə o, sonsuz hasillər şəklində verilən doğuran funksiyalardan effektiv istifadə etmişdir. Xüsusilə də, o isbat etmişdir ki, $m + n$ ədədinin n sayda toplanana ayrılışı sayı m -in ən çox n sayda toplanana ayrılışı sayına bərabərdir, m -in n -i aşmayan sayda toplananlara ayrılışı sayına bərabərdir və $m + C_{n+1}^2$ ədədinin n müxtəlif toplanana ayrılışı sayına bərabərdir.

Yerləşmələr haqqında klassik məsələ – m sayda müxtəlif əşyanın n sayda müxtəlif oyuqda verilmiş r sayda boş oyuq olması şərtilə yerləşdirilməsi üçün bütün mümkün olan halların sayı $C_{nm}(r)$ ədədinin təyin olunması məsələsidir. $C_{nm}(r)$ üçün aşağıdakı düstur alınmışdır:

$$C_{nm}(r) = C_n^r\ \Delta^{n-r}\ 0^m,\ \ r = 0, 1, ..., n,$$

burada

$$\Delta^k 0^m = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\ C_k^j\ (k-j)^m$$

Morqan ədədidir (bax, *Kombinator ədədlər*).

Burada araşdırmalar nəzəri – ehtimal tətbiqlər planında, müxtəlif ümumiləşmələr və modifikasiyalar daxil olunmaqla aparılmışdır. Bu araşdırmaların ən maraqlı hissəsi m və n qeyri – məhdud artdığı halda müxtəlif asimptotik nəticələrin alınması ilə əlaqədardır.

Əd.: [1] П о с т н и к о в М. М., Магические квадраты, М., 1964; [2] Х о л л М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] О р е О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [4] Р и о р д а н Д ж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [5] Х а р а р и Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

KOMBİNATOR RİYAZİYYAT « комбинаторная математика; combinatorial mathematics » – bax, *Kombinator analiz*.

KOMBİNATORİKA « комбинаторика; combinatorics » – bax, *Kombinator analiz*.

KOMBİNATORİKA, EHTİMALİ « комбинаторика вероятностная; probabilistic combinatorial » – bax, *Ehtimal kombinatorikası*.

KOMPAKT « компакт; compact » – hər bir hesabi açıq örtüyü sonlu altörtüyə malik olan topoloji fəzanın altçoxluğudur. K topoloji $(\mathscr{X}, \mathfrak{S})$ fəzasında altçoxluq, G_i açıq çoxluqlarının hesabi toplusu $\{G_j\} \subseteq \mathfrak{S}$ K-nın örtüyü, yəni $K \subseteq \bigcup_i G_i$ olsun. Əgər K kompaktdırsa, onda elə n vardır ki, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ münasibəti doğrudur. Bu xassə ona ekvivalentdir ki, K-nın hər bir sonsuz altçoxluğunun limit nöqtəsi vardır. K-nın qapanması kompakt olarsa, K n i s b i k o m p a k t ç o x l u q adlanır. $(\mathscr{X}, \mathfrak{S})$ σ – topoloji fəza olarsa, K.-nın tərifi dəyişmir; lakin bu halda K.-nın qapalı çoxluq olması vacib deyildir, bundan başqa, o, Borel σ – cəbrindən də olmaya bilər.

Bəzən «kompaktlıq» terminindən bikompaktlığın işarələnməsi məqsədilə istifadə olunur. Metrik fəza üçün hər iki anlayış üst-üstə düşür.

Əd.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

KOMPAKT ÖLÇÜ « компактная мера; compact measure » – bax, *Mükəmməl ölçü*.

KOMPAKT TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « компактный закон повторного логарифма; compact law of an iterated logarithm » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* B a n a x f ə z a s ı n d a.

KOMPAKTİFİKASİYASI, FAZA FƏZASININ « компактификация фазового пространства; state space compactification » – bax, *Markov prosesi*; f a z a f ə z a s ı n ı n k o m p a k t i f i k a s i y a s ı.

μ – KOMPAKTLIQ « μ – компактность; μ – compactness » – eyni ehtimal fəzasında verilmiş *təsadüfi kəmiyyətlər* çoxluğu $\mathscr{X}$-in altçoxluğu $\mathfrak{A}$-nun aşağıdakı xassəsidir: ixtiyari $\{X_n\} \subset \mathfrak{A}$ ardıcıllığından elə $\{X_{n'}\}$ altardıcıllığı seçmək və $X_0 \in \mathscr{X}$ tapmaq olur ki, $\mathscr{X}$-də seçilmiş μ *ehtimal metrikası* mənasında, $n \to \infty$ olduqda, $\mu(X_{n'}, X_0) \to 0$ münasibəti ödənilir. μ – K. anlayışının istifadə edildiyi bir sıra ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərinin spesifikasına görə X_0-ın $\mathfrak{A}$-ya daxil olması şərti metrik fəzalarda analoji kompaktlıq anlayışından fərqli olaraq tələb olunmur. Əgər μ sadə ehtimal metrikasıdırsa, μ – K. əslində marginal paylanmalar çoxluğu $\mathscr{R}_1 = \{\mathbf{P}_X : X \in \mathfrak{A}\}$-in xassəsini təsvir edir. μ $\mathscr{R}_1 = \{\mathbf{P}_X : X \in \mathfrak{X}\}$ fəzasında zəif topologiya reallaşdıran ehtimal metrikasıdırsa, onda μ – K. anlayışı zəif nisbi kompaktlıq anlayışı ilə eynigüclüdür.

KOMPAKTLIQ(ğ ı) ö l ç ü l ə r a i l ə s i n i n **« компактность** с е м е й с т в а м е р; **compactness** o f a f a m i l y o f m e a s u r e s **»** – zəif topologiyada *ölçülərin* kompaktlığıdır. $(\mathscr{X}, \mathfrak{S})$ – normal σ – topoloji fəza və $\mathscr{M}$ – bu fəzada verilmiş ölçülər fəzası olsun. Əgər $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{M}$ ehtimal ölçüləri fəzası olarsa və $\mathscr{P}$ fəzasından olan ölçülərdən təşkil olunmuş ixtiyari $(\mathbf{P}_\theta)$ ölçülər şəbəkəsi hər hansı $\mathbf{P} \in \mathscr{P}$ ölçüsünə yığılan altşəbəkəyə malik olarsa, onda $\mathscr{P}$ k o m p a k t ö l ç ü l ə r a i l ə s i adlanır. Əgər $\mathscr{P}$-dən olan ölçülərdən ibarət ixtiyari $(\mathbf{P}_\theta)$ ölçülər şəbəkəsinin $\mathscr{M}$ fəzasında hər hansı $\mathbf{P}$ ölçüsünə zəif yığılan altşəbəkəsi varsa, $\mathscr{P}$ n i s b i k o m p a k t ö l ç ü l ə r a i l ə s i adlanır. $\mathbf{P}$ ölçüsü $\mathscr{P}$-nin l i m i t n ö q t ə s i adlanır.

$\mathfrak{S}$, – $\mathscr{X}$ σ – fəzasının Borel cəbrində bütün ümumiləşmiş yüklərinin fəzasıdırsa, onda ixtiyari ehtimal ölçüləri ailəsi $\mathscr{P} \subseteq \mathfrak{S}$ $\mathfrak{S}$-da nisbi kompakt ölçülər ailəsidir və bu xassə o mənada anlaşılır ki, $\mathscr{P}$-dən olan hər bir şəbəkənin $\mathfrak{S}$-dan olan hər hansı yükə zəif yığılan altşəbəkəsi vardır. Bu halda $\mathscr{P}$-nin limit nöqtələri hesabi – additiv olmaya bilər. Bu fakt qoşma fəzada kürənin * – zəif kompaktlığı haqqında teoremin nəticəsidir (bax, [1]). Beləliklə, ölçülər ailəsi $\mathscr{P}$-nin zəif kompaktlığı $\mathscr{P}$ üçün limit nöqtələrinin hesabi – additivliyinin ödənilməsinə gətirilir. $\mathscr{P}$-nin bütün limit nöqtələrinin hesabi – additiv ölçülər olmasını aşağıdakı şərt təmin edir. Bu şərt bütün müsbət yüklərin hesabi – additivlik kriterisinə əsaslanır (bax, [2]). $\mathscr{P}$ ölçülər ailəsinin bütün limit nöqtələrinin hesabi – additiv ölçülər olması üçün $\mathscr{X}$ σ – fəzasının $\{G_i\} \subseteq \mathfrak{S}$ açıq çoxluqları ilə ixtiyari hesabi örtüyü üçün

$$\lim_N \sup_{\mathbf{P} \in \mathscr{P}} \mathbf{P}\{\mathscr{X} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} G_i\} = 0 \qquad (*)$$

bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

(*) şərti $\mathscr{P}$-dən olan bütün ölçülərin müntəzəm hesabi – additiv olması tələbi kimi anlaşılmalıdır.

İlkin şəbəkənin ixtiyari altşəbəkəsindən yığılan altşəbəkə seçmək olarsa, ehtimal ölçüləri şəbəkəsi $(\mathbf{P}_\theta)$ z ə i f k o m p a k t adlanır. Kompakt ölçülər şəbəkəsi $(\mathbf{P}_\theta)$-nın kompaktlığı üçün ölçülər ailəsi üçün qeyd olunan kriteriyə analoji kriteri ifadə etmək olar. Bu halda (*) bərabərsizliyini

$$\lim_N \lim_\theta \sup \mathbf{P}_\theta \left\{ \mathscr{X} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} G_i \right\} = 0$$

bərabərliyi ilə əvəz etmək lazımdır.

Limit nöqtələri ailəsinin və ya ölçülər şəbəkəsinin hesabi – additivliyini təmin edən daha çox tətbiq olunan şərtlərdən biri bu ailə və ya şəbəkənin sıxlığı şərtidir.

Ehtimal ölçüləri şəbəkəsinin kompaktlığından baxılan şəbəkənin bu ölçülərdən təşkil olunan ölçülər ailələrinin kompaktlığını hökm etmək olmaz. Lakin şəbəkə $(\mathbf{P}_n)$ ardıcıllığı olarsa, bu ardıcıllığın K. və ardıcıllığın təşkil olunduğu ölçülər ailəsinin K. ekvivalentdirlər.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Ерохин В. Д., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 175–80; [3] Borovkov A. A., Pecerski E. A., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 28, № 1, S. 5–22; [4] Боровков А. А, «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

KOMPENSATOR « **компенсатор; compensator** », dual öngörül proyeksiya, – asılı olmayan artımlarlı *təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsində orta qiymətə analoji müəyyən anlamda onun ümumiləşməsi olan müasir stoxastik analizdə analoji rol oynayan xarakteristikadır.

$\mathscr{D}$ – sağdan kəsilməz σ – cəbrlər axını $\mathbb{A} = \{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ ilə verilmiş, tam ehtimal fəzası $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$-də təyin olunmuş, sağdan kəsilməz artan $\zeta = \{\zeta_t,\ t \geq 0\}$, $\zeta_0 = 0$ prosesləri çoxluğu olsun və $\mathscr{A}_0$ σ – cəbri $\mathscr{A}$-dakı bütün sıfır ehtimallı çoxluqları özündə saxlayır. Əgər elə $\{T_n\}$, $T_n \uparrow \infty$ Markov anları ardıcıllığı varsa ki, bu ardıcıllığın ixtiyari həddi üçün $\mathbf{M}\zeta_{T_n} < \infty$ ödənilsin, onda ζ prosesi lokal inteqallanan proses adlanır. $\mathscr{D}_{\mathrm{loc},0}$ $\mathscr{D}$ çoxluğunun bütün lokal inteqrallanan proseslərindən ibarət çoxluq olsun. Onda ixtiyari $\zeta \in \mathscr{D}_{\mathrm{loc},0}$ prosesi üçün elə yeganə öngörül $\tilde{\zeta} = \{\tilde{\zeta}_t, t \geq 0\}$, $\tilde{\zeta}_0 = 0$ prosesi vardır ki,

$$\mathbf{M} \int\limits_{[0,\infty)} Y_t d\zeta_t = \mathbf{M} \int\limits_{[0,\infty)} Y_t d\tilde{\zeta}_t$$

münasibəti ixtiyari mənfi olmayan öngörül Y prosesi üçün doğrudur. $\tilde{\zeta}$ prosesi ζ prosesinin kompensatoru adlanır. ζ prosesi uzlaşmış proses olduğu halda, $\zeta - \tilde{\zeta}$ prosesi lokal martinqaldır. Əgər ζ asılı olmayan artımlarlı prosesdirsə, $\mathbb{A}$ σ – cəbrlər axını isə ζ-in doğurduğu σ – cəbrlər axınıdırsa, onda K. prosesin orta qiyməti ilə üst-üstə düşür, yəni $\tilde{\zeta}_t = \mathbf{M}\zeta_t$ olur.

Semimartinqallar nəzəriyyəsində K. böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi və bu kimi anlayışlara analoqlarda istifadə olunur. K.-un xassələrinin ilkin prosesin xassələrilə əlaqəsini ifadə edən ən sadə nəticə aşağıdakı hökmlə ifadə olunur: $\zeta \in \mathscr{D}_{\mathrm{loc},0}$,

$$\mathbf{M} \sup_{t>0} (\zeta_t - \tilde{\zeta}_t) < \infty$$

olsun, onda

$$\{\zeta_\infty < \infty\} = \{\tilde{\zeta}_\infty < \infty\} \qquad (*)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, yəni (*) bərabərliyinin sağ və sol tərəflərindəki hadisələr vahid ehtimalla ekvivalentdirlər.

Diskret zaman halında (bu hal ümumi sxemə daxildir, lakin o halda ki, prosesləri və axını elə qurmaq mümkün olsun ki, onlar $[n, n+1)$ intervallarında sabit olsunlar) artan $\zeta = \{\zeta_n, n \geq 1\}$, $\zeta_0 = 0$ prosesinin kompensatoru

$$\tilde{\zeta}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\zeta_k - \zeta_{k-1} \mid \mathscr{A}_{k-1})$$

düsturu ilə aşkar şəkildə ifadə olunur.

Əgər $\{\Gamma_k\}$ ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı, $\mathscr{A}_k = \sigma\{\Gamma_1, ..., \Gamma_k\}$ olarsa, onda (*) münasibətindən $\mathbf{P}\left\{\sum_k I_{\Gamma_k} = \infty\right\} = 1$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda alınır ki, $\mathbf{P}\left\{\sum_k \mathbf{P}(\Gamma_k \mid \mathscr{A}_{k-1}) = \infty\right\} = 1$ olsun (küllüyyatca asılı olmayan Γ_k çoxluqları üçün klassik Borel – Kantelli lemmasına çevrilən Borel–Kantelli–Levi lemması).

$\mathscr{D}_{\mathrm{loc},0}$ çoxluğundan olan iki ζ^1 və ζ^2 proseslərinin fərqi kimi ifadə olunan ζ prosesi üçün $\tilde{\zeta}$ K.-u bu proseslərin K.-larının fərqi $\tilde{\zeta}^1 - \tilde{\zeta}^2$-yə bərabər fərz olunur.

$(\mathbb{R}_+ \times \mathscr{E},\ \mathscr{B}_+ \times \mathscr{B}_{\mathscr{E}})$-də verilmiş $\mu = \mu(\omega; dt, dx)$ təsadüfi ölçüsü üçün kompensator elə $\nu = \nu(\omega; dt, dx)$ təsadüfi ölçüsünə deyilir ki, ixtiyari mənfi olmayan $\mathscr{P} \times \mathscr{B}_{\mathscr{E}}$ – ölçülən $Y = Y(\omega, t, x)$ funksiyası üçün ($\mathscr{P}$ $\Omega \times \mathbb{R}_+$-da öngörül σ – cəbrdir) $\int\int\limits_{[0,t]} Y(s, x)\, \nu(ds, dx)$ prosesi öngörül prosesdir (yəni ν öngörül təsadüfi ölçüdür) və artan $\int\int\limits_{[0,t]} Y(s, x)\, \mu(ds, dx)$ prosesinin kompensatorudur.

X semimartinqalının sıçrayışlarının ölçüsünün K.-u X-in öngörül xarakteristikalarının tripletinin tərkibinə daxildir.

Bax, *Artan təsadüfi proses*, *Stoxastik inteqral* martinqal ölçüsü üzrə.

Əd.: [1] Делашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., «Матем. сб.», 1978, т. 107, № 3, с. 364–415; [3] Jacod J., Calcul stochastique et probléme de martingales, B. – [a. o.], 1979.

KOMPENSATOR(u) nöqtəvi prosesin « **компенсатор** точечного процесса; **compensator** of a point process » – (T_n) öngörül, sağdan kəsilməz artan, $N_t = \sum_{n\geq 1} I_{\{T_n \leq t\}}$ *sayıcı prosesinin kompensatoru* olan $\zeta = \{\zeta_t\}_{t\geq 0}$ *nöqtəvi prosesidir* (multivariant nöqtəvi proses halında sıçrayışlar ölçüsü μ-nün kompensatoru olan öngörül ν təsadüfi ölçüsüdür).

Nöqtəvi proseslərin martinqal nəzəriyyəsində K. mühüm rola malikdir. K. təsadüfi proseslərin geniş bir sinfi üçün prosesin paylanmasını və paylanmaların yığılmasını əlverişli surətdə birqiymətli təyin edən bir xarakteristikadır. Nöqtəvi prosesinin kompensatorunun sıçrayışının ölçüsü $\Delta\zeta_t = \zeta_t - \tilde{\zeta}_t$ vahidi aşmır. Əgər K.-un hesablandığı $\{\zeta_t\}_{t>0}$ σ – cəbrlər axını sayıcı prosesin özünün doğurduğu axındırsa, onda K.-u T_n anlarının şərti paylanmaları

$F_n(dt) = F_n(dt; T_1, \dots, T_{n-1})$ vasitəsilə, $T_1, \dots, T_{n-1}$-lərin qeyd olunduqları şərtilə, aşkar surətdə ifadə edən düstur vardır; yəni

$$\zeta_t = \sum_{n \geq 1} \int\limits_{[0,\ t \wedge T_{n+1}]} \frac{F_n(ds)}{F_n([s, \infty])} .$$

Yalnız asılı olmayan artımlarlı sayıcı proseslərin K.-u vardır və bunlar determinik funksiyalar olub, orta qiymətlə üst-üstə düşür, yəni $\zeta_t = \mathbf{M} N_t$.

Paylanmalar arasında məsafələrin statistik qiymətləri üçün, mütləq kəsilməzlik üçün, zəif və güclü yığılmalar üçün, bir paylanmanın digər paylanmaya görə Radon – Nikodim törəməsinin düsturu üçün K. terminlərilə sadə ifadələr alınmışdır.

Əgər $\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ – sayıcı proseslərin realizasiyaları fəzasında ζ və $\widetilde{\zeta}$ üçün iki ehtimal ölçüsüdürsə və bu ölçülər ζ və $\widetilde{\zeta}$ K.-na uyğun ölçülərdirsə, onda $\widetilde{\mathbf{P}} << \mathbf{P}$ ($\widetilde{\mathbf{P}}$ ölçüsü $\mathbf{P}$-yə nəzərən mütləq kəsilməzdir) münasibəti, yalnız və yalnız, o vaxt ödənilər ki, aşağıdakı üç şərt $\widetilde{\mathbf{P}}$ – sanki yəqin ödənilsin:

1) $\widetilde{\zeta} << \zeta$,

2) $\sum\limits_{t>0} I_{\{\Delta\zeta_t = 1,\ \Delta\widetilde{\zeta}_t < 1\}} = 0$,

3) $h_\infty < \infty$,

burada

$$h_t = \frac{1}{2} \int\limits_{[0,t]} \left(\sqrt{\lambda_s} - \sqrt{\widetilde{\lambda}_s} \right)^2 dC_s +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{s<t} \left(\sqrt{1-\Delta\zeta_s} - \sqrt{1-\Delta\widetilde{\zeta}_s} \right)^2 ,$$

$$C = (\zeta + \widetilde{\zeta})/2 ,\ \lambda = d\zeta / dC ,\ \widetilde{\lambda} = d\widetilde{\zeta} / dC$$

$\mathbf{P}$ və $\widetilde{\mathbf{P}}$ ölçüləri arasında variasiyalara görə məsafələrin statistik qiyməti üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$2\,(1 - \sqrt{\mathbf{M} \exp\{-h_\infty\}}) \leq \operatorname{var}(\mathbf{P} - \widetilde{\mathbf{P}}) \leq 4\mathbf{M}\sqrt{h_\infty},$$

$$\operatorname{var}(\mathbf{P} - \widetilde{\mathbf{P}}) \leq 2\,\mathbf{M}\,\operatorname{var}_\infty(\zeta - \widetilde{\zeta}) .$$

Limit teoreminə aid misal: ζ – asılı olmayan artımlarlı sayıcı N prosesinin orta qiyməti, ζ^n isə N^n sayıcı prosesinin K.-u olsun və hər bir $t \in \mathbb{R}_+$ üçün

$$\zeta_t^n \to \zeta_t ,\ \sum_{s \leq t} (\Delta\zeta_s^n)^2 \to \sum_{s \leq t} (\Delta\zeta_s)^2$$

münasibətləri təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının zəif yığılması anlamında ödənilmiş olsun. Onda N^n proseslərinin sonluölçülü paylanmaları N prosesinin sonluölçülü paylanmalarına zəif yığılır.

Nöqtəvi proseslərin araşdırılmasında K. anlayışından istifadə riyazi statistika, kütləvi xidmət, etibarlılıq nəzəriyyəsi, optimal idarəetmənin bir sıra məsələlərinin həllində olduqca faydalıdır.

Əd.: [1] J a c o d J., «Z. Wahr. und verw. Geb.»,1975, Bd 31, H. 3, S. 235–53; [2] К а б а н о в Ю. М., Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 288–319; [3] К а б а к о в Ю. М., Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., «Докл. АН СССР», 1984, т. 278, № 2, с. 265–68; [4] B r e m a u d P., Point processes and quenes martingale dynamics, N. Y. – [a. o.], 1981; [5] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

KOMPLEKS DEMODULYASİYA « комплексная демодуляция; complex demodulation » – aşağıtezlikli *xətti filtrdən* ixtiyari λ_0 tezliyində mərkəzlənmiş yeni filtrlərin alınması üçün istifadə olunan qaydadır. İmpulsal səda (əkstəsir) funksiyaları $a(u)$ və $a(u)e^{i\lambda_0 u}$ olan ötürücü $\varphi(\lambda)$ və $\varphi_1(\lambda)$ funksiyaları $\varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda + \lambda_0)$ münasibətilə bağlıdırlar.

Əgər impulsal səda funksiyası $a(u)$, $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |a(u)| < \infty$ olan xətti filtrin girişinə $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, $\mathbf{D}\zeta(t) = \sigma^2$ şərtlərini ödəyən $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ stasionar təsadüfi ardıcıllığı daxil olunursa, onda belə filtrin çıxışında kompleksqiymətli

$$Y(t, \lambda_0) = e^{i\lambda_0 t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u)\,\zeta(u) e^{-i\lambda_0 t} = R(t, \lambda_0)\, e^{i(t, \lambda_0)}$$

ardıcıllığı alınır; bu ardıcıllığın modulu

$$R(t, \lambda_0) = [(\operatorname{Re} Y(t, \lambda_0))^2 + (\operatorname{Im} Y(t, \lambda_0))^2]^{1/2} ,$$

fazası isə

$$\theta(t, \lambda_0) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{Im} Y(t,\ \lambda_0)}{\operatorname{Re} Y(t,\ \lambda_0)} \right)$$

düsturları ilə təyin olunur.

$|R(t, \lambda_0)|$ funksiyası ani spektral sıxlığı (ani spektr, ani amplitud spektr), $\theta(t, \lambda_0)$ isə ani fazanı ifadə edir və bunlar spektral sıxlıq və fazadan zaman asılılıqları ilə fərqlənir.

Əd.: [1] Б р и л л и н д ж е р Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Г р е н д ж е р Г., Х а т а н а к а М., Спектральный анализ временных рядов в экономике, пер. с англ., М., 1972; [3] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969.

KOMPLEKS QAUSS PROSESİ « комплексный гауссовский процесс; complex Gaussian process » – bax, *Qauss prosesi*.

KOMPONENT ANALİZ « компонентный анализ; component analysis » – bax, *Dispersion analiz.*

KOMPOZİSİYA « композиция / свертка; composition / convolution » – paylanma funksiyaları uyğun olaraq $F_\xi(x)$ və $F_\eta(x)$ olan asılı olmayan ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin *cəminin paylanma funksiyasına* deyilir;

$$F_{\xi+\eta}(z) = \mathbf{P}\{\xi + \eta < z\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(z-y)\,dF_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\eta(z-y)\,dF_\xi(y) . \qquad (*)$$

Əgər ξ və η –nın paylanmalarının sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq $p_\xi(x)$ və $p_\eta(x)$ olarsa, K. düsturu analoji qaydada təyin olunur:

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\, p_\eta(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\eta(x)\, p_\xi(z-x)dx .$$

K. düsturu (*) simvolik olaraq $F_{\xi+\eta} = F_\xi * F_\eta$ kimi işarə olunur. K. üçün vurma əməlinin əsas xassələri ödənilir:

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1 ;$$

$$(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) * F_3 = \alpha_1 (F_1 * F_3) + \alpha_2 (F_2 * F_3),\ \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 ;$$

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3) .$$

Unimodal paylanmaların K. ümumi halda unimodal olmaya da bilər (bax, [2]).

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, M., 1985; [2] Стоянов Й., Контрпримеры в теории вероятностей, M., 1999.

KOMPOZİSİYA(sı) paylanmaların **« композиция** распределений; **composition** of distributions**»** – bax, *Kompozisiya*.

KOMPOZİSİYA METODU « композиций метод; method of composition / convolutions » – ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremlərinin* isbat metodlarından (xarakteristik funksiyalar metodu ilə yanaşı) biridir. Əsas etibarilə yığılma sürətinin qiymətlərinin qurulması üçün istifadə olunur.

$\mathbf{H}, \mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1, ..., \mathbf{F}_n, \mathbf{G}_n$, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında ölçülər və $\mathbf{H}, \mathbf{G}_1, ..., \mathbf{G}_n$ ölçüləri – $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər olsun. Hər hansı $A \in \mathscr{A}$ üçün

$$\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} \mathbf{F}_i - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} \mathbf{G}_i \right)(A)$$

ifadəsi induksiya üzrə qiymətləndirilir. Hamarlama bərabərsizliyinin köməyilə

$$\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} \mathbf{F}_i - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} \mathbf{G}_i \right) * \mathbf{H}\,(A)$$

fərqinin qiymətinə keçərək, sonra

$$\left(\prod_{i=1}^{n}{}^{*} \mathbf{F}_i - \prod_{i=1}^{n}{}^{*} \mathbf{G}_i \right) * \mathbf{H} =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1}{}^{*} \mathbf{F}_j - \prod_{j=1}^{i-1}{}^{*} \mathbf{G}_j \right) * (\mathbf{F}_i - \mathbf{G}_i) * \prod_{j=i+1}^{n}{}^{*} \mathbf{G}_j * \mathbf{H} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i - \mathbf{G}_i) * \prod_{j=1 (j \neq i)}^{n}{}^{*} \mathbf{G}_j * \mathbf{H} +$$

$$+ \left(\prod_{j=1}^{n-1}{}^{*} \mathbf{F}_j - \prod_{j=1}^{n-1}{}^{*} \mathbf{G}_j \right) * (\mathbf{F}_n - \mathbf{G}_n) * \mathbf{H}$$

münasibəti tətbiq olunur. Toplananları qiymətləndirdikdə induktiv fərziyyədən və $\mathbf{H}, \mathbf{G}_1, ..., \mathbf{G}_n$ ölçülərinin $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzliyindən istifadə edilir.

Əd.: [1] Bergstrom H., Limit theorems for convolutions, N. Y. – L., 1963; [2] Sazonov V. V., Normal approximation-some recent advances, B., 1981 (Lecture Notes in Math., v. 879).

KOMPOZİSİYALI SEMİ – QRUP « полугруппа со сверткой; semi-group with composition » – bax, *Semi – qrup.*

KOMPOZİSİYASI, STOXASTİK NÜVƏLƏRİN « свертка стохастических ядер; composition of stochastic kernels » – bax, *Stoxastik / ehtimali nüvə.*

KONFİQURASİYA « конфигурация; configuration » – bax, *Kombinator analiz*, *Kalibrləmə modeli* statistik mexanikanın.

KONFLİKT « конфликт; conflict » – bax, *Çoxgirişlilik*.

KONFLYUENT ANALİZ « конфлюентный анализ; confluence analysis » – $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ kəmiyyət dəyişənlərinin (təsadüfi və ya təsadüfi olmayan) özlərinin deyil,

$$\widetilde{X}_i^{(s)} = X_i^{(s)} + \varepsilon_i^{(s)}, \quad i = 1, ..., n \qquad (1)$$

təsadüfi kəmiyyətləri müşahidə olunduqda, $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ dəyişənləri arasında apriori postulat kimi qəbul ediləcək funksional əlaqələrin analizinə aid olan, riyazi statistika metodlarının toplusudur, burada $\varepsilon_i^{(s)}$, – i-ci müşahidədə $X^{(s)}$ dəyişəninin $\widetilde{X}_i^{(s)}$ ölçməsində təsadüfi xəta, n – müşahidələrin ümumi sayıdır. Bu zaman fərz olunur ki, müşahidə olunmayan $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ dəyişənləri arasında araşdırılan funksional («struktur») münasibətlər ümumi şəkildə verilmişdir. K. a.-in məsələsinə araşdırılan «struktur» münasibətlər tənliklərində iştirak edən parametrlərin naməlum qiymətləri üçün statistik qiymətlərin qurulması, həm də analiz olunan əlaqələrin təbiəti haqqında müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün statistik kriterilərin qurulması kimi məsələlər aiddir.

K. a.-in nəzəri və tətbiqi aspektlərinin işlənilməsi əsas etibarilə, araşdırılan struktur münasibətlərin xətti şəkildə ifadəsinə (və ya ilkin dəyişənlərin münasib çevirmələrlə xəttiləşdirilmiş şəklinə) tətbiq edilməklə aparılır. K. a.-in xətti model çərçivəsində p sayda dəyişənlər arasında m sayda xətti əlaqənin $(m < p)$ aprior postulat kimi qəbul edilməsini $p-m$ sayda «ümumi» elə $Y^{(1)}, ..., Y^{(p-m)}$ faktorlarının varlığı haqqında fərziyyə kimi ifadə etmək olar ki,

$$X^{(s)} = \lambda_{s,1} Y^{(1)} + ... + \lambda_{s,p-m} Y^{(p-m)}, \quad s = 1, ..., p \qquad (2)$$

münasibətləri ödənilsin, belə ki, $\Lambda = \| \lambda_{sk} \|$ matrisinin ranqı $(p-m)$-ə bərabərdir, $s = 1, ..., p$, $k = 1, ..., p-m$.

K. a. modelinin $(1) – (2)$ şəklində parametrizasiyası λ_{sk} parametrinin naməlum qiymətlərinin statistik qiymətləndirilməsini və bunlarla bağlı hipotezlərin statistik yoxlanılması haqqında əsas məsələləri məhz bunlarla bağlı terminlərlə ifadə etməyə imkan verir. $(1) – (2)$ modeli formal olaraq, *faktor analiz* modeli kimi təsir bağışlayır, lakin K. a. və faktor analizin məsələləri demək olar ki, kəsişmir; əgər K. a.-in məqsədi $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ dəyişənləri arasında mövcud olan struktur münasibətləri təsvir etməkdirsə, faktor analizdə əsas məsələ $Y^{(1)}, ..., Y^{(p-m)}$ ümumi faktorlarının qurulması və interpretasiyasından ibarətdir. Bununla yanaşı, K. a. və reqression analiz məsələlərinin yaxın xarakterli olması qeyd olunmalıdır: K. a.-in bəzi xüsusi sxemləri reqression analiz sxemi

çərçivəsində ifadə olunur [məs., (1) müşahidələri üzrə xəta ilə ölçülən $X^{(1)}$ dəyişəninin, xətasız ölçülən digər dəyişənlərdən yeganə asılılığını aydınlaşdırmaq tələb olunarsa].

Əd.: [1] F r i s c h R., Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Reqression Systems, Oslo, 1934; [2] K o o p m a n s T. C., Linear Regression Analysis of Economic Time Series, Haarlem, 1937; [3] К е н д а л л М. Д ж., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973, гл. 29; [4] М а л е н в о Э., Статистические методы эконометрии, в. 1, пер. с франц., М., 1975, гл. 10.

KONKORDASİYA ƏMSALI « конкордации коэффициент; concordance coefficient » – bax, *Ranq korrelyasiyası.*

KONSENTRASİYA FUNKSİYASI « концентрации функция; concentration function », paylanma funksiyası F olan *təsadüfi kəmiyyətin*

$$Q(l;F)=\sup\{F(x+l+0)-F(x):\ x\in\mathbb{R}^1\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan L e v i k o n s e n t r a s i y a f u n k s i y a s ı d ı r. Hər bir K. f. $Q(x;F)$, $G(x+y)\le G(x)+$ $+G(y)$, $x, y\ge 0$ bərabərsizliyini ödəyən, $x\ge 0$ yarımoxunda, hər hansı paylanma funksiyası $G(x)$-dir. Tərsi də doğrudur (bax, [1]). K. f. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanma xassələrinin araşdırılmasında istifadə olunur (bax, [2]). K. f. P. Levi tərəfindən [3]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] Х е н г а р т н е р В., Т е о д о р е с к у Р., Функции концентрации, пер. с англ., М., 1980; [2] E s s e e n C.-G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1968, Bd 9, № 4, S. 290–308; [3] L e v y P., Thèorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937.

KONSERVATİV KEÇİD FUNKSİYASI « консервативная переходная функция; Markov / conservative transition function » – bax, *Keçid funksiyası.*

KONSERVATİV / İNFİNİTEZİMAL MATRİS « консервативная матрица; conservative / infinitesimal matrix » – bax, *Markov prosesi* v ə z i y y ə t l ə r i ç o x l u ğ u h e s a b i.

KONSERVATİV ZOLAQ « консервативная полоса; conservative band » – bax, *Etibarlı zolaq*.

KONSTRUKTİV KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ « конструктивная квантовая теория поля; constructive quantum field theory » – müasir riyazi fizikanın oblastıdır, kvant meydanının müxtəlif modellərinin qurulması və araşdırılması ilə məşğuldur.

Müasir kvant meydan nəzəriyyəsi – 20-ci əsrin 50-ci illərinin əvvəllərində elektromaqnit sahəsinin elektronlar meydanı ilə qarşılıqlı təsirini təsvir edən nəzəriyyə kvant elektrodinamikası üzrə R. Feynman, F. Dayson, Yu. Şvinger və b. işlərilə yaranmışdır (bax, [1]). Bu qarşılıqlı təsir kəmiyyəti kiçik olduğundan onun müxtəlif effektləri (səpələnmə proseslərinin amplitudları, əlaqəli vəziyyətlərin kütlələrinin spektri) bu işlərdə *kükrəntilər* nəzəriyyəsinin köməyilə hesablanılırdı. Lakin ilk dəfə R. Feynman (bax, [2]) tərəfindən daxil olunmuş səpələnmə operatorları adlandırılan operatorlar üçün *kükrəntilər* nəzəriyyəsinin formal sıralarının özlərinin hər bir toplananında dağılan inteqralı («dağılanlıq») vardır və qeyd olunan işlərdə əsas nailiyyət bu «dağılanlıqların» fiziki izahı və «yenidən normalanma» ardıcıl prosedurunun qurulması – *kükrəntilər* nəzəriyyəsinin sırasının bütün toplananlarındakı «dağılanlıqların» aradan qaldırılmasıdır. Bu üsullar sonralar təkmilləşdirilmiş və digər meydan modellərinə tətbiq olunmuşdur (bax, [3]). Elementar hissəciklər nəzəriyyəsində bir çox maraqlı təzahürlər virtuoz teknika vasitəsilə izah olunduğundan və öncədən söylənildiyinə baxmayaraq, məs., kvant meydanının riyazi obyekt kimi nə olduğu, dağılanlığının riyazi izahı hələ ki, verilməmişdir.

Bu suala cavabın tapılması üçün edilən səylər 20-ci əsrin 60-cı illərində riyazi fizikada iki istiqamətin – aksiomatik və konstruktiv meydan nəzəriyyələrinin yaranmasına səbəb oldu. Aksiomatik yanaşmada kvant meydanı atributları və xassələri hər hansı müddəalar toplusu ilə kvant fiziki sistemi kimi tamamilə abstrakt şəkildə daxil olunur, sonra isə bu müddəalardan bir sıra dəyərli nəticələr alınmışdır (bax, [4]). Konstruktiv meydan nəzəriyyəsində isə kvant meydanlarının konkret meydanları qurulur və öyrənilir. Bu halda əvvəlcə sadələşdirilmiş bir qayda olaraq ikiölçülü (birölçülü fəza və üstəgəl zaman) modellər qurulur ki, bunun əsasında daha mürəkkəb dördölçülü kvant meydanı modelləri öyrənilir. Konstruktiv nəzəriyyənin əvvəlki mərhələsində adi – H a m i l t o n s t r a t e g i y a s ı adlandırılan strategiyaya riayət olunurdu: meydanın hamiltonianının qurulması (müvafiq Hilbert fəzasında özü-özünə qoşma semi – məhdud operator kimi) və bu hamiltonianın doğurduğu dinamika və səpələnmənin araşdırılmasına. Kvant meydanlarının öyrənilməsinə sonralar, 20-ci əsrin 70-cı illərinin əvvəllərində digər daha güclü və səmərəli yanaşma yarandı; bu yanaşma adətən, M a r k o v s t r a t e g i y a s ı adlanır və burada bir sıra əvvəlki ideyalar və üsullardan da istifadə olunmuşdur. Bu proqram üçün ilk addım [5] və [6]-da atılmışdır: bunlarda dördölçülü Minkovski fəzasında kvant meydanı onun xəyali zamanda «davamı» ilə – dördölçülü Evklid fəzası ilə əlaqədar olan köməkçi obyektlə – k v a n t E v k l i d m e y d a n ı a d l a n d ı r ı l a n «meydanla» əvəz olunurdu. Sonradan qeyd olunmuşdur ki (bax, [7]), Evklid meydanı öz xassələrinə görə $\mathbb{R}^4$-də ümumiləşmiş təsadüfi meydana oxşayır və daha sonra isbat olunmuşdur ki, translyasion invariantlıq və kovariantlıq xassələrinə malik olan ixtiyari Markov ümumiləşmiş təsadüfi meydanı Evklid kvant meydanı əmələ gətirir. Sərbəst (qarşılıqlıtəsirsiz) skalyar bozon kvant meydanına uyğun, kovariasion operatoru $(-\Delta+1)^{-1}$ olan (Δ – Laplas operatorudur) Qauss Markov meydanı ətraflı araşdırılmışdır, sonra Markov ümumiləşmiş təsadüfi meydanı $\{\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^2\}$ şəklində, $\mathbb{R}^2$-də özü-özünə təsir edən Evklid kvant bozon meydanı qurulmuşdur, bu meydan isə sərbəst meydanın Qauss meydanının Gibbs yenidənqurması şəklində $\int \varphi^4 dx$ qarşılıqlı təsirinin köməyilə alınmışdır. Bu qaydada «sərbəst» meydanın Gibbs yenidənqurmasının köməyilə «qarşılıqlıtəsirli» təsadüfi meydanının qurulması – Markov strategiyasının əsasını təşkil edərək – bir tərəfdən Feynman – Kas düsturundan görünür (bax, [3]), yəni kvant meydanının

$$\int e^{iS(\varphi)}\prod_{x\in\mathbb{R}^d} d\varphi(x)$$

funksional inteqralı terminlərində təsvirindən aydın olur [$S(\varphi)$ meydanın klassik təsiridir]; bu təsvir isə formal – evritik səviyyədə, meydan nəzəriyyəsində 20-ci əsrin 50-cı illərinin ortalarından başlayaraq tətbiq olunurdu. Nəhayət, təsadüfi meydanların Gibbs yenidənqurması anlayışı (statistik fizikadan götürülmüş) kvant nəzəriyyəsinə bir sıra qaydaların və statistik fizikanın ideyalarının daxil edilməsinə imkan yaratdı. Bu işlərdən sonra, Markov strategiyasına riayət olunaraq, çoxsaylı araşdırmalarla bağlı işlərdə kvant meydan nəzəriyyəsinin bir çox ikiölçülü modelləri quruldu və öyrənildi (bax, [2]). Bəzi üçölçülü modellərin qurulduğuna baxmayaraq, «əsl» dördölçülü modellər hələ də qurulmamışdır. Renormalizasion çevirmələr metodunun köməyilə dördölçülü

modellərə uyğun təsadüfi meydanların qurulması istiqamətində cəhdlər edilir (bax, [10]).

Əd.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; [2] Новейшее разбитие квантовой электродинамики, [пер. с англ.], М., 1954; [3] Иц и к с о н К., З ю б е р Ж.-Б., Квантовая теория поля, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [4] Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987; [5] S c h w i n g e r J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1958, v. 44, p. 956–65; [6] N a k a n o T., «Progress Theor. Phys.», 1959, v. 21, p. 241–59; [7] S i m a n z i k K., «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, p. 510–25; [8] N e l s o n E., «J. Funct. Analysis», 1973, v. 12, p. 97–112, 211–27; [9] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е А., С п е н с е р Т., в кн.: Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977, с. 169–258; [10] М а л ы ш е в В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 111–86; [11] С а й м о н Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [12] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984.

KONTAKTLAR PROSESİ « контактов процесс; contact process » – bax, *Markov prosesi* q a r ş ı l ı q l ı t ə s i r l i.

KONTİQUAL ALTERNATİVLƏR « контигуальные альтернативы; contiguous alternatives » – hipotezlərin müqayisəsinin asimptotik məsələsində alternativ hipotezlər ardıcıllıqlarının xassəsidir, müqayisə olunacaq hipotezlərə uyğun ehtimal ölçüləri ardıcıllığının k o n t i q u a l l ı ğ ı n d a n ibarətdir. Hipotezlərin müqayisə olunması üçün asimptotik məsələdə K. a.-ə baxılması, məsələnin həllini olduqca sadələşdirir və sona çatdırılmış aşkar nəticələrin alınmasına imkan yaradır. İllüstrasiya məqsədilə, parametrik statistik hipotezlərin müqayisə olunması üçün elə asimptotik məsələyə baxmaq olar ki, alternativlərin kontiquallıq xassəsi müqayisə olunacaq hipotezlərə uyğun parametrlərin qiymətlərinin müəyyən yaxınlaşma sürətində ödənilsin (bax, [1], [2]).

$X^{(n)} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ naməlum k – ölçülü ξ parametrindən asılı, $\mathbf{P}_\xi$ paylanmasından təkrar seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1 : \xi \neq 0$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \xi = 0$ ilkin hipotezi yoxlanılır. Asimptotik qoyuluşda (seçimin həcmi n qeyd olduğu halda) (H_0, H_1) hipotezlərinin müqayisə olunması məsələsinə elə $\{H_0, H_{1n}\}$ hipotezlərinin müqayisə olunması məsələləri ardıcıllığının bir həddi kimi baxılır ki, bunlar seçimin artmaqda olan n həcmlərinə uyğun götürülür və bu məsələdə $X^{(n)}$ seçimi (H_{1n} alternativ hipotezinin doğru olduğu halında), $H_{1n} : \xi_n \neq 0$ alternativ hipotezində, $\mathbf{P}_{\xi_n}$ paylanmasından alınmalıdır. H_0 və H_1 hipotezlərində $X^{(n)}$ seçiminin uyğun paylanmaları olan $\{\mathbf{P}_0{}^{(n)}\}$ və $\{\mathbf{P}_{\xi_n}{}^{(n)}\}$ ölçülər ardıcıllıqları, ξ_n parametrinin qiyməti müəyyən bir sürətlə sıfra yaxınlaşdıqda, k o n t i q u a l a r d ı c ı l l ı q l a r olacaqdır (bax, *Kontiquallıq*). Adətən, requlyar halda $\xi_n = O(n^{-1/2})$ olur və onda K. a. olaraq, $H_{1n} : \xi = \xi_n = \lambda \times n^{-1/2}$ hipotezlər ardıcıllığına baxılır, burada $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Baxılan məsələdə K. a. şərtlərində elə $\{\varphi_n(X^{(n)})\}$ kriterilər ardıcıllığına baxmaqla kifayətlənmək olar ki, bu kriterilər $X^{(n)}$ seçimindən yalnız

$$Y_n = Y_n(X^{(n)}) = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} y(X_i) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln p(x, \xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}$$

– asimptotik kafi statistikasının qiymətindən asılı olsunlar, burada $p(x, \xi)$, – $\{\mathbf{P}_\xi, \ \xi \in \mathbb{R}^k\}$ ölçülər ailəsi üçün dominar olan, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən $\mathbf{P}_\xi$ ölçüsünün sıxlığıdır. Y_n statistikası (seçimin paylanması $\mathbf{P}^{(n)}_{\lambda_n^{-1/2}}$ olduqda) $(\Sigma\lambda, \Sigma)$ parametrlərli asimptotik normal paylanmaya malikdir, burada $\Sigma = \mathbf{M}\{(y(X_1))(y(X_1))^{\mathsf{T}}\}$ ilkin hipotezdə Fişer kovariasion matrisidir.

İlkin asimptotik məsələ ilə yanaşı hipotezlərin yoxlanılmasının limit məsələsinə baxmaq olar: $(\Sigma\lambda, \Sigma)$ parametrlərli k – ölçülü normal paylanmaya tabe Y təsadüfi vektorunun bircə müşahidəsi üzrə $\overline{H}_1 : \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ alternativ hipotezinə qarşı $\overline{H}_0 : \lambda = 0$ hipotezini yoxlamaq. Əgər limit məsələsində $\varphi(y)$ hər hansı mənada optimal kriteri olarsa, onda ilkin asimptotik məsələdə $\{\varphi_n(X^{(n)}) \equiv \varphi(Y_n(X^{(n)}))\}$ kriterilər ardıcıllığı uyğun asimptotik optimallıq xassəsinə malik olacaqdır (bax, [3], [5]). Asimptotik ayrılışları nəzərə alan və əngəlləyici parametrlərli məsələdə daha ümumi nəticələr [6] – [8]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] L e C a m L., «Univ. Calif. Publ. in Statist.», 1960, v. 3, № 2, p. 73–98; [2] L e C a m L., Asymptotic methods in statistical decision theory, N. Y., 1986; [3] Ч и б и с о в Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 1, с. 96–111; [4] Р у с а с Дж., Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике, пер. с англ., М., 1975; [5] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [6] Б е р н ш т е й н А. В, «Изв. вузов. Математика », 1983, № 11, с. 3–18; [7] Б е р н ш т е й н А. В, «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 78–91; [8] Б е р н ш т е й н А. В, «Теория вероят. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 67–80.

KONTİNUAL İNTEQRAL « континуальный интеграл; path integral » f u n k s i o n a l i n t e q r a l, t r a y e k t o r i y a l a r ü z r ə i n t e q r a l, – $\{\zeta(t), \ 0 \le t \le T\}$ təsadüfi prosesinin trayektoriyalarının kvaziölçü təyin olunmuş fəzası üzrə ümumiləşmiş inteqraldır; kvaziölçü prosesin $x_1 = \zeta(t_1), ..., \ x_n = \zeta(t_n)$ qiymətlərinin $\zeta^{\{t_1,...,t_n\}}$ altfəzalarında uzlaşdırılmış sonluölçülü (ola bilər ki, mənfi də olmayan) $q(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ çəki funksiyalarının ailəsi ilə verilir. Bütün nizamlanmış $\{0 \le t_1 < ... < t_n < T\}$, $n \in \mathbb{N}$ toplularının filtri üzrə

$$\int ... \int F[x(\cdot \mid x_1, t_1; \ ...; \ x_n, \ t_n)] \, q(x_1,...,x_n; t_1,...,t_n) \, d x_1 ... d x_n$$

çoxqat inteqrallarının limiti kimi təyin olunur, burada $F[\cdot]$ – inteqrallanan funksional, $x(\cdot \mid x_1,t_1;...;x_n,t_n)$ – təpələri (t_1,x_1),..., (t_n,x_n) olan hissəvi xətti funksiyadır (və ya $\zeta^{[0,T]}$-yə $\zeta^{\{t_1,...,t_n\}}$-in digər daxilolmasıdır). q -lərin hamısı mənfi olmayan və normalanmış olarsa, K. i. $x(\cdot)$ trayektoriyaları fəzasında ehtimal ölçüsü üzrə adi Lebeq inteqralıdır. Sıxlıqları

$$q(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = \prod_{j=1}^{n} p(x_j - x_{j-1};\ t_j - t_{j-1})$$

düsturu ilə verilən ölçü ilə Viner inteqralı buna misaldır, burada $t_0 = 0,\quad x_0 = 0,\quad p(y;\theta) = (2\pi\theta)^{-1/2}\exp(y^2/2\theta)$ birölçülü Braun hərəkətinin (prosesinin) trayektoriyaları üzrə inteqraldır. Eksponentin qüvvət üstündəki t zaman parametrini, formal olaraq xəyali it ilə əvəz etdikdə, bu inteqral kvant fizikasında geniş istifadə olunan Feynman inteqralına çevrilir. K. i.-ın hesablanması üçün analitik hesablamalarla yanaşı Monte – Karlo metodundan da istifadə olunur.

Əd.: [1] В и н е р Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961; [2] Ф е й н м а н Р., Х и б с А., Квантовая механика и интегралы по трайекториям, пер. с англ., М., 1968; [3] М и г д а л А. А., «Ж. эксперим. и теоретич. физики», 1975, т. 69, с. 810–22; [4] Я н о в и ч Л. А., Приближенное исчисление континуальных интегралов по гауссовым мерам, Минск, 1976.

KONTİQUALLIQ « контигуальность; contiguity », ehtimal ölçüləri ardıcıllığının kontiqualllığı – *ehtimal ölçüləri* ardıcıllıqlarının asimptotik yaxınlığı xassəsidir, ixtiyari hadisələr ardıcıllıqlarının bu ölçülər ardıcıllıqları ilə təyin olunan ehtimallarının asimptotik kiçikliyinin ekvivalentliyini əks etdirir.

$(\mathfrak{X}, \mathscr{A}_n)$ – ölçülən fəzalar ardıcıllığı, $\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ – bu fəzalarda ehtimal ölçüləri ardıcıllıqları olsun. Əgər $n \to \infty$ olduqda ixtiyari $\{A_n \in \mathscr{A}_n\}$ hadisələri üçün $\mathbf{P}_n\{A_n\} \to 0$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilərsə ki, $\mathbf{P}'_n\{A_n\} \to 0$ münasibəti ödənilsin, onda $\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ – kontiqual ardıcıllıqlar adlanır.

$\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ ölçülər ardıcıllıqlarının yuxarıda qeyd olunan asimptotik yaxınlığı xassəsi onların L^1 – normasında yaxınlığından zəifdir: əgər $n \to \infty$ olduqda $\|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_n\| \to 0$ olarsa ($\|\mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_n\|$ – $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}'_n$ ölçüləri arasında variasiya üzrə məsafədir), onda $\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ ölçülər ardıcıllıqları kontiqual ardıcıllıqlardır; ümumi halda tərsi doğru deyildir. $\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ ölçülər ardıcıllıqlarının kontiquallığından $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}'_n$ ölçülərinin mütləq kəsilməzliyini hökm etmək olmaz (heç olmazsa n-in böyük qiymətləri üçün belə), lakin elə qarşılıqlı mütləq kəsilməz $\{\mathbf{Q}_n\}$ və $\{\mathbf{Q}'_n\}$ ölçülər ardıcıllıqları qurmaq olar ki, bunlar üçün $n \to \infty$ olduqda $\|\mathbf{P}_n - \mathbf{Q}_n\| + \|\mathbf{P}'_n - \mathbf{Q}'_n\| \to 0$ münasibəti ödənilir.

Ölçülər ardıcıllıqlarının K.-ının bir sıra ekvivalent təriflər mövcuddur və bu təriflər bu ölçülərin doğruyaoxşarlıq nisbətinin nə cür olması ilə bağlıdır. p_n və p'_n $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}'_n$ ölçülərinin bunlar üçün dominar olan hər hansı ölçüyə nəzərən sıxlıqları olsun (məs., $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}'_n$ ölçüləri) və Λ_n bu sıxlıqların müsbət olduğu çoxluqda $\ln p'_n / p_n$-ə bərabər olan doğruyaoxşarlıq nisbəti loqarifminin statistikasıdır və bu statistika ixtiyari qaydada qeyd olunan çoxluğun tamamlayıcısında (ölçülən) təyin olunur. Onda $\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ ölçülər ardıcıllıqlarının K. $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}'_n$ statistikalarında Λ_n statistikasının uyğun $L_n = \mathfrak{L}\{\Lambda_n \mid \mathbf{P}_n\}$ və $L'_n = \mathfrak{L}\{\Lambda_n \mid \mathbf{P}'_n\}$ paylanmaları ardıcıllıqlarının nisbi kompaktlığına ekvivalentdir (bu sonuncu $\{L_n\}$ və $\{L'_n\}$ ardıcıllıqlarından hər hansı L və L' ehtimal paylanmalarına zəif yığılan altardıcıllıq seçmək mümkünlüyünü ifadə edir). K.-ın digər xarakteristikası yalnız $\{L_n\}$ paylanmalar ardıcıllığının nisbi kompaktlığı ilə ifadə olunur, lakin bu halda uyğun limit paylanması L üçün $\int \exp(\lambda)\, L(d\lambda) = 1$ münasibəti ödənilir.

«K.» anlayışı asimptotik riyazi statistikada geniş istifadə olunur. Məs., H_n və H'_n statistik hipotezlərinin asimptotik müqayisəsi məsələlərində (müşahidələrin paylanmaları $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}'_n$ haqqında) alternativ H'_n hipotezi doğru olduğu halda $n \to \infty$ olduqda müxtəlif statistikaların asimptotik paylanmalarının tapılması (və bir nəticə kimi, bu statistikalara əsaslanan asimptotik güclü kriterilərin tapılması), üçüncü Le Kam lemmasından istifadə edildikdə olduqca asanlaşır ($\{\mathbf{P}_n\}$ və $\{\mathbf{P}'_n\}$ ölçülər ardıcıllıqları K. ardıcıllıqlar olduqda).

$\{T_n\}$ elə statistikalar ardıcıllığı olsun ki, $\{H_n\}$ hipotezlərinin doğru olduğu halında (T_n, Λ_n) vektorlar ardıcıllığı $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12})$ parametrlərli asimptotik normal qanunla paylanmış olsun və $\mu_2 = -\sigma_2^2/2$ (K. nəticəsi). Onda $\{H'_n\}$ alternativ hipotezlərinin doğru olduğu halında bu vektorlar ardıcıllığı $(\mu_1 + \sigma_{12}, -\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12})$ parametrlərli asimptotik normal qanunla paylanır.

«K.» anlayışı L. Le Kam tərəfindən daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] L e C a m L., «Univ. Calif. Publ. in Statist.», 1960, v. 3, № 2, p. 73–98; [2] L e C a m L., Asymptotic methods in statistical decision theory, N. Y., 1986; [3] Р у с а с Д ж., Контигуальность вероятностных мер. Применение к статистике, пер. с англ., М., 1975; [4] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

KONTRAST « контраст; contrast » – *reqression eksperimentin* θ parametrinin komponentlərinin $\sum_{i=1}^{p} l_i \theta_i \left(\sum_{i=1}^{p} l_i = 0\right)$ şəklində xətti formasıdır (bax, *Blok plan*).

KONVOLYUSİON(u) ehtimal ölçülərinin **« свертка** вероятностных мер; **convolution** of probability measures **»** ölçülən $(G, \mathscr{B})$ qrupunda μ_1 və μ_2 ehtimal ölçülərinin konvolyusionu – $(g_1, g_2) \mapsto g_1 + g_2$ inikasında $\mu_1 \times \mu_2$ hasilinin obrazı olan $\mu_1 * \mu_2$ *ölçüsüdür*, yəni hər bir $B \in \mathscr{B}$ üçün

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \mu_1 \times \mu_2\{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1 + g_2 \in B\}.$$

Sonlu ölçülər üçün də K. eynilə təyin olunur. Bir çox hallarda E. ö. k.-nun tərifi aşağıdakı bərabərliklər ilə verilir:

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \int_G \mu_1(B - x)\, d\mu_2(x) = \int_G \mu_2(-x + B)\, d\mu_1(x)$$

$$B \in \mathscr{B}.$$

Əgər ξ_1, ξ_2 paylanmaları uyğun olaraq μ_1 və μ_2 olan G-də asılı olmayan təsadüfi elementlər olarsa, $\xi_1 + \xi_2$ cəminin paylanması $\mu_1 * \mu_2$ olacaqdır. K. assosiativ əməldir; əgər G qrupu kommutativ olarsa, bu əməl kommutativ əməldir.

Əgər $G = \mathbb{R}^n$, μ_1, μ_2 $\mathbb{R}^n$-də Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər və Lebeq ölçüsünə nəzərən, uyğun olaraq f_1 və f_2 sıxlıq funksiyalarına malik olarlarsa, onda $\mu_1 * \mu_2$ K. Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir və bu ölçüyə nəzərən sıxlığa malikdir və bu sıxlıq f_1 və f_2 sıxlıqlarının K.-dur, yəni

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y) f_2(y)\, dy, \quad \text{sanki bütün } x \in \mathbb{R}^n \text{ üçün.}$$

K. anlayışı topoloji qrupda τ hamar və Radon ehtimal ölçüləri üçün də təyin olunur.

KONVOLYUSİON KOD « сверточный код; convolutional code », ağacvari xətti kod, şəbəkəvari xətti kod, rekurrent kod, – bütün yarısonsuz ardıcıllıqlar (informasion ardıcıllıqlar) çoxluğunun özünə xətti inikasından alınan, əlifba əvəzinə $GF(q)$ meydanı ilə sonsuz uzunluqlu sözlər çoxluğudur (kod ardıcıllıqları çoxluğu). Xətti inikas aşağıdakı xassəyə malik olmalıdır: elə k_0 və $n_0 \geq k_0$ natural ədədləri tapılar ki, ixtiyari tam M üçün ilk Mk_0 simvollarında üst-üstə düşən iki informasion ardıcıllıq iki kod ardıcıllığına inikas olunur və bu ardıcıllıqlar ilk Mn_0 sayda simvollarda üst-üstə düşür. $R = k_0/n_0$ kəmiyyəti kodun sürəti adlanır.

Xətti inikaslar sinfinin biri aşağıdakı qaydada qurulur: Elementləri $GF(q)$-dən olan $k_0 \times n_0$ ölçülü $G_0, G_1, \ldots, G_m$ matrisləri verilir. İnformasion ardıcıllıqlar $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ şəklində ifadə olunur; x_i, – k_0 ölçülü sütun – vektorlardır. Kod ardıcıllıqları $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots)$ şəklində ifadə olunur; y_i, – n_0 – ölçülü sətir – vektorlardır. Onda

$$y_i = \sum_{i=0}^{m} x_{i-s} G_s, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (*)$$

Beləliklə, kod ardıcıllığı informasion ardıcıllıq və qeyd olunmuş matrislər ardıcıllığının konvolyusiyasının hesablanması nəticəsində alınır və «K. k.» adı da bununla izah olunur. m ədədinə ($G_0 \neq 0$, $G_m \neq 0$ olduqda) kod yaddaşı deyilir, $n = (m+1)n_0$ kod məhdudiyyəti uzunluğu adlanır. (*) ilə təyin olunan kodlar zaman üzrə sabit kodlar adlandırılır. (*)-da hər bir i üçün G_{si} $(s = 0, 1, \ldots, m)$ matrislərinin müxtəlif topluları istifadə olunan kodlar daha ümumidir və onlar zaman üzrə dəyişən kodlar adlanır. (*)-dakı hesablamalar praktikada registr və cəmləyicilər vasitəsilə reallaşdırılır və bununla əlaqədar olaraq, K. k.-un yoxlayıcı çoxhədlilər adlandırılan digər təsvirindən də bir çox hallarda istifadə olunur.

K. k.-a ağacvari kod kimi baxmaq olar. Bu halda kod ağacı sonsuz olur; ilkin kökdən başlayaraq hər bir düyündən n_0 uzunluqlu vektorlarla nişanlanmış q^{k_0} sayda tildən ibarət eyni toplular çıxır; kod xəttidir, yəni yolların cəmi də yoldur; kökdən başlayan ixtiyari yol – kod ardıcıllığıdır.

K. k.-a şəbəkəvari kod kimi, yəni sağdan yarısonsuz düzbucaqlı şəbəkənin düyünlərində təpələri yerləşən xüsusi istiqamətlənmiş qrafdakı yolların çoxluğu kimi baxmaq olar. Şəbəkənin hər bir sütunundakı düyünlərin sayı sonludur. Sütundakı hər bir düyün koderin müəyyən bir vəziyyətilə eyniləşdirilir. Bu anlayışın izahı (*)-dan anlaşılır və G_s matrislərinin verilmiş toplusu üçün tapılmalıdır ki, y_i bloku informasion $x_{i-1}, \ldots, x_{i-m}$ bloklarının əvvəlki hansı ilk koordinatlardan asılıdır. Əgər faktik olaraq birinci koordinata görə x_{i-m} blokundan asılılıq varsa, lakin $x_{i-m_1+1}, \ldots, x_{i-m}$ bloklarından asılılıq yoxdursa, onda birinci koordinat üzrə koderin yaddaşı m_1-ə bərabərdir, deyilir və ya deyilir ki, ilk koordinatların qorunub saxlanılması üçün kodlamada m_1 dərəcəli registr istifadə olunur. Digər informasion bloklar üçün $m_2, \ldots, m_{k_0}$ yaddaşı analoji təyin olunur. Beləliklə, kodlamada əvvəlki m blokdan olan simvolların $\nu = m_1 + m_2 + \ldots + m_{k_0}$ sayda qiyməti qorunub saxlanılır. Bu toplu – koderin vəziyyəti adlanır. Müxtəlif vəziyyətlərin sayı, deməli, şəbəkənin hər bir sütunundakı düyünlərin sayı da q^{ν}-yə bərabərdir. Düyün sonrakı sütundakı düyünlə til vasitəsilə, bunlara uyğun vəziyyətlərdən keçid olduğu halda, tillə birləşir. Hər bir düyündən sonrakı sütunun q^{k_0} sayda düyününə keçid mümkündür; hər bir düyünə əvvəlki sütundan q^{k_0} sayda til daxil olur (bu ilk m sütuna aid deyildir). Hər bir til (*) ilə hesablanmış n_0 uzunluqlu vektorla nişanlanır. İxtiyari çatıla bilinən düyünə birinci sütunun yuxarı düyünündən yol müəyyən kod ardıcıllığının başlanğıc hissəsidir.

K. k.-un şəbəkəvari kod kimi təsviri bəzi dekodlama prosedurlarında, məs., Viterbi dekodlama alqoritmində istifadə olunur (bax, [1]) və bu alqoritm praktikada kod məhdudiyyəti uzunluğu az olduğu hallarda ən yaxşı və geniş istifadə olunan sayılır.

Əd.: [1] Блейхут Р., Теория и практика кодов, контролирующих ошибки, пер. с англ., М., 1986.

KONVOLYUSİON SEMİ – QRUP (u) ehtimal ölçülərinin « **сверточная полугруппа** вероятностных мер; **convolution semigroup** of probability measures on a group » lokal kompakt G qrupunda ehtimal ölçülərinin elə $S := (\mu_t,\ t \in D)$ ailəsidir ki, $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$, burada $t, s \in D$; $*$ – G qrupunda ehtimal ölçülərinin konvolyusiya əməlidir. Burada D, – $\mathbb{R}_+^*$ semi – qrupunda bütün müsbət həqiqi ədədlərin toplama əməli ilə elə sıx altsemi – qrupudur ki, bütün $t, s \in D$ üçün $t < s$ şərtindən $s - t \in D$ olduğu alınır.

D kimi adətən, bütün müsbət rasional ədədlər çoxluğu Q_+^* və ya $\mathbb{R}_+^*$ götürülür. Əgər G qrupunda elə μ_0 ehtimal ölçüsü vardırsa ki, $t \in D$, $t \to 0$ olduqda $\mu_t \to \mu_0$ münasibəti zəif yığılma mənasında ödənilsin, onda S K. s. kəsilməz adlanır. Bu halda D çoxluğunu $D_0 = DU\{0\}$ ilə əvəz etmək olar və hesab etmək olar ki, $S := (\mu_t, t \in D_0)$. μ_0 ölçüsü G qrupunda *idempotent ölçü* olacaqdır və buna görə də, bu ölçü qrupunun hər hansı kompakt H altqrupunun Haar ölçüsü ω_H ilə üst-üstə düşür. Bu halda K. s.-un kəsilməzliyi konvolyusion semi–qrupun H –kəsilməzliyi kimi adlandırılır. μ_0 ölçüsü S semi – qrupunun vahididir, yəni ixtiyari $t \in D_0$ üçün $\mu_0 * \mu_t = \mu_t * \mu_0 = \mu_t$.

Əgər S lokal kompakt G qrupunda kəsilməz K. s.-dursa, onda G qrupunda ν_t, $t \in \mathbb{R}_+'$ K. s. vardır ki, bütün $t \in D_0$ üçün $\nu_t = \mu_t$. μ_t, $t \in D_0$ kəsilməz K. s. üçün bütün μ_t ölçüləri G qrupunda sonsuz bölünən paylanmalardır.

Hər bir $\{\mu_t,\ t\in D\}$ K. s. ilə G qrupunda bütün məhdud funksiyaların Banax fəzası $\mathscr{C}^b(G)$-də S_t xətti operatorlarının semi – qrupunu

$$S_t f(x)=\int_G f(xy)\,\mu_t(dy),\ f\in\mathscr{C}^b(G)$$

qaydası ilə əlaqələndirmək olar. Bütün S_t operatorları normaları I-yə bərabər, məhdud xətti operatorlardır. K. s. μ_t, yalnız və yalnız, o halda kəsilməzdir ki, $\{S_t\}$ semi – qrupu güclü kəsilməz olsun. $\{\mu_t\}$ və $\{S_t\}$, $t\in D$ semi – qrupları bir-birini birqiymətli təyin edir.

Bax, *İnfinitezimal operator*, *Sonuz bölünən paylanma* qrupda; daxilolma problemi.

Əd.: [1] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

KONVOLYUSİON SEMİ – QRUPU, ÖLÇÜLƏRİN; kanonik ifadə « **сверточная полугруппа мер;** каноническое представление; canonical representation of **convolution semigroup of measure** » – qrupda ehtimal ölçülərinin kəsilməz *konvolyusion semi – qrupunun doğuran funksionalının* elə ifadəsidir ki, bu ifadə $\mathbb{R}^d$-də sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyasının loqarifminin *Levi – Xinçin kanonik ifadəsinə* analojidir.

G – lokal kompakt qrup, $D(G)$, – G-də sonsuz differensiallanan kompakt daşıyıcıya malik bütün həqiqi funksiyaların fəzası, L, – $D(G)$ fəzasında həqiqi xətti funksional olsun. $f(x)\ge 0$, $x\in G$, $f(e)=0$ şərtini ödəyən bütün $f\in D(G)$ üçün $L(f)\ge 0$ olarsa, L sanki müsbət funksional adlanır; $g^*(x)=g(x^{-1})$ olsun, əgər bütün $f,g\in D(G)$ üçün L sanki müsbət funksional olarsa və $L(fg^*)=L(f)g(e)-$ $-f(e)L(g)$ münasibəti ödənilərsə, L primitiv forma; əgər L sanki müsbət funksional olarsa və $L(fg)+L(fg^*)=$ $=2\,[L(f)g(e)+f(e)L(g)]$ münasibəti ödənilərsə, kvadratik forma; I_E, – $E\subset G$ çoxluğunun indikatoru olduqda, G qrupunun vahidinin hər hansı U ətrafı və $K=\{f\in D(G):\ I_U\le f\le I_G\}$ fəzası üçün $\sup\{L(f):f\in K\}=0$ olarsa, onda L normalanmış funksional adlanır. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, $\Gamma: D(G)\to D(G)$ xətti inikası G qrupunun Levi inikası adlanır:

a) ixtiyari primitiv forma L və ixtiyari $f\in D(G)$ üçün $L(f-\Gamma(f))=0$; b) Γ^* qoşma operator olduqda bütün $f\in D(G)$ üçün $\Gamma^*(f)=-\Gamma(f)$; c) $f\to\Gamma(f)(x)$ bütün $x\in G$ üçün $D(G)$-də primitiv funksiyadır. Levi inikası hər bir lokal kompakt qrupda mövcuddur. Əgər G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafında $\eta(G\setminus U)<\infty$ və bütün $f\in D(G)$, $f(x)\ge 0$ və $f(e)=0$ üçün

$$\int_{G^*} f(x)\,\eta(dx)<\infty$$

olarsa, $G^*=G\setminus\{e\}$ fəzasında η ölçüsü Levi ölçüsü adlanır.

μ_t, $t\ge 0$, – G qrupunda ehtimal ölçülərinin doğuran funksionalı A olan elə kəsilməz konvolyusion semi – qrupu olsun ki, $t\to 0$ olduqda $\mu_t\to\delta_e$ olsun. Onda: 1) $D(G)\subset D_A$; 2) A, – $D(G)$-də sanki müsbət normalanmış funksionaldır; 3) əgər G qrupunun Levi inikası Γ verilmişdirsə, onda $D(G)$-də elə ψ_1 primitiv forması, ψ_2 kvadrativ forması və G-də elə Levi ölçüsü η vardır ki, A funksionalı (ψ_1,ψ_2,η) üçlüyü ilə bütün $f\in D(G)$ üçün

$$A(f)=\psi_1(f)+\psi_2(f)+$$
$$+\int_{G^*}[f(x)-f(e)-\Gamma(f)(x)]\,\eta(dx)\qquad(*)$$

düsturu ilə kanonik ifadə oluna bilinir; 4) η və ψ_2 forması μ_t, $t\ge 0$ semi – qrupu ilə yeganə surətdə təyin olunurlar; 5) kompakt daşıyıcıya malik, G^*-də bütün kəsilməz f-lər üçün

$$\int_{G^*} f\,d\eta=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_G f\,d\mu_t$$

münasibəti ödənilir.

(*) ifadəsi kəsilməz konvolyusion semi – qrupun doğuran funksionalı üçün Levi – Xinçin kanonik ifadəsi adlanır. Əksinə, əgər G qrupunun verilmiş Γ Levi inikasları, ψ_1 primitiv forması, $D(G)$-də ψ_2 kvadratik forması və G-də Levi ölçüsü η üçün $L\in D^*(G)$ xətti funksionalı (*) düsturu ilə təyin olunmuşdursa, onda L sanki müsbət, $D(G)$-də normalanmış funksionaldır və doğuran funksionalı A, infinitezimal operatoru N olan yeganə kəsilməz konvolyusion μ_t, $t\ge 0$ semi – qrupu vardır və $D(G)$-də A-nın məhdud forması L ilə üst-üstə düşür.

G, – dim. – ölçüsü olan Li qrupu, $\mathscr{L}(G)$ – onun uyğun Li cəbri, $\{Y_1,\dots,Y_d\}$ – bu cəbrin bazisi olsun. Əgər $y_i^*=-y_i$ və $(Y_iy_j)(e)=\delta_{ij}$, $i,j=1,\dots,d$ olarsa, $D(G)$-dən olan funksiyalar çoxluğu $\{y_1,\dots,y_d\}$ G-də $\{Y_1,\dots,Y_d\}$ bazisinə nəzərən koordinat sistemi adlanır. $D(G)$-də ixtiyari primitiv ψ_1 forması və kvadratik ψ_2 forması üçün elə $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R}^1$ və simmetrik mənfi olmayan müəyyən $\|a_{ij}\|$ matrisi vardır ki,

$$\psi_1(f)=\left[\left(\sum_{i=1}^d a_iY_i\right)f\right](e),\quad \psi_2(f)=\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(Y_iY_jf)(e).$$

G qrupunda hər bir Levi inikası Γ üçün $\mathscr{L}(G)$ cəbrinin $\{Y_1,\dots,Y_d\}$ bazisinə nəzərən elə koordinat sistemi $\{y_1,\dots,y_d\}$ vardır ki,

$$\Gamma(f)=\sum_{i=1}^d y_i(Y_if)(e).$$

y_i funksiyaları üçün U_0 qrupunun vahidinin elə ətrafı vardır ki,

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{d} y_i^2(x),\ \ x\in U_0$$

düsturu ilə təyin olunan Hant funksiyası U_0 daxilində ciddi müsbətdir. Bu funksiyanı U_0-dan kənarda elə təyin etmək olar ki, o, bütün G-də ikiqat kəsilməz differensiallanan olsun, $0<\Phi(x)\le 1$ və G qrupunun vahidini özündə saxlayan hər hansı U kompaktı xaricində $\Phi(x)=1$ olsun. G-də η ölçüsü, yalnız və yalnız, o halda Levi ölçüsüdür ki,

$$\int_{G^*}\Phi\, d\eta<\infty$$

şərti ödənilsin.

Əgər G lokal kompakt Abel qrupu, $\hat{G}$ onun xarakterləri qrupu olarsa, onda konvolyusion $(\mu_t, t>0)$ semi – qrupuna uyğun xətti operatorların S_t semi – qrupunun $\hat{G}\subset\hat{G}^b(G)$ çoxluğuna daralması Abel qrupu G-də ehtimal paylanmaları μ_t-lərin xarakteristik funksiyası $\hat{\mu}_t(\gamma)$-ni, $\gamma\in\hat{G}$ təyin edir. Belə ki, baxılan halda μ_t ölçülərinin idempotent bölənləri olmadığından $\gamma\in\hat{G}$ üçün $\hat{\mu}_t(\gamma)\neq 0$ olur. Hər bir primitiv forma $\hat{G}$-ni özündə saxlayan fəzaya davam oluna bilinər və ixtiyari $\gamma\in\hat{G}$, $x_0\in\hat{G}$ üçün o, $\ln\gamma(x_0)$ şəklində olur. Kvadratik formaları da $\hat{G}$-ni özündə saxlayan fəzaya davam etdirmək olar və $\hat{G}$-də daralmada bunlar

$$\psi_2(\gamma_1\gamma_2)+\psi_2(\gamma_1\gamma_2^{-1})=2[\psi_2(\gamma_1)+\psi_2(\gamma_2)],\ \gamma_1,\gamma_2\in G$$

xassəsinə malik olan G-də ψ_2 funksionalları ilə üst-üstə düşür. G Abel qrupu üçün elə L Levi inikası vardır ki, o, $\hat{G}$-ni özündə saxlayan fəzaya davam oluna bilinir və $\hat{G}$ çoxluğunda $g(x,\gamma)$, $x\in G$, $\gamma\in\hat{G}$ funksiyasını təyin edir. $g(x,\gamma)$ funksiyası hər iki dəyişəninə görə kəsilməzdir; hər bir $C\in\hat{G}$ kompaktı üçün $\sup\{|g(x,\gamma)|, x\in G,\ \gamma\in C\}<\infty$; bütün $x\in G$, $\gamma,\gamma_1,\gamma_2\in\hat{G}$ üçün $g(x,\gamma_1,\gamma_2)=g(x,\gamma_1)+g(x,\gamma_2)$ və $g(x^{-1},\gamma)=-g(x,\gamma)$. Bundan başqa, ixtiyari $C\subset\hat{G}$ kompakt altçoxluğu üçün G qrupunun vahidinin elə U_C ətrafı vardır ki, $x\in U_C$, $\gamma\in C$ üçün $\gamma(x)=\exp\{ig(x,\gamma)\}$ və x, G qrupunun vahidinə yaxınlaşdıqda $g(x,\gamma)$ funksiyası $\gamma\in C$ üzrə sıfra müntəzəm yaxınlaşır. Levi ölçüləri, yalnız və yalnız, ixtiyari $\gamma\in\hat{G}$ üçün

$$\int_{C^*}\operatorname{Re}\gamma(x)\ \eta(dx)<\infty$$

şərtini ödəyən, G^*-da σ – sonlu η ölçüləridir. (*) kanonik ifadəsi haqqında bütün mülahizələrdən Abel qrupunda idempotent bölənləri olmayan sonsuz bölünən μ_1 paylanmasının xarakteristik funksiyası $\hat{\mu}_1$ üçün aşağıdakı Levi – Xinçin kanonik ifadəsi alınır:

$$\hat{\mu}_1(\gamma)=\gamma(x_0)\exp\left\{\psi_2(\gamma)-\int_{G^*}[\gamma(x)-1-ig(x,\gamma)]\ \eta(dx)\right\}$$

(bax, [2]). $G=\mathbb{R}^d$ olduqda $\mathbb{R}^d$-də sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyasının Levi – Xinçin kanonik ifadəsi alınır.

Əd.: [1] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Партасарати К. Р., Рао Р. Р., Варадхан С. Р. С., «Математика», 1965, т. 9, в. 2, с. 115–46.

KONYUKSİYA(sı) / **UYUŞMA**(sı) hadisələrin **« совмещение** события; **conjunction / intersection** of events **»** – bax, *Kəsişmə*(si) / *hasil*(i) təsadüfi hadisələrin.

KORNİŞ – FİŞER AYRILIŞI « Корниша – Фишера разложение; Cornish – Fisher expansion » – kiçik parametrin qüvvət üstləri üzrə *kvantil* və normal kvantil arasında fərqin asimptotik ayrılışıdır; [1]-də E. Korniş və R. Fişer tərəfindən tədqiq olunmuşdur. Əgər $F(x,t)-t$ parametrindən asılı paylanma funksiyası, $\Phi(x)-(0,1)$ parametrlərli normal paylanma funksiyasıdırsa və $t\to 0$ olduqda $F(x,t)\to\Phi(x)$ olarsa, onda $F(x,t)$ üzərinə müəyyən şərtlərdə $x=F^{-1}[\Phi(z),t]$ funksiyasının Korniş – Fişer ayrılışı

$$x=z+\sum_{i=1}^{m-1}S_i(z)\,t^i+O(t^m) \qquad (1)$$

düsturu şəklində ifadə olunur, burada F^{-1}, – F-ə tərs funksiyadır, $S_i(z)$, – z-in müəyyən çoxhədlileridir. $z=\Phi^{-1}[F(x,t)]$ funksiyasının K. – F. a. x-in qüvvət üstlərinə görə analoji təyin olunur (Φ^{-1}, – Φ-ə tərs funksiyadır):

$$z=x+\sum_{i=1}^{m-1}Q_i(x)t^i+O(t^m), \qquad (2)$$

burada $Q_i(x)$, – x-in müəyyən çoxhədlileridir. (2) düsturu Φ^{-1} funksiyasının $\Phi(x)$ nöqtəsində Teylor sırasına ayrılışından və *Ecuort – Kramer* ayrılışından istifadə etdikdə alınır. (1) ayrılışı (2) düsturunun çevirməsidir.

Əgər X paylanma funksiyası $F(x,t)$ olan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $Z=Z(X)=\Phi^{-1}[F(X,t)]$ təsadüfi kəmiyyəti $(0,1)$ parametrlərli normal qanunla paylanır və (2)-dən aydın olduğu kimi

$$\widetilde{Z}=X+\sum_{i=1}^{m-1}Q_i(X)t_i$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $t\to\infty$ olduqda $F(x,t)$ funksiyasından daha yaxşı $\Phi(x)$ funksiyası ilə approksimasiya olunur. Əgər X-in riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası vahidə bərabər olarsa, onda (1) ayrılışının ilk hədləri aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$x=z+[\gamma_1 h_1(z)]+[\gamma_2 h_2(z)+\gamma_1^2 h_3(z)]+\dots,$$

burada $\gamma_1 = \varkappa_3/\varkappa_2^{3/2}$, $\gamma_2 = \varkappa_4/\varkappa_2^2$, $\varkappa_r$ isə X-in r tərtib semiinvariantıdır,

$$h_1(z) = \frac{1}{6}H_2(z), \quad h_2(z) = \frac{1}{24}H_3(z),$$

$$h_3(z) = -\frac{1}{36}\,[\,2H_3(z) + H_1(z)\,],$$

$H_r(z)$ – Hermit çoxhədliləri olub,

$$\varphi(z)\,H_r(z) = (-1)^r\,\frac{d^r\varphi(z)}{dz^r},$$

$$\varphi(z) = \Phi'(z)$$

münasibətilə təyin olunur. Pirson paylanmaları ailəsindən limit qanunlarlı təsadüfi kəmiyyətlərin ayrılışı haqqında bax, [3]-ə.

Əd.: [1] C o r n i s h E. A., F i s h e r R. A., «Rev. Inst. internat. Statist.», 1937, v. 5, p. 307–20; [2] К е н д а л л М. Дж., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Б о л ь ш е в Л. Н. , «Теория вероятн. и ее пример.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55.

KOROLYUK TEOREMİ « Королюка теорема; Korolyuk theorem » – bax, *İntensivlik.*

KORREKTLƏMƏ QAYDALARI « корректировки правила; adjustment test » – bax, *Statistik qəbul nəzarəti.*

KORREKTLƏYİCİ KOD, XƏTANI « исправляющий ошибки код; error – correcting code » – bax, *Kod.*

KORRELOQRAM « коррелограмма; correlogram » – diskret stasionar $\{\zeta(t)\}$, $t = \pm1, \pm2, \ldots$ normalanmış korrelyasiya funksiyasının (avtokorrelyasiyanın) qiymətləri ardıcıllığının və onun statistik qiymətinin (seçimi korrelyasion funksiyasının) işarə olunması üçün istifadə edilən termindir.

Birinci halda, n ə z ə r i k o r r e l o q r a m avtokorrelyasiya əmsalları ρ_k-ların qiymətləri ardıcıllığı ilə təyin olunur:

$$\rho_k = \frac{\mathbf{M}(\zeta_t - \mathbf{M}\zeta_t)(\zeta_{t+k} - \mathbf{M}\zeta_{t+k})}{\mathbf{D}\zeta_t}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

İkinci halda, s e ç i m i k o r r e l o q r a m – $\{\zeta_t\}$ prosesinin n uzunluqlu $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ zaman sırasının seçimi (serial) korrelyasiya əmsalları $\tilde{\rho}_k$-ların qiymətləri ardıcıllığıdır, burada

$$\tilde{\rho}_k = \frac{C_k}{C_0},$$

$$C_k = \frac{1}{n-k}\left\{\sum_{t=1}^{n-k}\zeta_t\,\zeta_{t+k} - \frac{1}{n-k}\sum_{t=1+k}^{n}\zeta_t\sum_{t=1}^{n-k}\zeta_t\right\}.$$

Nəzəri K. $\{\zeta_t\}$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ və spektral sıxlığı $f(\lambda)$ ilə sıx bağlıdır. Doğrudan da,

$$F(\lambda) = \lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\rho_k\,\sin\lambda k,$$

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\rho_k\,e^{i\lambda t}\ ,\ \rho_k = -\rho_{-k},$$

$$\rho_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda)\,e^{-i\lambda k}d\lambda.$$

Bu əlaqə $\{\zeta_t\}$ prosesinin daxili strukturunu öyrəndikdə K.-ın əhəmiyyətini izah edir.

Əgər $\{\zeta_t\}$, – $\{\zeta(t)\}$ prosesinin realizasiyalarının təsadüfi ardıcıllığı kimi interpretasiya olunarsa, onda seçimi K. $\{\tilde{\rho}_k\}$ kifayət qədər geniş şərtlər daxilində nəzəri K. üçün tutarlı və asimptotik normal statistik qiymətlər olur (bax, [2]). «K.» termini nəzəri və seçimi K.-ların qrafikləri üçün də tətbiq olunur.

Əd.: [1] А н д е р с о н Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Х е н н а н Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [4] Г р е н д ж е р К., Х а т а н а к а М., Спектральный анализ временных рядов в экономике, пер. с англ., М., 1972; [5] Х о л е в о А. С., Коррелограмма в кн.: Математическая энциклопедия, т. 3, М., 1982.

KORRELOMETR « корреломeтр; correlator / correlograph », k o r r e l y a t o r – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi prosesinin *korrelyasion funksiyasının* [və ya $X_1(t)$ və $X_2(t)$ stasionar təsadüfi proseslərinin qarşılıqlı korrelyasion funksiyasının] statistik qiymətini bu prosesin (və ya proseslərin) fluktuasiya edən elektrik siqnalı (və ya siqnalları) şəklində verilən bir realizasiyası üzrə avtomatik təyin edən cihazdır. Bax, *Korrelyasion funksiya*; q i y m ə t l ə n d i r m ə.

KORRELYASİON ANALİZ « корреляционный анализ; correlation analysis » – bax, *Korrelyasiya*.

KORRELYASİON ASILILIQ « корреляционная зависимость; correlation dependence » – ümumiyyətlə, ciddi funksional xarakterli asılılığı olmayan *təsadüfi kəmiyyətlər* arasında asılılıqdır, lakin bu asılılıq Y təsadüfi kəmiyyəti ilə $f(X_1, \ldots, X_n)$ kəmiyyəti arasında ən yaxşı yaxınlaşmadır (əsasən, kvadratik orta mənada), burada f – verilmiş funksional sinifdəndir. Bax, *Korrelyasiya*, *Əyrixətli korrelyasiya*, *Xətti korrelyasiya*.

KORRELYASİON BƏRABƏRSİZLİKLƏR « корреляционные неравенства; correlation inequalities » – *təsadüfi meydanların* funksionallarının momentləri arasında bərabərsizliklərdir. K. b. təsadüfi meydanların öyrənilməsində güclü, bəzi hallarda hətta yeganə vasitədir. K. b. ödənildiyi meydanlar sinifləri üzrə fərqləndirilir. K. b. əsas etibarilə *ferromaqnit modellərə* uyğun *Gibbs təsadüfi meydanlarında* müşahidə olunur. Aşağıda ən çox yayılmış K. b. şəbəkəvari Gibbs təsadüfi meydanları halı üçün verilir və fərz olunur ki, bunların qiymətləri həqiqi olub,

$$H_\Lambda(x) = \sum_{A\subset\Lambda,\,|A|\geq 2} J_A x^A + \sum_{t\in\Lambda} h_t x_t$$

hamiltonian ilə və $\mathbb{R}$-də m sərbəst ölçüsü ilə verilir. Burada Λ, – d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin sonlu altçoxluğu, $x^A = \prod_{t\in A} x_t$, $J_A \geq 0$. $\langle\ \rangle$ simvolu ilə uyğun Gibbs paylanmasına görə orta qiymətlər işarə olunmuşdur. Aşağıda verilən bütün bərabərsizliklərdə $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$ limit keçidi mümkündur, bu keçiddən

sonra bərabərsizliklər $\mathbb{Z}^d$-də Gibbs təsadüfi meydanlarına da tətbiq oluna bilinər.

1. FKG (Fortuin – Kasteleyn – Ginibre; bax, [1]) korrelyasion bərabərsizliyi. $\Omega_\Lambda = \{x_\Lambda : \Lambda \to \mathbb{R}\}$ – konfiqurasiyalar çoxluğu olsun. Əgər ixtiyari konfiqurasiyalar cütü x'_Λ, x''_Λ üçün bütün $t \in \Lambda$ qiymətlərində $(x'_\Lambda)_t \geq (x''_\Lambda)_t$ bərabərsizliyi ödənildikdə Ω_Λ-da verilmiş $f(x_\Lambda)$ funksiyası $f(x'_\Lambda) \geq f(x''_\Lambda)$ bərabərsizliyini ödəyərsə, $f(x_\Lambda)$ funksiyası Ω_Λ-da artan funksiya adlanır. f, g Ω_Λ-da artan funksiyalar olsun. Onda

$$\langle f g \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle \qquad (1)$$

FKG bərabərsizliyi h_t parametrlərinin (maqnit sahələrinin) işarəsi olmayan, çox olmayan bərabərsizliklərdən biridir. $J_A \geq 0$ şərtini də bir qədər zəiflətmək olar. x_s, x_t funksiyaları Ω_Λ-da artan olduqlarından, (1) bərabərsizliyinə əsasən,

$$\frac{d}{dh_s}\langle x_t \rangle = \langle x_s x_t \rangle - \langle x_s \rangle \langle x_t \rangle \geq 0 ,$$

yəni $\langle x_s \rangle$ orta qiymətinin $\{h_t,\ t \in \Lambda\}$ parametrlərinin artan funksiyası olduğu alınır.

2. QKŞ (Griffiths – Kelley – Sherman; bax, [2], [3]) korrelyasion bərabərsizlikləri. $h_t \geq 0$, $t \in \Lambda$ və m ölçüsü $x \to -x$ işarədəyişmə çevirməsinə nəzərən simmetrik olsun. Onda ixtiyari $B, C \subset \Lambda$ üçün:

$$\langle x^B \rangle \geq 0 \quad \text{(I QKŞ bərabərsizliyi)},$$

$$\langle x^B x^C \rangle \geq \langle x^B \rangle \langle x^C \rangle \text{ (II QKŞ bərabərsizliyi)}$$

bərabərsizlikləri doğrudur. $|B| \geq 2$ olduqda x^B funksiyası Ω_Λ-da artan funksiya deyildir.

Aşağıdakı K. b. Saymon – Qriffits sinfi adlanan $\mathscr{S}$ sinfinə aid sərbəst m ölçüləri üçün doğrudur (bax, [4]). Bu sinif $X = \sum_{t \in \Lambda} \lambda_t \tau_t$ cəmi şəklində ifadə olunan X_k təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmalarının doğurduğu sinifdir, burada $\lambda_t \geq 0$, τ_t təsadüfi kəmiyyətləri $h = 0$ parametrli ferromaqnit *İzinq modelinə* uyğun Gibbs təsadüfi meydanı əmələ gətirir. $\mathscr{S}$ kompozisiya və limitə keçid əməllərinə görə qapalı sinifdir. $[-a, a]$, $a \geq 0$ parçasında müntəzəm paylanma, normal paylanma və bəzi başqa paylanmalar bu sinifdəndir.

3. QHŞ (Griffiths – Hurst – Sherman; bax, [5]) korrelyasion bərabərsizliyi. $|A| > 2$, $h_t \geq 0$, $m \in \mathscr{S}$ olduqda $J_A = 0$ olsun. Onda bütün $r, s, t \in \Lambda$ üçün

$$u_3(r, s, t) = \langle x_r x_s x_t \rangle - \langle x_r \rangle \langle x_s x_t \rangle - \\ - \langle x_s \rangle \langle x_r x_t \rangle - \langle x_t \rangle \langle x_r x_s \rangle + 2 \langle x_r \rangle \langle x_s \rangle \langle x_t \rangle \leq 0$$

münasibəti doğrudur.

4. Simmetrik ferromaqnit modellərinin semiinvariantlarının işarələri. $|A| > 2$, $h_t \equiv 0$, $m \in \mathscr{S}$ olduqda $J_A = 0$ olsun. Onda simmetriya nöqteyi – nəzərinə görə $n = 2k+1$ olan $u_n(t_1, ..., t_n)$ semiinvariantları sıfra bərabərdirlər. $n = 2k$ üçün isə

$$(-1)^{k-1} u_{2k} \geq 0 \qquad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur. $k = 2$ olduqda (2) K. b. Lebovits bərabərsizliyi adlanır (bax, [6]). Ümumi halda, [7]-də baxılmışdır.

5. N (Newman; bax, [8]) korrelyasion bərabərsizliyi. A çoxluğunun cüt güclü altçoxluqlara P bölgülərinin $\mathscr{M}$ ailəsində A çoxluğunun cütləri ixtiyari bölgüsü hər bir $\mathscr{M}$-dən olan heç olmasa bir bölgünün «kiçilməsi» olarsa, $\mathscr{M}$ məqbul ailə adlanır. Onda 4-cü bənddəki fərziyyələrlə A çoxluğunun ixtiyari məqbul bölgülər ailəsi $\mathscr{M}$ üçün

$$\langle x^A \rangle \leq \sum_{\rho \leq \mathscr{M}} \prod_{\rho_i \in P} \langle x^{\rho_i} \rangle$$

bərabərsizliyi doğrudur.

K. b. vasitəsilə Gibbs paylanmasının yeganə olub-olmadığı haqqında sualları öyrənmək (bax, [9]), bunlar üçün mərkəzi limit teoremini isbat etmək (bax, [10]), müxtəlif limitə keçmələrdə Gibbs paylanmalarının yığılma faktlarını müəyyənləşdirmək (bax, [3]), bəzi meydanların Qauss meydanları olub-olmadığını yoxlamaq mümkündür (bax, [1]).

Əd.: [1] Fortuin C., Kasteleyn P., Ginibre J., «Comm. Math. Phys.», 1971, v. 22, № 2, p. 89–103; [2] Griffiths R., «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, № 3, p. 478–89; [3] Kelly D., Sherman S., « J. Math. Phys.», 1968, v. 9, № 3, p. 466–84; [4] Simon B., Griffiths R., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 33, № 2, p. 145–64; [5] Griffiths R., Hurst C., Sherman S., «J. Math. Phys.», 1970, v. 11, № 5, p. 790–95; [6] Lebowitz J., «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 35, № 2, p. 87–92; [7] Шлосман С. Б., «Докл. АН СССР», 1987, т. 292, № 5, с. 1074–77; [8] Newman C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 33, № 2, S. 75–93; [9] Lebowitz J., Martin-Lof A. , «Comm. Math. Phys.», 1972, v. 25, № 2, p. 276–82; [10] Newman C., «Comm. Math. Phys.», 1983, v. 91, № 1, p. 75–80; [11] Aizenman M., «Comm. Math. Phys.», 1982, v. 86, № 1, p. 1–48.

KORRELYASİON CƏDVƏL « корреляционная таблица; correlation table » – bax, *Korrelyasiya.*

KORRELYASİON FUNKSİONAL « корреляционный функционал; correlation functional » – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses*.

KORRELYASİON FUNKSİYA « корреляционная функция; correlation function », – avtokorrelyasion funksiya, korrelyasiya funksiyası, kovariasion funksiya, avtokovariasiya, avtokovariasion funksiya, kompleksqiymətli *təsadüfi proses* və ya $\{\zeta(t),\ t \in T\}$ *təsadüfi funksiyası* üçün

$$B(t, s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]\,\overline{[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $B(t, s)$ funksiyasıdır. K. f.-nın təyin olunması üçün $\zeta(t)$ funksiyasının bütün $t \in T$ qiymətlərində sonlu $\mathbf{M}|\zeta(t)|^2$ ikinci momentinin varlığı zəruridir. Əgər $t = s$

olarsa, onda $B(t,\ t)$, – $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının dispersiyasıdır. Təsadüfi funksiyalar həqiqiqiymətli olduğu halda K. f., təbii olaraq,

$$B(t,\ s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]\,[\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)]$$

bərabərliyi ilə verilir və bu halda K. f. ikinci tərtib mərkəzi (və ya mərkəzlənmiş) *moment funksiyasıdır*.

Bütün mümkün olabilən K. f. sinfi $\zeta(t)$ funksiyasının verildiyi T çoxluğunda bütün mümkün müsbət müəyyən nüvələr sinfi ilə üst-üstə düşür.

K. f. aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $B(t,\ t) \geq 0$;

2) $B(t,\ s) = \overline{B(s,\ t)}$;

3) $\left|B(t,\ s)\right|^2 \leq B(t,\ t)\,B(s,\ s)$;

4) $\left|B(t_1, t_3) - B(t_2, t_3)\right|^2 \leq$

$\leq B(t_3,\ t_3)\,[B(t_1,\ t_1) + B(t_2,\ t_2) - 2\operatorname{Re} B(t_1,\ t_2)]$.

«K. f.» termini əksər hallarda geniş mənada stasionar təsadüfi proses üçün istifadə olunur, bu proseslər üçün $B(t, s) = B(t-s)$, $t, s \in \mathbb{R}^1$ K. f.-sı bir dəyişənli funksiya olub, stasionar korrelyasion funksiya adlanır; geniş mənada bircins təsadüfi meydanlar üçün yalnız $(t-s) \in \mathbb{R}^n$ dəyişənindən asılı olan $B(t,\ s) = B(t-s)$, $t, s \in \mathbb{R}^n$ K. f.-sı bircins korrelyasion funksiya; K. f.-sı $B(t,\ s) = B\left(\left|t-s\right|\right)$, $(t-s) \in \mathbb{R}^n$ yalnız Evklid məsafəsi $\left|t-s\right|$-dən asılı olan bircins və izotrop təsadüfi proseslər üçün K. f. bircins izotrop korrelyasion funksiya adlanır.

Əgər $\zeta(t) = [\zeta_1(t), ..., \zeta_r(t)]$, $t \in T$ elə çoxölçülü təsadüfi funksiyadırsa ki, hər bir $t \in T$ üçün $\mathbf{M}\left|\zeta_i(t)\right|^2 < \infty$, $i = 1, ..., r$ münasibəti ödənilir, onda bu təsadüfi funksiyanın K. f.-sı matris qiymətli $B(t,\ s) = \left\|B_{ij}(t,\ s)\right\|_{i,\,j=1}^{r}$ funksiyasına deyilir, burada

$$B_{ij}(t,\ s) = \mathbf{M}[\zeta_i(t) - \mathbf{M}\zeta_i(t)]\,\overline{[\zeta_j(s) - \mathbf{M}\zeta_j(s)]}$$

– $\zeta_i(t)$ və $\zeta_j(s)$ təsadüfi funksiyalarının qarşılıqlı korrelyasion funksiyasıdır. Bəzən $B(t,\ s)$, – $\zeta_i(t)$ təsadüfi funksiyasının korrelyasion matrisi adlanır.

Əksər hallarda $\{\zeta(t), t \in T\}$ təsadüfi funksiyanın K. f.-sı $\zeta(t)$ və $\overline{\zeta(s)}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin K. f.-sı $B(t,\ s)$ ilə

$$B(t,\ s) = \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)} - \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\mathbf{M}\zeta(s)}$$

münasibətilə bağlı olan ikinci qarışıq moment $\mathbf{M}\zeta(t)\,\zeta(s)$ nəzərdə tutulur və bu halda K. f. – mərkəzlənmiş korrelyasion funksiya adlanır.

Hər bir $\zeta(t)$, $t \in T$ qiymətində $\mathbf{M}\,[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]^2 > 0$ şərtini ödəyən, $\{\zeta(t), t \in T\}$ həqiqi təsadüfi funksiyası üçün «K. f.» termini, bəzən daha dar mənada $\zeta(t)$ və $\zeta(s)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin *korrelyasiya əmsalı* kimi anlaşılır, yəni bu halda K. f.

$$B(t, s) = \frac{\mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]\,[\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)]}{\{\mathbf{M}\,[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]^2\ \mathbf{M}\,[\zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(s)]^2\}^{1/2}}$$

bərabərliyi ilə verilir [belə funksiya, həmçinin $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının normalanmış korrelyasion funksiyası adlanır].

K. f. təsadüfi funksiyaların 2-ci tərtib xassə adlandırılan xassəini təyin edir (bax, *Korrelyasiya nəzəriyyəsi* təsadüfi funksiyaların).

Təsadüfi funksiyaların bəzi sinifləri üçün K. f.-nın statistik qiymətləndirilmə metodları işlənilmişdir (bax, *Statistik analiz*(i) təsadüfi meydanların).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

KORRELYASİON FUNKSİYA harmoniklənən **« корреляционная функция** гармонизуемая; harmonizable **correlation function »** – bax, *Harmoniklənmə şərtləri.*

KORRELYASİON FUNKSİYA xüsusi **« корреляционная функция** частная; partial **correlation function »** – bax, *Xüsusi korrelyasion funksiya.*

KORRELYASİON FUNKSİYA işarəvi **« корреляционная функция** знаковая; sign **correlation function »** – bax, *Polyar korrelyasion funksiya.*

KORRELYASİON FUNKSİYA qarşılıqlı **« корреляционная функция** взаимная; **crosscorrelation function »** – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

KORRELYASİON FUNKSİYA; qiymətləndirmə **« корреляционная функция;** оценивание; estimation of **correlation function »** – diskret və ya kəsilməz t zamanlı həqiqi stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin $x(t)$ realizasiyasının bir parçasında onun müşahidə olunmuş qiymətləri üzrə [və ya bir-birindən asılı olmayan bir neçə $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$ realizasiyalarının] $t = 1, 2, ..., T$ və ya $0 \leq t \leq T$ olduqda

$$B(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau)\,\zeta(t)]$$

və ya

$$b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{M}\zeta(t+\tau)]\,[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]$$

korrelyasion funksiyasının qiymətlərinin təqribi təyin olunmasıdır. $\zeta(t)$ prosesinin yalnız bir realizasiya üzrə təyin olunan K. f.-nın ən sadə statistik qiyməti: diskret t halında

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|\tau|} x\,(t + \left|\tau\right|)\,x(t)$$

və ya

$$b_T^*(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|\tau|} [x(t + \left|\tau\right|) - \bar{x}\,]\,[x(t) - \bar{x}\,]\,,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x(t)$$

düsturları ilə verilən seçimi korrelyasion funksiya adı r, burada $|\tau| = 0, 1, ..., T-1$ [$|\tau| \geq T$ olduqda, $B_T^*(\tau) = b_T^*(\tau) = 0$ qəbul etmək məsləhətdir]; t kəsilməz olduqda cəmlər inteqrallarla əvəz olunur və analoji düsturlar olur. Əgər bir neçə – $x_1(t), ..., x_n(t)$ realizasiyalarının parçaları götürülərsə, $B(\tau)$ və ya $b(\tau)$ funksiyasının bir realizasiya üzrə təyin olunmuş statistik qiymətini ayrı-ayrı realizasiyalar üzrə qurulmuş statistik qiymətlərin orta qiymətini götürərək yaxşılaşdırmaq olur.

Seçimi K. f., adətən, K. f.-nın tutarlı statistik qiymətidir (hətta güclü tutarlıdır, yəni $T \to \infty$ olduqda qiymətləndirilən funksiyaya 1 ehtimalla yığılır); geniş şərtlərlə bu statistik qiymət həm də asimptotik normaldır (bax, məs., [1] – [10]), lakin bununla belə o, həmişə meylsiz statistik qiymət olmayacaqdır. $B(\tau)$ funksiyası [və ya $\mathbf{M}\zeta(t) = \bar{x}$ orta qiyməti məlum olduqda $b(\tau)$ funksiyası] qiymətləndirildikdə $B(\tau)$ və ya $b(\tau)$ üçün meylsiz statistik qiyməti asanlıqla qurmaq olur, bunu görə seçimi K. f.-nın ifadəsində $1/T$ vuruğunu $1/(T-|\tau|)$ ilə əvəz etmək kifayətdir; lakin belə əvəzləmə, əslinə qalanda alınan statistik qiymətin xassələrini pisləşdirir və buna görə də, bu əvəzləmə tətbiq olunmur (bax, məs., [8], [11]). $B_T^*(\tau)$ və $b_T^*(\tau)$ statistik qiymətləri $|\tau|$-nun nisbətən böyük qiymətlərində (T-dən $10 \div 20\%$ artıq olan) az etibarlı sayılır; buna görə də, K. f.-ların qiymətləndirilməsində, əksər hallarda, seçimi K. f.-nın qiymətlərini əlavə olaraq, T-dən asılı, τ arqumentinin cüt monoton azalan funksiyası olan, *korrelyasion pəncərə* adlandırılan $a_T(\tau)$ funksiyasına vurmaq məsləhətdir (bax, [8]). $b_T^*(\tau)$-nu $a_T(\tau)$-ya vurmaq zəruridir, məs., prosesin spektral sıxlığının qiymətləndirilməsində ilk addım kimi K. f.-nın qiymətləndirilməsindən istifadə etdikdə (bax, *Blekman – Tyuki metodu*).

Əgər $x(t)$ kəsilməz zamanlı $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin fluktuasiya edən elektrik siqnalı kimi verilən realizasiyasıdırsa, onda K. f.-nın qiymətləndirilməsi, əksər hallarda, xüsusi avtomat hesablama qurğuları – *korrelometr* və ya korrelyatorlar vasitəsilə həyata keçirilir (bax, [11] – [19]). Bununla belə, belə hallarda da K. f.-nın qiymətləndirilməsində çox vaxt rəqəmi metodların tətbiqi daha münasib olub, müasir hesablama texnikasının praktikasında geniş yayılmışdır. Empirik korrelyasion funksiyaların hesablanma metodlarının bəzi çətin olmayan sadələşmələri [20], [21]-də təklif olunmuşdur; bu halda «binar arifmetika»-dan geniş istifadəyə əsaslanan alqoritmlərin daha kardinal və effektiv modifikasiyaları haqqında, [22] – [25]-ə bax. *Sürətli Furye çevirməsinin* effektiv hesablama alqoritmlərinin inkişafı ilə əlaqədar, empirik K. f.-nı Furye çevirməsi kimi baxılan prosesin *periodoqramını* əvvəlcədən hesablayaraq təyin etmək rahat olur. Müasir hesablama texnikasının yayılması əvvəllər istifadə olunan, *reley korrelyasion funksiya* və ya *polyar korrelyasion funksiyanın* statistik qiymətlərinin öncədən cəlb olunmasına əsaslanan sadələşdirilmiş qiymətləndirmə metodlarının əhəmiyyətini azaltmış oldu.

K. f.-nın qiymətləndirilməsi, çox vaxt, iki stasionar və iki stasionar əlaqəli $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ təsadüfi proseslərinin realizasiyalarının parçalarının eyni zamanda müşahidə olunmuş qiymətləri üzrə qarşılıqlı K. f.-nın qiymətlərinin təqribi təyin olunması kimi anlaşılır (bax, məs., [3] – [7], [12] – [19]). K. f.-nın qiymətləndirilməsi məsələlərinə sıx yaxın məsələlərdən biri də normalanmış

$$R(\tau) = \frac{\mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{M}\zeta(t+\tau)]\,\mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]}{\mathbf{M}[\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]^2}$$

K. f.-nın qiymətləndirilməsi məsələsidir, bu halda empirik K. f. rolunu $\zeta(t)$ prosesinin *korreloqramı* yerinə yetirir. (korreloqramın düsturunda yenidən çox vaxt surətdəki $1/(T-\tau)$ vuruğunu $1/T$ ilə əvəz etmək məqsədəuyğun olur). Korreloqram geniş şərtlərlə $R(\tau)$ funksiyası üçün tutarlı və asimptotik normal statistik qiymət olur. Bu halda asimptotik normallıq şərtləri $b_T^*(t)$ statistik qiymətinin asimptotik normallığını təmin edən şərtlərdən daha geniş olur (bax, məs., [3], [26]).

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Бартлетт М. С., Введение в теорию случайных процессов, пер. с англ., М., 1958; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Бендат Дж., Пирсол А., Прикладной анализ случайных данных, пер. с англ., М., 1989; [5] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [6] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [7] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [8] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [9] Hannan E. J., «Ann. Statist.», 1974, v. 2, № 4, p. 803–06; [10] Hannan E. J., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 2, p. 396–99; [11] Schaerf M. C., Estimation of the covariance and autoregressive structure of a stationary time series, Tech. Rep.12, Stanford, 1964; [12] Корн А., Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах, пер. с англ., М., 1968; [13] Балл Г. А., Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов, М., 1968; [14] Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н., Автоматические цифровые корреляторы, М., 1971; [15] Курочкин С. С., Многоканальные счетные системы и коррелометры, М., 1972; [16] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [17] Жовинский В. Н., Арховский В. Ф., Корреляционные устройства, М., 1974; [18] Макс Ж., Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях, пер. с франц., т. 1–2, М., 1983; [19] Jordan J. R., «Proc. IEEE», Pt G, 1986, v. 133, № 1, p. 58–74; [20] Kendall W. B., «IEEE Trans. Compts», 1974, v. 23, № 1, p. 88–90; [21] Blankinship W. A., «IEEE Trans. Acouts., Speech, Sign. Proc.», 1974, v. 22, № 1, p. 76–77; [22] Ahmed N., Natarajan T., «IEEE Trans. Electromag. Compat.», 1974, v. 16, № 3, p. 177–83; [23] Loprestі P. V., Suri H. L., «IEEE Trans. Acouts., Speech, Sign. Proc.», 1974, v. 22, № 6, p. 449–53; [24] Larsen H., «IEEE Trans. Acouts., Speech, Sign. Proc.», 1976, v. 24, № 5, p. 432–34; [25] Аништин Н. С., Тивков А. М., «Автометрия», 1978, № 3, с. 37–40; [26] Hannan E. J., Heyde C. C., «Ann. Math. Statist.», 1972, v. 43, № 6, p. 2058–66.

KORRELYASİON FUNKSİYA ortalanmış **« корреляционная функция** осредненная; averaged **correlation function »** – bax, *Ortalanmış korrelyasion funksiya.*

KORRELYASİON FUNKSİYA polyar **« корреляционная функция** полярная; polar **correlation function »** – bax, *Polyar korrelyasion funksiya*.

KORRELYASİON FUNKSİYA reley **« корреляционная функция** релейная; relay **correlation function »** – bax, *Reley korrelyasion funksiya.*

KORRELYASİON FUNKSİYA seçimi « **корреляционная функция** выборочная; sample **correlation function** » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya*.

KORRELYASİON FUNKSİYA statistik mexanikada « **корреляционная функция** в статистической механике; **correlation function** in statistical mechanics » – korrelyasion ölçünün Radon – Nikodim törəməsidir, aşağıdakı kimi təyin olunur. P, – $\mathbb{R}^d$ -də statistik mexanikanın kəsilməz modelinin konfiqurasion vəziyyəti olsun (yəni $\mathbb{R}^d$ -nin lokal sonlu altçoxluqları fəzası Q -də ehtimal ölçüsü və ya «ənənəvi» ehtimal terminologiyasında $\mathbb{R}^d$ -də nöqtəvi təsadüfi meydan olsun).

$$(\mathbb{R}^d)^n_{\leq} = \{q^{(n)} = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^d : q_1 \leq ... \leq q_n\}$$

($\leq$ simvolu $\mathbb{R}^d$ -də leksikoqrafik qaydanı ifadə edir) çoxluğunda mənfi olmayan,

$$K_P^{(n)}(A) = \int\limits_Q (d\omega) \sum_{\substack{q^{(n)} \in A:\, qj \in \omega, \\ 1 \leq j \leq n}} \mathbf{1}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $K_P^{(n)}$ ölçüsünə P vəziyyətinin n -ci tərtib korrelyasion ölçüsü və ya n -ci (n – hissəvi) korrelyasion ölçüsü deyilir, $n \geq 1$ [$n = 0$ olduqda fərz olunur ki, $K^{(0)}(\varnothing) = 1$], bu ölçünün $(\mathbb{R}^d)^n$ -də Lebeq ölçüsü üzrə Riman – Nikodim törəməsi (əgər bu törəmə varsa) n -ci tərtib korrelyasion funksiya olur və o, aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$\rho_P^{(n)} = dK_P^{(n)} \big/ dq^{(n)}.$$

$n = 0$ olduqda qəbul olunmuşdur ki, $\rho_P^{(0)} = 1$. $\rho_P^{(n)}$ funksiyasına bəzən $(\mathbb{R}^d)^n$ -də simmetrik funksiya kimi baxmaq münasib olur; yəni $\rho_P^{(n)}(q^{(n)})$ özünəməxsus tərzdə $q_1, ..., q_n \in \mathbb{R}^d$ nöqtələrində hissəciklərin olmasının «infinitezimal» ehtimalını müəyyən edir. Nöqtəvi təsadüfi proseslər və meydanlar nəzəriyyəsində (bax, [2]) $\rho_P^{(n)}$ funksiyası prosesin və ya meydanın intensivliyi adlanır.

Vəziyyətin münasib xarakteristikası olan K. f. statistik mexanikanın bir sıra məsələlərində mühüm rol oynayır (bax, *Boqolyubov tənlikləri zənciri*). $\{\rho_P^{(n)},\ n \geq 0\}$ və ya $\{K_P^{(n)},\ n \geq 0\}$ ardıcıllığı üzrə P vəziyyətinin birqiymətli bərpası məsələsi belə maraq doğuran məsələlərdəndir. [1], [3]-də təklif olunmuş kafi şərtlər ümumi momentlər probleminin həlli ilə bağlıdır və bu şərtlər ondan ibarətdir ki, $I \subset \mathbb{R}^d$ ixtiyari məhdud Borel çoxluğu olduqda $K_P^{(n)}(I^{(n)} \cap \mathbb{R}^n_{\leq})$ qiymətləri «çox da sürətlə» artmır.

Analoji anlayışlar $\mathbb{R}^d$ -də hissəciklərin kəsilməz sisteminin vəziyyətlərinə baxıldığı halda da daxil olunur (yəni faza fəzası M -də ehtimal fəzaları və ya «nişanları» $\mathbb{R}^d$ -dən olan $\mathbb{R}^d$ -də verilən nişanlanmış nöqtəvi təsadüfi meydanlar halı). Burada n -ci tərtib K. f. mənfi olmayan simmetrik

$$\rho_P^{(n)}(x^{(n)}),\ x^{(n)} = ((q_1, p_1), ..., (q_n, p_n)) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^n$$

funksiyasıdır. Məhz bu funksiya Boqolyubov tənliklər zəncirində iştirak edir.

Ədəb.: [1] Lenard A., «Comm. Math. Phys.», 1973, v. 30, № 1, p. 35–44; [2] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [3] Zessin H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983; Bd 62, № 3, S. 395–409.

KORRELYASİON FUNKSİYA ümumiləşmiş « **корреляционная функция** обобщенная; generalized **correlation function** » – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses.*

KORRELYASİON MATRİS « **корреляционная матрица; correlation matrix** » – korrelyasiyalar matrisi, kovariasion matris, kovariasiyalar matrisi – təsadüfi $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ vektorunun komponentlərinin cüt-cüt kovariasiyalarından təşkil olunmuş matrisdir, yəni elə $B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^k$ matrisidir ki, $b_{ij} = \mathbf{M}[X_i - \mathbf{M}X_i] \times$ $\times [X_j - \mathbf{M}X_j]$, $i, j = 1, ..., k$. K. m.-in təyin olunması üçün hər bir X_i təsadüfi kəmiyyətinin sonlu ikinci momentə $(\mathbf{M}X_i^2 < \infty)$ malik olması zəruridir. K. m.-in baş diaqonalında X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyaları $\mathbf{D}X_i$ -lər yerləşir.

$k \times k$ tərtib B matrisinin hər hansı təsadüfi $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ vektorunun K. m. olması üçün: bu matrisin simmetrik və müsbət-müəyyən olması, yəni $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, ..., k$ olması və $\sum\limits_{i,j=1}^k b_{ij} z_i z_j \geq 0$ şərtlərinin ixtiyari $z_1, ..., z_k \in \mathbb{R}$ üçün ödənilməsi və ya da, bunlara ekvivalent olan, $B = AA^*$ münasibətini ödəyən, $k \times r$ tərtib, $1 \leq r \leq k$, A matrisinin varlığı zəruri və kafidir.

Əgər K. m. musbət-müəyyən matrisdirsə, onda Qauss təsadüfi vektoru X cırlaşmayan paylanmaya, əks halda cırlaşan paylanmaya malik vektordur.

Bəzən «korrelyasion matris» və «kovariasion matris» terminləri fərqli hesab edilir. Belə halda kovariasion matris əvvəl verildiyi kimi təyin olunur, korrelyasion matris isə dispersiyaları sıfırdan fərqli $\mathbf{D}X_1, ..., \mathbf{D}X_k$ olan $(X_1, ..., X_k)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalları matrisinə deyilir, yəni hesab olunur ki, $R = \left\| \rho_{ij} \right\|_{i,j=1}^k$,

$$\rho_{ij} = \frac{\mathbf{M}[X_i - \mathbf{M}X_i][X_j - \mathbf{M}X_j]}{\sqrt{\mathbf{D}X_i}\ \sqrt{\mathbf{D}X_j}}.$$

R matrisinin diaqonal elementləri 1-ə bərabərdir. R matrisinin xassələri B matrisinin xassələrilə $B = DRD$ münasibətlə təyin olunur, burada D – diaqonal elementləri $\sqrt{\mathbf{D}X_1}, ..., \sqrt{\mathbf{D}X_k}$ olan diaqonal matrisdir.

Əgər $\mathbf{X}(t) = [X_1(t), ..., X_k(t)]$, $t \in T$ elə vektor təsadüfi funksiyası olarsa ki, hər bir $t \in T$ $i = 1, ..., k$ üçün $\mathbf{M}\left|X_i(t)\right|^2 < \infty$ şərti ödənilsin, onda $B(t, s) = \left\| B_{ij}(t, s) \right\|_{i,j=1}^k$ matrisi də $X(t)$ təsadüfi funksiyasının K. m.-i adlanır, burada

$$B_{ij}(t,\ s) = \mathbf{M}[X_i(t) - \mathbf{M}X_i(t)]\,[X_j(s) - \mathbf{M}X_j(s)].$$

K. f. aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $B(t,\ t)$ – müsbət – müəyyən matrisdir;

2) $\left|B_{ij}(t,\ s)\right| \le B_{ii}(t,\ t)\,B_{jj}(s,\ s),\ \ i,j = 1, ..., k$

3) ixtiyari $n,\ \ t_1, ..., t_n \in T$ və ixtiyari $a_1, \ldots, a_n$ kompleks vektorları üçün

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} (\,B(t_j,\ t_k)a_k,\ a_j\,) \ge 0\,.$$

Bax, *Korrelyasion funksiya*.

Əd.: [1] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

KORRELYASİON MEYDAN « корреляционное поле; correlation diagram » – bax, *Korrelyasiya.*

KORRELYASİON NƏZƏRİYYƏ « корреляционная теория; correlation theory », t ə s a d ü f i f u n k s i y a l a r ı n i k i n c i t ə r t i b n ə z ə r i y y ə s i – $X(t)$, $t \in T$ *təsadüfi funksiyalarının* (ümumiyyətlə, kompleks) ümumi nəzəriyyəsinin elə bir hissəsidir ki, burada bunların elə xassələri öyrənilir ki, bu xassələr (bəzən bunlar geniş mənada xassələr adlanır) $X(t)$ funksiyasının yalnız birinci $\mathbf{M}X(t) = m(t)$ və ikinci $\mathbf{M}X(t)\overline{X(s)} = B(t,\ s)$ momentlərilə təyin olunur.

K. n.-də H_X Hilbert fəzası mərkəzi rol oynayır; bu fəza $(Y,\ Z) = \mathbf{M}\,Y\overline{Z}$ (və ya $(Y,\ Z) = \mathbf{M}\,[\,Y - \mathbf{M}Y][\,\overline{Z} - \mathbf{M}\overline{Z}\,]$) skalyar hasili ilə bütün mümkün ola bilən $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X(t_j)$ xətti kombinasiyalarının $\|\,Y\,\| = [\mathbf{M}\left|Y\right|^2]^{1/2}$ normasına nəzərən qapalı örtüyüdür (burada $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – kompleks ədədlər, $t_1, ..., t_n$, – T-nin nöqtələridir). Bu halda $X(t)$ təsadüfi funksiyası H_X fəzasının nöqtələr çoxluğuna çevrilir (t həqiqi kəsilməz dəyişən olduqda – əyriyə, $t \in \mathbb{R}^k$, $k > 1$ olduqda – səth və ya hipersəthə çevrilir) və K. n. bu nöqtələr çoxluğunun həndəsi xassələrinin araşdırılmasına gətirilir [$m(t)$-dən olduqca asılı olan xassələr nəzərə alınmadan]. Xüsusi halda, K. n.-də $X(t)$ funksiyasının kvadratik orta kəsilməzlik və kvadratik orta differensiallananlıq xassələri $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyasının nöqtələri çoxluğunun (məs., əyri və ya səthin) H_X-də uyğun güclü kəsilməzliyi və güclü differensiallananlığına ekvivalent olur.

K. n.-də $X(t)$ təsadüfi funksiyalarının müxtəlif spektral ayrılışları mərkəzi yer tutur; bir qayda olaraq, bu ayrılışlar yalnız uyğun korrelyasiya funksiyası $B(t, s)$-in ifadəsilə təyin olunur (bax, məs., *Karunen teoremi*, *Kramer teoremi*).

KORRELYASİON NİSBƏT « корреляционное отношение; correlation ratio » – *təsadüfi kəmiyyətlər* arasında asılılıq xarakteristikasıdır, Y təsadüfi kəmiyyətinin X təsadüfi kəmiyyətinə görə k o r r e l y a s i o n n i s b ə t i

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \mathbf{M}\,[\mathbf{D}(Y\,|\,X)\,/\,\mathbf{D}Y\,]$$

ifadəsinə deyilir, burada $\mathbf{D}Y$, – Y-in dispersiyası, $\mathbf{D}(Y\,|\,X)$, – X verildiyi halda Y-in şərti dispersiyasıdır və o, X-in verilmiş qiymətində $\mathbf{M}(Y\,|\,X)$ şərti riyazi gözləməsi ətrafında Y-in səpələnməsini xarakterizə edir. $0 \le \eta^2_{Y|X} \le 1$ münasibəti həmişə doğrudur. $\eta^2_{Y|X} = 0$ bərabərliyi təsadüfi kəmiyyətlərin korrelyar olmadığı hala uyğundur; $\eta^2_{Y|X} = 1$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, X və Y arasında dəqiq funksional asılılıq olsun; Y-in X-dən xətti asılı olduğu halda K. n. korrelyasiya əmsalının kvadratı ilə üst-üstə düşür. K. n. X və Y-ə görə simmetrik deyildir, buna görə də, $\eta^2_{Y|X}$ ilə yanaşı $\eta^2_{X|Y}$ kəmiyyətinə də baxılır; $\eta^2_{X|Y}$ isə X-in Y-ə görə K. n. olub, analoji qaydada təyin olunur. $\eta^2_{Y|X}$ və $\eta^2_{X|Y}$ arasında hər hansı sadə asılılıq yoxdur.

Bax, *Korrelyasiya.*

KORRELYASİON ÖLÇÜ « корреляционная мера; correlation measure » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

KORRELYASİON PƏNCƏRƏ « корреляционное окно; law window », g e c i k m ə p ə n c ə r ə s i, – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi ardıcıllığı və ya prosesinin $|\tau| \le T$ olduğu halda təyin olunan və $B(\tau) = \mathbf{M}\,\zeta(t+\tau)\zeta(t)$ *korrelyasion funksiyası* və $f(\lambda)$ *spektral sıxlığı* üçün statistik qiymətlərin $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının $t = 1, 2, ..., T$ və ya uyğun olaraq, $0 \le t \le T$ olduqda $\zeta(t)$-nin bir realizasiyası $x(t)$-nin müşahidələrdən məlum qiymətləri üzrə qurulmasında istifadə olunan, ixtiyari həqiqi və ya tamqiymətli τ arqumentinin T-dən asılı cüt $a_T(\tau)$ funksiyasıdır. $B(\tau)$-nun ən sadə statistik qiyməti

$$B^*_T(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|\tau|} x(t + |\,\tau\,|)\,x(t)$$

və ya

$$B^*_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T-|\tau|} x(t + |\,\tau\,|)\,x(t)\,dt$$

seçimi korrelyasion funksiyası $|\tau|$-nun T ilə müqayisədə kiçik qiymətlərində qənaətbəxş statistik xassələrə malikdir, lakin $|\tau|\,/\,T$-nin kifayət etməyəcək qədər kiçik qiymətində bu statistik qiymətin kvadratik orta xətası, adətən, $B(\tau)$-nun əsl qiymətindən böyük olur, buna görə də, $B^*_T(\tau)$-nu bu halda $B(\tau)$ üçün statistik qiymət kimi götürmək mənasızdır. Odur ki, τ-nun qiymətlərinin geniş intervalındakı $B(\tau)$ funksiyasının qiymətlərinin statistik qiymətini təyin etmək tələb olunduqda $B^*_T(\tau)$ seçimi korrelyasion funksiyasını elə əlavə $a_T(\tau)$ funksiyasına vurmaq məqsədəuyğundur ki, bu funksiya aşağıdakı şərtləri ödəmiş olsun: $|a_T(\tau)| \le 1$ bərabərsizliyi bütün τ-lar üçün ödənilsin, $a_T(0) = 1$ olsun, $|\tau|\,/\,T << 1$ olduqda $a_T(\tau)$ vahiddən az fərqlənsin, lakin $|\tau|\,/\,T$-nin bütün çox da kiçik olmayan qiymətlərində $|a_T(\tau)|$ vahiddən çox kiçik olsun (məs., $|\tau|\,/\,T \ge 0{,}1$ olduqda).

$a_T(\tau)$ funksiyası korrelyasion pəncərə (və ya gecikmə pəncərəsi, rus. окно запаздывания), $B_T^{(a)}(\tau) = a_T(\tau)B_T^*(\tau)$ funksiyası isə $B(\tau)$ korrelyasion funksiyasının $a_T(\tau)$ K. p.-nə uyğun statistik qiyməti adlanır.

K. p.-ni elə seçmək lazımdır ki, $a_T(\tau)$ funksiyası [$|\tau| > T$ olduqda $a_T(\tau) = 0$ şərti də əlavə olunmaqla təyin olunan] τ arqumentinin müsbət müəyyən funksiyası olsun; bu halda $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyası da müsbət müəyyən funksiya olacaqdır [əsl korrelyasion $B(\tau)$ funksiyası həmişə müsbət müəyyən funksiyadır]. 20-ci əsrin 50 – 60-cı illəri ərzində, adətən, hesab olunurdu ki, yalnız $|\tau| > k_T$ olduqda (k_T, – T -nin kiçik bir hissəsidir, məs., $k_T = 0{,}1T$) eynilik kimi sıfra bərabər olan $a_T(\tau)$ K. p.-ləri praktiki cəhətdən faydalı ola bilər. $B_T^{(a)}(\tau)$ statistik qiyməti ilk növbədə, adətən, $f(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiymətinin qurulması üçün istifadə olunurdu və bu statistik qiymət kimi $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyasının Furye çevirməsi götürülürdü (bax, *Blekman – Tyuki metodu*). Bu halda $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyasının çox da böyük olmayan hər hansı $|\tau| = k_T$ «kəsilmə nöqtəsindən» kənarda eynilik kimi sıfra bərabər olması uyğun Furye çevirməsinin hesablanmasını olduqca sürətləndirir. Lakin sonradan bu qaydadan istifadə öz əhəmiyyətini itirmiş oldu, belə ki, sürətli Furye çevirməsinin (yəni sürətlə aparılması mümkün) alqoritmləri geniş yayıldığından spektral sıxlıqların qiymətləndirilməsi üçün praktiki metodlar da kardinal dəyişikliklərə uğramış oldu.

K. p. anlayışı C. Tyuki tərəfindən «gecikmə pəncərələri» adı altında daxil olunmuşdur (bax, məs., [1]). Praktikada, əksər hallarda, K. p. kimi $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ şəklində funksiyalar seçilir, burada $a(0) = 1$, $|a(s)| \le 1$ bütün s, k_T -lər üçün hesablama gedişində dəyişə bilər; bu halda $a_T(\tau)$ K. p.-si miqyas tipli korrelyasion pəncərə, $a(s)$ funksiyası isə $a_T(\tau)$ korrelyasion pəncərəsinin generatoru adlanır. Miqyas tipli, geniş istifadə olunan K. p.-yə misal – «üçbucaq generator» – $a(s) = \max\{1 - |s|, 0\}$ generatoruna uyğun Bartlett korrelyasion pəncərəsi; $0 \le |s| \le 1/2$ olduqda, $a(s) = 1 - 6s^2 + 6|s|^3$, $1/2 \le |s| \le 1$ olduqda $a(s) = 2(1 - |s|)^3$, $|s| > 1$ olduqda isə $a(s) = 0$ olan Parzen korrelyasion pəncərəsi;

$$a(s) = \begin{cases} (1-2a) + 2a\cos \pi s, & |s| \le 1 \text{ olduqda}, \\ 0, & |s| > 1 \text{ olduqda}, \end{cases}$$

düsturu ilə verilən Tyuki korrelyasion pəncərəsidir, burada $a = 0{,}25$ («Hannınq pəncərəsi») və ya $a = 0{,}23$ (Hemminq pəncərəsi) (bax, məs., [1] – [9]). K. p.-yə aid çoxlu əlavə misalları [1] – [15]-də tapmaq olar.

K. p. $a_T(\tau)$-nun Furye çevirməsi $A_T(\lambda)$ spektral pəncərə adlanır; spektral pəncərə $B_T^{(a)}(\tau)$ funksiyasına Furye çevirməsini tətbiq etdikdə alınan, $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının hamarlanmış periodoqramının çəki funksiyasıdır (bax, [1] – [9]).

Ədd.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1–2, М., 1971–72; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [5] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [6] Грибанов Ю. И., Малыков В. Л., Спектральный анализ случайных процессов, М., 1974; [7] Отнес Р., Энокссон Л., Прикладной анализ временных рядов. Основные методы, пер. с англ., М., 1982; [8] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982; [9] Яглом А. М., Корреляционная теория случайных функций, Л., 1981; [10] Хэрис Ф. Дж., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектрон.», 1978, т. 66, № 1, с. 60–96; [11] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [12] Макс Ж., Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях, т. 1, М., 1983; [13] Паленскис В., Лаучюс Ю., Шоблицкас З., «Литов. физ. сб.», 1985, т. 25, № 3, с. 98–104; [14] Левин В. А., «Радиотехн. и электрон.», 1986, т. 31, № 3, с. 515–25; [15] Palmer D. F., «IEEE Trans on inform. Theory», 1969, v. IT–15, № 5, p. 613–15.

KORRELYASİON TƏNLİKLƏR « корреляционные уравнения; correlation equations » – *korrelyasion funksiyaları* bir-birilə əlaqələndirən xətti tənliklərdir. K. t. ilk dəfə N. N. Boqolyubov və B. İ. Xatset tərəfindən 1949-da ciddi surətdə çıxarılmışdır. Ümumiyyətlə, K. t.-in müxtəlif sistemlərinin çıxarılışı mümkündür, lakin bunlardan ən məşhur olan ikisidir: Kirkvud – Laltsburq tənliklər sistemi və Mayer – Montroll tənliklər sistemi. Konturlar üçün K. t. [3]-də 1-ci növ İzinq modelində faza keçidinin araşdırılmasında istifadə olunmuşdur. Bunlara yaxın K. t.-i V. A. Malışev klaster ayrılışının yığılmasının isbatında istifadə etmişdir.

Ədd.: [1] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И., «Докл. АН СССР», 1949, т. 66, № 3, с. 321–24; [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [3] Минлос Р. А., Синай Я. Г., «Труды Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 113–78; [4] Малышев В. А., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 3–53; [5] Малышев В. А., Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем, Дубна, 1983.

KORRELYASİON ÜSUL « корреляционный прием; correlation reception » – rabitə kanalı ilə ötürülən $S_i(t)$, $i = 1, ..., N$, $t \in [0, T]$ siqnalları eyni enerjiyə və küylərə malik olduğu halda bu siqnalların fərqləndirilməsi (dekodlanması) metodlarından biridir. $x(t)$, $t \in [0, T]$ prosesi müşahidə olunduqda, $S_m(t)$ siqnalının ötürülməsi haqqında qərar yalnız o halda qəbul olunur ki,

$$\int_0^T S_m(t)\, x(t)\, dt = \max_{i=1, ..., N} \int_0^T S_i(t)\, x(t)\, dt$$

bərabərliyi ödənilmiş olsun. Bu ifadədəki inteqralların hesablanması, impuls xarakteristikaları $S_i(T - \tau)$, $i = 1, ..., N$ olan uzlaşdırılmış xətti filtrlərin köməyilə reallaşır. Rabitə kanalında additiv Qauss bəyaz küyü olduqda və siqnalların aprior ehtimallar eyni olduqda K. ü. orta *səhv dekodlama ehtimalını* minimallaşdırır.

Ədd.: [1] Вудворд Ф. М., Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации, пер. с англ., М., 1955; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

KORRELYASİYA « корреляция; correlation » – *təsadüfi kəmiyyətlər* arasında asılılıqdır, ümumiyyətlə isə, ciddi funksional xarakterə malik olmayan asılılıqdır. Funksional asılılıqdan fərqli olaraq, K.-ya, bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətlərdən birinin digərindən asılı olduğu halda deyil, eyni zamanda bir sıra təsadüfi faktorlardan da asılı olduğu halda da baxılır. İki təsadüfi hadisə arasında asılılıq bunlardan birinin digərinə nəzərən şərti ehtimalının şərtsiz ehtimaldan fərqləndiyi halda aşkar olur. Analoji olaraq, bir təsadüfi kəmiyyətin digərinə təsiri bunlardan birinin digərinin qeyd olunmuş qiymətində şərti paylanmaları ilə xarakterizə olunur.

ξ və η – birgə paylanması ilə verilmiş, riyazi gözləmələri a_ξ və a_η, dispersiyaları σ_ξ^2 və σ_η^2, ξ və η arasındakı korrelyasiya əmsalı $\boldsymbol{\rho}$ olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Əgər hər bir mümkün ola bilən $\xi = x$ qiyməti üçün η təsadüfi kəmiyyətinin şərti riyazi gözləməsi – $y(x) = \mathbf{M}[\eta \mid \xi = x]$ kəmiyyəti təyin olunmuşdursa, onda $y(x)$ funksiyası – η kəmiyyətinin ξ üzrə *reqressiyası*, onun qrafiki – η-nın ξ üzrə r e q r e s s i y a ə y r i s i adlanır. Hər bir qeyd olunmuş $\xi = x$ qiymətində η kəmiyyəti müəyyən səpələnməyə malik təsadüfi kəmiyyət olduğuna baxmayaraq, η-nın ξ-dən asılılığı ξ-nin dəyişməsi ilə η-nın orta qiymətlərinin dəyişilməsində aşkar olunur. ξ-nin dəyişməsi ilə η-nın dəyişməsini reqressiyanın nə dərəcədə dəqiqliklə təyin edəcəyini müəyyənləşdirmək üçün verilmiş $\xi = x$ qiymətində η-nın şərti dispersiyasından və ya onun orta qiymətindən (η-nın reqressiya xətti ətrafında səpələnmə ölçüsüdən), yəni

$$\sigma_{\eta|\xi}^2 = \mathbf{M}[\eta - \mathbf{M}(\eta \mid \xi = x)]^2$$

kəmiyyətindən istifadə olunur. Əgər ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda η-nın bütün şərti riyazi gözləmələri x-dən asılı olmur və onun şərtsiz riyazi gözləmələri ilə üst-üstə düşür: $y(x) = a_\eta$ və bu halda $\sigma_{\eta|\xi}^2 = \sigma_\eta^2$ olur. η ξ-dən dəqiq funksional asılı olduğu halda, η kəmiyyəti hər bir verilmiş $\xi = x$ qiymətində yalnız bir müəyyən qiymət alır və $\sigma_{\eta|x}^2 = 0$ olur. η üzrə ξ kəmiyyətinin reqressiyası $x(y) = \mathbf{M}[\xi \mid \eta = y]$ bərabərliyi ilə analoji təyin olunur. Paylanmanın reqressiya əyrisi $y(x)$ ətrafında topalanmasının təbii göstəricisi

$$\rho_{\eta|\xi}^2 = 1 - \sigma_{\eta|\xi}^2 \big/ \sigma_\eta^2$$

korrelyasion nisbətidir. $\rho_{\eta|\xi}^2$ kəmiyyəti, yalnız və yalnız, o halda sıfra bərabər olur ki, $y(x)$ reqressiyası $y(x) = a_\eta$ şərtini ödəsin; bu halda K. əmsalı $\boldsymbol{\rho}$ sıfra bərabərdir və η kəmiyyəti ξ ilə korrelyar deyildir. Əgər η-nın ξ üzrə reqressiyası xəttidirsə, yəni reqressiya əyrisi

$$y(x) = a_\eta + \boldsymbol{\rho}\,\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\,(x - a_\xi)$$

düzxəttidirsə, onda

$$\sigma_{\eta|\xi}^2 = \sigma_\eta^2(1 - \boldsymbol{\rho}^2) \quad \text{və} \quad \rho_{\eta|\xi}^2 = \boldsymbol{\rho}^2$$

olur; lakin bundan başqa, $|\rho| = 1$ olarsa, η kəmiyyəti ξ ilə dəqiq xətti asılılıqla bağlıdır, əgər $\rho_{\eta|\xi}^2 = \boldsymbol{\rho}^2 < 1$ olarsa, onda η və ξ arasında funksional asılılıq yoxdur. η-nın ξ-dən xətti asılılıqdan fərqli olan dəqiq funksional asılılığı, yalnız və yalnız, o halda mümkündür ki, $\boldsymbol{\rho}^2 < \rho_{\eta|\xi}^2 = 1$ olsun. Asılılıq olmadığı halda, ölçü əvəzinə K. əmsalından yalnız o halda istifadə etmək doğrudur ki (nadir istisna ilə), ξ və η-nın birgə paylanması normal paylanma olsun (və ya normal paylanmaya yaxın olsun), belə ki, bu halda $\boldsymbol{\rho} = 0$ bərabərliyindən ξ və η-nın asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu alınır. İxtiyari ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün $\boldsymbol{\rho}$-nun asılılıq ölçüsü kimi istifadə olunması, əksər hallarda səhv nəticələrə gətirir, belə ki, təsadüfi kəmiyyətlər hətta funksional asılı olduqları halda belə, $\boldsymbol{\rho}$ sıfra bərabər ola bilər. Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanması normal paylanma olarsa, reqressiya əyrilərinin hər ikisi məhz düzxətlərdir və $\boldsymbol{\rho}$ reqressiya xətləri ətrafında paylanmanın sıxlaşmasını tamamilə təyin edir: $|\boldsymbol{\rho}| = 1$ olduqda reqressiya düzxətləri bir xəttə çevrilir, bu isə ξ və η-nın xətti asılılığına dəlalət edir, $\boldsymbol{\rho} = 0$ olduqda isə ξ və η-nın asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu ifadə edir.

Birgə paylanmaları ilə verilmiş bir neçə $\xi_1, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında əlaqənin öyrənilməsində toplam K. və xüsusi korrelyasiya münasibətləri və K. əmsallarından istifadə olunur. K. əmsalları ξ_i və ξ_j arasında adi K. əmsallarının köməyilə hesablanılır ki, bu K. əmsalları toplusundan k o r r e l y a s i o n m a t r i s təşkil olunur. ξ_1 ilə digər $\xi_2, ..., \xi_n$ toplusu arasında xətti asılılıq ölçüsü *toplam korrelyasiya əmsalı* (rus. множественный коэффициент корреляции) ilə ifadə olunur. Əgər ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin qarşılıqlı əlaqəsinin digər $\xi_3, \xi_4, ..., \xi_n$ kəmiyyətlərinin təsirilə təyin olunduğu fərz olunursa, onda ξ_1 və ξ_2 arasında xətti asılılıq göstəricisi $\xi_2, ..., \xi_n$ toplusunun təsiri istisna olunmaqla ξ_1 və ξ_2 kəmiyyətlərinin $\xi_2, ..., \xi_n$ toplusuna nəzərən *xüsusi korrelyasiya əmsalı* (rus. частный коэффициент корреляции) ilə təyin olunur.

Ranq statistikalarına əsaslanan K. ölçüləri haqqında: *Kendall əmsalı* r a n q k o r r e l y a s i y a s ı n ı n, *Spirmən əmsalı* r a n q k o r r e l y a s i y a s ı n ı n məqalələrinə bax.

Riyazi statistikada təsadüfi kəmiyyətlər və ya onların əlamətləri arasında K.-nı xarakterizə edən əmsalların qiymətləndirilmə metodları və bunların seçimi analoqlarını istifadə edən qiymətlər haqqında hipotezlərin yoxlanılması metodları işlənilmişdir. Bu metodlar toplusu k o r r e l y a s i o n a n a l i z adlanır. Statistik verilənlərin korrelyasion analizi aşağıdakı əsas praktiki prosedurlardan ibarətdir: 1) korrelyasion meydanın qurulması və korrelyasion cədvəlin tərtib olunması; 2) seçimi korrelyasion münasibətlərin və ya K. əmsallarının hesablanması; 3) asılılığın mühümlüyü haqqında statistik hipotezinin yoxlanılması. Sonrakı araşdırma kəmiyyətlər arasında asılılığın konkret şəklinin müəyyənləşdirilməsi ola bilər (bax, *Reqressiya*).

İkiölçülü seçimi verilənlərin analizində korrelyasion meydan və korrelyasion cədvəl köməkçi vasitələr kimi istifadə olunur. Seçimi nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd etdikdə k o r r e l y a s i o n m e y d a n alınır. Meydan nöqtələrinin yerləşmə xarakterinə görə təsadüfi kəmiyyətlərin asılılıq forması haqqında öncədən mülahizə yürütmək olar (məs., o haqda ki, bir kəmiyyət digərinin artması ilə ya orta mənada artır, ya da azalır). Nəticələrin ədədi işlənilməsi üçün onlar qruplaşdırılır və k o r r e l y a -

sion cədvəllər formasında tərtib olunur. Bu cədvəlin hər bir oyuğunda komponentləri hər bir dəyişən üzrə uyğun qruplaşma intervalına düşən (x, y) cütlərinin sayı n_{ij} ədədləri yerləşir. Qruplaşma (dəyişənlərdən hər birinə görə) intervallarının uzunluqlarını bir-birinə bərabər götürərək, bu intervalların mərkəzləri x_i -lər (uyğun olaraq y_i -lər) və hesablanma üçün əsas kimi n_{ij} ədədləri seçilir.

Kəmiyyətlər arasında əlaqənin xarakteri və gücü haqqında ən dəqiq informasiya korrelyasion əmsallar və korrelyasion nisbət kimi xarakteristikalara əsaslanır.

Seçimi korrelyasiya əmsalı

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})\, n_{ij}}{\sqrt{\sum_i n_{i.}(x_i - \bar{x})^2}\ \sqrt{\sum_j n_{.j}(y_j - \bar{y})^2}}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada

$$n_{i.} = \sum_j n_{ij}\,, \qquad n_{j.} = \sum_i n_{ij}$$

və

$$\bar{x} = \sum_i n_{i.}x_i/n\,, \quad \bar{y} = \sum_j n_{.j}y_j/n\,.$$

Normal qanuna yaxın eyni bir paylanmaya tabe olan asılı olmayan müşahidələr sayının böyük qiymətlərində $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ seçimi korrelyasion əmsalı əsl K. əmsalı $\boldsymbol{\rho}$ -ya çox yaxın olur. Digər bütün hallarda asılılıq dərəcəsinin xarakteristikası kimi $\rho_{\eta|\xi}$ korrelyasion nisbətindən istifadə etmək məsləhətdir, bu nisbətin interpretasiyası araşdırılan asılılığın hansı şəkildə olmasından asılı deyildir. $\hat{\rho}^2_{\eta|x}$ seçimi qiyməti korrelyasion cədvəlin köməyilə aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\hat{\rho}^2_{\eta|\xi} = \frac{\sum_i n_{i.}(y_i - \bar{y})^2/n}{\sum_j n_{.j}(y_j - \bar{y})^2/n}\,,$$

burada surət $\bar{y}_i$ şərti orta qiymətlərinin şərtsiz orta $\bar{y}$ qiymətləri ətrafında səpələnməsini xarakterizə edir ($\hat{\rho}^2_{\xi|\eta}$ seçimi qiyməti analoji təyin olunur). $\hat{\rho}^2_{\eta|\xi} - \hat{\boldsymbol{\rho}}^2$ kəmiyyəti reqressiyanın xətti reqressiyadan yayınma indikatoru kimi istifadə olunur.

Asılılığın mühümlüyü hipotezinin yoxlanılması seçimi korrelyasion xarakteristikaların paylanmalarına əsaslanır. Normal paylanma halında seçimi korrelyasiya əmsalı $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ -nun qiyməti,

$$(\tilde{\boldsymbol{\rho}})^2 > [1 + (n-2)/t^2_\alpha]^{-1}$$

bərabərsizliyi ödənildiyi halda, sıfırdan olduqca fərqli olur, burada t_α – seçilmiş mühümlük ölçüsü α -ya uyğun, sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-2)$ -yə bərabər Styudent t – paylanmasının kritik qiymətidir. $\rho \neq 0$ olduqda, adətən, Fişer z – çevirməsindən, yəni $\boldsymbol{\rho}$ kəmiyyətini

$$z = \frac{1}{2}\ \ln\frac{1+\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{1-\boldsymbol{\rho}}$$

düsturu ilə z -lə əvəzləmədən istifadə olunur. n -in çox da böyük olmayan qiymətlərində z kəmiyyətinin paylanması, riyazi gözləməsi

$$\frac{1}{2}\ \ln\frac{1+\boldsymbol{\rho}}{1-\boldsymbol{\rho}} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2(n-1)}\,,$$

dispersiyası $1/(n-3)$ olan normal paylanmaya yaxşı yaxınlaşır. Buna əsaslanaraq, əsl K. əmsalı $\boldsymbol{\rho}$ üçün təqribi intervallar təyin etmək olur.

Seçimi korrelyasion nisbətin paylanması haqqında və reqressiyanın xətti olub-olmaması haqqında hipotezin yoxlanılması üsulları haqqında bax, [3].

Əd.: [1] Kramer Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

KORRELYASİYA ƏMSALI « корреляции коэффициент; correlation coefficient » – iki təsadüfi kəmiyyətin birgə paylanmasının ədədi xarakteristikası olub, onların birbirilə asılılığını ifadə edir. ξ_1 və ξ_2 – riyazi gözləmələri uyğun olaraq, $a_1 = \mathbf{M}\xi_1$ və $a_2 = \mathbf{M}\xi_2$, dispersiyaları sıfırdan fərqli $\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi_1$ və $\sigma_2^2 = \mathbf{D}\xi_2$ olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin K. ə. $\boldsymbol{\rho} = \rho(\xi_1, \xi_2)$

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\mathbf{M}(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

düsturu ilə təyin olunur. ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin K. ə. $(\xi_1 - a_1)/\sigma_1$ və $(\xi_2 - a_2)/\sigma_2$ normalanmış təsadüfi kəmiyyətlərinin *kovariasiyası* ilə üst-üstə düşür.

K. ə. ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinə görə simmetrikdir və başlanğıc və miqyasının dəyişməsinə nəzərən invariantdır. Bu halda $-1 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 1$. Qarşılıqlı asılılığın mümkün ölçülərindən biri kimi K. ə.-nın qiyməti aşağıdakı xassələrlə təyin olunur: 1) əgər ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$ (tərs müddəa ümumi halda doğru deyildir), $\rho = 0$ olan kəmiyyətlərə qeyri–korrelyardır, deyilir; 2) $|\rho| = 1$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, təsadüfi kəmiyyətlərin xətti funksional asılılığı:

$$\xi_2 = \boldsymbol{\rho}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\xi_1 - a_1) + a_2$$

şərti ödənildikdə doğrudur. $\boldsymbol{\rho}$ kəmiyyətinin qarşılıqlı asılılıq ölçüsü kimi interpretasiyasının çətinliyi onunla izah olunur ki, $\boldsymbol{\rho} = 0$ bərabərliyi eyni zamanda həm asılı, həm də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün də ödənilə bilinir; ümumi halda, təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığı üçün bu təsadüfi kəmiyyətlərin *maksimal korrelyasiya əmsalının* sıfra bərabər olması zəruri və kafidir. Beləliklə, K. ə. təsadüfi kəmiyyətlər arasında olan bütün asılılıq növlərini əhatə etmir və o, yalnız xətti asılılıq ölçüsüdür. Bu halda xətti asılılıq dərəcəsi aşağıdakı kimi xarakterizə olunur:

$$\hat{\xi}_2 = \boldsymbol{\rho}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\xi_1 - a_1) + a_2$$

kəmiyyəti ξ_2 təsadüfi kəmiyyətinin ξ_1 üzrə ən yaxşı ifadəsidir, dedikdə

$$\mathbf{M}(\xi_2 - \hat{\xi}_2)^2 = \min_{C_1, C_2} \mathbf{M}(\xi_2 - C_1\xi_1 - C_2)^2$$

münasibətinin doğru olduğu anlaşılmalıdır (bax, *Reqressiya*).

Bir neçə təsadüfi kəmiyyət arasında korrelyasiya xarakteristikaları *xüsusi korrelyasiya əmsalı* və *toplam korrelyasiya əmsalı* kimi kəmiyyətlərdir.

KORRELYASİYA FUNKSİYASI « корреляции функция; correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

KORRELYASİYA RADİUSU « корреляции радиус; correlation distance » – fəza üzrə bircins $X(\mathbf{r})$ *təsadüfi meydanının*

$$B(r) = B(\mathbf{r}) =$$
$$= \mathbf{M}\,[X(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}) - \mathbf{M}\,X(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r})]\,[X(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{M}\,X(\boldsymbol{\rho})]$$

düsturu ilə təyin olunan fəza korrelyasion funksiyasının, $r = |\mathbf{r}|$ məsafəsi artdıqca azalma sürətinin ədədi xarakteristikasıdır. K. r. ya $B(r_0) = B(0)/k$ bərabərliyinin ödənilməsini təmin edən ən kiçik r_0 məsafəsi kimi (burada k – əvvəlcədən seçilmiş ədəddir, məs., $k = e$ və ya $k = 10$), ya da ki,

$$r_1 = (1/B(0)) \int_0^\infty B(r)\,dr$$

məsafəsi kimi təyin olunur (bu halda r_1 korrelyasiyanın inteqral miqyası adlanır). Tez-tez istifadə olunan korrelyasiya funksiyası $B(r) = C\exp\{-r/r_0\}$ üçün ($k = e$ olduğu halda) hər iki tərəf üst-üstə düşür. Praktikada K. r. yalnız mənfi olmayan $B(\mathbf{r})$ funksiyaları üçün $B(\mathbf{r})$ funksiyasının bütün dəyişikliyinin münasib sayılan xarakteristikasıdır. Anizotrop təsadüfi meydanlar üçün $B(\mathbf{r})$ korrelyasion funksiyası $\mathbf{r}$ vektorunun istiqamətindən asılıdır, buna görə də, K. r. istiqamətdən də asılıdır və bu asılılıq anizotropluq xarakteristikası kimi də istifadə oluna bilinər.

Əd.: [1] Гандин Л. С., Каган Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976.

KORRELYATOR « коррелятор; correlator » – bax, *Korrelometr.*

KORVİN QRUPU « Корвина группа; Korvin group » – bax, *Xarakterizasion teoremlər* Abel qruplarında ehtimal paylanmaları üçün.

KOSİNOR – ANALİZ « косинор – анализ; cosinor analysis » («kosinus» və «normal» sözlərindən) – eksperimental əyrilərin $y = A\cos(\omega t - \alpha)$ şəklində tənliklərin qrafiklərinə kvadratik orta yaxınlaşma metodlarının və verilənlərin xətalarının normal paylanmaya malik olduğu fərziyyəsi ilə, verilən hüdudlu etibarlı oblastların qurulması metodlarının toplusudur.

KOSPEKTR VƏ KVADRATUR SPEKTR « коспектр и квадратурный спектр; cospectrum and quadrum spectrum », kospektral sıxlıq və kvadratur spektral sıxlıq, – r – ölçülü stasionar təsadüfi $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), ..., \zeta_r(t)\}^{\mathsf{T}}$ prosesinin iki $\zeta_j(k)$ və $\zeta_k(t)$ komponentlərinin *spektral sıxlığı* $f_{jk}(\lambda)$-nın, $-\infty < \lambda < \infty$, uyğun həqiqi və xəyali hissələridir, $k \neq j$, $1 \leq j,\ k \leq r$. Kospektr $c_{jk}(\lambda) = \mathrm{Re}\, f_{jk}(\lambda)$, $j \neq k$ – cüt funksiya, kvadratur spektr $q_{jk}(\lambda) = \mathrm{Im}\, f_{jk}(\lambda)$, $j \neq k$ – tək funksiyadır. Əgər qarşılıqlı kovariasion $B_{jk}(t)$ funksiyası

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |B_{jk}(t)|\,dt < \infty \quad \text{(kəsilməz zaman üçün)} \\ \text{və ya} \\ \displaystyle\sum_{t=-\infty}^{\infty} |B_{jk}(t)| < \infty \quad \text{(diskret zaman üçün)} \end{array}\right\} \qquad (*)$$

şərtini ödəyərsə, onda K. və k. s., uyğun olaraq, aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$c_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) + B_{jk}(-t)]\cos\lambda t\,dt\ ,$$

$$q_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) - B_{jk}(-t)]\sin\lambda t\,dt$$

(kəsilməz zaman üçün) və

$$c_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{t=-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) + B_{jk}(-t)]\cos\lambda t,$$

$$q_{jk}(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{t=-\infty}^{\infty} [B_{jk}(t) - B_{jk}(-t)]\sin\lambda t$$

(diskret zaman üçün). (*) şərti ödənildikdə K. və k. s. kospektral funksiya $C_{jk}(\lambda)$ və kvadratur spektral funksiya $Q_{jk}(\lambda)$ vasitəsilə aşağıdakı şəkildə ifadə olunur; $c_{jk}(\lambda) = C'_{jk}(\lambda)$, $q_{jk}(\lambda) = Q'_{jk}(\lambda)$. $C_{jk}(\lambda)$ və $Q_{jk}(\lambda)$ mütləq kəsilməz funksiyalar olub, qarşılıqlı spektral $F_{jk}(\lambda)$ funksiyasının həqiqi və xəyali hissələridir: $C_{jk}(\lambda) = \mathrm{Re}\, F_{jk}(\lambda)$, $Q_{jk}(\lambda) = \mathrm{Im}\, F_{jk}(\lambda)$.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1980; [2] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [3] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 2, М., 1972.

KOSPEKTRAL FUNKSİYA « коспектральная функция; cospectral function » – bax, *Kospektr və kvadratur spektr.*

KOSPEKTRAL SIXLIQ « коспектральная плотность; cospectral density » – bax, *Kospektr və kvadratur spektr*.

KOŞİ PAYLANMASI « Коши распределение; Cauchy distribution » – paylanma sıxlığı (bax, şəkil)

$$p(x; \lambda, \mu) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2}$$

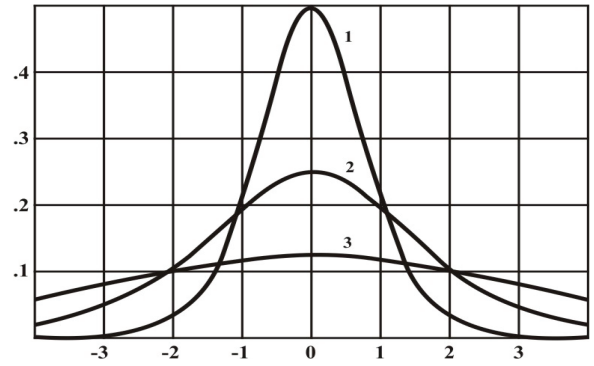
olan, $(-\infty, \infty)$-da topalanmış, kəsilməz ehtimal *paylanmasıdır.* Paylanma funksiyası

$$F(x;\lambda,\mu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-\mu}{\lambda}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ parametrlərdir. K. p. dedikdə bəzən $\mu=0$ olduğu hal anlaşılır. K. p. unimodal paylanmadır və bu paylanmanın moda və mediani olan $x=\mu$ nöqtəsinə görə simmetrikdir. Xarakteristik funksiyası $f(t)=e^{i\mu t-\lambda|t|}$ düsturu ilə təyin olunur. Tam müsbət tərtib momentləri, o cümlədən, riyazi gözləməsi yoxdur. K. p. sinfi xətti çevirmələrə nəzərən qapalıdır: əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti λ və μ parametrlərli K. p. ilə paylanmışdırsa, onda $\eta=a\xi+b$, $a\neq 0$ təsadüfi kəmiyyəti $\lambda'=|a|\lambda$ və $\mu'=a\mu+b$ parametrlərli K. p. ilə paylanmışdır. K. paylanmaları sinfi kompozisiya əməlinə görə qapalıdır:

$$p(x;\lambda_1,\mu_1)*\ldots*p(x;\lambda_n,\mu_n)=$$
$$=p(x;\lambda_1+\ldots+\lambda_n,\ \mu_1+\ldots+\mu_n),\qquad (*)$$

yəni K. p.-na malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanması da K. p.-dır.



$\mu=0$ və (1) $\lambda=0{,}5$; (2) $\lambda=1$; (3) $\lambda=2$ olduqda Koşi paylanmasının sıxlıq funksiyaları

Normal paylanma kimi Koşi paylanması da *dayanıqlı paylanmalar* sinfinə aiddir: K. p. göstəricisi 1-ə bərabər simmetrik dayanıqlı paylanmadır. (*) münasibətindən alınan nəticə K. p.-nın aşağıdakı xassəsidir: əgər $\xi_1,\ldots,\xi_n$ eyni K. p.-na malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(\xi_1+\ldots+\xi_n)/n$ ədədi ortası da hər bir X_k kəmiyyəti ilə eyni K. p.-na malik olur. K. p.-nın daha bir səciyyəvi xüsusiyyəti vardır ki, təsadüfi kəmiyyətlər asılı olduqda belə onların cəminin paylanması da (*) düsturu ilə verilir; yəni əgər ξ və η asılı olmayan, eyni K. p.-na malik təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi+\xi$ və $\xi+\eta$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni K. p.-na malik olur. Parametrləri $\lambda=1$ və $\mu=0$ olan K. p. Sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər Styudent paylanmasıdır. (λ,μ) parametrlərli K. p. $(0,\lambda^2)$ parametrlərli normal paylanmaya malik ξ və $(0,1)$ parametrlərli normal paylanmaya malik η asılı olmayan kəmiyyətlərilə ifadə olunan $\mu+\xi/\eta$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə üst-üstə düşür. Əgər ξ $[-\pi/2,\ \pi/2]$ parçasında müntəzəm paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\mu+\lambda\operatorname{tg}\xi$ funksiyası da belə K. p.-na malikdir. Əgər ξ K. p.-na malik təsadüfi kəmiyyət və $\lambda^2(\mu^2+\pi^2/4)=1$ olarsa, onda ξ^{-1} də eyni (λ,μ) parametrlərli K. p. ilə paylanır. Vahiddən böyük dim. – ölçülü fəzalarda da K. p. analoji təyin olunur.

$\mu=0$ halında K. p.-na ilk dəfə S. Puasson tərəfindən [2]-də baxılmışdır. O. Koşinin adı ilə adlandırılma aşağıdakı surətdə yaranmış tarixi bir səhvdir.

$p(x;\lambda,0)$ funksiyasına

$$\int e^{itx}\,p(x;\lambda,0)\,dx=\exp(-\lambda|t|)$$

Furye çevirməsi uyğundur. O. Koşi elə $g(x;\lambda,\alpha)$ funksiyası araşdırmışdır ki, onların Furye çevirmələri $\exp(-\lambda|t|^{\alpha})$, $\lambda>0$, $\alpha>0$ şəklindədir. Bunlar **Koşi funksiyaları** adlandırılmışdır. Bu funksiyalardan hansılarının sıxlıq funksiyaları olduğu ($\alpha=1$ və $\alpha=2$ halından başqa, belə ki, bu hallar normal qanuna uyğundur) yalnız 20-ci əsrin əvvəllərində D. Poyanın (G. Polya, $0<\alpha<1$) və P. Levinin (P. Lèvy, $1<\alpha<2$) işlərilə əlaqədar aydın olmuşdur. Məhz Koşi funksiyalarının bu hissəsi Koşi paylanması adlandırılmışdır. Lakin P. Levi *dayanıqlı paylanmalar* sinfini daxil etdikdən sonra K. p. termini yalnız $\alpha=1$ halı üçün qəbul olundu.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, M., 1984; [2] Poisson S. D., Surla probabilité des résultat meyons des observation, P., 1832; [3] Cauchy A. L., «C. r. Acad. sci.», 1853, t. 37, p. 198.

KOŞİ – BUNYAKOVSKİ BƏRABƏRSİZLİYİ « Коши – Буняковского неравенство; Cauchy – Bunyakovsky inequality » – bax, *Bunyakovski bərabərsizliyi.*

KOTELNİKOV TEOREMİ « Котельникова теорема; Kotelnikov / sampling theorem »: $[-F,\ F]$ tezliklər zolağında topalanmış, məhdud spektrli $f(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$ kəsilməz funksiyasının ayrılışı

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k\Delta)\,\frac{\sin 2\pi F(t-k\,\Delta)}{2\pi F(t-k\Delta)},\ \Delta=1/2F$$

düsturu ilə ifadə oluna bilinər.

K. t. tam funksiyaların approksimasiyası məsələsi ilə sıx əlaqədidir (bax, [2]). K. t. texnikada və kəsilməz məlumatların ötürülməsi nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır, belə ki, minimal diskretizasiya tezliyini ($1/(2F)$) müəyyənləşdirməyə imkan yaradır və bu halda ilkin $f(t)$ məlumatı haqqında informasiyanın əsas hissəsi bu minimal tezlikdə $f(k/2F)$, $k=0,\pm1,\ldots$ hesabatlarında əks olunur.

Əd.: [1] Котельников В. А., О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи, M., 1933 («Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности»); [2] Хургин Я. И., Яковлев В. П., Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, M., 1962.

KOTELNİKOV – ŞENNON DÜSTURU « Котельникова – Шеннона формула; Kotelnikov – Shannon formula » – bax, *Diskretizasiya problemi*.

KOVARİASİON ANALİZ « ковариационный анализ; analysis of covariance » – hər hansı Y təsadüfi kəmiyyətinin orta qiymətinin qeyri – kəmiyyəti F faktorlarının toplusu və eyni zamanda x kəmiyyət faktorlarının toplusundan asılılıq modellərinin analizinə aid, riyazi statistika metodlarının toplusudur. x dəyişənləri Y -ə nəzərən müşayiətedici dəyişənlər adlanır; F faktorları keyfiyyətli təbiətlilik (mahiyyəti) şərtlərinin birləşməsini təyin edir ki, Y və x müşahidələrinin bunların nəticəsində alındığı fərz olunur və bu faktorlar indikator dəyişənləri adlandırılan dəyişənlər vasitəsilə təsvir olunur; əgər Y təsadüfi kəmiyyəti vektor olarsa, onda çoxölçülü K. a.-dən söhbət gedir.

K. a.-in əsas nəzəri və tətbiqi problemləri xətti modellərə aiddir. Xüsusilə də, əgər n sayda $Y_1, \dots, Y_n$ müşahidələrindən ibarət sxem analiz olunursa, müşayiətedici dəyişənlərin sayı p, eksperimentin şərtlərinin mümkün tipləri k sayda olarsa, onda K. a.-ə uyğun xətti model

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} f_{ij}\theta_j + \sum_{s=1}^{p} \beta_s(F_i)x_i^{(s)} + \varepsilon_i(F_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

tənlikləri ilə verilir, burada əgər eksperimentin j -ci şərti Y_i müşahidəsinə uyğun olmuşsa, indikator dəyişənləri f_{ij} -lər 1 -ə bərabər, əks halda isə 0-a bərabər götürülür; θ_j əmsalları j -ci şərtin təsviri effektini təyin edirlər; $x_i^{(s)}$ – müşayiətedici $x^{(s)}$ dəyişəninin elə qiymətidir ki, bu qiymətdə Y_i müşahidəsi alınmışdır, $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, p$; $\beta_s(F_i)$, – Y -in $x^{(s)}$ üzrə uyğun reqressiya əmsallarının qiymətləridir və bunlar, ümumiyyətlə, eksperimentin şərtlərinin konkret birləşməsindən, yəni $F_i = (f_{i1}, \dots, f_{ik})$ vektorundan asılıdırlar; $\varepsilon_i(F_i)$ orta qiymətləri sıfra bərabər təsadüfi xətalardır. K. a.-in əsas mahiyyəti naməlum $\theta_1, \dots, \theta_k$ parametrləri üçün statistik qiymətlərin qurulması; bu parametrlərin qiymətlərinə görə müxtəlif hipotezlərin yoxlanılması üçün $\beta_1, \dots, \beta_p$ və statistik kriterilərin qurulmasıdır.

Əgər (*) modelində apriori $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$ olduğu qəbul edilərsə, onda *dispersion analiz* modeli alınır; əgər (*)-da qeyri – kəmiyyəti faktorların təsiri nəzərə alınmazsa (yəni $\theta_1 = \dots = \theta_k = 0$ götürülərsə), onda *reqression analiz* modeli alınır. K. a. adı onunla əlaqədardır ki, burada hesablamalarda Y və x kəmiyyətlərinin kovariasiyasının ayrılışlarından dispersion analizdə olduğu kimi Y -in yayınmalarının kvadratları cəminin ayrılışları istifadə olunur.

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] «Biometrics», 1957, v. 13, № 3.

KOVARİASİON FUNKSİYA « ковариационная функция; covariance function » – bax, *Korrelyasion funksiya*, *Momentlər funksiyası*, *Spektral sıxlıq*(ğ ı) stasionar təsadüfi prosesin.

KOVARİASİON FUNKSİYA qarşılıqlı **« ковариационная функция** взаимная; **crosscovariance function »** – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya.*

KOVARİASİON FUNKSİYA seçimi **« ковариационная функция** выборочная; sample **covariance function »** – bax, *Seçimi korrelyasion funksiya.*

KOVARİASİON MATRİS « ковариационная матрица; covariance matrix », kovarians matris – elementləri təsadüfi vektorun komponentlərinin cüt-cüt *kovariasiyaları* olan matrisdir. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n – ölçülü təsadüfi vektor olsun. $X_1, \dots, X_n$ komponentlərinin dispersiyalarının sonlu olduğu fərz olunur. Elementləri $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, – X_i və X_j təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyaları olan

$$\Xi = \left\| \sigma_{ij} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, n$$

kvadrat matrisinə kovariasion matris deyilir. Ξ -nın baş diaqonalının elementləri X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin dispersiyalarına bərabərdir.

K. m. simmetrik müsbət müəyyən martisdir, belə ki, o, yalnız və yalnız, o halda müsbət müəyyən matrisdir ki, X -in cırlaşmayan paylanması olsun. K. m., yalnız və yalnız, o halda diaqonal matrisdir ki, təsadüfi vektorun komponentləri cüt-cüt qeyri – korrelyardır. Hər bir simmetrik müsbət müəyyən n tərtib matris n – ölçülü normal paylanmaya malik hər hansı təsadüfi vektorun K. m.-idir.

Təsadüfi vektorlar üçün K. m. təsadüfi kəmiyyətlər üçün dispersiyanın oynadığı rolu oynayır. Bu matris bəzən ikinci momentlər matrisi adlandırılır.

K. m. anlayışı *korrelyasion matris* anlayışı ilə sıx bağlıdır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

KOVARİASİON MATRİS; spektral ayrılış **« ковариационная матрица** спектральное разложение; spectral decomposition of **covariance matrix »** – Ξ *kovariasion matrisinin*

$$\Xi = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^{\mathrm{T}} + \dots + \lambda_p \alpha_p \alpha_p^{\mathrm{T}}$$

şəklində ifadəsidir, burada $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, – Ξ -nın məxsusi ədədləri, $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ – bunlara uyğun məxsusi vektorlardır.

Əd.: [1] Jolliffe I., Principal Component Analysis, N. Y., 1986.

KOVARİASİON OPERATOR(u) ehtimal ölçüsünün **« ковариационный оператор** вероятностной меры; **covariance operator** of a probability measure**»** – təsadüfi kəmiyyətin *dispersiyası* anlayışının analoqudur. $\mathbb{B}$ – həqiqi separabel Banax fəzası, μ – zəif ikinci tərtibə malik, yəni ixtiyari $b^* \in \mathbb{B}^*$ xətti kəsilməz funksionalı üçün

$$\int [b^*(x)]^2 \, d\mu(x) < +\infty$$

şərtini ödəyən ehtimal ölçüsü olsun. $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{B}^*$ olduqda

$$b_1^*(R_\mu b_2^*) = \int b_1^*(x)\, b_2^*(x)\, d\mu(x) - \int b_1^*(x)\, d\mu(x) \int b_2^*(x)\, d\mu(x) \quad (*)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan və μ ölçüsünün kovariasion operatoru adlanan, yeganə $R_\mu : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ xətti kəsilməz operatoru vardır.

Zəif ikinci tərtibə malik ehtimal ölçülü təsadüfi X elementinin K. o. R_X onun ehtimal paylanmasının K. o. kimi təyin olunur. Başqa sözlə, $R_X : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ yeganə surətdə

$$b_1^*(R_X b_2^*) = \mathbf{M} b_1^*(X)\, b_2^*(X) - \mathbf{M} b_1^*(X)\, \mathbf{M} b_2^*(X),$$
$$b_1^*,\ b_2^* \in \mathbb{B}^*$$

münasibətilə təyin olunan xətti kəsilməz operatordur.
K. o.-un tərifindən aşağıdakı xassələr alınır.

1) K. o. simmetrik və müsbətdir, yəni bütün $b_1^*,\ b_2^* \in \mathbb{B}^*$ üçün

$$b_1^*(Rb_2^*) = b_2^*(Rb_1^*),\ \ b_1^*(Rb_1^*) \geq 0.$$

2) Əgər X və Y təsadüfi elementlər (zəif ikinci tərtibli) və α, β həqiqi ədədlərdirsə, onda

$$R_{\alpha X + \beta Y} = \alpha^2 R_X + \beta^2 R_Y + \alpha\beta(R_{XY} + R_{XY}^*),$$

burada R_{XY}, – X və Y elementlərinin *qarşılıqlı kovariasiya operatoru*, R_{XY}^*, – R_{XY} -ə qoşma operatordur. Məs., iki asılı olmayan təsadüfi elementlər cəminin K. o. (iki ehtimal ölçüsünün kompozisiyasının) uyğun K. o.-larının cəminə bərabərdir.

3) Əgər X – $\mathbb{B}$ -də zəif ikinci tərtibli təsadüfi element və A – $\mathbb{B}$ -dən $\mathbb{B}_1$ -ə xətti kəsilməz inikasdırsa, onda $R_{AX} = AR_X A^*$ doğrudur, burada A^*, – A -ya qoşma operatordur.

K. o. üçün aşağıdakı xassə də doğrudur (faktorizasiya lemması): ixtiyari R K. o.-u üçün elə Hilbert fəzası H və elə $A : H \to \mathbb{B}$ xətti kəsilməz operatoru vardır ki, $R = AA^*$ və AH $\mathbb{B}$ -də sıxdır.

K. o.-un tərifi və əsas xassələri daha ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəzaları üçün də öz qüvvəsində qalır (bax, [5]). Qeyri – separabel fəza halında K. o. R_μ qoşma fəzanın ikinci bir qoşma fəzaya inikası kimi təyin olunur. Lakin, əgər μ *Radon ölçüsü* olarsa, onda $R_\mu \mathbb{B}^* \subset \mathbb{B}$ olur.

K. o. ilk əvvəl separabel Hilbert fəzasında güclü ikinci tərtib ölçülər (yəni $\int \|x\|^2\, d\mu(x) < \infty$ xassəli) halı üçün təyin və istifadə olunmuşdur; bu halda R_μ nüvə operatorudur (bax, [1], [2]). Ümumi halda, zəruri olan zəif ikinci tərtib xassənin təbii olaraq ödənilməsi ilə təyin olunan K. o.-lar sinfi daha genişdir. $\mathbb{B}$ ixtiyari separabel Banax fəzası olduğu halda bu sinif $\mathbb{B}^*$ -dan $\mathbb{B}$ -yə xətti simmetrik mənfi olmayan bütün inikasların sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [3], [4]).

Bəzən yuxarıda təyin olunmuş K. o.-dan fərqlənən K_μ və ya K_X K. o. anlayışına da təsadüf olunur və onun təyin olunmasında mərkəzlənmə edilmir və (*)-nun əvəzinə K_μ üçün

$$b_1^*(K_\mu b_2^*) = \int b_1^*(x) b_2^*(x)\, d\mu(x)$$

münasibəti təyinedici olur, burada $b_1^*, b_2^* \in \mathbb{B}^*$; əgər μ ölçüsü mərkəzləndirilmişsə, $K_\mu = R_\mu$ olur (çünki bu halda $\int b^*(x)\, d\mu(x) = 0$ bərabərliyi bütün $b^* \in \mathbb{B}^*$ üçün doğrudur).

Əd.: [1] Mourier E., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1953, t. 19, p. 161–244; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [3] Вахания Н. Н., Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тб., 1971; [4] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 1, с. 3–26.

KOVARİASİON PƏNCƏRƏ « ковариационное окно; lag window » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət.

KOVARİASİYA « ковариация; covariance » – dispersiyaları sonlu olan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü *paylanmasının* ədədi xarakteristikasıdır,

$$\operatorname{cov}(X_1,\ X_2) = \mathbf{M}\,[(X_1 - \mathbf{M}X_1)(X_2 - \mathbf{M}X_2)]$$

düsturu ilə təyin olunur. K. üçün aşağıdakı xassələr doğrudur:

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1),\ \ \operatorname{cov}(X,\ X) = \mathbf{D}X.$$

İxtiyari iki təsadüfi kəmiyyət cəminin dispersiyası K. vasitəsilə

$$\mathbf{D}(X_1 + X_2) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər X_1 və X_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$. Lakin $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$, yəni X_1, X_2 qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər olduqda, ümumiyyətlə, X_1 və X_2 -nin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu hökm etmək olmaz. Lakin normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin qeyri – korrelyar olmasından onların asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu alınır. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cüt-cüt qeyri – korrelyarlığı böyük ədədlər qanununun Çebışev formasının ödənilməsi üçün kafi şərtdir: yəni ixtiyari ε üçün və $n \to \infty$ olduqda və $\mathbf{D}X_i$ müntəzəm məhdud olarsa,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{\mathbf{M}X_1 + ... + \mathbf{M}X_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \to 0$$

münasibəti doğrudur. *Korrelyasiya əmsalı* K. vasitəsilə təyin olunur.

Riyazi statistikada K.-nın statistik qiyməti kimi

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)} - \overline{X}_1)(X_2^{(i)} - \overline{X}_2)$$

düsturu ilə hesablanan seçimi kovariasiyadan istifadə olunur, burada $(X_1^{(i)},\ X_2^{(i)}),\ i = 1, 2, ..., n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\overline{X}_1$ və $\overline{X}_2$ – ədədi ortalardır.

KOVARİASİYA(sı) təsadüfi qapalı çoxluğun **« ковариация** случайного замкнутого множества; **covariance** of random closed set**»**, A t. q. ç.-nun K. elə cov_A funksiyasıdır ki, S baza fəzasının x_1, x_2 nöqtələri cütünə (bax, *Təsadüfi çoxluq*)

$$\operatorname{cov}_A(x_1, x_2) = \mathbf{P}(\{x_1,\ x_2\} \subset A) =$$

$$= T_A(\{x_1\}) + T_A(\{x_2\}) - T_A(\{x_1,\ x_2\})$$

kəmiyyətini qarşı qoyur, T_A A təsadüfi çoxluğunun *müşayiətedici funksionalıdır*. Təsadüfi qapalı çoxluğun kovariasiyası, mahiyyətcə, təsadüfi A çoxluğunun *nöqtəvi paylanma qanunu ilə* təyin olunur. Əgər S vektor fəza və A stasionar olarsa (bax, *Stasionar təsadüfi çoxluq*), onda cov_A yalnız $(x_1 - x_2)$ fərqindən asılı olur. Bu halda $C_A(h) = \operatorname{cov}_A(x,\ x+h)$ funksiyası A çoxluğunun stasionar kovariasiyası adlanır.

KOVARİASİYA, XÜSUSİ KOVARİASİYA FUNKSİYASI « ковариации частной функция; partial covariance function » – bax, *Avtokorrelyasiya funksiyası*, *xüsusi*.

KÖÇÜRTMƏ – QOŞMA MƏSƏLƏSİ « переноса сопряженная задача; transfer dual problem » – bax, *Qoşma köçürtmə məsələsi*.

KÖÇÜRTMƏ MƏSƏLƏSİ; statistik modelləşdirmə **« переноса задача;** статистическое моделирование; **transfer problem;** statistical simulation of the **»** – bax, *Statistik modelləşdirilmə*(si) köçürtmə məsələlərinin.

KÖÇÜRTMƏ TEOREMİ « переноса теорема; transfer theorem »: əgər hər bir natural n ədədi üçün ν_n, X_{nk}, $k = 1,\ 2, \ldots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, ν_n – tam mənfi olmayan qiymətlər alarsa, X_{nk}, $k = 1, 2, \ldots$ eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\nu_n} X_{nk} < x \right\} \xrightarrow{w} \Psi(x) \qquad (*)$$

(zəif yığılma) olarsa, elə qeyri – məhdud artan $\{k_n\}$ natural ədədlər ardıcıllığı vardır ki, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\nu_n} X_{nk} < x \right\} \xrightarrow{w} \Phi(x),\ \mathbf{P}\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} < x \right\} \xrightarrow{w} F(x)$$

münasibətləri doğrudur.

Ψ və Φ paylanma funksiyalarına uyğun ψ və φ xarakteristik funksiyaları bir-birilə və $F(x)$ paylanma funksiyası ilə

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t)\, dF(x)$$

düsturu ilə əlaqəlidirlər.

K. t. [1]-də isbat olunmuşdur. Bu teoremə qədər çox da ümumi xarakter daşımayan analoji müddəalar olmuşdur. [2]-də təsadüfi sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin toplananlar sayı ilə toplananlar asılı olmadığı hallar üçün limit teoremlərinin xülasəsi verilmişdir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Фахим Г., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 1, с. 15–17; [2] Круглов В. М., Королев В. Ю., Предельные теоремы для случайных сумм, М., 1990.

KÖK(ü) təsadüfi ağacın **« корень** случайного дерева; **root** of a random tree **»** – bax, *Təsadüfi ağac*.

KÖKLƏRİ – KOMPAKT QRUP « корне – компактная группа; root compact group » – aşağıdakı şərtləri ödəyən lokal kompakt G qrupudur: ixtiyari natural n və ixtiyari kompakt $C \subset G$ qrupu üçün elə $C_n \subset G$ kompakt qrupu vardır ki, $x_n = e$ olduqda və bütün $i + j \le n$ üçün $Cx_i Cx_j \cap Cx_{i+j} \neq \varnothing$ şərti ödənildikdə G-dəki bütün sonlu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ardıcıllıqlar C_n-ə daxildirlər. Əgər ixtiyari kompakt $C \subset G$ üçün elə kompakt $C_0 \subset G$ varsa ki, ixtiyari natural n üçün G-dəki bütün sonlu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ardıcıllıqları üçün $x_n = e$ və $Cx_i Cx_j \cap Cx_{i+j} \neq \varnothing$ şərtləri bütün $i + j \le n$ üçün ödənildikdə, bu ardıcıllıqlar C_0-a daxil olsun, G qrupu güclü kökləri – kompakt qrup adlanır. Hər bir güclü kökləri – kompakt qrup kökləri – kompakt qrupdur, lakin tərsi doğru deyildir.

KÖRPÜ, Braun körpüsü **« мост** броуновский; Brownian **bridge »** – bax, *Viner körpüsü*.

KRAFT – MAK-MİLLAN BƏRABƏRSİZLİYİ « Крафта – Мак-Миллана неравенство; Kraft – Mac Millan inequality » – bax, *Kod*.

KRAMER BƏRABƏRSİZLİYİ « Крамера неравенство; Cramer inequality » xarakteristik funksiya üçün – *xarakteristik funksiyanın* modulunun $|t| \le B$ intervalı daxilində, onun bu interval xaricində özünü nə cür aparmasına əsaslanaraq, yuxarı sərhədini təyin edən münasibətdir. $f(t)$, – $|t| \ge B$ qiymətlərində $|f(t)| \le A < 1$ xassəsinə malik olan xarakteristik funksiya olsun, onda $|t| \le B$ qiymətlərində

$$|f(t)| \le 1 - \frac{t^2}{8}\,\frac{(1-A^2)}{B^2}$$

münasibəti doğrudur (bax, [1], [3]). Bu tip bərabərsizliklərin isbatı müsbət müəyyən triqonometrik polinomun seçilməsinə əsaslanır. Bu üsulla K. b. və onun dəqiqləşmiş forması [2]-də alınmışdır: əgər $|f(t)| \le A < 1$ münasibəti $B \le t \le B + b$, $0 < b \le B$ şərtini ödəyən t-lər üçün ödənilərsə, onda

$$|f(t)| < \left(\frac{B + tA}{B + t} \right)^{t/(B+t)} < 1 - \frac{(1-A)t^2}{(B+t)^2} < 1 - \frac{(1-A)t^2}{(B+b)^2}$$

münasibəti $0 < t < b$ şərtini ödəyən t-lər üçün doğrudur (bax, [3], səh. 37).

Əd.: [1] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] Heatcote C. R., Pitman J. W., «Bull. Austral. Math. Soc.», 1972, v. 6, p. 1–9; [3] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

KRAMER ÇEVİRMƏSİ « Крамера преобразование; Cramer transform », F paylanma funksiyasının Kramer çevirməsi–

$$H_F(a) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} [a\lambda - \psi(\lambda)],\ a \in \mathbb{R}^1$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan funksiyadır, burada

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \ln \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda|x|}\, dF(x), & \text{əgər } \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda|x|}\, dF(x) < \infty \text{ olarsa,} \\ \infty, & \text{əks halda.} \end{cases}$$

ξ təsadüfi kəmiyyətinin K. ç. kimi onun paylanma funksiyası F_ξ-nin K. ç. nəzərdə tutulur: $H_\xi(a) \equiv H_{F_\xi}(a)$. K. ç. aşağı qabarıq funksiyadır. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti *Kramer şərtini* ödəyirsə, yəni hər hansı λ üçün

$$\mathbf{M} \exp\{\lambda |\xi|\} < \infty$$

olarsa, onda $\min\limits_{a \in \mathbb{R}^1} H_\xi(a) = 0$, belə ki, $\arg\min\limits_{a \in \mathbb{R}^1} H_\xi(a) = \mathbf{M}\xi$. Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununda yığılma sürətinin statistik qiyməti K. ç. terminlərilə münasib surətdə yazılır. Doğrudan da, əgər $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Kramer şərtini ödəyən, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ eyni qanunla paylanmış, asılı olmyan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} \left| \frac{1}{k} S_k - \mathbf{M}\xi_1 \right| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq 2 \exp\{-n \min(H_{\xi_1}(\mathbf{M}\xi_1 - \varepsilon), H_{\xi_1}(\mathbf{M}\xi_1 + \varepsilon))\}$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Ш и р я е в А. Н., Вероятность, 2 изд., М., 1989, с. 428–31.

KRAMER SIRASI « Крамера ряд; Cramér series » – bax, *Kramer teoremi.*

KRAMER ŞƏRTLƏRİ « Крамера условия; Cramér conditions » – ehtimal nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan H. Kramer tərəfindən daxil olunmuş iki şərtdir. ξ – paylanma funksiyası $F(x)$, xarakteristik funksiyası $f(t)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. K. ş.-ndən biri ondan ibarətdir ki, əgər $F(x)$-in sıfırdan fərqli mütləq kəsilməz komponenti varsa,

$$\lim_{|t| \to \infty} \sup |f(t)| < 1$$

münasibəti ödənilir. K. ş.-ndən digəri ixtiyari $|t| < a$ və hər hansı $a > 0$ üçün

$$\mathbf{M}e^{t\xi} < \infty$$

şərtidir. Sonuncu şərt elə b və c müsbət sabitlərinin varlığına ekvivalentdir ki, bütün $x > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq x\} \leq be^{-cx}$$

olur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] К р а м е р Г., «Успехи матем. наук», 1944, в. 10, с. 166–78.

KRAMER TEOREMİ « Крамера теорема; Cramér theorem » – 1) bax, *Levi – Kramer teoremi.*

2) b ö y ü k y a y ı n m a l a r e h t i m a l l a r ı ü ç ü n K. t.: fərz olunur ki, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan elə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun ki, $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{M}\xi_1^2 = \sigma^2 > 0$ və momentlərin doğuran funksiyası $\mathbf{M}e^{t\xi_1}$ hər hansı $|t| < a$ sonlu intervalında sonludur (bu axırıncı şərt K r a m e r ş ə r t i adlanır).

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left\{ \sum_{j=1}^{n} \xi_j < x\sigma\sqrt{n} \right\},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

olsun; əgər $n \to \infty$ olduqda $x > 1$, $x = o(\sqrt{n})$ olarsa, onda

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right].$$

Burada $\lambda(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ – əmsalları yalnız ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin momentlərindən asılı olan, olduqca kiçik bütün t-lər üçün yığılan sıradır (bu sıra K r a m e r s ı r a s ı adlanır). Bir qədər zəif nəticə H. Kramer tərəfindən [1]-də 1938-də alınmışdır; K. t.-nin yuxarıda verilən dəqiqləşdirilmiş formasını V. V. Petrov [2]-də almışdır.

Əd.: [1] C r a m é r H., «Actual. sci. et industr.», 1938, № 736; [2] П е т р о в В. В., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 4, с. 195–202; [3] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

3) Q a u s s p a y l a n m a l a r ı h a q q ı n d a K. t. – bax, *Ehtimal paylanmalarının arifmetikası.*

4) T ə s a d ü f i f u n k s i y a l a r ı n t ə s v i r i h a q q ı n d a K. t.: əgər ixtiyari $T = \{t\}$ çoxluğunda verilmiş, riyazi gözləməsi sıfra bərabər kompleks $X(t)$ təsadüfi funksiyasının korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}X(t)\overline{X(S)} = B(t, s)$

$$B(t, s) = \int\limits_A \int\limits_A \psi(t, a)\, \overline{\psi(s, a')}\, m(da, da') \qquad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilərsə, onda $X(t)$ stoxastik inteqral şəklində aşağıdakı kimi ifadə oluna bilinir:

$$X(t) = \int\limits_A \psi(t, a) Z(da); \qquad (2)$$

burada A – hər hansı lokal kompakt fəzadır, $\mathscr{B}$, – $S \subset A$ altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdir, $m(S_1, S_2)$, $S_1 \in \mathscr{B}$, $S_2 \in \mathscr{B}$ – lokal sonlu variasiyalı (yəni S-in kompakt olduğu bütün $S \times S$ «kvadratlarında» sonlu variasiyaya malik) və

müsbət müəyyən nüvəyə malik olan [bütün ixtiyari müsbət n, kompleks $c_1, \dots, c_n$ və $\mathscr{B}$-yə daxil olan çoxluqlarda

$$\sum_{j,k=1}^{m} m(S_j, S_k)\, c_j \bar{c}_k \geq 0 \qquad (3)$$

olduğundan] $A \times A$-da kompleks ölçüdür; $Z(S)$, – $\mathscr{B}$-də verilən elə təsadüfi funksiyadır ki, $\mathbf{M} Z(S_1)\overline{Z(S_2)} = m(S_1, S_2)$, (2)-nin sağ tərəfindəki inteqral isə uyğun inteqral cəmləri ardıcıllığının kvadratik orta mənada limiti kimi təyin olunur.

Əksinə, əgər $X(t), t \in T$ təsadüfi funksiyası (2) şəklində ifadə oluna bilinirsə, onda onun korrelyasion funksiyası $B(t, s)$ (1) şəklində ifadə oluna bilər. $Z(S), S \in \mathscr{B}$ qiymətləri, yalnız və yalnız, o halda $X(t), t \in T$ vektorlarını örtən H_X fəzasındandır ki, a arqumentinin funksiyalarının ailəsi $\{\psi(t, a), t \in T\}$ –

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_A \int_A \varphi_1(a)\overline{\varphi_2(a')}\, m(da, da')$$

skalyar hasili təyin olunmuş və norması

$$\|\varphi\| = \left[\int_A \int_A \varphi(a)\,\overline{\varphi(a')}\, m(da, da')\right]^{1/2} < \infty$$

olan, $\varphi(a), a \in A$ funksiyalarının Hilbert fəzası $L^2(m)$-də tam ailə olsun.

K. t.-ni H. Kramer [1]-də $A = \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ halı üçün isbat etmişdir. Bu teorem təsadüfi funksiyaların ortoqonal təsviri haqqında *Karunen teoreminin* ümumiləşməsidir; bu teoremin mühüm tətbiqi t-nin bütün həqiqi ədədlər (və ya bütün tam ədədlər) çoxluğunda qiymətlər aldığı haldır, yəni $X(t)$-ya təsadüfi proses və ya təsadüfi ardıcıllıqdır, $A = (-\infty, \infty)$ (və ya $A = [-\pi, \pi]$) və $\psi(t, a) = e^{ita}$ (bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses*). Bu xüsusi halda $m(S_1, S_2)$ nüvəsinin müsbət müəyyən nüvə olma tələbini nəzərə almamaq olar, belə ki, (3) şərti burada (1) ifadəsinin doğruluğundan avtomatik alınır. $m(da, da')$ kompleks ölçülərinin daha geniş sinfi halında K. t.-nin ümumiləşməsi (2)-nin sağ tərəfindəki stoxastik inteqralın daha ümumi tərifinin ifadəsinə əsaslanır (bax, [2]).

Əd.: [1] C r a m e r H., в кн.: Proc. 2-nd Berk. Symp. Math. Stat. Probab., Berk. – Los. Ang., 1951, p. 329–39; [2] R a o M. M., в кн.: Handbook of Statistics; v. 5, Amst., 1985, p. 279–310.

KRAMER – MİZES KRİTERİSİ « Крамера – Мизеса критерий; Cramérvon Mises test » – asılı olmayan eyni qanunla paylanmış $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş $F(x)$ kəsilməz paylanma funksiyasına malik olması haqqında H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *qeyri – parametrik kriteridir.* K. – M. k.

$$\omega_n^2[\Psi(F(x))] = \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)]^2 \Psi(F(x))\, dF(x)$$

statistikasına əsaslanır, burada $F_n(x)$, – $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, $\Psi(t)$ – hər hansı mənfi olmayan, $[0, 1]$-də təyin olunmuş elə funksiyadır ki, $\Psi(t)$, $t\Psi(t)$ və $t^2\Psi(t)$ $[0, 1]$-də inteqrallanandırlar. Bu tip kriteriləre kvadratik metrikaya əsaslandığı halda ilk dəfə H. Kramer [1]-də və R. Mizes [2]-də tərəfindən baxılmışdır. N. V. Smirnov [3]-də $\Psi(t) \equiv 1$ seçərək göstərmişdir ki, bu halda H_0 hipotezi doğru olarsa, $n \to \infty$ olduqda, $\omega^2 = \omega_n^2$ (bax, [1]) statistikası limitdə hipotetik paylanma funksiyası $F(x)$-dən asılı olmayan *omeqa – kvadrat paylanmaya* malik olur. H_0 hipotezini yoxlamaq üçün ω_n^2 statistikasına əsaslanan kriteri, ω^2 – k r i t e r i (K r a m e r – M i z e s – S m i r n o v k r i t e r i s i) adlanır, bu halda ω_n^2 statistikasının ədədi qiymətini tapmaq üçün onun aşağıdakı ifadəsindən istifadə olunur:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^{n}\left[F(\xi_{(j)}) - \frac{2j-1}{2n}\right]^2,$$

burada $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$, – $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi üzrə qurulmuş variasion sıradır. Mühümlük ölçüsü α olan ω^2 kriterisinə əsasən, $\omega_n^2 \geq \omega_\alpha^2$ olduqda H_0 hipotezi qəbul olunmur, burada ω_α^2, – ω^2 paylanmanın yuxarı α kvantilidir, yəni $\mathbf{P}\{\omega^2 < \omega_\alpha^2\} = 1 - \alpha$. T. Anderson və D. Darlinqin $\omega_n^2[1/F(x)(1-F(x))]$ statistikasına əsaslanan kriteri də analoji qaydada qurulmuşdur (bax, [5]).

Əd.: [1] C r a m e r H., Sannolikhetskalkylen och nagra av dess användningar, Stockh., [1926]; [2] M i s e s R. v., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Lpz. – W., 1931; [3] С м и р н о в Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 973–93; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистика, 3 изд., М., 1983; [5] A n d e r s o n T. W., D a r l i n g D. A., «Ann. Math. Stat.», 1952, v. 23, p. 193–212.

KRAMER – MİZES – SMİRNOV KRİTERİSİ « Крамера – Мизеса – Смирнова критерий; Cramer – Mises – Smirnov test » – bax, *Kramer – Mizes kriterisi.*

KRAMER – RAO BƏRABƏRSİZLİYİ « Крамера – Рао неравенство; Cramer – Rao inequality » – parametrin *statistik qiymətlərinin* kvadratik orta xətalarının aşağı sərhədini müəyyənləşdirən bərabərsizlikdir. Eyni zamanda və birbirindən asılı olmadan, H. Kramer ([1]), S. Rao ([2]) və M. Freşe ([3]) tərəfindən alınmışdır. Paylanma sıxlığı $f(x, \theta)$ olan $\xi_1, \dots, \xi_n$ seçimi üzrə naməlum skalyar θ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur. $T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ bu parametrin elə statistik qiyməti olsun ki, $\mathbf{M}_\theta T = \theta + b(\theta)$, burada b – hər hansı differensiallanan funksiya olub, T s t a t i s t i k q i y m ə t i n i n m e y l i adlanır. Onda $f(x, \theta)$ ailəsi üzərinə qoyulan müəyyən requlyarlıq şərtlərində

$$\mathbf{M}_\theta(T - \theta)^2 \geq (1 + b'(\theta))^2 / nI(\theta) + b^2(\theta)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $I(\theta) = \mathbf{M}_\theta(\partial \ln f(\xi_1, \theta)/\partial\theta)^2$ – Fişer informasiya miqdarıdır və fərz olunur ki, o, müsbət və

sonludur. K. – R. b.-nin ümumiləşmələri və dəqiqləşmələri haqqında bax, [4], [5]. Bax, həmçinin *Statistik məsələlər*(i) t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r n ə z ə r i y y ə s i n i n; *Statistik qiymətləndirmə.*

Əd.: [1] C r a m é r H., «Skand. Aktuarietidskr.», 1946, v. 29, p. 85–94; [2] R a o C. R., «Bull. Calcutta Math. Soc», 1945, v. 37, p. 81–91; [3] F r e c h e t M., «Rev. Inst. Intern. Statist.», 1943, v. 11, p. 182–205; [4] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М.,1984; [5] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

KRAMER – VOLD TEOREMİ « Крамера – Волда теорема; Cramér – Wold theorem » – Evklid fəzasında ehtimal *paylanmalarının* bütün yarımfəzalarda öz qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunması haqqında müddəadır. [1]-də dərc olunmuşdur; bax, [2], fəs. 9; [3]-də qeyd olunmuşdur ki, bu teorem İ. M. Gelfand tərəfindən asılı olmadan alınmışdır.

$t = (t_1, t_2, ..., t_k)$, – $\mathbb{R}^k$ Evklid fəzasının hər hansı qeyd olunmuş nöqtəsi və α – həqiqi ədəd olsun. $S_{t,\alpha}$ yarımfəzası $\mathbb{R}^k$ fəzasının $t_1 x_1 + t_2 x_2 + ... + t_k x_k \le \alpha$ şərtini ödəyən bütün $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ nöqtələrinin çoxluğudur. $\mathbf{P}_1$ və $\mathbf{P}_2$ – $\mathbb{R}^k$-da iki ehtimal paylanması olsun; bütün $t \neq 0$ və α üçün $\mathbf{P}_1(S_{t,\alpha}) = \mathbf{P}_2(S_{t,\alpha})$ bərabərliyindən K. – V. t.-inə görə, $\mathbf{P}_1 \equiv \mathbf{P}_2$ olduğu alınır.

Teoremin isbatı, xarakteristik funksiyalar metodundan istifadə etdikdə, olduqca qısa alınır. Doğrudan da, əgər $X_j = (X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{jk})$ paylanması $\mathbf{P}_j$, $j = 1, 2$ olan təsadüfi vektor olarsa, K. – V. t.-nin şərtinə görə t-nin ixtiyari qiymətində $V_1 = t_1 X_{11} + t_2 X_{12} + ... + t_k X_{1k}$ və $V_2 = t_1 X_{21} + t_2 X_{22} + ... + t_k X_{2k}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanmaları üst-üstə düşür. Deməli, bunların xarakteristik funksiyaları da üst-üstə düşür, yəni $\mathbf{M}e^{i\lambda V_1} = \mathbf{M}e^{i\lambda V_2}$, burada λ ixtiyari həqiqi ədəddir. $\lambda = 1$ olduqda bu faktdan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin xarakteristik funksiyalarının bərabərliyi alınır, bu da $\mathbf{P}_1 \equiv \mathbf{P}_2$ olmasını (ehtimalların bərabərliyini) doğurur.

[3]-də belə məsələ qoyulmuşdur ki, «xarakteristik funksiyalara müraciət olunmadan isbat» araşdırılsın. Bu halda *Abel inteqral tənliyindən* istifadə olunmuşdur. Bu məsələnin həlli variantı [4]-də təklif olunmuşdur.

Əd.: [1] C r a m e r H., W o l d H., «J. London Math. Soc.», 1936, v. 11, part 4, p. 290–94; [2] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [3] К о л м о г о р о в А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 233; [4] Х а ч а т у р о в А. А., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 3, с. 201–12.

KRAMP – MOD – YAGERS PROSESİ « Крампа – Мода – Ягерса процесс; Crump – Mode – Jagers process » – bax, *Ümumi şaxələnən proses*.

KREYN TEOREMİ « Крейна теорема; Krein theorem » müsbət müəyyən funksiyalar haqqında: $(-a, a)$ intervalında təyin olunmuş $f(t)$ funksiyasının hər hansı ehtimal paylanması $\mathbf{P}$-nin xarakteristik funksiyası ilə üst-üstə düşməsi üçün, yəni

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, \mathbf{P}(dx), \quad -a < t < a$$

düsturunun ödənilməsi üçün $f(0) = 1$ şərtilə normalanmış f-in müsbət müəyyən funksiya olması zəruri və kafidir. Bu nəticə M. Q. Kreyn tərəfindən [1]-də alınmışdır. $a = \infty$ olduqda bu teorem *Boxner – Xinçin teoremi* ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] К р е й н М. Г., «Докл. АН СССР», 1940, т. 26, № 1, с. 17–21; [2] А х и е з е р Н. И., Классическая проблема моментов, М., 1961.

KRILOV STATİSTİK QİYMƏTLƏRİ, PAYLANMANIN « Крылова оценки распределения; Krylov distribution estimates » – bax, *Stoxastik inteqral*; p a y l a n m a n ı n q i y m ə t l ə r i.

KRİKKEBERQ AYRILIŞI « Криккеберга разложения; Krickeberg decomposition » – $X = (X_t)_{t \ge 0}$ martinqalının $X = Y - Z$ şəklində ifadəsidir, burada $Y = (Y_t)$, $Z = (Z_t)$ – mənfi olmayan martinqallardır, t – diskret zamandır, $t \in \{0, 1, ...\}$ və ya kəsilməzdir, $t \in [0, \infty]$. X – müntəzəm inteqrallanan martinqal olduqda (yəni $X_t = \mathbf{M}[X_\infty | \mathscr{A}_t]$ bərabərliyi sanki yəqin bütün t-lər üçün doğrudur, burada X_∞ – inteqrallanan təsadüfi kəmiyyətdir, onda $Y_t = \mathbf{M}[X_\infty^+ | \mathscr{A}_t]$, $Z_t = \mathbf{M}[X_\infty^- | \mathscr{A}_t]$ bərabərlikləri sanki yəqin doğrudur). İxtiyari X martinalı üçün K. a., yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, X martinqalı L_1-də məhdud olsun, yəni $\|X\|_1 = \sup \mathbf{M}|X_t| < \infty$ olsun. K. a. yeganədir və hətta $\|X\|_1 = \|Y\|_1 + \|Z\|_1$. Y və Z martinqalları ən kiçik mənfi olmayan martinqallardır və uyğun olaraq X və $-X$ üçün majorantlayıcı martinqallardır.

Ayrılışı ilk dəfə K. Krikkeberq [1]-də almışdır.

Əd.: [1] K r i c k e b e r g K., Wahrscheinlichkeitstheorie, Stuttg, 1963; [2] D e l l a c h e r i e C., M e y e r P.-A., Probabilités et potential. Théorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80.

KRİPTOQRAFİYA « криптография; cryptography » – informasiyanın kənar şəxslərdən qorunması məqsədilə çevrilməsi haqqında elmdir. Riyaziyyatın bir çox oblastları: cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi, diskret riyaziyyat, ehtimal nəzəriyyəsi, riyazi statistika müasir K.-da tətbiq olunur. Digər tərəfdən, K.-nın tələbatları qeyri – trivial riyazi məsələlərin yaranmasına səbəb olur ki, bu da xalis riyaziyyatın inkişafı prosesinə böyük təsir göstərir (baxmayaraq ki, bu həmişə gözə çarpmır).

Aşağıda K.-nın ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ilə əlaqələrinə riyaziyyatın digər sahələri ilə əlaqələrindən daha çox diqqət yetirilir.

Son zamanlara kimi K., bir qayda olaraq, hərbi və dövlət sirlərinin qorunması üçün istifadə olunurdu. Son onilliklərdə kapitalın mərkəzləşdirilməsi və onun artmasının spekulyativ üsullarının geniş yayılması, rəqabətin artması prosesləri ilə və elektron əlaqə vasitələrinin inkişafı ilə bağlı olaraq kommersiya təşkilatları tərəfindən informasiyanın kriptoqrafik qorunma metodlarına tələbat artmışdır, bu isə yeni istiqamətlər və metodların yaranmasına səbəb olmuşdur: məs., açıq açarlı K., sirrin bölüşdürülməsi metodları, elektron imza, identifikasiya metodları və s. Nəzəri K.-da alınan nəticələr requlyar surətdə beynəlxalq kriptoqrafik konferensiyalarda hər il müzakirə olunur (məs., CRYPTO, EUROCRYPT, ASİACRYPT və s.); bu konferensiyaların əsərləri Springer – Verlag nəşriyyatı tərəfindən Lecture Notes in Computer Science seriyasında nəşr olunur.

İnformasiyanın kriptoqrafik qorunma üsulları yazı ilə eyni zamanda yaranmışdır. Göndərən şəxsin informasiyanı şifrləmə üsul-

ları və informasiya ünvanlananın şifri açması olduqca sadə realizasiya olunmalıdır, informasiyanın digər kənar şəxs tərəfindən açılması isə mövcud elmi – texniki səviyyədə, praktiki cəhətdən ağlabatan müddət ərzində reallaşmamalıdır. Məs., Avropada Orta əsrlərə qədər Sezar şifri adlanan şifr istifadə olunurdu: mətndəki hər bir hərf əlifbanın digər hərfi ilə elə əvəz olunurdu ki, bu əvəzləmədə aşağı sətir – üç hərf sola tsiklik sürüşdürülmüş əlifbaya uyğun olsun. Belə şifri o halda etibarlı saymaq olar ki, rəqib azsavadlı olsun. Daha mürəkkəb şifrlərin, əlifbanın hər bir hərfinin digər hərf və ya simvolla əvəz olunan şifrlərin açılmasına aid misallar E. Ponun «Qızıl böcək» və A. Konan – Doylun «Rəqs edən adamcığazlar» hekayələrində təsvir olunmuşdur.

Şifrləmənin klassik sxemləri aşağıdakı şəkildədir. M – ilkin məlumatlar çoxluğu (açıq mətnlər); $T = \{T_k, k \in K\}$, – $T_k : M \to E$ şifredici inikaslar çoxluğu (adətən, çevrilən) olsun, burada E – şifrlənmiş mətnlər çoxluğudur. İstifadə edilən çevirmənin konkret şəklini təyin edən k parametri informasiyanı göndərən və ünvanlanmış şəxsdən başqa heç bir kəsə məlum olmamalıdır, k parametri *açar* adlanır; bütün şifredici inikaslar çoxluğu T rəqibə də məlum ola bilər. $m \in M$ məlumatını göndərmək üçün onu göndərən şəxs m -ə T_k inikasını tətbiq edir (k açarı qəbuledən şəxsə əvvəlcədən ötürülür) və şifrlənmiş $e = T_k m$ məlumatını rəqib üçün də əlçatan rabitə kanalı ilə göndərir (məs., radio ilə). Qəbuledən şəxs e -yə T_k^{-1} tərs inikasını tətbiq edərək, ilkin açılmış $m = T_k^{-1} e$ məlumatını tapır. k açarının mənasını bilməyən rəqib bütün mümkün olan $m(r) = T_r^{-1} e$, $r \in K$ qiymətlərini bir-bir yoxlamaqla ilkin məlumatı tapa bilər, lakin K çoxluğunun elementləri sayı çox olarsa, onda bu prosedur üçün olduqca çox vaxt tələb olunur.

Şifrləmə üsulunun seçilməsində əsas problemlərdən biri ondan ibarətdir ki, rəqib ötürülən açıq tekstlər və ya şifrləyici inikaslar çoxluğunun xassələri haqqında bütün açarlar çoxluğunu bir-bir yoxlamadan, şifrlənmiş məlumatları açmaq üçün əlavə verilənlərdən istifadə edə bilər. E. Ponun və A. Konan – Doylun yuxarıda qeyd olunmuş əsərlərinin personajları latın əlifbasının 26 simvolu çoxluğunda bütün $26! \approx 4{,}03 \cdot 10^{26}$ sayda yerdəyişmələrin bir-bir yoxlanılması əvəzinə, ingiliscə mətndə müxtəlif hərflərin tezlikləri arasında münasibətlər haqqında əlavə informasiyadan istifadə edirdilər və bu da ən çox tezlikli hərfləri əvəz edən simvolları aşkar etməyə, açarın digər elementlərinin seçilməsinə imkan yaradaraq mətnin məna kəsb edən hissələrinin alınması məqsədilə edilirdi.

Tam məxfiliyi əsaslandıran ciddi riyazi müddəalar, yəni ixtiyari rəqib tərəfindən şifrlənmiş informasiyanın açılmasını mümkünsüz edən müddəalar açılmanın mümkünsüzlüyünü təmin edən şərtlərin təsvirindən ibarətdir. K. Şennonun [14] əsərində verilən belə tipli şərt ehtimal terminlərilə ifadə olunmuşdur. M və k açarları çoxluğu K -da $\mathbf{P}_M$ və $\mathbf{P}_K$ ehtimal paylanmalarının verildiyi və açarın açıq mətndən asılı olmadığı fərz olunur. $m \to T_k m = e$ inikası şifirlənmiş mətnlər çoxluğunda $\mathbf{P}_E$ paylanmasını doğurur. Onda tam məxfiliyin zəruri və kafi şərti bütün $m \in M$ və $e \in E$ üçün

$$\mathbf{P}\{m \mid e\} = \mathbf{P}\{m\} \qquad (1)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

Başqa sözlə, şifrlənmiş e mətni haqqında rəqibə məlum olan bilgi açıq m mətni haqqında heç bir əlavə informasiya ala bilməsi üçün əsas verməməlidir ($\mathbf{P}_M$ -in paylanması ilə müqayisədə). K. Şennon isbat etmişdir ki, (1) bərabərliyinin ödənilməsi üçün $|K| \geq |M|$ münasibətinin ödənilməsi zəruridir, burada $|S|$ – hər hansı S çoxluğunun elementləri sayıdır; əgər bu şərt ödənilərsə, onda (1) şərtini ödəyən şifrləmə sistemini qurmaq mümkündür. Beləliklə, mükəmməl şifrləmə sistemində mümkün ola bilən açarların sayı potensial mümkün ola bilən məlumatların sayından az olmamalıdır, bu isə faktiki olaraq onu ifadə edir ki, açar məxfi yazını qəbul edən şəxsə əvvəlcədən zəruri olaraq verilməlidir və açarın həcmi planlaşdırılmış məxfi yazının həcmindən kiçik olmamalıdır. Əgər məxfi yazının həcmi çox böyük olarsa, bu şərt praktiki cəhətdən ödənilmir.

Şennon teoreminə əsasən, $A = \{0, 1, ..., a-1\}$ əlifbasının işarələri ilə yazılmış $m = (m_1, ..., m_t)$ məlumatının mükəmməl şifrlənməsini, A çoxluğunda təyin olunmuş, müntəzəm qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının realizasiyasını $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_t)$ vasitəsilə və $e = (m_1 + \alpha_1 (\mathrm{mod}\, a), ..., m_t + \alpha_t (\mathrm{mod}\, a))$ düsturu ilə həyata keçirmək olar. Məlumatı qəbul edən onu göndərən şəxsin göndərdiyi eyni α realizasiyasına malik olarsa, o, e üzrə m -i asanlıqla bərpa edə bilir, α haqqında bilgisi olmayan rəqib isə bu ardıcıllığın bütün mümkün qiymətlərini yoxlayıb, A əlifbasının t sayda hərflərinin bütün mümkün kombinasiyalarını alacaqdır (o cümlədən, m -i də), lakin onun hərflərin digər məna kəsb edən bütün kombinasiyaları çoxluğundan m -i seçmək üçün heç bir əsası olmayacaqdır.

Bu misaldan aydın olur ki, K. üçün iki məsələ böyük əhəmiyyətə malikdir: təsadüfi ardıcıllıqların qurulması (heç olmasa, «əsl» təsadüfi ardıcıllıqlardan çətin fərqləndirilən psevdotəsadüfi ardıcıllıqların) və müşahidə olunmuş ardıcıllıqların xassələrinin təsadüfi ardıcıllıqların xassələrindən fərqinin aşkar olunmasıdır (belə fərqlənmələrin varlığı (1) şərtinin pozulmasına səbəb olur ki, bu da şifrlənmiş informasiya haqqında bu və ya digər məlumatın alınması imkanını yaradır).

İkinci tip məsələlər ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın tipik məsələləridir; birinci tip məsələlər üçün bunu söyləmək olmaz. Klassik ehtimal nəzəriyyəsi yalnız ehtimal ölçülərinin müxtəlif xassələrini öyrənir, bunlar isə təsadüfi terminlərlə ifadə olunur. Ehtimal nəzəriyyəsi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqlarının realizasiyalarının qurulması üçün konstruktiv üsullar vermir və məsələ də bundadır ki, konkret $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_t) \in A^t$ ardıcıllığının A -da müntəzəm paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının realizasiyasının olub-olmaması sualı, ehtimal nöqteyi – nəzərindən, tam korrekt deyildir, belə ki, verilmiş uzunluqlu hər bir ardıcıllıq eyni ehtimalla təsadüfi bərabərehtimallı sınaqlar aparıldıqda, bir başqa ardıcıllıq kimi müşahidə oluna bilər.

Birinci tip məsələlər (yalnız kriptoqrafik tətbiqlərlə bağlı deyil, həm də, məs., «tipik» həqiqi ədədin qurulması məsələsi ilə əlaqədar yaranan) təsadüfilik anlayışının müxtəlif təriflərinin işlənilməsini stimullaşdırdı: tezliklə ifadə olunan (R. Mizes [11], A. Çerç [5]) təriflər, mürəkkəb tərif, (A. N. Kolmoqorov [1]), kəmiyyətcə tərif (P. Martin – Lef); bu yanaşmaların xülasəsi [4]-də şərh olunmuşdur. Təsadüfiliyin təyin olunmasının araşdırmaları o qədər ciddi olmasa da, təbii bir nəticəyə gətirmiş oldu: determinik metodlarla (məs., EHM üçün proqramın köməyilə) «təsadüfi» ardıcıllıq almaq mümkün deyildir.

20-ci əsrin 70-ci illərindən başlayaraq, təsadüfi ardıcıllıqlardan praktik olaraq seçilməyən, ciddi surətdə isbatı mümkün olan «psevdotəsadüfi» ardıcıllıqların qurulması mümkünlüyünə imkan

verən üsulların intensiv axtarışlarına başlanmışdı. Alqoritmlərin mürəkkəbliyi nəzəriyyəsi çərçivəsində riyaziyyatçıların və kriptoqrafların böyük bir qrupu tərəfindən belə yaxınlığın varlığının isbatının psevdotəsadüfi bitlər (sıfırlar və vahidlər) vergəclərinin varlığına gətirilməsi məsələsinə yanaşma işlənilmişdir; sonuncu biristiqamətli funksiyaların varlığı məsələsinə gətirilir (yəni daha sadə hesablana bilinən funksiyaların ki, bunların «tərs» funksiyalarının hesablanması sadə olmur); bu yanaşma $[8]$-də şərh olunmuşdur. Bu halda psevdotəsadüfi bitlərin vergəcləri kimi alqoritmlərin elə $\{F_n\}$ ardıcıllıqları anlaşılır ki: (a) F_n alqoritmi n sayda $\beta_1, \dots, \beta_n$ – ilkin bitləri üzrə $t(n) = n^{O(1)}$ sayda əməllə $X(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{X_1, \dots, X_L\}$ bitlər ardıcıllığını qurur, burada $L = L(n) = n^{O(1)}$, (b) əgər $\beta_1, \dots, \beta_n$ və $Y(n) = \{Y_1, \dots, Y_L\}$ asılı olmayan təsadüfi bitlər (0 və 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan) ardıcıllığı olarsa və $Q_n : \{0,1\}^L \to \{0,1\}$ statistikası isə

$$\left| \mathbf{P}\{Q_n(X(\beta_1, \dots, \beta_n)) = 1\} - \mathbf{P}\{Q_n(Y(n)) = 1\} \right| = \delta(n)$$

münasibətini ödəyərsə, onda $C(Q_n)/\delta(n) > S(n)$ bərabərsizliyi doğrudur, $C(Q_n)$ – ən pis halda Q_n funksiyasının hesablanması üçün zəruri olan əməliyyatlar sayıdır. Qeyd olunan xassələrə malik vergəc $S(n)$ – dayanıqlı vergəc (rus. датчик) adlanır.

$S(n)$ – məxfi biristiqamətli f funksiyası üçün, yəni polinomial sayda əməliyyatlarla hesablanan $f_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{L(n)}$, $L(n) = n^{O(1)}$ funksiyalar ardıcıllığı üçün analoji terminlərdən istifadə olunur; bu funksiyalar ardıcıllığı üçün aşağıdakı xassə ödənilir: əgər X^n $\{0,1\}^n$-də müntəzəm paylanmaya malik, təsadüfi ikilik vektordursa və $R_n : \{0,1\}^{L(n)} \to \{0,1\}^n$ statistikası ən pis halda, $C(R_n)$ sayda əməliyyatla hesablanan elə statistikadırsa ki,

$$\mathbf{P}\{f_n(R_n(f_n(X^n))) = f_n(X^n)\} = \delta(n)$$

bərabərliyi ödənilsin, onda $C(R_n)/\delta(n) > S(n)$ bərabərsizliyi doğrudur. Hələ ki, heç bir funksiya üçün isbat olunmamışdır ki, o, tələb olunan K. mənasında biristiqamətlidir.

Dövlət, hərbi, iş və s. tipli informasiyanın mühafizəsinə praktiki tələbatlar xüsusi qurğularla – şifratorla həyata keçirilir, bunlar isə mükəmməl şifrləmənin nəzəri prinsiplərinə yalnız təqribən uyğun olur. Çox saylı belə qurğuların təsirini, tapmaq olar, məs., $[10]$, $[13]$-də. Müasir şifratorlar iki böyük sinfə ayrılır: axınlı və bloklu.

Axınlı şifratorlar sonlu avtomatlardır (sadə prosessorlarlı və bir neçə yaddaş oyuqları olan determinik qurğulardır), bunlar işarələr ardıcıllıqları hasil edir və bu ardıcıllıqlar isə yuxarıda qeyd olunan mükəmməl şifrləmənin Şennon sxemində müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı əvəzinə istifadə olunur. Axınlı şifratorun hasil etdiyi ardıcıllıq sonlu avtomatın yaddaş oyuqlarının başlanğıc vəziyyətlərini və prosessorların bu və ya digər iş variantlarının seçimini verən açar parametrlərilə birqiymətli təyin olunur; bu isə açar parametrlərinin qiymətlərini əvvəlcədən öz aralarında razılaşdırmış, məlumatı göndərən və qəbul edənə eyni bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ardıcıllığını hasil etməyə imkan verir.

Bloklu şifratorlar verilmiş uzunluqlu (məs., 64 və ya 128 bit olmaqla) informasiya blokları çoxluğu M-in qarşılıqlı birqiymətli $M \to M$ inikaslarını (əvəzləmələrini) həyata keçirir; M çoxluğunda belə əvəzləmələr çevrilən informasiya bloku və açardan (iterasiya olunan funksiyanın strukturunu təyin edən) asılı olan funksiyaların çoxqat iterasiyaları vasitəsilə realizasiya olunur. Bloklu şifratora DES (Date Encryption Standard) şifratorunu misal göstərmək olar; bu şifratoru 1977-də ABŞ dövləti, dövlət sirləri olmayan iş yazışmaları üçün məcburi standart kimi qəbul etmişdir. Bu şifrator 64 bitdən ibarət informasiya bloklarının $B^{64} = \{0,1\}^{64}$ çoxluğunun özünə qarşılıqlı birqiymətli inikaslarını yerinə yetirir və bu da mürəkkəb funksiyanın (şifrolunan blokun və açarın ayrı-ayrı bitləri üzərində əməliyyatlardan başqa, cədvəl şəklində verilən $S_1, \dots, S_8 : \{0,1\}^6 \to \{0,1\}^4$ funksiyaları da daxil olmaqla) 16 iterasiyası ilə yerinə yetirilir. Beləliklə, DES şifratorunun ikilik açar parametrlərinin sayı 56-ya bərabərdir, odur ki, ümumi açarların sayı $2^{56} \approx 7{,}2 * 10^{16}$-ya bərabər olur. 20-ci əsrin əvvəllərinin texnikası səviyyəsində ilkin və şifrlənmiş bloklar üzrə bütün açarların bir-bir yoxlanılması ilə açarın tapılması üçün xüsusi hesablayıcı qurğunun qurulması milyon dollara başa gələrdi ki, onun işləmə müddəti bir neçə il olacaqdır. Belə müddət və xərclər adi kommersiya yazışmasının açılması üçün olduqca çoxdur (bax, $[10]$, $[13]$).

Şifratorların keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi standart məsələsi, bir qayda olaraq, məlum olan açıq və şifrlənmiş mətnlər üzrə açarın tapılmasında çətinliyin qiymətləndirilməsi məsələsinə gətirilir. Şifredici inikasın analitik strukturu mürəkkəb olduğundan, qeyri – xətti tənliklər sisteminin açarın elementlərinə nəzərən birbaşa həlli, bir qayda olaraq, mümkün deyildir. Digər mümkün variantlardan biri şifredici inikasların ehtimal modellərindən istifadədir ki, bu da açarın elementlərinin tapılmasını çox sayda statistik hipotezlərin yoxlanılması (bir neçə açar parametrlərinin konkret toplularına uyğun hipotezlərin) məsələsinə gətirir; bu halda ilkin və şifrlənmiş mətn cütlərinin realizasiyaları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunur. DES-in belə analizinə yanaşmaya misal $[9]$-da verilmişdir; burada 10^{13} tərtib əməliyyatla ilkin və şifrlənmiş, $2^{43} \approx 9 * 10^{12}$ bloklar cütü üzrə açarı tapmaq üsulu təsvir olunmuşdur. Bu qiymətləndirmənin düzgünlüyü 50 günlük kompyuter eksperimenti ilə təsdiq olunmuşdur, lakin real şifrator haqqında belə informasiya miqdarını praktik olaraq almaq mümkün deyildir. Beləliklə, statistik metodlar məxfi açarın təyin olunmasındakı çətinliyi aradan qaldırmağa imkan yaradır.

Klassik şifrləmə sxemləri məxfi açarın əvvəlcədən ötürülməsi ilə bağlıdır, bu da o halda mümkündür ki, abonentlərin sayı çox olmasın.

Çoxsaylı firma və müəssisələr arasında geniş yazışmaların məxfiliyinin qorunması tələbatı, keyfiyyətcə yeni şifrləmə prinsiplərinin yaranmasını zəruri etmişdir. 1976-da U. Diffi və M. Hellman tərəfindən $[6]$-da açıq açarlı şifrləmə sxemi təklif olunmuşdur: bu sxem elə $\{E_e, e \in K\}$ şifredici inikaslar ailəsi və məlumatların sonlu M çoxluğunun özü-özünə şifraçıcı inikaslarının $\{D_d, d \in K\}$ ailəsinin qurulmasından ibarətdir ki, bunlar aşağıdakı xassələrə malikdir: (a) hər bir $e \in K$ üçün elə $d \in K$ vardır ki, E_e və D_d – qarşılıqlı tərs inikaslardır, (b) E_e inikası və şifrlənmiş $c = E_e(m)$ mətni üzrə ilkin təsadüfi $m \in M$ məlumatını təyin etmək məsələsinin, verilmiş müddət ərzində, hesablanma baxımından həlli yoxdur, (c) qarşılıqlı tərs (E_e, D_d) inikaslar cütünün qorunması üçün nisbətən sadə üsullar mövcuddur. Əgər belə ailələr qurulmuşdursa, onda hər bir A abonenti qarşılıqlı tərs inikaslar cütü (E_e, D_d)-ni müəyyən edə bilər, sonra hamıya

E_e inikasını (açıq açarı) xəbər verib, d-nin qiymətini (məxfi açarı) məxfi saxlayar. İxtiyari B abonenti A abonentinə m informasiyasını kənar şəxslərdən məxfi olmaqla ötürmək üçün E_e inikasından istifadə edə bilər və hər kəsin istifadə edə biləcəyi əlaqə kanalı ilə $c = E_e(m)$ şifrlənmiş tekstini ötürə bilər. D_d inikası haqqında bilgisi olan A abonenti m məlumatını c üzrə bərpa edə bilər, D_d inikasını bilməyən və E_e üzrə D_d-ni qurmağa imkanı olmayan şəxslər bu bərpanı edə bilməzlər.

(b) xassəsi faktiki olaraq onu ifadə edir ki, E biristiqamətlidir. U. Diffi və M. Hellman açıq açarlı şifrləmə sistemlərinin qurulması üçün məqbul sayılan həll alqoritmləri hələ qurulmamış, alqoritmik cəhətdən mürəkkəb olan məsələləri istifadə etməyi təklif etmişlər. Hal-hazırda natural ədədlərin sadə vuruqlara ayrılışı, tərkib modulu üzrə multiplikativ çıxıqlar qrupunda kvadrat kökün hesablanması, diskret loqarifmləmə (yəni $a^x \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ şəklində müqayisənin həlli, burada n olduqca böyuk natural ədəddir) tipli çətin həll olunan məsələlərə və sonlu meydanlar üzərində elliptik əyrilərə və s. əsaslanan açıq açarlı bir sıra şifrləmə sistemləri təklif olunmuşdur.

K. Robin, A. Şamir və L. Adlemanın [12]-də təklif etdikləri RSA şifrləmə sisteminin təsviri sadədir. Qarşılıqlı tərs inikaslar cütünü qurmaq üçün, A abonenti eyni tərtib (10^{150}-dən az olmamaqla), iki böyük p və q sadə ədədlərini qurmalı, $n = pq$ hasilini və $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ Eyler funksiyasını hesablamalıdır; o, sonra, elə $e \in \{2, 3, ..., \varphi(n)-1\}$ olan natural e ədədini seçməlidir ki, $\text{ƏBOB}(e, \varphi(n)) = 1$ olsun və $ed \equiv 1(\mathrm{mod}\, \varphi(n))$ müqayisəsinin $1 < d < \varphi_n$ şərtini ödəyən yeganə həlli d-ni tapmaq mümkün olsun. Bu halda açıq açar (n, e) cütü, məxfi açar d qiyməti olacaqdır. $m \in \{2, ..., n-1\}$ məlumatını şifrləmək üçün $c \equiv m^e (\mathrm{mod}\, n)$ məlumatını təyin etmək lazımdır. Eyler teoreminə görə (əgər $\text{ƏBOB}(a, n) = 1$ olarsa, $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, n)$) $m \equiv c^d (\mathrm{mod}\, n)$ müqayisəsi doğrudur (əgər m $\{0, 1, ..., n-1\}$ çoxluğunda müntəzəm paylanandırsa, $\text{ƏBOB}(m, n) > 1$ münasibətinin ehtimalı $O(p^{-1} + q^{-1})$ tərtib ədəddir); beləliklə, A abonenti c məlumatının şifrini açа bilər, digər şəxslərin d məxfi açarını tapması üçün ya d-nin n və e üzrə bərpa məsələsi həll olunmalıdır, bu n-in sadə vuruqlara ayrılışı məsələsinə ekvivalentdir və ya (əgər c-dən başqa, hansısa bir tərzdə m məlumatı aydın olmuşdursa) $c^d \equiv m(\mathrm{mod}\, n)$ müqayisəsi həll olunmalıdır.

20-ci əsrin son onilliklərində açıq açarlı şifrləmə sistemlərinin üzərində işlər və araşdırmalar ədədlər nəzəriyyəsi və cəbrin alqoritmik və analitik suallarının intensiv inkişafına səbəb olmuşdur. Bu müddət ərzində ədədlərin faktorizasiyası, diskret loqarifmləmə və s. üçün təklif olunmuş bütün alqoritmlər, praktiki olaraq, ehtimali alqoritmlərdir, yəni bu alqoritmlərdə təsadüfi kəmiyyətlər vergəclərini istifadə edir, bu isə naməlum parametrlərə nəzərən alqoritmik həllolunabilinən tənliklər sistemini (məs., diskret loqarifmləmə halında ilk sadə ədədlərin diskret loqarifminə nəzərən xətti tənliklər sistemini) qurmağa imkan verən böyük həcmli informasiya almaq məqsədinə xidmət edir. Belə alqoritmlərdə əməliyyatlar sayının statistik qiymətləri, bir qayda olaraq, «təsadüfi» ədədi və ya cəbri obyektlərin bu və ya digər xarakteristikalarının paylanması haqqında evristik fərziyyələrdən istifadə edir.

Kommersiya və maliyyə müəssisələrinin, elektron rabitə vasitələri və verilənlərin qorunub saxlanılması üçün tələbatlar kriptoqrafik metodların istifadəsində bir sıra yeni istiqamətlərin işlənilməsinə səbəb olmuşdur. Bu metodlar – kompyuter şəbəkələrində informasiyanın (mühafizəsi, rəqəmi rabitə şəbəkələri, informasiya bloku ilə ötürülən və başqa bir dəyişikliyə yol vermədən, eyni hüquqi dəyərli sənədlərin tamamlanması üsulları), elektron imza, istifadə edən şəxsin identifikasiyası (işdə yazışma prosesində, elektron kredit kartlarından istifadədə böyük əhəmiyyətə malik olan) məxfiliyin bölüşdürülməsi (məs., informasiyanın n nəfərdən ibarət qrup arasında bölüşdürülməsi), lakin bu şərtlə ki, qrupdan heç olmasa k nəfəri birlikdə olmadıqda onlar informasiyanı ala bilmir.

İnformasiyanın şifrlənməsi üsullarının hamısı praktiki olaraq determinik olub, diskret riyaziyyatın, ədədlər nəzəriyyəsinin, cəbr və kombinatorikanın dərin məzmunlu nəticələri əsasında işlənilmişdir. Şifrləmə üsullarının analizi onların mürəkkəbliyi ilə əlaqədar olaraq ehtimali metodların köməyilə aparılır, bu metodlar determinik kriptoqrafik alqortmlərin ehtimal modellərinə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987; [2] Саломаа А., Криптография с открытым ключом, пер. с англ., М., 1996; [3] Соболева Т. А., Тайнопись в истории России, М., 1994; [4] Успенский В. А., Семенов А. Л., Шень А. Х., «Успехи матем. наук», 1990, т. 45, в. 1, с. 105–62; [5] Church A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1940, v. 46, № 2, p. 130–35; [6] Diffie W., Hellman M. E., «IEEE Trans Inform. Theory», 1976, v. 22, p. 644–54; [7] Koblitz N., A Course in Number Theory and Cryptography, 2 ed., N. Y., 1994; [8] Luby M., Pseudorandomness and Cryptographic Applications, Princeton, 1996; [9] Matsui M., Advances in Cryptology – CRYPTO'94, «Lect. Notes in Computer Science», 1994, v. 839, p. 1–11; [10] Menezes A. J., Oorschot P. C. van, Vanstone Scott A., Handbook of Applied Cryptography, New York – London – Tokyo, 1997; [11] Mises R., von, «Math. Z», 1919, Bd 5, S. 52–89; [12] Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. M., «Commun. ACM», 1978, v. 21, p.120–26; [13] Schneier B., Applied Cryptography: Prolocols, Algorithms and Source Code in C, 2 ed., N. Y., 1996; [14] Shannon C., «Bell System Techn. J.», 1949, v. 28, № 4, p. 656–715 (rus. per.: Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, М., 1963, с. 333–402).

KRİTERİ statistik **« критерий** статистический; statistical **test »** – bax, *Statistik kriteri.*

A **– KRİTERİ «** A **– критерий;** A **– test »** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

D **– KRİTERİ «** D **– критерий;** D **– test »** – bax, *Reqresssion eksperimentlərin planlaşdırılması.*

E **– KRİTERİ «** E **– критерий;** E **– test »** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

FPE **– KRİTERİ «** FPE **– критерий;** FPE **– test »** – bax, *Prediktorların ən yaxşı altçoxluğunun seçilməsi.*

χ^2 **– KRİTERİ «** χ^2 **– критерий;** χ^2 **– test / chi-square test »** – bax, *Xi – kvadrat kriterisi.*

L_c **– KRİTERİ «** L_c **– критерий;** L_c **– test »** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

t **– KRİTERİ «** t **– критерий;** t **– test »** – bax, *Styudent kriterisi.*

T^2 **– KRİTERİ «** T^2 **– критерий;** T^2 **– test »** – bax, *Hotellinq kriterisi.*

ω^2 **– KRİTERİ «** ω^2 **– критерий;** ω^2 **– test »** – bax, *Kramer – Mizes kriterisi.*

*** Φ_α – KRİTERİ « Φ_α – критерий; Φ_α – test »** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

KRİTİK EHTİMAL « критическая вероятность; critical probability » – bax, *Sızma prosesi.*

KRİTİK FUNKSİYA « критическая функция; critical function » – $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ *seçimi fəzasında* təyin olunmuş, $0 \le \varphi \le 1$ şərtini ödəyən ölçülən φ funksiyasıdır. K. f. elə statistik kriteri təyin edir ki, bu kriteriyə əsasən H_0 hipotezi $\varphi(x)$ ehtimalı ilə qəbul olunmur, $1-\varphi(x)$ ehtimalı ilə qəbul olunur; bu ehtimallar müşahidələrin nəticəsi x-dən asılı olur, $x \in \mathfrak{X}$.

KRİTİK HÜDUD, p – qiymət, müşahidə olunan ölçü **« критический уровень,** p – значение, наблюдаемый размер; **critical level / actually attained level /** p **– value »** – müşahidələrin nəticəsi x-i daxilinə alan kritik oblastların verilmiş monoton ailəsindən olan ən kiçik kritik oblastın ölçüsünü təyin edən *statistikadır.* Əgər T statistikasının böyük qiymətlərində $H_0 : \theta \in \Theta_0$ hipotezi qəbul olunmursa, onda K. h.

$$\hat{\alpha}(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{P}_\theta \{T \ge T(x)\}$$

münasibətilə təyin olunur. Bu halda $\hat{\alpha}(x) \le \alpha$ olarsa, H_0 hipotezi α ölçülü kriteri ilə qəbul olunmur; əgər $\hat{\alpha}(x) > \alpha$ olarsa və kriteri randomlanmayan kriteridirsə, onda H_0 qəbul olunur. K. h. H_0 hipotezinin ($\hat{\alpha}$-nın kiçik qiymətlərində) müşahidələrin nəticələrindən asılı olaraq qəbul edilib-edilməməsini təsdiq etmək üçün bir göstəricidir.

KRİTİK İNDEKS « критический индекс; critical exponent » – Gibbs meydanının *korrelyasion funksiyasının* temperatur, kimyəvi potensial və digər termodinamik parametrlərinin funksiyası kimi *kritik nöqtədəki* xüsusiyyəti xarakterizə edən qüvvət üstü göstəricisidir. K. i.-lər iki gözəl xassəyə malikdirlər: birincisi bunlar universaldır, yəni yalnız Gibbs paylanmasının ümumi xarakteristikalarından – dim. – ölçü və simmetriya qrupundan asılıdırlar, ikincisi, bunlar universal xətti münasibətlər sistemi – bütün K. i.-ləri bunlardan ixtiyari ikisi ilə ifadə edən skeyling münasibətlər sistemi ilə əlaqəlidirlər. Bu müddəalara haqq qazandıran olduqca ümumi riyazi nəzəriyyə, hələ ki, yaradılmamışdır. K. i.-lər statistik fizika modellərindən dəqiq olaraq az saydası üçün hesablanmışdır: ikiölçülü *İzinq modeli*, sferik modellər, iyerarx Dayson modeli və b. üçün. K. i.-lər üçün bir sıra bərabərsizliklər isbat olunmuşdur.

KRİTİK QİYMƏT « критическое значение; critical value » – elə C sabitidir ki, ilkin H_0 hipotezini T kriterisi üçün statistika ilə qəbul etməyən *randomlanmayan kriterini* $T \ge C$ və ya $T \le C$ olduğu hallarında təyin edir: $T \ge C$ olduqda K. q. yuxarı kritik qiymət, $T \le C$ olduqda isə aşağı kritik qiymət adlanır.

Mühümlük ölçüsü α verildiyi halda K. q. (yuxarı) kimi bütün $\mathbf{P} \in H_0$ qiymətlərində $\mathbf{P}\{T \ge C\} \le \alpha$ şərtini ödəyən ən kiçik C ədədi götürülür.

Kriterilərin praktiki tətbiqi üçün K. q. cədvəlləri tərtib olunur. Əgər T-nin paylanması $\mathbf{P} \in H_0$ olmasından asılı olmazsa, onda K. q. paylanmanın kvantilləri ilə təyin olunur (bu halda mühümlük ölçüsü, adətən, α faizlə ifadə olunduğundan bu konteksdə K. q.-lər faiz nöqtələri də adlandırılır).

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

KRİTİK NÖQTƏ « критическая точка; critical point » – *Gibbs paylanmasının* termodinamik parametrləri fəzasında nöqtədir, bu nöqtədə paylanmanın korrelyasion funksiyaları, termodinamik parametrlərin funksiyaları kimi kəsilməz olmalarına baxmayaraq, qeyri – analitik funksiyalardır. Tipik hallarda korrelyasion funksiyalar K. n.-də üstlü xüsusiyyətlərə malik olur. Bu xüsusiyyətlərə daxil olan qüvvət üstləri *kritik indekslər* adlanır. K. n. Gibbs paylanmasında təsadüfi kəmiyyətlərin güclü asılılığı ilə xarakterizə olunur ki, bu asılılıq korrelyasion funksiyaların sonsuzluqda tədricən azalması ilə özünü büruzə verir. K. n., adətən, 1-ci növ faza keçidləri xəttinin son nöqtəsidir.

KRİTİK OBLAST « критическая область; critical region » – $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ *seçimi fəzasının* elə ölçülən S altçoxluğudur ki, əgər müşahidələrin nəticəsi S çoxluğundan olarsa ($\mathfrak{X} \setminus S$-dən olarsa), bu oblast ilkin hipotezi qəbul etməyən (qəbul edən) randomlanmayan kriterini təyin edir; bu kriteriyə kritik funksiya – S-in indikatoru uyğun olur (bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*).

KRİTİK ŞAXƏLƏNƏN PROSES « критический ветвящийся процесс; critical branching process » – kritikaltı və kritiküstü *şaxələnən proses* arasında cərəyan edən, bir sıra əlamətləri ilə, o cümlədən, bu əlamətlərdən əsası – prosesdəki hissəciklərin orta sayının artımının olması zaman keçdikcə qeyri – eksponensial olması və bu orta qiymətin sıfırdan olduqca uzaq olması kimi əlamətləri ilə səciyyələnən prosesdir.

$Z(t)$, – $t = 0$ anında sıfır yaşlı bir hissəciklə başlayan şaxələnən prosesdə t anındakı hissəciklərin sayı, N – bir hissəciyin bilavasitə gələcək nəslinin təsadüfi sayı olsun. Əgər $\mathbf{M}N = 1$, $\mathbf{D}N > 0$ olarsa, belə proses kritik proses olacaqdır. Qalton – Vatson kritik prosesi və kəsilməz zamanlı Markov şaxələnən prosesi üçün $\mathbf{D}N < \infty$ olduqda aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$\lim_{t \to \infty} t\, \mathbf{P}\{Z(t) > 0\} = 2(\mathbf{D}N)^{-1}, \qquad (1)$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{Z(t)}{M\left| Z(t) \right| Z(t) > 0} < x \,|\, Z(t) < 0 \right\} = 1 - e^{-x},\ x > 0, \qquad (2)$$

(1), (2) şəklində bərabərliklər, bir qayda olaraq, şaxələnən proseslərin digər modelləri üçün də doğrudur. Lakin $t \to \infty$ olduqda prosesin gedişatında başqa bir xüsusiyyət yarana bilir. Məs., $G(t) = \mathbf{P}\{\tau \le t\}$ – Bellman – Harris prosesində hissəciyin yaşama müddəti τ-nun paylanma funksiyası və

$$\lim_{t \to \infty} t^2 (1 - G(t)) = C \in (0, \infty)$$

olarsa, onda (bax, [1]).

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{M}\{ s^{Z(t)} \,|\, Z(t) > 0 \} =$$

$$= 1 - \frac{\mathbf{M}\tau + \sqrt{(\mathbf{M}\tau)^2 + 4C(1-s)}}{\mathbf{M}\tau + \sqrt{(\mathbf{M}\tau)^2 + 4C}} \equiv \rho(s), \quad 0 \le s < 1$$

və ixtiyari $x \in (0, \infty)$ üçün

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{Z(t)}{\mathbf{M}[Z(t)\,|\,Z(t)>0]} < x \,|\, Z(t)>0 \right\} =$$

$$= \rho(1) + (1-\rho(1))\,(1-e^{-x}).$$

N_{ij}, – k tip hissəcikli şaxələnən prosesin i tip bir hissəciyinin törətdiyi bilavasitə j tip nəslinin sayı olsun, $i, j = 1, 2, \ldots, k$; $\Xi = \left\| \mathbf{M} N_{ij} \right\|_{i,j=1}^{k}$. Əgər Ξ matrisinin perronlarının kökü 1-ə bərabər olarsa və prosesdə final siniflər olmazsa, belə proses kritik proses olacaqdır. Bir neçə tip hissəciklərli kritik aperiodik şaxələnən proseslər üçün (1), (2) münasibətlərinin analoqları doğrudur. Məs., k tip hissəcikli Qalton – Vatson prosesi üçün əgər $\mathbf{D}\left(\sum_{i,j} N_{ij} \right)^2 < \infty$ olarsa, onda

$$\left(\frac{Z_1(t)}{\mathbf{M}\,[Z_1(t)\,|\,Z_1(t)+\ldots+Z_k(t)>0\,]}, \ldots, \right.$$

$$\left. \frac{Z_k(t)}{\mathbf{M}[Z_k(t)\,|\,Z_1(t)+\ldots+Z_k(t)>0]} \right)$$

vektorunun paylanması $Z_1(t)+\ldots+Z_k(t)>0$ şərtində $t\to\infty$ olduqda $(W, W, \ldots, W)$ təsadüfi vektorunun paylanmasına yığılır, burada $\mathbf{P}\{W \le x\} = 1 - e^{-Bx}$, $x>0$, B kəmiyyəti isə $\mathbf{M} N_{ij}$ və $\mathbf{M} N_{ij} N_{ik}$ momentlərilə təyin olunur. Bax, *Şaxələnən proses* yaşından asılı, *Ayrılmayan şaxələnən proses*.

Əd.: [1] Ватутин В. А., «Матем. сб.», 1979, т. 109, № 3, с. 440–52; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [3] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983.

KRİTİKALTI ŞAXƏLƏNƏN PROSES « докритический ветвящийся процесс; subcritical branching process » – bir hissəciyin bilavasitə nəsillərinin orta sayı vahiddən kiçik olan *şaxələnən prosesdir*. $Z(t)$ – bir tip hissəciklərli şaxələnən prosesdə t anında hissəciklərin sayı $(Z(0)=1)$, N – bir hissəciyin bilavasitə nəsillərinin təsadüfi sayı olsun. Əgər $m = \mathbf{M} N < 1$ olarsa, belə proses kritikaltı proses olacaqdır. Qalton – Vatson K. ş. p. üçün ixtiyari $s \in [0, 1]$ qiymətlərində

$$F(s) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{Z(t)=k \,|\, Z(t)>0\}\, s^k$$

limiti vardır, $F(1-)=1$, $F(s)$ doğuran funksiyası

$$1 - F(\mathbf{M} s^N) = m\,(1 - F(s)) \qquad (1)$$

tənliyini ödəyir və $F'(1-) < \infty$ yalnız və yalnız o halda ödənilir ki,

$$\mathbf{M}\, N \ln_+ N < \infty \qquad (2)$$

olsun. Qalton – Vatson prosesləri üçün

$$\mathbf{M} Z(t) = m^t \qquad (3)$$

və əgər (2) ödənilərsə, onda

$$\mathbf{P}\,(Z(t)>0) \sim c\, m^t, \quad c>0, \quad t\to\infty. \qquad (4)$$

(1), (3), (4) şəklində münasibətlər şaxələnən proseslərin başqa modelləri üçün də ödənilir, lakin $t\to\infty$ olduqda proseslərin gedişatında digər xüsusiyyət də mümkün ola bilir. Məs., $G(t) = \mathbf{P}\{\tau \le t\}$ – Bellman – Harris prosesində hissəciyin yaşama müddətinin paylanma funksiyası və bütün $A \in [0, \infty)$ üçün

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-G(t)}{1-G(t-A)} = 1$$

olarsa, onda (bax, [3])

$$\mathbf{M} Z(t) \sim \frac{1}{1-m}\,(1-G(t)), \qquad t\to\infty \qquad (5)$$

və

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\,\{Z(t)=1 \,|\, Z(t)>0\} = 1 \qquad (6)$$

$n>1$ tip hissəciklərli ayrılmayan şaxələnən proses $\rho<1$ olduqda kritikaltı prosesdir, burada ρ, – $\Xi = \left\| \mathbf{M} N_{ij} \right\|$ matrisinin maksimal məxsusi ədədidir (perronlar kökü), N_{ij}, – i tip bir hissəciyin bilavasitə törətdiyi j tip nəsillərin orta sayıdır. Ayrılmayan K. ş. p.-lər üçün (1), (3) – (6) müddəalarının analoqları doğrudur (bax, [1], [2], [4]).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, B. – Hdlb. – N. Y., 1972; [3] Чистяков В. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 4, с. 710–18; [4] Ватутин В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 503–14.

KRİTİKÜSTÜ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « надкритический ветвящийся процесс; supercritical branching process » – bir hissəciyinin nəsillərinin orta sayı m vahiddən böyük olan *şaxələnən prosesdir*. K. ş. p.-in səciyyəvi xüsusiyyətləri cırlaşmama ehtimalının müsbət olması, yəni prosesin sonsuz davam etməsi və ($m<\infty$ olduqda) $t\to\infty$ olduqda həssəciklərin sayı $Z(t)$-nin asimptotik eksponensial artmasıdır (bax, [1], [2]): əgər $1<m<\infty$ olarsa, onda elə c_t ardıcıllığı və mənfi olmayan W təsadüfi kəmiyyəti vardır, $\lim_{t\to\infty} c_t / c_{t+1} = m$, $\mathbf{M} W = 1$ və

$$\mathbf{P}\,\{\lim_{t\to\infty} Z(t) c_t = W\} = 1. \qquad (*)$$

Bir neçə tip hissəciklərli ayrılmayan şaxələnən proses $\rho>1$ olduqda K. ş. p.-dir, burada ρ, – $\Xi = \left\| m_{ij} \right\|$ matrisinin maksimal məxsusi ədədidir (perronlar kökü), m_{ij}, – i tip bir hissəciyin bilavasitə törətdiyi j tip nəsillərin orta sayıdır. $1<\rho<\infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\,\{\lim_{t\to\infty} (Z_1(t), \ldots, Z_n(t)) c_t = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n) W\} = 1$$

olur, burada $\lim c_t / c_{t+1} = \rho$, $Z_i(t)$, – i tip bir hissəciklərin sayı, $(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n)$, – Ξ matrisinin perron kökü ρ-ya müvafiq müsbət

sol məxsusi vektorudur, W – mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdir və $\mathbf{M}\, W = 1$.

Hissəciklərinin sayının artması keyfiyyətcə başqa olan K. ş. p.-in modifikasiyaları vardır. Məs., $m = \infty$ olduqda (bax, [3], [4]) (*) əvəzinə

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} L\,(Z(t))c_t = W\} = 1$$

münasibəti yerinə yetir, burada $L(x)$ $x \to \infty$ olduqda asta dəyişir, $\lim c_t / c_{t+1} \in (0,\ \infty)$. Qeyri – requlyar şaxələnən proseslərdə (bax, [1]) $Z(t)$ -nin trayektoriyaları sonlu zaman müddətinə sanki yəqin ∞ -a gedirlər.

K. ş. p., adətən, hissəciklərin sayı çox olmadıqda və onlar arasında qarşılıqlı təsir artım prosesinə çox da təsir etmədiyi halda hissəciklərin intensiv artım proseslərində başlanğıc mərhələnin ehtimal modeli kimi istifadə olunur.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, M., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, B. – Hdlb – N. Y., 1972; [3] Cohn H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1977, Bd 38, H. 1, S. 73–81; [4] Grey D. R., «J. Appl. Probab.», 1977, v. 14, № 4, p. 702–16.

KROSS – PERİODOQRAM « кросс – периодограмма; cross – periodogram » – bax, *Periodoqram.*

KROSS – SPEKTRAL SIXLIQ « кросс – спектральная плотность; cross – spectral density » – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

KUBO – ANDERSON PROSESİ « Кубо – Андерсона процесс; Kubo – Anderson process » – bax, *Nöqtəvi təsadüfi proses* qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli.

KULLBAK YAYINMASI « Кульбака уклонение; Kullback information » – bax, *Ardıcıl planlaşdırılması*, *eksperimentin.*

KULLBAK – LEYBLER DAĞILANLIĞI « Кульбака – Лейблера расходимость; Kullback – Leibler divergency » – bax, *İnformasion ölçü.*

KULLBAK – LEYBLER İNFORMASİON KƏMİYYƏTİ « Кульбака – Лейблера информационное количество; Kullback – Leibler information », nisbi entropiya, informasion say, – ω nəticələr fəzası Ω -da $\mathbf{Q}$ ehtimal paylanmasına nəzərən mütləq kəsilməz ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ arasında fərqlənmənin *informasion ölçüsüdür* və aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{P}}{\mathrm{d}\,\mathbf{Q}}(\omega)\ \ln\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{P}}{\mathrm{d}\,\mathbf{Q}}(\omega)\right]\mathbf{Q}(d\omega).$$

İlk dəfə [1]-də baxılmışdır. K. – L. i. k. həmişə mənfi deyildir (lakin sonsuz ola bilər) və bir qayda olaraq, $I(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \neq \neq I(\mathbf{Q},\mathbf{P})$. $I(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = 0$, yalnız və yalnız, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ olduqda doğrudur; $I(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \geq \boldsymbol{\rho}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$, burada $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$, – $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ arasında *Hellinger məsafəsidir.*

Əgər $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2$ olarsa (bu asılı olmayan müşahidələrə uyğun paylanmalar halına uyğundur), onda $I(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = I(\mathbf{P}_1,\mathbf{Q}_1) + I(\mathbf{P}_2,\mathbf{Q}_2)$ olur. Əgər $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\theta$, $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\theta+\Delta}$ və $\{\mathbf{P}_\theta\}$ parametrik ailə olarsa, onda geniş şərtlərlə

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{I(\mathbf{P}_\theta,\mathbf{P}_{\theta+\Delta})}{\Delta^2} = \frac{I(\theta)}{2}$$

münasibəti doğrudur, burada $I(\theta)$ – Fişer informasiyasıdır. K. – L. i. k.-nin digər xassələri [4], [5]-də verilmişdir.

K. – L. i. k. riyazi statistikada böyük yayınmalar ehtimallarının şərhində, xüsusilə də, empirik paylanma funksiyalarının böyük yayınmalarının şərhində mühüm rol oynayır və ardıcıl analiz, eksperimentin planlaşdırılması məsələlərində də istifadə olunur.

Əd.: [1] Kullback S., Leibler R. A., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, № 1, p. 79–86; [2] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [4] Бурнашев М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, № 6, с. 1203–26; [5] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

KULLBAK – LEYBLER İNFORMASİON MƏSAFƏSİ « Кульбака – Лейблера информационное расстояние; Kullback – Leibler information » – bax, *Böyük yayınmalar* empirik paylanma funksiyası üçün.

KULLBAK – LEYBLER – SANOV İNFORMASİON YAYINMASI « Кульбака – Лейблера – Санова информационное уклонение; Kullback – Leibler – Sanov information deviation » – bax, *Nisbi entropiya.*

KUMULYANT « кумулянт; cumulant » – bax, *Semi – invariant.*

KUMULYANTA « кумулянта; cumulant » – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

KUMULYATİV SPEKTR « кумулятивный спектр; cumulative spectrum » – bax, *Spektral semi – invariant.*

KUMULYATİV SPEKTRAL FUNKSİYA « кумулятивная спектральная функция; cumulative spectral function » – bax, *Spektral semi – invariant.*

KUMULYATİV SPEKTRAL SIXLIQ « кумулятивная спектральная плотность; cumulative spectral density » – bax, *Spektral semi – invariant.*

KUNİTA – VATANABE BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Куниты – Ватанабэ неравенства; Kunita – Watanabe inequality » – *kvadratik inteqrallanan* X, Y *martinqalları* və ölçülən təsadüfi H, K funksiyaları üçün elə bərabərsizliklərdir ki, bunlarda hökm olunur ki,

$$\int_0^T |H|\,|K|\,|d\langle X, Y\rangle| \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T H^2 d\langle X, X\rangle\right)^{1/2} \left(\int_0^T K^2 d\langle Y, Y\rangle\right)^{1/2} \qquad (1)$$

$$\int_0^T |H|\,|K|\,|d[X, Y]| \leq$$

$$\leq \left(\int_0^T H^2 d[X, X]\right)^{1/2} \left(\int_0^T K^2 d[Y, Y]\right)^{1/2} \qquad (2)$$

sanki yəqin ödənilir, burada T – dayanma anı, $\langle X,X\rangle$, $\langle Y,Y\rangle$ elə artan öngörül proseslərdir ki, $X^2-\langle X,X\rangle$, $Y^2-\langle Y,Y\rangle$ martinqallardır,

$$\langle X,Y\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle X+Y,X+Y\rangle - \langle X,X\rangle - \langle Y,Y\rangle\right),$$

$$[X,X]_t = \langle X^c,X^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(\Delta X_s)^2,$$

$$[X,Y]_t = \langle X^c,Y^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(\Delta X_s)(\Delta Y_s).$$

(2) bərabərsizliyi lokal matinqallar üçün də doğrudur. (1) şəklində K. – V. b. ilk dəfə bütün inteqrallar qarşısında riyazi gözləmə işarəsi ilə [1]-də isbat olunmuşdur. (1), (2) bərabərsizlikləri [2]-də təyin olunmuşdur. K. – V. b. opsional martinqallar üçün də doğrudur.

Əd.: [1] K u n i t a H., W a t a n a b e S., «Nagoya Math. J.» 1967, v. 30, p. 209–45; [2] M e y e r P. A., «Lect. Notes in Math.», 1976, № 511, p. 246–400.

KÜKRƏNTİLƏR METODU « возмущений метод; perturbation method » e k s p e r i m e n t i n p l a n l a ş d ı r ı l m a s ı n d a – ətraf mühitin qorunması, peyk meteorologiyasının və s. mürəkkəb məsələlərinin həlli metodudur və Q. İ. Marçuk (bax, [1], [2]) tərəfindən işlənilmişdir. φ funksiyası $L\varphi = q$ tənliyinin həlli olsun, burada L – xətti operator, q – verilmiş funksiyadır. $L' = L + \delta L$ – kükrəmiş operator, φ' isə $L'\varphi' = q$ tənliyinin həlli olsun. Əgər L^* operatoru L operatoruna Laqranj üzrə qoşma operatordursa, onda

$$J_p = (\varphi, p) = (q, \varphi_p^*),$$

burada φ_p^*, – $L^*\varphi_p^* = p$ tənliyinin həllidir. J_p funksionalının kükrəntisi $\delta J_p = J_p - (\varphi', p)$ üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\delta J_p = -(\delta L\varphi', \varphi_p^*) = -(\delta L\varphi, \varphi_p^*) - (\delta L\delta\varphi, \varphi_p^*).$$

Əgər $\delta L L^{-1}$ operatorunun norması kiçik olarsa, onda

$$\delta J_p \approx -(\delta L\varphi, \varphi_p^*).$$

Eksperimentdə N sayda (φ, p_j), $j=1,...,N$ funksionallarının xəta ilə ölçüldüyü fərz olunur və $\delta L = \sum_{i=1}^{m} \theta_i A_i$ təyin olunmalıdır, burada θ_i – naməlum parametrlər, A_i – apriori verilmiş operatorlardır. Onda

$$(\delta L\varphi, \varphi_{p_j}^*) \approx \delta J_{p_j} \quad j=1,...,N.$$

$N \ge m$ olsun. θ_i parametrlərini ən kiçik kvadratlar metodu vasitəsilə qiymətləndirmək olar. Eksperimentin planlaşdırılması məsələsi θ_i parametrlərinin qiymətlərinin təyin olunmasında xətanın minimal olmasını təmin edən funksiyanın seçilməsindən ibarətdir. Funksional fəzalarda eksperimentin planlaşdırılması metodlarından fərqli olaraq (bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin* r i y a z i f i z i k a n ı n t ə r s m ə s ə l ə l ə r ü ç ü n). K. m. sistematik xətanı düz tənliyin və qoşma kükrəntisiz tənliklərin həlli yolu ilə nəzərə alır.

Əd.: [1] M a r ç u k Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] M a r ç u k Г. И., E r m a k o v С. М., в кн.: Математические методы планирования эксперимента, Новосиб., 1981, с. 3–18; [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1987.

KÜTLƏVİ XİDMƏT NƏZƏRİYYƏSİ « массового обслуживания теория; theory of queues » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi.*

KVADRATİK BALANSLAŞDIRILMIŞ MODEL « квадратично сблансированная модель; quadratically–balanced model » – $R(y, F(\theta), I)$ xətti *reqression eksperimentidir*, $F = f(x_1), ..., f(x_N)$, $f: X \to \mathbb{R}^p$, bu eksperimentin $F(F^{\mathsf{T}}F)^{-1}F^{\mathsf{T}}$ matrisinin bütün diaqonal elementləri üst-üstə düşür, bu isə $f^{\mathsf{T}}(x_i)\hat{\theta}$, $i = 1, ..., N$ kəmiyyətinin dispersiyalarının bərabər olmasına ekvivalentdir, burada $\hat{\theta}$, – θ-nın ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətidir. Əgər $\xi = \{x_1, ..., x_N\}$ planı D – optimal plan olarsa, onda uyğun reqresssion eksperiment K. b. m.-dir. Ölçmə xətalarının paylanması normal olmadığı halda $\theta = 0$ hipotezinin yoxlanılması üçün F – kriterinin dayanıqlılığı ondan ibarətdir ki, böyük həcmli seçimlərdə K. b. m. üçün F – kriterinin mühümlük ölçüsünün ayrılışında birinci həddsonlu dördüncü tərtib momentləri olan bütün paylanmalar üçün asimmetriya və eksses əmsalından asılı olmur.

KVADRATİK XARAKTERİSTİKA(s ı) m a r t i n q a l ı n **« квадратическая характеристика** м а р т и н г а л а; **quadratic characteristic** o f a m a r t i n g a l e **»** – bax, *Martinqal*; k v a d r a t i k x a r a k t e r i s t i k a, *Semimartinqal*.

KVADRATİK XƏTA « квадратичная ошибка; mean squared error / quadratic error » – bax, *Kvadratik / standart yayınma*.

KVADRATİK İNTEQRALLANAN MARTİNQAL « квадратично интегрируемый мартингал; square integrable martingale » – hər bir $t \ge 0$ üçün $\mathbf{M}\zeta_t^2 < \infty$ şərtini ödəyən $\zeta = (\zeta_t)_{t\ge 0}$ *martinqalıdır*.

$$\sup_{t\ge 0} \mathbf{M}\zeta_t^2 < \infty$$

olduğu halda

$$\mathbf{M}\sup_{t\ge 0} \zeta_t^2 < \infty$$

bərabərsizliyi doğrudur və bu halda ζ m ü n t ə z ə m k v a d r a t i k i n t e q r a l l a n a n m a r t i n q a l d ı r. Əgər hər bir $n \ge 1$ üçün və hər hansı azalmayan Markov anlarının

$$\lim_n T_n = \infty \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin})$$

şərtini ödəyən $(T_n)_{n\ge 1}$ ardıcıllığı üçün $\zeta^{T_n} = (\zeta_{t\wedge T_n})_{t\ge 0}$ müntəzəm K. i. m. olarsa, ζ prosesi l o k a l k v a d r a t i k i n t e q r a l l a n a n martinqal adlanır. Hər bir lokal K. i. m. lokal martinqaldır və onun $\zeta = \zeta^c + \zeta^d$ şəklində ayrılışı vardır, burada ζ^c – lokal K. i. m.-dır və onun trayektoriyaları kəsilməzdir, $\zeta_0^c = 0$, ζ^d – xalis kəsilən lokal K. i. m.-dır.

Hər bir lokal K. i. m. olan ζ üçün $\zeta_0 = 0$ olduğu halda, $\langle\zeta\rangle = \left(\langle\zeta\rangle_t\right)_{t\geq 0}$ kvadratik xarakteristikası elə öngörül artan təsadüfi proses kimi təyin olunur ki, $\zeta^2 - \langle\zeta\rangle$ – lokal martinqaldır.

Əd.: [1] K u n i t a H., W a t a n a b e S., «Nagoya Math. J.», 1967, № 30, p. 209–45; [2] M e y e r P. A., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., M., 1973; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, M., 1986.

KVADRATİK İTKİ FUNKSİYASI « квадратическая функция потерь; quadratic loss function » – bax, *İtki funksiyası*.

***KVADRATİK ORTA XƏTA / STANDART XƏTA « среднеквадратическая ошибка / погрешность; mean square error »** – hər hansı θ parametrinin *meylsiz statistik qiyməti* $\widetilde{\theta}$ üçün $\delta^2 = \mathbf{M}\left|\widetilde{\theta} - \theta\right|^2$ düsturu ilə təyin olunan kəmiyyətə deyilir. $\mathbf{M}\widetilde{\theta} = \theta$ şərtinin ödənilməsi ölçmə zamanı sistematik xətanın olmadığını göstərir. $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}(X)$, – θ parametrinin X-in müşahidəsi üzrə qurulmuş meylsiz statistik qiyməti olsun, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$; yəni $\mathbf{M}\widetilde{\theta} = \theta$. Fərz olunur ki, $\widetilde{\theta}$-nin dispersiyası $\mathbf{D}\widetilde{\theta} = \mathbf{M}(\widetilde{\theta} - \mathbf{M}\widetilde{\theta})^2$ sonludur, $\mathbf{D}\widetilde{\theta} < \infty$. $\sqrt{\mathbf{D}\widetilde{\theta}}$ kəmiyyəti K. o. x.-dır, θ parametrini yalnız təqribən qiymətləndirir.

KVADRATİK ORTA REQRESSİYA « средняя квадратическая регрессия; mean square regression » – x üzrə Y-in *reqressiyası* modelidir: x-in funksiyası olan $m(x)$, Y-in $m(x)$-dən kvadratik orta yayınması – $\mathbf{M}(Y - m(x))^2$ riyazi gözləməsini minimallaşdırır.

KVADRATİK ORTA YAYINMA « среднеквадратическое отклонение; root mean square deviation, RMSD » – bax, *Kvadratik / standart yayınma.*

KVADRATİK ORTA YAYINMA(sı) **seçimin « среднее квадратичное отклонение** выборки; **sample standart deviation, standart error »** – bax, *Səpələnmə*(si) seçimin.

KVADRATİK RİSK « квадратичный риск; quadratic risk » – bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin*, *Xətti interpolyasiya*(sı) reqressiya funksiyasının.

KVADRATİK VARİASİYA(sı) martinqalın **« квадратическая вариация** мартингала; **quadratic variation** of a martingale **»** – bax, *Martinqal*; kvadratik variasiya.

***KVADRATİK / STANDART YAYINMA « квадратичное отклонение, квадратичное уклонение, стандартное отклонение; quadratic / standart deviation / mean squared error »** – $x_1, \ldots, x_n$ kəmiyyətlərinin verilmiş a kəmiyyətindən kvadratik orta yayınmasıdır, yəni

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2}{n}}.$$

K. y. ən kiçik qiymətini $a = \bar{x}$ olduqda alır, burada $\bar{x}$, – $x_1, \ldots, x_n$ kəmiyyətlərinin ədədi ortasıdır, yəni $\bar{x} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$. Bu halda K. y. $x_1, \ldots, x_n$ kəmiyyətləri sisteminin səpələnmə ölçüsünü ifadə edir. Bundan başqa,

$$\sqrt{\frac{p_1(x_1 - a)^2 + \ldots + p_n(x_n - a)^2}{p_1 + \ldots + p_n}}$$

düsturu ilə ifadə olunan və daha ümumi çəkili kvadratik yayınma adlandırılan yayınma anlayışından da istifadə olunur; $p_1, \ldots, p_n$ ədədləri bu halda çəkilər adlanır və bunlar $x_1, \ldots, x_n$ kəmiyyətlərinə uyğun olaraq götürülür. Çəkili K. y. ən kiçik qiymətini a-nın

$$(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)/(p_1 + \ldots + p_n)$$

çəkili ortaya bərabər olduğu halda alır.

Ehtimal nəzəriyyəsində ξ təsadüfi kəmiyyətinin K. y. σ_ξ (ξ-nin öz riyazi gözləməsindən K. y.) dispersiyanın kvadratik kökünə, yəni $\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ kəmiyyətinə deyilir. K. y. statistik qiymətlərin keyfiyyət ölçüsü kimi istifadə olunur və bu halda o, kvadratik xəta adlanır.

KVADRATUR DÜSTURLAR təsadüfi düyünlərli **« квадратурные формулы** со случайными узлами; **quadrature formulae** with random nodes **»** – təsadüfi kvadratur

$$x[f] = \sum_{i=1}^{N} A_i(x_1, \ldots, x_N) f(x_i)$$

cəminin

$$I[f] = \int f(x)\, \mu(dx)$$

inteqralına bu inteqralın statistik qiyməti kimi qarşı qoyulmasıdır.

Burada μ, – X çoxluğunda verilmiş ehtimal ölçüsü, A_i, $i = 1, \ldots, N$, – X^N-də verilmiş funksiyalar (düsturun əmsalları), $x_1, \ldots, x_N$ (funksiyanın düyün nöqtələri), – X^N-də paylanması $\mathscr{Y}$ ilə verilən təsadüfi kəmiyyətlərdir. A_i funksiyaları və $\mathscr{Y}$ paylanması düsturun keyfiyyət kriterisinin minimumu şərtindən seçilir, bu, adətən, birinci mütləq moment və ya $R[f] = I[f] - x[f]$ qalığının ikinci momenti olur. Əgər f funksiyası verilmiş tərtib xüsusi törəmələri olan funksiyalar sinfi F-dən olarsa, X – hiperkub, μ – Lebeq ölçüsü olarsa və x kvadratur (kubatur) cəmlərin hər hansı $\mathscr{K}$ çoxluğundan təsadüfi seçilərsə, onda $\mathscr{K}$ və $\mathscr{Y}$-i elə seçmək mümkün olar ki, $\mathbf{M}\left|R[f]\right|$ F-də $\left|R[f]\right|$-də $\sqrt{N}$ dəfə tez azalsın. $n = N$ olduqda $L^2(\mu)$-də ortonormalanmış funksiyaların qeyd olunmuş toplusu $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ üçün $R[\varphi_i] = 0$ şərtləri $\Delta = \det\left\|\varphi_i(x_j)\right\|_{i,j=1}^n$ determinantı sıfırdan fərqli olduqda interpolyasion – kvadratur düsturu birqiymətli

təyin edirlər. $\mathcal{Y}(d(x_1, ..., x_N)) = \Delta^2 \mu(dx_1) \dots \mu(dx_N)/n!$ kimi seçilərsə, x -in meylsizliyi təmin olunur:

$$\mathbf{M}\, x[f] = \int \varphi(x) f(x)\, \mu(dx)\,.$$

Δ^2 vuruq kimi daxil olan sonsuz sayda g sıxlıqarı vardır və bunlar interpolyasion – kvadratur cəmin meylsizliyini təmin edir. Əgər W elə (x, g) cütlərinin çoxluğu olarsa ki, x meylsiz və $Q(x, g)$ – verilmiş keyfiyyət kriterisi olsun, onda statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində olduğu kimi W -da dominarlıq anlayışı və bu kriteriyə və interallanan funksiyaların F sinfinə nəzərən məqbulluq anlayışı təyin olunur. $F \subset L^2(\mu)$ üçün Monte – Karlo metodunun ən sadə proseduru $\mathbf{D}x[f]$ -ə nəzərən laylı seçim metodu ilə dominarlanır, yəni bu prosedur məqbul olmur. Dispersiyaya nəzərən məqbul (x, g) cütləri, bir qayda olaraq, asılı düyünlərə malik olur. Məs., (x, g) cütündə düyünlərdən biri təsadüfi seçilib, digərləri ondan funksional asılı olarsa (bir sərbəstdüyünlü K. d.; bax, [2]), bu cüt məqbul olur. Təsadüfi düyünlərli K. d. Monte – Karlo metodunun ən sadə prosedurunun ümumiləşməsidir. Klassik və nəzəri – ehtimali ədədi metodlar birlikdə sonuncuların effektivliyini artırmağa imkan yaradır və əksər hallarda, μ ölçüsü mürəkkəb xüsusiyyətli olduqda çoxdəyişənli funksiyanın inteqralının hesablanmasında yeganə vasitə olur.

Əd.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] Соболь И. М., Численные методы Монте–Карло, М., 1973.

KVADRATUR SPEKTR « квадратурный спектр; quadrature spectrum » – bax, *Kospektr* və *kvadratur spektr*.

KVADRATUR SPEKTRAL FUNKSİYA « квадратурная спектральная функция; quadrature spectral function » – bax, *Kospektr və kvadratur spektr*.

KVADRATUR SPEKTRAL SIXLIQ « квадратурная спектральная плотность; quadrature spectral density » – bax, *Kospektr və kvadratur spektr*.

KVANT BRAUN HƏRƏKƏTİ « квантовое броуновское движение; quantum Brownian motion » – bax, *Kvant stoxastik hesabı*.

KVANT DEKODLA(N)MASI « квантовое декодирование; quantum decoding » – bax, *Kvant rabitə kanalı*.

KVANT DİNAMİK SEMİ – QRUP « квантовая динамическая полугруппа; quantum dynamical semigroup » – *Markov inikaslarının* elə semi – qrupudur ki, açıq kvant sisteminin çevrilməyən evolyusiyasını ümumi halda bu sistemin fəzasında təyin edir. $\mathscr{B}$ vahidi olan ixtiyari W^* – cəbr olsun (bax, *Cəbri*, *müşahidələnənlərin*). Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində Markov dinamik semi–qrupu $\mathscr{B}$ -də normal Markov inikaslarının elə $\{\Phi_t,\ t \in \mathbb{R}_t\}$ ailəsinə deyilir ki,

1) $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s},\quad t, s \in \mathbb{R}_+$

2) $\Phi_t(X) \to X$ münasibəti $t \to 0$ olduqda bütün $X \in \mathscr{B}$ üçün $\mathscr{B}$ -nin zəif $*$ – topologiyası mənasında ödənilsin. Əgər $\mathscr{B}$ hər hansı «faza» fəzası E -də funksiyaların kommutativ cəbridirsə, onda bu anlayış qiymətləri E -dən olan klassik Markov prosesinə müvafiq keçid operatorlarının semi – qrupuna gətirilir.

Əgər $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ hər hansı kvantmexaniki sisteminin Hilbert fəzası $\mathscr{H}$ -da bütün məhdud operatorların cəbri olarsa, onda K. d. s. anlaşılır.

Əgər $\{\Phi_t\}$ K. d. s. norma üzrə kəsilməz olarsa, onda adi qaydada təyin olunan infinitezimal L operatoru məhduddur və aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$L(X) = i[H, X] + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (V_j^* X V_j - (V_j^* V_j X + X V_j^* V_j)/2),$$

burada $[H, X] = HX - XH$ və $H,\ \sum_{j=1}^{\infty} V_j^* V_j \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (bax, [2]).

Digər problem Markov semi – qrupunun avtomorfizmlər qruppuna qədər genişləndirilməsinin öyrənilməsidir, yəni açıq kvant sisteminin çevrilməyən Markov dinamikasının «böyük» sistemin çevrilən dinamikasının proyeksiyası şəklində ifadə olunmasıdır. Klassik kommutativ halda bu problem keçid inikaslarının verilmiş semi – qrupu üzrə Markov prosesinin qurulmasına gətirilir və bu problemin həlli Kolmoqorov – Daniyel konstruksiyası ilə verilir. Ümumi halda $\mathscr{B}$ -də ixtiyari $[\Phi_t]$ Markov semi – qrupu üçün unitar genişlənmə vardır, yəni $\mathscr{B}$ j_0 cəbrinin hər hansı $\mathscr{A}$ C^* – cəbrinə daxil edilməsi, $\mathscr{A}$ cəbrinin $*$ – avtomorfizmlərinin (hərəkətlərinin) $\{\alpha_t\}$ qrupu və $\mathscr{A}$ -dan $\mathscr{A}_0 = j_0(\mathscr{B})$ -yə elə $\mathbf{M}_0$ riyazi gözləməsi vardır ki, $\Phi_t = j_0^{-1} \mathbf{M}_0 \alpha_t j_0$ münasibəti ödənilir (bax, *Kvant təsadüfi prosesi*). Xüsusi və fiziki izahlı kəsilməzlik (normallıq), Markovluq, stasionarlıq kimi xassələrə malik genişlənmələrin qurulması maraq doğuran problemlərdən sayılır.

Əd.: [1] Davies E., Quantum theory of open sistems, L., 1976; [2] Lindblad G., «Comm. Math. Phys.», 1976, v. 48, p. 119–30; [3] Холево А. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 83, М., 1991, с. 3–132.

KVANT EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ « квантовая теория вероятностей; quantum probability theory » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

KVANT EVKLİD MEYDANI « квантовое евклидово поле; quantum Euclidien field » – bax, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi.*

KVANT KODLA(N)MASI « квантовое кодирование; quantum coding » – bax, *Kvant rabitə kanalı*.

KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ aksiomatik **« квантовая теория поля** аксиоматическая; axiomatic **quantum field theory »** – bax, *Aksiomatik kvant ehtimal nəzəriyyəsi.*

KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ Evklid **« квантовая теория поля** евклидова; Euclidean **quantum field theory »** – bax, *Evklid kvant meydan nəzəriyyəsi.*

KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİ konstruktiv **« квантовая теория поля** конструктивная; constructive **quantum field theory »** – bax, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi.*

KVANT NƏZƏRİYYƏSİ, HİPOTEZLƏRİN YOXLANILMASI VƏ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİNİN « квантовая теория проверки гипотез и оценивания; quantum hypotheses testing and estimation theory » – ölçmə dəqiqliyi və qərarların qəbul edilməsi üçün bu ölçmələrə əsaslanan prosedurların keyfiyyəti üzərinə qoyulacaq prinsipial kvant – mexaniki məhdudiyyətləri öyrənən statistik nəzəriyyədir. Statistik qeyri – müəyyənliyin təsviri üçün H. y. və q. k. n. kvant mexanikasının riyazi aparatını – Hilbert fəzasında operatorlar nəzəriyyəsini istifadə edir. Beləliklə, H. y. və q. k. n. adi statistik həllər nəzəriyyəsinin «qeyri – kommutativ» analoqudur və bu nəzəriyyə qeyri – müəyyənliyin klassik ehtimal modelinə əsaslanaraq, daha ümumi sxemə onunla birlikdə daxil oluna bilinər (bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi*, *Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi*). H. y. və q. k. n. optik əlaqə nəzəriyyəsinin məsələlərinin həllindən 1970-ci illərdə yaranmışdır, lakin onun nəticələri universal xarakter daşıyıraq, fiziki ölçmələrin ekstremal dəqiqliyinə aid ixtiyari problemə tətbiq oluna bilinir.

Statistik həllərin klassik nəzəriyyəsində olduğu kimi, burada da naməlum θ parametrinin qiymətləri çoxluğu, u (ölçmə nəticələrinin) həllərinin (qərarlarının) çoxluğu U və θ parametrinin verilmiş qiymətində u həllinin keyfiyyətini təyin edən yayınma funksiyası $W_0(u)$-nun verildiyi fərz olunur. Prinsipial fərq statistik qeyri – müəyyənliyin verilməsi qaydasından ibarətdir: belə fərz olunur ki, θ-nın hər bir qiymətinə baxılan kvantmexaniki sistemin H Hilbert fəzasında bu sistemin statistik vəziyyətini müəyyən edən *sıxlıq operatoru* S_θ uyğundur. Həlledici qayda nəticələri U çoxluğundan olan kvant ölçməsi ilə təyin olunur. Kvant sisteminin fiziki məsələlərində informasiya daşıyıcısı yaranır, məs., parametrləri θ «faydalı siqnalından» asılı koherent elektromaqnit şüalanması. Kvant ölçməsi hər hansı qəbuledici – şüalanma cihazı ilə həyata keçirilir. Bu halda ölçmə keyfiyyəti və onun optimizasiyası üzərinə prinsipial kvant məhdudiyyətlərinin axtarılmasına və onun optimizasiyasına baxılır.

Θ və U – hipotezlərin yoxlanılmasına uyğun sonlu çoxluqlar olsun. Nəticələr çoxluğu U ilə kvant ölçməsi – vahidin H-da ayrılışı ilə, yəni

$$1)\quad M_u \geq 0\,, \qquad 2)\ \sum_{u\in U} M_u \;=\; \mathbf{I} \tag{1}$$

şərtlərini ödəyən operatorlar ailəsi $\boldsymbol{M} = \{M_u,\, u\in U\}$ ilə təsvir olunur, burada $\mathbf{I}$ vahidi operatordur. S_θ vəziyyətində u nəticəsinin ehtimalının $\mu_\theta^{\boldsymbol{M}}(u) = \operatorname{tr} S_\theta M_u$ olduğu fərz olunur. $\boldsymbol{M}$ ölçməsinə uyğun orta yayınma

$$R_\theta\{\boldsymbol{M}\} \;=\; \sum_{u\in U} W_\theta(u)\, \mu_\theta^{\boldsymbol{M}}(u)$$

düsturu ilə təyin olunur. Beləliklə, $\boldsymbol{M}$ ölçməsinin keyfiyyətini təyin edən və vahidin bütün mümkün ola bilən (1) ayrılışlarının qabaraq çoxluğu $\mathfrak{M}(U)$-da verilən affin funksionalların ailəsi – $\{R_\theta\{\boldsymbol{M}\}, \theta\in\Theta\}$ yaranır. Bu isə adi, statistik həllər nəzəriyyəsi ilə analogiyaya görə məqbul, minimaks, Beyes ölçmələri və s. üçün bir sıra təriflər verməyə imkan verir. H. y. və q. k. n.-nin səciyyəvi cəhəti ondan ibarətdir ki, həlledici qaydalar çoxluğu $\mathfrak{M}(U)$ olduqca daha mürəkkəb struktura malik olur.

Hipotezlərin yoxlanılmasının Beyes məsələsi. $\pi = \{\pi_\theta\}$, – Θ-da aprior ehtimal paylanması, $\hat{W}(u) = \sum_{\theta\in\Theta} \pi_\theta S_\theta W_\theta(u)$ – operator-aposterior yayınma funksiyası olsun.

$$R_\pi\{\boldsymbol{M}\} \;=\; \sum_{\theta\in\Theta} \pi_\theta\, R_\theta\{\boldsymbol{M}\} \;=\; \operatorname{tr} \sum_{u\in U} \hat{W}(u)\, M_u$$

– Beyes yayınması – $\mathfrak{M}(U)$ qabarıq çoxluğunda affin funksionaldır. $R_\pi\{\boldsymbol{M}\}$-i minimallaşdıran Beyes ölçməsi həmişə mövcuddur və $\mathfrak{M}(U)$-nun kənar nöqtələri arasında həmişə tapıla bilinir. Aşağıdakı kriteri doğrudur: $\boldsymbol{M}^0$ ölçməsi, yalnız və yalnız, o halda Beyes ölçməsidir ki,

$$\Lambda^0 \geq \hat{W}(u),\quad u\in U;\quad (\Lambda^0 - \hat{W}(u))M_u = 0,\quad u\in U \tag{2}$$

münasibətlərini ödəyən nüvə operatoru Λ^0 mövcud olsun. Bu zaman

$$\min_{\boldsymbol{M}} R_\pi\{\boldsymbol{M}\} \;=\; \max\{\operatorname{tr}\Lambda :\, \Lambda \leq \hat{W}(u),\, u\in U\}$$

ikilik münasibəti ödənilir və Λ^0 ikilik məsələsinin həlli (yeganə) olur.

Beyes məsələsi bir sıra maraqlı hallarda aşkar həll olunur: iki hipotezin yoxlanılması məsələsində, bütün $W(u) - W(u')$ operatorları kommutasiya olunduqları halda, çevirmələrin hər hansı qrupuna nəzərən simmetrik kovariant məsələlərdə (bax, [3] – [5]).

Prinsipial çətinlik kvant ölçmələri çoxluğu $\mathfrak{M}(U)$-nun kənar nöqtələrinin aşkar təsvirinin olmaması ilə izah olunur. Klassik halda bütün həlledici qaydalar çoxluğunun kənar nöqtələri determinik qaydalar və yalnız bu qaydalardır. Determinik qaydaların formal qeyri – kommutativ analoqu $\boldsymbol{E} = \{E_u,\, u\in U\}$ vahidinin ortoqonal ayrılışlarını təsvir edən sadə ölçmələrdir və bu ayrılışlardakı E_u operatorları H-da qarşılıqlı ortoqonal altfəzalara proyektorlardır. Hər bir sadə ölçmə $\mathfrak{M}(U)$ çoxluğunun kənar nöqtəsidir. Qeyd etmək lazımdır ki, kvant mexanikasının standart dürüst ifadə edilməsində, onun yarandığı zamandan yalnız belə ölçmələrə baxılmışdır (bax, [1]). Lakin $\boldsymbol{M} = \{M_u\}$ ailəsinin vahidinin hər bir ayrılışı üçün H_0 Hilbert fəzası, H_0-da sıxlıq operatoru S_0 və $\boldsymbol{E} = \{E_u\}$ vahidinin Hilbert fəzalarının $H\otimes H_0$ tenzor hasilində elə ortoqonal ayrılışı vardır ki, H-da ixtiyari operator sıxlığı S üçün

$$\operatorname{tr} S M_u = \operatorname{tr}(S\otimes S_0)E_u\,,\quad u\in U$$

münasibəti ödənilir.

Fiziki anlamda bu H. y. və q. k. n. mənasında hər bir ölçmənin ilkin sistemin hər hansı genişlənməsi üzərində sadə ölçməyə statistik ekvivalent olması və bu genişlənmiş sistemin S_0 vəziyyətindəki asılı olmayan kvant sistemini daxilinə almasıdır. Klassik nöqteyi – nəzərdən paradoksal fakt belə «kvant randomizasiyasının» ixtiyari sadə ölçmə ilə müqayisədə həlledici qaydanı verməsindədir, bu qayda ilkin sistemin vəziyyəti haqqında, ixtiyari sadə ölçmə ilə müqayisədə, daha çox informasiya daşıyır. Bu isə onun nəticəsində alınır ki, əgər U ikidən artıq elementdən ibarət

olarsa, $\mathfrak{M}(U)$ çoxluğunun kənar nöqtələri arasında vahidin qeyri – ortoqonal ayrılışları həmişə vardır (bax, [5]). Beləliklə, H. y. və q. k. n. kvant ölçmə nəzəriyyəsi anlayışının prinsipial genişləndirilməsi üçün mühüm arqument verir (digər tərəfdən, belə genişlənməyə kvant mexanikasına əməliyyat yanaşması adlandırılan yanaşma da səbəb olur; bax, [6]).

Qiymətləndirilmə məsələlərində Θ və U kəsilməz parametrik çoxluqlardır. U – ölçülən fəza, $\mathscr{B}(U)$, – U -nun uyğun σ – cəbri olsun; nəticələri U -dan olan ölçmə vahidin U -da ayrılışına deyilir; yəni H -da elə $\boldsymbol{M} = \{M(B),\ B \in \mathscr{B}(U)\}$ operatorlar ailəsinə deyilir ki, bu operatorlar aşağıdakı xassərə malikdirlər: 1) $M(B) \geq 0$, $B \in \mathscr{B}(U)$; 2) U fəzasının ixtiyari $\{B_i\}$ bölgüsü üçün $\sum_i M(B_i) = I$ bərabərliyi ödənilir, burada sıra güclü operator topologiyasında yığılır.

S_0 vəziyyətində $\boldsymbol{M}$ ölçməsinin ehtimal paylanması

$$\mu_\theta^M(B),\ \operatorname{tr} S_\theta M(B),\ B \in \mathscr{B}(U)$$

münasibətilə təyin olunur.

Hipotezlərin yoxlanılmasının kvant nəzəriyyəsinin nəticələrinin əksər hissəsi, o cümlədən, Beyes məsələləri, Θ və U -nun olduqca ixtiyari çoxluqlar olduğu halı üçün cəmlərin münasib surətdə müəyyən inteqrallarla əvəz olunması yolu ilə ümumiləşdirilir (bax, [4]). Kovariant məsələrlə üçün və Qauss (kvazigətirilən) vəziyyətləri ailələri üçün aşkar həllər alınmışdır (bax, [3] – [5], [7]).

Daha sonra $\Theta = U = \mathbb{R}^n$ halına baxılır. $X_1, \ldots, X_n$ uyuşan kvant müşahidələnənləri, yəni H -da verilən özü-özünə kommutasiya olunan operatorlar toplusu olsun (bax, *Müşahidələnən*). Belə topluya birqiymətli olaraq $\boldsymbol{E} = \{E(B),\ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\}$ birgə spektral ölçüsü qarşı qoyulur, bu ölçü $X_1, \ldots, X_n$ müşahidələnənlərinin dəqiq birgə ölçməsini təsvir edir. Hər bir $\boldsymbol{M}$ ölçməsi $\mathbb{R}^n$ -dən olan nəticələrlə ilkin sistemin hər hansı $H \otimes H_0$ genişlənməsində n sayda uyuşan müşahidələnənlərin dəqiq birgə ölçməsinə statistik ekvivalentdir.

$\{S_\theta\}$ vəziyyətlər ailəsinin verildiyi fərz olunur; $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_n] \in \mathbb{R}^n$. Nəticələri $\mathbb{R}^n$ -dən olan $\boldsymbol{M}$ ölçməsi üçün

$$\int \ldots \int x_j \mu_\theta^{\boldsymbol{M}}(dx_1 \ldots dx_n) \equiv \theta_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

şərti ödənilərsə, $\boldsymbol{M}$ ölçməsi meylsiz ölçmə adlanır. Meylsiz ölçmənin kovariasiya matrisi

$$D_\theta\{\boldsymbol{M}\} = \left[\int \ldots \int (x_j - \theta_j)(x_k - \theta_k)\mu_\theta^{\boldsymbol{M}}(dx_1 \ldots dx_n)\right]_{j,k=1}^n$$

üçün müəyyən requlyarlıq şərtləri daxilində Rao – Kramer bərabərsizliyinin qeyri – kommutativ analoqu –

$$D_\theta\{\boldsymbol{M}\} \geq \boldsymbol{J}_\theta^{-1} \tag{3}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada $\boldsymbol{J}_\theta = [\operatorname{tr} S_\theta (L_\theta^j \circ L_\theta^k)_{j,k=1}^n]$, L_θ^j, isə $S_\theta \circ L_\theta^j = \partial S_\theta / \partial \theta_j$, $j = 1, \ldots, n$ tənliklərini ödəyən, simmetrik loqarifmik törəmələr operatorlarıdır. Burada $X \circ Y = (XY + YX)/2$ – operatorların Jordan hasilidir. Bundan başqa, digər

$$D_\theta\{\boldsymbol{M}\} \geq \widetilde{\boldsymbol{J}}_\theta^{-1} \tag{4}$$

bərabərsizliyi də ödənilir, burada $\widetilde{\boldsymbol{J}}_\theta^{-1} = [\operatorname{tr} S_\theta \widetilde{L}_\theta^j (\widetilde{L}_\theta^k)^*]_{j,k=1}^n$, $\widetilde{L}_\theta^j$ isə $S_\theta \circ \widetilde{L}_\theta^j = \partial S_\theta / \partial \theta_j$, $j = 1, \ldots, n$ tənliklərini ödəyən sağ loqarifmik törəmələr operatorlarıdır. (3) və (4) bərabərsizlikləri $D_\theta\{\boldsymbol{M}\}$ üçün bir-birindən olduqca fərqli, müqayisə olunmayan sərhədlər verir (bax, [3]). Daha mürəkkəb ümumi sərhəd məlumdur və (3), həm də (4) bu sərhəddən alınır (bax, [5]).

H. y. və q. k. n.-nin ən başa çatdırılmış tövsiyyələr forması Qauss vəziyyətləri üçün alınır, bu halda kvant ölçmələrinin keyfiyyətinin yalnız çatıla bilinən sərhədlərini vermək, həm də optimal həlledici qaydanı tam təsvir etmək olur. Fərz olunur ki, Q_j, P_j, $j = 1, \ldots, s$ kvant müşahidələnənlərinin toplusu sərbəstlik dərəcəsi sayı s olan sistem üçün kanonik kommutativ münasibətlərin requlyar təsvirini əmələ gətirir:

$$[Q_j, P_k] = i\delta_{jk} I,$$

$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0, \quad j, k = 1, \ldots, s \tag{5}$$

və fərz olunur ki,

$$R(z) = \sum_{j=1}^s (x_j P_j + y_j Q_j),$$

burada $z = [x_1, y_1, \ldots, x_s, y_s]$. (5) münasibətləri

$$[R(z),\ R(z')] = -i\Delta(z, z')I$$

münasibətlərinə ekvivalentdirlər, burada

$$\Delta(z, z') = \sum_{j=1}^s (x_j y_j' - x_j' y_j),$$

cırlaşmayan çəpsimmetrik formadır. Sıxlıq operatoru S olan vəziyyətin kvant xarakteristik funksiyası

$$\operatorname{tr} S \exp[iR(z)] = \exp[im(z) - \alpha(z, z)/2] \tag{6}$$

şəklində olarsa, belə vəziyyətə Qauss vəziyyəti deyilir, burada $m(z)$ – xətti, $\alpha[z, z]$, – z -dən müsbət kvadratik formadır. (6) düsturunun sağ tərəfinin kvant xarakteristik funksiyası olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari z_j üçün

$$[\alpha(z_j, z_k)] \geq i[\Delta(z_j, z_k)]/2$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir. $m(z)$ forması orta qiymət, $\alpha(z, z)$ S vəziyyətində müşahidələnənlər ailəsinin korrelyasion funksiyası mənasında anlaşılır.

Nəticələri $\mathbb{R}^n$ -dən olan $\boldsymbol{M}$ ölçməsinin operator xarakteristik funksiyası

$$\int \ldots \int \exp\left(i \sum_{j=1}^n (t_j x_j)\right) M(dx_1 \ldots dx_n) =$$

$$= \exp\left[i \sum_{j=1}^n t_j R(z_j) - \sum_{j,k=1}^n \varkappa_{jk} t_j t_k / 2\right]$$

şəklində olarsa, $\boldsymbol{M}$ kanonik ölçmə adlanır, burada $[\varkappa_{ik}]$ – həqiqi matrisdir. Bu münasibətin ölçmə təyin etməsi üçün

$$[\varkappa_{ik}] \geq i[\Delta(x_j, z_k)]/2$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Kanonik ölçmə $H \otimes H_0 : X_j = R(z_j) \otimes I_0 + I \otimes R_j^0$, $j = 1, \ldots, n$ genişlənmiş fəzasında müşahidələnənlər toplusunun dəqiq birgə ölçməsinə ekvivalentdir, burada R_j^0, – H_0 fəzasında, S_0 – Qauss operator sıxlığına malik elə kanonik müşahidələnənlərdir ki, $[R_j^0, R_k^0] = i\Delta(z_j, z_k) I_0$; $\operatorname{tr} S_0 R_j^0 = 0$, $\operatorname{tr} S_0 (R_j^0 \circ R_k^0) = \varkappa_{jk}$.

$\{S_\theta\}$ qeyd olunmuş korrelyasiya funksiyasına və $m(z) = \theta_1 m_1(z) + \ldots + \theta_n m_n(z)$ şəklində orta qiymətə malik Qauss vəziyyətləri ailəsi olsun; $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n]$ parametri üçün $\operatorname{tr} \boldsymbol{G} D_\theta \{\boldsymbol{M}\}$ çəkili kvadratik orta xətasının minimumu mənasında ən yaxşı meylsiz $\boldsymbol{M}$ ölçməsi axtarılır, burada $\boldsymbol{G}$ qeyd olunmuş müsbət çəki matrisidir. H. y. və q. k. n.-nin ümumi teoremində hökm olunur ki, $\theta \in \mathbb{R}^n$ üzrə müntəzəm meylsiz ölçmə mövcuddur və o, kanonik ölçmələr sinfindədir (bax, [5]). Ən yaxşı ölçmə parametrləri – z_j, $\varkappa_{jk}$ ümumi halda $\boldsymbol{G}$-dən asılı hər hansı xətti tənliyi ödəyir.

H. y. və q. k. n. fiziki ölçmələrin dəqiqliyinin fundamental limitlərinin hesablanması üçün ümumi metodlar verir və bu metodlar mövcud prosedurların keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi üçün etalon hesab oluna bilinir. Problemin digər cəhəti haqqında – optimal ölçmə prosedurunun qurulması məsələsinə gəldikdə, H. y. və q. k. n. tətbiqi nöqteyi – nəzərdən son qərar verə bilmir, belə ki, ölçmə cıhazının statistikasının vahidin ayrılışı terminlərilə (və ya müşahidələnənlər terminlərilə) təsviri üzrə sintezinin universal qaydası yoxdur. Bu problem, mahiyyəti etibarilə H. y. və q. k. n.-nin çərçivəsi xaricindədir və kvant nəzəriyyəsində məşhur «ölçmə nəzəriyyəsi»-nə aiddir. Bununla yanaşı H. y. və q. k. n.-nin tövsiyyələri bir sıra hallarda optimal ölçmə probleminin bu fiziki tərəfini də əhatə edir (bax, [3], [5], [7]).

Əd.: [1] Н е й м а н Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] Н а й м а р к М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 3, с. 277–318; [3] Х е л с т р о м К., Квантовая теория проверки гипотез и оценивания, пер. с англ., М., 1979; [4] Х о л е в о А. С., Исследования по общей теории статистических решений, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 124; [5] Х о л е в о А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [6] D a v i e s E., Quantum theory of open systems, L. – [a. o.], 1976; [7] S t r a t o n o v i c h R. L., «Stochastics», 1973, v. 1, p. 87–126.

KVANT ÖLÇMƏSİ « квантовое измерение; quantum measurement » – bax, *Müşahidələnən*, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

KVANT RABİTƏ KANALI « квантовый канал связи; quantum communication channel » – məlumatlar daşıyıcısı kimi kvantmexaniki obyekt istifadə edən informasiya ötürmə (çevirmə) sistemidir. Məs., ixtiyari elektromaqnit rabitə kanalı, ciddi demək olar ki, K. r. k.-dır və bu kanala klassik kanal kimi yalnız bu və ya digər approksimasiya çərçivəsində baxılır. 1940-cı illərdə D. Qaborun (D. Gabor) işlərində holoqrafiyanın fiziki əsasları qoyulmaqla yanaşı, informasiyanı ötürmə imkanlarına kvantmexaniki məhdudiyyətlərin qoyulması məsələsi ilk dəfə qaldırılmışdır. Bu prinsipial məhdudiyyətlərin riyazi tədqiqi K. r. k. nəzəriyyəsinin mövzusudur.

Siqnallar fəzası Θ-da, ehtimal paylanmaları ilə təsvir olunan klassik məlumatdan fərqli olaraq, kvant məlumatı Hilbert fəzası H-da verilən kvantmexaniki obyektə uyğun *operator sıxlığı* (vəziyyət) ilə ifadə olunur. Hər bir rabitə kanalına girişdəki məlumatlar çoxluğunun çıxışdakı məlumatlar çoxluğuna affin inikası (qabarıq kombinasiyaları dəyişməz saxlayan) kimi baxmaq olar. Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində rabitə kanalını təsvir edən inikas – çıxışda müşahidələnənlər cəbrinin rabitə kanalının girişində müşahidələnənlər cəbrinə – keçid inikasına qoşma inikas kimi yaranır (bax, *Markov inikası*). Məs., kvant kodlaması giriş siqnallar fəzası Θ-da ehtimal paylanmalarının çoxluğu $\mathscr{P}(\Theta)$-nın H-da bütün sıxlıq operatorlarının çoxluğu $\mathfrak{S}(H)$ çoxluğuna affin inikası C-dir. Kodlamanı vermək üçün $\theta \in \Theta$ nöqtələrində topalanmış paylanmaların obrazları S_θ-ları göstərmək kifayətdir. Əslində K. r. k., H və H' – kanalın giriş və çıxışını təsvir edən Hilbert fəzaları olduqda, $\mathfrak{S}(H)$-dan $\mathfrak{S}(H')$ çoxluğuna affin inikasdır. Kvant dekodlaması $\mathfrak{S}(H')$-dən $\mathscr{P}(U)$-ya D affin inikasıdır, burada U çıxışdakı siqnallar fəzasıdır. Dekodlamanı H'-də vahidin ayrılışı ilə vermək məqsədəuyğundur, yəni

$$(DS)(du) = \operatorname{tr} S M(du)$$

düsturu üzrə, qiymətləri U-dan olan $M(du)$ ölçməsi ilə.

Məlumatların ötürülməsi, klassik informasiya nəzəriyyəsində olduğu kimi

$$\mathscr{P}(\Theta) \xrightarrow{C} \mathfrak{S}(H) \xrightarrow{L} \mathfrak{S}(H') \xrightarrow{D} R(U) \qquad (*)$$

sxemi ilə təsvir olunur və bu halda çıxışdakı siqnalın girişdəki siqnala nəzərən şərti ehtimalı

$$\mathbf{P}_{C,D}(du \mid \theta) = \operatorname{tr} L(S_\theta) M(du)$$

düsturu ilə verilir.

Mühüm məsələ verilən kvant kanalı L üzrə məlumat ötürmə üçün optimal qaydanın tapılmasıdır. Hər hansı keyfiyyət funksionalı $Q\{\mathbf{P}_{C,\Delta}(du \mid \theta)\}$ daxil olunur və bu funksionalın C və D üzrə ekstremumunu tapmaq tələb olunur. C qeyd olunub və yalnız D-nin dəyişdiyi hal üçün məsələ daha çox öyrənilmişdir (bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*).

$$J(P, C, D) = \int_\Theta \int_U \mathbf{P}(d\theta)\, \mathbf{P}_{C,D}(du \mid \theta)\, \ln \frac{\mathbf{P}_{C,D}(du \mid \theta)}{\int_\Theta \mathbf{P}_{C,D}(du \mid \theta') \mathbf{P}(d\theta')}$$

informasiya miqdarı, $C_1 = \sup_{\mathbf{P}, C, D} J(\mathbf{P}, C, D)$, L^n – kanalın n-ci qüvvət üstü olsun:

$$L^n : \mathfrak{S}(H) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{S}(H) \to \mathfrak{S}(H') \otimes \ldots \otimes \mathfrak{S}(H').$$

L^n kanalı üçün (*)-ya analoji diaqrama baxmaq və uyğun C_n kəmiyyətini təyin etmək olar. L kanalının orta ötürücülük

qabiliyyəti $C = \sup_n (C_n/n)$ kimi təyin olunur. Klassik nöqteyi – nəzərdən, K. r. k.-nın qeyri – adi xassəsi, bu halda «yaddaşın» olmasıdır, odur ki, ümumi halda $C_n > nC_1$ və $C > C_1$ olur.

«Ötürücülük» qabiliyyəti üçün aşkar ifadə kvant kodlama teoremi ilə verilir: $H(S) = -\operatorname{tr} S \ln S$ kvant vəziyyəti S-in entropiyası olduqda,

$$C = \sup_{\mathbf{P}} [H\left(\int S_\theta \mathbf{P}(d\theta)\right) - \int H(S_\theta)\mathbf{P}(d\theta)].$$

Məs., siqnalın orta gücünə məhdudiyyətə malik kvant Qauss kanalı üçün

$$C = \ln\left(1 + \frac{E}{N+1}\right) + \\ + \left[(E+N)\ln\left(1 + \frac{1}{E+N}\right) - N\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right],$$

burada E – siqnalın gücü, N – Qauss K. r. k.-nın kvantlarının orta sayıdır.

Əd.: [1] Холстром К., Кантовая теория проверки гипотез и оценивания, пер. с англ., М., 1979; [2] Холево А. С., Квантовые теоремы кодирования, «Успехи матем. наук», 1998, т. 53.

KVANT STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİYİ « квантовое стохастическое дифференциальное уравнение; quantum stochastic differential equation » – bax, *Kvant stoxastik hesabı*.

KVANT STOXASTİK HESABI « квантовое стохастическое исчисление; quantum stochastic calculus » – stoxastik differensial hesabının operator ümumiləşməsidir, K. s. h. kvant Braun hərəkəti prosesi $\{A_t, t \geq 0\}$ prosesinə əsaslanır, yəni elə $\{A_t\}$ prosesinə ki, bu proses hər hansı Hilbert fəzasında operatorlar ailəsidir və aşağıdakı kommutasiya münasibətlərini ödəyir:

$$[A_t, A_s] = 0,\ [A_t^+, A_s^+] = 0,\ [A_t, A_s^+] = \min(t, s), \quad (1)$$

burada $[A, B] = AB - BA$, – A və B operatorlarının kommutatoru, A^+, – A operatoruna qoşma operatordur. Bundan başqa, elə vəziyyət verilir ki, bu vəziyyətə nəzərən, $\{A_t\}$ kvant Qauss paylanmasına malik olur (məs., $\{A_t + A_t^+\}$ və $\{i^{-1}(A_t - A_s^+)\}$ ailələri bir-birilə kommutasiya münasibətlərini ödəmirlər, lakin paylanma üzrə adi Viner prosesinə ekvivalentdirlər). Kvant stoxastik diferensial

$$dX = dA^+ F + G\,dA + H\,dt \quad (2)$$

tənliklərinin nəzəriyyəsi işlənilmişdir, burada $\{X_t, F_t, G_t, H_t\}$, – $\{A_t\}$ prosesinin doğurduğu W^* – cəbrlər axını ilə uzlaşdırılmış operatorlar ailəsidir. Hasillər üçün İto düsturunun aşağıdakı ümumiləşməsi doğrudur: əgər $\{M_t\}$, $\{N_t\}$, – (2) tipli tənliklərlə təyin olunan proseslər olarsa, onda

$$d\,MN = dM \cdot N + M \cdot dN + dM \cdot dN,$$

burada dA^+, dA, dt bazis differensiallarının hasili sıfra bərabər hesab olunur, lakin $dA_t\,dA_t^+ = dt$ halı istisna olunur (kvant Braun hərəkəti halında minimal dispersiya ilə). K. s. h. sxeminə, təbii olaraq, Puasson prosesi və onun kommutativ ümumiləşmələri üzrə inteqrallanma daxil olunur.

(1) kommutasiya münasibətləri bozon sistemləri üçün səciyyəvidir; əgər $[A, B]$ kommutatoru antikommutator $\{A, B\} = AB + BA$ ilə əvəz olunarsa, onda fermion kvant Braun hərəkəti alınır və bu hərəkət üçün uyğun stoxastik hesab vardır. K. s. h. *kvant dinamik semi – qrupların* genişlənməsində (bax, *Kvant təsadüfi prosesi*), martinqallar nəzəriyyəsində və stoxastik inteqral nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Parthasarathy K., An introduction to quantum stochastic calcules, Basel, 1992; [2] Meyer P-A., Quantum probability for probabilists, B., 1993; [3] Квантовые случайные процессы и открытые системы, пер. с англ., М., 1988.

KVANT TƏSADÜFİ PROSESİ « квантовый случайный процесс; quantum stochastic process » – *qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin* vasitələrilə açıq (kvant) sistemin stoxastik evolyusiyasını təsvir etmək üçün riyazi modeldir. K. t. p.-nin nəzəri tərifində qarşıya çıxan çətinlik onunla izah olunur ki, sonluölçülü paylanmaların birqiymətli qeyri – kommutativ analoqu yoxdur. Müxtəlif zaman anlarındakı müşahidələnənlər, ola bilər ki, kommutasiya münasibətlərini ödəməsinlər və beləliklə də, bu halda bunların birgə paylanmaları da olmaya bilir. Buna görə də, K. t. p.-nin təsadüfi proses anlayışının müxtəlif qeyri – kommutativ ümumiləşmələrinə uyğun müxtəlif tərifləri mümkündür. Klassik tərifə ən yaxın olan, [1]-də təklif olunmuş tərifdir; bu tərifdə K. t. p. $(\mathscr{A}, (j_t)\, t \in \mathbb{R}, \varphi)$ üçlüyü ilə verilir və burada $\mathscr{A}$ – vahidi olan $*$ – cəbridir (adətən, C^* – və ya W^* – cəbri), j_t (hər bir $t \in \mathbb{R}$ üçün) vahidi olan, qeyd olunmuş $\mathscr{B}$ $*$ – cəbrinin $\mathscr{A}$ $*$ – cəbrinə $*$ – homomorfizmidir (cəbr əməlləri və involyusiyanı dəyişməz saxlayan), φ isə $\mathscr{A}$-da *vəziyyətdir* (bax, *Cəbri*, *müşahidələnənlərin*).

Klassik halda $\mathscr{A}$ və $\mathscr{B}$ uyğun olaraq elementar nəticələr fəzasında və faza fəzası E-də ölçülən məhdud funksiyaların kommutativ cəbrləridir, j_t qiymətləri E-dən olan Ω-da verilən təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi ilə təyin olunur, φ, – Ω-da ehtimal ölçüsünə uyğun riyazi gözləmədir. Təbii requlyarlıq şərtlərində K. t. p.

$$W_{t_1, \dots, t_n}(X_1, \dots, X_n;\ Y_1, \dots, Y_n) = \\ = \varphi(j_{t_1}(X_1)^* \dots j_{t_n}(X_n)^*\, j_{t_n}(Y_n) \dots j_{t_1}(Y_1)) \quad (*)$$

korrelyasion nüvələri üzrə ekvivalentlik dəqiqliyi ilə birqiymətli bərpa olunur, burada $n = 1, 2, \dots;\ t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n \in \mathscr{B}$ (Kolmoqorov teoreminin qeyri – kommutativ analoqu).

K. t. p. vasitəsilə «keçmiş», «indiki», «gələcək» $*$ – σ – cəbrləri ailələri aşağıdakı münasibətlərlə əlaqəlidirlər:

$$\mathscr{A}_{t]} = \bigvee_{s \leq t} j_s(\mathscr{B}), \quad \mathscr{A}_t = j_t(\mathscr{B}),$$

$$\mathscr{A}_{[t} = \bigvee_{s \leq t} j_1(\mathscr{B}); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Əgər φ ilə uzlaşan, $\mathscr{A}$-dan olan $(\mathbf{M}_{t]})_{t \in \mathbb{R}}$ şərti riyazi gözləmələrinin $\mathscr{A}_{t]}$-də elə ailəsi olarsa ki, $t \in \mathbb{R}$ üçün $\mathbf{M}_{t]}$

$(\mathcal{A}_{t]}) \in \mathcal{A}_t$ münasibətini ödəsin, onda K. t. p. M a r k o v K. t. p. adlanır. Markov K. t. p. üçün

$$\Phi_{t,s}(X) = j_t^{-1}\mathbf{M}_{t]}j_s(X), \quad X \in \mathcal{B}, \quad t < s$$

münasibəti *Markov inikaslarının* zənciri ailəsini təyin edir və bu ailə, stasionar halda, $\mathcal{B}$ cəbrində kvant sisteminin «redüslənmiş dinamikasını» verən *kvant dinamik semi – qrupuna* çevrilir. Ən çox öyrənilmiş Markov K. t. p.-lərindən Boze və Fermi sistemləri üçün stoxastik differensial tənliklərin həllərinin doğurduğu, uyğun kommutasiya münasibətlərinə tabe olan prosesləri qeyd etmək olar. Belə tənliklər üçün İto stoxastik hesabının qeyri – kommutativ analoqu işlənilmişdir (bax, *Kvant stoxastik hesabı*).

(*) korrelyasion nüvələrinin bütün çoxluğunun prinsipcə, $\mathcal{B}$ $*$ – cəbri ilə təsvir olunan «böyük» sistemin dinamikası ilə təyin olunmasına baxmayaraq, fiziki mənanı bilavasitə yalnız xronoloji nizamlanmış nüvələr ($t_1 < \ldots < t_n$ münasibəti ödənilməklə) daşıyır, bu nüvələr isə uyğun zaman anlarında ardıcıl ölçmə statistikasını təsvir edirlər. [3]-də K. t. p. üçün verilmiş ilk tərif xronoloji nizamlanmış nüvələrə əsaslanmışdır. Əgər yuxarıda verilən tərif, məs., stoxastik differensial tənliklərlə təyin olunan konkret sistemlərin tədqiqi üçün yaxşı uyğunlaşmışdırsa, onda bu tərif çevirmə xassəsi ödənilməyən, erqodiklik və xaos olan kvant sistemlərində bir sıra ümumi problemləri araşdırmağı imkan verir.

Əd.: [1] Квантовые случайные процессы и открытые системы, M., 1988; [2] Quantum probability and applications II, «Lect. Notes Math.», 1985, v. 1136; [3] L i n d b l a d C., «Comm. Math. Phys.», 1979, v. 65, p. 281–94; [4] Х о л е в о А. С., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 83, M., 1991, с. 3–132.

KVANT VƏZİYYƏTİ « квантовое состояние; quantum state » – bax, *Sıxlıq operatoru.*

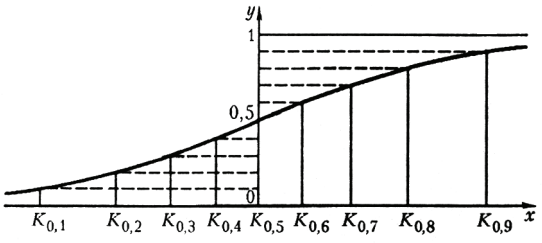
KVANTİL « квантиль; quantile » – *təsadüfi kəmiyyətin* və uyğun ehtimal *paylanmasının* ədədi xarakteristikasıdır. $F(x)$, – $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun. $0 < \alpha < 1$ olduqda, $F(K_\alpha) \le \alpha$, $F(K_\alpha + 0) \ge \alpha$ münasibətlərilə təyin olunan ixtiyari K_α ədədinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin α *tərtib kvantili* deyilir. İxtiyari tərtib K. həmişə vardır və ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur. Əgər $F(x)$ kəsilməz ciddi monoton funksiya olarsa, onda ixtiyari tərtib yeganə K. vardır.

$\alpha = 1/2$ olduqda K. təsadüfi kəmiyyətin medianı ilə üst-üstə düşür. $m = 1, \ldots, n-1$ qiymətləri üçün $\alpha = m/n$ tərtib K. $(K_{m/n})$ yeganə olduqda, n -in qiyməti olduqca böyüdükdə, $F(x)$ haqqında daha yaxşı mülahizə yürütmək olur. $n = 4$ olduqda $K_{m/n}$ k v a r t i l, $n = 10$ olduqda d e s i l, $n = 100$ olduqda isə $K_{m/100}$ p e r s e n t i l adlanır. $(K_{3/4} - K_{1/4})/2$ və $K_{9/10} - K_{1/10}$ kəmiyyətlərindən təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikaları kimi istifadə olunur və bu xarakteristikalar uyğun olaraq s e m i i n t e r k v a r t i l g e n i ş l i k və i n t e r d e s i l g e n i ş l i k adlanır.

Məs., normal paylanma funksiyası

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz$$

üçün $\Phi(x)$ -in qrafikini desillərə görə qurmaq olur (bax, şəkil):



$K_{0,1} = -1{,}28$, $K_{0,2} = -0{,}84$, $K_{0,3} = -0{,}52$, $K_{0,4} = -0{,}25$, $K_{0,5} = 0$, $K_{0,6} = 0{,}25$, $K_{0,7} = 0{,}52$, $K_{0,8} = 0{,}84$, $K_{0,9} = 1{,}28$.

$\Phi(x)$ normal paylanmasının kvartilləri – $K_{1/4} = -0{,}67$, $K_{3/4} = 0{,}67$ ədədləridir.

Əd.: [1] Х а л ь д А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., M., 1956; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., M., 1975.

KVANTİL; a s i m p t o t i k d ü s t u r l a r « квантил; асимптотические формулы; quantile; asymptotic formulae for » – paylanma funksiyasına tərs funksiya üçün asimptotik ayrılışdır. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

$$\mathbf{M}\xi_1 = m, \quad \mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - m)/(\sqrt{n}\sigma).$$

Əgər S_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F_n(x)$ $n \to \infty$ olduqda

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{k=3}^{r} n^{-(1/2)k+1} Q_k(x) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

bərabərliyi ilə ifadə oluna bilirsə, onda $n \to \infty$ olduqda

$$y_p = x_p + \sum_{k=3}^{r} n^{-(1/2)k+1} R_k(x_p) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası, $Q_k(x)$ – hər hansı çoxhədlilər, x_p və y_p – uyğun olaraq, $\Phi(x_p) = 1 - p$ və $F_n(y_p) = 1 - p$ tənliklərinin həlləri, $R_k(x)$ isə $\mu_1, \ldots, \mu_k$ -dan asılı müəyyən çoxhədlilərdir, $\mu_i = \mathbf{M}(\xi_1 - m)^i$. Məs.,

$$R_3(x) = \frac{\mu_3}{6\sigma^3}(x^2 - 1),$$

$$R_4(x) = \frac{(\mu_4 - 3\sigma^4)}{24\sigma^4}(x^3 - 3x) - \frac{\mu_3^2}{36\sigma^6}(2x^3 - 5x).$$

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с. 136–49; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., M., 1979.

KVANTLAMA ZAMAN ÜZRƏ « квантование во времени; time – quantization » – bax, *Zaman üzrə diskretizasiya* / *kvantlama*.

KVANTLANMASI, MƏLUMATLARIN « квантование сообщений; message quantization » – məlumatlar mənbəinin hasil etdiyi məlumatların mümkün qiymətləri çoxluğunun sonlu (və ya hesabi sayda) bir-birilə örtülməyən elə A_i altçoxluqlarına bölgüsüdür ki, bu A_i çoxluğundan xüsusi seçilmiş $a_i \in A_i$ elementi A_i-dən olan məlumatları məlumatların bərpası üçün verilmiş dəqiqliklə ifadə etmiş olsun.

M. k. məlumalar mənbəinin kodlanması üçün üsullardan biridir. M. k.-nın optimallığı məsələsi kəsilməz mənbələrin kodlanması məsələlərinin mühümlərindən biridir.

Əd.: [1] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., 1974; [2] Х а р к е в и ч А. А., Борьба с помехами, М., 1965; [3] B e r g e r T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971.

KVAPEN TEOREMİ « Квапеня теорема; Kwapien theorem » – bax, *Banax fəzası p* t i p.

KVAPEN – ŞVARTS TEOREMİ « Квапена – Шварца теорема; Kwapien – Schwartz theorem » – bax, *Radonlayıcı operator.*

KVARTİL « квартиль; quartile » – *kvantilin* xüsusi halıdır; $\alpha = m/4$ tərtib K_α kvantildir, burada $m = 1, 2, 3.$ $m = 2$ olduqda $K_{1/2}$ K.-i medianı ilə üst-üstə düşür. Təsadüfi kəmiyyətin paylanması haqqında mülahizə yürütmək üçün istifadə olunur. $(K_{3/4} - K_{1/4})/2$ kəmiyyəti bəzən təsadüfi kəmiyyətin səpələnmə xarakteristikası kimi istifadə olunur və s e m i i n t e r - k v a r t i l g e n i ş l i k adlanır; $K_{1/4}$ və $K_{3/4}$ kvantilləri uyğun olaraq, təsadüfi kəmiyyətin a ş a ğ ı və y u x a r ı k v a r t i l i adlanır.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Х а л ь д А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956.

KVARTİL MƏSAFƏ « квартильное расстояние; quartile distance » – müşahidə olunan kəmiyyətin yayınmasının elə qiymətinə deyilir ki, müşahidə olunmuş bütün qiymətlərin (nəticələrin) yarısı onu aşır; K. m. kvadratik orta yayınmanın $0{,}67449$ hissəsini təşkil edir. Kvadratik orta xətanın bu vuruğa hasili – *ehtimal olunan xəta* adlanan kəmiyyət kvadratik orta xətanın $2/3$ hissəsini təşkil edir; ehtimal olunan xətanın üç misli mühümlük kriterisi kimi kvadratik orta xətanın iki misli ilə eynidir. Ehtimal olunan xətanın tətbiqində çatışmayan cəhət kritik qiymətlərin tapılması üçün kvadratik orta xətanın hissələri, yəni $(x-\mu)/\sigma$ nisbətilə ifadə olunan yayınmaların hesablanmasının zəruriliyidir, burada μ – paylanmanın mərkəzi, σ – kvadratik orta xətadır.

Əd.: [1] Ф и ш е р Ф. А., Статистические методы для исследователей, пер. с англ., М., 1958.

KVAZİAÇIM(i) s e ç i m i n **« квазиразмах** в ы б о р к и; **simple quasirange »** – bax, *Açım*(ı) s e ç i m i n.

KVAZİDİFFUZİON PROSES « квазидиффузионный процесс; quasi – diffusion process » – *kvaziinfinitezimal operatoru*

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - c(x)$$

düsturu ilə ifadə olunan, $\mathbb{R}^d$-də kəsilməz *Markov prosesidir.*

Bax, *Stoxastik differensial tənlik*; M a r k o v h ə l l ə r i.

KVAZİHAMAR MARKOV PROSESİ « квазигладкий марковский процесс; quasismooth Markov process » – qiymətləri tam separabel metrik $(\mathscr{X}, B(\mathscr{X}))$ fəzasından olan $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində $\mathscr{A}$ – uzlaşmış $\{\zeta_t,\ t \geq 0\}$ *təsadüfi prosesidir* və fərz olunur ki, bütün $0 \leq s < t$, $B \in B(\mathscr{X})$ üçün

$$\mathbf{P}\{\zeta_t \in B \mid F_s\} = \mathbf{P}\{\zeta_t \in B \mid \zeta_s\}$$

bərabərliyi $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilir və $\mathscr{X}$-də məhdud funksiyaların elə altçoxluğunu göstərmək olur ki, bu altçoxluq $\mathscr{X}$-in nöqtələrini elə ayırır ki, bütün m qiymətlərində $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in D$ və $\mathbb{R}^m$-də iki dəfə kəsilməz differensiallanan F funksiyası üçün $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in D$ münasibəti ödənilir, $\varphi \in D$ üçün isə elə məhdud $a(\varphi, x, t)$ funksiyası vardır ki,

$$\varphi(\zeta_t) - \int_0^t a(\varphi, \zeta_s, s)\, ds, \quad t \geq 0$$

prosesi $(\mathbf{P}, \mathbb{A})$ – martinqaldır. K. M. p.-inə misal aparı və diffuziya əmsalları məhdud olan klassik diffuzion proseslərdir.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

KVAZİİNFİNİTEZİMAL OPERATOR « квазиинфинитезимальный оператор; quasi-infinitesimal operator » – kəsilməz ζ_t, $t \geq 0$ Markov prosesinin operatoru L-dir, bu operatorun təyin olunma oblastına C_0^2 funksiyalar fəzası daxildir və bu elə operatordur ki, ixtiyari $f \in C_0^2$ funksiyaları və $t \geq 0$ üçün

$$\mathbf{M}_\zeta f(\zeta_t) - f(\zeta_0) = \mathbf{M}_\zeta \int_0^t Lf(\zeta_s)\, ds$$

bərabərliyi doğrudur.

Əd.: [1] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] К р ы л о в Н. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, с. 691–708.

KVAZİİNVARİANT ÖLÇÜ « квазиинвариантная мера; quasi – invariant measure » – hər hansı fəzada elə *ölçüdür* ki, bu fəzanın «yerinidəyişmələrində» özünə ekvivalent qalır. Daha dəqiq: $(\Omega, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza (yəni Ω çoxluğu ilə onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr cütü) və G – bu fəzanın avtomorfizmlərinin hər hansı qrupu (yəni qarşılıqlı birqiymətli $g: \Omega \to \Omega$ çevirmələri, $\mathscr{A}$ σ – cəbrinə nəzərən özünün g^{-1} tərs çevirmələri ilə birlikdə ölçülən avtomorfizmlər qrup) olsun. Əgər ixtiyari $g \in G$ çevirməsindən sonra çevrilmiş $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$, $A \in \mathscr{A}$ ölçüsü μ ölçüsünə ekvivalent olarsa (yəni bu ölçülər qarşılıqlı mütləq kəsilməz ölçülər olarsa), onda μ ölçüsü $(\Omega, \mathscr{A})$-da G-yə nəzərən k v a z i i n v a r i a n t ö l ç ü adlanır. Ω, – G avtomorfizmlərinin kəsilməz lokal kompakt qrupuna malik topoloji bircins fəza olarsa [yəni G qrupu Ω-ya tranzitiv təsir edir və elə topologiyaya malikdir ki,

$G \times Q \to \Omega : (g, x) \to gx$ inikası $G \times \Omega$ topologiyalar hasilinə nəzərən kəsilməzdir], $\mathscr{A}$, – Ω -da daxil olunmuş topologiyaya nəzərən Borel σ – cəbridirsə, ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganə K. ö. vardır (bax, [1]). Məs., $\mathbb{R}^n$ fəzasında ölçü bütün $x \to x + a, \quad x, a \in \mathbb{R}^n$ yerinidəyişmələrinə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda K. ö.-dür ki, o, Lebeq ölçüsünə ekvivalent olsun. Çevirmələr qrupu lokal kompakt olmasa, K. ö. mövcud olmaya bilər, məs., sonsuzölçülü topoloji vektor fəzalarının geniş sinfi üçün belədir.

Bax, *Fəzası*, *ölçülərin*.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

σ – KVAZİİNVARİANT ÖLÇÜ « σ – квазиинвариантная мера; σ – quasi – invariant measure / of a filtiration » – bax, *Fəzası*, *ölçülərin.*

KVAZİKƏSİLMƏZ PROSES, SOLDAN « квазинепрерывный слева процесс; quasi left – continuous process » – bax, *Standart Markov prosesi.*

KVAZİKƏSİLMƏZLİK, SOLDAN σ – c ə b r l ə r a x ı n ı ü ç ü n **« квазинепрерывность слева** п о т о к а σ – а л г е б р; **quasi left continuity** o f a f a m i l y o f σ – a l g e b r a s / o f a f i l t r a t i o n **»** – bax, *Öngörül Markov anı.*

KVAZİKOMPAKTLIQ ŞƏRTİ « квазикомпактности условие; quasi – compactness condition » – bax, *Erqodik teoremlər* M a r k o v p r o s e s l ə r i ü ç ü n.

KVAZİMARTİNQAL « квазимартингал; quasimartingale » – azalmayan $(F_t)_{t \in T}$ σ – cəbrlər ailəsi ilə uzlaşan elə $\zeta = (\zeta_t)_{t \in T}$ təsadüfi prosesidir ki, bu proses üçün ixtiyari $t \in T$ qiymətində

$$\operatorname{var}_{[0,T]}(\zeta) = \sup \mathbf{M} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \mathbf{M}(\zeta_{t_{k+1}} - \zeta_{t_k} \mid F_{t_k}) \right|$$

kəmiyyəti sonludur, burada sup bütün mümkün olan $0 = t_0 \leq$ $\leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t < \infty, \ n \geq 0, \ t_0, \ldots, t_n \in T$ bölgüləri üzrə götürülür; T çoxluğu ya $T = \{0, 1, \ldots\}$ və ya $T = [0, \infty]$ götürülür. Məs., martinqal və inteqrallanan variasiyalı proses – K.-dır. Kəsilməz zaman halında K. martinqal kimi eyni requlyarlıq xassələrinə malikdir; onun sanki bütün trayektoriyalarının hamısının soldan ($t > 0$ olduqda) və rasional ədədlər çoxluğu üzrə sağdan limitləri vardır. Əgər (F_t) ailəsi sağdan kəsilməzdirsə, onda ζ-nı K.-nın trayektoriyalarının sağdan kəsilməz, soldan limitləri olan modifikasiyası vardır. Sağdan kəsilməz (və ya opsional ölçülən) K. üçün K o l m o q o r o v – D u b b ə r a b ə r s i z l i y i n i n analoqu:

$$\lambda \mathbf{P}\{ \sup_{0 \leq s \leq a} \zeta_s \geq \lambda \} \leq \lambda \mathbf{M} |\zeta_a| + \operatorname{var}_{[0,a]}(\zeta), \quad \lambda > 0$$

bərabərsizliyi ödənilir. Hər bir K. iki mənfi olmayan supermartinqalın fərqi kimi ifadə olunur.

Əd.: [1] D e l l a c h e r i e C., M e y e r P.-A., Probabilities et potentiel. Théorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80.

KVAZİMETRİKA « квазиметрика; quasimetric » – topologiya, funksional analiz və ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan anlayışdır. Hər hansı U çoxluğunun iki elementi üçün təyin olunan, mənfi olmayan $\mu(x, y)$ funksionalı:

1) $\mu(x, y) = 0$, əgər $x = y$;

2) $\mu(x, y) = \mu(y, x)$;

3) $\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$

xassələrini ödəyərsə, $\mu(x, y)$ – U çoxluğunda k v a z i m e t r i k a adlanır. «K.» anlayışı U -da metrika anlayışını ümumiləşdirir, bu metrika üçün isə 1) şərti daha ağır tələblə:

$$\mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

münasibətilə əvəz olunur.

KVAZİMƏQBUL STATİSTİKA « квазидостаточная статистика; quasi-sufficient statistic » – bax, *Yardımçı statistika*.

KVAZİÖLÇÜ « квазимера; quasimeasure » – bax, *Silindrik ölçü.*

KVAZİREQULYAR SİSTEM « квазирегулярная система; quasi-regular system » – bax, K – *sistem.*

KVAZİSİMMETRİK PAYLANMA « квазисимметричное распределение; quasi-symmetric distribution » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin $u\mathbf{P}\{\xi > x\} = v\mathbf{P}\{\xi < -x\}$, $x > 0$ xassəli cırlaşmayan ehtimal *paylanmasıdır*, burada u, v – mənfi olmayan sabitlərdir və $u + v > 0$. «K. p.» anlayışı [1]-də daxil olunmuşdur. K. p. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulması sxemində xüsusi rol oynayır, belə ki, bu sxemdə yaranan *özü-özünə ayrılan paylanmaların* analoqları həmişə K. p.-lardır. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda K. p.-dır ki, bu təsadüfi kəmiyyətə uyğun xarakteristik çevirmənin elementləri $w_0(t)$ və $w_1(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ üçün $(u + v)\, w_1(t) = (u - v) w_0(t)$ bərabərliyilə əlaqəlidirlər. $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 0$ olduqda (və yalnız bu halda) ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının kvazisimmetriklik kriterisi $|\xi|$ və $\operatorname{sign} \xi$ təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlıq xassəsidir.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 444–69; [2] Б а к ш т и с А., «Лит. матем. сб.», 1972, т. 12, № 1, с. 23–39; [3] А б р а м о в В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 4, с. 717–29.

KVAZİVARİASİON BƏRABƏRSİZLİK « квазивариационное неравенство; quasi – variational inequality » – bax, *Variasion bərabərsizliklər* s t o x a s t i k i d a r ə e t m ə d ə.

KVAZİVARİASİON BƏRABƏRSİZLİK; d i f f u z i o n p r o s e s l ə r i i m p u l s a l i d a r ə e t m ə m ə s ə l ə l ə r i **« квазивариационное неравенство;** з а д а ч и и м п у л ь с н о г о у п р а в л е н и я д и ф ф у з и о н н ы м и п р о ц е с с а м и; **quasi – variational inequality;** i m p u l s c o n t r o l / c o r r e c t i o n o f d i f f u s i o n p r o c e s s e s **»** –

$$\pi(U, V - U) \geq L(V - U), \quad U \in K \qquad (1)$$

bərabərsizliyidir, burada π – bixətti simmetrik forma və L – xətti formadır, K – funksiyalar çoxluğu, $U \in K$ axtarılan funksiyadır və K çoxluğu U-dan asılıdır (əgər K çoxluğu U-dan asılı olmazsa, (1) bərabərsizliyi variasion bərabərsizlik adlanır).

Əgər π elliptik (parabolik) operator olarsa, onda (1) elliptik (parabolik) bərabərsizlik adlanır. (1) tipli bərabərsizliklər mexanikada, impulsal idarəetmə və müşahidə nəzəriyyəsində, sərbəst sərhədli məsələlərdə və s. istifadə olunur.

$$d\,x(t) = a(t)U\,dt + b(t)\,d\,w(t)\,,$$
$$0 \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n,\ U \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

– İto tənliklər sistemini impulsal idarəetmə məsələsi

$$\int_0^T |U|\,dt \le q_0$$

məhdudiyyətlik şərtini ödəyən (yanacağın istifadəsinə məhdudiyyətliklə şərtlənən) və $\mathbf{M}F(r(T))$-ni minimallaşdıran idarəetmənin seçilməsindən ibarətdir, burada $r = |x|$, $F \ge 0$ – verilmiş skalyar funksiyadır. Bellman funksiyası $V(\tau, r, q)$ $D = \{\tau, r, q:\ \tau \ge 0,\ r \ge 0,\ q \ge 0\}$ oblastında təyin olunur;

$$\tau = \int_t^T b^2(s)\,ds\,.$$

D_1, – D-nin elə hissəsi olsun ki, bu hissədə $Q = \alpha(\tau)V_r + V_q < 0$; $V_r = \partial V/\partial r$, $D_2 = D \setminus D_1$, $\alpha(\tau) = a(t)$ və Γ isə D_1 və D_2 oblastlarının sərhədi olsun. Q funksiyası D-də hər yerdə $Q \ge 0$ münasibətini ödəyir. D_1-də idarəetmə $U = 0$ olur, yəni (2) sisteminin hərəkəti, D_1-də, yalnız təsadüfi kükrəntilərin təsirilə baş verir. D_2-də impulsal korreksiya aparılır və sistem (τ, r, q) vəziyyətindən $Q = 0$ tənliyinin xarakteristikaları $r - \alpha(\tau)q = \text{const}$ boyunca r və q-nün azalma istiqamətində yerini dəyişir və bu zaman sistem ya Γ-ya daxil olur (bu halda sürüşməli rejim mümkündür ki, bu rejimdə Γ-nın izi qalır) və ya impulsun sonunda $q = 0$ olur. V funksiyası və Γ sərhədi D_1-də

$$\left.\begin{array}{l} D_1 - \text{də}\ \ V_\tau = \dfrac{1}{2}\left(V_{rr} + \dfrac{n-1}{r}V_r\right);\ \ D_2 - \text{də}\ \ Q = 0 \\ V(0, r, q) = F(r),\ V_\tau(\tau, 0, q) = 0;\ \ \Gamma - \text{də}\ \ Q = 0,\ Q_r = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

tənlikləri ilə təyin olunur.

Avtomodel həllər.

$$F_r = r^l,\ \ \alpha(\tau) = A\tau^k \qquad (4)$$

olsun. Onda (3) tənlikləri birparametrik qrupa görə (C parametri ilə) invariantdırlar:

$$r \to Cr,\ \ \tau \to C^2\tau,\ \ q \to C^{1-2k}q,\ \ V \to C^l V\,. \qquad (5)$$

Buna görə də, (3) məsələsinin həlli

$$V = \tau^{1/2}\omega(y, z),\ \ y = Aq\tau^{k-1/2},\ \ z = r\tau^{-1/2} \qquad (6)$$

şəklində olur. Bu zaman asılı olmayan dəyişənlərin sayı 2-yə qədər azalır və bu da dəqiq və ya ədədi həll üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

İmpulslar sayı verildiyi halda korreksiya.

İmpulsların maksimal mümkün sayı N-in əlavə olaraq verildiyi fərz olunur; impulslar s_i Markov anlarında aparılır. Onda $x(s_i + 0) = x(s_i - 0) + a(s_i)q_i$. s_i anları və q_i vektorları təyin olunmalıdır; $q_i \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{N} |q_i| \le q_0$. Hər bir i qiymətində $D = D_1^i \cup D_2^i$ və D_1^i-yə impuls verilmir, D_2^i-də isə i sayda impulsdan birincisinin keçirildiyi nəzərdə tutulur. D_1^i və D_2^i oblastlarının sərhədi Γ^i məlum deyildir. Bellman funksiyası $V(\tau, r, q)$ və Γ^i sərhədi

$$\left.\begin{array}{c} D_1^i - \text{də}\ \ V_\tau^i = \dfrac{1}{2}\left(V_{rr} + \dfrac{n-1}{r}V_r\right), \\ D_2^i - \text{də}\ \ V^i(\tau, r, q) = \min\limits_{y \in Y} V^{i-1}(\tau,\ r - \alpha(\tau)y,\ q - y), \\ Y\{y:\ 0 \le y \le q,\ \alpha(\tau)y \le r\};\ \ V_r^i(\tau, 0, q) = 0 \\ V^i(\tau, r, 0) = V^0(\tau, r, 0),\ V^i(0, r, q) = F(r) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

tənlikləri və V^i və V_r^i-in Γ^i-də kəsilməzlik şərtindən təyin olunur. Əgər (4) tələbləri yerinə yetirilərsə, onda (7) tənlikləri (5) qrupuna görə invariantdırlar və (7) təyinliyinin həllini (6)-ya analoji şəkildə axtarmaq lazımdır.

Müşahidə prosesini impulsal idarəetmə.

Aparılacaq müşahidələrin ümumi sayı məhdudlaşmış olduğu halda xətti stoxastik sistemi müşahidə prosesini idarəetmə məsələlərində müşahidənin optimal qanunu impulslu xarakterə malik ola bilər. Bu isə onu ifadə edir ki, bütün müşahidələr bəzi diskret zaman anlarında aparılır.

Əd.: [1] Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р., Численное исследование вариационных неравенств, пер. с франц., М., 1979; [2] Bensoussan A., Lions J. L., Contróle impusionnel…, P.,1982; [3] Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б., Оптимальное управление при случайных возмущениях, М., 1978; [4] Дюво Г., Лионс Ж. Л., Неравенства в механике и физике, пер. с франц., М., 1980.

QALERKİN YAXINLAŞMASI « Галеркина приближение; Galerkin's approximation » – bax, *Statistik hidromexanika.*

QALIĞI, PAYLANMANIN « хвост распределения; distribution tail » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasının qrafikinin $\{\xi < x_{\min}\}$ və ya $\{\xi > x_{\max}\}$ şəkilli hadisələrinin ehtimallarına uyğun hissəsidir, burada $x_{\min}$ və $x_{\max}$, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin dəyişmə diapozonunun sol və sağ sərhədlərinə yaxın uyğun mümkün qiymətlərdir. Bu anlayış xüsusən mərkəzi limit teoremi ilə bağlı qiymətləndirmələrdə istifadə olunur.

QALIQ CƏMİ, KVADRATLARIN « остаточная сумма квадратов; residual sum of squares » – *ən kiçik kvadratlar metodu* üzrə *reqression eksperiment* ölçmələrinin approksimasiyasından yaranan uzlaşmaların kvadratları cəmidir. Reqression eksperiment adekvat olduqda, K. q. c.-nin sərbəstlik dərəcəsi sayına nisbəti ölçmələrin dispersiyası σ^2 -nın statistik qiymətinə bərabərdir, əgər eksperiment adekvat olmazsa, σ^2 -nın statistik qiyməti σ^2 -dan sistematik xətanın kvadratı qədər artıq olur. Buna görə də, dispersiyanın asılı olmayan statistik qiyməti ilə K. q. c.-ın müqayisəsi nəticəsində reqression eksperimentin adekvatlığının F – kriterisi alınır, bu isə dispersion analizin əsas statistikasıdır.

Əd.: [1] Ш е ф ф е Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] С е б е р Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

***QALIQ – EKVİVALENT ARDICILLIQLARI, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « остаточно – эквивалентные последовательности случайных величин; remot – equivalence sequences »** – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət.*

QALIQ HADİSƏ « остаточное событие; remote event » təsadüfi kəmiyyətlərin və ya təsadüfi elementlərin $(X_n)_{n\in N}$ ardıcıllığına nəzərən – ixtiyari n üçün $(X_n, X_{n+1}, ...)$ ardıcıllıqları (qalıqları) ilə təyin olunan hadisədir. Daha dəqiq, əgər R_n – elə minimal σ – cəbr olarsa ki, $X_n, X_{n+1}, ...$ bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olsunlar, onda Q. h. bütün R_n-lərə aid olan hadisədir. Q. h. çoxluğu qalıq σ – cəbri təşkil edir (bax, *Sıfır – vahid qanunu*).

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

QALIQLAR « остатки; residuals » reqression eksperimentdə – *ən kiçik kvadratlar metodu* üzrə *reqression eksperimentin* ölçmələrinin approksimasiyalarında uzlaşmamazlıqlardır. Maksimal Q.-ın qiymətinə görə seçilib fərqlənən ölçmələrin olduğu haqqında mülahizə yürüdülür. Q.-ın prediktorlar və təqribi alınmış qiymətlərindən asılı olaraq alınan qrafiklər modelin adekvatlığı haqqında mülahizə yürütməyə imkan verir.

Əd.: [1] Д р е й п е р Н., С м и т Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., 2 изд., кн.: 1–2, М., 1986; [2] С е б е р Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

QALLAGER FUNKSİYASI « Галлахера функция; Gallager function » – bax, *Təsadüfi kodla*(n)*ma* s ə r h ə d.

QALMA MÜDDƏTİ « пребывания время; sojourn / occupation time » – bax, *Semi – Markov prosesi.*

QALTON – VATSON PROSESİ « Гальтона – Ватсона процесс; Galton – Watson process », (E, h) – p r o s e s, – diskret zamanlı və eyni bir tip hissəciklərli *şaxələnən prosesdir*; F. Qalton (F. Galton) və G. Vatsonun (G. Watson) adı ilə adlandırılmışdır; onlar 1873-də ilk dəfə soyadların cırlaşması məsələsini araşdırmışlar. Diskret zamanlı və sonlu sayda hissəciklərlə başlayan şaxələnən proses də Q. – V. p. adlanır (bax, *Şaxələnən proses*).

QAMMA – APPROKSİMASİYA « гамма – аппроксимация; gamma approximation » b e t a – p a y l a n m a ü ç ü n – b e t a – p a y l a n m a funksiyası $B_{a,b}(x)$-in $a = \text{const}$ və $b \to \infty$ olduğu halda hesablanması üçün approksimasiyadır.

ξ – paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$

$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{I}_x(a, b) \equiv B_{a,b}(x) =$$

$$= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt, \quad 0 \le x \le 1$$

düsturu ilə ifadə olunan a və b parametrlərli ($a > 0$, $b > 0$) beta – paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyət olsun, burada

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

– Eyler beta – funksiyasıdır.

$$B_{a,b}(x) \equiv 1 - B_{a,b}(1-x), \quad x \in [0, 1]$$

eyniliyinə əsasən beta – paylanma üçün cədvəllər tərtib edildikdə $0 < a \le b$ halı ilə kifayətlənilir. K. Pirsonun məlum yeddirəqəmli cədvəlləri yalnız $b \le 50$ qiymətlərində $B_{a,b}(x)$-in hesablanması üçün istifadə olunur (bax, [1]). $b > 50$ olduğu halda $B_{a,b}(x)$-in hesablanması üçün Q. – a.-dan istifadə olunur ki (bax, [1] – [3]), bu halda əgər $a = \text{const}$ və $b \to \infty$ olarsa, onda

$$B_{a,b}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{(2b+a-1)x/(2-x)} z^{a-1}e^{-z}\,dz + O(1/b^2) \qquad (*)$$

münasibəti $0 < x < 1$ şərtini ödəyən x -lərə görə müntəzəm ödənilir. Başqa sözlə, əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti a və b parametrlərli beta – paylanmaya tabedirsə, onda $\eta = (2b + a - 1)\xi/(2 - \xi)$ təsadüfi kəmiyyəti təqribən a parametrli *qamma – paylanmaya* yaxınlaşır.

Q. – a. binomial paylanma üçün olduqca dəqiq Puasson approksimasiyası qurmağa imkan verir. Z , – n və p parametrlərli binomial qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun, $0 < p < 1$. Binomial paylanma funksiyası $B_{a,b}(x)$ terminlərilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\mathbf{P}\{Z \le m\} = \sum_{k=0}^{m} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = B_{n-m,\,m+1}(1-p);$$

bu düsturdan (*) Q. – a.-nın köməyilə alınır ki, $m = \text{const}$ və $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{Z \le m\} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int_y^{\infty} t^m e^{-t}\,dt + R \equiv \sum_{k=0}^{m} \frac{y^k}{k!} e^{-y} + R$$

münasibəti $0 < p < 1$ intervalından bütün p -lərə görə müntəzəm ödənilir, burada

$$R = \begin{cases} O(1/n), & \text{əgər } y = y_0 = (n-m)p, \\ O(1/n^2), & \text{əgər } y = y_1 = p(2n-m)/(2-p), \\ O(1/n^4), & \text{əgər } y = y_2 = \\ & = \dfrac{6y_1(2n-m)^2}{6(2n-m)^2 + [m(m+2) + my_1 - 2y_1^2]} \end{cases}$$

olarsa.

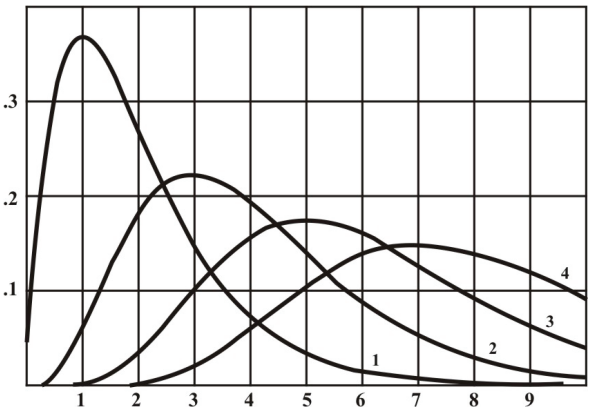
Əd.: [1] П и р с о н К., Таблицы неполной бета – функции, пер. с англ., М., 1974; [2] М а р д и а К., З е м р о ч П., Таблицы F - распределений и распределений связанных с ними, пер. с англ., М., 1984; [3] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды, М., 1987.

QAMMA – FAİZLİ İŞLƏMƏ (İMTİNAYA QƏDƏR) MÜDDƏTİ « гамма – процентная наработка; gamma – percentile operating time to failure » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin.*

QAMMA – PAYLANMA « гамма – распределение; gamma distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\, x^{\lambda-1} e^{-x}$$

(bax, şəkil) düsturu ilə ifadə olunan kəsilməz, $(0, \infty)$ -da topalanmış *ehtimal paylanmasıdır*, burada $\lambda > 0$ – parametr və $\Gamma(\lambda)$ – Eyler qamma – funksiyasıdır.



$\lambda > 1$ olduqda qamma - paylanmanın sıxlıq funksiyasının qrafikləri :

(1) $\lambda = 2$; (2) $\lambda = 4$; (3) $\lambda = 6$; (4) $\lambda = 8$.

Q. – p.-nın paylanma funksiyası $G_\lambda(x)$ natamam qamma – funksiyası vasitəsilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x y^{\lambda-1} e^{-y}\,dy$$

$g_\lambda(x)$ sıxlıq funksiyası unimodaldır və $\lambda > 1$ olduqda $x = \lambda - 1$ nöqtəsində $(\lambda-1)^{\lambda-1} e^{-(\lambda-1)}/\Gamma(\lambda)$ qiymətinə bərabər maksimumunu alır, yəni bu paylanmanın modası $m = \lambda - 1$ olur. $0 < \lambda < 1$ olduqda $g_\lambda(x)$ sıxlıq funksiyası x -in artması ilə monoton azalır və əgər $x \to +0$ olarsa, $g_\lambda(x)$ qeyri – məhdud artır. Q. – p.-nın xarakteristik funksiyası

$$f(t) = (1 - it)^{-\lambda}$$

düsturu ilə, momentləri isə

$$\mathbf{m}_k = \Gamma(\lambda + k)/\Gamma(\lambda), \quad k > -\lambda$$

düsturu ilə ifadə olunur. Q. – p.-nın riyazi gözləməsi və dispersiyası λ-ya bərabərdir, asimmetriyası $As = 2/\sqrt{\lambda}$, ekssesi isə $Es = 6/\lambda$-dır. Q. – p.-lar ailəsi kompozisiya əməlinə görə qapalıdır:

$$g_{\lambda_1} * g_{\lambda_2} = g_{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Q. – p. aşkar olmasa da, tətbiqi məsələlərdə mühüm rol oynayır. Xüsusi halda, $\lambda = 1$ olduqda üstlü qanun alınır. Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində λ parametrinin tam qiymətlər aldığı Q. – p. *Erlanq paylanması* adlanır. Q. – p.-ya riyazi statistikada, normal paylanma ilə sıx əlaqəsi olduğuna görə tez-tez təsadüf olunur, belə ki, qarşılıqlı asılı olmayan $(0, 1)$ parametrlərli normal qanunla paylanmış $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin kvadratları cəmi – $\chi^2 = X_1^2 + ... + X_n^2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $0{,}5\,g_{n/2}(x/2)$ -ə bərabərdir və bu sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər *xi – kvadrat paylanmasının* sıxlıq funksiyasıdır. Buna görə də, Q. – p. və riyazi statistika məsələlərində bir çox mühüm paylanmalar əlaqəlidirlər, bu şərtlə ki, bu məsələlərdə normal qanunla paylanmış kvadratik formalara

baxılmış olsun (məs., *Styudent paylanması*, *Fişer* F *– paylanması* və *Fişer* z *– paylanması*). Əgər ξ_1 və ξ_2 paylanmalarının sıxlıq funksiyaları g_{λ_1} və g_{λ_2} olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi_1/(\xi_1+\xi_2)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\frac{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)}\; x^{\lambda_1-1}\,(1-x)^{\lambda_2-1},\ 0<x<1$$

kimi təyin olunur və bu *beta – paylanmanın* sıxlıq funksiyasıdır. Q. – p.-ya tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin $a\xi+b$ xətti funksiyalarının sıxlıq funksiyaları xüsusi paylanmalar sinfi təşkil edir, bu sinif *Pirson paylanmaları* sinfinin III tipi adlandırılır. Q. – p.-nın sıxlıq funksiyası Lagerr ortoqonal çoxhədlilər sisteminin çəki funksiyasıdır. Q. – p. funksiyasının qiymətlərini natamam qamma – funksiya üçün tərtib olunmuş cədvəllərlə hesablamaq olar (bax, [1]).

Əd.: [1] П а г у р о в а В. И., Таблицы неполной гамма функции, М., 1963.

QAPALI ÇOXLUQ « замкнутое множество; closed set » – hər hansı bir boş olmayan $\mathscr{A}$ çoxluqlar sinfinin çoxluqları üzərində aparılan müəyyən bir nəzəri çoxluq əməlindən (məs., $\cup$, $\cap$, $\setminus$ və inkar əməli) sonra alınmış çoxluq da $\mathscr{A}$ -ya daxil olarsa, $\mathscr{A}$ sinfinə aparılmış əmələ görə qapalı çoxluq deyilir.

QAPALI XİDMƏT SİSTEMİ « замкнутая система обслуживания; closed queueing system » – bax, *Xidmət sistemi.*

QAPALI PLAN « замкнутый план; closed plan » – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə.*

QAPALI SİNİF « замкнутый класс; closed class ». Ω – hər hansı bir çoxluq, $\mathscr{G}$, – Ω -nın alt çoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı bir sinif olsun. $\mathscr{G}$ -nın çoxluqları üzərində aparılan bir və ya bir neçə əməldən sonra alınmış çoxluq $\mathscr{G}$ sinfinə daxil olarsa, $\mathscr{G}$ sinfinə aparılmış əməl və ya əməllərə görə qapalı sinif deyilir.

Ω – elementar hadisələr fəzası, $\mathscr{A}$ və $\mathscr{F}$, uyğun olaraq, Ω -nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş hadisələr cəbri və hadisələrin σ – cəbri olarsa,

$\mathscr{A}$ – inkar, sonlu sayda birləşmə, kəsişmə, fərq, simmetrik fərq əməllərinə görə;

$\mathscr{F}$ – inkar, hesabi sayda birləşmə, kəsişmə, fərq və simmetrik fərq əməllərinə görə qapalı sinifdir. Məs., $A\in\mathscr{A}\Rightarrow\overline{A}\in\mathscr{A}$;

$$A_i\in\mathscr{A},\ i=\overline{1,n}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A},\ \bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A}\ \text{ və s. }\ A_i\in\mathscr{F},$$

$$i=1,\,2,\,...,\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F},\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}\ .$$

QAPALI TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « замкнутое случайное множество; closed random set » – qapalı çoxluqların topoloji fəzası $\mathscr{F}$ -in təsadüfi elementidir. $\mathscr{F}$ -in topologiyası $\mathscr{T}_f$ aşağıdakı kimi təyin olunur: S – separabel Hausdorf lokal kompakt topoloji fəza, $\mathscr{F}$ – onun qapalı altçoxluqlarının çoxluğu olsun. Onda $\mathscr{T}_f$ topologiyası

$$\mathscr{F}^K=\{F:F\in\mathscr{F},\ F\cap K=\varnothing\},$$

$$\mathscr{F}_G=\{F:\ F\in\mathscr{F},\ F\cap G\neq\varnothing\},$$

siniflərini özündə saxlayan minimal topologiyadır; burada K – bütün mümkün ola bilən kompakt, G isə S -in açıq altçoxluqlarıdır.

Bax, *Təsadüfi çoxluq.*

QARIŞDIRMA METODU « смешивания метод; confound method » – bax, *Faktor eksperiment.*

QARIŞIQ(ğ ı) v ə z i y y ə t l ə r i n **« смесь** с о с т о я н и й; **mixture** o f s t a t e s **»** – bax, *Sıxlıq operatoru*.

QARIŞIQ AVTOREQRESSİV – SÜRÜŞƏN ORTA MODEL « смешанная авторегрессии – скользящего среднего модель; autoregressive – moving average model » –

$$\zeta(t)+a_1\zeta(t-1)+...+a_p\zeta(t-p)=$$
$$=b_0Z(t)+b_1Z(t-1)+...+b_qZ(t-q)$$

tənliyini ödəyən, ümumi halda skalyar kompleksqiymətli $\{\zeta(t),\ t\in T,\ T=\{0,\pm1,\pm2,...\}\}$ təsadüfi prosesinin modelidir, burada $a_1,...,a_p$, $b_0,...,b_q$ – həqiqi ədədlər, $\{Z(t),\ t\in T\}$ – ümumi halda kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin standart qeyri – korrelyar ardıcıllığıdır, yəni elə təsadüfi kəmiyyətlərin ki, bunlar üçün $\mathbf{M}Z(t)=0$, $\mathbf{M}Z(s)\overline{Z(t)}=\delta_{st}$, $s,t\in T$ şərtləri ödənilir; $(p,\,q)$ cütü – Q. ARSO. m.-nin (avtoreqressiv – sürüşən orta, ARSO) t ə r t i b i adlanır.

Q. ARSO. m. diskret zamanlı və kəsri – rasional spektral sıxlıqlarlı stasionar skalyar kompleksqiymətli proseslərin ümumi modelidir. Bu model praktikada təsadüf olunan bir çox proseslərə adekvat stoxastik modeldir. Qeyd etmək lazımdır ki, adekvatlığın təsviri praktikada $p\le2$, $q\le2$ olduqda alınır.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [2] Б о к с Д ж., Д ж е н к и н с Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [3] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

QARIŞIQ AVTOREQRESSİV – SÜRÜŞƏN ORTA PROSES, ARSO – prosesi « смешанный авторегрессии – скользящего среднего процесс, АРСС – процесс; autoregres – sivemoving average process, ARMA process » – diskret zamanlı, geniş mənada stasionar $\zeta(t)$, $t=0,\pm1,...$ *təsadüfi prosesidir* və bu prosesin qiymətləri

$$\zeta(t)+a_1\zeta(t-1)+...+a_p\zeta(t-p)=$$
$$=Y(t)+b_1Y(t-1)+...+b_qY(t-q)\qquad(*)$$

fərqlər tənliyini ödəyirlər, burada $\mathbf{M}Y(t)=0$, $\mathbf{M}Y(t)Y(s)=$ $=\sigma^2\delta_{t,s}$, $\delta_{t,s}$ – Kroneker simvoludur [yəni $Y(t)$ – spektral sıxlığı $\sigma^2/2\pi$ -yə bərabər bəyaz küy prosesidir], p və q – hər hansı mənfi olmayan tam ədədlər, $a_1,...,a_p$, $b_1,...,b_q$ – sabit əmsallardır. Əgər $\varphi(z)\equiv1+a_1z+...+a_pz^p=0$ tənliyinin bütün kökləri modulca vahiddən fərqli olarsa, onda stasionar Q. ARSO – proses $\zeta(t)$ vardır və onun spektral sıxlığı

$$f(\lambda) = (\sigma^2/2\pi)\left|\psi(e^{i\lambda})\right|^2 \left|\varphi(e^{i\lambda})\right|^{-2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\psi(z) = 1 + b_1 z + ... + b_q z^q$. Lakin (*) tənliyinin həllinin $\zeta(t_0 - 1), ..., \zeta(t_0 - p)$ qeyd olunmuş başlanğıc şərtlərində, $t - t_0 \to \infty$ olduqda stasionar $\zeta(t)$ prosesinə yaxınlaşması üçün $\varphi(z) = 0$ tənliyinin bütün köklərinin vahid radiuslu $|z| \le 1$ dairəsindən kənarda yerləşmələri zəruridir (bax, məs., [1], [2]).

Qauss Q. ARSO. prosesləri sinfi spektral sıxlığa malik və çoxölçülü Markov prosesinin birölçülü komponenti olan stasionar proseslər sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [3]). Q. ARSO. proseslərinin xüsusi halları *avtoreqressiv proseslər* ($q = 0$ olduqda) və *sürüşən orta proseslərdir* ($p = 0$ olduqda). Tətbiqi məsələlərdə Q. ARSO. proseslərinin ümumiləşməsi *avtoreqressiv-inteqrallanmış sürüşən orta* prosesləridir (ARİSO – proseslər), yəni stasionar artımlarlı elə qeyri – stasionar proseslərdir ki, onların hər hansı qeyd olunmuş tərtibli artımları Q. ARSO. p. əmələ gətirir (bax, [1]).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, M., 1974; [2] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., M., 1976; [3] Doob J. L., «Ann. Math. Statist.», 1944, v. 15, p. 229–82.

QARIŞIQ AVTOREQRESSİV – SÜRÜŞƏN ORTA PROSES; çevrilənlik şərti **« смешанный авторегрессии – скользящего среднего процесс;** обратимости условие; invertibility condition for **ARMA process »**, qarışıq ARSO prosesi – $\zeta(t)$ ARSO prosesi üçün fərqlər tənliyinə daxil olan diskret $Y(t)$ *bəyaz küyünün* t anındakı qiymətinin, $\zeta(t)$ prosesinin indiki t anında və keçmiş $t - s$, $s > 0$ zaman anlarındakı çəkili qiymətlərinin yığılan cəmləri (yəni ədədi əmsallara vurulmuş qiymətlərinin cəmləri) şəklində ifadə olunması şərtidir. ARSO prosesi

$$\zeta(t) + a_1\zeta(t-1) + ... + a_p\zeta(t-p) = \\ = Y(t) + b_1 Y(t-1) + ... + b_q Y(t-q)$$

fərqlər düsturunu ödədiyi halda çevrilənlik şərti – $\psi(z) \equiv 1 + b_1 z + ... + b_q z^q = 0$ tənliyinin vahid radiuslu $|z| \le 1$ dairəsinin daxilində və sərhədində yerləşən köklərinin olmaması şərtidir (bax, [1]). Çevrilənlik şərtini ödəməyən ARSO – prosesləri halında $Y(t)$-nin qiyməti $\zeta(t)$ prosesinin keçmiş, indiki və gələcək qiymətlərinin çəkili cəmi şəklində ifadə olunur, bunun isə bir sıra hallarda fiziki olaraq, mümkünlüyü qeyri – təbiidir.

ARSO – prosesi üçün çevrilənlik şərti daha ümumi qeyri – stasionar avtoreqressiv – inteqrallanmış sürüşən orta proseslər sinfi üçün də ümumiləşdirilir (bax, [1], fəs. 4).

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, M., 1974.

QARIŞIQ MODEL(i) dispersion analizin **« смешанная модель** дисперсионного анализа; **mixed model** in the analysis of variance **»** – bax, *Dispersion analiz*; qarışıq model.

QARIŞIQ MOMENT « смешанный момент; mixed moment » – bax, *Moment*, *Çoxölçülü paylanma*.

QARIŞIQ OYUN « смешанная игра; mixed game » – bax, *Statistik oyun*.

QARIŞIQ STRATEGİYA « смешанная стратегия; mixed strategy » – bax, *Randomlanmış strategiya*.

QARIŞIQLAR FƏZASI « смесей пространство; space of mixtures » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

QARIŞMA « перемешивание; mixing » – *stasionar* ζ_t *təsadüfi prosesinin* bütün $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{R}$ üçün

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\Lambda \cap \theta_t\Gamma) = \mathbf{P}(\Lambda)\mathbf{P}(\Gamma)$$

münasibətilə ifadə olunan xassəsidir, ζ_t, $t \in T$ – qiymətləri faza fəzası $(E, \mathscr{B})$-dən olan, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş diskret zamanlı (yəni $T = \{0, 1, 2, ...\}$) və ya kəsilməz zamanlı (yəni $T = [0, \infty)$) təsadüfi proses, $\mathfrak{R}$ isə elə minimal σ – cəbrdir ki, bütün $t \in T$ qiymətlərində bu σ – cəbrə nəzərən ζ_t kəmiyyətləri ölçüləndirlər, θ_t, $t \in T$, – $\mathfrak{R}$ – ölçülən ζ təsadüfi kəmiyyətlərinə və Γ hadisəsinə aşağıdakı qayda ilə təsir edən θ_t, $t \in T$ yerinidəyişmə operatorları ailəsidir: $\theta_t\zeta(\omega) = \\ = \zeta(\omega_t^+)$ və $\omega \in \theta_t\Gamma$ münasibətləri, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\omega_t^+ \in \Gamma$ olsun (bax, *Erqodik teoremlər*). Q. prosesin erqodikliyini doğurur.

Q.-nın müxtəlif modifikasiyaları vardır. Məs., kəsilməz zamanlı stasionar ζ_t təsadüfi prosesinin zəif qarışması – bütün $\Lambda, \Gamma \in \mathfrak{R}$ üçün

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{P}(\Lambda \cap \theta_u \Gamma)\, du = \mathbf{P}(\Lambda)\,\mathbf{P}(\Gamma)$$

münasibətilə ifadə olunur.

Rozenblatt güclü qarışması Q. xassəsinin güclənmiş forması olub, aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\Lambda \in \mathfrak{R}^+,\ \Gamma \in \mathfrak{R}_{s+t}} \left| \mathbf{P}(\Lambda\Gamma) - \mathbf{P}(\Lambda)\,\mathbf{P}(\Gamma) \right| = 0,$$

burada $\mathfrak{R}^s$ ($\mathfrak{R}_s$), – s anına qədər (s anından sonra) ζ_t prosesinin gedişi ilə doğurulmuş minimal σ – cəbrdir.

Müntəzəm güclü Q., tərifə görə

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\Lambda \in \mathfrak{R}^s,\ \Gamma \in \mathfrak{R}_{s+t}} \left| \mathbf{P}(\Gamma \mid \Lambda) - \mathbf{P}(\Gamma) \right| = 0$$

münasibətilə təyin olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, M., 1971; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, M., 1965.

QARIŞMA çoxqat **« перемешивание** кратное; **multiple mixing »** – bax, *Çoxqat qarışma*.

K – QARIŞMA « K – перемешивание; K – mixing » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *ehtimal fəzasının* aşağıdakı kimi ifadə olunan T avtomorfizminin xassəsidir: ixtiyari natural k və ixtiyari $A_0, A_1, ..., A_k \in \mathscr{A}$ çoxluqları üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathscr{A}_n^\infty(A_1,\ldots,A_k)} \left|\mathbf{P}(A_0\cap A)-\mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(A)\right|=0,$$

burada $\mathscr{A}_n^\infty(A_1,\ldots,A_n)$, – $T^m A_i$, $m\geq n$, $i=1,\ldots,k$ çoxluqlarını özündə saxlayan minimal σ – cəbrdir. K – Q. xassəsi T -nin K – avtomorfizm olması ilə eynigüclüdür (verilən ad da elə bununla izah olunur).

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

QARIŞMA ŞƏRTLƏRİ təsadüfi meydan üçün «**перемешивание условия** для случайного поля; **mixing conditions** for random fields» – bir-birindən olduqca uzaq çoxluqlarda təsadüfi meydanla doğurulmuş σ – cəbrlərin zəif asılılığını ifadə edən (müəyyən mənada) şərtlərdir. $X(t)$, $t\in T\subset\mathbb{R}^n$ təsadüfi meydanı $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş olsun. $U\subset\mathbb{R}^n$ çoxluğu U -da X meydanı ilə doğrulmuş $\mathfrak{A}_X(U)=\sigma\{X(t),\ t\in U\cap T\}$ minimal σ – cəbrinə qarşı qoyulmuş olsun ($\mathfrak{A}_X(U)=\{\varnothing,\ \Omega\}$, $U\cap T=\varnothing$ olduqda). Asılılıq əmsalları (qarışma əmsalları) $\mathfrak{A}_X(U_1),\ \ldots,\mathfrak{A}_X(U_k)$, $k\in\mathbb{N}$, $U_i\subset\mathbb{R}^n$, $i=1,\ \ldots,k$ σ – cəbrlərinin əlaqələrini təsvir etmək üçün istifadə edilir. Bu zaman σ – cəbrlər toplusu üçün asılılıq ölçüsünün necə seçilməsi və bu σ – cəbrlərin «fəza yerləşmələrinin», yəni $U_1,\ \ldots,U_k$ çoxluqlarının yerləşməsinin nə dərəcədə nəzərə alınması olduqca önəmlidir. Əvvəllərdə təsadüfi kəmiyyətlər üçün daxil olunmuş (bax, *Qarışma şərtləri* təsadüfi proses üçün) cüt qarışma əmsalları daha çox istifadə olunanlardır. Lakin təsadüfi proseslər üçün qarışma əmsalları meydan üçün baxıldığı halda parametrik T çoxluğunun çoxölçülü spesifikası nəzərə alınmalıdır (bax, [1] – [6]). $\nu(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B})$ – hər hansı asılılıq ölçüsü olsun, yəni $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\subset A$ σ – cəbrlərinin elə mənfi olmayan funksiyası olsun ki, əgər $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ asılı olmayan σ – cəbrlər olarsa, $\nu(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=0$ olsun.

Fərz olunur ki,

$$\nu_X(V_1;\ V_2)=\nu(\mathfrak{A}_X(V_1),\ \mathfrak{A}_X(V_2)),\ V_1,\ V_2\subset\mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Cüt Q. ş. V_1, V_2 «aralandıqda» $\nu_X(V_1;V_2)\to 0$ münasibətinin ödənilməsi kimi anlaşılmalıdır. Bu hökmün ən sadə variantı meydanın m – asılılığından, yəni d – çoxluqlar arasında məsafə olarsa, $d(V_1,V_2)\geq m$ olduqda $\mathfrak{A}_X(V_1)$ və $\mathfrak{A}_X(V_2)$ -nin asılı olmamazlığından ibarətdir. Ümumi halda $d(V_1,V_2)=r$ artıqda, V_1 və V_2 isə bəzi əlavə şərtləri ödədikdə, $\nu_X(V_1;V_2)$ ölçüsünə məhdudiyyətlər qoyulur. Məs., tələb etmək olar ki, V_1 və V_2 hipermüstəvilər cütü və ya konsentrik kürələr (kublar) cütü arasındakı, eni r -ə bərabər qatla (layla) ayrılsın, V_1 və V_2 -nin diametrinə, V_1 və V_2 -nin elementləri üzərinə (diskret halda) məhdudiyyətlər qoymaq olar və s. Meydan asılı olmamazlığını hadisələr σ – cəbrlərinə müraciət etmədən, hadisələr sistemlərindən (məs., hər hansı səddi keçmə ilə) istifadə etməklə və ya təsadüfi kəmiyyətlər sistemlərində verilmiş funksionalları tətbiq etməklə təsvir etmək olar. Məs., kəsişməyən sonlu $I,J\subset T$ çoxluqları və müəyyən siniflərin f, g funksiyaları üçün $\left|\operatorname{cov} f(X(t),\ t\in I),\ g(X(t),\ t\in J)\right|$ yuxarıdan qiymətləndirilir. Bu qiymətləndirmədə yalnız $d(I,J)$, I və J -nin elementləri sayı deyil, həm də istifadə olunan funksional siniflərin xarakteristikaları da nəzərə alınır.

Stasionar meydanların qarışması spektral terminlərdə [7]-də verilir. Cüt olmayan qarışma əmsalları və Q. ş. haqqında, o cümlədən, erqodik nəzəriyyədə istifadə olunanlar haqqında, [8] - [10]-a bax. Məs., X üçün çoxqat qarışma ixtiyari k və lokal məhdud $F_{A_1},\ \ldots,F_{A_k}$ funksiyalarının ixtiyari toplusu üçün $\min_{1\leq i<j\leq k} d(t_i,\ t_j)\to\infty$ olduqda

$$\mathbf{M}(F_{A_1+t_1}(X)\ \ldots\ F_{A_k+t_k}(X))\to\mathbf{M}F_{A_1}(X)\ \ldots\ \mathbf{M}F_{A_k}(X)$$

münasibətinin ödənilməsi kimi interpretasiya olunur; burada $F_{A+t}(X)=F_A(\tau_t X)$, $(\tau_t X)(s)=X(s+t)$. Cüt olmayan qarışma əmsallarına mühüm misal semiinvariantlardır (bax, [11]). Əgər $X(t_1),\ \ldots,X(t_k)$ kəmiyyətlərinin hər hansı qrupu bu topludakı digər kəmiyyətlərdən asılı olmazsa, onda semiinvariant $\operatorname{cum}(X(t_1),\ \ldots,\ X(t_k))=0$ olur. Beləliklə, qeyd olunan semiinvariantın sıfra yaxın olması $X(t_i)$, $i=1,\ \ldots,k$ kəmiyyətlərinin asılılıq dərəcəsini xarakterizə edir. Bu zaman $\operatorname{cum}(g_1(X(t_1)),\ \ldots,\ g_k(X(t_k)))$ -nı g_i, $i=1,\ \ldots,k$ funksiyalarının müəyyən ailəsi üçün yuxarıdan qiymətləndirdikdə (bax, [10]), $t_1,\ \ldots,\ t_k$ nöqtələrinin yerləşməsini qraflar nəzəriyyəsi terminlərində nəzərə almaq mümkün olur. Qeyd etmək lazımdır ki, meydan asılılığının təsvirini $X(\cdot)$ təsadüfi funksiyasının xassələrinə əsaslanmaqla, parametrlər fəzasının «bir-birindən uzaqlaşmış» altçoxluqlarında bu funksiyanın nə cür olacağını nəzərə almamaqla vermək olur. Belə əlaqəli sonlu asılı meydanlar haqqında [12]-yə, çoxparametrli martinqallar haqqında [13]-ə, Markov meydanları haqqında [14]-ə, assosialanmış kəmiyyətlər sistemi haqqında [15]-ə, Gibbs meydanları haqqında [10], [16]-ya bax.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, № 2, с. 201–29; [2] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1986; [3] Булинский А. В., Предельные теоремы в условиях слабой зависимости, М., 1989; [4] Eberlein E., Taqqu M. S., (eds.), Dependence in probability and statistics, Boston, 1986; [5] Bradley R. C., «Statist. Probab. Letters», 1989, v. 8, p. 489–91; [6] Doukhan P., Mixing properties and examples, «Lect. Notes in Statist.», v. 85, B. etc, 1995; [7] Bradley R. C., Utev S. A., in: «Proc. sixth. Vilnius conf.», Utrechet, 1994, p. 99–120; [8] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [9] Bradley R. C., Bryc W., «J. Multivar. Analys», 1985, v. 16, № 3, p. 335–67; [10] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [11] Саулис Л., Статулявичус В., Предельные теоремы о больших уклонениях, Вильнюс, 1989; [12] Chen L. N. Y., «Z. Wahr und verw. Geb.», 1978, Bd 43, S. 223–43; [13] Гихман И. И., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 3–28; [14] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [15] Newman C. M., in «Inequalities in Statist. And Probab.», Hayward, p. 127–140; [16] Георги Х.-О., Гиббсовские меры и фазовые переходы, пер. с англ., М., 1992.

QARIŞMA ŞƏRTLƏRİ təsadüfi proses üçün «**перемешивание условия** для случайного процесса; **mixing conditions** for random process» – *təsadüfi proses* (birölçülü parametrik $T\subset\mathbb{R}$ çoxluğunda təsadüfi meydan) üçün qarışma şərtləridir. $\mathbb{R}$ -də xətti qaydanın olması V_1, $V_2\subset\mathbb{R}$ çoxluqları arasında asılılıq ölçüsü

$\nu_X(V_1; V_2)$ kəmiyyəti ilə kifayətlənməyə imkan verir (bax, *Qarışma şərtləri* təsadüfi meydan üçün, düstur (1)), bu halda V_1 və V_2 çoxluqları əlavə şərtlə əlaqəli hesab edilir, belə ki, V_1 prosesin «keçmişinə», V_2 isə prosesin «gələcəyinə» aid hesab olunur, yəni V_1 ədəd oxunda V_2 -dən solda yerləşir. Adətən, V_1 və V_2 kimi yarımoxlar götürülür. Onda $X(t)$ prosesinin qarışma əmsalı $\nu_X(r) = \sup_t \nu\{\mathfrak{A}_X((-\infty, t]), \mathfrak{A}_X([t+r, \infty))\}$ olur və Q. ş. ondan ibarət olur ki, $r \to \infty$ olduqda $\nu_X(r) \to 0$. Ənənəyə görə qarışma əmsalları yunan hərfləri ilə işarə olunur. Əgər $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathscr{A}$ üçün

$$\nu_{\gamma,\delta}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =$$

$$= \sup\left\{\frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{(\mathbf{P}(A))^{\gamma}(\mathbf{P}(B))^{\delta}} : A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B},\ \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0\right\}$$

götürülərsə, onda $\gamma = \delta = 0$ olduqda Rozenblatt α – əmsalı (güclü qarışma əmsalı), $\gamma = 1$, $\delta = 0$ olduqda İbrahimov φ – əmsalı (müntəzəm güclü qarışma əmsalı), $\gamma = \delta = 1$ olduqda isə Blüm – Henson – Kupmens ψ – əmsalı alınır. Hebeleyn maksimal korrelyasiya əmsalı və Kolmoqorov mütləq requlyarlıq əmsalı kimi əmsallar da çox istifadə olunur. Bu əmsallar asılılıq ölçülərinin uyğun olaraq:

$$\rho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =$$

$$= \sup\{\operatorname{corr}(f, g) : f \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}),\ g \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})\}$$

(burada $\operatorname{corr}(\cdot, \cdot)$ – korrelyasiya əmsalıdır) və

$$\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \sup \sum_{i=1}^{\mathbf{I}} \sum_{j=1}^{\mathbf{J}} \left| P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j) \right|,$$

(burada yuxarı sərhəd Ω -nın sonlu bölgülərini təşkil edən bütün $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, I$, $B_j \in \mathfrak{B}$, $j = 1, \ldots, J$ üzrə götürülür) ifadələrindən istifadə etdikdə alınır. Yuxarıda qeyd olunan və digər qarışma əmsalları haqqında bax, [1] – [6]. Əgər proses m – asılı proses olarsa [bu anlayış S. N. Bernşteyn tərəfindən daxil olunmuşdur və t -nin ixtiyari qiymətində $\mathfrak{A}_X((-\infty, t])$ və $\mathfrak{A}_X((t+m, \infty))$ minimal σ – cəbrlərini asılı olmamazlığını ifadə edir], onda asılılıq ölçüsü ν ixtiyari olduqda bütün $r \geq m$ üçün $\nu_X(r) = 0$ olur. $\mathscr{A}$ -da ixtiyari σ – cəbrlər cütü üçün $4\alpha \leq \rho \leq 2\varphi^{1/2}$, $\alpha \leq \beta \leq \varphi \leq \psi$ bərabərsizlikləri ödənilir. Bəzi hallarda daha dəqiq münasibətlər göstərmək olur. Markov prosesləri üçün Q. ş. haqqında [7]-yə bax, [6], [8]-də müxtəlif qarışma şərtlərinin verilmiş halları əks olunan ardıcıllıqlara aid misallarda şərh olunmuşdur. Proseslər və martinqal texnikası üçün Q. ş.-nin əlaqəsi haqqında bax, [9]. Semiinvariantlardan istifadə edən Q. ş. üçün bax, [10] – [12]. Requlyarlığın digər anlayışları ilə [məs., $\mathfrak{A} = \bigcap_t \mathfrak{A}_X((-\infty, t])$ σ – cəbrinin trival olması tələb olunduğu hal] Q. ş.-nin münasibətləri haqqında bax, [1] – [3]. Cüt əlaqələrdən başqa digərlərini də nəzərə alan hiperqarışma haqqında bax, [13].

Əd.: [1] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [2] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [3] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процесссы, М., 1963; [4] Phillip W., Stout W., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 161; [5] Rosenblatt M., Stationary sequences and random Fields, Brekhauses, 1985; [6] Yochihava K., Weakly dependent stochastic sequences and their application, v. 1–4, Tokyo, 1992–96; [7] Давыдов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 2, с. 321–38; [8] Bradley R., «Probab. Theory Related Fields», 1987, v. 74, p. 497–503; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [10] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории случайных процессов, М., 1964; [11] Statulevicius V. A., «Proc. Int. Congr. Math. Vancouver», 1975, v. 2, p. 173–81; [12] Брилджнжер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [13] Denschel J. D., Stroock D. W., Large deviations, Boston, 1989.

QARŞILIQLI ASILI OLMAMAZLIQ « взаимная независимость; mutually independence » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

QARŞILIQLI FAZA SPEKTRİ « взаимный фазовый спектр; phase cross spectrum » – bax, *Faza*.

QARŞILIQLI KORRELYASİON FUNKSİYA « взаимная корреляционная функция; cross correlation function », qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası, qarşılıqlı kovariasiya funksiyası $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ *təsadüfi proseslərinin* (və ya *meydanlarının*) – aşağıdakı üç funksiyalardan biridir:

1) $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ -nin s və t nöqtələrində ikinci tərtib qarışıq momenti –

$$\mathbf{M}\zeta_1(t)\zeta_2(s) = \mathbf{B}_{12}(t, s), \quad t, s \in T;$$

2) qarışıq mərkəzi moment (kovariasiya) –

$$\mathbf{M}[\zeta_1(t) - \mathbf{M}\zeta_1(t)][\zeta_2(t) - \mathbf{M}\zeta_2(t)] = b_{12}(t, s);$$

3) t və s -in funksiyası kimi, $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(s)$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalı –

$$b_{12}(t, s) \big/ [\mathbf{D}\zeta_1(t)\mathbf{D}\zeta_2(t)]^{1/2} = \rho_{12}(t, s).$$

Əksər hallarda bu üç funksiyanın hər biri Q. k. f. adlandırılır, lakin bu termin bəzən, yalnız $\rho_{12}(t, s)$ funksiyasına şamil olunur, $b_{12}(t, s)$ isə qarşılıqlı korrelyasion funksiya adlandırılır; digər hallarda anlaşılmazlıq yarandıqda, $B_{12}(t, s)$ – qarşılıqlı korrelyasion funksiya, $b_{12}(t, s)$ – mərkəzlənmiş qarşılıqlı korrelyasion funksiya, $\rho_{12}(t, s)$ – normalanmış qarşılıqlı korrelyasion funksiya adlandırılır. $B_{12}(t, s)$, $b_{12}(t, s)$ və $\rho_{12}(t, s)$ funksiyaları, xüsusilə, stasionar təsadüfi proseslərə (və ya $\mathbb{R}^k$ və $\mathbb{Z}^k$ -da bircins təsadüfi meydanlara) tətbiqdə, bunlar yalnız $t - s$ fərqindən asılı olduqda, geniş istifadə olunur.

QARŞILIQLI KORRELYASİYA FUNKSİYASI « взаимная функция корреляции; cross correlation function » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya.*

QARŞILIQLI KOVARİASİON FUNKSİYA « взаимная ковариационная функция; cross covariance function » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasion funksiya.*

***QARŞILIQLI KOVARİASİYA FUNKSİYASI « взаимная ковариационная функция; cross covariance function »** – $\{\zeta_1(t);\ t\in T\}$ və $\{\zeta_2(t);\ t\in T\}$ təsadüfi proseslərinin qarışıq mərkəzi momentinə (kovariasiyası) –

$$b_{12}(t,s) = \mathbf{M}[\zeta_1(t) - \mathbf{M}\zeta_1(t)][\zeta_2(t) - \mathbf{M}\zeta_2(t)]$$

funksiyasına deyilir; $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(s)$, t və s -in qeyd olunmuş qiymətlərində $(s,t\in T)$ təsadüfi kəmiyyətlərdir. $b_{12}(t,s)$ – mərkəzlənmiş qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası da adlanır.

QARŞILIQLI KOVARİASİYA OPERATORU « взаимной ковариации оператор; cross covariance operator » – bir *təsadüfi elementin* digərindən asılılığını xarakterizə edən operatordur. X və Y – uyğun olaraq, $\mathbf{B}_1$ və $\mathbf{B}_2$ həqiqi separabel Banax fəzalarından qiymətlər alan, ikinci momenti zəif təsadüfi elementlər olsun (qoşma fəzalar $\mathbf{B}_1^*$, $\mathbf{B}_2^*$ ilə işarə olunur). Onda

$$b_1^*(R_{XY}\,b_2^*) = \mathbf{M}b_1^*(X)\,b_2^*(Y) - \mathbf{M}b_1^*(X)\,\mathbf{M}b_2^*(Y),$$

$$b_1^* \in \mathbf{B}_1^*,\ b_2^* \in \mathbf{B}_2^*$$

bərabərliyi ilə təyin olunan yeganə kəsilməz xətti $R_{XY}: \mathbf{B}_2^* \to \mathbf{B}_1$ operatoru vardır və bu operator X və Y təsadüfi elementlərinin qarşılıqlı kovariasiya operatoru adlanır. Tərifdən $R_{YX} = R_{XY}^*$ və bütün $b_1^* \in \mathbf{B}_1^*$, $b_2^* \in \mathbf{B}_2^*$ qiymətləri üçün

$$[\,b_1^*(R_{XY}\,b_2^*)]^2 \le b_1^*(R_X\,b_1^*)\,b_2^*(R_Y\,b_2^*)$$

olduğu bilavasitə alınır, burada R_{XY}^* operatoru R_{YX} -ə qoşma operator, R_X və R_Y – uyğun olaraq, X və Y -in kovariasiya operatorlarıdır və əgər X və Y asılı olmayan təsadüfi elementlər olarsa, $R_{XY} = 0$.

Tərif daha ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəzaları üçün də doğrudur.

QARŞILIQLI KVADRATİK XARAKTERİSTİKA « взаимная квадратическая характеристика; mutual quadratic characteristic / mutual variation » martinqalların – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika.

QARŞILIQLI RELEY KORRELYASİON FUNKSİYASI « взаимная релейная корреляционная функция; reley cross correlation function » – bax, *Reley korrelyasion funksiyası.*

QARŞILIQLI SPEKTR « взаимный спектр; cross spectrum » – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

QARŞILIQLI SPEKTRAL FUNKSİYA « взаимная спектральная функция; cross spectral function » – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

QARŞILIQLI SPEKTRAL SIXLIQ « взаимная спектральная плотность; cross spectral density » – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

QARŞILIQLI TƏSİR « взаимодействие; interaction / coupling » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

QARŞILIQLI TƏSİR(i) faktorların **« взаимодействие** факторов; **interaction »** – bax, *Faktor eksperiment.*

QAUSS BƏRABƏRSİZLİYİ « Гаусса неравенство; Gauss inequality » – bax, *Çebışev bərabərsizliyi*.

QAUSS BƏYAZ KÜYÜ « гауссовский белый шум; Gaussian white noise » – bax, *Bəyaz küy*.

QAUSS ÇEVİRMƏSİ « Гаусса преобразование; Gauss transform » – bax, *Erqodik məsələlər*(i) diofant yaxınlaşmalarının.

QAUSS DİNAMİK SİSTEMİ « гауссовская динамическая система; Gaussian dynamical system » – elə $(\mathscr{H}, \mu, G)$ üçlüyüdür ki, $\mathscr{H}$, – $G = \mathbb{Z}$-də və ya $\mathbb{R}$ -də yerinidəyişməyə görə invariant olan funksiyaların vektor fəzasıdır (ola bilər ki, ümumiləşmiş) və diskret $(\mathbb{Z})$ və ya kəsilməz $(\mathbb{R})$ zamanlı, həqiqi və ya kompleks $X(t)$, $t\in G$ stasionar (dar mənada) Qauss prosesinin demək olar ki, bütün realizasiyalarını özündə saxlayan vektor fəzadır, burada μ – prosesin doğurduğu, $\mathscr{H}$ -da təyin olunmuş ölçüdür. Bu halda G qrupu $\mathscr{H}$ -da μ ölçüsünü saxlamaqla yerinidəyişmələrlə təsir göstərir:

$$(T_g f)(\cdot) = f(\cdot + g),\ g\in G.$$

Təsadüfi stasionar proseslərin ümumi cəhətdən öyrənilməsi baxımından Q. d. s. nəzəriyyəsi olduqca yaxşı inkişaf etmiş qeyri – xətti nəzəriyyəyə misaldır; dinamik sistemlər (invariant ölçülü çevirmələrin) nəzəriyyəsi çərçivəsində isə Q. d. s., əsas etibarilə, spektral nəzəriyyə məqsədlərində yaxşı uyğunlaşdırılmış qeyri – trivial modeldir. Bunu 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov qeyd etmiş, S. V. Fomin isə [1]-də inkişaf etdirmişdir; onlar göstərmişlər ki, Q. d. s.-nin spektrini prosesin spektral ölçüsü terminlərində öyrənmək mümkündür və onun strukturu differensial tənliklər nəzəriyyəsində yaranan klassik dinamik sistemlər spektrinin strukturuna tamamilə oxşamaya bilər. Sonra, tez bir zamanda sinqulyar kəsilməz sadə spektrli dinamik sistemə ilk misal quruldu (bax, [2]) və [4], [5]-də Q. d. s. spektrlərinin ətraflı nəzəriyyəsi verildi.

Əgər $\mathbf{M}X(t) \equiv 0$ olarsa, onda $X(t)$ prosesinin doğurduğu Q. d. s.

$$B(s,\ t) = b(s-t) = \mathbf{M}X(t)\overline{X(s)}$$

korrelyasion funksiyası və ya F spektral ölçüsü:

$$b(u) = \int_{\hat{G}} e^{ihu}\,dF(u)$$

ilə tamamilə təyin olunur, $\hat{G} = S^1$ və ya $=\mathbb{R}$. Q. d. s.-nin metrik nəzəriyyəsinin əsas faktları F terminlərində aşağıdakı kimi ifadə olunur.

1) Q. d. s., yalnız və yalnız, o halda erqodik sistemdir ki, F ölçüsü kəsilməz, Q. d. s.-nin spektri də kəsilməz olsun.

2) Q. d. s., yalnız və yalnız, o halda qarışmadır ki, $\lim_{u\to\infty} b(u) = 0$ olsun (bax, [4]).

3) Q. d. s.-nin maksimal spektral tipi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{*n}$$

kompozisiyası vasitəsilə ifadə olunur, burada $F^{*n} = \sigma_0$, F^{*n}, – F ölçüsünün $\hat{G}$-də n – qat kompozisiyasıdır (bax, [1]). Spektrin təkrarlığı xüsusiyyəti F ölçüsünün daşıyıcısının daha incə arifmetik xassələrindən asılıdır. Təkrarlılıq ya vahidi (sadə spektr), ya qeyri – məhdud dəfə təkrarlanan, ya sonsuz təkrarlanan spektr ola bilər ([2], [5]).

4) Q. d. s.-nin entropiyası F-in mütləq kəsilməz komponenti olmadığı halda sıfra, əgər belə komponent olarsa, sonsuzluğa bərabərdir. Əgər F mütləq kəsilməz komponent olarsa, onda Q. d. s. K – sistemdir (bax, [4]).

5) Mütləq kəsilməz spektrli Q. d. s.-ləri metrik izomorf və Bernulli sistemləridir.

6) İki izomorf Q. d. s.-lərinin metrik izomorfizmi, spektrlər qarşılıqlı mütləq kəsilməz olduqları halda, (s ü r ü ş ə n c ə m l ə m ə adlandırılan) xətti izomorfizm və ya polinomial olmayan izomorfizmdir.

Q. d. s.-nin bütün nəzəriyyəsinin, əslində elə Qauss proseslərinin qeyri – xətti nəzəriyyəsinin prinsipial əsası $L^2_\mu(\mathscr{H})$ fəzasının Hermit – Vik polinomları üzrə, yəni çoxqat stoxastik inteqralları üzrə Fok – Viner – İto ayrılışıdır:

$$L^2_\mu(\mathscr{H}) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \oplus S^n H,$$

burada S^n, – n-ci simmetrik qüvvət üstü, H, – $\mathscr{H}$-da xətti ölçülən funksionallar fəzasıdır, yəni $H = L^2_F(\hat{G})$. Sağ tərəfin multiplikativ strukturu [5]-də verilmişdir. Bu konstruksiya 20-ci əsrin 30-cu illərində kvant meydan nəzəriyyəsində [«Fok bozon fəzası»; bax, [7]] yaranmışdı, sonradan isə N. Vinerin [6]-da və K. İtonun [3]-də asılı olmadan nəzəri – ehtimali işlərində verilmişdir. Ayrılış təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində, statistikada, operatorlar nəzəriyyəsində və s. çoxsaylı tətbiqləri ilə səciyyəvidir.

Q. d. s.-nin mühüm ümumiləşmələri çoxölçülü Q. d. s.-ləridir, yəni təsadüfi Qauss meydanlarıdır; bunlar aşağıdakı invariant təriflə əhatə olunurlar: Ümumi Q. d. s. Qauss ölçülü ixtiyari vektor fəzanın xətti çevirmələr qrupudur.

Əd.: [1] Ф о м и н С. В., «Укр. Матем.журн.» 1950, т. 2, № 2, с. 25–47; [2] Г и р с а н о в И. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 851–53; [3] I t ô K., «Japan J. Math.», 1952, v. 22, p. 63–86; [4] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [5] В е р ш и к А. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 1, с. 9–12, № 2, с. 255–60; [6] В и н е р Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961; [7] С а й м о н Б., Модель $P[\varphi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976.

QAUSS KANALI « гауссовский канал; Gaussian channel » – keçid funksiyası şərti Qauss paylanmasını təyin edən rabitə *kanalıdır*. Q. k. üçün bir çox mühüm nəzəri – informasion xarakteristikaları aşkar şəkildə hesablamaq mümkündür. Məs., giriş siqnalı $Y = (\ldots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \ldots)$ stasionar təsadüfi ardıcıllığı, çıxış siqnalı $\widetilde{Y} = (\ldots, \widetilde{Y}_{-1}, \widetilde{Y}_0, \widetilde{Y}_1, \ldots)$ olan Q. k. üçün; burada

$$\widetilde{Y}_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k Y_{i-k} + Z_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$Z = (\ldots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \ldots)$ isə Y-dən asılı olmayan stasionar Qauss təsadüfi ardıcıllığıdır və $\mathbf{M} Z_i = 0$, spektral sıxlıq $f_Z(\lambda)$-ya bərabərdir, $-1/2 \le \lambda \le 1/2$; girişdə

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) d(\lambda) \le S$$

məhdudiyyəti olduqda, *kanalın ötürücülük qabiliyyəti* C aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \log \max \left[\left| \frac{a(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \right|^2 \frac{\mu}{f_Z(\lambda)},\ 1 \right] d\lambda;$$

burada $a(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-2\pi i k \lambda}$, μ isə

$$\int_{-1/2}^{1/2} \max \left[\mu - \left| \frac{\Phi(\lambda)}{a(\lambda)} \right|^2 f_Z(\lambda),\ 0 \right] d\lambda = S$$

tənliyindən təyin olunur.

Əd.: [1] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] К о л е с н и к В. Д., П о л т ы р е в Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Ш е н н о н К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

QAUSS KOVARİASİYASI « Гаусса ковариация; Gaussian covariation » – B^*-da bixətti formadır:

$$\Phi(f,\ g) = \int_B f(x) g(x) \mu(dx) - \int_B f(x) \mu(dx) \int_B g(x) \mu(dx),$$

$$f, g \in B^*$$

və B Banax fəzasında *Qauss ölçüsü* μ ilə təyin olunur. Uyğun $R : B^* \to B(f(Rg)) = \Phi(f,\ g)$ operatoru Q a u s s k o v a r i a s i o n o p e r a t o r u adlanır. Belə operatorlar sinfinin təsviri məsələsi Qauss ölçülərinin təsviri məsələsinə ekvivalentdir. Separabel Hilbert fəzasında Qauss kovariasion operatorları sinfi simmetrik müsbət nüvə operatorlar sinfi ilə üst-üstə düşür.

$T = [0,\ 1],\ [0, \infty], \ldots,$ $C(T)$ fəzası halında Q. k. –

$$R(s, t) = \mathbf{M}\zeta(t)\ \zeta(s) - \mathbf{M}\zeta(t)\ \mathbf{M}\zeta(s)$$

$\{\zeta = \zeta(t),\ t \in T\}$ Qauss prosesi ilə təyin olunan funksiyaya deyilir.

QAUSS QANUNU « Гаусса закон; Gaussian law » – *normal paylanmanın* digər istifadə edilən adıdır. «Q. q.» adı K. Qaussun xətalar nəzəriyyəsində bu paylanmanın oynadığı rol ilə bağlıdır.

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}, \qquad h>0 \qquad (*)$$

sıxlıq funksiyaları (ilk əvvəl, məhz bunlar Q a u s s q a n u n u adlandırılırdı) K. Qaussun «Səma cisimlərinin hərəkəti nəzəriyyəsi» əsərində (1809, bax, [1]) daxil olunmuşdur. [2, bölmə 3, §. 177]-də belə bir prinsip ifadə olunmuşdur: «Əgər hər hansı kəmiyyət eyni şəraitdə, eyni dəqiqliklə aparılan çoxsaylı müşahidələrdə bilavasitə təyin oluna bilərsə, onda bu kəmiyyət üçün müşahidə olunmuş qiymətlərin ədədi ortası müşahidə olunan qiymətlərdən ən ehtimal olunan qiymətdir…». Bu müddəa aşağıdakı kimi interpretasiya olunur: fərz olunur ki, müşahidə olunan kəmiyyətin əsl qiyməti z-dir və x nəticəsinin alınması ehtimalının sıxlıq funksiyası $\varphi(x-z)$-dir. Onda ixtiyari n qiymətində və ixtiyari $x_1, ..., x_n$ üçün $\varphi(x_1-z)\,...\,\varphi(x_n-z)$ öz maksimumunu $z=(x_1+...+x_n)/n$ qiymətində (z-in funksiyası kimi) alır. Buradan aydındır ki, $\varphi'(x)/x\varphi(x)$ nisbəti x-dən asılı deyildir və $\varphi(x)$ isə (*) kimi ifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, bu prinsip dəfələrlə tənqidə məruz qalmışdır.

Əd.: [1] Г а у с с К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89–109; [2] P o i n c a r e H., Calcul des probabilites, 2 éd., P., 1912.

QAUSS MARKOV PROSESİ « гауссовский марковский процесс; Gaussian Markov process », M a r k o v Q a u s s p r o s e s i, – kəsilməz və ya diskret $t\in\mathbb{R}^1$ və ya $t\in\mathbb{Z}^1$ zaman parametrli birölçülü və ya çoxölçülü Markov prosesidir və bu prosesin qiymətlərinin ixtiyari qrupunun ehtimal paylanmaları Qauss paylanmalarıdır.

Qauss prosesi özünün orta qiyməti (və ya çoxölçülü halda orta qiymətlər vektoru ilə) və korrelyasion funksiyası (və ya korrelyasion matrisi ilə) ilə tamamilə verilir. Markov xassəsi prosesin orta qiymətindən asılı olmadığından Q. M. p.-nin orta qiyməti ixtiyari ola bilər; bu halda həmişə prosesin qiymətindən bu orta qiyməti çıxaraq, yalnız orta qiyməti sıfra bərabər olan Q. M. p.-lərinə baxmaq olar. Buna görə də, Q. M. p.-ləri sinfinin təsviri belə proseslərin korrelyasion funksiyalarının (və ya matrislərinin) mümkün formalarının təyin olunmasına gətirilir.

$\zeta(t)$ Qauss prosesinin Markov xassəli olmasından $t>s>u$ olduqda,

$$\hat{\mathbf{M}}\{\zeta(t)\,|\,\zeta(s),\ \zeta(u)\} = \hat{\mathbf{M}}\{\zeta(t)\,|\,\zeta(s)\} \qquad (1)$$

olduğu alınır, burada $\hat{\mathbf{M}}\{\zeta(t)\,|\,\zeta(s),\ \zeta(u)\}$, – $\zeta(s)$, $\zeta(u)$-dan, $\hat{\mathbf{M}}\{\zeta(t)\,|\,\zeta(s)\}$ isə yalnız $\zeta(s)$-dən xətti asılı olan və $\zeta(t)$-yə ən yaxşı yaxınlaşmalardır (xətanın kvadratının minimumu mənada).

Orta qiyməti sıfra bərabər olan və korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}\,\zeta(t)\,\zeta(s)=B(t,s)$ olan birölçülü $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinə tətbiqdə (1) şərtini aşağıdakı kimi yazmaq olar: $t>s>u$ olduqda

$$B(t,u)=B(t,s)B(s,u)/B(s,s). \qquad (2)$$

Korrelyasion funksiyası $B(t,\ s)$ olan Qauss prosesinin Markov prosesi olması üçün, (2) şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir (bax, məs., [1], §2, 4). Beləliklə, birölçülü Q. M. p.-ləri sinfi korrelyasion funksiyası $B(t,\ s)$ (2) şərtini ödəyən Qauss prosesləri sinfi ilə üst-üstə düşür.

Əgər Q. M. p. $\zeta(t)$ stasionar olarsa, onda $B(t,s)=B(t-s)$ olur və (2) şərti və $B(t)$ funksiyasının müsbət müəyyənliyi və t-yə görə kəsilməzliyi (əgər t kəsilməzdirsə) tələbindən aşağıdakı münasibət alınır:

$$B(t)=\begin{cases} Ce^{-\alpha(t)}, & C>0,\ \alpha>0,\ t\in\mathbb{R}^1 \text{ olduqda,}\\ Ca^{|t|}, & C>0,\ |a|<1,\ t\in\mathbb{Z}^1 \text{ olduqda.}\end{cases} \qquad (3)$$

Beləliklə, stasionar cırlaşmayan Q. M. p. zaman parametrinin kəsilməzliyi halında hökmən *Ornşteyn – Ulenbek prosesi* ilə üst-üstə düşür (bu müddəa C. Duba məxsusdur, bax, [2]).

Ümumi qeyri – stasionar Q. M. p. üçün (2) şərti və $B(t,\ s)$ nüvəsinin müsbət müəyyənliyi və kəsilməzliyindən geniş requlyarlıq şərtlərində

$$B(t,\ s)=\begin{cases} \varphi(t)\psi(s), & t\le s \text{ olduqda,}\\ \psi(t)\varphi(s), & t>s \text{ olduqda}\end{cases} \qquad (4)$$

münasibəti alınır, burada $\psi(t)$ – ixtiyari, sıfra bərabər olmayan funksiya, $\varphi(t)$ isə elə kəsilməz funksiyadır ki, $\varphi(t)/\psi(t)=c(t)$ – mənfi olmayan azalmayan funksiyadır. Korrelyasion funksiyası (4) olan $\zeta(t)$ Qauss prosesi $\zeta(t)=\psi(t)\,W(c(t))$ şəklində ifadə oluna bilər, burada $W(t)$ – standart Viner prosesidir; belə $\zeta(t)$ prosesi Markov prosesidir.

Orta qiyməti sıfra bərabər çoxölçülü Q. M. p. $\zeta(t)=\{\zeta_1(t), ..., \zeta_n(t)\}$ özünün korrelyasion matrisi $B(t,\ s)=\left\|\,\mathbf{M}\zeta_i(t)\zeta_j(s)\right\|$ ilə verilir; əgər $B(t,s)$ çevrilən matrisdirsə, onda $t>s$ olduqda $\hat{\mathbf{M}}\{\zeta(t)\,|\,\zeta(s)\}=R(t,s)\zeta(s)$, $R(t,s)=B(t,\ s)[B(s,\ s)]^{-1}$ olur ($B(s,s)$ çevrilməyən matris olduğu halda $R(t,s)$ üçün ifadə [3]-də verilmişdir). Bu halda $\zeta(t)$-nin çoxölçülü Q. M. p. olması üçün $t\ge s\ge u$ olduqda $R(t,u)=R(t,s)R(s,u)$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir (və ya bu şərtə ekvivalent $R(u,t)=R(u,s)R(s,t)$ şərtinin ödənilməsi; bax, [3]). Müəyyən xətti stoxastik differensial tənliklər sisteminin həlləri çoxölçülü Q. M. p.-ləridir və n – ölçülü Q. M. p.-nin t ə k r a r l ı l ı q s a y ı (rus. кратность) n-i aşa bilməz (bax, [4]).

Stasionar çoxölçülü Q. M. p. $\zeta(t)$ üçün $B(t,\ s)=B(s-t)$ olması təbiidir. Belə proseslər [3] – [6]-da öyrənilmişdir, xüsusi halda, burada göstərilmişdir ki, qeyri – sinqulyar matrisi $B(0)$ olan kəsilməz Qauss stasionar prosesi, yalnız və yalnız, o halda Q. M. p.-dir ki, onun korrelyasion matrisi $B(t)$, $t>0$ olduqda, $B(t)=B(0)e^{Qt}$ şəklində ifadə olunsun, burada Q – müsbət həqiqi hissələrli məxsusi qiymətləri olmayan sabit matrisdir. Buradan, xüsusi halda, [7]-dəki nəticələr alınmışdır və burada, iki-ölçülü Q. M. p.-nin korrelyasion matrisinin elementləri üçün aşkar düsturlar verilmişdir. Alınan bu nəticələrdən C. Dubun belə bir nəticəsi də (bax, [5]) isbat olunmuşdur ki, kəsilməz zamanlı birölçülü stasionar Qauss prosesi, yalnız və yalnız, o halda çoxölçülü stasionar Q. M. p.-nin komponentidir ki, onun spektral funksiyası $F(\lambda)$-nın yalnız sonlu sayda kəsilmə nöqtələri olsun,

kəsilməz $F(\lambda)$ komponenti isə λ-ya görə rasional $F'(\lambda)$ törəməsi olan mütləq kəsilməz funksiya olsun.

Diskret zamanlı stasionar proseslər üçün analoji nəticə [5]-də isbat olunmuşdur, lakin bu halda, λ rasional funksiyası $e^{i\lambda}$ irrasional funksiyası ilə əvəz olunmalıdır.

Q. M. p. haqqında qeyd olunmuş nəticələr geniş mənada Markov proseslərinə aid nəticələr kimi asanlıqla ifadə oluna bilinir (bax, məs., [3], [4]). Bax, *Təsadüfi proses*; sıfırlar.

Əd.: [1] Ламперти Дж., Случайные процессы. Обзор математической теории, пер. с англ., К., 1983; [2] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Beutler F. J., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 2, p. 424–38; [4] Mandrekar V., «Nagova Math. J.», 1968, v. 33, p. 7–19; [5] Doob J. L., «Ann. Math. Statist.», 1944, v. 15, p. 229–82; [6] Wang M. C., Uhlenbeck G. E., «Rev. Mod. Phys.», 1945, v. 17, № 2–3, p. 323–42; [7] Калмыков Г. И., «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, № 3, с. 495–98.

QAUSS MODELİ « Гаусса модель; Gauss model » eynidəqiqlikli asılı olmayan müşahidələr halı – bax, *Xətalar nəzəriyyəsi*.

QAUSS ÖLÇÜSÜ « гауссовская мера; Gaussian measure », Qauss paylanması, normal paylanma, – sonluölçülü Evklid fəzasında və ya sonsuzölçülü vektor fəzasında ən çox təsadüf olunan və ən mühüm *ehtimal ölçülərindən* biridir. Sonluölçülü halda Q. ö., əksər hallarda, normal paylanma adlandırılır. Bu halda Q. ö.-nün tərifi və əsas xassələri haqqında (biblioqrafiya ilə birlikdə) *Normal paylanma* məq.-nə, sonsuzölçülü hal üçün *Qauss ölsüsü* Banax fəzasında məq.-nə bax.

Abstrakt qrupda Q. ö. anlayışını daxil etmək olar (bax, *Qauss paylanması* lokal kompakt Abel qrupunda).

Bax, *Təsadüfi ölçü.*

QAUSS ÖLÇÜSÜ Banax fəzasında **« гауссовская мера** в банаховом пространстве; **Gaussian measure** in Banach space **»** – həqiqi separabel Banax fəzası B-də μ ehtimal ölçüsüdür, bu ölçünün $b^* \in B^*$ kəsilməz xətti funksionallarına uyğun bütün birölçülü (buna görə də, bütün sonluölçülü) proyeksiyaları $\mu_{b^*} = \mu_0 \circ b^{*-1}$ – ədəd oxu $\mathbb{R}^1$-də və ya $\mathbb{R}^n$-də *Qauss ölçüləridir.* Başqa sözlə, B fəzasına qoşma B^* fəzasının hər bir elementi b^* üçün μ_{b^*} ya bir nöqtədə topalanmış ölçüdür və ya b^*-dan asılı elə $a \in \mathbb{R}^1$ və $d > 0$ ədədləri vardır ki, hər bir Borel çoxluğu $E \subset \mathbb{R}^1$ üçün

$$\mu_{b^*}(E) = \mu(b^{*-1}(E)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_E \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2d}\right\} dt$$

bərabərliyi doğrudur. Bu tərif A. N. Kolmoqorov tərəfindən 1935-də verilmişdir (bax, [1]).

Q. ö. μ-nün xarakteristik funksionalı

$$\hat{\mu}(b^*) = \exp\{ib^*(m) - b^*(Rb^*)/2\}, \quad b^* \in B^* \qquad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $m \in B$ və R, – B^*-dan B-yə xətti simmetrik kəsilməz müsbət operatordur. m elementi – orta qiymətdir, R, – μ ölçüsünün kovariasion operatorudur. Sonluölçülu haldan fərqli olaraq, B sonsuzölçülu fəza olarsa, (1) şəklində ifadə olunan ixtiyari funksional B-də hər hansı μ ölçüsünün xarakteristik funksionalı olmaya da bilər (R üzərinə B fəzasının həndəsəsindən asılı olan əlavə məhdudiyyətlər qoyulmalıdır). Əgər belə ölçü mövcud olarsa, aydındır ki, o, Qauss ölçüsü olacaqdır. Bu əlavə şərtlərin təsviri B-də bütün Qauss ölçülərinin sinfinin təsviri ilə eynigüclüdür.

Əgər $B = l^p$, $1 \le p < \infty$ olarsa, əlavə zəruri və kafi şərt

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f_k\ (Rf_k)]^{p/2} < \infty \qquad (2)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada f_k, $k = 1, 2, \ldots$ – koordinat funksionallarının ardıcıllığıdır. Xüsusi halda, ixtiyari (separabel) Hilbert fəzasında əlavə şərt – kovariasion R operatorunun nüvə operatoru olmasıdır (Murye – Proxorov teoremi).

(2) şərtinə münasib mənada analoji zəruri və kafi şərt hər hansı kotip və şərtsiz bazisə malik Banax fəzasında da doğru olur. Ümumi halda, ixtiyari Q. ö.-nün kovariasion operatoru nüvə operatorudur. Tərsi həmişə doğru olmur: B^*-dan B-yə ixtiyari simmetrik və müsbət nüvə operatoru hər hansı B-də Q. ö.-nün kovariasion operatoru, yalnız və yalnız, o halda ola bilər ki, Banax fəzası 2 tip fəza olsun. 2 kotip Banax fəzası B-də və yalnız belə fəzalarda ixtiyari Q. ö. μ hər hansı köməkçi Hilbert fəzasında hər hansı Q. ö.-nün xətti kəsilməz obrazıdır, yəni ixtiyari belə ölçünün kovariasion operatorunu $R = ASA^*$ şəklində faktorizasiya etmək mümkündür, burada A, – H-dan B-yə xətti kəsilməz operatordur, A^*, – A-ya qoşma operatordur, S, – H-da simmetrik müsbət nüvə operatorudur.

Kəsilməz funksiyalar fəzasında Q. ö.-lərinin kovariasion operatorları sinfinin təsviri məsələsi Qauss təsadüfi prosesinin trayektoriyalarının kəsilməzlik şərtlərinin tapılması məsələsi ilə eynigüclüdür. Son zamanlar bu məsələnin həlli istiqamətində böyük proqresə nail olunmuşdur (bax, [4]). B fəzasında ixtiyari Q. ö. μ üçün «0 və ya 1» qanunu doğrudur: B fəzasında ixtiyari ölçülən altfəzanın μ ölçüsü ya 0-a, ya da ki, 1-ə bərabərdir. B-də ixtiyari iki Q. ö. ya qarşılıqlı mütləq kəsilməz, yaxud qarşılıqlı sinqulyardırlar (Q. ö.-nün dixotomikliyi). Bu iki şərt ödənildikdə requlyarlıq şərtləri, həm də sıxlığın şəkli bu ölçülərin orta qiymətləri və kovariasion operatorları terminlərində ifadə olunur.

Əgər μ orta qiyməti sıfra bərabər, kovariasion operatoru R olan, B-də Q. ö. olarsa, onda μ ölçüsünün daşıyıcısı – RB^* obrazının B-də qapayıcısıdır. Xüsusi halda, əgər μ cırlaşmış ölçü deyildirsə ($Rb^* = 0$ olduqda, $b^* = 0$ olduğu alınır), onda μ-nün daşıyıcısı bütün B fəzasıdır. Buna əsasən, faktorizasiya lemmasından istifadə edərək (bax, *Kovariasion operator*(u) ehtimal ölçüsünün), göstərmək olur ki, B-də hər bir cırlaşmayan mərkəzlənmiş Q. ö. – abstrakt Viner ölçüsüdür. Kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, 1]$-də adi Viner ölçüsü orta qiyməti sıfra bərabər, kovariasion operatoru

$$(Rf)(t) = \int_0^1 \min(t, s)\, df(s)$$

şəklində, $C[0, 1]$-də Q. ö.-dür.

B-də ixtiyari μ Q. ö.-nə görə elementin normasının eksponensial inteqrallanmasını da qeyd etmək olar. Əgər $\alpha < \frac{1}{2\|R\|}$

olarsa, $\int_B \exp\{\alpha \|\cdot\|^2\}\, d\mu(\cdot) < \infty$.

B – ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəza olduğu halda da Q. ö.-nün təsrifi öz qüvvəsində qalır. Bu ümumi halda bəzən, Γ – Qauss ölçüsü tərifinə də təsadüf edilir, burada Γ, – B^*-nun hər hansı total altfəzasıdır (Γ-dən olan xətti funksionallara uyğun birölçülü proyeksiyaların Qauss proyeksiyaları olması tələb olunur). Əgər B metriklənən, tam, separabel fəza olarsa, onda Γ – qaussluluq ixtiyari total Γ fəzası üçün adi B^* – qaussluluq ilə eynigüclüdür. Ölçü Radon ölçüsü olarsa, Qauss ölçüsünün bütün xassələri öz qüvvəsində qalır.

Əd.: [1] Kolmogorov A. N., «C. r. Acad. sci. Paris», 1935, t. 200, p. 1717–18; [2] Vakhaniya N. N., «C. r. Acad. sci. Paris», 1965, t. 260, p. 1560–62; [3] Talagrand M., «Acta math.», 1987, v. 159, № 1–2, p. 99–149; [4] Го Х. – С., Гауссовские меры в банаховых пространствах, пер. с англ., М., 1979.

QAUSS PAYLANMASI « гауссовское распределение; Gaussian distribution » – bax, *Qauss – Laplas paylanması*, *Normal paylanma*.

QAUSS PAYLANMASI lokal kompakt Abel qrupunda **« гауссовское распределение** на локально компактной абелевой группе; **Gaussian distribution** on a locally compact Abelian group **»** – G qrupunda aşağıdakı şərtləri ödəyən γ paylanmasıdır:

1) γ – sonsuz bölünən paylanmadır;

2) əgər $\gamma = e(F) * \nu$ olarsa, burada $e(F)$, – F ölçüsü ilə uyğunlaşdırılmış *ümumiləşmiş Puasson paylanmasıdırsa*, ν isə sonsuz bölünən paylanmadırsa, onda F ölçüsü sıfırda cırlaşır.

$G = \mathbb{R}^n$ qrupu üçün bu tərif klassik tərifiə üst-üstə düşür. Qauss paylanması γ-nın daşıyıcısı G qrupunun hər hansı əlaqəli altqrupunun əlaqəlilik sinfidir.

G qrupunda γ paylanması, yalnız və yalnız, o halda Qauss paylanmasıdır ki, onun xarakteristik funksiyası

$$\hat{\gamma}(\bar{g}) = (g, \bar{g}) \exp\{-\varphi(\bar{g})\} \qquad (*)$$

şəklində ifadə olunsun, burada $(g, \bar{g})$, – g elementində $\bar{g}$ -nin xarakteri, $\varphi(\bar{g})$, – $\overline{G}$ -də kəsilməz mənfi olmayan, $\varphi(\bar{g}_1 + \bar{g}_2) + \varphi(\bar{g}_1 - \bar{g}_2) = 2[\varphi(\bar{g}_1) + \varphi(\bar{g}_2)]$ tənliyini ödəyən funksiyadır, burada $\overline{G}$, – G qrupunun xarakterlər qrupudur (bax, [1]).

Əgər Qauss paylanması γ-nın xarakteristik funksiyasının (*) ifadəsində $g = 0$ olarsa, o, simmetrik Qauss paylanması adlanır. $\Gamma(G)$, – G qrupunda Q. p.-larının çoxluğu, $\Gamma^s(G)$, – G-də simmetrik Q. p.-ları çoxluğu olsun. $\gamma \in \Gamma^s(G)$ paylanması vektor fəzada (sonluölçülü $\mathbb{R}^n$ və ya sonsuzölçülü $\mathbb{R}^\infty$ -da) Q. p.-nın kəsilməz homomorf obrazıdır (bax, [2]).

Əgər γ paylanması G-də γ_t, $t > 0$ kəsilməz birparametrli paylanmalarının semi – qrupuna əlavə oluna bilinərsə, onda $\gamma \in \Gamma(G)$ münasibəti, yalnız və yalnız, G qrupunun ixtiyari sıfır ətrafı U üçün

$$\lim_{t \to 0} \frac{\gamma_t(G \setminus U)}{t} = 0$$

münasibəti ödənildiyi halda doğrudur (bax, [4]).

G – əlaqəli qrup, $\gamma \in \Gamma(G)$ olsun. Əgər G qrupu lokal əlaqəli deyilsə, onda γ sinqulyar paylanmadır (Haar ölçüsü m_G-yə nəzərən) (bax, [2]). Əgər G lokal əlaqəlidirsə və sonlu dim. – ölçülüdürsə, onda γ ya mütləq kəsilməz, ya da ki, sinqulyar paylanmadır. Sonsuz dim. – ölçülü lokal əlaqəli qruplarda analoji müddəanın doğruluğu haqqında məsələyə baxılmamışdır, amma belə qruplarda mütləq kəsilməz Q. p., hətta sinqulyar Q. p. belə qurmaq mümkündür.

Vektor fəzada Q. p. üçün sonlu dim. – ölçülü əlaqəli qruplarda alternativ doğrudur: ixtiyari iki Q. p. ya qarşılıqlı mütləq kəsilməz, ya qarşılıqlı sinqulyardırlar.

Əd.: [1] Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 115–46; [2] Фельдман Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 3, с. 549–69; [3] Фельдман Г. М., «Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на Абелевых группах», К., 1990; [4] Forst G., «Math. Scand.», 1974, v. 34, p. 211–18.

QAUSS PROSESİ « гауссовский процесс; Gaussian process » – ixtiyari sonluölçülü paylanmaları Qauss paylanmaları olan, yəni $\zeta(t_1), ..., \zeta(t_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmalarının uyğun xarakteristik funksiyaları ixtiyari $t_1, ..., t_n \in T$ qiymətlərində

$$\varphi_{t_1, ..., t_n}(u_1, ..., u_n) =$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} A(t_k) u_k - \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^{n} B(t_k, t_j)\, u_k u_j \right\}$$

düsturu ilə ifadə olunan $\zeta = \zeta(t)$, $t \in T$ həqiqi *təsadüfi prosesidir*, burada

$$A(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$$

riyazi gözləmə və

$$B(t, s) = \mathbf{M}\,[\zeta(t) - A(t)][\zeta(s) - A(s)]$$

korrelyasion funksiyadır. $\zeta = \zeta(t)$ Q. p.-nin ehtimal paylanmaları onun riyazi gözləməsi $A(t)$ və korrelyasion funksiyası $B(t, s)$, $s, t \in T$ ilə tamamilə təyin olunur.

İxtiyari $A(t)$ funksiyası və ixtiyari müsbət müəyyən $B(t, s)$ funksiyası üçün elə $\zeta(t)$ Q. p. vardır ki, onun orta qiyməti və korrelyasion funksiyası məhz $A(t)$ və $B(t, s)$-dir. İxtiyari $\zeta_{i_1}(t_1), ..., \zeta_{i_n}(t_n)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmaları Qauss paylanmaları olarsa, vektor qiymətlərli $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), ..., \zeta_m(t)\}$ çoxölçülü təsadüfi prosesi Qauss prosesi adlanır.

Həqiqi $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ prosesləri küllüyyatca ikiölçülü Q. p. əmələ gətirirsə, $\zeta(t) = \zeta_1(t) + i\,\zeta_2(t)$ şəklində təsadüfi proses $\zeta = \zeta(t)$, $t \in T$ – kompleks Qauss prosesi adlanır. Bəzən $\zeta(t) = \zeta_1(t) + i\zeta_2(t)$ kompleks Q. p. dedikdə, əlavə bir şərtin: $\mathbf{M}\zeta(s)\zeta(t) = A(s)A(t)$ şərtinin də ödənilməsi nəzərdə tutulur, burada $A(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$. Bu şərt ona görə daxil edilir ki, adi Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinə xas olan qeyri – korrelyarlığın asılı olmamazlıq xassəsinə

ekvivalentliliyi qorunub saxlanılsın. Bu xüsusiyyət aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathbf{M}[\zeta_1(t) - A_1(t)][\zeta_1(s) - A_1(s)] =$$

$$= \mathbf{M}[\zeta_2(t) - A_2(t)][\zeta_2(s) - A_2(s)] = \operatorname{Re} B(t, s)/2,$$

$$\mathbf{M}[\zeta_1(t) - A_1(t)][\zeta_2(s) - A_2(s)] = -\operatorname{Im} B(t, s)/2,$$

burada $B(t, s) = \mathbf{M}[\zeta(t) - A(t)][\overline{\zeta(s) - A(s)}]$, – $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası və $A_1(t) = \mathbf{M}\zeta_1(t)$, $A_2(t) = \mathbf{M}\zeta_2(t)$.

Xarakteristik funksionalı

$$\varphi_\zeta(u) = e^{iA(u) - B(u, u)/2}, \quad u \in U$$

şəklində olan, $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$, $u \in U$ həqiqi ümumiləşmiş təsadüfi prosesi, U vektor fəzasında ümumiləşmiş Q. p. adlanır, burada $A(u) = \mathbf{M}\langle u, \zeta \rangle$ – ümumiləşmiş prosesin riyazi gözləməsi, $B(u, v) = \mathbf{M}[\langle u, \zeta \rangle - A(u)][\langle v, \zeta \rangle - A(v)]$ – onun korrelyasion funksionalıdır.

U, – (u, v) skalyar hasili təyin olunmuş Hilbert fəzası olsun, $u, v \in U$. Əgər $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$, $u \in U$ şəkilli təsadüfi proses ümumiləşmiş Q. p.-dirsə, qiymətlərini U fəzasından alan ζ təsadüfi kəmiyyəti Qauss təsadüfi kəmiyyəti adlanır. Bu halda, $A(u)$ riyazi gözləməsi xətti kəsilməz funksional, $B(u, v)$ korrelyasion funksiyası U Hilbert fəzasında bixətti kəsilməz funksionaldır; $B(u, v) = (Bu, v)$, $u, v \in U$ və müsbət B operatoru ($\zeta \in U$ təsadüfi kəmiyyətinin korrelyasion operatoru) nüvə operatordur. İxtiyari belə $A(u)$ və $B(u, v)$ üçün elə $\zeta \in U$ Qauss kəmiyyəti vardır ki, $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$, $u \in U$ ümumiləşmiş prosesinin məhz $A(u)$ və $B(u, v)$ -yə bərabər riyazi gözləməsi və korrelyasion funksiyası vardır.

Misal. $\zeta = \zeta(t)$, – $T = [a, b]$ parçasında Q. p. olsun, $\zeta(t)$ prosesinin ölçülən və

$$\int_a^b \mathbf{M}[\zeta(t)]^2 dt < \infty$$

olduğu fərz olunur. Onda $\zeta(t)$, $t \in T$ prosesinin sanki bütün trayektoriyaları T parçasında kvadratı ilə inteqrallanan $u = u(t)$ funksiyalarının

$$(u, v) = \int_a^b u(t)\, v(t) dt$$

skalyar hasili təyin olunmuş fəzadandır.

$$\langle u, \zeta \rangle = \int_a^b u(t)\zeta(t) dt, \quad u \in U$$

düsturu qeyd olunan U fəzasında ümumiləşmiş Q. p. təyin edir. Bu halda, $\zeta = \langle u, \zeta \rangle$ ümumiləşmiş prosesinin riyazi gözləməsi və korrelyasion funksionalı, uyğun olaraq

$$A(u) = \int_a^b u(t) A(t) dt,$$

$$B(u, v) = \int_a^b \int_a^b B(t, s) u(t) v(s)\, dt\, ds$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada $A(t)$ və $B(t, s)$ – uyğun olaraq, $T = [a, b]$ parçasında ilkin $\zeta = \zeta(t)$ prosesinin riyazi gözləməsi və korrelyasion funksiyasıdır.

t parametri ixtiyari T çoxluğunda dəyişdiyi halda $\zeta = \zeta(t)$ Q. p.-nin bütün əsas xassələrini, bu prosesə bütün Y təsadüfi kəmiyyətlərinin Hilbert fəzası H -da əyri kimi baxdıqda, həndəsi terminlərlə ifadə etmək mümkündür; bu halda $\mathbf{M}Y_1^2 < \infty$, $(Y_1, Y_2) = \mathbf{M}\, Y_1 Y_2$, – H -da təyin olunmuş skalyar hasildir və $(\zeta(t), 1) = A(t)$, $(\zeta(t) - A(t), \zeta(s) - A(s)) = B(t, s)$.

Dar mənada stasionar Q. p.-lərini bəzi dinamik sistemlər vasitəsilə reallaşdırmaq mümkün olur (trayektoriyalar fəzasında yerinidəyişmə, bax, [1]). Alınan dinamik sistemlər (bunlar bəzən normal dinamik sistemlər adlandırılır, normal ehtimal paylanması ilə müqayisə et) kəsilməz spektrli dinamik sistemlərə aid misallar kimi verilir. «Klassik olmayan» spektral xassələrli dinamik sistemlərə aid konkret ilk misallar belə qurulmuşdu.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [3] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] Ito K., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, № 1, p. 157–69; [5] Ito K., «Japan J. Math.», 1952, v. 22, p. 63–86.

QAUSS PROSESİ; statistik məsələlər **« гауссовский процесс;** статистические задачи; **Gaussian process;** statistical problems» – bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

QAUSS PROSESİ; Viner inteqralları ilə ifadə **« гауссовский процесс;** представление с помощью винеровских интегралов; **Gaussian process;** representation by Wiener integrals» – asılı olmayan artımlarlı, m – ölçülü $\zeta(t)$, $t \geq 0$ *Qauss prosesinin*

$$\zeta(t) = A(t) + \zeta(0) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \sqrt{\rho_k(t)}\, e_k(t)\, dY_k(t)$$

şəklində ifadəsidir, burada $\mathbf{M}\zeta(t) = A(t)$, $\mathbf{M}(\zeta(t) - A(t), x)^2 = (B(t)x, x)$; $\{e_k(t), \rho_k(t), k = 1, 2, ..., m\}$ – ortonormalanmış məxsusi vektorların və $B'(t)$ operatorunun uyğun məxsusi ədədlərinin sistemidir; $B'(t)$ operatoru

$$B(t) = \int_0^t B'(s) d\lambda(s)$$

münasibətilə təyin olunur, burada $\lambda(t) = \operatorname{tr} B(t)$, – $B(t)$ operatorunun izi, $Y_k(t)$, $k = 1, ..., m$ – asılı olmayan artımlarlı asılı olmayan birölçülü proseslərdir və bunlar üçün $\mathbf{M} Y_k(t) = 0$, $\mathbf{M} Y_k^2(t) = \lambda(t)$.

Əd.: [1] С к о р о х о д А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

QAUSS SEMİMARTİNQALI « гауссовский семимартингал; Gaussian semimartingale » – *semimartinqal* olan $\zeta(t)$, $t \geq 0$ *Qauss prosesidir*; bir sıra xüsusi xassələrə malikdir. $\zeta(t)$ prosesinin trayektoriyalarının soldan limitləri vardır və sağdan kəsilməzdirlər. $\zeta(t)$ prosesi üçün sıçrayışlar prosesi $\Delta\zeta(t)$, $t \geq 0$ təyin olunur və $\Delta\zeta(0) = 0$, $\Delta\zeta(t) = \zeta(t) - \lim\limits_{s \uparrow t} \zeta(s)$, $t > 0$. $\zeta(t)$ prosesinin ayrılışı aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \zeta'(t) + \zeta''(t),$$

burada

$$\zeta'(t) = \int_0^t I_{\mathbb{R}_+ \setminus H}(s)\, d\zeta(s), \quad \zeta''_t(t) = \int_0^t I_H(s)\, d\zeta(s)$$

– stoxastik inteqrallardır, $H = \{t > 0 : \mathbf{P}\{\Delta\zeta(t) = 0\} = 1\}$. Bu halda $(\zeta(0), (\zeta'(t)), (\zeta''(t)))$ Qauss sistemi təşkil edir, $(\zeta'(t))$, $t \geq 0$ kəsilməz semimartinqaldır, $(\zeta'(t))$ və $(\zeta''(t))$ – üst-üstə düşən, determinə olunmuş və H-dan qiymətlər alan kəsilmə anlarıdır. $\zeta(t)$ prosesi – ayrılışı

$$\zeta(t) = \zeta(0) + A(t) + M(t)$$

düsturu ilə ifadə olunan, σ – cəbrlərin tamamlanmış $\mathbb{A}^{\zeta}_{t^+} = \left(\mathcal{A}^{\zeta}_{t^+}\right)_{t \geq 0}$ axınına nəzərən elə xüsusi semimartinqaldır ki, (A_t), $t \geq 0$ – öngörül proses, $(M(t))$, $t \geq 0$ – lokal martinqaldır və bunlar üçün $\mathbf{M} \operatorname{var}^2(A(t)) < \infty$, $\mathbf{M} M^2(t) < \infty$, $t > 0$ şərtləri də ödənilir, $\mathbb{A}^{\zeta}_{t^+} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \sigma\{\zeta(s),\ s \leq t + \varepsilon\}$ və $(\zeta(0), (A(t)), (M(t)))$ Qauss sistemi əmələ gətirir.

Q a u s s s e m i m a r t i n q a l ı hər bir Qauss prosesi kimi orta qiymət funksiyası $a(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$ və korrelyasion $\Gamma(s, t) = \operatorname{cov}(\zeta(t), \zeta(s))$ funksiyası ilə tamamilə ifadə olunur. Q. s.-nın $a(t)$ və $\Gamma(s, t)$ funksiyaları sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan, lokal məhdud variasiyalı funksiyalardır; $\Gamma(s, t)$ üçün bu onu ifadə edir ki, $\Gamma(s, 0)$, $\Gamma(0, t)$ – lokal məhdud variasiyalı funksiyalardır və

$$\sup \sum_{i,j} \left| \Gamma(s_{i+1}, t_{j+1}) + \Gamma(s_i, t_j) - \Gamma(s_i, t_{j+1}) - \Gamma(s_{i+1}, t_j) \right| < \infty,$$

burada sup ixtiyari s və t qiymətlərində bütün mümkün olan $0 = s_0 < s_1 < ... < s_k = s$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_l = t$ bölgüləri üzrədir.

$\zeta(t)$, $t \geq 0$ Qauss prosesinin semimartinqal xarakterizasiyası $a(t)$ və $\Gamma(s, t)$ funksiyaları terminlərində aşağıdakı kimi ifadə olunur.

T e o r e m. Aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

1) $\zeta(t)$, $t \geq 0$ – Qauss semimartinqalıdır;

2) $a(t)$ və $\Gamma(s, t)$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan lokal məhdud variasiyalı funksiyalar olarsa, sağdan kəsilməz azalmayan elə $F = F(t)$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $s < t$ və ixtiyari sadə, $f_s(u) = 0$ şərtini ödəyən $f_s = f_s(u)$, $u \geq 0$ funksiyası üçün $u > s$ olduqda

$$\left| \int_s^t \int_0^s f_s(v)\, d\Gamma(v, u) \right| \Big/ \left(\int_0^s \int_0^s f_s(v)\, f_s(u)\, d\Gamma(v, u) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq F(t) - F(s)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Markov halında bu bərabərsizlik

$$\left| \Gamma(s, t) - \Gamma(s, s) \right| \Big/ \Gamma^{1/2}(s, s) \leq F(t) - F(s)$$

bərabərsizliyinə ($0/0 = 0$ fərz olunur), lokal məhdud variasiyalı $\zeta(t)$ prosesi halında isə

$$(\Gamma(t, t) + \Gamma(s, s) - 2\Gamma(s, t))^{1/2} \leq F(t) - F(s)$$

bərabərsizliyinə çevrilir.

Əgər Qauss prosesi $\zeta(t)$ lokal martinqaldırsa, onda $\zeta(t)$ – kvadratik inteqrallanan martinqaldır, $a(t) \equiv \mathbf{M}\zeta(0)$, $\zeta(t)$ – asılı olmayan artımlarlı prosesdirsə,

$$\Gamma(t, s) = \mathbf{M}(\zeta(s) - \zeta(0))^2 \wedge \mathbf{M}(\zeta(t) - \zeta(0))^2,$$

$\zeta(t) = \zeta(0) + \zeta^c(t) + \zeta^d(t)$ ayrılışında iştirak edən kəsilməz lokal ζ^c martinqalı, sırf kəsilən lokal ζ^d martinqalı $\zeta(0)$ ilə birlikdə Qauss sistemini əmələ gətirir. Bu halda $\zeta^d(t) = \int_0^t I_H(s)\, d\zeta(s)$, burada $H = \{t > 0 : \mathbf{M}\zeta^2(t) - \lim\limits_{s \uparrow t} \mathbf{M}\zeta^2(s) > 0\}$. $\zeta(t)$ Qauss martinqalının öngörül xarakteristikalarının tripleti $T = (B, C, \nu)$ onun kanonik semimartinqal ifadəsinə müvafiq olub, aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$B_t \equiv 0,\ C_t = (\mathbf{M}(\zeta(t) - \zeta(0))^2)^c,\ \nu^c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{i\lambda x}\, \nu(\{t\}, dx) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \left[\mathbf{M}\zeta^2(t) - \lim_{s \uparrow t} \mathbf{M}\zeta^2(s) \right] \right),\ \lambda \in \mathbb{R},\ t \in H.$$

Öngörül xarakteristikaların tripleti $T=(B, C, \nu)$-yə malik ixtiyari $\zeta(t)$ lokal martinqalı, əgər T tripleti determinə olunmuşdursa, $B=0$, $\nu^c(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\,|\,\{0\})=0$ olduğu halda və $\lambda\in\mathbb{R}$ olduqda

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{i\lambda x}\nu(\{t\},\,dx)=$$

$$=I(\nu(\{t\}),\,\mathbb{R}\setminus\{0\})>0)\,\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2\,\nu(\{u\},\,dx)\right)$$

olarsa, Qauss prosesidir. Bu halda $\zeta(t)$ asılı olmayan artımlarlı Qauss prosesidir,

$$\mathbf{M}(\zeta(t)-\zeta(s))=0,$$

$$\mathbf{M}(\zeta(t)-\zeta(s))^2=C_t-C_s+$$

$$+\sum_{s<u\le t}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2\,\nu(\{u\},dx),\quad s<t.$$

Əd.: [1] S t r i c k e r C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1983, Bd 64, S. 303–12; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

QAUSS SİLİNDRİK ÖLÇÜSÜ « гауссовская цилиндрическая мера; Gaussian cylindrical measure » – həqiqi Banax və ya ümumi lokal qabarıq topoloji vektor fəzası U-da təyin olunan, kəsilməz xətti funksionallara uyğun bütün birölçülü proyeksiyaları (buna görə də, bütün sonluölçülü) $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunda (və ya $\mathbb{R}^n$) Qauss ölçüləri olan *silindrik ölçüdür*. Bu – μ silindrik ölçüsünün xarakteristik funksionalının

$$\hat{\mu}(u^*)\;=\;\exp\{\,i\,m(u^*)-r(u^*)/2\},\quad u^*\in U^*\qquad(*)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunması ilə eynigüclüdür, burada m – ixtiyari xətti forma, r – qoşma U^* fəzasında ixtiyari kvadratik formadır.

U-da ixtiyari Qauss ölçüsünün silindrlər cəbrinə daralması Q. s. ö.-dür, lakin ixtiyari Q. s. ö.-nü belə üsulla almaq mümkün olmur, yəni ixtiyari Q. s. ö. ölçüyə qədər (hesabi – addiitiv) davam olunmaya bilər. Əgər H Hilbert fəzasıdırsa (sonsuzölçülü), onda xarakteristik funksionalı

$$\hat{\mu}\,(h)\;=\;\exp\{-\|\,h\,\|^2/2\},\;\;h\in H$$

şəklində olan, H-da təyin olunmuş Q. s. ö. s t a n d a r t (və ya k a n o n i k) Q a u s s s i l i n d r i k ö l ç ü s ü adlanır. Standart Q. s. ö. ölçüyə qədər davam olunmur.

U-da Q. s. ö μ, yalnız və yalnız, o halda hər hansı Hilbert fəzasında standart Q. s. ö.-nün xətti kəsilməz obrazıdır ki, (*) ifadəsində onun xarakteristik funksionalı üçün $m=0$ və r kvadratik forması $R:U^*\to U$ xətti simmetrik operatorunun doğurduğu formadır, yəni $r(u^*)=u^*(Ru^*)$. Belə Q. s. ö. ölçüyə qədər, yalnız və yalnız, o halda davam oluna bilinir ki, R Qauss kovariasion operatorlar sinfindən olsun (bax, *Qauss ölçüsü* B a n a x f ə z a s ı n d a).

QAUSS TƏSADÜFİ ÇOXLUĞU « гауссовское случайное множество; Gaussian random set » – S Banax fəzasında *qapalı təsadüfi* A *çoxluğudur*, aşağıdakı xassələrə malikdir: 1) onun realizasiyaları 1 ehtimalla qabarıqdır; 2) S-ə qoşma S^* fəzasının vahid radiuslu kürəsində təyin olunmuş $f(x)=\sup\limits_{y\in A}x(y)$ funksiyası Qauss təsadüfi funksiyasıdır, burada x, – S-də xətti məhdud funksional, $\|x\|=1$.

Əd.: [1] Л я щ е н к о Н. Н., «Зап. науч. семин. Ленингр. отдел. Матем. ин.-та АН СССР», 1980, т. 98, с. 115–39.

QAUSS TƏSADÜFİ ELEMENTİ « гауссовский случайный элемент; Gaussian random element » – qiymətləri həqiqi Banax və ya ümumi lokal topoloji U vektor fəzasından, paylanması U-da Qauss ölçüsü olan *təsadüfi elementdir*. Başqa sözlə, əgər hər bir xətti kəsilməz $u^*\in U^*$ funksionalı üçün $u^*(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\mathbb{R}^1$-də Qauss paylanması olarsa, X təsadüfi elementi Q a u s s t ə s a d ü f i e l e m e n t i adlanır.

Əgər U tam separabel metriklənən fəza olarsa, onda təsadüfi elementin Q. t. e. olduğu, U^*-da hər hansı ayırabilən vektor altfəzasının bütün xətti kəsilməz funksionalları üçün $u^*(X)$ təsadüfi elementlərinin Q. t. e. olmasından alınır. Xüsusi halda, buradan alınır ki, seçilmiş kəsilməz X_t, $t\in[0,1]$ Qauss təsadüfi prosesi $[0,1]$-də kəsilməz funksiyaların Banax fəzası $C[0,1]$-də Qauss təsadüfi elementini doğurur.

Q. t. e.-ni daha ümumi halda, U-da topologiyanın olduğunu fərz etmədən də, təyin etmək olar (bax, [1]). U – ixtiyari həqiqi vektor fəza, $\mathscr{B}$ – hər hansı elə σ – cəbr olsun ki, U-dakı vektor əmələr bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olsun. Daha sonra X – ölçülən $(U,\mathscr{B})$ fəzasında təsadüfi element olsun, yəni X, – $\mathscr{B}$ σ – cəbrinə və abstrakt Ω çoxluğunda verilmiş $\mathscr{A}$ σ – cəbrinə nəzərən Ω-nın U-ya ölçülən inikası olsun. Əgər qiymətləri $(U,\mathscr{B})$-dən, hər birinin paylanması isə X-in paylanması ilə eyni olan, asılı olmayan X_1 və X_2 təsadüfi elementlərinin hər hansı (X_1,X_2) cütü üçün $(X_1+X_2)/\sqrt{2}$, $(X_1-X_2)/\sqrt{2}$ təsadüfi elementləri də asılı olmayan, paylanmaları isə X-in paylanması ilə eyni olan təsadüfi elementlər olarsa, X təsadüfi elementi Q a u s s t ə s a d ü f i e l e m e n t i adlanır. Əgər U separabel, Borel σ – cəbrli, metrika təyin oluna bilən fəza olarsa, belə tərif yuxarıda adi paylanma ilə verilən tərifllə üst-üstə düşür.

Əgər X ölçülən $(U,\mathscr{B})$ fəzasında Q. t. e., p isə U-da $\mathscr{B}$ – ölçülən seminormadırsa, onda $\mathbf{M}\exp\{\alpha\,p^2(X)\}<\infty$ münasibəti hər hansı α müsbət ədədi üçün ödənilir.

Əd.: [1] Ф е р н и к К., в кн.: Математика. Новое в зарубежной науке, т. 10, М., 1978, с. 63–132.

QAUSS TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTİ « гауссовская случайная величина; Gaussian random variable » – xarakteristik funksiyası

$$\varphi_\xi(u)=\exp(i\,m\,u-\sigma^2u^2/2),\;\;-\infty<u<\infty$$

düsturu ilə təyin olunan ξ *təsadüfi kəmiyyətidir*, $-\infty<m<+\infty$, $\sigma^2\ge 0$. ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması (m,σ^2) parametrlərli Q a u s s p a y l a n m a s ı və ya n o r m a l

p a y l a n m a adlanır. Bir çox hallarda bu anlayış əvəzinə $\xi \sim N(m, \sigma^2)$ işarələməsindən istifadə olunur, təsadüfi kəmiyyətin özü isə n o r m a l p a y l a n m a l ı təsadüfi kəmiyyət adlanır. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasını təyin edən m və σ^2 parametrlərinin sadə ehtimali mənası vardır: m – riyazi gözləmə, σ^2 isə ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasıdır. Əgər $\sigma^2 > 0$ olarsa, onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması vardır və o,

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Normal paylanmalı təsadüfi kəmiyyətlər və onların paylanmaları K. Qaussun (C. Gauss, 1809) və P. Laplasın (P. Laplace, 1812) işlərində xətalar nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodu üzrə araşdırmalarla bağlı daxil olunmuşdur. Astronomiya və geodeziya məsələlərində müşahidə xətalarının K. Qauss tərəfindən inkişaf etdirilmiş nəzəriyyəsində təsadüfi xətalar mərkəzlənmiş $(m = 0)$, normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olmuşdur. Bu nəticədə «Qauss təsadüfi kəmiyyəti», «Qauss paylanması», «Qauss qanunu», «Laplasın ikinci qanunu», «Laplas – Qauss qanunu» kimi terminlərin yaranmasına səbəb olmuşdur.

Q. t. k., təbii olaraq, statistik fizikada (Maksvell hipotezi) və ya bir sıra statistika məsələlərində yaranır (bax, [4]). Mərkəzi limit teoreminə əsasən, münasib surətdə mərkəzlənmiş və normalanmış olan, qeyri – məhdud artan saylı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin ardıcıllığı Lindeberq şərti ödənildikdə, paylanma üzrə Q. t. k.-nə yığılır.

Eyni ehtimal fəzasında təyin olunmuş küllüyyatca asılı olmayan Q. t. k.-ləri ailəsi Qauss paylanmalarının kompozisiyalarının xassələri və bu tip paylanmaları xarakterizə edən xassələrlə bilavasitə bağlı bir sıra xassələrə malikdirlər. Sonlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi, yalnız və yalnız, o halda Q. t. k.-dir ki, toplananların hər biri Q. t. k. olsun. Bu nəticəni P. Levi (P. Lévy) irəli sürmüş, H. Kramer (H. Cramér, 1936) isbat etmişdir. Bu nəticə ehtimal nəzəriyyəsində tam bir istiqamətin inkişafına səbəb olmuşdur ki, burada təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmayan toplananlara ayrılışı tədqiq olunmuşdur.

Ortoqonal xətti çevirmələr asılı olmayan Q. t. k.-nin sonlu saylı toplusunun asılı olmamazlıq xassəsini qüvvədə saxlayır. Bu xassə Qauss paylanması üçün səciyyəvi olub, Q. t. k. anlayışının mümkün ümumiləşmələrindən birinin əsasını təşkil edir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin toplularının asılı olmayan xətti formalarının köməyilə Qauss paylanmasının xarakterizasiya məsələsi tam surətdə 1926-da S. N. Bernşteyn tərəfindən qoyulmuşdur (bax, [7]). Müəyyən mənada tamamlanmış nəticə [8] və [9]-da alınmışdır: əgər $\xi_1, ..., \xi_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $a_1\xi_1 + ... + a_n\xi_n$, $b_1\xi_1 + ... + b_n\xi_n$, – a_j, b_j, $j = 1, ..., n$ sabit əmsallarlı xətti formaları asılı olmayandırlarsa, onda a_j və $b_j \neq 0$ olan bütün j -lər üçün ξ_j təsadüfi kəmiyyətləri Q. t. k.-ləridir.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] Г а у с с К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89–109; [3] L a p l a c e P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [4] Р а о С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] C r a m e r H., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 405–14; [6] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [7] Б е р н ш т е й н С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964; [8] D a r m o i s G., «C. r. Acad. Sci. Paris», 1951, t. 232, p. 1999–2000; [9] С к и т о в и ч В. П., «Докл. АН СССР», 1953, т. 89, № 2 , с. 217–19.

QAUSS TƏSADÜFİ MATRİSİ « гауссовская случайная матрица; Gaussian random matrix » – elementlərinin həqiqi və xəyali hissələri çoxölçülü normal qanunla paylanan *təsadüfi matrisdir.*

$\Xi = U_n S_n U_n^*$, – n tərtib $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|$ Q. t. m.-nin Şur təsviri olsun (bax, *Qeyri – simmetrik təsadüfi matris*). Əgər Ξ_n matrisinin elementlərinin həqiqi və xəyali hissələri $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmışlarsa, onda Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri λ_k -ların paylanmasının sıxlığı

$$\left[2^{n(n+1)/2} \prod_{j=1}^{n} j! \right]^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right\} \prod_{i \neq j} |y_{ii} - y_{ij}|$$

$$i, j = 1, ..., n, \ \arg y_{11} > ... > \arg y_{nn}$$

ifadəsinə bərabərdir, S_n matrisinin s_{ij}, $i > j$ elementlərinin həqiqi və xəyali hissələri asılı olmayandırlar (U_n matrisləri də s_{ij} -lərdən asılı deyildirlər) və $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmışlar.

Əgər Ξ_n matrisinin elementləri asılı olmayan standart normal qanunla paylanandırlarsa, onda

$$\mathbf{P}\{ \operatorname{Re} \lambda_k < x_k, \ \operatorname{Im} \lambda_k < y_k, \ k = 1, ..., n \}$$

ehtimalını hesablamaq mümkündür (bax, [1]). Əgər simmetrik həqiqi Ξ_n matrisinin elementləri ξ_{ij}, $i \geq j$, $i, j = 1, ..., n$ asılı olmayan və $N(0, (1 + \delta_{ij})/2)$ normal qanunları ilə paylanmışlarsa, onda vektor – sütunları Ξ_n matrisinin məxsusi vektorları olan $H_n = \left\| h_{ij} \right\|$, $h_{1i} \geq 0$, $i = 1, ..., n$ matrisi Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı deyildir və $\mathbf{P}\{H_n \in L\} = 2^n \mu(L)$, burada μ, – n tərtib ortoqonal matrislərin G qrupunda normalanmış Haar ölçüsü, L, – G qrupunun matrislərinin ölçülən çoxluğudur və bu matrislərin birinci sətirlərinin elementləri mənfi deyildirlər, Ξ_n matrisinin nizamlanmış məxsusi qiymətlərinin paylanma sıxlığı

$$\pi^{n(n+1)/4} \prod_{i=1}^{n} \{\Gamma[(n-i+1)/2]\}^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right\} \prod_{i>j} |y_i - y_j|$$

$$y_1 > , ..., > y_j$$

ifadəsinə bərabərdir.

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Спектральная теория случайных матриц, «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–106.

QAUSS VƏZİYYƏTİ « гауссовское состояние; Gaussian state » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.*

QAUSS – LAPLAS PAYLANMASI « Гаусса – Лапласа распределение; Gauss – Laplace distribution » – normal paylanmanın digər adları (Qauss qanunu, Qauss paylanması, Laplasın ikinci qanunu, Laplas–Qauss paylanması və s.) ilə yanaşı istifadə olunur, bu paylanmanın kəşfi tarixini və onun ehtimal nəzəriyyəsinin K. Qauss və P. Laplasın adları ilə bağlı müxtəlif məsələlərinə ilk tətbiqlərini əlaqələndirir. Normal paylanma K. Qauss (1809) və P. Laplasın (1812) *xətalar nəzəriyyəsi* və *ən kiçik kvadratlar metodu* üzrə araşdırmaları ilə bağlı işlərində yaranmışdır. K. Qauss tərəfindən inkişaf etdirilmiş, müşahidələr xətaları nəzəriyyəsinin astronomiya və geodeziya məsələləri üçün təsadüfi xətaların ehtimallarının sıxlıq funksiyası

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}, \quad h > 0$$

düsturu ilə ifadə olunur (bax, *Qauss qanunu*). P. Laplas, bundan başqa,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2}\, dt$$

inteqralını (Laplas funksiyası) n sayda Bernulli sınaqlarında p ehtimallı müvəffəqiyyətlər sayının ($np - \tau\sqrt{2np(1-p)}$, $np + \tau\sqrt{2np(1-p)}$) intervalında yerləşməsi ehtimalı üçün təqribi qiymət kimi almışdır. Lakin normal paylanma binomial paylanmanın limit forması kimi hələ 1733-də A. Muavr (A. Moivre) tərəfindən $p = q = 1/2$ qiymətləri üçün tapılmışdı.

Əd.: [1] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. нем., т. 1, М., 1957, с. 89–109; [2] Laplace P. S., Théorie analitique des probabilités, P., 1812; [3] Todhunter I., A history of the mathematical theory of probability, [N. Y.], 1949.

QAUSS – MARKOV TEOREMİ « Гаусса – Маркова теорема; Gauss – Markov theorem » – reqression eksperiment parametrinin və ən kiçik kvadratlar metodunun ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətinin ekvivalentliyini ifadə edən, xətti *reqression eksperiment* nəzəriyyəsinin teoremidir. Bu teoremi K. Qauss (C. Gauss) isbat etmişdir; bu teoremin populyar olmasına A. A. Markovun məlum dərsliyindəki şərt səbəb olmuşdur. Q. – M. t.-nin çoxsaylı ümumiləşmələri: ümumi şəkilli kovariasiyalar matrisli reqression eksperimentin, cırlaşmış informasion matrisli reqression eksperimentin ölçmələri halları üçün məlumdur; qeyri – adekvat reqressiya funksiyası ilə approksimasiyada; reqression eksperimentin ardıcıl planlaşdırılmasında; ümumiləşmiş reqression eksperimentlərin lokal asimptotik minimal kvadratik riski üçün ümumiləşmələr məlumdur.

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Малютов М. Б., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41; [3] Seal H. L., «Biometrika», 1967, v. 54, № 1–2, p. 1–24.

QAUSS – NYUTON METODU « Гаусса – Ньютона метод; Gauss – Newton method » – qeyri – xətti

$$y = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., N$$

reqression eksperimentinin θ parametrinin ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinin hesablanması üçün iterasiya metodudur, burada ε_i – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, $\mathbf{M}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2(x_i)$, $\theta \in \mathbb{R}^p$. Nyutonun toxunanlar metodu ilə

$$Q(y, \theta) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2(\theta)\, \sigma^{-2}(x_i), \quad e_i = y_i - \eta'(x_i, \theta)$$

funksiyasının minimallaşdırılmasında, böyük ədədlər qanununa görə, sıfra yaxın $N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \eta''(x_i) e_i(\theta)$ ifadəsi iştirak edir. Bu ifadəni K. Qauss (C. Gauss) sıfra bərabər götürərək, $Q(y, \theta)$ kəmiyyətinin minimallaşmasını

$$\theta^{s+1} - \theta^s = M_s^{-1} \sum_{i=1}^{N} f_s(x_i) e_i(\theta^s) \sigma^{-2}(x_i), \quad s = 0, 1, ..., n. \quad (*)$$

– ən yaxşı xətti meylsiz düzəlişinin iterasiya ilə hesablanmasına gətirmişdir, burada

$$M_s = \sum_{i=1}^{N} f_s(x_i) f_s^{\mathrm{T}}(x_i) \sigma^{-2}(x_i), \quad f_s(x) = \partial\eta(x, \theta^s)/\partial\theta^s.$$

Ümumiləşmiş reqression eksperiment üçün [burada $\sigma = \sigma(x, \theta)$ və $Q(\eta(\theta'), \theta) = 0$ olduqda] yalnız $\theta = \theta'$ olduqda $\tilde{\theta} = \arg\min_{\Theta} Q(y, \theta)$ statistik qiyməti, adətən, tutarlı statistik qiymət olmur, lakin $\sigma^{-2}(x_i, \theta^s)$ əvəzləməsi aparılmış (*) şəkilli düzəlişlər (Jirina statistik qiymətləri adlandırılan) θ üçün asimptotik normal effektiv statistik qiymət verir, iterasiyaların yığılma ehtimalı isə θ^0 qiyməti θ-ya olduqca yaxın olduğu halda böyük requlyar seçim üçün 1-ə yaxınlaşır.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Малютов М. Б., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41.

QAYDALI STATİSTİKA « порядковая статистика; order statistic » – $\{X_i\}_{i=1}^n$ seçimi üzrə qurulmuş $X_{(1)} \le ... \le X_{(r)}$ variasiya sırasının r-ci həddi kimi təyin olunan $X_{(r)}$, $1 \le r \le n$ *statistikasıdır*. Əgər $X_1, ..., X_n$ asılı olmayan və ümumi paylanma funksiyası F olan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda

$$F_r(x) = \mathbf{P}\{X_{(r)} < x\} = \sum_{i=1}^{n} C_n^i F^i(x)[1 - F(x)]^{n-i} =$$

$$= I_{F(x)}(r, n - r + 1)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$I_y(a, b) = \int_0^y t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt / B(a, b)$$

natamam beta funksiyadır. $X_{(r)}$ və $X_{(s)}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası $F_{r,s}$, $r < s$ qiymətləri üçün

$$F_{r,s}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\max(0, s-i)}^{n-i} \frac{n!}{i!\, j!(n-i-j)!} \times$$

$$\times F^i(x)\,(F(y) - F(x))^j\,(1 - F(y))^{n-i-j}, \quad -\infty < x < y < \infty$$

düsturu ilə hesablanır; $x \geq y$ olduqda $F_{r,s}(x,\ y) = F_s(y)$.

Seçimin həcmi olduqca artırıldıqda asimptotik nəzəriyyədə elə $r = r(n)$ indeksli Q. s.-lara baxılır ki, bu indekslər üçün $\lim\limits_{n\to\infty} r(n)/n = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$ münasibəti ödənilsin. $0 < \alpha < 1$ halına mərkəzi Q. s.-lar, $\alpha = 0$ və $\alpha = 1$ halına isə kənar Q. s.-ları uyğundur. Mərkəzi Q. s.-lar adətən, asimptotik olaraq normal paylanmaya malik olur. Kənar Q. s.-lar özünəməxsus limit paylanmalarına malik olur. Məs., paylanma funksiyası ümumi F olan asılı olmayan $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün mərkəzləşdirici və normalaşdırıcı uyğun a_n və b_n, $n = 1, 2, \ldots$ ardıcıllıqlarının müvafiq seçimi təyin edilərsə, $(X_{(n)} - a_n)/b_n$ kəmiyyətləri üçün cırlaşmayan limit paylanması yalnız aşağıdakı üç tipdən biri ola bilər:

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\beta}\}, & \text{əgər } x > 0, \\ 0, & \text{əgər } x \leq 0; \end{cases}$$

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} \exp-\{(-x)^{\beta}\}, & \text{əgər } x \leq 0, \\ 1, & \text{əgər } x > 0; \end{cases}$$

$\beta > 0$ olduqda

$$\Lambda_3(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

B. V. Qnedenko F-in Λ_i, $1 \leq i \leq 3$ limit qanununun cazibə oblastından olması üçün zəruri və kafi şərtləri almışdır. Xüsusi halda, F funksiyası Λ_1 cazibə oblastına, yalnız və yalnız, o halda mənsubdur ki, $1 - F(x)$ funksiyası $x \to \infty$ olduqda β qüvvət üstü ilə düzgün dəyişən funksiya olsun; F funksiyası Λ_2 cazibə oblastına, yalnız və yalnız, o halda mənsubdur ki, $1 - F(x_0 - x)$ funksiyası $x \to +0$ olduqda β qüvvət üstü ilə düzgün dəyişən funksiya (bax, [5]) olsun; burada x_0, – F paylanmasının daşıyıcısının dəqiq yuxarı sərhədidir.

Q. s. və onların funksiyalarından qeyri – parametrik etibarlı və tolerant intervalların qurulmasında, «tez» və robast statistik qiymətlərin alınması üçün senzurlandırılmış məlumatların yenidən işlənilməsində, olduqca fərqlənən müşahidələrin təyin olunmasında və s.-də istifadə olunur. Q. s.-ların ən sadə və çox istifadə olunan funksiyaları Q. s.-ların xətti kombinasiyalarıdır.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [3] Галамбош Я., Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, пер. с англ., М., 1984; [4] Гнеденко Б. В., «Ann. Math.», 1943, v. 44, № 3, p. 423–53; [5] Смирнов Н. В., «Тр. Матеем. ин.-та АН СССР», 1949, т. 25, с. 5–59; [6] Смирнов Н. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР », 1949, т. 25, с. 5–59; [7] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 1, с. 159–65; [8] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

QAYDALI ŞKALA « порядковая шкала; order scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*.

QAYIDIŞ ORTA MÜDDƏTİ « возвращения среднее время; mean / expected reccurrence time », orta qayıdış müddəti – bax, *Markov zənciri*, vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov zənciri*, orta qayıdış müddəti.

QAYIDIŞLI HADİSƏ « возвратное событие; recurrent event » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

QAYIDIŞLI MARKOV PROSESİ « возвратный марковский процесс; persistent / recurrent Markov process » – *qayıdışlı Markov zəncirinin* xarakteristik xüsusiyyətinin analoquna malik *Markov prosesidir*. «Q. M. p.» termininin dəqiq mənası müxtəlif cür izah olunur. Topoloji $\mathscr{E}$ fəzasında [daha dəqiqliklə, $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında; $\mathscr{B}$, – $\mathscr{E}$-nin Borel çoxluqlarının çoxluğudur] qırılmayan bircins $X = (X_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ Markov prosesinin verildiyi fərz olunur. Əgər hər bir $V \subset \mathscr{E}$ çoxluğu və hər bir $x \in \mathscr{E}$ üçün $S_V = \{t \geq 0 : X_t \in V\}$ təsadüfi çoxluğu $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin məhdud olarsa, X topoloji qayıdışlı Markov prosesi adlanır. Əgər X standart proses olarsa və sonuncu şərt ixtiyari $x \in \mathscr{E}$ və x nöqtəsinin ixtiyari zərif V ətrafı üçün ödənilərsə (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zənciri üçün), onda bu proses zərif qayıdışlı Markov prosesi adlanır. $V \in \mathscr{B}$ və $\mu(V) > 0$ olduqda bütün $x \in \mathscr{E}$ üçün S_V çoxluğunun Lebeq ölçüsü hər dəfə $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin sonsuz olarsa, standart X prosesi Harris qayıdışlı və ya μ – qayıdışlı proses adlandırılır, μ, – $\mathscr{B}$ σ – cəbrində σ – sonlu ölçüdür.

Bir- və ikiölçülü Viner prosesləri hər üç mənada Q. M. p.-nə aid nümunələrdir. Q. M. p. anlayışı Markov proseslərinin erqodik xassələrinin öyrənilməsində istifadə olunur (bax, *Erqodik teoremlər* Markov prosesləri üçün). Ölçülən fəzada Markov zənciri halı üçün birinci və ikinci tərifin təbii analoqları vardır.

Əd.: [1] Azema J., Kaplan-Duflo M., Revuz D., «Lect. Notes Math.», 1968, v. 51, p. 1–21; [2] Revuz D., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997; [3] Tuominen P., Tweedie R., «Proc. London Math. Soc.», 1979, v. 39, p. 554–76; [5] Getoor R. K., «Lect. Notes Math.», 1980, v. 784, p. 397–409.

QAYIDIŞLI MARKOV ZƏNCİRİ « возвратная цепь Маркова; recurrent Markov chain » – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi çoxluq, hər bir vəziyyəti qayıdışlı olan bircins Markov zənciri X-dir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərinin təsnifatı). Başqa sözlə, əgər n addıma keçid ehtimalları $p_{ij}(n)$ olan X zənciri $\mathscr{E} = \{1, 2, \ldots\}$ çoxluğunda (vəziyyətləri sayı hesabidən çox olmayan) verilmişdirsə, onda zəncirin qayıdışlılığı onu ifadə edir ki, ixtiyari $i \in \mathscr{E}$ vəziyyətindən çıxan trayektoriya sanki yəqin i vəziyyətinə qayıdır (belə ki, sonsuz dəfə). X zəncirinin qayıdışlı zəncir olması $\sum\limits_{n \geq 1} p_{ii}(n)$, $i \in \mathscr{E}$ sırasının dağılan olmasına ekvivalentdir.

Qeyri – periodik Q. M. z. üçün bu zəncir ayrılmayan zəncir olduğu halda i-dən asılı olmayan $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ limitləri vardır.

Q. M. z.-nə misal $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ şəbəkəsi üzrə simmetrik təsadüfi dolaşmadır; bu şəbəkə üzrə hər bir $i \in Z$ şəbəkəsindən növbəti addımdakı keçid $1/2$ ehtimalı ilə ya $i - 1$ və ya

$i+1$ vəziyyətinə olur. Ayrılmayan Q. M. z.-nin ümumiləşməsi – Harris qayıdışlı Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

ν – QAYIDIŞLI MARKOV ZƏNCİRİ « ν – возвратная цепь Маркова; ν – recurrent Markov chain » – bax, *Markov zənciri*.

QAYIDIŞLI VƏZİYYƏT « возвратное состояние; recurrent state » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu.

QAYIDIŞLILIQ(ğı) təsadüfi dolaşmanın **« возвратность** случайного блуждания; **persistence** of a random walk **»** – bax, *Təsadüfi dolaşma*; qayıdışlılıq.

QAYIDIŞSIZ MARKOV ZƏNCİRİ « невозвратная цепь Маркова; nonrecurrent / transient Markov chain » – bütün vəziyyətləri qayıdışlı, bircins hesabi Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Ümumi Markov zəncirləri nəzəriyyəsində «Q. M. z.» terminə «tranzitiv Markov zənciri» termini uyğundur. Bu termindən hər dəfə o halda istifadə olunur ki, hər hansı ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında verilən bircins Markov zəncirinin n addıma keçid ehtimalları $p(n, x, \Gamma)$ vasitəsilə, birləşməsi $\mathscr{E}$ -yə bərabər elə $E_i \in \mathscr{B}$, $i \geq 1$ çoxluqlarını seçmək mümkün olur ki, $\sum_{n\geq 1} p(n, \cdot, E_i)$ sıralarının ixtiyari cəmi $\mathscr{E}$ -də məhdud olur.

QAYIDIŞSIZ VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin **« невозвратное состояние** цепь Маркова; **nonrecurrent / transient state** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYD OLUNMUŞ / SÜRÜŞƏN EHTİYATDA SAXLAMA « фиксированное / скользящее резервирование; fixed / sliding redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

QEYRİ – ANTİSİPATİV FUNKSİYA « неантисипативная / неупреждающая функция; nonanticipating / $\mathscr{A}$ – adapted function », $\mathscr{A}$ – uzlaşmış funksiya, $\mathscr{A}$ – adaptiv funksiya, $-\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ filtrasiyalı, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən, ixtiyari t üçün $\mathscr{A}_t$ – ölçülən $f(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$ funksiyasıdır.

QEYRİ – ANTİSİPATİV STRATEGİYA « неупреждающая / неантисипативная стратегия; nonanticipating strategy » – bax, *Strategiya*, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

QEYRİ – ANTİSİPATİV TƏSADÜFİ PROSES « неупреждающий / неантисипативный случайный процесс; nonanticipating random process » – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses.*

QEYRİ – ATOMİK ÖLÇÜ « неатомическая мера; non – atomic measure » – bax, *Atomik ölçü.*

QEYRİ – ATOMİK PAYLANMA « неатомарное распределение; non – atomic distribution » – bax, *Stiltyes – Minkovski inteqralı.*

QEYRİ – BİRCİNS MARKOV ZƏNCİRİ « неоднородная цепь Маркова; inhomogeneous Markov chain » – bircinslik xassəsinə malik olmayan *Markov zənciridir.* İxtiyari Q. – b. M. z.-ni faza fəzasının uyğun dəyişməsi ilə bircins Markov zəncirinə çevirmək mümkündür (bax, *Markov zənciri* və [1], səh. 136).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

QEYRİ – BİRCİNS ŞAXƏLƏNƏN PROSES, ZAMAN ÜZRƏ « неоднородный во времени ветвящийся процесс; time inhomogeneous branching process » – t anındakı hissəciklərinin çevrilmə qanunları t -dən asılı olan *şaxələnən prosesdir*. Z. üzrə q. – b. ş. p. $Z(t)$ keçid ehtimalları $P_{ij}(s, t)$ şaxələnmə şərtini ödəyən, vəziyyətləri çoxluğu hesabi $(0, 1, 2, \ldots)$ olan Markov prosesi kimi təyin olunur.

$$F(s, t, x) = \mathbf{M}\left(x^{Z(t)} \,\middle|\, Z(s) = 1\right)$$

doğuran funksiyaları terminlərilə şaxələnmə şərti

$$F(s, t_1 + t_2; x) = F(s, t_1; F(t_1, t_2; x))$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Prosesin vəziyyəti hissəciklərin sayı kimi interpretasiya olunur.

Kəsilməz zamanlı proseslər üçün, adətən, fərz olunur ki, $h \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}_{1n}(t,\ t+h) = p_n(t)h + o(h),$$
$$\mathbf{P}_{1n}(t-h, t) = p_n(t)h + o(h), \quad n \neq 1$$
$$\mathbf{P}_{11}(t, t+h) = 1 + p_1(t)h + o(h),$$
$$\mathbf{P}_{11}(t-h, t) = 1 + p_1(t)h + o(h),$$

və $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 0$. Bu şərtlər ödənildikdə $F(t_1,\ t_2;\ x)$

$$\frac{\partial F(t_1, t_2; x)}{\partial t_1} = -f(t_1; F(t_1, t_2; x)),\ F(t_1, t_2; x) = x$$

differensial tənliyini və ya

$$\frac{\partial F(t_1, t_2; x)}{\partial t_2} = f(t_2; x)\frac{\partial F(t_1, t_2; x)}{\partial x},\ F(t_1, t_2; x) = x$$

xüsusi törəməli xətti tənliyini ödəyir, burada

$$f(t; x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, x^n\ .$$

Əgər bütün t -lər üçün $a(t) = \left.\frac{\partial f(t; x)}{\partial x}\right|_{x=1}$ sonlu olarsa, onda $\mathbf{M}Z(t)$ vardır və

$$\mathbf{M}Z(t) = \exp\left\{ \int_s^t a(u)\, du \right\}.$$

Z. üzrə q. - b. ş. p. limitdə adi bircins proseslərlə müqayisədə müxtəlif şəkillərdə ifadə olunur və kritikaltı, kritiküstü, kritik şaxələnən proseslər kimi proseslərlə təsnif oluna bilinmir.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, M., 1971.

QEYRİ – DİSSİPATİV MARKOV ZƏNCİRİ « недиссипативная цепь Маркова; nondissipative Markov chain » – sonlu və ya hesabi elə *Markov zənciridir* ki, onun ixtiyari bir vəziyyətdən çıxan trayektoriyaları, sanki yəqin, tez və ya gec də olsa zəncirin müsbət qayıdışlı siniflərindən birinə keçir və orada həmişəlik qalır (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Başqa sözlə, $p_{ij}(m)$ i vəziyyətindən j vəziyyətinə m addıma keçid ehtimalı,

$$\pi_{ij} = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}(m)$$

olduqda, əgər $\sum_{j\in\mathscr{E}} \pi_{ij} = 1$, $i \in \mathscr{E}$ olarsa, vəziyyətləri çoxluğu hesabini aşmayan $\mathscr{E} = \{1, 2, ...\}$ olan X Markov zənciri Q. – d. M. z.-dir. Q. – d. M. z.-ləri arasında *erqodik Markov zəncirləri* xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Əd.: [1] Foster F. G., «Camb. Phil. Soc.», 1952, v. 48, № 3, p. 587–91; [2] Баручa-Рид А. Т., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., M., 1969.

QEYRİ – ƏDƏDİ TƏBİƏTLİ OBYEKTLƏRİN STATİSTİKASI « нечисловой природы объектов статистика; statistics of non – numerical type objects » – bax, *Statistika*(sı) qeyri–ədədi təbiətli obyektlərin.

QEYRİ – HƏSSASLIQ PROBLEMİ « нечувствительности проблема; insensitivity / invariance problem » xidmət sistemi nəzəriyyəsində – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; invariantlıq problemi.

QEYRİ – XƏTTİ AVTOREQRESSİV PROSES « нелинейной авторегрессии процесс; nonlinear autoregressive process » –

$$\zeta_t = f(\zeta_{t-1}, ..., \zeta_{t-k}) + e_t \qquad (*)$$

tənliyini ödəyən diskret zamanlı $\{\zeta_t,\ t = 0, \pm1, \pm2, ...\}$ *stasionar təsadüfi prosesidir*, burada $f(x_1, ..., x_k)$ – hər hansı k dəyişənli funksiya, $\{e_t\}$ – eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan (və ya qeyri – korrelyar və eyni orta qiyməti və eyni dispersiyası olan) elə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır ki, e_t və $s < t$ olan s-lər üçün bütün ζ_s-lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. (*) tənliyini ödəyən ζ_t prosesi çox vaxt k tərtib qeyri–xətti avtoreqressiv proses də adlandırılır. $k = 1$ halı üçün belə prosesləri [1]-də D. Conson daxil etmişdir (bax, həm də [2]), $f(x_1, ..., x_k)$ xətti funksiya olduqda isə ζ_t prosesi adi k tərtib avtoreqressiv prosesdir. $f(x_1, ..., x_k)$ funksiyasının hissəvi xətti approksimasiyasından istifadə etdikdə Q. – x. a. p.-lər sinfi təsadüfi prosesin *sədd modelləri* sinfinə çevrilir (bax, *Sədd modeli*); ümumiyyətlə isə, Q. – x. a. p.-lər sinfi təsadüfi proseslərin *qeyri – xətti modellərinin* ümumi sinfinin mühüm bir altsinfidir.

Q. – x. a. p.-lər nəzəriyyəsində eksponensial avtoreqressiv proseslərin (və ya eksponensial avtoreqression modellərin və ya EXPAR – modellərin) də tədqiqi mühüm yer tutur (bax, [3], [6]). Bu proseslər T. Ozaki tərəfindən $X_t = A_{t1}X_{t-1} + A_{tk}X_{t-k} + c_t$ tənlikləri ilə təsvir olunan qeyri – xətti rəqslər nəzəriyyəsinin bəzi məsələləri ilə əlaqədar daxil olunmuşdur, burada $A_{tj} = a_j + b_j \exp(-c^2 X_{t-1}^2)$, $j = 1, ..., k$, a_j, b_j və c_t – hər hansı sabitlərdir (bax, [3] – [6]).

Əd.: [1] Jones D. A., «Proc. Roy. Sos. London», Ser. A, 1978, v. 360, p. 71–95; [2] Hognas G., «J. Time Series Analysis», 1986, v. 7, № 3, p. 205–11; [3] Osaki T., Oda H., в кн: Information and systems, Oxf., 1978, p. 83–91; [4] Priestley M. B., Nonlinear and nonstationary time series analysis, L., 1988; [5] Tong H., в кн.: Proceedings 1-st World Congress of Bernoulli Society, Utrecht, 1987; [6] Chan W. S., Tong H., «J. Forecasting», 1986, v. 5, № 4, p. 217–28.

QEYRİ – XƏTTİ FİLTRASİYA(sı) təsadüfi proseslərin **« нелинейная фильтрация** случайных процессов; **nonlinear filtering** of random processes**»** – hər bir t anında ζ_t *təsadüfi prosesi* üçün $(Y_s,\ 0 \le s \le t)$ müşahidələri üzrə statistik qiymətin (məs., kvadratik orta mənada) qurulmasıdır [$(\zeta, Y) = (\zeta_t, Y_t)_{t\ge0}$ ikiölçülü təsadüfi prosesdir]. Əgər $\mathbf{M}\, Y_t^2 < \infty$ olarsa, onda kvadratik orta mənada optimal statistik qiymət $\pi_t(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta_t | \mathscr{A}_t^Y)$ aposterior ortasıdır, burada $\mathscr{A}_t^Y$, – Y_s $(0 \le s \le t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir. $\pi_t(\zeta)$ şərti ehtimalını, prinsipcə, Beyes düsturu ilə hesablamaq olar. Lakin müqayisəcə sadə sayılan hallarda $\pi_1(\zeta)$ üçün ifadə olduqca böyük olur. Buna görə də, adətən, elə hallara baxılır ki, ζ və Y prosesləri $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrlərinin $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\ge0}$ ailəsi ilə uzlaşmış elə proseslər olsun ki, bunlar

$$\zeta_t = \zeta_0 + \int_0^t H_s\, ds + M_t, \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t A_s\, ds + W_t$$

şəklində ifadə oluna bilinsin, burada $H = (H_t)_{t\ge0}$, A isə $(A_t)_{t\ge0} = \mathbb{A}$ – uzlaşmış proseslərdir, $M = (M_t)_{t\ge0}$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı kvadratik inteqrallanan martinqal və $W = (W_t)_{t\ge0}$, – $\mathbb{A}$ -ya nəzərən, Viner prosesidir.

$$\int_0^t \mathbf{M}(H_s^2 + A_s^2)\, ds < \infty, \quad t > 0$$

şərtlərində isbat olunur ki, $(\pi_t(\zeta))_{t\ge0}$ prosesi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\pi_t(\zeta) = \pi_0(\zeta) + \int_0^t \pi_s(H)\, ds +$$

$$+ \int_0^t [\pi_s(D) + \pi_s(\zeta A) - \pi_s(\zeta)\pi_s(A)]\,(dY_s - \pi_s(A)\, ds) \qquad (1)$$

burada $\langle M, W \rangle$, – M və W martinqallarının qarşılıqlı kvadratik xarakteristikasıdır, $D_t = d\langle M, W \rangle_t / dt$, $\pi_t(D)$, $\pi_t(H)$, $\pi_t(\zeta A)$, $\pi_t(A)$ – uyğun olaraq, D_t, H_t, $\zeta_t A_t$, A_t kəmiyyətlərinin $(Y_s, 0 \le s \le t)$ müşahidələri üzrə kvadratik orta mənada optimal statistik qiymətləri olub, optimal qeyri–xətti filtrasiyanın əsas tənliyi adlanır.

(ζ, Y) asılı olmayan Viner prosesləri $\widetilde{W}$ və W -yə nəzərən

$$d\zeta_t = a(\zeta_t)dt + d\widetilde{W}_t$$

$$d\zeta_t = A(\zeta_t)dt + d\widetilde{W}_t$$

İto tənlikləri ilə təyin olunduğundan, Markov diffuzion prosesi halında, (1) ifadəsindən aposterior $\rho_t(y)$ sıxlıq funksiyası üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$\rho_t(y) = \frac{d\,\mathbf{P}\{\xi_t \le y \mid \mathcal{A}_t^X\}}{dy};$$

$$\rho_t(y) = \rho_0(y) + \int_0^t \left[-\frac{\partial}{\partial y}(a(y),\ \rho_s(y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho_s(y)}{\partial y^2} \right] ds +$$

$$+ \int_0^t \rho_s(y) \left[A(y) - \int_{-\infty}^{\infty} A(x)\,\rho_s(x)\,dx \right] \times$$

$$\times \int \left[dY_s - \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(x)\rho_s(x)\,dx \right) ds \right] \qquad (2)$$

və bu tənlik (1)-dən fərqli olaraq qapalı tənlikdir.

Markov prosesi ζ üçün onun vəziyyətləri çoxluğu $(\alpha_1, \beta, \gamma, ...)$ sonlu və ya hesabi olduğu halda və keçid intensivlikləri matrisi $\|\lambda_{\alpha\beta}(t)\|$ ilə verildikdə,

$$Y_t = \int_0^t A(\zeta_s)ds + W_t$$

olarsa, $\pi_t(\beta) = \mathbf{P}\{\xi_t = \beta \mid \mathcal{A}_t^Y\}$ aposterior ehtimalları üçün, (1)-dən, qapalı tənliklər sistemi alınır:

$$\pi_t(\beta) = \mathbf{P}\{\zeta_0 = \beta\} + \int_0^t \sum_\gamma \lambda_\gamma \beta(s)\pi_s(\gamma)\,ds +$$

$$+ \int_0^t \pi_s(\beta) \left(A(\beta) - \sum_\gamma A(\gamma)\,\pi_s(\gamma) \right) \times$$

$$\times \left(dY_s - \sum_\gamma A(\gamma)\,\pi_s(\gamma)\,ds \right)$$

$\rho_t(y)$ və $\pi_t(\beta)$ kəmiyyətlərilə ixtiyari aposterior xarakteristikaları, xüsusi halda, $\pi_t(\zeta)$ -nı hesablamaq olur.

(1) ifadəsindən bir sıra xüsusi hallarda da istifadə olunur. Məs., (ζ, Y) asılı olmayan $\widetilde{W}$ və W Viner proseslərinə nəzərən

$$d\zeta_t = a(Y_t)\zeta_t\,dt + d\widetilde{W}_t$$

$$dY_t = a(Y_t)\zeta_t\,dt + dW_t$$

tipli diffuzion prosesdirsə və $\mathbf{P}\{\xi_0 \le y \mid Y_0\}$ şərti paylanması $\mathbf{P}$ – sanki yəqin Qauss prosesidirsə, onda məhdud $a = a(x)$, $A = A(x)$ üçün $\mathbf{P}\{\xi_t \le y \mid \mathcal{A}_t^Y\}$ şərti paylanması $\mathbf{P}$ – sanki yəqin Qauss paylanmasıdır və kvadratik orta mənada optimal $\pi_t(\zeta)$ statistik qiyməti və

$$P_t(\zeta) = \mathbf{M}((\zeta_t - \pi_t(\zeta))^2 \mid \mathcal{A}_t^Y)$$

filtrasiyasının şərti kvadratik orta statistik qiyməti şərti Qauss filtrasiyasının aşağıdakı xətti tənliklərilə təyin olunur:

$$d\pi_t(\zeta) = a(Y_t)\pi_t(\zeta)dt + P_t(\zeta)\,A(Y_t)(dY_t - A(Y_t)\pi_t(\zeta)dt),$$

$$\frac{dP_t(\zeta)}{dt} = 2a(Y_t)P_t(\zeta) + 1 - (A(Y_t)P_t(\zeta))^2.$$

Əd.: [1] Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H., «Osaka J. Math.», 1972, v. 9, № 1, p. 19–40 (в рус. пер.: «Математика», 1973, т. 17, № 2, с. 108–28); [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

QEYRİ – XƏTTİ KORRELYASİYA « криволинейная корреляция; non – linear correlation / curvilinear correlation » – Y və X təsadüfi kəmiyyətlərinin $f(Y) = A_0 + A_1\theta_1(X) + ... + A_n\theta_n(X)$ parametrik modeli çərçivəsində əlaqəsi haqqında hipotezin qəbul edilməsidir, burada f, θ_1, ..., θ_n – məlum funksiyalardır, A_i əmsalları ən kiçik kvadratlar metodu vasitəsilə tapılır. Məs., əgər $f(x) = \ln x$, $n = 2$, $\theta_1(x) = x$, $\theta_2(x) = x^2$ olarsa, onda Y kəmiyyəti X ilə $Y = \exp(A_0 + A_1X + A_2X^2)$ şəklində təqribi münasibətlə bağlıdır, bu da qeyri – xətti xarakterlidir; bununla belə A_j -nin tapılması məsələsi xətti xarakterlidir.

Əd.: [1] Бард Й., Нелинейное оценивание параметров, пер. с англ., М., 1979; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987.

QEYRİ – XƏTTİ MODELLƏR (i) təsadüfi proseslərin **« нелинейные модели** случайных процессов; **nonlinear models** of random processes **»** – ζ_t təsadüfi prosesinin qiymətlərini ehtimal paylanmaları olduqca sadə və məlum olan Y_t təsadüfi prosesinin qiymətlərilə əlaqələndirən, qeyri – xətti tənliklərlə verilən, $t = 0, \pm1, \pm2, ...$ diskret zamanlı ζ_t *təsadüfi proseslərinin* (adətən, stasionar fərz olunan) modelləridir. Y_t prosesi kimi, əksər hallarda, *diskret bəyaz küy*, yəni eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı götürülür. *Qeyri – xətti avtoreqressiv proseslər*, *təsadüfi proseslərin bixətti modelləri* və *təsadüfi proseslərin sədd modelləri* (bax, məs., [1] – [4]) təsadüfi proseslərin Q. – x. m.-nin ən çox istifadə olunan xüsusi siniflərdir.

Q. – x. m. nəzəriyyəsinin mühüm istiqamətləri modelin verilmiş tənliyinin stasionar həllərinin varlığı şərtlərinin aydınlaşdırılması, modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi (bax, [1] – [5]) və qeyri – xəttilik haqqında hipotezlərin yoxlanılmasıdır (bax, [6], [7]).

Ədd.: [1] P r i e s t l e y M. B., Nonlinear and nonstationary time series analysis, L., 1988; [2] R a o T. S., G a b r M. M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, B., 1984; [3] T o n g H., Threshold models in nonlinear time series analysis, N. Y., 1983; [4] T o n g H., в кн.: Proceedings 1-st World Congress of Bernoulli Society, Utrecht, 1987; [5] T j o s t h e m D., «Stoch Processes and their Appl.», 1986, v. 21, № 2, p. 251–73; [6] C h a n W. S., T o n g H., в кн.: Advances in statistical analysis and statistical computing, v. 2, Greenwich (USA), 1987; [7] C h a n W. S., T o n g H., «J. Forecasting», 1986, v. 5, № 4, p. 217–28.

QEYRİ – XƏTTİ PROQNOZLANMA(sı) təsadüfi proseslərin « **нелинейное прогнозирование** случайных процессов; **nonlinear prediction / extrapolation** of random processes » – $\zeta = (\zeta_t)_{t\geq 0}$, $\mathbf{M}\zeta_t^2 < \infty$ şərtini ödəyən *təsadüfi proses* olduqda ζ_u müşahidə oluna bilinən kəmiyyətlər olarsa, $0 \leq u \leq s$, $t \geq s$ olduqda ζ_t kəmiyyəti üçün kvadratik orta mənada optimal $\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiymətinin qurulmasıdır. Digər qoyuluşda $\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiyməti $t \geq s$ olduqda ζ_t kəmiyyəti üçün hesablanılır və bu halda fərz olunur ki, Y_u, $0 \leq u \leq s$ kəmiyyətləri müşahidə oluna bilinir, burada $(\zeta, Y) = (\zeta_t, Y_t)_{t\geq 0}$ – ikiölçülü təsadüfi prosesdir. $\pi_{t,s}(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta_t \,|\, \mathscr{A}_s^{\zeta})$ və ya $\pi_{t,s}(\zeta) = \mathbf{M}(\zeta_t \,|\, \mathscr{A}_s^{Y})$ – optimal statistik qiymətlərdir, burada $\mathscr{A}_s^{\zeta}$ və $\mathscr{A}_s^{Y}$ – uyğun olaraq ζ_u, $0 \leq u \leq s$ və Y_u, $0 \leq u \leq s$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrlərdir.

$\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiyməti iki t və s zaman parametrlərindən asılıdır və iki tip təsadüfi prosesi: qeyd olunmuş t və qeyd olunmuş s üçün prosesləri təyin edir. t qeyd olunduqda $(\pi_{t,s}(\zeta))_{0\leq s\leq t}$ prosesi $(\mathscr{A}_s^{\zeta})_{0\leq s\leq t}$ və ya $(\mathscr{A}_s^{Y})_{0\leq s\leq t}$ ailəsinə nəzərən kvadratik inteqrallanan martinqaldır. Bu fakta əsaslanaraq, $\pi_{t,s}(\zeta)$ üçün yeniləşdirən martinqal üzrə stoxastik inteqral şəklində ifadədən istifadə etmək olur.

ζ – Markov diffuzion prosesi və ya hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən Markov prosesi olarsa, $\pi_{t,s}(\zeta)$ statistik qiymətlərinin effektiv qurulması halları məlumdur. Bu hallarda $(\pi_{t,s}(\zeta))_{t\geq s}$ prosesi aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\pi_{t,s}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, d\,\mathbf{P}\{\zeta_t \leq y \,|\, \mathscr{A}_s^{Z}\},$$

burada $\mathscr{A}_s^{Z}$-ya $\mathscr{A}_s^{\zeta}$ və ya $\mathscr{A}_s^{Y}$-in işarələməsidir. $\mathbf{P}\{\zeta_t \leq y \,|\, \mathscr{A}_s^{Z}\}$ şərti paylanması, s qeyd olunduğu halda, Kolmoqorov düz tənliyi ilə təyin olunur: diffuzion proses halında $\rho_t(y) = d\,\mathbf{P}\{\zeta_t \leq y\}/dy$ sıxlıq funksiyası üçün tənlik ilə; hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən Markov prosesi halında $\mathbf{P}\{\zeta_t = \alpha\}$ üçün verilən tənliklər ilə; burada $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, – ζ_t-nin vəziyyətləri çoxluğudur. $Z = \zeta$ olduğu halda $\rho_s(y)$ və $\mathbf{P}\{\zeta_s = \alpha\}$ üçün başlanğıc şərtlər, uyğun olaraq, $\delta(y - \zeta_s)$ və ya $\delta(\alpha, \zeta_s) = I(\zeta_s = \alpha)$ δ – funksiyası, $Z = Y$ olduğu halda isə qeyri – xətti filtrasiya tənlikləri vasitəsilə hesablanılan $d\,\mathbf{P}\{\zeta_s \leq y \,|\, \mathscr{A}_s^{Y}\}/dy$ və ya $\mathbf{P}\{\zeta_s = \alpha \,|\, \mathscr{A}_s^{Y}\}$ şərti ehtimalları götürülür.

Ədd.: [1] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

QEYRİ – XƏTTİ REQRESSİON EKSPERİMENT « нелинейный регрессионный эксперимент; nonlinear regression experiment » – asılı olmayan elə $y_i = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i$ ölçmələr ardıcıllığıdır ki, $\mathbf{M}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2$ və hər hansı $m > 2$ üçün $\mathbf{M}\,|\varepsilon_i|^m < \infty$.

Ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin olunmuş $\hat{\theta}_N$ statistik qiymətinin asimptotik xassələrinin şərhi: $\hat{\theta}_N$ statistik qiyməti

$$\hat{\theta}_N \in \arg\min_{\Theta} Q(\theta)$$

şərtini ödəyir, burada

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{N} |y_i - \eta(x_i, \theta)|^2 .$$

Əgər $\hat{\theta}_N$ bu qayda ilə birqiymətli təyin olunmazsa, onda onun $\Theta \subset \mathbb{R}^p$-də daralan ε – şəbəkələr ardıcıllığı üzrə hər hansı ölçülən requlyarizasiyası seçilir [məs., $\arg\min Q(\theta)$ axtarılır]. ($\hat{\theta}$-nın ədədi axtarışı haqqında «*Qauss – Nyuton metodu*» məq.-nə bax). Requlyarlıq şərtlərində $\hat{\theta}_N$ tutarlı asimptotik normal statistik qiymətdir: $\rho_N = \sqrt{N}\,(\hat{\theta}_N - \theta)$ statistikası $N(0, m^{-1}(\theta))$ normal paylanmasına zəif yığılır; burada

$$m(\theta) = \lim_{N\to\infty} m_N(\theta),$$

$$m_N(\theta) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \nabla_0 \eta(x_i, \theta)(\nabla_0 \eta(x_i, \theta))^{\mathsf{T}}$$

və limitin varlığı requlyarlıq şərtlərindən alınır.

ρ_N-lərin $m - 2$ tərtibə qədər momentlərinin limit paylanmalarının momentlərinə yığılması isbat olunmuşdur. ε_i-lərin paylanmaları eyni olduğu hallarda $\mathbf{P}\{p_N \in C\}$ ehtimallarının qabarıq C çoxluqları üzrə müntəzəm $N^{-(m-2)/2}$ tərtibə qədər asimptotik ayrılışı və

$$\mathbf{P}_{\theta}\left\{\left\| p_N - \sum_{\nu=0}^{k-1} h_{\nu N}(\theta)\, N^{-\nu/2} \right\| \geq \right.$$

$$\left. \geq \varkappa(\theta)\, N^{-k/2} \ln^{(k+1)/2} N \right\} = O(N^{-(m-2)/2})$$

asimptotik ayrılışı alınmışdır, burada k $\eta(\cdot, \theta)$-nın hamarlılığı ilə təyin olunur.

Belə ayrılışların köməyilə, məs., $\hat{g}$ üçün ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinin N^{-1} tərtib yerinidəyişməsinin baş həddini ləğv edən $\theta \to g(\theta)$ çevirmələrini tapmaq olur. Uyğun koordinat sistemi $m_N(\theta)$ informasion matrisi ilə təyin olunan metrikada yarıgeodeji koordinat sistemidir. Analoji çevirmələr ən kiçik kvadratlar statistik qiymətinin dispersiyasının ayrılışının ikinci tərtib

hədlərini sadələşdirir. $\theta \to g(\theta)$ çevirməsinin parametrlərinin varlığına ekvivalent şərtlər tapılmışdır və bu çevirmədən sonra ən kiçik kvadratlar statistik qiyməti $\hat{g}$ -nin kovariasiyalar matrisi sabit olur.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983; [2] Григорьев Ю. Д., Иванов А. В., «Заводская лаборатория», 1987, т. 53, № 5, с. 57–61.

QEYRİ – XƏTTİ REQRESSİYA « криволинейная регрессия; nonlinear / curvilinear regression » – *qeyri – xətti reqressiyadır*.

QEYRİ – XƏTTİ REQRESSİYA « нелинейная регрессия; nonlinear regression » – qeyri – xətti g funksiyası ilə ifadə olunan $y_i = g(x_i; \alpha) + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., n$ *reqressiyasıdır*, burada $\mathbf{M}\varepsilon_i = 0$, $x_i \in \mathbb{R}^k$ – nəzarət edilən determinik (və ya təsadüfi, lakin ε_i-dən asılı olmayan) kəmiyyətlər, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ – parametrlərin naməlum vektorudur. g – parametrlər üzrə xətti, x_i üzrə qeyri – xətti olduğu halda Q. – x. r. xətti reqressiyaya gətirilir. Onda $g(x_i; \alpha) = g_1(x_i)\alpha_1 + ... + g_m(x_i)\alpha_m$ olur, buna görə də, $g_j(x_i) = z_{ij}$ işarələməsindən istifadə etdikdə, *xətti reqressiya* alınır.

Əgər ε_i kəmiyyətlərinin paylanması məlum olarsa, onda α-nı qiymətləndirmək üçün maksimal doğruyaoxşarlıq metodundan istifadə etmək olar. Praktikada, adətən, ən kiçik kvadratlar metodundan istifadə olunur. Metodun statistik qiymәti parametrlərin elə qiymətinə deyilir ki, bu qiymət yayınmaların kvadratları cəmi – $\sum_i (y_i - g(x_i; \alpha))^2$ cəminin minimum qiymət almasını təmin edir. Bu optimizasiya məsələsinin xüsusi həll metodları vardır: bu metodların əsası Qauss – Nyuton iterativ metodudur və bu metodun məğzi reqressiya funksiyasının parametrlər üzrə xəttiləşdirilməsindən və xətti reqressiyada ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətinin tapılması üçün standart düsturun tətbiqindən ibarətdir. Ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətlərinin keyfiyyətinin mühüm xarakteristikası onların standart xətalarıdır ki, bu xətalar Q. – x. r. halında xətti reqressiya əsasında – nöqtədə parametrlər üzrə g-nin ayrılması – ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiyməti əsasında alınır. Ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətinin Q. – x. r.-dakı statistik xassələri yalnız asimptotik surətdə öyrənilmişdir; bəzi requlyarlıq şərtlərində ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiyməti tutarlı və asimptotik normal statistik qiymətdir. Q. – x. r. üçün kiçik seçimlər nəzəriyyəsi inkişaf etdirilməmişdir.

Əd.: [1] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, M., 1981; [2] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, M., 1989.

QEYRİ – XƏTTİ TƏNLİK; Monte–Karlo metodu ilə həll **« нелинейное уравнение;** решение методом Монте–Карло; **nonlinear equation;** Monte–Karlo solution technique**»** – təsadüfü hadisə və proseslərin *statistik modelləşdirilməsi* və bunların nəticələrinin elə funksiyalarının hesablanması alqoritmləridir ki, onların riyazi gözləmələri axtarılan həllin nöqtələrdə qiymətlərinə (ola bilər ki, təqribən) və ya digər xarakteristikalarına bərabərdir. Bir qayda olaraq, Monte – Karlo metodu ilə qeyri – xətti *kinetik köçürtmə tənliyi* və ya oxşar şərhi olan tənliklər həll olunur. Həll üçün birbirilə qarşılıqlı təsirdə olan və ya bilavasitə və (və ya) ətraf mühitin hissəciyə təsirinə məruz hissəciklər ansamblının davranışı modelləşdirilir (bax, *Statistik modelləşdirilmə*(si) köçürtmə məsələlərinin). Sonuncu halda tənliyi hər dəfə qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəciklərin köçürülməsi modelləşdirilməklə iterasiyalarla həll mümkündür, bu halda əvvəlki iterasiyalardan axınlar üzrə mühitin vəziyyəti hesablanır, yəni məsələ xəttiləşdirilmiş tənliklər ardıcıllığının həllinə gətirilir. Qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklər ansamblının effektiv modelləşdirilməsi yalnız böyük yaddaşlı kompyuterlərdə mümkündür. Doğum və ölüm prosesinin modelləşdirilməsi nisbətən sadədir (yəni hissəciklərin kaskadlarının davranışı), lakin bu modellər sinfinin tətbiqi məhduddur.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, M., 1984; [2] Яницкий В. Е., Теоретико-вероятностный анализ прямого статистического моделирования столкновительных процессов в разреженном газе, в кн.: Бёрд Г., Молекулярная газовая динамика. Дополнение I., пер. с англ., M., 1981, с. 279–302.

QEYRİ – KOMMUTATİV EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ « некоммутативная теория вероятностей; noncommutative probability theory » – kvant nəzəriyyəsinin ehtimali strukturlarını öyrənən riyazi fəndir. Q. – k. e. n. bir sıra prinsipial xüsusiyyətlərə malikdir: bunlardan ən mühümü uyuşmayan müşahidələnənlərin (təsadüfi kəmiyyətlərin) varlığıdır ki, bunlar üçün birgə ehtimal paylanması vermək mümkün deyildir. Kvant mexanikasının riyazi dili operatorlar nəzəriyyəsidir, belə ki, uyuşmayan müşahidələnənlər qeyri – kommutativ operatorlarla ifadə olunur. Bu isə kvant – mexaniki təsvirə xas olan tamamlanılmanın dərin fiziki prinsipinin əks olunmasıdır (bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*).

Q. – k. e. n.-nin yaranması kvant mexanikasının aksiomatik bazisini təyin etməklə bağlıdır. Bununla bağlı aparılan araşdırmalar C. Neyman (J. Neuman), İ. Siqal (I. Segal), C. Makki (J. Mucci) kimi alimlərin işlərində öz əksini tapmışdır (1830 – 50-ci illər). Hal-hazırda Q. – k. e. n.-ndən söhbət getdikdə, «klassik» ehtimal nəzəriyyəsinin anlayış və nəticələrinin ixtiyari *müşahidələnənlər cəbrinə* ümumiləşdirilməsi nəzərdə tutulur. XX əsrin 70-ci illərində kvant ölçmə nəzəriyyəsinin (bax, *Kvant rabitə kanalı*, *Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılma və qiymətləndirilməsinin*) və statistik mexanikanın (bax, *Kvant təsadüfi prosesi*, *Kvant dinamik semi – qrupu*) konkret problemlərinə əsaslanan yeni istiqamətlər yarandı. Bununla bağlı olaraq, kvant ehtimal nəzəriyyəsi anlayışı da istifadə olunmağa başlandı. Kvant mexanikasında hər bir sistemə $\mathscr{H}$ Hilbert fəzası qarşı qoyulur. Sistemin vəziyyəti $\mathscr{H}$-da sıxlıq operatoru S ilə ifadə olunur, bu operator vahid izli müsbət operatordur, *müşahidələnənlər* isə $\mathscr{H}$-da özü-özünə qoşma A operatorlarıdır. S vəziyyətində müşahidəolunan A-nın ölçülmə nəticəsi təsadüfidir, onun orta qiyməti

$$\langle A \rangle = \operatorname{tr} SA \qquad (1)$$

düsturu ilə verilir.

Müşahidə olunan A-nın ehtimal paylanmasını tamamilə təsvir etmək üçün A operatorunun spektral ayrılışı $\{G(\lambda): -\infty < \lambda < \infty\}$-nın verilməsi zəruridir. Müşahidəolunan A-nın qiymətinin $[\alpha, \beta)$ intervalından olması ehtimalı

$$\mathbf{P}[\alpha, \beta) = \operatorname{tr} S(G(\beta) - G(\alpha)) \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Q. – k. e. n.-nin məsələlərindən biri müşahidəolunan A və sıxlıq operatoru S haqqında hər hansı informasiya olduğu halda kvant orta qiymətlərinin və ehtimallarının hesablanması və ya qiymətləndirilməsidir.

Məs., şəbəkəvari model kvant statistik mexanikası modelini vəziyyətlər və müşahidələnənlərin mühüm misalları ilə aydınlaşdırır. $\mathbb{Z}^{\nu}$ – tamqiymətli dim. – ölçüsü υ olan şəbəkə, J – indekslərin sonlu çoxluğu olsun. Hər bir sonlu $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ altçoxluğuna $\varphi(x)$, $x \in \{j_z\}_{z\in\Lambda}$ funksiyalarından ibarət $(\varphi, \varphi) = \sum_x \varphi(x)\,\psi(x)$ skalyar hasili ilə, sonluölçülü $\mathscr{H}(\Lambda)$ Hilbert fəzası qarşı qoyulur; $j_z \in J$.

Əgər $\Lambda \subset \Gamma$ olarsa, onda $\mathscr{H}(\Lambda)$-da təsiredən B operatoru, təbii olaraq $\mathscr{H}(\Gamma)$-də təsiredən operatora kimi davam olunur. Baxılan sistemlər üçün xətti özü-özünə qoşma $U(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^{\nu}$ operatorlarının toplusu **qarşılıqlı təsir operatoru** (cüt-cüt) adlanır; $U(z_1, z_2)$ operatoru $\mathscr{H}(z_1, z_2)$ fəzasında təsir edir; daha mürəkkəb (hökmən deyil ki, cüt-cüt) qarşılıqlıtəsirlər analoji təyin olunur. Verilmiş sonlu $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\upsilon}$ çoxluğu üçün qarşılıqlı təsir enerjisi $H_{\Lambda} = \sum_{z_1, z_2 \in \Lambda} U(z_1, z_2)$ xətti özü-özünə qoşma operatordur; bu operatorun məxsusi qiymətləri sistemin **enerji səviyyələri** adlanır. Sıxlıq operatoru

$$S = [\operatorname{tr}(\exp(-\beta H_{\Lambda}))]^{-1} \exp(-\beta H_{\Lambda}) \qquad (3)$$

ilə ifadə olunan vəziyyət **sonlu Gibbs vəziyyəti** adlanır, burada β – ədədi parametrdir (tərs temperatur). Kvant statistik mexanikasında mühüm hal ondan ibarətdir ki, termodinamik tarazlıq vəziyyətində bütün A kəmiyyətinin orta qiyməti

$$\langle A \rangle = [\operatorname{tr} \exp(-\beta H_{\Lambda})]^{-1} \operatorname{tr}(\exp(-\beta H_{\Lambda})\, A) \qquad (4)$$

düsturu ilə hesablanır. Əgər $A = H_{\Lambda}$ enerjidirsə, onda onun orta qiyməti

$$\langle H_{\Lambda} \rangle = \left[\sum_k \exp(-\beta E_k)\right]^{-1} \sum_k E_k \exp(-\beta E_k) \qquad (5)$$

düsturu ilə hesablanır və baxılan sistemin E_m enerjisinə malik vəziyyətdə olması ehtimalı

$$\mathbf{P}\{H_{\Lambda} = E_m\} = \exp(-\beta E_m)\left[\sum_k \exp(-\beta E_k)\right]^{-1}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Əgər qarşılıqlıtəsir trivial, yəni $U(z_1, z_2) = U(z_1) + U(z_2)$ olarsa, onda Gibbs vəziyyəti **prodakt–vəziyyətdir**: ixtiyari sonlu kəsişən $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{Z}^{\nu}$ və $\mathscr{H}(\Lambda_1)$ və $\mathscr{H}(\Lambda_2)$-da təsiredici A_1 və A_2 operatorları üçün $\langle A_1, A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle$ bərabərliyi ödənilir.

Statistik mexanika sistemləri onunla səciyyələnir ki, onların sərbəstlik dərəcəsi sayları olduqca böyük olur və belə sistemlər üçün (4) tipli düsturlarla dəqiq hesablamalar mümkün olmur. Buna görə də, $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}$ olduğu halda, «termodinamik limitə keçid» istifadə olunur. Belə limitə keçidə riyazi nöqteyi – nəzərdən yanaşdıqda, kvazilokal müşahidələnənlər cəbrlərində gibbs limit vəziyyətləri yaranır.

$\mathfrak{A}(\Lambda)$, – $\mathscr{H}(\Lambda)$ fəzasında bütün operatorların sonluölçülü * – cəbri olsun; $\Lambda \subset \Gamma$ olduqda $\mathfrak{A}(\Lambda) \subset \mathfrak{A}(\Gamma)$ olduğundan, $\mathfrak{A}_0 = \bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}} \mathfrak{A}(\Lambda)$ lokal müşahidələnənlər * – cəbridir. $\mathfrak{A}_0$ * – cəbrinin operator normasına görə tamamlanması abstrakt C^* – cəbrdir; C^* – cəbri **kvazilokal müşahidələnənlər cəbri** adlanır. Əgər bütün $A \subset \mathfrak{A}$ operatorları üçün $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}} \langle A \rangle$ limiti vardırsa, onda bu limit **Gibbs limit vəziyyəti** adlanır.

Q. – k. e. n.-də Qelfand – Naymark – Siqal (QNS) konstruksiyasından tez-tez istifadə olunur; bu konstruksiya abstrakt $\mathfrak{A}$ C^* – cəbrini hər hansı Hilbert fəzasında operatorlar cəbri kimi realizə etməyə imkan verir. $\langle \cdot \rangle$, – $\mathfrak{A}$ -da vəziyyət olsun, onda $(A, B) = \langle A^*, B \rangle$ düsturu $\mathfrak{A}$-da psevdoskalyar hasil təyin edir. Faktorizasiya və tamamlama Hilbert fəzasına gətirir, belə ki, hər bir $A \in \mathfrak{A}$ elementinə, $\mathscr{H}$-da məhdud $\hat{A}$ operatoru qarşı qoyulur, odur ki, $\langle A \rangle = (\Omega, \hat{A}, \Omega)$, burada Ω, – $\mathscr{H}$-da seçilmiş vahidi operatordur. $\hat{A}$ operatorları $\mathscr{H}$-da operatorların C^* – cəbrini əmələ gətirir.

Q. – k. e. n.-ndə istifadə olunan operator cəbrlərinin əsas sinfini Neyman cəbrləri (vahidi olan W^* – cəbrləri) təşkil edir; bu cəbrlər zəif limit keçidinə görə qapalı operatorlar cəbrləridir və bu operatorlar hər hansı $\mathscr{H}$ Hilbert fəzasında təsir edir [əgər bütün $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ üçün $\lim_{\alpha}(A_{\alpha}, \varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)$ olarsa, onda A_{α} operatorları A operatoruna **zəif yığılır**, deyilir]. Kvazilokal müşahidələnənlər $\mathfrak{A}$ cəbrində verilmiş hər bir $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti QNS konstruksiyasının köməyilə Hilbert fəzası $\mathscr{H}$-ı və zəif qapanması Neyman cəbri olan $\mathfrak{A}$ operatorlar cəbrini təyin etməyə imkan verir.

Q. – k. e. n.-nin ümumi aksiomatikası ondan ibarətdir ki, hər hansı $\mathfrak{A}$ Neyman cəbri və $\mathfrak{A}$ -da elə $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti seçilir ki, bu vəziyyət ixtiyari $A_{\alpha} \in \mathfrak{A}$, $A_{\alpha} \geq 0$ üçün

$$\left\langle \sum_{\alpha}, A_{\alpha} \right\rangle = \sum_{\alpha} \langle A_{\alpha} \rangle \qquad (6)$$

normallıq şərtini ödəsin. A. N. Kolmoqorova məxsus ehtimal nəzəriyyəsinin klassik aksiomlar sistemi bu sxemə cavab verir, bu şərtlə ki, $\mathfrak{A}$ cəbri kommutativ olmalıdır. Neyman cəbrlərində vəziyyətlərin ümumi xassələri **qeyri–kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsində** öyrənilir. Bu nəzəriyyənin əsas elementləri $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti ilə verilmiş $\mathfrak{A}$ Neyman cəbrində L^1 və L^2 fəzalarıdır. **Qeyri–kommutativ Radon–Nikodim teoremləri** adlanan kompleks nəticələr mövcuddur ki, bu nəticələr başlanğıc $\langle \cdot \rangle$ vəziyyətinin və bəzi qeyri – məhdud operatorların köməyilə L^1 və L^2 fəzalarının elementlərini realizə etməyə imkan verir.

Qeyri – kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsində öyrənilən digər suallar kompleksini verilmiş $\mathfrak{A}$ Neyman cəbrinə daxil olan bütün ortoqonal proyektləmə operatorlarının çoxluğu $\mathscr{P}$-nin araşdırılması və $\mathfrak{A}$ cəbrində vəziyyətlər ilə $\mathscr{P}$-də təyin olunmuş həqiqi funksiyalar (ölçülər) arasındakı əlaqənin öyrənilməsi təşkil edir.

$\mathscr{P}$ çoxluğuna daxil olan operatorlar $P^* = P = P^2$ şərtlərilə xarakterizə olunur. $\mathscr{P}$ çoxluğu isə Q. - k. e. n.-ndə hadisələr cəbri kimi anlaşılır. Hər bir $P \in \mathscr{P}$ proyektoru üçün tamamlayıcı $P^{\perp} = \mathbf{I} - P$ proyektoru təyin olunmuşdur, proyektorların ixtiyari $\{P_\alpha\}$ sistemi üçün isə dəqiq yuxarı $\underset{\alpha}{\wedge} P_\alpha$ sərhədi (aşağı sərhəd) vardır. $\vee$, $\wedge$, $\perp$ əməlləri adi ikilik münasibətlərilə əlaqəlidirlər, yəni: $(\underset{\alpha}{\vee} P_\alpha)^{\perp} = \underset{\alpha}{\wedge} P_\alpha^{\perp}$, $(\underset{\alpha}{\wedge} P_\alpha)^{\perp} = \underset{\alpha}{\vee} P_\alpha^{\perp}$, lakin distributivlik qanunu: $(P_1 \vee P_2) \wedge Q = (P_1 \wedge Q) \vee (P_2 \wedge Q)$, ümumiyyətlə, ödənilmir. Belə əməllər təyin olunan qismən nizamlanmış abstrakt çoxluq – m ə n t i q adlanır. $\mathscr{P}$ çoxluğunda verilmiş həqiqi mənfi olmayan μ funksiyası:

1) $\mu(\underset{i}{\vee} P_i) = \sum_i \mu(P_i)$ bərabərliyi cüt-cüt ortoqonal $P_i \in \mathscr{P}$ proyektorlarının ixtiyari $\{P_i\}$ sistemi üçün ödənilirsə,

2) $\mu(\mathbf{I}) = 1$ kimi xassələrə malikdirsə, onda μ – ö l ç ü (ehtimal ölçüsü) adlanır.

$\mathscr{P}$ çoxluğunda verilmiş ölçü birqiymətli olaraq, $\mathfrak{A}$ Neyman cəbrində hər hansı normal vəziyyətə qədər davam olunur, lakin əvvəlcədən davamolunmanın qeyri – mümkün olduğu halların müəyyən sinfi istisna olunur (bax, *Qlison teoremi*).

Q. – k. e. n.-nin problematikasında limit teoremləri mühüm yer tutur. Bu teoremlərdə $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ kimi cəmlərin $n \to \infty$ olduqda asimptotik xassələri araşdırılır; A_k-lar müəyyən xətti özü-özünə qoşma operatorlardır və bu operatorlar normal vəziyyəti seçilmiş olan verilmiş $\mathfrak{A}$ cəbrinə daxildirlər. Burada mərkəzi limit teoreminə, erqodik teoremlərə, şərti riyazi gözləmələrin yığılmasına, böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununa aid nəticələr alınmışdır. Bunlara operator cəbrlərində təsir edən Markov inikaslarının requlyarlığı üzrə nəticələri də əlavə etmək düzgün olardı.

M ə r k ə z i l i m i t t e o r e m i. $\mathscr{H}$ Hilbert fəzası $\langle \cdot \rangle$ vəziyyəti və $A_1, A_2, \ldots$ xətti məhdud, özü-özünə qoşma operatorlarının verildiyi fərz olunur.

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (A_k - \langle A_k \rangle \mathbf{I})$$

operatoru üçün paylanma funksiyası $F_n(x)$ -ə baxılır. Operatorlar üzərinə qoyulan əsas tələb onların «zəif» asılılıq şərtidir. Belə asılılığın mümkün variantlarından biri (R o z e n b l a t t ş ə r t i) aşağıdakı kimidir. $\mathscr{H}$ -da məhdud, xətti özü-özünə qoşma operatorların verilmiş M sistemi üçün

$$T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_{i1} A_{i2}, \ldots, A_{im_i}$$

şəklində operatorlar çoxluğu $\mathfrak{A}(M)$ ilə işarə olunur, burada $A_{ij} = M \cup \{I\}$, λ – skalyarlardır.

$$\alpha(n) = \sup_{A,B} \|A\|^{-1} \|B\|^{-1} |\langle A, B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle|$$

kəmiyyətlərinə baxılır, burada $A \in \mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_k)$, $B \in \mathfrak{A}(A_{k+n+1}, \ldots)$, $\|\cdot\|$ – operatorun normasıdır və fərz olunur ki, $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$. Rozenblatt şərti qeyd olunmuş şəkildə («zəif» asılılıq) birölçülü sistemlərin limit Gibbs vəziyyətləri üçün bir sıra hallarda ödənilir (çoxölçülü sistemlərdə digər növ zəif asılılıq olur). $F_n(x)$ paylanmalarının araşdırılmasında digər mühüm xarakteristika $\beta_n = \sup_{|i-j| \geq n} \|A_i A_j - A_j A_i\|$ kəmiyyətidir. α_n və β_n kəmiyyətlərinin azalma sürəti üzərinə qoyulan müəyyən tələblərlə (eyni zamanda A_k operatoru üçün bəzi təbii fərziyyələrlə) hökm etmək olar ki, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$, burada $\Phi(x)$ – normal paylanma funksiyasıdır. Klassik limit teoremlərində olduğu kimi, burada da əsas isbat metodu xarakteristik funksiyalar metodu və bir də bu metoda yaxın Laplas çevirmələri metodudur. Verilmiş özü-özünə qoşma A operatorunun paylanmasının xarakteristik funksiyasını

$$\varphi(t) = \langle \exp(itA) \rangle, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

düsturu ilə hesablamaq olar. Operatorlar cəmləri üçün xarakteristik funksiyaların analizində operatorun eksponenti üçün

$$\exp(A + B) = \lim_{m\to\infty} [\exp(m^{-1}A) \exp(m^{-1}B)]^m$$

– Li – Trotter – Kato düsturundan istifadə olunur. Mərkəzi limit teoremi bəzi qeyri – məhdud operatorlar üçün də ifadə olunmuşdur; xüsusi halda, kvant statistik mexanikasının kəsilməz sistemlərinin enerji operatoru üçün sistemin əsas parametrlərinin müəyyən dəyişmə oblastlarında bu teorem isbat olunmuşdur.

M a r k o v i n i k a s l a r ı ü ç ü n e r q o d i k t e o r e m l ə r. $\mathfrak{A}$ – Neyman cəbrinə baxılır. Bu cəbrdə $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq 0$ xassəsinə malik $\langle \cdot \rangle$ normal vəziyyəti verilir. 1) $\mathbf{T}(\mathbf{I}) = 1$; 2) Yalnız $A \geq 0$ olduqda, $\mathbf{T}(A) \geq 0$ xassələrinə malik olan $\mathbf{T} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ xətti inikasına baxılır. Qeyri – kommutativ erqodik teoremlər $\mathbf{T}^n$ iterasiyalarının asimptotikasını və $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{T}^m$ Çezaro orta qiymətlərini, $n \to \infty$ olduqda öyrənir. Yığılmanın əsas növləri L^1 və L^2 fəzalarının normaya görə yığılması və eyni zamanda sanki hər yerdə yığılmadır: əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $E \in \mathfrak{A}$ proyektoru göstərmək olarsa ki, $\langle \mathbf{I} - E \rangle < \varepsilon$ və $\lim_{n\to\infty} \|(A_n - A)E\| = 0$ şərtləri ödənilsin (kommutativ halda Yeqorov teoreminə əsasən, bu sanki hər yerdə yığılma ilə üst-üstə düşür), onda $A_n \in \mathfrak{A}$ operatorları $A \in \mathfrak{A}$ operatoruna sanki hər yerdə yığılır, deyilir. İxtiyari $A \in \mathfrak{A}$ üçün $\langle \mathbf{T}(A) \rangle = \langle A \rangle$ olarsa, isbat olunmuşdur ki, $\sigma_n(A)$ orta qiymətləri müəyyən bir $\hat{A} \in \mathfrak{A}$ operatoruna orta və sanki hər yerdə yığılır (statistik və individual erqodik teoremlər). $\mathbf{T}^n$ iterasiyalarının orta yığılmasını təmin edən sadə şərt (requlyarlıq) aşağıdakı kimidir (klassik zəncirlər üçün Markov şərtinin analoqu): elə $\nu \in L^1$ vəziyyəti və $\delta > 0$ ədədini göstərmək mümkündür ki, hər

bir $\mu \in L^1$ vəziyyəti üçün $\mu(\mathbf{T}(A)) \geq \delta\nu(A)$ bərabərsizliyi bütün $A \in \mathfrak{A}$, $A \geq 0$ operatorları üçün ödənilir.

Şərti riyazi gözləmələr və onlar üçün yığılma. $\mathfrak{A}$ və $\mathfrak{B}$ – Neyman cəbrləri, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\langle \cdot \rangle$, – $\mathfrak{A}$ cəbrində dəqiq normal vəziyyət olsun. $\mathfrak{B}$-də $\mathfrak{A}$-dan olan şərti riyazi gözləmə –

1) $A \geq 0$ olduqda $\varphi(A) \geq 0$;

2) bütün $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ üçün $\langle AB \rangle = \langle \varphi(A)B \rangle$

xassələrinə malik olan $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ xətti məhdud inikasa deyilir. Şərti riyazi gözləmə, verilmiş $\langle \cdot \rangle$ vəziyyətində, ixtiyari $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ altcəbri üçün təyin olunmamışdır, lakin bununla belə, elə misallar vardır ki, bunlarda şərti riyazi gözləmələr vardır. Məs., $\langle \cdot \rangle$ – kvazilokal müşahidələnənlər cəbrində prodakt – vəziyyətdirsə, Λ – sonlu altçoxluqdursa, onda $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(\Lambda)$ şərti riyazi gözləməsi vardır. Martinqal anlayışının və uyğun yığılma teoremlərinin qeyri – kommutativ ümumiləşmələri də məlumdur.

Qeyri – kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox sualları normalanmış Jordan cəbrləri (bu cəbrlər kommutativ olub, assosiativ deyildirlər) üçün araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Neumann J. von, Birkhoff G., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 823–43; [2] Segal I., «Ann. Math.», 1953, v. 57, p. 401–57; [3] Морозова Е. А., Ченцов Н. Н., Матрицы вероятностей и стохастическиематрицы, М., 1973 (Препринт. ИПМ АН СССР); [4] Синай Я. Г., Аншелевич В. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 151–67; [5] Шерстнев А. Н., «Изв. вузов. Математика», 1982, № 8, с. 20–35; [6] Браттели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982; [7] Сарымсаков Т. А., Введение в квантовую теорию вероятностей, Таш., 1985; [8] Jajte R., Strong limit theorems in noncommutative probability, B. – [a. o.], 1985; [9] Goldstein M. S., «J. Statist. Phys.», 1985, v. 40, p. 329–60.

QEYRİ – KOMMUTATİV İNTEQRALLAMA NƏZƏRİYYƏSİ « некоммутативная теория интегрирования; noncommutative integration theory » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

QEYRİ – KORRELYAR TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « некоррелированные случайные величины; uncorrelated random variables » – ikinci tərtib həqiqi və ya kompleks elə ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətləridir ki, $\mathbf{M}\xi_1\bar{\xi}_2 = \mathbf{M}\xi_1 \mathbf{M}\bar{\xi}_2$. Əgər ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin orta qiymətləri sıfra bərabər olarsa, onda qeyri – korrelyarlıq ortoqonallığa ekvivalentdir. Əgər ξ_1 və ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda bu təsadüfi kəmiyyətlər qeyri – korrelyardırlar. Tərsi həmişə doğru deyildir, lakin iki mühüm halda tərsi də doğru olur. Birincisi, ξ_1 və ξ_2 ikidən artıq qiymət almayan və qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda onlar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. İkincisi, əgər $(\xi_1, ..., \xi_n)$ $\mathbb{R}^n$-də Qauss təsadüfi vektorudursa və $\xi_1, ..., \xi_n$ cüt-cüt qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi_1, ..., \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Cüt-cüt Q. – k. t. k. cəminin dispersiyası toplananların dispersiyaları cəminə bərabərdir.

QEYRİ – METRİK ÇOXÖLÇÜLÜ ŞKALLANMA « неметрическое многомерное шкалирование; nonmetric multidimensional scaling » – bax, *Çoxölçülü şkallanma.*

QEYRİ – MƏHDUD TƏSADÜFİ DOLAŞMA « неограниченное случайное блуждание; unbounded random walk » – bax, *Təsadüfi dolaşma.*

QEYRİ – MƏXSUSİ PAYLANMA « несобственное распределение; improper distribution » – bax, *Cırlaşmayan paylanma*, məxsusi paylanma.

QEYRİ – MƏQBUL STATİSTİK QİYMƏT « недопустимая оценка; inadmissible estimator » – bax, *Statistik qiymətləndirmə.*

QEYRİ – MƏNFİ / MƏNFİ OLMAYAN MÜƏYYƏN FUNKSİYA « неотрицательно определенная функция; positive semi – definite / nonnegative definite function » – bax, *Müsbət müəyyən funksiya.*

QEYRİ – MƏRKƏZİ Xİ – KVADRAT PAYLANMA « нецентральное хи – квадрат распределение; noncentral chi squared distribution », qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanma, – paylanmasının sıxlığı

$$p(x) = \frac{e^{-(x+\lambda)/2}\, x^{(n-2)/2}}{2^{n/2}\,\Gamma(1/2)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 x^2}{(2r)!} \frac{\Gamma(1/2 + r)}{\Gamma(n/2 + r)}$$

düsturu ilə verilən, $(0, \infty)$-da topalanmış, kəsilməz ehtimal *paylanmasıdır*, burada r – sərbəstlik dərəcəsi sayı, λ – qeyri – mərkəzilik parametridir. $\lambda = 0$ olduqda, bu sıxlıq adi (mərkəzi) χ^2 – paylanmanın sıxlığı ilə üst-üstə düşür. Bu paylanmanın riyazi gözləməsi $n + \lambda$, dispersiyası $2(n + 2\lambda)$-ya, xarakteristik funksiyası $f(t) = (1 - 2it)^{-n/2} \exp\{\lambda it/(1 - 2it)\}$-yə bərabərdir. Q. – m. xi – k. p. *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfindəndir.

Q. – m. xi – k. p., adətən, dispersiyaları vahid, orta qiymətləri sıfırdan fərqli m_i-yə bərabər normal qanunla paylanmış, asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin paylanması kimi yaranır. Daha dəqiq, $X_1^2 + ... + X_n^2$ cəmi sərbəstlik dərəcəsi sayı n-ə bərabər, qeyri – mərkəzilik parametri isə $\lambda = m_1^2 + ... + m_n^2$ olan Q. – m. xi – k. p. qanununa tabedir. Sonlu sayda qarşılıqlı asılı olmayan Q. – m. xi – k. p.-ya tabe təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi bu tip paylanma qanununa tabedir, onun parametrləri məhz toplananların uyğun parametrlərinin cəminə bərabərdir.

Əgər n cüt olarsa, onda Q. – m. xi – k. p.-nın paylanma funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$F_n(x; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{n}{2} \frac{(\lambda/2)^m\, (x/2)^k}{m!\; k!}\, e^{-(\lambda+x)/2}.$$

Bu düsturla Q. – m. xi – k. p. ilə Puasson paylanması arasında əlaqə ifadə olunur. Doğrudan da, əgər X və Y uyğun olaraq, $x/2$ və $\lambda/2$ parametrlərli Puasson paylanması ilə paylanmış-

larsa, onda $\mathbf{P}\{X - Y \geq s\} = F_{2s}(x; \lambda)$ bərabərliyi ixtiyari tam $s > 0$ üçün ödənilir.

Q. – m. xi – k. p. əksər hallarda, xi – kvadrat tipli kriterilərin güclərinin araşdırılmasına aid riyazi statistika məsələlərində yaranır. Q. – m. xi – k. p. üçün tərtib olunmuş cədvəllər kifayət qədər tam olmadığından, χ^2 – paylanma və normal paylanmanın köməyilə müxtəlif yaxınlaşmalardan istifadə olunur.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., M., 1983; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., M., 1973; [3] Patnaik P., «Biometrika», 1949, v. 36, p. 202.

QEYRİ – MƏRKƏZİ T^2 – PAYLANMA « нецентральное T^2 – распределение; noncentral T^2 – distribution » – bax, *Hotellinq T^2 – paylanması*.

QEYRİ – MƏRKƏZİ χ^2 – PAYLANMA « нецентральное χ^2 – распределение; noncentral χ^2 – distribution » – bax, *Qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma*.

QEYRİ – MƏRKƏZİLİK PARAMETRİ « нецентральности параметр; noncentrality parameter » – bax, *Qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma*.

QEYRİ – MƏRKƏZİLİK PARAMETRİ xi–kvadrat kriterisinin **« нецентральности параметр** хи–квадрат критерия; **noncentrality parameter** of chi squared test**»** *– xi – kvadrat kriterisinin* artan güc funksiyasıdır. Əgər $X_k \sim \mathbb{N}(a_k, 1)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və $\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ olarsa, onda $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ cəmi sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər və Q. – m. p. Δ olan χ^2 – paylanma qanununa tabedir.

$$y_i = g^{\mathsf{T}}(x_i)\,\varphi + f^{\mathsf{T}}(x_i)\theta + \varepsilon_i, \quad \varphi \in \mathbb{R}^q, \ \theta \in \mathbb{R}^p$$

reqression eksperimenti üçün $\varepsilon_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$ asılı olmayan xətalar olduğu halda, $\varphi = 0$ hipotezinin χ^2 – kriterisi ilə yoxlanılması məsələsində Q. – m. p. Δ üçün iki ifadə vardır:

$$\sigma^2\Delta = \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{N} (g^{\mathsf{T}}(x_i)\varphi + f^{\mathsf{T}}(x_i)\,\theta)^2, \ X = \{x_1, ..., x_N\},$$

və

$$\Delta(X, \varphi) = \varphi^{\mathsf{T}} D^{-1}(X)\varphi,$$

burada $D(X) = M_g - M_{fg}^{\mathsf{T}} M_f^{-1} M_{fg}$ və M_f^{-1}-in varlığı fərz olunur. Burada

$$M_f = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) f^{\mathsf{T}}(x_i), \quad M_g = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) g^{\mathsf{T}}(x_i),$$

$$M_{fg} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) g^{\mathsf{T}}(x_i).$$

F –kriteri və χ^2 – kriterinin Q. – m. p. üst-üstə düşür. $\Delta(X, \varphi)$ -nin X seçilməsi ilə bağlı maksimizasiyası haqqında «*Diskriminəedici eksperimentlərin planlaşdırılması*» məqaləsinə bax.

QEYRİ – MÜƏYYƏNLİKLƏR MÜNASİBƏTİ « неопределенностей соотношение; uncertainties relation » – ixtiyari S vəziyyətində iki kvant X və Y *müşahidələnənlərinin* dispersiyalarını (qeyri – müəyyənlikləri) əlaqələndirən fundamental bərabərsizlikdir. Bu bərabərsizlik

$$\mathbf{D}_S\{X\}\,\mathbf{D}_S\{Y\} \geq \frac{1}{4}\left|\mathbf{M}_S\{i\}\,[X, Y]\right|^2$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $\mathbf{D}_S\{X\}$, $\mathbf{D}_S\{Y\}$ – dispersiyalar, $[X, Y] = XY - YX$ isə X və Y müşahidələnənlərinin kommutatorudur. Q. – m. m. onu ifadə edir ki, məs., elə kvant vəziyyəti yoxdur ki, bu vəziyyətdə bütün müşahidələnənlərin dəqiq müəyyən qiyməti olsun. Bu fakt da onu göstərir ki, kvant statistikası klassik statistikadan prinsipial olaraq fərqlənir. Q. – m. m. tamamlanma prinsipini kəmiyyətcə ifadə edir. Mikroobyektlər üzərində fiziki ölçmələr, hər biri makroskopik fəza-zaman mühitinin mürəkkəb özünəməxsus təşkilini verən eksperimental qurğular vasitəsilə aparılır. Belə təşkilolunmaların yerinə yetirilməsinin müxtəlif qaydaları eyni bir mikrobyektə aid olmalarına baxmayaraq, ümumiyyətlə, bir-birini istisna edir, yəni bu qaydalar bir-birini tamamlayır. Bu vəziyyət riyazi formalizmdə öz əksini tapır və uyğun X və Y müşahidələnənləri qeyri – kommutativ operatorlarla təsvir olunur. Belə müşahidələnənlər üçün həmişə elə S vəziyyəti tapılır ki, bu vəziyyətdə Q. – m. m.-nin sağ tərəfi ciddi müsbətdir. Əlavə müşahidələnənlərin kanonik misalı kvant obyektinin vəziyyəti və sürətini təyin edir.

QEYRİ – MÜHÜM VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin **« несущественное состояние** цепи Маркова; **nonessential state** of a Markov chain**»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYRİ – MÜHÜM VƏZİYYƏTLƏR SİNFİ Markov zəncirinin **« несущественный класс состояний** цепи Маркова; **nonessential set of states** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYRİ – MÜMKÜN HADİSƏ « невозможное событие; impossible event » – müəyyən şərtlər kompleksi ödənilməklə heç bir halda baş verməyən hadisədir. Əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasıdırsa, onda Q. – m. h. elə $\varnothing \in \mathscr{A}$ hadisəsidir ki, $\omega \in \Omega$ elementar hadisələrinin heç biri ilə baş vermir (çoxluqlar nəzəriyyəsində boş çoxluq). Q. – m. h. baxılan ehtimal modelində Ω *yəqin hadisəsinə* əks hadisədir (çoxluqlar nəzəriyyəsində tamamlayıcı çoxluqdur) və buna görə də, Q. – m. h.-nin ehtimalı sıfra bərabər götürülür: $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Bax, *Hadisələr cəbri.*

QEYRİ – MÜNTƏZƏM KOD « неравномерный код; variable length code » – qeyri – müntəzəm giriş və ya çıxış kod çoxluğuna (bax, aşağı) malik *koddur*. Məlumatlar mənbəinin kodlaşdırılmasında kodlaşdırmanın doğurduğu ardıcıllıq müəyyən giriş prefiks çoxluğu (yəni heç bir söz digər sözün başlanğıcı olmayan bir çoxluq) əmələ gətirən sözlərə ayrılır. Kodlama bu sözlərin digər çıxış prefiks çoxluğunun sözlərilə əvəz olunmasından ibarətdir. Əgər giriş (və ya çıxış) çoxluğunun bütün sözlərinin uzunluqları bərabər olarsa, belə çoxluq müntəzəm və ya blok çoxluq, əks halda qeyri–müntəzəm çoxluq adlanır. Kod uyğun olaraq, giriş və ya çıxış üzrə müntəzəm və ya qeyri–müntəzəm kod adlanır. Giriş və çıxış üzrə Q. – m. k.-ların dəyəri

yalnız giriş üzrə müntəzəm kodlarla müqayisədə az kodlama dəyərinə malik olur. Giriş üzrə qeyri – müntəzəm, çıxış üzrə isə müntəzəm dəyərlərli mənbənin entropiyasına olduqca yaxın kodlar mövcuddur.

Əd.: [1] Ходак Г. Л., Проблемы передачи информации, 1972, т. 8, № 2, с. 21–32.

QEYRİ – PARAMETRİK DİSKRİMİNANT ANALİZ « непараметрический дискриминантный анализ; nonparametric discriminant analysis », qeyri–parametrik təsnifat, – *qeyri – parametrik reqression analizin* elə bölməsidir ki, burada Y asılı dəyişəninin qiymətləri sonlu $\{1, ..., N\}$ çoxluğundandır. $1, ..., N$ ədədləri siniflərin nömrələri kimi interpretasiya olunur.

$X \in \mathbb{R}^d$ – təsadüfi vektor olsun, $Z_n = ((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$, – (X, Y) cütünün n sayda asılı olmayan realizasiyaları seçimidir. Q. – p. d. a.-in məsələsi Z_n seçimi üzrə $x \in \mathbb{R}^d$ vektoruna $\{1, ..., N\}$ çoxluğunun uyğun elementini qarşı qoyan T_n həlledici qaydasını qurmaqdır. Q. – p. d. a. diskriminant analizdən onunla seçilir ki, T_n həlli (X, Y) cütünün paylanmasının hər hansı parametrik ailədən olması fərziyyəsinə əsaslanmır. Obrazların müəyyən edilməsinin statistik nəzəriyyəsində (rus. статистическая теория распознавания образов) Q. – p. d. a. məsələsi müəllimlə öyrənmə məsələsi adlanır, X_i – əlamətlər toplusu, Y_i – müəllimin göstərişləri, Z_n – öyrədən seçim, x nəzarət seçimi (bu halda bir elementdən ibarətdir) adlandırılır.

Həlledici qaydanın dəqiqliyi xətanın şərti ehtimalı $P_n = \mathbf{P}\{T_n(x) = Y \mid Z_n\}$ ilə ölçülür, belə ki, həmişə sanki yəqin $P_n \geq P^* = \min_T \mathbf{P}\{T(X) = Y\}$ münasibəti ödənilir, burada minimum bütün ölçülən $T : \mathbb{R}^d \to \{1, ..., N\}$ funksiyaları üzrə götürülür və bu minimum

$$T^*(x) = \arg \max_{i=1, ..., N} \mathbf{P}\{Y = i \mid X = x\}$$

Beyes həlledici qaydasından alınır.

P^* kəmiyyəti Beyes riski adlanır. Əgər $P_n \to P^*$ $(n \to \infty)$ münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, həlledici qayda asimptotik optimal həlledici qayda adlanır. Asimptotik həlledici qaydalar

$$T_n(x) = \arg \max_{i=1, ..., N} \hat{\mathbf{P}}_n \{Y = i \mid X = x\}$$

şəklində axtarılır, burada $\hat{\mathbf{P}}_n$, – $\mathbf{P}\{Y = i \mid X = x\}$ ehtimalının Z_n seçimi üzrə qurulmuş olduqca yaxşı statistik qiymətidir. Belə $\hat{\mathbf{P}}_n$ statistik qiymətlərinin qurulması metodları X təsadüfi vektorunun paylanmasının sıxlıq funksiyasının və $Y = i$-in $i = 1, ..., N$ qeyd olunmuş qiymətində X-in şərti paylanma sıxlığının varlığı halında yaxşı işlənilmişdir (bax, [1], fəsil 10).

Əd.: [1] Девroй Л., Дьерфи Л., Непараметрическое оценивание плотности. L_1 – подход, пер. с англ., М., 1988.

QEYRİ – PARAMETRİK İNFORMASİON MİQDAR « непараметрическое информационное количество; nonparametric Fisher information » – bax, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə.*

QEYRİ – PARAMETRİK KRİTERİ « непараметрический критерий; nonparametric test » – $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı irəli sürülmüş $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ hipotezinin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*; bu zaman H_1-ə qarşı H_0 hipotezinin statistik yoxlanılması məsələsinin qeyri – parametrik olduğu, yəni Θ_0 və Θ_1 parametrik çoxluqlarından heç olmazsa birinin Evklid fəzasının altçoxluğuna topoloji ekvivalent olmadığı nəzərdə tutulur. Bu təriflə yanaşı geniş yayılmış digər tərifə görə statistik kriteri qeyri–parametrik kriteri o halda adlandırılır ki, bu kriterinin tətbiqi ilə alınmış statistik nəticələr təsadüfi kəmiyyətlərin müşahidələri nəticəsində H_1-ə qarşı H_0 hipotezini yoxladıqda ehtimal paylanmalarından asılı olmasın. Bu halda «Q. – p. k.» termini əvəzinə «paylanmadan asılı olmayan kriteri» termini də istifadə olunur.

Əsas qeyri – parametrik statistik məsələlərdən biri ilkin $F(x)$ paylanma funksiyasının verildiyi fərz olunduğu halda (hipotezində) seçimi verilənlərin bu hipotezlə uzlaşıb-uzlaşmadığının yoxlanılması haqqında məsələdir. Əgər ilkin $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməz olarsa və onun limit paylanması məlum olarsa, Q. – p. k. kimi

$$\sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} \{ \left| F_n(x) - F(x) \right| \}$$

Kolmoqorov statistikasından istifadə olunur, bu statistikanın paylanması $F(x)$-in tipindən asılı deyildir;

Mühümlük ölçüsü məlum olduqda kriterinin kritik oblastı

$$\sqrt{n} D_n \geq d_\alpha$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur, burada d_α – Kolmoqorov limit paylanmasının kvantilidir, $1 - K(d_\alpha) = \alpha$.

Statistik verilənlərin bircinsliyinin yoxlanılması məsələsi aşağıdakı kimi qoyulur. Asılı olmayan müşahidələrin iki $x_1, x_2, ..., x_n$ və $y_1, y_2, ..., y_n$ seriyası əsasında, hər iki seriyada müşahidə nəticələrinin eyni $F(x)$ paylanma funksiyasına malik təsadüfi kəmiyyət üzərində aparılan sınaqlar nəticəsində alındığı haqqında hipotezi yoxlamaq tələb olunur. Əgər ilkin $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməzdirsə, onda seçimi verilənlərin bircinsliyi kriterisi kimi paylanması $F(x)$ funksiyasının tipindən asılı olmayan Smirnov kriterisi –

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \max_{-\infty < x < \infty} \left| F_n(x) - F_m(x) \right|$$

istifadə olunur, burada $F_n(x)$ və $F_m(x)$ – müşahidələrin birinci və ikinci seriyalarının uyğun empirik paylanma funksiyalarıdır. Kriterinin bircinslik kritik oblastı

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \geq d_\alpha$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur, burada d_α, – n və m-in kiçik qiymətlərində Smirnov statistikası paylanmasının kvantili, n və m-in böyük qiymətlərində $1 - K(d_\alpha) = \alpha$ Smirnov kriterisinin limit paylanmasının kvantilidir. Xüsusi halda, seçimlərin həcmi

bərabər olduqda (yəni $m = n$), Smirnov statistikasının dəqiq paylanması olduqca sadə ifadəyə malikdir.

Qaydalı qeyri – parametrik kriterilər variasion sıranın hədlərinin konkret qiymətlərindən asılı olmayan variasion sıranın statistikaları üzrə qurulur.

Vald – Volfovits seriyalar kriterisi birinci və ikinci seçimlərin müşahidə olunan qiymətlərinin ümumi $z_1 \le z_2 \le ... \le z_{n+m}$ variasion sırasında seriyalar sayı u_{mn} statistikasına əsaslanır, burada hər bir z_k -ya x_{ik} və ya y_{ik} müşahidələnən nəticələrindən biri uyğun olur.

u_{mn} statistikasının paylanması ilkin paylanma funksiyası $F(x)$ -dən asılı deyildir, doğrudan da

$$u_{nm} = \sum_{k=1}^{n+m} v_k$$

ifadəsindən bu aydındır, burada v_k – asılı olmayan 0 və 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan təsadüfi kəmiyyətlərdir. m və n -in böyük qiymətlərində u_{mn} statistikasının paylanması riyazi gözləməsi $mn/2$ və dispersiyası $\frac{nm}{2}(n+m+1)$ -ə bərabər olan asimptotik normal paylanmadır. m qeyd olunmuş ədəd və $n \to \infty$ olduqda u_{mn}/n statistikası limitdə $u_m = \sum_{i=1}^{m} w_i$ təsadüfi kəmiyyətinin paylandığı qanunla paylanır, burada w_i , – $(0, 1)$ intervalında müntəzəm paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Bax, *Riyazi statistika*; qeyri–parametrik metodlar; *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*; *Xi – kvadrat kriteri.*

Əd.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A guide to chi-sfuared testing, N. Y., 1996.

QEYRİ – PARAMETRİK QİYMƏTLƏNDİRİLMƏ(si) ehtimal sıxlığının « **непараметрическое оценивание** плотности вероятности; **nonparametric estimation** of probability density » – sıxlığın strukturu məlum olmadıqda *statistik qiymətləndirmədir.* Q. – p. q. metodlarının bəziləri ehtimal sıxlığı haqqında aprior informasiya tamamilə bəlli olmadığı halda belə istifadə oluna bilinir. Məs., sıxlığın Q. – p. q. həlledici qaydanın qurulması üçün doğruyaoxşarlıq nisbətini tətbiq etmək tələb olunduğu halda müşahidələrin təsnifi məsələlərinin həllində istifadə olunur.

$x_1, ..., x_n$ – hər hansı m – ölçülü X təsadüfi kəmiyyətinin müşahidəsində alınmış, asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış müşahidə nəticələri olsun. Paylanma sıxlığının statistik qiyməti

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h^m} k\big((x - x_i)/h\big) =$$

$$= \int \frac{1}{h^m} k\big((x - X)/h\big)\, d\,\hat{\mathbf{P}}(X)$$

münasibəti ilə təyin olunur, burada h – hər hansı ədəd, $h_k^{-1}(y/h)$ – statistik qiymətin nüvəsidir.

Ümumi halda $\hat{p}(x)$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m} h_j\right)^{-1} k((x_1 - x_{1i})/h_1, ..., (x_n - x_{ni})/h_m).$$

Beləliklə, ehtimal sıxlığının qiymətləndirilməsi məsələsi h ədədinin və $k(y/h)$ nüvəsinin seçilməsi məsələsinə gətirilə bilinər. Əgər $k(y/h)$ funksiyası və h

$$\int k(y/h)dy/h^m = \int k(z)dz = 1,$$

$$\int \big|k(y/h)\big|dy/h^m = \int \big|k(z)\big|dz < \infty,$$

$$\sup_y \big|k(y/h)\big| = \sup_z \big|k(z)\big| < \infty,$$

$$\lim_{y/h} \big|(y/h)k(y/h)\big| = \lim_{z_i \to \infty} \big|k(z)\big| = 0$$

şərtlərini; asimptotik meylsizlik şərti – $\lim_{n\to\infty} h^m = 0$ münasibətini; $\lim_{n\to\infty} nh^m = \infty$ tutarlılıq şərtini və $\lim_{n\to\infty} nh^{2m} = \infty$ müntəzəm yığılma şərtini ödəyərlərsə, $\hat{p}(x)$ tutarlı və asimptotik meylsiz statistik qiymətdir.

Əd.: [1] Фукунага К., Введение в статистическую теорию распознавания образов, пер. с англ., М., 1979.

QEYRİ – PARAMETRİK QİYMƏTLƏNDİRMƏ « непараметрическое оценивание; nonparametric estimation » – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsinin sonluölçülü parametrin qiymətləndirilməsi və ya sonsuzölçülü *əngəlləyici parametrin* varlığı halında sonluölçülü parametrin qiymətləndirilməsi ilə bağlı bir bölməsidir. Q. – p. q. prosedurları xüsusi hallar üçün hələ A. Lejandr (A. Legendre), K. Qauss (C. Gauss) və P. Laplas (P. Laplace) tərəfindən öyrənilmişdir. B. İ. Qlivenko, R. Mizes (R. Mises), A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov 20-ci əsrin 30-cu illərində empirik paylanmaların analizi ilə bağlı olduqca mühüm nəticələr almışlar. Paylanma sıxlığı üçün bəzi statistik qiymətlər, müşahidələr üzrə qiymətlərin (*histoqram*, *tezliklər poliqonu*) çoxdan məlum olmasına baxmayaraq, belə qiymətləndirmələr 20-ci əsrin 50-ci illərindən başlayaraq N. V. Smirnov, M. Rozenblatt (M. Rosenblatt) və N. N. Çentsov tərəfindən sistematik surətdə öyrənilməyə başlanılmışdır.

Q. – p. q.-nin ən tipik nəticələri və metodları statistik eksperimentlərin aşağıdakı ən mühüm modellərində illüstrasiya olunur.

Model 1. Paylanma funksiyası naməlum $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ olan asılı olmayan $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri toplusu müşahidə olunur.

Model 2. Spektral funksiyası naməlum $F(\lambda)$, $|\lambda| \le \pi$ olan stasionar Qauss təsadüfi ardıcıllığının parçası $Y_1, ..., Y_n$ müşahidə olunur.

Model 3. İntensivliyi ε^2 ($\varepsilon \to 0$) olan Qauss bəyaz küyü ilə qarışıqda naməlum $f(t)$, $0 \le t \le 1$ siqnalı, yəni

$$X_\varepsilon(t) = F(t) + \varepsilon w(t), \quad F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

müşahidə olunur, burada $w(t)$ – standart Viner prosesidir.

Bundan sonra bu modellərin bəzi tip məsələlərinə baxılır.

I. Naməlum qanunun zəif topologiyada qiymətləndirilməsi. Model 1-də $F(x)$-in, model 2-də $F(\lambda)$-nın, model 3-də $F(t)$-nin qiymətləndirilmə məsələsi üçün olduqca ümumi şərtlərdə güclü mənada (uyğun olaraq $n \to \infty$ və $\varepsilon \to \infty$ olduqda) tutarlı statistik qiymətlərin varlığı səciyyəvidir. Bundan başqa, bu məsələlər üçün təbii mənada yaxşılaşa bilinməyən və bir qayda olaraq, yaxşı öyrənilmiş sadə statistik qiymətlər vardır. $F(x)$ üçün belə statistik qiymət seçimi empirik paylanma funksiyası $F_n(x) = n^{-1} I_{(-\infty, x)}(X_i)$-dir, $F(\lambda)$ üçün $I_n(\lambda)$ periodoqramının inteqralı, yəni

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi}^{\lambda} \left| \sum_{k=1}^{n} Y_k e^{-isk} \right|^2 ds = \int_{-\pi}^{\lambda} I_n(s)\, ds$$

düsturu ilə ifadə olunan statistik qiymətdir. $F(t)$ üçün $X_\varepsilon(t)$-nin statistik qiymətini götürmək təbiidir.

Bu misallarda $\sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x))$, $\sqrt{n}\,(F_n(\lambda) - F(\lambda))$ normalanmış fərqlərinin paylanmaları $n \to \infty$ olduqda asimptotik olaraq orta qiymətləri sıfra bərabər, korrelyasion funksiyaları

$$F(x \wedge y) - F(x)\,F(y), \quad 2\pi \int_{0}^{\lambda \wedge \mu} (F'(s))^2\, ds$$

olan Qauss təsadüfi prosesinin paylanmalarına yığılır, burada $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\varepsilon^{-1}(X_s(t) - F(t)) = w(t)$. Bu statistik qiymətlər – asimptotik olaraq minimaks statistik qiymətlərdir. $\alpha_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ prosesinin limit Qauss prosesi ilə [Braun körpüsü və ya Kifer prosesi ([1]) adlandırılan proseslə] yaxınlaşma keyfiyyəti və $\sup_x |\alpha_n(x)|$ (*Kolmoqorov paylanması*) və $\int \alpha_n^2(x)\, dF(x)$ (*Smirnov paylanması*) limit paylanmaları araşdırılan geniş ədəbiyyat mövcuddur. $\alpha_n(x)$-in Qauss prosesləri ardıcıllığı ilə güclü approksimasiyası haqqında [1]-ə bax.

II. Naməlum qanunun güclü topologiyada qiymətləndirilməsi. Qeyri – requlyar qiymətləndirmə məsələlərinə mühüm misallar model 1-də $f(x) = F'(x)$ sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsi, model 2-də $f(\lambda) = F'(\lambda)$ spektral sıxlığının qiymətləndirilməsi, model 3-də $f(t)$ siqnalının qiymətləndirilməsidir. Bu məsələ riyazi fizikanın qeyri – korrekt məsələlərinə yaxındır, belə ki, modelin [yəni $F(x)$, $F(\lambda)$, $F(t)$ funksiyalarının] kiçik dəyişikliyi müntəzəm metrikada və hətta tam variasiyalı metrikada qiymətləndirilən f funksiyalarının böyük dəyişikliyinə səbəb ola bilər. Buna görə də, tutarlı qiymətləndirmənin mümkün olması üçün qiymətləndiriləcək funksiya haqqında $f \in F$ tipli əlavə aprior informasiyanın olması zəruridir (məs., ən azı müşahidə olunan F qanunu üçün sıxlığın olması kimi; bax, [2], [3]).

Bir qayda olaraq, $\mathscr{F}$-də müntəzəm tutarlı qiymətləndirmənin mümkünlüyü üçün $\mathscr{F}$ çoxluğunun uyğun funksional fəzada kompakt olması zəruridir, qiymətləndirmə dəqiqliyi isə $\mathscr{F}$-in sonluölçülü altfəzalarla yaxınlaşma keyfiyyətindən asılıdır. f sıxlığının informasion metrikada $\mathscr{F}$ çoxluğunun n – ölçülü daxili radiusu (aşağıdan) və n – ölçülü köndələni (yuxarıdan) terminlərində qiymətləndirilməsi keyfiyyətinin dəqiqliyinin qiyməti ilk dəfə N. N. Çentsov tərəfindən [3]-də verilmişdir (bax, *Nöqtəvi statistik qiymət*). Bu nəticələr digər qeyd olunmuş məsələlər və itki funksiyalarının daha ümumi sinfi üçün də ümumiləşdirilmişdir.

Qeyri – requlyar məsələlərdə qiymətləndirmə üçün daha tez-tez istifadə olunan statistik qiymətlər Rozenblatt – Parzen nüvə statistik qiymətləri və Çentsov proyeksion statistik qiymətləridir.

Nüvə statistik qiymətləri. $K(x)$ – inteqrallanan funksiya, $\int K(x)\,dx$ olsun (inteqrallama oblastı model 1-də $\mathbb{R}^1$ ədəd oxu, model 2-də $[-\pi, \pi]$, model 3-də $[0, 1]$ götürülür), h_n, $h_\varepsilon \to \infty$ – funksiyalardır ($n \to \infty$ olduqda $\varepsilon \to 0$), belə ki, $n \to \infty$ olduqda $nh_n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ olduqda $\varepsilon^{-2} h_\varepsilon \to \infty$. Model 1, 2, 3-də f-in nüvə statistik qiymətləri uyğun olaraq,

$$\left.\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{x-y}{h_n}\right) dF_n(y), \\ f_n(\lambda) &= \frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{\lambda-\mu}{h_n}\right) I_n(\lambda)\, d\lambda, \\ f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{h_\varepsilon} \int K\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) dX_\varepsilon(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

statistik qiymətlərinə deyilir (bax, [4]).

$K(x)$ funksiyası və $h_n(h_\varepsilon)$ çəki ardıcıllığını münasib surətdə seçərək (1) şəklində ifadələrin köməyilə müxtəlif $\mathscr{F}$ siniflərində elə statistik qiymətlər almaq mümkündür ki, bunlar $n \to \infty$ ($\varepsilon \to 0$) halında yığılma sürəti kəmiyyətinin tərtibilə optimal statistik qiymətə yığılır. Bu istiqamətdə tipik nəticə aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\mathscr{F}^{(\beta, L)}$ ($\beta = k + \alpha$, $0 \le \alpha \le 1$, $k \ge 0$ tam ədəddir) k dəfə differensiallanan elə f funksiyaları çoxluğu olsun ki, $f^{(k)}$ $\mathbb{R}^1$-də qüvvət üstü α və sabiti L olan Hölder şərtini ödəsin. $K(x)$-in məhdud olduğu, ∞-da olduqca tez azaldığı, $\int K\,dx = 1$ və $\int_{\mathbb{R}^1} x^j K(x)\,dx = 0$, $j = 1, \ldots, k$ şərtlərini ödədiyi fərz olunur. Onda $h_n = cn^{-1/(2\beta+1)}$ olduqda (1) statistik qiyməti $f(x)$-ə $\sim n^{-\beta/(2\beta+1)}$ sürətilə yığılır. Daha dəqiq, $x > 0$ olduqda müsbət monoton, $x \to \infty$ olduqda o qədər də sürətlə artmayan $l(x)$ funksiyası üçün

$$\sup_n \sup_{f \in \mathscr{F}^{(\beta, L)}} \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \mathbf{M}\, l(n^{\beta/(2\beta+1)} |f_n(x) - f(x)|) < \infty$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Digər tərəfdən, $\mathscr{F}^{(\beta, L)}$-in olduqca «massiv» altçoxluğunda daha yüksək sürətlə müntəzəm yığılan statistik qiymətlər mövcud deyildir (bax, [6]). Bu nəticə müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir, məs., əgər nöqtədə yayınmalar əvəzinə L^p normallarda $(2 \le p < \infty)$ itkilər ölçülərsə, bu nəticə öz qüvvəsində

qalır, lakin $p=\infty$ halında yığılma sürəti $(n/\ln n)^{\beta/(2\beta+1)}$-ə bərabər olur (bax, [4], [6], [7]). Spektral sıxlığın statistik qiyməti, bu funksiyaların törəmələrinin statistik qiymətləri, reqressiyanın statistik qiyməti üçün analoji nəticələr alınmışdır. Bəzi $\mathscr{F}$ çoxluqları üçün, itki funksiyası T_n statistik qiyməti ilə qiymətləndiriləcək funksiya fərqinin L^2 – norma kvadratı olarsa, asimptotik minimaks f_n^* statistik qiymətlərini yalnız riskin yığılma sürəti kəmiyyətinin tərtibinə görə deyil, həm də o mənada da tapmaq mümkün olur ki,

$$\frac{\inf\limits_{T_n}\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}\mathbf{M}_f\left\|T_n-f\right\|^2}{\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}\left\|f_n^*-f\right\|^2}\to 1,\quad n\to\infty \qquad (2)$$

münasibəti də ödənilir.

İlk belə statistik qiymətlər, [8]-də, Qauss küyü siqnalının qiymətləndirilməsi üçün qurulmuşdur (bax, [9]).

P r o y e k s i o n s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r. Fərz olunur ki, paylanma sıxlığı $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\varphi_i(x)\in L^2(\mu)$ funksiyalarının hər hansı ortonormalanmış sistemi üzrə sıraya ayrılmışdır, yəni $f=\sum\limits_i c_i\varphi_i$. Sıranın hədlərinin sonlu sayı N ilə məhdudlanaraq ifadələri $c_i^{(n)}=\int\varphi_i\,dF_n$ bərabərliyi ilə təyin olunan c_i Furye əmsalının hər birini qiymətləndirdikdə (bax, [4])

$$\hat{f}_{n,N}=\sum_{i=1}^{N}c_i^{(n)}\varphi_i \qquad (3)$$

statistik qiymətlər ailəsi alınır.

N-in böyüdülməsi statistik qiymətin meylinin kiçilməsinə, dispersiyasının isə böyüməsinə səbəb olur. $\mathscr{F}$-in konkret çoxluqları üçün N-i əksər hallarda elə seçmək olur ki, alınan statistik qiymət f-ə yığılma sürətinin tərtibinə görə optimal olur (bax, [2]). $\mathscr{F}$ sonsuzölçülü ellipsoid olduğu halda, [8]-də göstərilmişdir ki, (3)-də $c_i^{(n)}$ əvəzinə $\varkappa_{in}c_i^{(n)}$ kəmiyyətlərini götürdükdə və $\varkappa_{in}$ vuruqları 0 və 1 arasında olduğu halda, həm də ellipsoidin parametrlərindən asılı olduqda modifikasiya olunmuş proyeksion statistik qiymətləri üçün (2) münasibəti ödənilir. [9]-da ellipsoidin parametrlərinin əvvəlcədən məlum olmadığı halda belə statistik qiymətlərin variantı təklif olunmuşdur (yəni qiymətləndiriləcək f funksiyasının hamarlıq dərəcəsi məlum olmadıqda). [8]-də f-in qiymətləndirilməsi məsələlərinə digər yanaşmalar (məsələn, Qrenander «şəbəkə» metodu) verilmişdir.

III. İkiölçülü (X,Y) təsadüfi vektoru üçün (X_i,Y_i) müşahidələri üzrə *reqressiya* funksiyası $g(x)=\mathbf{M}(Y\mid X=x)$-in statistik qiyməti tipli (reqression analizi və b.) statistik verilənlər üzrə təsadüfi kəmiyyətlər arasında əlaqələri araşdırma metodları Q. – p. q.-də özünəməxsus yer tutur. Bu halda (X,Y)-in ikiölçülü sıxlıq funksiyası $f(x,y)$-dən istifadə olunur və bu funksiyanın qiymətləndirilməsi metodları, sıxlıq funksiyasının qiymətləndirilməsinə yaxındır (bax, [9]). Sonsuzölçülü əngəlləyici parametrli tipik məsələ – iki naməlum $F(x-\theta^{(1)})$ və $F(x-\theta^{(2)})$ paylanmalarına uyğun $X_1^{(1)},\ldots,X_n^{(1)}$ və $X_1^{(2)},\ldots,X_n^{(2)}$ seçimlərinin yerinidəyişmə parametri $(\theta^1-\theta^2)$-nin qiymətləndirilməsidir.

IV. Riyazi statistikanın klassik məsələləri – paylanma funksiyasının funksionallarından – median, kvantillər, orta qiymət, dispersiya və momentlərin seçim üzrə qiymətləndirilməsidir. Adətən, bu funksionalların statistik qiymətləri empirik paylanma funksiyasının funksionalları götürülür (məs., *seçimi median*, *seçimi kvantil*).

Hal-hazırda model 1, 2, 3-də naməlum f sıxlıq funksiyasının skalyar və vektor funksionalları Ψ və buna bənzər ilkin F funksiyasının funksionalları kimi ifadə olunmayan funksionalların Q. – p. q. nəzəriyyəsi inkişaf edir.

Model 1-də modanın qiymətləndirilməsi belə məsələdir və bu qiymətləndirmədə F-in diskret və sinqulyar komponentlərli olmasının mənası yoxdur.

[10]-da Q. – p. q.-nin keyfiyyətinin minimaks aşağı sərhədlərinin tapılması üçün ümumi metod təklif olunmuşdur. Bu metod $\Psi(f_\theta)=\theta$ şərtini ödəyən, ən az informativ $\{f_\theta,\ \theta\in\Theta\}$, $f_0=f$, $\Theta\subset\mathbb{R}^1$ parametrik ailəsinin «axtarılması» və bu ən çətin qiymətləndirilən parametrik ailə üçün minimaks aşağı sərhədin istifadə olunmasından ibarətdir. Belə ailə üçün $I(f)$ Fişer informasiya miqdarı f «nöqtəsində» q e y r i – p a r a m e t r i k i n f o r m a s i y a m i q d a r ı adlanır. İsbat olunmuşdur ki, Ψ funksionalının uyğun mənada differensiallanan olduğu və verilmiş f nöqtəsinin ətrafında $\mathscr{F}$ çoxluğunun kifayət qədər «geniş» olduğu halında qeyri – parametrik informasiya miqdarı vardır və 1, 2, 3 modelləri üçün onun ifadəsi aşağıdakı kimidir.

Əgər model 1-də $\Psi(f)$ funksionalının $L^2(\mathbb{R}^1)$-də Freşe differensialı vardırsa, onun törəməsi $\Psi'(f,\cdot)\in L^2(f)$ şərtini ödəyərsə, onda

$$I(f)=\left(\int_{\mathbb{R}^1}\left|\Psi'(f,x)-\mathbf{M}_f\Psi'(f,X)\right|^2 f(x)\,dx\right)^{-1}.$$

Əgər model 2-də $\Psi(f)$ funksionalının $L^2[0,\pi]$-də Freşe differensialı vardırsa və $\sup\limits_{\mathscr{F}}\left\|\Psi'(f,\cdot)\right\|_{L^2(0,\pi)}<\infty$ olarsa, onda $I(f)=\left\|f(\cdot)\Psi'(f,\cdot)\right\|^{-2}_{L^2[0,\pi]}$.

Əgər model 3-də $\Psi(f)$ funksionalının $L^2[0,1]$-də Freşe differensialı vardırsa, onda $I(f)=\left\|\Psi'(f,\cdot)\right\|^{-2}_{L^2[0,1]}$.

Əgər ξ, – $(0,1)$ parametrlərli Qauss təsadüfi kəmiyyətidirsə,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in U}\left\{\mathbf{M}_f\,w(\sqrt{n}(\hat{\Psi}_n-\Psi(f)))-\mathbf{M}\,w(\xi I^{-1/2}(f))\right\}=0 \qquad (4)$$

münasibəti ödənilərsə, $\hat{\Psi}_n$ statistik qiyməti itki funksiyası w-ya nəzərən $\Psi(f)$ funksionalının $U\in\mathscr{F}$ çoxluğunda a s i m p t o t i k e f f e k t i v q e y r i – p a r a m e t r i k s t a t i s t i k q i y m ə t i adlanır (model 3-də $n^{1/2}=\varepsilon^{-1}$ götürmək lazımdır). Bu tərifin təbiiliyi $x>0$ olduqda simmetrik monoton w funksiyası üçün (4)-ün sol tərəfinin Ψ_n statistik qiymətinin ixtiyari ardıcıllığı və $U\ni f$ çoxluğunun olduqca geniş ətrafı üçün mənfi

olmamasını hökm edən qeyd olunmuş aşağıdakı minimaks sərhədə görə alınır.

Konkret funksionallar üçün bir çox hallarda asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlər qurulmuşdur.

Məs., 1, 2, 3 modellərində

$$L_1 = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x) f(x)\, dx, \quad L_2 = \int_0^{\pi} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda,$$

$$L_3 = \int_0^1 \varphi(t)\, f(t)\, dt$$

xətti funksionallarının qiymətləndirilməsi üçün asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlər eyni cür qurulur, yəni:

$$\hat{L}_1 = \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, dF_n(x), \quad \hat{L}_2 = \int_0^{\pi} \varphi(\lambda) I_n(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\hat{L}_3 = \int_0^1 \varphi(t)\, dX_\varepsilon(t),$$

burada $F_n(x),\ F_n(\lambda),\ X_\varepsilon(t)$ – **I.** bəndindən statistik qiymətlərdir. Bəzi konkret tiplərin qeyri – xətti funksionalları üçün asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlər [7]-də təklif olunmuşdur. Olduqca hamar funksionalların asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin qurulmasının ümumi qaydası $\Psi(f)$ funksionalının Teylor düsturu vasitəsilə qeyri – xətti funksionallarla qiymətlərinin və uyğun yarıxətti funksionalların statistik qiymətlərinin yaxınlaşmasına əsaslanmışdır. Yalnız birinci tərtib törəməsi olan funksionallar üçün bu ideyanın həyata keçirilməsi aşağıdakı statistik qiymətlərə gətirir:

$$\Psi_n^{(1)} = \Psi(f_n) + \int_{\mathbb{R}^1} \Psi'(f_n, x)(dF_n(x) - f_n(x))\, dx,$$

$$\Psi_n^{(2)} = \Psi(f_n) + \int_0^{\pi} \Psi'(f_n, \lambda)(I_n(\lambda) - f_n(\lambda))\, d\lambda,$$

$$\Psi_n^{(3)} = \Psi(f_\varepsilon) + \int_0^1 \Psi'(f_\varepsilon, t)(dX_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)\, dt),$$

burada $f_n,\ f_\varepsilon,$ – f -in qeyri – parametrik statistik qiymətləridir, bax, **II** bənd. Bəzi şərtlərlə $\Psi_n^{(i)}$ statistik qiymətləri (daha dəqiq, onların bəzi modifikasiyaları) məhz asimptotik effektiv qeyri – parametrik statistik qiymətlərdir (bax, [11], [12]); məs., $\Psi : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^k$ funksionalları üçün analoji konsepsiyalar inkişaf etdirilmişdir (bax, [11]). Bu isə qeyri – parametrik informasion matris anlayışı və uyğun minimaks sərhədlərə gətirir. Bundan əlavə, [12]-də bu konsepsiyaların $\Psi : \mathscr{F} \to \mathscr{B}$ funksionalının ($\mathscr{B}$ – hər hansı Banax fəzasıdır) qiymətləndirilməsi məsələsində ümumiləşməsinə baxılmışdır. İnformasion matrisin uyğun sonsuzölçülü analoqu qurulmuş və onun köməyilə I bəndin statistik qiymətlərinin lokal asimptotik minimaks xarakteri isbat olunmuşdur. Bu ideyalar [13]-də inkişaf etdirilmişdir.

Q. – p. q. mövzusu *adaptiv statistik qiymətlərin qurulması*, *rekurrent qiymətləndirmə*, *ranq qiymətləndirilməsi*, *butstrəp qiymətləndirmə metodu*, *qatlanan bıçaq metodu* və s. kimi problemləri də əhatə edir. *Robast statistik qiymətlərin* qurulmasına müasir yanaşma da Q. – p. q. konsepsiyalarında əsaslandırılmışdır.

Əd.: [1] Csorgo M., Revesz P., Strong approximations in probability and statistics, Bdpst, 1981; [2] Ченцов Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 1, с. 15–31; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [4] Parzen E., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, № 3, p. 1065–76; [5] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1980, т. 16, в. 2, с. 52–68; [7] Nussbaum M., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, № 3, p. 984–97; [8] Grenander U., «Abstract Inference», N. Y. – [a. o.], 1981; [9] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивоние плотности вероятностей и кривой регрессии, Тб., 1983; [10] Levit B. J., в кн.: Proseeding of the Prague symposium on asymptotic statistics, v. 2, Praha, 1973, p. 215–38; [11] Кошевник Ю. А., Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 4, с. 753–74; [12] Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 388–94; [13] Millar P., The minimax principle in asymptotic statistical theory, B., 1983; [14] Pfanzagl J., Contributions to a general asymptotic statistical theory, N. Y. – [a. o.], 1982.

QEYRİ – PARAMETRİK REQRESSİON ANALİZ

« непараметрический регрессионный анализ; nonparametric regression analysis » – funksional fəzanın hər hansı sonsuzölçülü altçoxluğundan olan *reqressiya* funksiyaları haqqında apriori informasiyaya görə statistik nəticələrlə məşğul olan riyazi statistika bölməsidir.

$X \in \mathbb{R}^d$ – təsadüfi vektor, $Y \in \mathbb{R}^1$ – təsadüfi kəmiyyət olsun. Q. – p. r. a.-in ənənəvi və ən çox öyrənilən məsələsi $f \in \mathscr{F}$ şəklində aprior informasiya olduqda, (X, Y) cütünün asılı olmayan $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ realizasiyaları üzrə hər hansı $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ çoxluğunda $f(x) = \mathbf{M}\{Y \mid X = x\}$ reqressiya funksiyasının qiymətləndirilməsidir. $\mathscr{F}$ sinfi kimi aşağıdakı çoxluqlara baxılır: a) bütün kəsilməz funksiyalar çoxluğu; b) bütün ölçülən funksiyalar çoxluğu; c) differensial və inteqral xassələrli məhdudiyyətlərlə təyin olunan funksiyaların hər hansı dar sinifləri, məs., $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\beta, p, L)$ Hölder sinifləri, burada $0 < L < \infty$, $d < p < \infty$, β – natural ədəddir [$\mathscr{F}(\beta, p, L)$, – $\mathfrak{X} = [0,1]^d$ -də kəsilməz, β – tərtib xüsusi törəmələri (ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi anlamında) $\left\| D^\beta f \right\|_p \le L$ şərtli D^β vektor funksiyasını əmələ gətirən funksiyalar çoxluğudur, burada $\| \cdot \|_p$, – $L^p(\mathfrak{X})$ -də normadır]. Digər misallar monoton və qabarıq reqressiya funksiyaları siniflərdir.

Yaxınlaşma nəzəriyyəsinə yaxın qoyuluşa da baxılır, burada X_i – təsadüfi olmayan kəmiyyətlərdir, $Y_i = f(X_i) + \xi_i$, ξ_i – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Reqressiya funksiyasının əsas qeyri – parametrik statistik qiymətləri Y_i -yə görə xəttidir və bunlar aşağıdakı kimi yazıla bilinər:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x, X_1, ..., X_n) Y_i, \qquad (1)$$

burada W_{ni} – hər hansı çəki funksiyalarıdır.

Reqressoqram reqressiya funksiyasının ən şübhə doğurmayan qeyri – parametrik statistik qiymətidir. $\mathbb{R}^d$ fəzası kəsişməyən altçoxluqlara bölünür. Reqressoqram hissəvi sabit funksiya kimi təyin olunur və bu funksiyanın qiymətləri bölgünün

altçoxluğunda, X_i prediktorları bu altçoxluğa düşən Y_i müşahidələrinin orta qiymətinə bərabərdir. Uyğun çəki funksiyası

$$W_{ni}(x, X_1, ..., X_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I(X_i \in A_{nj}, x \in A_{nj})}{\sum_{i=1}^{n} I(X_i \in A_{nj})}, \quad (0/0 = 0),$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada A_{nj} – Lebeq ölçüsü λ_n^d olan elə kəsişməyən çoxluqlardır ki, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{nj}$, I – indikator funksiyasıdır, $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n > 0$.

Nüvə statistik qiyməti (Nadaraya–Vatson statistik qiyməti)

$$W_{ni}(x, X_1, ..., X_n) = K((x - X_i)/\lambda_n) \Big/ \sum_{i=1}^{n} K((x - X_i)/\lambda_n)$$

çəki funksiyası ilə təyin olunur, burada K, – $\mathbb{R}^d$-də mütləq inteqrallanan məhdud funksiyadır (nüvə). Burada və sonra $a/0 = 0$, $a \in \mathbb{R}^d$. λ_n kəmiyyəti nüvə statistik qiymətinin pəncərə eni adlanır.

Yaxın qonşular statistik qiyməti də nüvə statistik qiyməti kimi təyin olunur, lakin bir fərqli cəhət, pəncərə eninin x, $X_1, ..., X_n$-lərdən asılı olub, x nöqtəsindən $X_1, ..., X_n$ seçimindəki x-ə yaxın k_n-ci elementə qədər məsafəyə bərabər olmasındadır, burada $k_n \to \infty$ natural ədədlərin verilmiş ardıcıllığıdır.

$\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, ...$, – $\mathfrak{X}$-də verilmiş funksiyaların ortonormal sistemi, f – bu sistemə görə ayrılan reqressiya funksiyası olsun. Ayrılış əmsallarının qiymətlərini taparaq, bu qiymətləri sıranın başlanğıc parçasında yerinə yazdıqda f üçün proyeksion statistik qiymət alınır. Çəki funksiyası

$$W_{ni}(x, X_1, ..., X_n) = K(x, X_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} K(x, X_i),$$

düsturu ilə təyin olunur, burada

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{k_n} \varphi_j(x)\, \varphi_j(y).$$

$\mathfrak{X} = [a, b]$ parçasında reqressiya funksiyasının splayn statistik qiymət minimum məsələsinin həlli kimi təyin olunur:

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(X_i))^2 + \lambda_n \int_a^b (f^{(\beta)}(x))^2\, dx \to \min_{f \in W_2^{\beta}[a, b]},$$

burada $\beta \geq 2$ – natural ədəddir və $W_2^{\beta}[a, b]$ – Sobolev fəzasıdır. Adətən, $\beta = 2$ halına, məsələnin həlli düyünləri X_i nöqtələri olan kub formalı splayn olduğu hala baxılır. Splayn-statistik qiymətini (1) şəklində götürmək olar.

X_i-lər parçada müntəzəm qanunla paylandığı halda nüvə statistik qiyməti və yaxın qonşular statistik qiyməti asimptotik ekvivalentdirlər, triqonometrik sistemi $\{\varphi_j\}$ olan proyeksion statistik qiymət və splayn – statistik qiymət nüvə statistik qiymətinin xüsusi hallarına asimptotik ekvivalentdirlər.

Reqressiyanın qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin dəqiqliyi hamarlama parametri λ_n-in (və ya uyğun olaraq k_n-in) seçilməsindən asılıdır. Reqressiya funksiyasının qeyri – parametrik statistik qiymətinin tutarlı statistik qiymət olması üçün: 1) $\lambda_n \to 0$ ($k_n/n \to 0$) və 2) $n\lambda_n^d \to \infty$ ($k_n \to \infty$) şərtlərinin ödənilməsi zəruridir ki, bu şərtlər $n \to \infty$ olduqda meylin və dispersiyanın 0-a yaxınlaşmasını təmin edir. Əgər aprior informasiya a) şəklində verilərsə, onda L^p, $p < \infty$ metrikalarında tutarlı (1) statistik qiymətləri vardır. Universal tutarlılıq xassəsi (bax, [9]) belə ifadə olunur: elə (1) statistik qiymətləri vardır ki, $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\{|Y|^q\} < \infty \Rightarrow \mathbf{M}\{|f_n(X) - f(X)|^q\} \to 0, \quad q > 1$$

münasibəti doğrudur, burada $\mathbf{M}$, – $X, X_1, ..., X_n$ üzrə riyazi gözləmədir. Əgər aprior informasiya b) şəklində verilərsə, müəyyən tip statistik qiymətlər üçün kompaktlarda nöqtəvi və müntəzəm tutarlılıq alınır. c) şəklində aprior informasiya statistik qiymətlərin riskinin asimptotikasını araşdırmağa imkan yaradır və buna əsaslanaraq hamarlama parametrini optimallaşdırmaq mümkün olur. Hamarlama parametrinin optimizasiyasına iki yanaşma mövcuddur: adaptiv və minimaks yanaşma. Adaptiv yanaşmada $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$-lərdən asılı, təsadüfi elə hamarlama parametri seçilir ki, alınan statistik qiymət verilən sinifdən statistik qiymətə asimptotik ekvivalent olur. Hamarlama parametrinin adaptiv seçilməsi ya əvəzləmə metodu ilə (optimal hamarlama parametrinin asimptotikası üçün ifadədəki məchullar, məs., f funksiyasının törəmələri, tutarlı statistik qiymətlərlə əvəz olunur), ya da ki, hər hansı bir kriterinin (Akaike kriterisi, Mellouz kross – yoxlama və s.) optimizasiyası yolu ilə aparılır. Minimaks yanaşmada elə f_n statistik qiyməti axtarılır ki, $n \to \infty$ olduqda

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \mathscr{R}_q(f, f_n) \sim \inf_{T_n} \sup_{f \in \mathscr{F}} \mathscr{R}_q(f, T_n) \equiv \mathscr{R}_q^*(\mathscr{F}) \qquad (2)$$

münasibəti ödənilsin, burada $\mathscr{R}_q(f, T_n) = \mathbf{M}\{\|f - T_n\|_q^2\}$, – T_n statistik qiymətinin riskidir, $1 \leq q \leq \infty$, inf bütün mümkün olan T_n statistik qiymətləri üzrə götürülür və $\sim$ işarəsi isə asimptotik ekvivalentliyi ifadə edir (dəqiq mənada və ya kəmiyyət tərtibinə görə). f_n minimaks statistik qiyməti və onun hamarlama parametri $\mathscr{F}$ sinfinin parametrlərindən asılıdır.

(2) münasibətində dəqiq asimptotik ekvivalentlik ödənilən uyğun f_n statistik qiyməti $q = 2$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\beta, 2, L)$ halında tapılmışdır (bax, [7]). Tərtibinə görə asimptotik ekvivalentlik $1 \leq q \leq \infty$ olduqda $\mathscr{F}(\beta, p, L)$ və bəzi digər siniflər üçün alınmışdır (bax, [2], [3], [10]). Məsələn, $p/q > d/(2\beta + d)$, $1 \leq q \leq \infty$ olarsa, $n \to \infty$ olduqda $\mathscr{R}_q^*(\mathscr{F}(\beta, p, L)) \asymp$ $\asymp n^{-2\beta/(2\beta+d)}$ (bax, [3]). Optimal $n^{-2\beta/(2\beta+d)}$ tərtibi, $\lambda_n \asymp$ $\asymp n^{-1/(2\beta+d)}$ olduqda, nüvə və splayn – statistik qiymətlər üçün alınmır (reqressoqram üçün yalnız $\beta = 1$ olduqda).

Bir sıra hallarda paylanma funksiyalarının Y_i üzrə xətti olmayan, qeyri – parametrik statistik qiymətlərinə üstünlük verilir: aşma – enməli küy fonunda reqressiya funksiyasının robast qiymətləndirilməsində (bax, [4], [5]), əgər statistik qiymətin

verilmiş funksional xassələrini (məs., monotonluq, qabarıqlıq, (bax, [4])) və ya bütün q -lər üçün tərtib üzrə eyni zamanda optimallığını təmin etmək zəruriliyi olarsa (bax, [3]). Hamarlama parametrinin adaptiv seçilməsində də statistik qiymətlər qeyri – xətti olur.

Qeyri – parametrik reqressiyanın robast qiymətləndirilməsi məsələsində fərz olunur ki, $f(x)$ $F(Y \le y \mid X = x)$ şərti paylanmasının hər hansı funksionalıdır (məs., onun medianı); bu halda $\mathbf{M}\{Y \mid X = x\}$ şərti orta qiyməti mövcud olmaya bilər. $f_n(x)$ -in statistik qiyməti şərti paylanmanın statistik qiymətinin belə funksionalı kimi (bax, [5], [9]):

$$\hat{F}_n(Y \le y \mid X = x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x, X_1, ..., X_n)\, I(Y_i \le y)$$

və ya ekstremal məsələnin həlli kimi (bax, [4]) axtarılır:

$$\sum_{i=1}^{n} F(Y_i - f(X_i)) \to \min_{f \in \mathcal{F}}, \qquad (3)$$

burada F – verilmiş qabarıq funksiyadır. (3) məsələsinin həlli düzgün funksional xassələrə malikdir – statistik qiymətin özü $\mathcal{F}$ -dəndir.

Q. – p. r. a.-in əsas nəticələri reqresiyya törəmələrinin qiymətləndirilmə məsələlərinə (bax, [3], [10]), zaman sıralarının qeyri – parametrik öncəgörmə məsələlərinə də aid olunur (bax, [6], [8]). Q. – p. r. a.-in *spesifik halı qeyri – parametrik diskriminant analiz məsələsidir.*

Əd.: [1] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тб., 1983; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., «Докл. АН СССР», 1980, т. 252, № 4, с. 780–84; [3] Немировский А. С., «Изв. АН СССР Технич. кибернетика», 1985, № 3, с. 50–60; [4] Немировский А. С., Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б., «Проблемы передачи информации», 1985, т. 21, № 4, с. 17–33; [5] Цыбаков А. Б., «Проблемы передачи информации», 1982, т. 18, № 3, с. 39–52; [6] Collomb G., «Int. Statist. Rev.», 1981, v. 49, № 1, p. 75–93; [7] Nussbaum M., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, № 3, p. 984–97; [8] Hardle W., Applied nonparametric regression, Camb., 1990; [9] Stone C. J., «Ann. Statist.», 1977, v. 5, № 4, p. 595–645; [10] Stone C. J., «Ann. Statist.», 1982, v. 10, № 4, p. 1040–53.

QEYRİ – PARAMETRİK SPEKTRAL STATİSTİK QİYMƏT « непараметрическая спектральная оценка; nonparametric spectral estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

QEYRİ – PARAMETRİK STATİSTİK QİYMƏT(i) spektral sıxlığın **« непараметрическая оценка** спектральной плотности; **nonparametric estimator** of spectral density **»** – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

QEYRİ – PARAMETRİK TƏSNİF « непараметрическая классификация; nonparametric classification » – bax, *Qeyri – parametrik diskriminant analiz.*

QEYRİ – PARAMETRİK YOXLANILMASI, HİPOTEZLƏRİN « непараметрическая проверка гипотез; nonparametric hypotheses testing » – *statistik hipotezlərin yoxlanılması* üçün qeyri – parametrik metodları istifadə edən riyazi statistika bölməsidir. «Qeyri – parametrik» metodlar termini onun ənənəvi «parametrik» metodlar terminindən fərqini nəzərə çarpdırır; parametrik metodlarda fərz olunur ki, ümumi çoxluğun paylanmalarının funksional ifadəsi sonlu sayda parametrlər dəqiqliyi ilə məlumdur və bu metodlar «standart» paylanmalar ailələri üçün, o cümlədən, normal, eksponensial, Puasson və s. tipli paylanmalar ailələri üçün təfərrüfatı ilə araşdırılmışdır.

Hipotezlərin yoxlanılmasının qeyri – parametrik məsələlərinə xarakterik misal iki seçimin bircinsliyinin yoxlanılması məsələsidir. $N = m + n$ sayda asılı olmayan $X_1, ..., X_N$ müşahidələrinin varlığı fərz olunur, belə ki, $X_1, ..., X_m$ $(X_{m+1}, ..., X_N)$ – paylanma funksiyası eyni $F(G)$ olan müşahidələr olsun. Bütün t -lər və hər hansı $\theta \neq 0$ üçün $H_1 : G(t) = F(t - \theta)$ alternativ yerinidəyişmə hipotezinə qarşı $H_0 : F = G$ bircinslik hipotezi yoxlanılır. Klassik variantda bu məsələdə fərz olunur ki, F və G funksiyaları normal paylanma funksiyalarıdır və baxılan hipotezin yoxlanılması üçün *Styudent kriterisi* istifadə olunur. F və G -nin tipi haqqında məsələnin qeyri – parametrik qoyuluşunda kəsilməzlik şərtindən başqa digər fərziyyə irəli sürülmür. H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün

$$W_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} R_i$$

statistikasına əsaslanan tipik qeyri – parametrik kriteri – *Uilkokson kriterisi* tətbiq olunur, burada $R_1, ..., R_N$, – $X_1, ..., X_N$ kəmiyyətlərinin ranqlarıdır. Müşahidələr üzrə hesablanan $W_{m,n}$ statistikası ya çox böyük və ya çox kiçik olarsa, paylanmaların bərabərliyi haqqında hipotez qəbul olunmur. Uyğun kritik qiymətlər ümumi paylanma funksiyasından asılı olmayan, H_0 hipotezi şərtində $W_{m,n}$ -in paylanması ilə təyin olunur; belə ki, $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_N)$ ranqlar vektorunun paylanması (bu paylanma $1, ..., N$ ədədlərinin bütün yerdəyişmələri çoxluğunda müntəzəmdir) F -dən asılı deyildir. Bunun əsasında kritik qiymətlər cədvəlləri hesablanmışdır; m və n -in böyük qiymətlərində normal paylanma ilə approksimasiyadan istifadə olunur. H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün əksər hallarda

$$D_{m,n} = \sup_x \left| F_m(x) - G_n(x) \right|$$

statistikasına əsaslanan *Smirnov kriterisindən* istifadə olunur, burada F_m və G_n – birinci və ikinci seçimlərin empirik paylanma funksiyalarıdır. $D_{m,n}$ statistikası $R_1, ..., R_m$ ranqlar toplusu ilə də təyin olunur.

H. q. – p. y. məsələlərinə aid digər – uzlaşmanın, simmetriyanın, asılı olmamazlıq və təsadüfiliyin yoxlanılması kimi məsələləri qeyd etmək olar.

Uzlaşmanın yoxlanılması məsələsi ondan ibarətdir ki, ümumi paylanma funksiyası G olan seçim üzrə $G = F$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur, burada F – kəsilməz paylanma funksiyasıdır.

Məsələnin qeyri – parametrikliyi xarakteri alternativin qeyri – parametrikliyindədir ki, bu da dürüst ifadə oluna bilinir, məs., birtərəfli variantda ($F < G$ və $F > G$) və ya ikitərəfli variantda $(F \neq G)$.

Simmetriyanın yoxlanılması məsələsi ümumi paylanma funksiyası G -nin verilən x_0 nöqtəsinə nəzərən simmetriyasının, yəni

$$G(x_0 + x) + G(x_0 - x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

bərabərliyinin yoxlanılması məsələsindən ibarətdir. Alternativ kimi

$$G(x_0 + x) + G(x_0 - x) \geq 1, \quad G(x_0 + x) + G(x_0 - x) \leq 1$$

birtərəfli şərtlərin götürmək olar, lakin ciddi bərabərsizlik halı heç olmasa bir x üçün və ya o tipli ikitərəfli şərt üçün götürülür.

Asılı olmamazlığın yoxlanılması məsələsi eyni bir obyekt üzərində asılı olmayan müşahidələr üzrə iki əlamətin asılı olub-olmadığını təyin etmək zəruriliyi halında yaranır. Təsadüfilik hipotezi də oxşar surətdə ifadə olunur, bu halda seçimin elementlərinin asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu nəzərdə tutulur.

H. q. – p. y. məsələlərində ən çox inkişaf etmiş və tətbiq olunan metodlar ranq metodları və empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan metodlardır.

Yoxlanılan hipotez qeyri – parametrik xarakterli olduğu halda müşahidələrin ranqlarını, həmçinin onların işarələrini, mütləq kəmiyyətlərin ranqlarını və s. istifadə edən ranq metodlarından istifadə olunur. Bircinslik hipotezinin yoxlanılması üçün yuxarıda baxılan misalda ranq kriteriləri H_0 hipotezinə nəzərən oxşar kriterilərdir (bax, *Oxşar kriteri*), yəni H_0 hipotezinə aid paylanmadan asılı olmayaraq sabit α ölçüsünü saxlayan kriterilərdir.

H_0 hipotezinə nəzərən oxşar kriterilərin qurulmasının ümumi metodu o fakta əsaslanır ki, qaydalı statistikalar vektoru $\mathbf{X}_N^{(\cdot)} = (X_{(1)}, ..., X_{(N)})$ H_0 hipotezi şərtində tam kafi statistikadır, burada $X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(N)}$ – birləşdirilmiş seçimlərin artan qaydada nizamlanmış elementləridir. Onda hər bir oxşar kriteri *Neyman strukturlu* kriteridir, yəni bu kriteri $X_N^{(\cdot)}$-in qeyd olunmuş qiymətində (sanki hər bir) eyni bir α şərti ölçüsünə malikdir. H_0 hipotezi şərtində $X_N^{(\cdot)}$ və R vektorları öz aralarında asılı olmur, buna görə də, belə kriteri

$$\frac{1}{N!} \sum \varphi(X_N^{(\cdot)}, r) = \alpha \quad \text{sanki yəqin}$$

şərtini ödəyən $\varphi(X_N^{(\cdot)}, R)$ kritik funksiyası ilə verilə bilinər, burada cəmlənmə $1, ..., N$ ədədlərinin bütün mümkün ola bilən $r = (r_1, ..., r_N)$ yerdəyişmələri üzrə aparılır. Belə strukturlu kriteri yerdəyişmələr kriterisi adlanır.

Ranq kriteriləri xüsusi bir hal kimi kritik φ funksiyası X-dən asılı olmadığı halda alınır. Ümumi şəkildə yerdəyişmələr kriterisinin realizasiyası hesablama çətinliklərilə bağlı olduğundan, ən çox tətbiq olunan kriterilər ranq kriteriləridir.

Müşahidələrin ədədi qiymətlərinin istifadəsindən imtina etdikdə informasiya itkisinin yaranmasına baxmayaraq, 20-ci əsrin $50 - 60$-cı illərində aydın olur ki, ranq kriteriləri məsələlərin müəyyən bir sinfində yüksək asimptotik nisbi effektivliyə malikdir. Məs., normal paylanmaya malik müşahidələrin iki seçimi məsələsində Uilkokson kriterisinin Styudent kriterisinə nəzərən asimptotik nisbi effektivliyi $3/\pi = 0{,}955$-ə bərabərdir. Əgər ümumi çoxluğa uyğun paylanma normal paylanmadan fərqli olarsa, qeyd olunan asimptotik nisbi effektivlik kifayət qədər böyük ola bilər, lakin bununla belə onun qiyməti heç bir halda $0{,}864$-dən aşağı ola bilməz. Bundan başqa, elə ranq kriterisi də vardır ki, («normal» nişanələr kriterisi adlandırılan rus. критерий нормальных меток), bu kriterinin nisbi effektivliyi Styudent kriterisinə nəzərən normal paylanma halında 1-ə bərabər olur, normallıqdan fərqli ixtiyari halda 1-i aşır. Beləliklə, bu kriteri Styudent kriterisindən asimptotik olaraq üstün sayılır.

Digər misal simmetriya hipotezi ilə bağlıdır. Paylanmasının sıxlıq funksiyası f olan ümumi çoxluqdan $X_1, ..., X_n$ seçiminin edildiyi fərz olunur. f funksiyasının sıfra nəzərən simmetrikliyi haqqında hipotez yerinidəyişmə alternativi halında yoxlanılır. Bu məsələdə ən sadə kriteri *işarələr kriterisidir* və bu kriteri X_i-lərin müsbət qiymətlərinin sayına əsaslanır. Uilkoksonun işarəvi – ranq kriterisi $\sum_{X_i > 0} R_i^+$ statistikasına əsaslanır, burada R_i^+ – variasion sırada $|X_1|, ..., |X_N|$ üçün X_i elementinin ranqıdır. Bu kriterinin statistikasının hesablanılmasında müşahidələrin işarələri haqqında informasiyadan başqa, onların qiymətləri haqqında informasiyadan da istifadə olunur. Buna görə də, hesab etmək olar ki, Uilkokson kriterisi işarələr kriterisindən daha effektivdir. Həqiqətən də, bu kriterilərin asimptotik nisbi effektivlikləri Styudent kriterisinə nəzərən uyğun olaraq, $3/\pi = 0{,}955$ və $2/\pi = 0{,}637$ olur (normal paylanmaya uyğun müşahidələr halında). Beləliklə, Uilkokson kriterisi işarələr kriterisindən $1{,}5$ dəfə üstündür və Styudent kriterisindən az geri qalır.

Asılı olmamazlıq hipotezinin yoxlanılması ilə daha bir misal aşağıdakı kimi şərh olunur. Hər biri keyfiyyət və ya kəmiyyət əlamətlərinə malik olan obyektlər sırası verilir, belə ki, keyfiyyət əlamətləri üzrə aparılan müşahidələrin nizamlana bilinənliyi fərz olunur. Obyektlər üzərində n sayda asılı olmayan müşahidələr üzrə əlamətlərin asılı olmamazlığı haqqında hipotez, məs., ona alternativ müsbət asılılıq haqqında hipotezə qarşı yoxlanılır. R_i və S_i i-ci müşahidəyə uyğun əlamətlərin ranqları olsun. Asılı olmamazlığın yoxlanılması üçün ən geniş yayılmış kriteri Spirmenin ranq korrelyasiya əmsalı r_s-ə əsaslanır; r_s aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$r_s = 1 - 6 \sum_i (R_i - S_i)^2 / (n^3 - n).$$

r_s-in 1-ə yaxın qiymətlərində, yəni böyük qiymətlərində asılı olmamazlıq hipotezi qəbul olunmur. n-in kiçik qiymətlərində kritik qiymətlər cədvəllər üzrə tapılır, n-in böyük qiymətlərində isə normal approksimasiyadan istifadə olunur. Seçimi korrelyasiya əmsalına əsaslanan kriteriyə nəzərən r_s-ə əsaslanan kriterinin asimptotik nisbi effektivliyi, yenə də olduqca böyük olur və normal müşahidələr üçün $9/\pi^2 = 0,912$ olur.

20-ci əsrin 70-ci illərinin araşdırmalarından ranq kriterilərinin daha güclü xassələrə malik olduqları aşkar olunmuşdur. Aydın olmuşdur ki, ranq tipli asimptotik ən güclü kriterilər tipik surətdə sonlu defektə malikdirlər, yəni belə kriteri üçün $N + o(1)$ sayda müşahidə aparılmalıdır ki, N sayda müşahidə aparılması nəticəsində ən güclü kriterinin gücünə bərabər kriteri gücünün alınması təmin olunsun [asimptotik effektivlik xassəsi kriteri üçün baxılan eyni şəraitdə $N + o(N)$ sayda müşahidə aparılmasının tələbi ilə ifadə olunur].

Empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan kriterilər istifadə olunan qeyri – parametrik məsələlərə klassik misal verilmiş kəsilməz F_0 paylanma funksiyası ilə uzlaşdırılma məsələsidir. N sayda asılı olmayan müşahidələr üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası F_N-in $N \to \infty$ olduqda ümumi paylanma funksiyası F_0-a müntəzəm yığılması faktı (Qlivenko – Kantelli teoremi) F_N-in F_0-dan bu və ya digər yayınması, məs.,

$$D_N = \sup_x \left| F_N(x) - F_0(x) \right|, \qquad (1)$$

$$\omega_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_N(x) - F_0(x)]^2 \, dF_0(x) \qquad (2)$$

yayınmaları əsasında tutarlı kriteri qurmağa imkan verir. $N \to \infty$ olduqda $N^{1/2} D_N$ və $N\omega_N^2$ üçün limit paylanmaları 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov tərəfindən tapılmışdır (bax, *Kolmoqorov kriterisi*, *Kramer – Mizes kriterisi*, *Renyi kriterisi*, *Anderson – Darlinq kriterisi* tipli kriterilər). (1) və (2) statistikaları elə strukturludurlar ki, onların paylanmaları H_0 hipotezi şərtində F_0-dan asılı deyildir. Doğrudan da,

$$\sqrt{N} D_N = \sup_{0 \le t \le 1} \left| \upsilon_N(t) \right|, \quad N\omega_N^2 = \int_0^1 \upsilon_N^2(t)\, dt \qquad (3)$$

olur, burada $\upsilon_N(u) = N^{1/2}[G_N(t) - t]$, $t \in [0, 1]$ – «empirik proses» olub, H_0 hipotezi şərtində $[0, 1]$-də müntəzəm paylanma qanununa tabe (F_0-dan asılı olmayaraq) $U_i = F_0(X_i)$, $i = 1, ..., N$ kəmiyyətlərinin empirik paylanma funksiyaları G_N-lər üzrə qurulmuşdur. F_0-dan «asılı olmamazlıq» kriterisinin statistikasına məlum paylanma funksiyası F_0-ın daxil olunması ilə alınır və burada ranq statistikalarının paylanmalarının naməlum F paylanma funksiyasından asılı olmamazlığı kimi prinsipial xarakter daşımır. Lakin bu xassə, uzlaşmanın yoxlanılması məsələsində eyni cədvəllərdən istifadə etməyə imkan verdiyindən tətbiqi məsələlərdə mühüm rol oynayır.

20-ci əsrin 50-ci illərində inkişaf etmiş təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi $\upsilon_N(t)$ empirik prosesinin Braun körpüsü $\upsilon(t)$ prosesinə yığılmasını müəyyənləşdirdi və bunun əsasında isə (3) şəklində ifadə olunan υ_N prosesinin funksionallarının limit paylanmalarını υ-nin uyğun

$$\sup_{0 \le t \le 1} \left| \upsilon(t) \right|, \quad \int_0^t \upsilon^2(t)\, dt \qquad (4)$$

kimi funksionallarının paylanmaları kimi alınmasına səbəb oldu. Belə yanaşma empirik paylanma funksiyalarının funksionallarının geniş sinfi üçün limit paylanmalarının alınması üçün geniş prinsipial imkanlar yaratdı. Bundan başqa, lazımlı şəkildə H_0-la yaxınlaşan alternativlərlə $N \to \infty$ olduqda υ_N prosesi $\upsilon(t) + a(t)$ şəklində prosesə yığılır, burada $a(t)$ – alternativlər ardıcıllığı ilə təyin olunan təsadüfi olmayan funksiyadır. Bu fakt kriterilərin asimptotik güclərini öyrənməyə imkan verir.

Belə oxşar metodlar iki seçimin bircinsliyinin (məs., Smirnov kriterisi), simmetriyanın və asılı olmamazlığın yoxlanılması məsələlərində empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan kriterilərin asimptotik öyrənilməsində tətbiq olunur.

Tətbiq üçün əsas maraq doğuran məsələ verilmiş $\mathscr{F} = \{F(x, \theta),\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s\}$ parametrik ailəsi ilə uzlaşmanın yoxlanılması, yəni $H_0 : F \in \mathscr{F}$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması məsələsidir (məs., paylanmanın normal paylanma olduğunun yoxlanılması). Bu məsələdə (1), (2) tipli statistikalarda F_0 əvəzinə $F(x, \hat{\theta}_N)$ götürərək bu statistikalardan istifadə etmək olar, burada $\hat{\theta}_N$ – naməlum θ parametrinin hər hansı statistik qiymətidir, məs., maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti.

Statistik qiymətin əvəz olunması statistikaların paylanmalarının mühüm dəyişikliyinə səbəb olur.

Bu halda bu statistik qiymətlər $\upsilon(t)$-dən fərqli, $u(t)$ limit prosesinə yığılan, hər hansı $u_n(t)$ təsadüfi prosesinin funksionalı kimi ifadə olunur. Lakin bu halda mühüm çətinliklər yaranır: birincisi, $u_n(t)$ prosesi və onun limit prosesi $u(t)$, $\mathscr{F}$ ailəsindən və ümumiyyətlə, θ-nın naməlum qiymətindən asılı olur, ikincisi, u-nun funksionallarının paylanmalarının hesablanması çətinliklər yaradır. Məs., hər bir konkret $\mathscr{F}$ üçün $\int_0^1 u^2(t)\, dt$-nin paylanmasının tapılması çoxlu hesablama işlərinin aparılmasını tələb edir. Bu paylanma bəzi əsas $\mathscr{F}$ ailələri üçün hesablanmış və cədvəlləşdirilmişdir (normal, eksponensial və b.). $\sup_{0 \le t \le 1} \left| u(t) \right|$ funksionalının paylanmasının hesablanması qaydaları məlum deyildir.

Vektor müşahidələri halında çoxölçülü paylanmalarla uzlaşmanın yoxlanılması məsələlərində analoji çətinliklər yaranır. Burada hətta sadə H_0 hipotezi şərtində belə F_0 paylanmasından asılı olmamazlıq xassəsi olmur.

20-ci əsrin 80-ci illərinin əvvəllərində martinqallar nəzəriyyəsi əsasında inkişaf etmiş, qeyd olunan növ məsələlərə digər yanaşma u_N prosesinin standart Viner prosesi w-yə yığılan w_N prosesinə çevrilməsindən ibarətdir. $\mathscr{F}$ ailəsindən asılı olan bu çevirmənin reallaşdırılması hesablama baxımından olduqca sadədir. Bu halda kriteri statistikaları kimi paylanmaları yaxşı məlum olan w-nin (3) tipli funksionallarından istifadə oluna bilinər. Bu metod çoxölçülü halda da istifadə olunur.

Uyğun empirik paylanmalarının yığılmasına əsaslanan uzlaşma kriterilərinin asimptotik nəzəriyyəsi müşahidələrin daha ümumi sxemlərinə aid məsələlər üçün də, məs., xətti reqressiya və ya avtoreqressiv sürüşən orta sxemlərində paylanmalar haqqında hipotezin yoxlanılması kimi məsələlər üçün işlənilmişdir.

Məlum xi – kvadrat statistikası da empirik paylanma funksiyasının funksionalı kimi ifadə oluna bilinir və $N \to \infty$ olduqda, bölgüdəki intervalların sayı qeyd olunduğu halında bu statistikanın limiti yuxarıda şərh olunmuş metodlarla öyrənilə bilinər. Xi – kvadrat kriterinin mənfi cəhəti bölgü intervallarının daxilində paylanmanın yayınmalarına qarşı onun tutarlı olmamasındadır, bu da (1) – (2) tipli kriterilərin daxil olunması ilə izah olunmuşdur.

Xi – kvadrat kriteriləri ardıcıllığının tutarlılığı N-in artması ilə bölgü intervallarının sayının artması ilə alınır. Belə kriterilər asimptotik xassələrinə görə (1) – (2) tipli empirik proseslərin kəsilməz funksionallarına əsaslanan kriterilərdən fərqlənir. Sonuncu kriterilər daha «yaxın» alternativləri ayırd edir ($N \to \infty$ olduqda H_0-a böyük sürətlə yaxınlaşanları), bu şərtlə ki, bu «yaxınlıq» paylanma funksiyaları arasındakı fərqlənmələr terminlərilə ölçülsün, lakin bu halda xırda bölgülü xi – kvadrat kriterilərinin gücü paylanmaların sıxlıq funksiyalarının fərqlənmələri ilə təyin olunur. Belə kriterilər «hamar» alternativlərə (məs., normal paylanma halının yoxlanılması üçün asimmetriya kimi) az həssas olur, ona görə də, «hamar olmayan» və ya «lokal» yayınmaları aşkar etmək məsləhətdir (məs., sıxlığın ossilyasiyası və ya kiçik sahələrdə ciddi dəyişiklikləri kimi).

Xi – kvadrat kriteridən fərqli tezliklər funksiyalarından istifadə edən digər kriterilər, kiçik bölgülər (bax, *Bölünən statistika*) halında və seçimi intervallara əsaslanan kriterilər (bax, *Speysinq*) analoji xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М, 1983; [2] Б о р о в к о в А. А.,

Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; [3] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых Критериев, пер. с англ., М., 1971; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [6] Мартынов Г. В., Критерии омего-квадрат, М., 1978; [7] Хеттманспергер Т., Статистические выводы, основанные на рангах, пер. с англ., М., 1987; [8] Хмаладзе Э. В., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 193–212; [9] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [10] Fraser D. A. S., Nonparametric methods in statistics, N. Y. – L., 1963; [11] Krishnaiah P. R., Sen P. K., [eds], Non-parametric methods, Handbook of statistics, v. 4, N. Y. – [a. o.], 1984; [12] Lehmann E., Nonparametrics: Statistical methods based on ranks, S. F. – N. Y., 1975; [13] Shorack G. R., Wellner J. A., Empirical processes with applications to statistics, N. Y., 1986.

QEYRİ – PERİODİK MARKOV ZƏNCİRİ « непериодическая цепь Маркова; noncyclic / aperiodic Markov chain » – atsiklik Markov zənciridir (bax, *Markov zənciri*).

QEYRİ – PERİODİK VƏZİYYƏT (i) Markov zəncirinin **« непериодическое состояние** цепи Маркова; **noncyclic / an aperiodic state** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

QEYRİ – REQULYAR ŞAXƏLƏNƏN PROSES « нерегулярный ветвящийся процесс; nonregular branching process » – bax, *Şaxələnən proses*; requlyarlıq.

QEYRİ – SƏLİS ÇOXLUQ « нечеткое множество; fuzzy set » – tətbiqi riyaziyyatın bölməsi, qeyri – səlislik nəzəriyyəsinin əsas anlayışıdır. Qeyri – səlislik nəzəriyyəsinin inkişafı 1965-dən L. Zadənin [1]-də verilmiş məqaləsilə başlanmışdır. Ən sadə halda X çoxluğunun qeyri – səlis A çoxluğu mənsubluq funksiyası (rus. функция принадлежости) adlandırılan $\mu_A : X \to [0, 1]$ inikasını təyin edən μ_A ilə verilir. Əgər μ_A yalnız 0 və ya 1 qiymətlərini alarsa, A X -in adi altçoxluğudur.

X çoxluğunun qeyri – səlis A və B altçoxluqları üçün $A \cap B$ kəsişməsi, AB hasili, $A \cup B$ birləşməsi, $A + B$ cəmi, $\overline{A}$ inkarı uyğun olaraq, aşağıdakı düsturlarla mənsubluq funksiyaları vasitəsilə ifadə olunur:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A, \quad x \in X.$$

Çoxluqlar üzərində digər əməllər də istifadə olunur.

Çoxluqlar üzərində əməllərə aid bəzi xassələr Q. – s. ç.-lar üçün də doğrudur: məs., de Morqan qanunları ödənilir (bax, [2]). Lakin A adi çoxluq olduğu hal istisna olunmaqla, $A + A \neq A$; $A(B + C) = AB + AC$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $(\mu_A^2(x) - \mu_A(x))\mu_B(x)\mu_C(x) = 0$ bərabərliyi bütün $x \in X$ -lər üçün ödənilmiş olsun.

Riyaziyyatdaxili baxımdan «qeyri – səlis çoxluq» və «mənsubluq funksiyası» anlayışları sinonimlərdir. Lakin tətbiqi məsələlərin müzakirəsində «Q. – s. ç.» terminində üstünlük verilir. L. Zadənin yanaşması müəyyən sistemlərin analizi üçün təsis edilmişdir; bu sistemlərdə bir şəxs iştirak edir və L. Zadə belə fərziyyəyə istinadlanır ki, insan təfəkküründə elementləri ədədlər deyil, hər hansı Q. – s. ç.-lar və ya obyektlər siniflərinin elementləridir və bu elementlər üçün «sinfə mənsubluq»dan «mənsubolmamazlığa» keçid sıçrayışlı deyil, kəsilməzdir (bax, [3]). Bu istiqamətdə görülən işlərdən, yəni Q. – s. ç.-lar nəzəriyyəsinə əsaslanmaqla sonradan aparılan tədqiqatlardan aydın olmuşdur ki, belə yanaşmalar riyaziyyatın bütün sahələrində və onun tətbiqlərində praktiki səmərəli olmuşdur (bax, [4] – [11]). Bu mövzuya beş mindən artıq nəşrlər və «Fuzzy sets and System», BUSEFAL və s. kimi jurnallar həsr olunmuşdur (1988).

Bəzi müəlliflər qeyri – səlislik nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyəsinin asılı olmadıqlarını iddia edirlər (bax, [12]), bəziləri isə isbat edirlər ki, Q. – s. ç. müəyyən mənada təsadüfi çoxluqlara gətirilir (bax, [2], [9]).

Əd.: [1] Zadeh L., «Information and control» , 1965, v. 8, p. 338 –53; [2] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [3] Zadeh L., «IEEE Trans Syst., Man. Cybern.», 1973, v. SMC–3, № 1, p. 28 – 44; [4] Заде Л., Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений, пер. с англ., М., 1976; [5] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980; [6] Орловский С. А., Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации, М., 1981; [7] Кофман А., Введение в теорию нечетких множеств, пер. с франц., М., 1982; [8] Кузьмин В. Б., Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений, М., 1982; [9] Нечеткие множества и теория возможностей, пер. с англ., М., 1986; [10] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта, М., 1986; [11] Борисов А. Н. [и др.], Обработка нечеткой информации в системах принятия решений, М., 1989; [12] Беллман Р., Заде Л., в кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений, пер. с англ., М., 1976, с. 172 – 215.

QEYRİ – SƏLİS ÇOXLUQLAR STATİSTİKASI « нечетких множеств статистика; statistics of fuzzy sets » – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər *statistikasının* bölməsidir, burada müşahidələrin nəticələri A_i, $i = 1, 2, \ldots$ – qeyri – səlis çoxluqlardır, yəni bu çoxluqlar mənsubluq funksiyaları adlandırılan, $\mu_{A_i} : U \to [0, 1]$ inikasını təyin edən μ_{A_i} -lərlə verilir, burada U – hər hansı çoxluqdur. Q. – s. ç. s.-nın əsas məzmunu ümumi təbiətli fəzalardakı statistika nəticələrinin qeyri – səlis çoxluqlar fəzasına tətbiqidir (bax, [1]). Əgər $U = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ olarsa, onda

$$\rho(A_1, A_2) = \int_a^b \left| \mu_{A_1}(u) - \mu_{A_2}(u) \right| du$$

qeyri – səlis A_1 və A_2 çoxluqları arasında yaxınlıq ölçüsü kimi istifadə oluna bilinər.

Əd.: [1] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980; [2] Орлов А. И., «Заводская лаборатория», 1990, т. 56, № 3, с. 76–83.

QEYRİ – SİMMETRİK TƏSADÜFİ MATRİS « несимметрическая случайная матрица; nonsymmetric random matrix » – elementləri təsadüfi kəmiyyətlər olan kvadrat cədvəldir. $\lambda_k + i\mu_k$, $\lambda_k - i\mu_k$ və λ_l – həqiqi, n tərtib $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|$ Q. – s. t. m.-inin məxsusi qiymətləridir, $k = 1, \ldots, s$,

$l = s+1, ..., n-2s$; x_k, y_k və x_l isə həqiqi vektorlar, $z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$, $k = 1, ..., s$ və $z_l = x_l$ məxsusi vektorlardır. Ξ_n matrisinin kompleks məxsusi qiymətləri onların modullarının artması qaydası ilə nizamlanır. Əgər qoşmaları olmayan kompleks qiymətlərin modulları üst-üstə düşərsə, onda onlar arqumentlərin artması qaydası ilə nizamlanılır. Məxsusi qiymətləri qoşma olan cütlər arasında xəyali hissəsi sıfırdan böyük olanı birinci yerə qoyulur. Həqiqi məxsusi qiymətlər onların artması qaydası ilə nizamlanılır.

Əgər Ξ_n matrisinin paylanma sıxlığı vardırsa, x_k, y_k, $k = 1, ..., s$, x_l, $l = s+1, ..., n-2s$ vahid uzunluqlu elə vektorlardırsa ki, hər bir vektorun sıfırdan fərqli birinci komponenti sıfırdan böyük olsun, onda belə matrislər 1 ehtimalla birqiymətli təyin olunur. Ξ_n matrisi 1 ehtimalla aşağıdakı kimi ifadə edilir:

$$\Xi_n = $$

$$= T_n \operatorname{diag} \left\{ \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \lambda_1 \end{matrix} \right\|, ..., \left\| \begin{matrix} \lambda_s & \mu_s \\ -\mu_s & \lambda_s \end{matrix} \right\|, \lambda_{s+1}, ..., \lambda_{n-2s} \right\} T_n^{-1},$$

T_n 1 ehtimalla cırlaşmayan həqiqi matrisdir və onun vektor – sütunları x_k, y_k, $k = 1, ..., s$, x_l, $l = s+1, ..., n-2s$ vektorlarıdır.

K, – n – ölçülü cırlaşmayan həqiqi matrislər qrupu, B, – K qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri, $\theta_k = \lambda_k \pm i\mu_k$, $k = 1, ..., s$, θ_m, $m = s+1, ..., n-2s$, – Ξ_n matrisinin yuxarıda göstərilən qaydada seçilmiş məxsusi qiymətləri olsun. Əgər Ξ_n təsadüfi matrisinin paylanma sıxlığı p vardırsa, onda ixtiyari $L \in B$ altçoxluğu üçün və ixtiyari həqiqi α_j, β_j, $j = 1, ..., n$ ədədləri üçün

$$\mathbf{P}\{T_n \in L,\ \operatorname{Re}\theta_j < \alpha_j,\ \operatorname{Im}\theta_j < \beta_j,\ j = 1, ..., n\}$$

ehtimalını hesablamaq olar (bax, [1]).

$\Xi_n = \| \xi_{sk} + i\eta_{sk} \|$, – n – tərtib kompleks matris olsun; fərz olunur ki, ξ_{sk} və η_{sk}, $s, k = 1, ..., n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma sıxlığı vardır, Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri – λ_j, $j = 1, ..., n$ arqumentlərinin artması qaydası ilə nizamlanmışdır, $h_1, ..., h_n$ məxsusi $\lambda_1, ..., \lambda_n$ qiymətlərinə uyğun məxsusi vektorlar, H_n isə vektor – sütunları h_l, $l = 1, ..., n$ vektorlarına bərabər matrisdir. Ξ_n matrisini 1 ehtimalla $\Xi_n = H_n \Lambda_n H_n^{-1}$ şəklində ifadə etmək olar, burada $\Lambda_n = \| \lambda_l \delta_{lm} \|$. Əgər $(h_k, h_k) = 1$ və $\arg h_{1k} = c_k$, $k = 1, ..., n$, c_k $(0 \le c_k \le 2\pi)$ ixtiyari həqiqi ədədlər olarsa, onda H_n matrisi 1 ehtimalla birqiymətli təyin olunur.

K – cırlaşmayan kompleks n – tərtib matrislər qrupu olsun. B K qrupunun Borel altçoxluqlarından ibarət σ – cəbrdir. Əgər Ξ_n matrisinin paylanma sıxlığı vardırsa, onda ixtiyari $L \in B$ və ixtiyari (α_j, β_j), $j = 1, ..., n$ kompleks ədədləri üçün

$$\mathbf{P}\{H_n \in L,\ \operatorname{Re}\alpha_k < \operatorname{Re}\lambda_k < \operatorname{Re}\beta_k,$$

$$\operatorname{Im}\alpha_k < \operatorname{Im}\lambda_k < \operatorname{Im}\beta_k,\ k = 1, ..., n\}$$

ehtimalını hesablamaq olur.

Əgər A n tərtib kompleks təsadüfi kvadrat matrisdirsə, onda elə n – tərtib unitar U matrisi vardır ki, $T = U^{\mathsf{T}} A U$ yuxarı üçbucaq matrisdir və T matrisinin baş diaqonalının elementləri isə A matrisinin məxsusi qiymətləridir. Əgər A həqiqi matrisdirsə və həqiqi məxsusi qiymətlərə malikdirsə, onda U matrisini həqiqi ortoqonal matris seçmək olar. A matrisi, yalnız və yalnız, o halda normal matrisdir ki, T diaqonal matris olsun. Əgər A matrisinin məxsusi qiymətləri müxtəlifdirsə və hər hansı bir qayda ilə nizamlanmışdırsa, U matrisinin hər bir vektor – sütununun sıfırdan fərqli ixtiyari komponentinin arqumentləri qeyd olunmuşdursa, onda A matrisinin UTU^{T} şəklində Şur ifadəsi yeganədir.

Ξ_n, – n – tərtib kompleks Q. – s. t. m. olsun və onun elementlərinin paylanma sıxlığının varlığı fərz olunur; $\Xi_n = USU^{\mathsf{T}}$ – onun Şur ifadəsi olsun və matrisin diaqonal elementləri s_{jj}, $j = 1, ..., n$ elə seçilmişdir ki, onların arqumentləri artmayan qaydada nizamlanmışdır, $\arg u_{1j} = c_j$, $j = 1, ..., n$, c_j $(0 \le c_j \le 2\pi)$ – ixtiyari həqiqi ədədlər, Γ, – n – tərtib unitar matrislər qrupu, B, – Γ qrupunun Borel altçoxluqlarından ibarət σ – cəbr, ν, – Γ qrupunda verilmiş normalanmış Haar ölçüsüdür. Onda ixtiyari $L \in B$ və n – ölçülü kompleks yuxarı üçbucaq matrislərinin ixtiyari ölçülən C çoxluğu üçün $\mathbf{P}\{U \in L,\ S \in C\}$ ehtimalını hesablamaq olar (bax, [1]).

Əd.: [1] Гирко В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

QEYRİ – STASİONAR AXIN « нестационарный поток; nonstationary input » – stasionar olmayan giriş axınıdır (bax, *Stasionarlığı*, *axının*). Ən çox tətbiq olunan Puasson Q. – s. a.-ı – keçmişi təsirsiz giriş axını üçün $[t, s)$ yarımintervalında baş verən hadisələr sayı $\Lambda(s) - \Lambda(t)$ parametrli Puasson qanunu ilə paylanmışdır. $\Lambda(t)$ azalmayan funksiya olub, axının aparıcı funksiyası adlanır. Bəzi şərtlər ödənildikdə, Q. – s. a. ani intensivlik $\lambda(t)$ və ani parametr $\mu(t)$ kimi xarakteristikalara malik olur ki, bunlar mütləq inteqrallanan mənfi olmayan funksiyalardır, kəsilməzlik nöqtələrində $\lambda(t)dt$ və $\mu(t)dt$ uyğun olaraq, $(t, t+dt)$ intervalında hadisələrin orta sayını və bu intervalda heç olmazsa bir hadisənin baş verməsi ehtimalını ifadə edir.

QEYRİ – STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES; böyük ədədlər qanunu **« нестационарный случайный процесс; закон больших чисел; nonstationary random process;** law of large numbers **»** – bax, *Böyük ədədlər qanunu* qeyri–stasionar təsadüfi proseslər üçün.

QEYRİ – STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES; spektral nəzəriyyələr **« нестационарный случайный процесс; спектральные теории; nonstationary random process;** spectral theories **»** – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

QEYRİ – STASİONARLIQ RANQI « нестационарности ранг; rank of nonstationarity » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

QEYRİ – TARAZLIQLI STATİSTİK MEXANİKA « неравновесная статистическая механика; non-equilibrium statistical mechanics » – bax, *Statistik mexanika.*

QƏBULOLUNMA ƏDƏDİ « приемочное число; acceptance number » – məmulatların nəzarət olunan çoxluğunun qəbulolunmasında seçimdəki qüsurlu məmulatların mümkün qədər məqbul sayılan sayıdır (bax, *Statistik qəbul nəzarəti*).

QƏRİBƏ ATTRAKTOR « странный аттрактор; strang attractor » – dinamik sistemə nəzərən invariant, mürəkkəb strukturlu cazibə çoxluğudur. Q. a. qeyri – bircins ola bilər, yəni özünün invariant cazibə altçoxluqlarını özündə saxlaya bilər. Ədədi eksperimentlərdə Q. a. x faza həcminin müsbət altçoxluğuna daxil olduğu halda, $\{f^t(x)\}$, $t \in [0, T]$ trayektoriyalarda topalanmış δ – ölçülər üçün limit ölçüsü olan invariant μ ölçüsünün daşıyıcısı kimi aşkar olur. μ-nün erqodikliyi bircinsliliyə uyğundur.

Q. a.-un ən mühüm xarakteristikaları Lyapunov μ ölçüsünün dim. – *ölçü* və göstəriciləridir.

Əd.: [1] Странные аттракторы, пер. с англ., М., 1981; [2] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985.

QIRILAN MARKOV PROSESİ « обрывающийся марковский процесс; killed Markov process » – trayektoriyaları zamanın bütün anları üçün deyil, yalnız hər hansı təsadüfi intervalda təyin olunan *Markov prosesidir*. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ – ölçülən fəza, $(\mathscr{E}_\Delta, \mathscr{B}_\Delta)$, – $\mathscr{E}$ çoxluğuna $\Delta \notin \mathscr{E}$ izolə olunmuş nöqtəsinin əlavə edilməsindən sonra alınmış fəza olsun. Fərz olunur ki, $X^\Delta = (X_t^\Delta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ Δ nöqtəsi uducu olan, $\mathscr{E}_\Delta$ fəzasında qırılmayan bircins Markov prosesidir: $X_s^\Delta(\omega) = \Delta$ olduqda, bütün $t > s$ üçün $X_t^\Delta(\omega) = \Delta$ olduğu alınır. $\zeta(\omega) = \inf\{t : X_t^\Delta(\omega) = \Delta\}$ və $\{X_t^\Delta(\omega) \neq \Delta\}$ çoxluğunda $X_t(\omega) = X_t^\Delta(\omega)$ olsun. $X = \{X_t, \zeta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x\}$ toplusu $\mathscr{E}$ fəzasında qırılan (bircins) Markov prosesi adlanır. ξ kəmiyyətinə X Q. M. p.-nin qırılma anı və ya yaşama müddəti deyilir; adətən, fərz olunur ki, $\zeta > 0$ və $X_\zeta^\Delta \equiv \Delta$. Əgər X^Δ prosesi hər hansı bir xassəyə malikdirsə, Q. M. p. X də bu xassəyə (məs., ciddi Markov xassəsi) malikdir, deyilir; ζ anında xassələr bəzən xüsusi olaraq göstərilməlidir. $p(t, x; \Gamma) = \mathbf{P}_x(X_t \in \Gamma)$ funksiyası X prosesinin keçid funksiyası adlanır; bu funksiya sub–markov keçid funksiyasıdır. Q. M. p.-ləri qırılmayan Markov proseslərinə sadə çevirmələrin tətbiqi nəticəsində, məs., *altprosesin* qurulması və s. zamanı yaranır (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr). Daxil olunmuş anlayışlar təbii olaraq bircins olmayan proseslər üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [3] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968.

QIRILMA ANI « обрыва момент; killing time » – *qırılan Markov prosesinin* yaşama müddəti intervalının sağ ucu – ξ nöqtəsidir. Əgər $\zeta = \{\zeta_t, \zeta, \mathscr{A}_t, P_x\}$ bircins Markov prosesidirsə, onda $\zeta = \zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyəti $[0, +\infty]$-dan qiymətlər alır, $\{\zeta \le t\} \in \mathscr{A}_t$ (ξ *dayanma anıdır*) və $\zeta(t, \omega)$ trayektoriyası bütün $t \in [0, \xi(\omega)]$ üçün təyin olunmuşdur. Əgər $\xi \equiv +\infty$ olarsa, proses – qırılmayan, bütün $\omega \in \Omega$ üçün $\xi(\omega) > 0$ olarsa, normal adlanır (bax, [1]). Qeyri – bircins Markov proseslərinin ümumi nəzəriyyəsində (bax, [2]) ξ anına dual olan ζ prosesinin təsadüfi doğum anı α daxil olunur, $\alpha \le \xi$ və ζ-nın ya yalnız sağdan açıq, ya yalnız soldan açıq, ya hər iki tərəfdən açıq (a, ξ) intervalında verildiyi fərz olunur.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [2] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

QIRILMAYAN MARKOV PROSESİ « необрывающийся марковский процесс; non–killed Markov process » – bax, *Qırılma anı*.

QIRMIZI KÜY « красный шум; red noise » – spektral sıxlığı $f(\omega)$, ω tezlikləri intervalında tezliyin azalması ilə artan, geniş mənada stasionar *təsadüfi prosesdir* (və ya ardıcıllıqdır). «Q. k.» geofizikada geniş tətbiq olunan termindir. Adətən, «Q. k.» prosesinin spektral sıxlığı $f(\omega)$, $\omega \to 0$ olduqda hökmən artmalıdır; əgər bu halda $f(0) = C < \infty$ olarsa, onda çox kiçik tezliklər oblastında Q. k., praktik olaraq bəyaz küyə (spektral sıxlığı sabit prosesə) çevrilir.

Tətbiqi məsələlərdə bəzən, qırmızı küy spektral sıxlığı $f(\omega)$, ω-nın azalması ilə monoton artan sadə stasionar proses də adlandırılır; bu halda $f(\omega) = C_1/(\omega^2 + \alpha^2)$ olur (və deməli, korrelyasion funksiya $\exp\{-\alpha t\}$-yə mütənasibdir).

QİSMƏN BALANSLANMIŞ BLOK PLAN « частично сбалансированный блочный план; partially balanced block design » – bax, *Blok plan.*

QİSMƏN BEYES YANAŞMASI « частичный бейесовский подход; partial Bayes approach » – bax, *Beyes kriterisi.*

QİSMƏN CAZİBƏ OBLASTI sonsuz bölünən G qrupunun **« частичного притяжения область** безгранично делимого закона G; **domain of partial attraction** of an infinitely divisible law G **»** – elə F *paylanma funksiyalarının* çoxluğudur ki, $n_1 < n_2 < \ldots$ şərtini ödəyən hər hansı n_k ardıcıllığı üçün, A_n və B_n ardıcıllıqları münasib seçildiyi halda, $F^{*n_k}(B_{n_k}x + A_{n_k})$ paylanma funksiyaları $G(x)$-ə zəif yığılırlar (burada ^{*n_k}, – n – qat kompozisiya işarəsidir).

Bütün sonsuz bölünən qanunlar və yalnız bunlar boş olmayan Q. c. o.-na malikdirlər. Hər bir F paylanması ya eyni bir tip qanunların Q. c. o.-na, yaxud qeyri – hesabi çoxluqlar tiplərinin qanunlarının Q. c. o.-na aiddir və ya da ki, heç bir Q. c. o.-na aid deyildir. Hər bir sonsuz bölünən qanunun (Deblin universal qanunları adlandırılan; bax, məs., [3]) Q. c. o.-na aid

paylanmalar mövcuddur. Əgər F paylanması eyni bir tip qanunların Q. c. o.-na aiddirsə, onda bu tip dayanıqlı tipdir. Dayanıqlı qanunun Q. c. o. onun *cazibə oblastından* genişdir. Elə paylanmalar vardır ki, bunlar dayanıqlı deyildirlər, lakin özlərinin Q. c. o.-ndandırlar. Əgər F paylanması U qanunun Q. c. o.-na mənsubdursa, U qanunu isə V qanunun Q. c. o.-na aiddirsə, onda F paylanması V qanunun Q. c. o.-na aiddir. F paylanmasının heç bir Q. c. o.-na aid olmaması üçün

$$\lim_{l\to\infty}\ \lim_{u\to\infty}\inf \int\limits_{|x|\ge lu} dF(x) \Big/ \int\limits_{|x|\ge u} dF(x) \ne 0$$

şərtinin ödənilməsi kafidir. F paylanmasının normal qanunun Q. c. o.-na aid olması üçün zəruri və kafidir ki,

$$\lim_{u\to\infty}\inf u^2 \int\limits_{|x|\ge u} dF(x) \Big/ \int\limits_{|x|\le u} x^2 dF(x) = 0$$

şərti ödənilsin.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] D o e b l i n W., «Studia Math.», 1940, t. 9, p. 71–96.

QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ, MİNİMAL MƏSAFƏNİN « оценка минимального расстояния; minimum distance estimate » – bax, *Robast statistik qiymət*.

QLİSON TEOREMİ « Глисона теорема; Gleason theorem » – qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin teoremidir, dim.– ölçüsü üçdən az olmayan separabel Hilbert fəzasının ortoproyektorlarının çoxluğunda bütün ehtimal ölçülərinin (və ya daha ümumi halda sonlu) effektiv təsvirini verir (bax, [1]). $\mathscr{L}(H)$, – H fəzasında bütün ortoproyektorların çoxluğu olsun və $m:\mathscr{L}(H)\to[0,\,1]$ – ehtimal ölçüsüdür, yəni aşağıdakı xassələri ödəyən funksiyadır:

1) $m(I)=1$, burada I – eynilik operatorudur,

2) əgər $P=\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_j$, $P_iP_j=0,\ i\ne j$ olduqda $P,\ P_j\in\mathscr{L}(H)$

olduqda $m(P)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(P_j)$. Onda $H\ge 3$ olduqda, H -da vahid izli (yəni $\operatorname{tr}T=1$) elə mənfi olmayan nüvə operatoru T vardır və birqiymətli təyin olunur ki, $mP=\operatorname{tr}(TP),\ P\in\mathscr{L}(H)$ bərabərliyini ödəyir.

Q. t.-dən [2]-də qoyulmuş xəttilik probleminin müsbət həlli alınır: yəni Neyman cəbrinin ortoproyektorlarında ehtimal ölçülərini, dim. – ölçü ≥ 3 olan separabel Hilbert fəzasında bütün məhdud operatorların cəbri üçün, norması 1 olan müsbət xətti funksional vəziyyətinə kimi davam etdirmək olar. Xəttilik probleminin tam həlli XX əsrin 80-ci illərinin əvvəllərində alınmışdır; texniki cəhətdən çətin bu həll Q. t.-nə əsaslanmışdır. İsbat olunmuşdur ki, bu problem tərkibində I_2 tip cəbrin toplananını birbaşa saxlamayan Neyman cəbrləri üçün müsbət həll olunur. Bu, ortoproyektorlarda ölçülərə nəzərən ehtimal hesabını (və ya qeyri – kommutativ inteqrallama nəzəriyyəsini) qeyd olunan cəbrlərdə qurmağa imkan verir. Q. t.-nin inkişafı və ümumiləşməsinə müxtəlif aspektlərdə həsr olunmuş geniş əd. vardır.

Əd.: [1] G l e a s o n A., «J. Math. Mech.», 1957, № 6, p. 885–93; [2] M a c k e y G., «Amer. Math. Monthly», 1957, № 8, p. 45–57; [3] М а к к и Д ж., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [4] Ш е р с т н е в А. Н., «Изв. вузов. Математика», 1982, № 8, с. 20–35.

QLİVENKO TEOREMİ « Гливенко теорема; Glivenko theorem » – F_n empirik paylanma funksiyalarının $n\to\infty$ olduqda kəsilməz paylanma funksiyası F -ə 1 ehtimalla müntəzəm yığılması haqqında teoremdir (bax, [1]). Bu teoremə mühüm əlavə *Kolmoqorov kriterisi* (bax, [2]; bu kriterini müəyyən mənada V. İ. Qlivenkonun nəticəsinin dəqiqləşdirilmiş forması hesab etmək olar) və ona analoq N. V. Smirnovun aldığı (bax, [3]) kriteri olmuşdur. Q. t. riyazi statistikada mühüm tətbiqi ilə səciyyəvidir.

Əd.: [1] G l i v e n k o V. I., «Giorn. ist. ital. attuari», 1933, v. 4, p. 1–10; [2] K o l m o g o r o f f A. N., «Giorn. ist. ital. Attuari», p. 83–91 (rus. pər. – Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41); [3] С м и р н о в Н. В., «Успехи матем. наук», 1944, т. 10, с. 179–206.

QLİVENKO – KANTELLİ TEOREMİ « Гливенко – Кантелли теорема; Glivenko – Cantelli theorem » – bax, *Empirik paylanma*, *Böyük ədədlər qanunu* B a n a x f ə z a l a r ı n d a.

QLOBAL KRİTERİ « глобальный критерий; global test » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

QLOBAL LİMİT TEOREMLƏRİ « глобальные предельные теоремы; global limit theorems » – $F_n(x)$ paylanma funksiyaları ardıcıllığı $n\to\infty$ olduqda $F(x)$ paylanma funksiyasına yığılarsa, $\varphi(x)$ və $q(x)$ mənfi olmayan funksiyalar olarsa,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(F_n(x)-F(x))q(x)\,dx\to 0$$

tipli münasibətin ödənilməsi üçün tələb olunan şərtləri müəyyənləşdirən *limit teoremləridir*. $F(x)$ – normal qanuna tabe paylanma funksiyası, $F_n(x)$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin paylanma funksiyası, $\varphi(x)=|x|^p$, $p>0$, $q(x)\equiv 1$ olan halda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün mərkəzi limit teoreminin qlobal forması müfəssəl surətdə araşdırılmışdır (bax, [1] – [4]).

Əd.: [1] A g n e w R. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1954, v. 40, № 9, p. 800–04; [2] E s s e n C.-G., «Trans. Roy. Inst. Technol. Stockh.», 1958, № 121, p. 1–31; [3] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] К р у г л о в В. М., «Зап. научн. сем. ЛОМИ», 1976, т. 61, с. 84–101.

QNEDENKO TEOREMİ « Гнеденко теорема; Gnedenko theorem » – *limit teoremlərinin* klassik nəzəriyyəsinin əsas nəticələrindən biri, yığılma kriterisidir. Q. t. sonsuz kiçilənlik şərtinə tabe təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin paylanmalarının qeyd olunmuş sonsuz bölünən qanuna yığılması üçün zəruri və kafi şərtləri ifadə edir (K o l m o g o r o v m o d e l i). Q. t.-nin original ifadəsi, məs., [1]-də, bir qədər dəyişik formada *Limit teoremləri* məqaləsində verilmişdir. Bax, həmçinin *Böyük ədədlər qanunu*.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949.

QOCALAN PAYLANMA « стареющее распределение; aging distribution » – $\xi \geq 0$ təsadüfi kəmiyyətinin elə paylanmasıdır ki, ixtiyari $s > 0$ qiymətində

$$\mathbf{P}\{\xi \in (t,\ t+s) \mid \xi > t\} \qquad (*)$$

şərti ehtimalı $t \geq 0$ arqumentinin azalmayan funksiyasıdır. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinə cihazın fasiləsiz işləmə müddəti kimi baxılarsa, onda paylanmanın Q. p.-lar sinfindən olması zaman artdıqca, yəni cihazın işləmə müddəti t -nin artması ilə cihazın ilk dəfə sıradan çıxması (və ya dayanması) ehtimalının artmasına uyğundur. Əgər ξ -nin paylanması Q. p.-dırsa, onda onun bütün k tərtib momentləri $\mathbf{M}\xi^k$ sonludurlar və ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində

$$\left|\overline{F}(t) - e^{-t/m}\right| \leq 1 - \sqrt{1-2\alpha}$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\overline{F}(t) = \mathbf{P}\{\xi > t\}$, $\alpha = 1 - \mathbf{M}\xi^2 / 2(\mathbf{M}\xi)^2$ (bax, [1]).

ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda Q. p.-dır ki, $-\ln \overline{F}(t)$ funksiyası $[0,\ t_F)$ intervalında qabarıq funksiya olsun; $t_F = \inf\{t : \overline{F}(t) = 0\}$.

Q. p.-nın $[0,\ t_F)$ intervalında paylanma sıxlığı vardır və t -yə görə azalmayan *imtina intensivliyi funksiyası* $\lambda(t)$ təyin olunmuşdur.

Riyazi etibarlılıq nəzəriyyəsində funksional paylanmaların müxtəlif sinifləri istifadə olunur. Gəncləşən paylanmalar sinfindən olan funksional paylanmalar üçün (*) ifadəsi t arqumentinin artmayan funksiyasıdır. Q. p.-lar sinfinin ümumiləşməsi elə orta Q. p. sinfidir ki, $\overline{F}(t)^{1/t}$ t arqumentinin azalmayan funksiyasıdır.

Fərz olunur ki, monoton strukturlu bərpaolunmayan sistemin bütün elementləri (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*) orta Q. p.-ya malikdirlər. Onda belə sistemin fasiləsiz işləmə müddəti də orta Q. p.-ya malikdir (bax, [2]).

Orta Q. p.-lar sinfi ixtiyari $t, s \geq 0$ qiymətlərində $\overline{F}(t+s) \leq \overline{F}(t)\overline{F}(s)$ bərabərsizlikləri ödənilən paylanmaların, başqa sözlə, «təzə köhnədən yaxşıdır» paylanmaları sinfinin altçoxluğudur.

Paylanmalar siniflərinin müxtəsər adları rus dilində: ВФИ (возрастающая функция интенсивности – artan intensivlik funksiyası Ar.İF) – qocalan paylanmalar üçün, УФИ (убывающая функция интенсивности – azalan intensivlik funksiyası – Az.İF) – gəncləşən sinif üçün. İngilis dilində: IFR (increasing failure rate) – ВФИ, Ar.İF-ə uyğundur, DFR (decreasing failure rate) УФИ, Az.İF-ə, NBU (new better then used) – «təzə köhnədən yaxşıdır», – TKY adlarına uyğundur.

Əd.: [1] Вопросы математической надежности, М., 1983; [2] Б а р л о у Р., П р о ш а н Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

QOŞMA KÖÇÜRTMƏ MƏSƏLƏSİ « сопряженная задача переноса; dual transport problem » – $A^*\varphi = \psi$ tənliyi üçün $Af = g$ stasionar xətti *kinetik köçürtmə tənliyinə* qoşma sərhəd məsələsidir. Bu məsələnin həlli f axınının $I_\psi(f) = \int f(x)\,\psi(x)\,dx$ funksionalına nəzərən dəyər funksiyası $\varphi(x)$ -i təyin edir, məs., həssaslığı $\psi(x)$ olan detektorda inteqral axını və ya axına nəzərən. Q. k. m. köçürtmə tənliyinin kükrəntilər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. A^* -ya təbii məhdudiyyətlər qoyulduqda

$$-\sum_{i=1}^{n} a^i(x)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right) = \sum_{i,\,j=1}^{n} b^{ij}(x)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right) +$$

$$+ \lambda(x)\varphi(x) - \int \varkappa(x;\ x')\varphi(x')dx' = (A^*\varphi)(x)$$

ifadəsi bu köçürtməni təsvir edən Markov prosesinin infinitezimal operatorudur. Xüsusi halda, proses üçün optiki qarşılıqlıq teoremi doğru olduqda Q. k. m.-nin dürüst ifadə olunması detektordan mənbəyə, yəni tərs yolla köçürtmə məsələsinin asanlıqla *statistik modelləşdirilməsinə* imkan verir.

Əd.: [1] М а р ч у к Г. И. [и др.], Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [2] М а р ч у к Г. И., Л е б е д е в В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981.

QOŞMA PAYLANMALAR « сопряженные распределения; conjugate distributions » – aşağıdakı şərtləri ödəyən F və G *paylanmalarıdır:*

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{sx}\,F(dx)$$

inteqralı hər hansı $|s| < s_0$ intervalından olan bütün s -lər üçün sonludur və bütün belə s -lər üçün

$$G(dx) = e_{sx}F(dx)/f(s).$$

Q. p.-ın mühüm xassəsi belə ifadə olunur: Q. p.-ın ixtiyari cütləri – $(F_1, G_1), ..., (F_n, G_n)$ üçün

$$G^{(n)}(dx) = e_{sx}F^{(n)}(dx)/f^{(n)}(s)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$G^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}{}^{*} G_i, \qquad F^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}{}^{*} F_i$$

$$f^{(n)}(s) = \prod_{i=1}^{n} f_i(s), \quad f_i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\,F_i(dx).$$

Q. p. limit teoremlərində böyük yayınmaların öyrənilməsində, bərpa nəzəriyyəsində və təsadüfi dolaşmalar nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] П е т р о в В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [3] Б о р о в к о в А. А., Р о г о з и н Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.

QOŞMALIQ CƏDVƏLİ, ƏLAMƏTLƏRİN « сопряженности признаков таблица; contingency tale » – $f_{ij\ldots q}$ tezliklərinin cədvəlidir, $i = 1, ..., I$, $j = 1, ..., J, ...$, $q = 1, ..., Q$, $f_{ij\ldots q}$; $f_{ij\ldots q}$ – hər hansı elementlərin (obyektlərin) 1-ci əlamətə (A) görə i -ci kateqoriyaya, 2-ci əlamətə görə (B)

j -ci kateqoriyaya, …, s -ci əlamətə görə q -cü kateqoriyaya aid olması tezliyidir. Bu belə anlaşılmalıdır ki, verilənlər ya kateqoriyalarla və ya əlamətlərilə keyfiyyətcə ifadə olunur.

Ən çox yayılmış cədvəllər $s = 2,\ I = J = 2$ qiymətləri üçün $s = 2,\ I > 2,\ J > 2$ qiymətləri üçün tərtib edilmiş cədvəllərdir, bunlar, uyğun olaraq, 2×2 cədvəlləri və ikiölçülü cədvəllər adlanır.

Qoşmalıq cədvəllərinin verilənləri kəmiyyətcə verilənlərin alınması ya qeyri – mümkün və ya arzuedilməz olduğu hallarda yaranır, kateqoriyalar nizamlanmamış olduqda ölçmələr nominal şkalada, nizamlanmış olduqda isə qaydalı şkalada aparılır.

Qoşmalıq cədvəllərinin analizində üç hal ola bilir: 1) $\{f_{1\cdot}, f_{2\cdot}, ..., f_{J\cdot}\}$ və $\{f_{\cdot 1}, f_{\cdot 2}, ..., f_{\cdot I}\}$ marginal tezliklərinin iki toplusu qeyd olunmuşdur; 2) bir toplu qeyd olunmuşdur (bu hal – I seçimlərinin bircinsliyinin yoxlanıldığı haldır); 3) marginal tezliklərin iki toplusu da təsadüfidir.

Qoşmalıq cədvəllərinin analizinin ən yayılmış məsələləri əlamətlərin (dəyişənlərin) asılı olmamazlığının yoxlanılması məsələləri və əgər əlamətlər asılı olmayandırlarsa, əlaqə dərəcəsinin aydınlaşdırılmasıdır. $I = J = 2$ olduqda, asılı olmamazlıq $H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ ilkin hipotezinin doğruluğu kimi anlaşılır; p_{ij} ixtiyari elementin (i, j) oyuğunda olduğu ehtimalı kimi anlaşılır, yəni elementin 1-ci əlamətin i -ci kateqoriyasında, 2-ci əlamətin j -ci kateqoriyasında olması ehtimalı kimi anlaşılır.

$$p_{i\cdot} = \sum_{1\le j\le J} p_{ij},\quad p_{\cdot j} = \sum_{1\le i\le I} p_{ij},\quad i = 1, ..., I,\quad j = 1, ..., J.$$

Alternativ hipotez: heç olmazsa bir $i,\ j,\ i = 1, ..., I,\quad j = 1, ..., J$ cütü üçün $H^1 : p_{ij} \ne p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ kimi ifadə olunur. H^1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün **əlaqə ölçüləri** adlanan çoxsaylı kriterilər vardır.

Əd.: [1] Goodman L. A., Analyzing qualitative-categorical data. Log-linears models and latent-structure analysis, L. – [a. o.], 1978; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Аптон Г., Анализ таблиц сопряженности, пер. с англ., М., 1982; [4] Haberman S. J., Analysis of qualitative data, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1978–79; [5] Goodman L. A., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, p. 10–69; [6] Kullback S., Keegel J. C., в кн.: Handbook of Statistics, v. 4, Amst. – [a. o.], 1984; [7] Миркин Б. Г., Анализ качественных признаков и структур, М., 1980; [8] Fienberg S. E., в кн.: Encyclopedia of statistical sciences, v. 2, N. Y., 1982, p. 161–71; [9] Haberman S. Y., Analysis of qualitative data, v. 1, N. Y., 1980, p. 130–37; [10] ECTA (Everyman's Contingency Table Analysis) by L. A. Goodman, L., [e. a.], 1973; [11] Agresti A., Analysis of ordinal categorical data, N. Y. – [a. o.], 1984; [12] Plackett R. L., The analysis of categorical data, L., 1974; [13] Чесноков С. В., Детерминационный анализ социально–экономических данных, М., 1982.

QRAM – ŞARLİYE SIRASI « Грама – Шарлье ряд; Gram – Charliyer series » – aşağıdakı ifadə ilə təyin olunan formal sıradır:

$$S_A(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\,\varphi^{(k)}(x),\quad x\in\mathbb{R}^1, \qquad (1)$$

və ya

$$S_B(x) = \Pi(\lambda, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!}\,\frac{d^k\Pi(\lambda, x)}{d\lambda^k},\quad x = 0, 1, 2, ... \qquad (2)$$

burada

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2},\quad \Pi(\lambda, x) = \frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda}.$$

(1) sırası A tip Qram – Şarliye sırası adlanır. $S_A(x)$ sırasının ilk hədlərinin sonlu cəmləri ilə X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlığı $p(x)$-i approksimasiya etmək olur. Belə approksimasiyada

$$a_k = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)\,p(x)\,dx$$

olur, burada $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}(e^{-x^2/4})^{(k)}$ – Hermit çoxhədlisidir. Məs., əgər $\mu_j = \mathbf{M}X^j$ və $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1$ olarsa, onda

$$a_1 = a_2 = 0,\quad a_3 = -\mu_3,\quad a_4 = \mu_4 - 3,\quad a_5 = -\mu_5 + 10\mu_3$$

olur. Əgər $p(x)$ məhdud variasiyalı funksiya olarsa və

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/4}\,p(x)\,dx < \infty$$

olarsa, onda $S_A(x) = p(x)$ bərabərliyi $p(x)$-in hər bir kəsilməzlik nöqtəsində ödənilir (bax, [3]).

(2) sırası B tip Qram – Şarliye sırası adlanır. Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin $p_x = \mathbf{P}\{X = x\},\ x = 0, 1, 2, ...$ $\left(\sum_{x=0}^{\infty} p_x = 1\right)$ ehtimallarını $S_B(x)$ sırasının ilk hədlərinin sonlu cəmləri ilə approksimasiya etmək olur. b_k əmsallarını hesablamaq üçün düsturlar aşağıdakı bərabərliklərlə verilir:

$$b_k = \lambda^k \sum_{x=0}^{\infty} p_x\,G_k(\lambda, x),$$

burada

$$G(\lambda, x) = \frac{d^k\,\Pi(\lambda, x)}{d\lambda^k}\Big/\Pi(\lambda, x).$$

Əgər $\mu_1 = \lambda,\ \beta_j = \mathbf{M}(x-\lambda)^j$ olarsa, onda $b_1 = 0,\quad b_2 = \beta_2 - \lambda,\quad b_3 = \beta_3 - 3\beta_2 + 2\lambda$ olur. Q. – Ş. s. K. Qram tərəfindən [1]-də, K. Şarliye tərəfindən [2]-də binomial qanunun approksimasiyası üçün təklif olunmuşdur. Q. – Ş. s.-nın xüsusi cəmləri özlərini requlyar aparmaya da bilər, məs., (1) sırasının ilk k hədləri cəmi, ilk $(k-1)$ hədlər cəmi ilə müqayisədə pis approksimasiya verə bilər, buna görə də, Q. – Ş. s. həmişə məqsəduyğun olmaya da bilər. Ecuort – Kramer ayrılışı A tip Q. – Ş. s.-nın müəyyən mənada ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] Gram J. P., «J. reine und angew. Math.», 1983, Bd 94, S. 41–73; [2] Charlier C. V. L., «Arkiv. Mat. Astr. Fys.», 1913 /1914, Bd 9, № 25, S. 1–17; [3] Кендалл М. Дж, Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

QRANULOMETRİYA « гранулометрия; granulometry » – qeyd olunmuş Ω çoxluğunun altçoxluqlarının $\mathscr{A}$ sinfini özünə inikas etdirən və aşağıdakı xassələri ödəyən ψ_λ, $\lambda > 0$ funksiyalarının birparametrli sinfidir:

a) $\psi_\lambda(A) \subset A$, $A \in \mathscr{A}$; b) əgər $A \subset B$ olarsa, onda $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(B)$, $A, B \in \mathscr{A}$; c) əgər $\lambda \geq \mu$ olarsa, onda $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$, $A \in \mathscr{A}$; ç) $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_{\max}$ (burada $\circ$ – inikasların kompozisiyası işarəsidir).

$\Omega = \mathbb{R}^n$ – Evklid fəzası, $\mathscr{A} = \mathscr{F}$, – $\mathbb{R}^n$-də qapalı çoxluqların çoxluğu olsun. Əgər $A_{n+1} \subset A_n$, $A_n \in \mathscr{A}$ üçün

$$\lim_{\lambda_n \downarrow \lambda} \psi_{\lambda_n}(A_n) = \psi_\lambda\left(\bigcap_n A_n\right)$$

limit xassəsi ödənilərsə, Q. $\mathscr{F}$-də yuxarıdan semi–kəsilməz adlanır.

Q. – tətbiqdə geniş yayılmış *qapalı təsadüfi çoxluqların* qurulması və onların çevirmə üsullarından birini təyin edir: əgər A təsadüfi qapalı çoxluqdursa, onda Q.-nın qiyməti $\psi_\lambda(A)$ belə təsadüfi qapalı çoxluqdur. Bundan başqa, Q.-nın vasitəsilə təsadüfi çoxluğun paylanma [x nöqtəsində A-nın ölçüsünün (rus. размер) paylanması] xarakteristikalarından ən mühümü (riyazi gözləmə və dispersiya ilə yanaşı) – $\Lambda(x) = \{\lambda : x \in \psi_\lambda(A)\}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası təyin olunur.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

QRENANDER – ROZENBLATT TİP STATİSTİKALAR(ı) spektral sıxlığın **« Гренандер – Розенблатта тип статистики** спектральной плотности; **statistic of Grenander – Rozenblatt type** for spectral density / spectrograph estimater **»** – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

QRİFFİTS BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « Гриффитса неравенства; Griffiths inequalities » – məs., müsbət maqnit sahəsində *ferromaqnit modellər* üçün tez-tez istifadə olunan korrelyasion bərabərsizliklərdir. $\{x_t,\ t \in \mathbb{Z}^d\}$ – həqiqi qiymətlərli şəbəkəvari təsadüfi meydanın realizasiyası olsun, $A \in \mathbb{Z}^d$ – sonlu altçoxluqdur, $X_\Lambda = \prod_{t \in \Lambda} x_t$ təsadüfi kəmiyyətdir. Onda ixtiyari sonlu $A, B \in \mathbb{Z}^d$ üçün

$$\text{(I)}\ \mathbf{M}(X_A) \geq 0, \quad \text{(II)}\ \mathbf{M}(X_A X_B) \geq \mathbf{M}(X_A)\mathbf{M}(X_B)$$

Q. b. ödənilir.

QRİN ALFA – FUNKSİYASI « Грина альфа – функция; Green alpha – function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

QRİN FUNKSİYASI « Грина функция; Green function » kvant meydan nəzəriyyəsi və kvant statistik fəzasında – meydan operatorlarının (kvant meydanı halında) və ya Heyzenberq təsvirində doğum və ölüm operatorlarının (çoxhissəli qeyri – relyativ kvant sistemləri halında) xronoloji hasilinin orta qiymətidir.

1) Meydan nəzəriyyəsi halı. $\{\varphi_\alpha(x),\ x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}),\ x^{(0)}$ – zaman, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ – fəza koordinatları, α – spinor və ya vektor indeksdir$\}$, M^4 Minkovski fəzasında təyin olunmuş kvant meydanı (yəni hər hansı H Hilbert fəzasında Ω vakuum vektorlu operatorqiymətli ümumiləşmiş funksiya, bax, [1]) olsun.

$$G_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k;\beta_1,\ldots,\beta_k}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k) =$$

$$= (-1)^\gamma(\Omega, T[\varphi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\varphi_{\alpha_k}(x_k)\varphi^*_{\beta_1}(y_1)\ldots\varphi^*_{\beta_k}(y_k)]) \quad (*)$$

ümumiləşmiş funksiyasına Qrin funksiyası (k – hissəli) deyilir, burada * – operator qoşmasıdır, T isə onu ifadə edir ki, $\{\varphi_{\alpha_i}(x_i),\ \varphi^*_{\beta_j}(y_j),\ i, j = 1, \ldots, k\}$ operatorları xronoloji qaydada, yəni $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ nöqtələrinin zaman koordinantlarının azalması qaydası ilə yerləşdirilməlidir; Boze – meydanlar üçün $\gamma = 0$, Fermi – meydanlar üçün $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ dəyişmələrinin xronoloji qaydada yerləşməsinin (permutasiyonun) cüt sayına bərabərdir.

2) Statistik fizika halı. Hər hansı Fok fəzası F-in vektorları və F-də təsir edən operator enerjisi H ilə təsvir olunan fiziki sistem üçün $a^\#_X(t) = e^{-iHt}a^\#_X e^{-iHt}$, $t \in \mathbb{R}^d$ operatorlar ailəsi doğum operatoru a^*_X və ölüm operatoru a_X üçün Heyzenberq dinamikası əmələ gətirir (X indeksi ya $\mathbb{R}^d$ fəzasında, ya da $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində dəyişir). Sistemin Q. f. $G(x_1, t_1, \ldots, x_k, t_k; y_1, s_1, \ldots, y_k, s_k)$ özünün əsas vəziyyətində (*) düsturu ilə təyin olunur, bu düsturda meydan operatorları φ_α və φ^*_α uyğun olaraq, $a_{x_i}(t_i)$ və $a^*_{y_j}(s_j)$ operatorları ilə əvəz olunur, Ω vektoru kimi isə sistemin əsas vəziyyətinə baxılır (məxsusi H vektoru özünün məxsusi qiymətilə). Qrin temperatur funksiyaları adlandırılan funksiyalar analoji təyin olunur, bu halda yalnız əsas vəziyyət üzrə ortalama əvəzinə tarazlıqlı Gibbs vəziyyətinə görə ortalanmaya baxılır.

Əd.: [1] Шварц А. С., Математические основы теории поля, М., 1975; [2] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.

QRİN α – FUNKSİYASI « Грина α – функция; Green α – function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

QROSS TOPOLOGİYASI « Гросса топология; Gross topology » – H Hilbert fəzasında bütün seminormaları ilə verilən topologiyadır, bu seminormaların H-da standart Qauss silindrik ehtimallarına nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur. Q. t. məqbul topologiyadır (bax, [2]). Bu hökmün və Q. t.-nın analoqları H fəzasında və Sazonov xassəli Banax fəzalarında digər silindrik ehtimallar üçün də mövcuddur.

Əd.: [1] Gross L., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1963, № 46; [2] Гросс Х.-С., Гауссовские меры в банаховых пространствах, пер. с англ., М., 1979.

QRUPLA GECİKMƏ « групповая задержка; group delay \ lag » – bax, *Ləngimə / Gecikmə.*

QRUPLU KOD « групповой код; group code » – bax, *Blok kod.*

QUMAR, oyun **« азартная игра; gambling »** – uduş oyunçunun məharətindən deyil, təsadüfdən asılı olan oyuna deyilir.

Ehtimal nəzəriyyəsində baxılan qumar oyunlarına aid: metal pul və ya pulların atılmasını; zər və zərlərin atılmasını; kart oyunlarından – bridc, poker və s.-ni; domino və s. oyunları misal göstərmək olar. Nəzəri – oyun baxımından Q. bir oyunçunun çoxaddımlı oyunu kimi anlaşılır, bu halda onun uduşu onunla tərəf – müqabil oyunçuların strategiyasından asılı deyildir. Q. sistemi G aşağıdakı kimi təyin olunur:

k_0 – oyunçunun ilkin kapitalı;

K – kapitallar çoxluğu;

$\mathcal{M}(K)$, – K -nın altçoxluqlarında təyin olunmuş sonlu additiv ölçülər çoxluğu;

$u(k)$ – oyunçunun kapitallar çoxluğunda təyin olunmuş faydalılıq funksiyası (bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*) olarsa,

$$G = \left\langle K,\ k_0 \in K,\ \{\mathcal{M}(k)\}_{k\in K},\ u(k)\right\rangle .$$

Oyun aşağıdakı qaydada aparılır: oyunçu $\mu_0 \in \mathcal{M}(k_0)$ ölçüsünü seçir və bu halda onun kapitalı k_1, μ_0 ölçüsünə görə paylanır. Daha sonra oyunçu $\mu_1(k_1) \in \mathcal{M}(k_1)$ ölçüsünü seçir və bu halda o uyğun olaraq, k_2 kapitalına sahib olur və s. $\mu = \{\mu_0,\ \mu_1, ..., \}$ oyunçunun *strategiyasıdır.* Əgər oyunçu oyunu t anında başa çatdırırsa, onda onun uduşu $u(k_t)$ funksiyasının μ üzrə riyazi gözləməsi kimi təyin olunur. Oyunçunun məqsədi özünün faydalılıq funksiyasını maksimallaşdırmaqdan ibarətdir. Q.-a sadə misal lotereyadır. Oyunçunun nəqd kapitalı k -dırsa, o, dəyəri c -yə bərabər olan m ədəd lotereya bileti ala bilər; $m = 1, 2, ..., [k/m]$. Hər bir m ədədi üçün kapitallar çoxluğunda təyin olunmuş uyğun ehtimal ölçüsü vardır. Tirajdan sonra oyunçunun kapitalı k_1 -ə bərabər olur. Əgər $k_1 < c$ olarsa, oyun başa çatır; əgər $k_1 \geq c$ olarsa, bu halda oyunçu ya oyunu tərk edir, ya da ki, o, yenidən 1-dən $[k_1/c]$-yə qədər sayda lotereya bileti ala bilər. Oyunçunun faydalılıq funksiyası, məs., kapitalın riyazi gözləməsi və ya müəyyən bir kəmiyyətdən az olmayan uduş ehtimalı ola bilər.

Q. nəzəriyyəsi *idarəolunan stoxastik proseslərin* ümumi nəzəriyyəsinin tərkib hissəsidir.

Əd.: [1] Dubins L. E., Savage L. J., How to gamble if you must: Inequalities for stochastic process, N. Y. – [a. o.], 1965.

QURSA STOXASTİK MƏSƏLƏSİ « Гурса стохастическая задача; Goursat stochastic problem » – bir nöqtədən çıxan, iki xarakteristik əyrilərdə sərhəd şərtlərilə verilən, ikiparametrli bəyaz küylü, 2-ci tərtib xüsusi törəmələrli stoxastik hiperbolik differensial tənliyin həllinin tapılması məsələsidir. Misal olaraq, $s > 0,\ t > 0$ oblastında

$$\frac{\partial^2 \xi(s,t)}{\partial s\,\partial t} = a(s,t,\xi) + b(s,t,\xi)\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial s\,\partial t}, \qquad (*)$$

$$\xi(s,0) = \varphi(s),\ \ \xi(0,t) = \psi(t),\ \ \varphi(0) = \psi(0)$$

tənliyini göstərmək olar, burada $w(s,t)$ – Viner vərəqidir. Adətən, (*) şəklində ümumiləşmiş təsadüfi funksiyaları özündə saxlayan tənlik əvəzinə uyğun inteqral tənliyə baxılır.

QURŞAYICI FUNKSİYASI, GÜCÜN « огибающая функция мощности; envelope of a power function » – statistik kriteri üçün verilən alternativdə alınan ən böyük *gücdür*. Daha dəqiq, əgər $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ parametrik fəzadırsa və *mühümlük ölçüsü* α -nın verilən qiymətində $H_1 : \theta \in \Theta_1$ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ hipotezi yoxlanılırsa, onda Q. g. f. $\beta_\alpha^*(\theta) = \sup_\varphi \beta_\varphi(\theta),\ \theta \in \Theta_1$ münasibətilə təyin olunur, burada $\beta_\varphi(\theta)$, – φ kriterisinin gücüdür və sup isə α ölçülü bütün φ kriteriləri üzrə götürülür (və ya kontekstdən asılı olaraq, belə kriterilərin hər altsinfi üzrə). Olduqca ümumi şərtlərdə sup alınır. Əgər supremumu bütün $\theta \in \Theta_1$ üçün eyni bir kritik funksiya təmin edirsə, onda bu funksiya müntəzəm ən güclü kriteri təyin edir. $\sup_{\Theta_1}[\beta_\alpha^*(\theta) - \beta_\varphi(\theta)]$ supremumunu minimallaşdıran kriteri ən güclü ciddi kriteri adlanır. Bir sıra məsələlərdə müntəzəm ən güclü kriteri olmadığı hallarda, gücləri, gücün Q. f.-na yaxınlaşan kriteriləri müşahidələr sayını artırdıqda almaq olur (bax, *Asimptotik ən güclü kriteri*). Gücün Q. f. və asimptotik ən güclü kriteri arasında fərqin asimptotik qiymətləri asimptotik ən güclü kriteriləri öz aralarında müqayisə etməyə imkan verir.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

QURŞAYICISI, SİQNALIN « огибающая сигнала; signal envelope » – harmonik rəqsin modulyasiyasını amplitud üzrə xarakterizə edən, mənfi olmayan zaman funksiyasıdır. Məhdud enerjili $x(t)$ siqnalı üçün S. q. $r(t)$ -ni aşağıdakı kimi təyin etmək olar:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)},$$

burada $\hat{x}(t)$, – $x(t)$ siqnalının Hilbert çevirməsidir və

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau ,$$

burada inteqral onun baş qiyməti mənasında anlaşılır. S. q. anlayışının aydın fiziki mənası vardır və bu anlayış darzolaqlı siqnallar, yəni əsas enerjisi tezliklər zolağı $[f_0 - F, f_0 + F]$-də topalanmış siqnallar üçün $(f_0 >> F)$ texniki məsələlərdə tez-tez istifadə olunur. Belə siqnal yüksək dərəcədə dəqiqliklə $r(t)\cos[2\pi f_0 t + \varphi(t)]$ şəklində ifadə oluna bilinər, burada S. q. $r(t)$ və $\varphi(t)$ fazası f_0 tezliyinin rəqsləri ilə müqayisədə asta dəyişirlər.

Əd.: [1] Райс С. О., «Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике», 1982, т. 70, № 7, с. 5–13; [2] Рытов С. М., Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, М., 1976.

QURŞAYICISI, TƏSADÜFİ PROSESİN « огибающая случайного процесса; envelope of a random process » – bax, *Təsadüfi proses*; kəsilmələr.

QÜVVƏT SIRASI Kolmoqorov tənliyinin **« степенной ряд** уравнения Колмогорова; Kolmogorov equation **power series »** – bax, *KEPSTR.*

QÜVVƏTÜSTLÜ MOMENTLƏR PROBLEMİ « степенная проблема моментов; power moment problem » – ehtimal nəzəriyyəsində ξ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri $\mathbf{M}\xi^k$ üzrə onun ehtimal *paylanması* $\mathbf{P}$-nin təyin olunma problemidir. $a_0 = 1,\ a_1,\ a_2, \ldots$ ardıcıllığının verildiyi fərz olunur;

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, \mathbf{P}(dx)$$

tənliklərini ödəyən, düzxətdə ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}$ axtarılır.

Bu problemin həlli həmişə mümkün deyildir. Həllolunan Q. m. p.-nin yeganə həlli varsa, o, m ü ə y y ə n, yeganə həlli yoxdursa, q e y r i – m ü ə y y ə n problem adlanır. Problemin həllolunanlığının zəruri və kafi şərti H a m b u r g e r t e o r e m i d i r: bütün

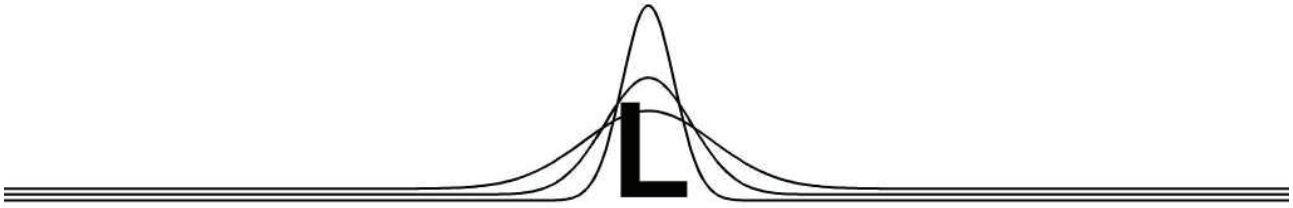
$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{i+k}\, x_i\, x_k$$

Hankel (H. Hankel, 1869) formaları mənfi olmamalıdırlar, $x_i,\ x_k \in \mathbb{R}^1$.

$$\sum a_{2k}^{-1/2k} = \infty$$

– K a r l e m a n şərti Q. m. p.-nin müəyyən problem olması üçün kafi şərtdir (məs., normal paylanma öz momentləri ilə birqiymətli təyin olunur). Q. m. p. tipli məsələlərdən ilk dəfə qoyulan və həll olunanlardan biri P. L. Çebışevə məxsusdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Ч е б ы ш е в П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М., 1948; [2] S t i e l t j e s T., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et phys.», 1894, t. 8, p. 1–22; 1895, t. 9, p. 1–47; [3] А х и е з е р Н. И., Классическая проблема моментов, М., 1961; [4] Ф е л л е р В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.



LAQ « лаг; lag » – bax, *Ləngimə / gecikmə.*

LAQLAR / PAYLANMIŞ LAQLAR MODELİ « лагов распределенных модель; distributed lags model » – bax, *Paylanmış gecikmələr modeli.*

LANJEVEN TƏNLİYİ « Ланжевена уравнение; Langevin equation » – zamanın sürətlə dəyişən, təsadüfi funksiyası daxil olan differensial tənlikdir.

Kütləsi m olan müvafiq çəkili hissəciyin hərəkətini mayedə müşahidə edən P. Lanjeven [1]-də fərz etmişdir ki, bu hissəciyə iki qüvvə təsir edir:

1) özlü sürtünmə hesabına ləngidici qüvvə: makroskopik hidrodinamikanın nəticəsi tətbiq olunduqda, bu qüvvə $-6\pi a\eta \frac{dx}{dt}$-yə bərabərdir, burada $x(t)$ – hissəciyin vəziyyəti, t – zaman, η – özlülük, a – sferik olduğu fərz edilən hissəciyin diametridir;

2) dəyişdirici (fluktuasion) qüvvə $X(t)$; bu qüvvə mayenin molekulları tərəfindən sabit nöqtələrlə şərtləndirilmiş qüvvədir, eyni ehtimalla müsbət və ya mənfi ola bilər. Nyuton qanununa əsasən,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi a\eta \frac{dx}{dt} + X(t). \qquad (*)$$

(*) tənliyi (L a n j e v e n t ə n l i y i) stoxastik differensial tənliyə ilk misaldır. (*)-nu $x(t)$-yə vuraraq, statistik mexanikaya əsasən, nəzərə alaraq ki,

$$\mathbf{M}\,\frac{1}{2}\,m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\,kT$$

doğrudur (T – mütləq temperatur, k – Boltsman sabitidir) və « $X(t)$ kəmiyyətinin qeyri – requlyarlığına» görə $\mathbf{M}\,X(t)x(t) = 0$ olduğunu qəbul edərək, P. Lanjeven $\mathbf{M}x^2(t)$ üçün aşağıdakı bərabərsizliyi almışdır:

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{M}x^2(t) = \frac{kT}{3\pi\eta a} + C\exp\left\{-6\pi a\eta\frac{t}{m}\right\},$$
$$C = \text{const}.$$

40 il sonra K. İto (K. Itô) stoxastik differensial tənliklərin ciddi konsepsiyasını vermişdir. L. t.

$$dY(t) = -\gamma Y(t)dt + dw(t)$$

tipli xətti ($\frac{dx}{dt}$ üçün) stoxastik differensial tənlikdir, burada $w(t)$ – standart Viner prosesidir. Bu tənliyin həlli

$$Y(t) = e^{-\gamma t}\left(Y(0) + \int_0^t e^{\gamma s}dw(s)\right)$$

Ornşteyn – Ulenbek prosesi kimi məlumdur. $Y(t)$ prosesinin kovariasiyası

$$\mathbf{M}Y(t)Y(s) = (\sigma^2 + 1/2\gamma)\,e^{-\gamma(t+s)} + e^{-\gamma(t-s)}/2\gamma, \quad t \geq s$$

düsturu ilə ifadə olunur və fərz olunur ki, $Y(0)$, – $(0, \sigma^2)$ parametrlərli Qauss paylanması ilə paylanmışdır.

Əd.: [1] L a n g e v i n P., «C. r. Acad. sci.», 1908, t. 146, p. 530–33 (рус. пер. – Л а н ж е в е н П., Избранные труды, М., 1960, с. 338–41); [2] Г а р д и н е р К. В., Стохастические методы в естественных науках, пер. с англ., М., 1986; [3] В а т а н а б э С., И к э д а Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

LAPLAS METODU « Лапласа метод; Laplace method » – $t \to \infty$ olduqda $\int_a^b F_t(x)dx$ tipli inteqrallar üçün asimptotikaya əsas əlavələri inteqralaltı funksiyanın yalnız maksimum nöqtəsinin kiçik ətrafı verildiyi halda nəticənin yaxşı olmasını təmin edən asimptotik düsturların çıxarılışı üçün üsullar toplusudur. L. m.-nun tətbiqi üçün inteqralaltı funksiyanın maksimum nöqtəsinin ətrafında araşdırmalar aparılmalı və bu ətrafın tamamlayıcısı üzrə inteqral qiymətləndirilməlidir.

Asimptotik ayrılışa aid misallar (bax, [1]): 1) əgər $\varphi(x)$, – $(-a, a)$ parçasının nöqtələrində requlyar, analitik funksiya olarsa, onda

$$\sqrt{\frac{t}{\pi}}\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{-tx^2}dx \approx \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2n)}(0)}{n!\,2^{2n}}\,t^{-n}, \quad t \to \infty;$$

2) əgər $\varphi(x)$, – $(0, a]$ yarımintervalının nöqtələrində requlyar, analitik funksiya olarsa və $\alpha > -1$ olduqda $x = 0$ nöqtəsinin sağ ətrafında $\varphi(x) = x^{\alpha}(a_0 + a_1x + \ldots)$ olarsa, onda

$$\int_0^a \varphi(x)\,e^{-ix}dx \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{t^{n+\alpha}}\,a_{n-1}, \quad t \to \infty.$$

L. m.-ndan istifadə etmək üçün inteqralaltı funksiyanın xassələri haqqında olduqca ətraflı informasiyaya malik olmaq zəruridir. L. m. xarakteristik funksiyalar metodunun əsas hissəsini təşkil edir; məs., bu metoddan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremlərinin isbatında istifadə olunur.

Əd.: [1] Е в г р а ф о в М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 3 изд., М., 1979.

LAPLAS PAYLANMASI « Лапласа распределение; Laplace distribution » – *ikiölçülü üstlü paylanmanın* digər ifadəsidir. İlk dəfə P. Laplas tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur və bəzən *normal qanun* «Laplasın ikinci paylanma

qanunu»ndan fərqli olaraq, əksər hallarda «Laplasın birinci paylanma qanunu» kimi də adlandırılır.

Əd.: [1] L a p l a c e P., Theorie analytique des probabilités, P., 1812.

LAPLAS TEOREMİ « Лапласа теорема; Laplace theorem » – *binomial paylanmanın* normal paylanma ilə approksimasiyası haqqında teoremdir; mərkəzi limit teoreminin birinci variantıdır. P. Laplas 1812-də A. Muavrdan (A. Moivre, 1730) asılı olmadan isbat etmişdir. Bax, *Muavr – Laplas teoremi.*

LAPLAS – QAUSS PAYLANMASI « Лапласа – Гаусса распределение; Laplace – Gausse distribution » – bax, *Qauss – Laplas paylanması.*

LATIN ALTKVADRATI « латинский подквадрат; Latin subsquare » – bax, *Latın kvadratı.*

LATIN DÜZBUCAQLISI « латинский прямоугольник; latin rectangle » – $(m\times n)$, $(m \le n)$ – ölçülü elə düzbucaqlı matrisdir ki, onun hər bir sətri n elementdən ibarət S çoxluğunun elementlərindən təşkil olunmuş yerdəyişmədir (təkrarsız) və sütunlarda hər bir element bir dəfədən artıq təkrar olunmur. $m = n$ olduqda L. d. – n tərtib *latın kvadratıdır.* Adətən, $S = (1, 2, ..., n)$ götürülür və L. d. haqqında deyilir ki, o, S çoxluğunda qurulmuşdur.

İxtiyari natural m, n $(m \le n)$ qiymətlərində L. d. mövcuddur. L. d.-na misal birinci sətri $(1, 2, ..., n)$ olan, sonrakı bütün sətirləri isə əvvəlkindən bir addıma tsiklik yerinidəyişmə ilə alınan matrisdir. $(m < n)$ $(m\times n)$ – ölçülü L. d.-nı n tərtib latın kvadratına qədər elə doldurmaq olar ki, latın kvadratının birinci m sətri L. d.-nın sətirləri ilə eyni olsun.

$(m\times n)$ – ölçülü L. d.-nın sayı $L(m, n)$ üçün aşağıdakı qiymət doğrudur:

$$L(m, n) \ge n!(n-1)!\ldots(n-m+1)!.$$

L. d.-nın birinci sətri $(1, 2, ..., n)$ olarsa, o, n o r m a l l a ş d ı r ı l m ı ş L. d. adlanır. Normallaşdırılmış L. d.-nın sayı $K(m, n)$, $L(m, n)$ ədədi ilə

$$L(m, n) = n!K(m, n)$$

münasibətilə bağlıdır.

$L(m, n)$-nin hesablanması klassik kombinatorika məsələləri ilə bağlıdır: məs., ailələr sayı və nizamsızlıqlar sayı kimi. Məs., nizamsızlıqlar sayı $D_n = K(2, n)$ və ailələr sayı haqqında məsələdə yerdəyişmələr sayı U_n, – $(3\times n)$ – ölçülü L. d.-dır və bu matrisin birinci iki sətri məhz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}$$

olur. U_n üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2k}{2k-1} \binom{2k-1}{k} (n-k)!,$$

$$U_n \sim n!\, e^{-2} \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2!\,(n-1)_2} - \ldots + \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1)_k} + \ldots\right),$$

$$(m)_k = m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

$K(3, n)$ ədədi D_k və U_l vasitəsilə ifadə olunur:

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k\, D_{a-k}\, D_k\, U_{n-2k},$$

burada $m = [n/2]$, $U_0 = 1$. Aşağıdakı asimptotik ifadə də doğrudur:

$$K(3, n) \sim (n!)^2\, e^{-3}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2!(n)_2} - \ldots + \frac{bs}{s!(n)_s} + \ldots\right),$$

burada $b_s = H_s(-1/2)$, $H_s(t)$ – Hermit çoxhədlisidir. Məlumdur ki,

$$K(3, r+s) = 2^r K(3, s) (\mathrm{mod}\, r).$$

Sətirlərinin sayı üçdən artıq olan L. d.-nın hesablanma məsələsi həll olunmamışdır. $m < n^{4/3-\delta}$ olduqda, burada $\delta = \delta(n) \to +0$ münasibəti $n^{-\delta(n)} \to 0$ olduqda ödənilir və bu halda

$$L(m, n) \sim (n!)^m \exp\left\{-\frac{m(m-1)}{2}\right\}$$

asimptotikası alınmışdır.

L. d. üçün Latın kvadratları ilə bağlı bəzi anlayışlar və teoremlər vardır. Məs., $(m\times n)$ ölçülü $\|a_{ij}\|$ və $\|b_{ij}\|$ L. d.-ları, əgər (a_{ij}, b_{ij}) cütlərinin hamısı müxtəlif olarsa, o r t o q o n a l L. d.-ları adlanır. İxtiyari iki L. d.-sı ortoqonal olan L. d.-ları çoxluğunda L. d.-larının sayı $m-1$-dən artıq deyildir.

Əksər hallarda L. d. kimi aşağıdakı L. d.-nın ü m u m i l ə ş m ə s i anlaşılır: n elementdən ibarət, S çoxluğunda qurulmuş, hər bir sətir və hər bir sütununda elementləri bir dəfədən artıq iştirak etməyən $(r\times s)$ – ölçülü matrisə $(r\times s)$ – ölçülü l a t ı n d ü z b u c a q l ı s ı deyilir. n simvolu üzərində qurulmuş $r\times s$ ölçülü L. d. n tərtib Latın kvadratına qədər, yalnız və yalnız o halda genişləndirilə bilinər ki, L. d.-da hər bir simvol $r+s-n$ dəfədən az olmayaraq iştirak etsin.

Əd.: [1] P i o r d a n Д ж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *Latın kvadratı* məqaləsindəki əd.-ta bax.

LATIN KUBU « латинский куб; Latin cube » s – ölçülü b i r i n c i t ə r t i b – s sayda müxtəlif simvollardan ibarət $s > 1$ tərtib üçölçülü elə matrisdir ki, onun ixtiyari $3s$ sayda ikiölçülü kəsiklərində hər bir simvol yalnız s dəfə iştirak edir. İ k i n c i t ə r t i b s – ölçülü L. k. s^2 sayda müxtəlif simvollardan ibarət s tərtib üçölçülü elə matrisdir ki, onun ixtiyari $3s$ sayda ikiölçülü kəsiklərində hər bir simvol yalnız bir dəfə iştirak edir. s – ölçülü birinci (ikinci) tərtib L. k. s^3 sayda ölçmə aparılması üçün dördfaktorlu eksperimentin planına uyğundur; ilk üç faktor s səviyyədə, dördüncü faktor isə L. k.-nun tərtibində asılı olaraq s və ya s^2 səviyyədə qiymətlər alır. Belə uyğunluq

o halda alınır ki, (i, j, k)-cı ölçmədə birinci faktor i-ci səviyyədə, ikinci – j-ci, üçüncü – k-cı, dördüncü faktor isə L. k.-nun (i, j, k)-cı yerindəki simvolla təyin olunaraq qeyd olunsunlar. Eksperimentin planlaşdırılmasında ortoqonal L. k.-larından da istifadə olunur (bax, *Ortoqonal kublar*).

Əd.: [1] Маркова Е. В., Лисенков А. Н., Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента, М., 1979.

LATIN KVADRATI « латинский квадрат; Latin square » – hər bir sətri və hər bir sütunu n elementdən ibarət sonlu S çoxluğunun elementlərinin yerdəyişmələri olan, n tərtib kvadrat matrisdir; bu halda L. k. S çoxluğunda qurulmuşdur, deyilir. Adətən, $S = \{1, 2, ..., n\}$. İxtiyari n üçün L. k. vardır; məs., elementləri $a_{ij} \equiv i + j - 1 (\mathrm{mod}\, n)$, $i, j = 1, 2, ..., n$ olan $L = \left\| a_{ij} \right\|$ matrisi L. k.-dır.

Hər bir L. k.-na *kvaziqrupun* vurma cədvəli kimi baxmaq olar və əksinə, sonlu kvaziqrupun vurma cədvəli – L. k.-dır.

n tərtib $L_1 = \left\| a_{kl} \right\|$ və m tərtib $L_2 = \left\| b_{rs} \right\|$ L. k.-ları üzrə $m \cdot n$ tərtib $L = \left\| \lambda_{ij} \right\|$ L. k.-nı aşağıdakı kimi qurmaq olar: $\lambda_{ij} = b_{rs} + (a_{kl} - 1) \cdot m$, $i = r + m(k - 1)$, $j = s + m(l - 1)$.

n tərtib L. k.-nın sayı L_n-lər üçün aşağıdakı qiymətləndirilmə

$$L_n \geq n! (n - 1)! \ldots 2! 1!$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur.

L. k.-nın birinci sətir və birinci sütun elementləri natural qaydada yerləşərsə, L. k.-na r e d ü s l ə n m i ş və ya s t a n d a r t n ö v L. k. deyilir.

n tərtib redüslənmiş L. k.-larının sayı L_n-lər üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$L_n = n!(n - 1)! l_n,$$
$$l_n \geq m_n = (n - 2)! (n - 3)! \ldots 2! 1!.$$

Eyni S çoxluğunda qurulmuş iki L. k.-dan biri digərinin sətir və sütunlarının yerlərinin dəyişdirilməsi və elementlərinin işarələmələrinin dəyişdirilməsi nəticəsində alınarsa, onlar e k v i v a l e n t L. k.-ları adlanır. n tərtib L. k.-nın ekvivalentlik sinifləri sayı k_n olsun. l_n, k_n və m_n-in ilk qiymətləri məlumdur:

n	3	4	5	6	7	8
k_n	1	2	2	22	563	1 676 257
l_n	1	4	56	9 408	16 942 080	535 281 401 856
m_n	1	2	12	288	34 560	24 883 200

Bundan başqa, $l_9 = 377\,597\,570\,964\,258\,816$. l_n-lərin qiymətləndirilməsi məsələsi həll olunmamışdır.

Eksperimentləri planlaşdırma nəzəriyyəsində elementlərinin yerləşdirilməsinə müxtəlif məhdudiyyətlər qoyulmuş L. k.-ları qurmaq tələb olunur. Əgər $\alpha \neq \beta$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ şərtlərini ödəyən ixtiyari natural α, β ədədləri üçün elə i, j, k, l varsa ki, $(a_{ij}, a_{i, j+1}) = (\alpha, \beta)$ və $(a_{kl}, a_{k+1, l}) = (\alpha, \beta)$ olsun, onda L. k.-na t a m L. k. deyilir. Tam L. k.-nın qurulması alqoritmləri n-in yalnız cüt qiymətləri üçün və n-in bəzi tək qiymətləri üçün məlumdur.

n tərtib L. k.-nın $k < n$ şərtini ödəyən k tərtib altmatrisinə onun *Latın altkvadratı* deyilir.

İxtiyari k tərtib L. k., $n \geq 2k$ olarsa, n tərtib L. k.-nın Latın altkvadratı ola bilər. n tərtib iki $L_1 = \left\| a_{ij} \right\|$ və $L_2 = \left\| b_{ij} \right\|$ L. k.-ları üçün $(i, j) \neq (k, l)$, $i, j, k, l \in s$ olduqda $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (a_{kl}, b_{kl})$ olarsa, onlara *ortoqonal Latın kvadratları* deyilir. Ortoqonal L. k.-nın qurulmasında L. k.-nın t r a n s v e r s a l ı anlayışı mühüm rol oynayır. $L = \left\| a_{ij} \right\|$ L. k.-nın t uzunluqlu n a t a m a m t r a n s v e r s a l ı L. k.-nın t sayda blokundan ibarət elə T çoxluğuna deyilir ki,

$$T = \{ (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_t, j_t) \},$$

olsun, burada $k \neq l$, $1 \leq k$, $l \leq t$ olduqda, $i_k \neq i_l$, $j_k \neq j_l$, $a_{i_k j_k} \neq a_{i_l j_l}$. Həmişə $t \leq n$; $t = n$ olduqda isə *natamam transversal* adlanır. n sayda kəsişməyən transversallar çoxluğunun n tərtib L. k.-nın varlığı üçün onun ortoqonal həmkvadratının varlığı zəruri və kafi şərtdir. Aşağıdakı 6 tərtib L. k.-nın heç bir transversalı yoxdur:

012 345
120 453
201 534
345 012
453 120
534 201.

$n \geq 7$ tərtib ixtiyari L. k.-da uzunluğu $t \geq (2n + 1)/3$ münasibətilə təyin olunan heç olmazsa bir natamam transversal vardır.

L. k.-nın bəzi ümumiləşmələri.

n tərtib natamam L. k. elə n tərtib matrisə deyilir ki, onun qəfəslərinin yalnız bir hissəsi gücü n-ə bərabər S çoxluğunun elementlərilə doldurulmuşdur, lakin hər sətir və hər bir sütunda S-in elementlərinə bir dəfədən artıq təsadüf olunmur.

Elə natamam L. k.-ları vardır ki, onları L. k.-na qədər tamamlamaq mümkün deyildir, məs.,

1 . . .
. 2 3 4
. . . .
. . . .

Yalnız $n - 1$ elementdən ibarət natamam L. k.-nı L. k.-na qədər tamamlamaq mümkündür.

Məlumdur ki, n tərtib iki müxtəlif qrupun iki Keli cədvəli bir-birindən heç olmazsa $2n$ yerdə fərqlənirlər. Elementləri natural ədədlər olan və hər bir sətir və hər bir sütununda bu elementlərin yalnız bir dəfə təsadüf olunduğu sonsuz matrisə s o n s u z L. k. deyilir.

Əd.: [1] D e n e s J., K e e d w e l l A. D., Latin squares and their applications, Bdpst., 1974; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Райзер Г. - Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [4] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

LAY « слой; stratum » – bax, *Seçimi statistik araşdırma.*

LAYLANMIŞ SEÇİM « расслоенная выборка; stratified sample » – müəyyən fərqləndirici əlamətlərinə görə kiçik həcmli bir neçə seçimlərə ayrılmış *seçimdir.* Fərz olunur ki, $N \geq 2$ həcmli seçimin hər bir elementi $k \geq 2$ sayda mümkün əlamətlərdən, yalnız və yalnız birinə malikdir. Bu halda, ilkin seçimi müvafiq surətdə, $n_1, ..., n_k$ həcmli k sayda seçimlərə ayırmaq olar ($n_1 + ... + n_k = N$):

$$X_{11}, ..., X_{1n_1}$$
$$X_{21}, ..., X_{2n_2}$$
$$.....$$
$$X_{k1}, ..., X_{kn_k}$$

və bu bölgü belə prinsiplə həyata keçirilir: i-ci $X_{i1}, ..., X_{in_i}$ seçiminə yalnız i əlamətli elementlər aid olunur. Belə bölgü nəticəsində ilkin seçim k sayda $X_{i1}, ..., X_{in_i}$, $i = 1, ..., k$ laylarına ayrılır və məhz i-ci lay i-ci əlamət haqqında informasiya daşıyır. Məs., ikinci Y komponenti diskret paylanmaya malik ikiölçülü (X, Y) təsadüfi kəmiyyətinin X komponentinin realizasiyalarını müşahidə etdikdə L. s. anlayışı alınır.

Əd.: [1] У и л к с С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

LAYLI SEÇİM METODU « слоистой выборки метод; stratified sampling method » – inteqralların hesablanması üçün *Monte – Karlo metodunda* istifadə olunan qaydadır, bu qaydaya görə inteqrallama oblastı əvvəlcədən $\{D_i\}$ hissələrinə bölünür, hər bir i-ci hissə üçün təsadüfi n_i düyünləri üzrə inteqralın özünün statistik qiyməti qurulur; $i = 1, ..., m$. İnteqral üçün alınmış yekun statistik qiymətlərin dispersiyasını minimallaşdıran və ya sadə Monte – Karlo metodu ilə müqayisədə heç olmazsa dispersiyanı kiçildən $\{n_i\}$ qiymətlərini təyin etmək olur (bax, [1]). İnteqral tənliklərin həlli üçün laylı seçim [2]-də işlənilmişdir.

Əd.: [1] С о б о л ь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [2] М и х а й л о в Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте – Карло, Новосиб., 1974.

LEBEQ AYRILIŞI « Лебега разложение; Lebesgue decomposition », F p a y l a n m a f u n k s i y a s ı n ı n L e b e q a y r ı l ı ş ı – F paylanma funksiyasının üç p a y l a n m a f u n k s i y a s ı n ın xətti kombinasiyasının

$$F = p_1 F_1 + p_2 F_2 + p_3 F_3 \qquad (*)$$

bərabərliyi ilə ifadəsi olub, ehtimal nəzəriyyəsində ənənəvi istifadə olunan ayrılışdır, burada $p_i \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ şərtlərini ödəyən p_i-lər – sabitlər, F_i – paylanma funksiyalarıdır. Belə ki, bu halda F_1 – d i s k r e t (yəni F_1 funksiyasının ölçü daşıyıcısı $\operatorname{supp} F_1$ – gücü hesabidən çox olmayan çoxluq), F_2 – s i n q u l y a r (yəni $\operatorname{supp} F_2$ – Lebeq ölçüsü sıfra bərabər hesabi olmayan çoxluq), F_3 – m ü t l ə q k ə s i l m ə z (yəni paylanmasının sıxlıq funksiyası olan) p a y l a n m a f u n k s i y a l a r ı d ı r. İxtiyari F funksiyası üçün (*) ayrılışı yeganədir.

Ölçü nəzəriyyəsində $p_1 F_1 + p_2 F_2$ xətti kombinasiyaları s i n q u l y a r adlanır. Lebeq ölçüsü əvəzinə (*) ayrılışını yazmaq üçün düzxətdə təyin olunan digər ölçülərdən istifadə etmək olar (bax, [1], səh. 169). (*) ayrılışı ölçülərin ayrılması haqqında ümumi Lebeq teoremindən alınır (bax, [2], səh. 134). Müxtəlif təbiətli fəzalarda ehtimal paylanmaları üçün (*)-ya analoji ayrılışlar mövcuddur (Evklid, Hilbert, Banax fəzalarında və s.).

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

LEBEQ ÖLÇÜSÜ « Лебега мера; Lebesgue measure » – bax, *Ölçü*.

LEBEQ TEOREMİ « Лебега теорема; Lebesgue theorem » – bax, *Borel funksiyası.*

LEBOVİTS BƏRABƏRSİZLİYİ « Лебовица неравенство; Lebowitz inequality » – bax, *Korrelyasion bərabərsizliklər.*

LEKSİKOQRAFİK MÜNASİBƏT « лексикографическое отношение; lexicographirem » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

LEMAN – ŞEFFE TEOREMİ « Лемана – Шеффе теорема; Lehmann – Scheffé theorem » – bax, *Oxşar kriteri*.

LENARD – CONS POTENSİALI « Ленард – Джонса потенциал; Lenard – Jones potential » – bax, *Potensial*(ı) G i b b s m e y d a n ı n ı n.

LEVENBERQ – MARKVARDT METODU « Левенберга – Марквардта метод; Levenberg – Marquardt method / algorithm » – *ən kiçik kvadratlar metodu* əsasında qeyri – xətti ölçmə modellərində parametrlərin qiymətləndirilməsi üçün hesablama praktikasında ən çox yayılmış metodlardan biridir.

Fərz olunur ki, n – ölçülü $\mathbf{Y} = (y_1, ..., y_n)^{\mathrm{T}}$ ölçmələr vektoru tamamilə müəyyən, lakin naməlum parametrlərin p – ölçülü $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_p)^{\mathrm{T}}$ vektoru ilə

$$\mathbf{Y} = F(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

münasibətilə əlaqəlidir, burada F – məlum $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ differensiallanan inikasıdır, $\boldsymbol{\varepsilon}$, – F inikasının koordinat funksiyaları $f_i(\theta)$-lərin ölçmələrinin asılı olmayan təsadüfi xətalarının vektorudur. Fərz olunur ki, $\hat{\theta}^{(k)}$ yaxınlaşması məlumdur; reqressiya funksiyası F-i $\hat{\theta}^{(k)}$ ətrafında xətti hədlərinə qədər Teylor sırasına ayıraraq, xəttiləşdirilmiş reqressiya almaq olur, yəni

$$\mathbf{Y} = F(\hat{\theta}^{(k)}) + P_k(\theta - \hat{\theta}^{(k)}), \quad P_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta_i}(\hat{\theta}^{(k)}) \right)_{(n \times p)}. \qquad (1)$$

(1) xəttiləşdirilmiş reqressiyasına ən kiçik kvadratlar metodunu tətbiq etdikdə, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti üçün aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunan qiymət alınır:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} + (P_k^{\mathrm{T}} P_k)^{-1} P_k^{\mathrm{T}} (Y - F(\hat{\theta}^{(k)})). \qquad (2)$$

Alınan rekurrent prosedur çox vaxt Q a u s s – N y u t o n m e t o d u adlandırılır. Bu prosedurun yığılma şərtləri (bax, [1], [2]) və başlanğıc yaxınlaşmanın seçilməsi araşdırılır; bununla

əlaqədar yaranan hesablama çətinliklərinin ən çoxu $P_k^{\mathsf{T}} P_k$ matrisinin yaxşı şərtləndirilməməsi mümkünlüyü ilə bağlı olur. Metodun modifikasiyası (2)-də çevirmə işarəsi altında bu matrisin $(P_k^{\mathsf{T}} P_k + \mu I)$ matrisi ilə (bax, [3]) və ya

$$(P_k^{\mathsf{T}} + P_k + \mu_k D_k)$$

matrisi ilə əvəzlənməsi ilə alınır, burada

$$D_k = \operatorname{diag}(P_k^{\mathsf{T}} P_k)$$

və bu matris requlyarizasiya parametri μ_k-nın növbəti idarəolunması ilə götürülür (bax, [4]). Adətən, $\mu_k \approx 0{,}01$ qəbul olunur, sonra μ_k tədricən 0-a qədər kiçildilir. μ_k parametrinin daha mürəkkəb idarəolunma sxemləri [3], [4]-də verilir. Bu metodun əsas ideyası *yalvari* (*ridc*) *reqressiya* və *Ceyms – Steyn statistik qiymətlər* ideyalarına yaxındır.

Əd.: [1] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессии, М., 1981; [2] Бард Й., Нелинейное оценивание параметров, пер. с англ., М., 1979; [3] Демиденко Е. З., Нелинейная регрессия, в кн.: Математические методы решения экономических задач, сб. 7, М., 1977; [4] Marquardt D. W., «J. Soc. Industry. Appl. Math.», 1963, v. 11, p. 431–44; [5] Levenberg K., «Quarterly Appl. Math.», 1944, v. 2, p. 164–68; [6] Демиденко Е. З., Оптимизация и регрессия, М., 1989.

LEVİ AYRILIŞI asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslərin « **Леви разложение** случайных процессов с независимыми приращениями; **Lévy decomposition** of random process with independent increments » – asılı olmayan artımlarlı *təsadüfi prosesin* təsadüfi olmayan funksiya, asılı olmayan artımlarlı diskret təsadüfi proses və asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz təsadüfi prosesin cəmi şəklində ifadəsidir.

Əd.: [1] Lévy P., «Ann. scuola norm. sup. Pisa. Sci. pis. e mat.», 1934, v. 3, p. 337–66; 1935, v. 4, p. 217; [2] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

LEVİ BƏRABƏRSİZLİYİ « Леви неравенство; Lévy inequality » – 1) L. b. medianları ilə mərkəzlənmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin maksimumunun paylanması üçün. $X_1, ..., X_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $S_k = X_1 + ... + X_k$ və $\mathbf{m}X$, – X təsadüfi kəmiyyətinin medianı olsun, onda ixtiyari t üçün

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}(S_k - \mathbf{m}(S_k - S_n)) \ge t\} \le 2\mathbf{P}\{|S_n \ge t|\}$$

və

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}|S_k - \mathbf{m}(S_k - S_n)| \ge t\} \le 2\mathbf{P}\{|S_n \ge t|\}$$

L. b.-likləri doğrudur. Bu bərabərsizliklərin bilavasitə nəticəsi simmetrik paylanmış $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n} S_k \ge t\} \le 2\mathbf{P}\{S_n \ge t\}$$

və

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge t\} \le 2\mathbf{P}\{S_n \ge t\}$$

L. b.-ləridir.

L. b.-ni P. Levi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmalarının yığılmasının ümumi problemlərini öyrənərkən almışdır (bax, [1]). L. b.-nin elə ümumiləşmələri vardır ki, burada mərkəzləyici konstantlar əvəzinə uyğun kvantillər götürülmüşdür (bax, [2]), elə ümumiləşmələri də vardır ki, burada L. b. asılı $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri ilə bağlıdır.

2) L. b. özlərinin medianları ilə mərkəzlənmiş asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin maksimumunun paylanması üçün. P. Levi tərəfindən verilmiş ([3]-də) və B. A. Roqozin tərəfindən ([4]-də) bərabərsizliyə daxil olan konstantların dəqiqləşdirilməsi ilə ciddi isbat olunmuşdur. L. b. dəqiqləşdirilmiş variantda aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}|X_k - \mathbf{m}X_k| > t\} \le 8\mathbf{P}\{|S_n - \mathbf{m}S_n| \ge t/4\},$$

burada $X_1, ..., X_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $S_n = X_1 + ... + X_n$, $\mathbf{m}X_k$, – X_k təsadüfi kəmiyyətinin medianıdır. Əgər $X_1, ..., X_n$ simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}|X_k| > t\} \le 2\mathbf{P}\{|S_n| > t\}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

3) L. b. təsadüfi elementlər üçün – simmetrik paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər üçün klassik L. b.-ni vektor fəzalarında təsadüfi elementlərə genişləndirən bərabərsizlikdir. Bu bərabərsizlik ilk dəfə [5]-də J. P. Kaxan tərəfindən Banax fəzalarında təsadüfi sıraların öyrənilməsi ilə bağlı alınmışdır. Daha ümumi şəkildə o, aşağıdakı kimi ifadə olunur (bax, [6]). $X_1, ..., X_n$ – ölçülən $(E, \mathscr{B})$ fəzasında asılı olmayan simmetrik təsadüfi elementlər, $S_k = X_1 + ... + X_k$ olsun. Onda $C + C \in \mathscr{B}$ şərtini ödəyən ixtiyari $C \in \mathscr{B}$ çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(S_k \notin (C+C)/2)\right\} \le 2\mathbf{P}\{S_n \notin C\},$$

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n}(X_k \notin (C+C)/2)\right\} \le 2\mathbf{P}\{S_n \notin C\}$$

bərabərsizlikləri doğrudur. Bu bərabərsizliklərdən alınır ki, ixtiyari $\mathscr{B}$ – ölçülən $\|\cdot\|$ yarınorması üçün L. b. doğrudur, yəni

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}\|S_k\| > t\} \le 2\mathbf{P}\{\|S_n\| > t\},$$

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n}\|X_k\| > t\} \le 2\mathbf{P}\{\|S_n\| > t\}.$$

Bu bərabərsizliklər $X_1, ..., X_n$ təsadüfi elementlərinin asılı olmamazlıqları tələbinin bir qədər zəiflədilmiş halı üçün də ödənilir. Banax fəzalarında təsadüfi elementlər üçün $X_1, ..., X_n$-lərin simmetrikliyi fərz olunmadığı halda L. b.-nin ümumiləşmələri vardır.

Əd.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatories, 2 ed., P., 1954; [2] Петров В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 1, с. 140 – 44; [3] Levy P., «Bull. sci. math.», 1953, t. 77, p. 9 – 40; [4] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 4, с. 701 – 07; [5] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973.

LEVİ İNİKASI « Леви отображение; Lévy mapping » – bax, *Kanonik ifadə*(s i) ö l ç ü l ə r i n k o n v o l - y u s i o n s e m i – q r u p l a r ı n ı n.

LEVİ KANONİK İFADƏSİ « Леви каноническое представление; Lévy canonical representation » – sonsuz bölünən paylanmaların xarakteristik $f(t)$ funksiyaları üçün P. Levi tərəfindən aşkar surətdə tapılmış (bax, [1]) ifadədir:

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma - \sigma^2 t^2/2 + \int\limits_{x\neq 0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) dH(x) \right\}. \quad (*)$$

Bu düsturda hər bir sonsuz bölünən paylanmaya özünün $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\sigma^2 \geq 0$ qiymətləri və s p e k t r a l L e v i f u n k - s i y a s ı $H(x)$ uyğundur, bu funksiya aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $x < 0$, $x > 0$ yarımoxlarında azalmayandır;

2) $|x| \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşır;

3) $\int x^2\, dH(x) < \infty$, $0 < x^2 \leq 1$.

Bəzən H funksiyasına $M(x) = H(x)$, $x < 0$ və $N(x) = H(x)$, $x > 0$ kimi iki funksiya ilə ifadə olunan bir funksiya kimi də baxılır ki, bu funksiyalar yarımoxların tamamlayıcılarında sıfra bərabər götürülür. Bu halda $H = M + N$.

Daha ümumi təbiətə malik fəzalarda sonsuz bölünən paylanmalar üçün də L. k. i.-nin analoqları vardır (məs., Evklid, Hilbert fəzalarında və s.). Bax, *Levi – Xinçin kanonik ifadəsi*.

Əd.: [1] L é v y P., «Ann. scuola norm. sup. Pisa», ser. 2, 1934, v. 3, p. 337–66; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Г н е д е н к о Б. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] P a r t h a s a r a t h y K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y. – L., 1967.

LEVİ KANONİK İFADƏSİ B a n a x f ə z a s ı n d a **« Леви каноническое представление** в б а н а х о - в о м п р о с т р а н с т в е; **Lévy canonical representation** i n B a n a c h s p a c e **»** – B Banax fəzasında sonsuz bölünən ν paylanmasının *xarakteristik funksionalının* aşağıdakı kimi verilən ifadəsidir:

$$\hat{\nu}(f) = \exp\left\{ i f(x_0) - \frac{1}{2}\Phi(f,f) + \int\limits_B h_\tau(f,x)\, \mu(dx) \right\}.$$

Burada $f \in B^*$, $x_0 \in B$. Φ – *Qauss kovariasiyasıdır*,

$$h_\tau(f,x) = \exp\{ i f(x) \} - 1 - i f(x)\, \mathbf{I}_{\{\|x\| < \tau\}}(x) \qquad (*)$$

$\mathbf{I}(x)$, – A çoxluğunun indikator funksiyası, μ – Lebeq ölçüsüdür, yəni B-də elə σ – sonlu ölçüdür ki, hər hansı $\tau > 0$ üçün $\exp\left\{ \int h_\tau(f,x)\, \mu(dx) \right\}$ B-də hər hansı ehtimal ölçüsünün xarakteristik funksionalıdır. Sonluölçülü fəzada Φ ixtiyari simmetrik mənfi olmayan müəyyən kvadratik forma, μ əvəzinə

$$\int \min(1, \|x\|^2)\, \mu(dx) < \infty$$

şərtini ödəyən ölçü götürülə bilinər.

Ümumi Banax fəzasında bu belə olmur. İndiki zamana qədər Qauss kovariasiyası və Levi ölçüsünün tam təsviri yoxdur.

Əd.: [1] A r a u j o A., G i n e E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y., 1980; [2] L i n d e W., Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Lpz., 1983.

LEVİ METRİKASI « Леви метрика; Lévy metric » – həqiqi X təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathscr{X}$ çoxluğunda və ya onların uyğun F_X paylanma funksiyalarının $\mathscr{F}$ çoxluğunda

$$L(X,Y) = L(F_X, F_Y) =$$
$$= \inf\{\varepsilon : F_X(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F_Y(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + \varepsilon,\ x \in \mathbb{R}^1\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan adi *ehtimal metrikasıdır*. [1]-də P. Levi tərəfindən daxil olunmuşdur, $\mathscr{F}$-də paylanmaların zəif yığılma topologiyasını doğurur. L. m.-nın tərifi dəyişilmədən $\mathbb{R}^1$-də azalmayan bütün mümkün funksiyaların çoxluğu M-ə köçürülür (bu halda metrikanın sonsuz qiymətləri istisna olunmur).

$\mathscr{F}$-də L. m.-nın mühüm xassələri aşağıdakılardır:

1) $(\mathscr{F}, L)$ metrik fəzası separabel və tam fəzadır.

2) əgər $F \in M$ və $F^{-1}(x) = \inf\{t : F(t) < x\}$ olarsa, onda ixtiyari $F, G \in M$ üçün $L(F,G) = L(F^{-1}, G^{-1})$ bərabərliyi doğrudur.

3) L. m. kompozisiya və paylanma funksiyalarının hasili əməllərinə nəzərən requlyar metrikadır, bu da L-in semiadditivliyinin uyğun xassələrilə eynigüclüdür: X_i, Y_i asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ixtiyari cütü üçün

$$L(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) \leq L(X_1, X_2) + L(Y_1, Y_2),$$
$$L(\max(X_1, Y_1), \max(X_2, Y_2)) \leq L(X_1, X_2) + L(Y_1, Y_2)$$

münasibətləri doğrudur.

4) əgər $\alpha_k \geq 0$ və $F_k, G_k \in \mathscr{F}$, $k = 1, 2, \ldots$ olarsa, onda

$$L\left(\sum_k \alpha_k F_k, \sum_k \alpha_k G_k \right) \leq \max\left(1, \sum_k \alpha_k\right) \max L(F_k, G_k)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

5) ixtiyari $r > 0$ və ixtiyari X təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$L(X,0) \leq (\mathbf{M}|X|^r)^{1/1+r}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

6) $L(F,G)$ L. m.-nın $\rho(F,G)$ *müntəzəm metrikası* ilə əlaqəsi

$$L \leq \rho \leq L + \min\{Q_F(L), Q_G(L)\}$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $Q_F(x)$, – $F \in \mathscr{F}$ funksiyasının konsentrasiya funksiyasıdır. G paylanmasının sıxlıq funksiyasının varlığı halında bu münasibətin nəticələrindən biri aşağıdakı bərabərsizlikdir:

$$\rho \leq \left(1 + \sup_x G'(x) \right) L,$$

digəri – limit paylanması kəsilməz olarsa, paylanmaların zəif və müntəzəm yığılmalarının ekvivalentliyi haqqında məlum teoremdir.

7) *Levi – Proxorov metrikası* π ilə $\varkappa_1$ orta metrikası arasında əlaqə

$$L \le \pi \le \sqrt{\varkappa_1}$$

bərabərsizlikləri ilə ifadə olunur.

8) ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri və $a \in \mathbb{R}^1$, $b > 0$ üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$L(X + a;\ Y + a) = L(X, Y),$$

$$L(bF_X, bF_Y) \le bL(X/b, Y/b),$$

$$\lim_{b \to 0} L(X/b, Y/b) = \rho(X, Y)$$

$$\lim_{b \to 0} bL(X/b, Y/b) = \rho(F_X^{-1}, F_Y^{-1}).$$

9) əgər f_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdırsa, onda ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətlər cütü və ixtiyari $T > 0$ üçün

$$L(X, Y) \le \frac{1}{\pi} \int_0^T \left| f_X(t) - f_Y(t) \right| \frac{dt}{t} + 5{,}66\, \frac{\ln(1 + T)}{T}$$

bərabərsizliyi doğrudur, belə ki, ikinci toplanandakı loqarifmik vuruqdan ümumi halda azad olmaq mümkün deyil (bax, [6]).

Çoxölçülü fəzalarda L. m.-nın analoqları haqqında bax, *Levi – Proxorov metrikası*.

Əd.: [1] L é v y P., Theorie de l'addition des variables aléatories, P., 1937; 2 éd., P., 1954; [2] З о л о т а р е в В. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 224–31; [3] З о л о т а р е в В. М., «Зап. научн. семинара ЛОМИ АН СССР», 1979, т. 87, с. 18–35; [4] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [6] P o p o v V. A., Lecture Notes in Math., 1987, v. 1233, p. 114–24.

LEVİ MEYDANI « Леви поле; Lévy field » – ç o x - p a r a m e t r l i B r a u n h ə r ə k ə t i, – mərkəzlənmiş $\{\zeta(t),\ t \in T\}$ Qauss meydanıdır, $\mathbf{M}|\zeta(t) - \zeta(s)|^2$ struktur funksiyası T metrikası ilə üst-üstə düşən metrik fəzanın elementləri ilə indekslənmişdir. Meydan P. Levi tərəfindən [1]-də vektor parametrli Braun hərəkətinin ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur və $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzası və $d \le \infty$ dim. – ölçülü S^d kürəsi üçün öyrənilmişdir (bax, [1]).

L. m. ixtiyari hamar Riman çoxobrazlısı üzərində lokal təyin olunmuşdur. L. m.-nın daşıyıcıları: a) mənfi əyriliyə malik ikiölçülü birəlaqəli səthlər (bax, [2]); b) yalnız və yalnız, elə xətti normalanmış fəzalardır ki, bunlarda $L_1(\Omega, \mu)$ fəzasına izometrik daxiletmə mümkündür, xüsusi halda $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \le p \le 2$ fəzasına (bax, [3]); c) 1 ranqlı simmetrik M^d fəzalarının doqquz tipindən üçü – kürə, həqiqi və kompleks hiperbolik fəzalardır. Digər hiperbolik M^d fəzalarında L. m. $D_0\varphi$ şəkilli finit hamar funksiyalarının altfəzasında ümumiləşmiş L. m. kimi təyin olunur, burada D_0, – M^d-də Laplas – Beltrami operatorunun polinomudur (bax, [4], [5]).

Bütün geodeji γ-ları qapalı olan proyektiv M^d fəzaları üzərində L. m.-nın modifikasiyası B r a u n k ö r p ü s ü $Y(t)$ mövcuddur (bax, [4], [5]). Tərifə görə $Y(t)$-nin daralmalarına γ natural parametrizasiya olunduqda, γ üzərində açıqlanmış geodejinin uclarında eyni qiymətlərli Braun trayektoriyaları uyğundur. Kürə üzərində Braun körpüsünə L. m. cüt olmayan komponent kimi daxildir: $\zeta(t) = c(Y(t) - Y(\bar{t}))$, $\bar{t}$, – t-nin antipodudur. Buna görə də, yarımkürəni daşıyıcı, Braun körpüsünü L. m.-nın S^d-də genişlənməsi kimi qəbul etmək təbiidir.

L. m.-larının geniş sinfində çoxluqlarının simmetrik fərqi ölçüsü $\mu(A_1 \Delta A_2)$-yə bərabər metrikalı (Ω, μ) ölçülən fəzasının altçoxluqları sinfində təsadüfi Qauss ortoqonal ölçülər (bəyaz küy) $b(A)$, $\mathbf{M}|b(A)|^2 = \mu(A)$ ölçülərini doğurur. L. m.-na aid bir çox misallar üçün bəyaz küy sxeminə daxiledilmə mövcuddur: $\zeta_t = b(A_t)$, $A_t \subset \Omega$, – $\mathbb{R}^d$ üçün ilk dəfə N. N. Çentsov tərəfindən tapılmışdır. Sabit əyriliyə malik bütün T fəzaları üçün yarayan Çentsov sxemində Ω, – T-də 1 koölçülü istiqamətlənmiş geodeji hipersəthlər fəzasıdır, bu fəzada μ ölçüsü – T-nin hərəkətlərinə nəzərən invariant ölçüdür, A_t isə $t \in T$ nöqtəsini qeyd olunmuş $O \in T$ nöqtəsindən ayıran hipersəthlər çoxluğudur. Kürə üçün bu konstruksiyanın genişləndirilməsi Braun körpüsünün S^d-də kompleks bircins $b^*(d\omega)$ bəyaz küyü vasitəsilə ifadəsidir:

$$Y_t = \int_{S^d} \ln\left[\sqrt{-1}\,(x, \omega)\right] b^*(d\omega), \quad t \in S^d,$$

(t, ω) – skalyar hasildir (bax, [5]).

L. m. kimi mühüm bir misalda təsadüfi meydanın Markov xassəsi konsepsiyası və bu tipli Qauss meydanları nəzəriyyəsi formalaşmışdır (bax, [7], [8]). M^d və $\mathbb{R}^d$ fəzaları üzərində L. m. – məhdud oblastlar üçün Mak – Kin mənada Markov xassəsinə malikdir, lakin bu şərtlə ki, d-nin dim. – ölçüsü cüt olmasın, yəni sabit əyrilikli cüt olmayan dim. – ölçülü fəzalar halında (bax, [9]). M^∞ və $L_p(\Omega, \mu)$, $1 < p \le 2$ fəzaları üzərində sonsuz dim. – ölçülü L. m. nöqtənin ixtiyari ətrafı üzrə bərpa olunur, deməli, L. m.-nın Markov xassəsi cırlaşmışdır (bax, [3], [10]).

$\mathbb{R}^d$ üçün L. m.-nın lokal xassələri öyrənilmişdir (bax, [1], [11]). $\mathbb{R}^d$-də məhdud oblastlar üçün Levinin Hölder şərti

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim_{\rho \downarrow 0}} \left| \zeta(t) - \zeta(s) \right| \Big/ \sqrt{2d\rho \left| \ln \rho \right|} = 1 \right\} = 1,$$

$$\rho = |t - s|$$

münasibətilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Л е в и П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [2] М о р о з о в а Е. А., Ч е н ц о в Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 1, с. 152 – 55; [3] B r e t a g n o l l e J., D a c u n h a - C a s t e l l e D., K r i v i n e J.-L., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1966, t. 2, № 3, p. 231 – 59; [4] М о л ч а н Г. М., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1979, в. 21, с. 123 – 47; [5] М о л ч а н Г. М., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1987, в. 36, с. 88 – 101; [6] Л и ф ш и ц М. А., «Теория вероянт. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 624 – 28; [7] M c K e a n H. P., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1963, т. 8, в. 4, с. 358 – 78; [8] М о л ч а н Г. М., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 4, с. 784 – 87; [9] М о л ч а н Г. М., «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, № 6, с. 1276 – 79; [10] B e r m a n S. M., «Ann. Probab.», 1980, v. 8, № 6, p. 1093 – 106; [11] S i r a o T., «Nagoya Math. J.», 1960, v. 16, p. 135 – 56.

LEVİ ÖLÇÜSÜ « **Леви мера; Lévy measure** », sıçrayışlar ölçüsü – asılı olmayan artımlarlı təsadüfi prosesin *xarakteristik funksiyasının* ifadəsində $\Pi(t, A)$ ölçüsüdür. $\Pi(t, A)$-nın qiyməti asılı olmayan artımlarlı ζ prosesinin t anına qədər baş vermiş və A çoxluğunda olan sıçrayışları [yəni $\zeta(s+0) - \zeta(s-0) \in A$ olan] sayının riyazi gözləməsinə bərabərdir.

LEVİ SİNFİ « **Леви класс; Lévy class** » – bax, *Özüözünə ayrılan paylanma*, *Seriyalar sxemi*, *üçbucaq sxemi*.

LEVİ SİSTEMİ Markov prosesi üçün « **Леви система** марковского процесса; **Lévy system of a Markov process** » – *Markov prosesinin* additiv funksionalı və faza fəzasında nüvədən ibarət cütlükdür və bu sistem tamamilə kəsilən additiv funksionalların geniş sinfinin təsviri üçün təsis edilmişdir. $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ *Hant prosesinin* $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında verildiyi fərz olunur. Onda ζ prosesinin elə $B = B_t$, $t \geq 0$ kəsilməz additiv funksionalı və $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında $N(x, dy)$ nüvəsindən ibarət [daha dəqiq, $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ fəzasında təyin olunmuş $N(\cdot, \cdot)$ funksiyası birinci arqumentinə görə sanki Borel funksiyası, ikinci arqumentinə görə isə ölçüdür] cütlüyü vardır ki, $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ -də ixtiyari Borel funksiyası $f(x) \geq 0$ üçün

$$\mathbf{M}_x\left[\sum_{0<s\leq t} f(\zeta_{s^-}, \zeta_s)\right] = \mathbf{M}_x\left[\int_o^t dB_t \int_{\mathscr{E}} N(\zeta_s, dy) f(\zeta_s, y)\right] \quad (*)$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada cəmləmə ζ_t trayektoriyasının kəsilmə anları üzrə aparılır. $(N, \mathscr{B})$ cütü ζ üçün Levi sistemidir.

ζ prosesinin tamamilə kəsilən additiv funksionallarının geniş sinfi (*)-dakı cəmlər şəklində ifadə olunur (bax, [1], [2]). [2]-də *sağ Markov prosesi* halı öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Watanabe S., «Japan J. Math.», 1964, v. 34, № 1, p. 53–70; [2] Benveniste A., Jacod J., «Invent. math.», 1973, t. 21, № 3, p. 183–98.

LEVİ SPEKTRAL FUNKSİYASI « **Леви спектральная функция; Lévy spectral function** » – bax, *Sonsuz bölünən paylanma*, *Levi kanonik ifadəsi.*

LEVİ TEOREMİ « **Леви теорема; Lévy theorem** » – bax, *Bakster teoremi*, *Viner prosesi*; kəsilməzlik modulu, *Viner martinqalı*, *Xarakteristik funksiya.*

LEVİ – XİNÇİN DÜSTURU semimartinqallar üçün « **Леви – Хинчина формула** для семимартингалов; **Lévy – Khinchin formula** for semimartingales » – bax, *Semimartinqal.*

LEVİ – XİNÇİN KANONİK İFADƏSİ « **Леви – Хинчина каноническое представление; Lévy – Khinchin canonical representation** » – *Levi kanonik ifadəsinin* A. Ya. Xinçin tərəfindən 1937-də təklif olunmuş modifikasiyasıdır. L. – X. k. i. –

$$f(t) = \exp\{it\gamma + \int \mathscr{E}(t, x)\, dG(x)\} \quad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$\mathscr{E}(t, x) = \begin{cases} \left(e^{itx} - 1 - \dfrac{itx}{1+x^2}\right) \dfrac{1+x^2}{x^2}, & \text{əgər } x \neq 0 \\ -\dfrac{t^2}{2}, & \text{əgər } x = 0 \text{ olarsa,} \end{cases}$$

$\gamma \in \mathbb{R}^1$, $G(x)$ Xinçin spektral funksiyasıdır, limit qiymətləri $G(-\infty) = 0$, $G(\infty) < \infty$ olan, $\mathbb{R}^1$-də azalmayan funksiyadır. L. – X. k. i. ümumi şəkildə kanonik ifadənin xüsusi halıdır (bax, *Sonsuz bölünən paylanma*). Levi kanonik ifadəsi ilə müqayisədə L. – X. k. i.-nin bəzi analitik xarakterli üstünlükləri vardır. (*) düsturu sonlu ikinci momentlərə malik sonsuz bölünən paylanmaların xarakteristik funksiyalar üçün *Kolmoqorov düsturunu* ümumiləşdirir.

Daha ümumi təbiətli fəzalarda sonsuz bölünən paylanmaları təsvir edən L. – X. k. i.-nin analoqları məlumdur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Parthasaraty K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y. – L., 1967.

LEVİ – KRAMER TEOREMİ « **Леви – Крамера теорема; Lévy – Kramer theorem** », Kramer teoremi: – əgər qeyri – sabit iki asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəmi normal qanunla paylanmışdırsa, onda bu toplananların hər biri də normal qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyətlərdir; bu müddəa P. Levi tərəfindən ([1]-də) söylənilmiş, H. Kramer tərəfindən isbat olunmuşdur ([2]-də). Aşağıda ekvivalent müddəalar verilir:

1) əgər iki məxsusi paylanmanın kompozisiyası normal paylanmadırsa, onda bu paylanmaların hər biri normal paylanmadır;

2) əgər $\varphi_1(t)$ və $\varphi_2(t)$ xarakteristik funksiyalardırsa və

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) = \exp(-\gamma t^2 + i\beta t), \quad \gamma \geq 0, \quad -\infty < \beta < \infty \quad (*)$$

olarsa, onda

$$\varphi_j(t) = \exp\{-\gamma_j t^2 + i\beta_j t\},$$
$$\gamma_j \geq 0, \quad -\infty < \beta_j < \infty, \quad j = 1, 2$$

doğrudur.

L. – K. t.-nin 1) ifadəsində mənfi variasiyalara məhdudiyyətlərlə iki dəyişənişarəli ölçünün kompozisiyasını ümumiləşdirmək olur; 2) ifadəsində (*) şərti əvəzinə

$$\prod_{j=1}^{m} \{\varphi_j(t)\}^{\alpha_j} = \exp(-\gamma t^2 + i\beta t),$$
$$\gamma \geq 0, \quad -\infty < \beta < \infty, \quad t \in E$$

şərti baxıldığı halda ümumiləşdirmə mümkündür, burada $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ – xarakteristik funksiyalar, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – müsbət ədədlər, E – sıxlaşma nöqtəsi sıfırda olan həqiqi ədədlər çoxluğudur. Evklid fəzalarında və lokal kompakt Abel qruplarında təsadüfi kəmiyyətlər üçün L. – K. t.-nin ümumiləşmələri vardır.

L. – K. t. dayanıqlılıq xassəsinə malikdir, yəni asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin normal paylanmaya yaxın olması hər bir toplananın paylanmasının normal paylanmaya yaxın olmasını doğurur; dayanıqlılığın kəmiyyətcə qiymətləri məlumdur (bax, [5]).

L. – K. t.-nə analoji teoremlər Puasson paylanması üçün (bax, *Raykov teoremi*), Puasson və normal paylanmaların

kompozisiyası, sonsuz bölünən paylanmaların digər sinifləri üçün də alınmışdır (bax, [6]).

Əd.: [1] Lévy P., «J. math. pures et appl.», 1935, t. 14, p. 347–402; [2] Cramer H., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 405–14; [3] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [4] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 1, с. 34–59; [5] Сапогов Н. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астр.», 1959, № 19, с. 78–105; [6] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972.

LEVİ – PARETO PAYLANMASI « Леви – Парето распределение; Lévy – Pareto distribution » – özünün ikitərəfli Laplas çevirməsi ilə verilən, riyazi gözləməsi sonlu, dayanıqlı qeyri – Qauss ehtimal *paylanmasıdır*: əgər $p(u)$ Levi – Pareto ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyasıdırsa, onda ixtiyari $s > 0$ üçün

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\,u}\, p(u)\,du$$

inteqralı sonludur və

$$G(s) = e^{-M\,s\,+\,(u^* s)^{\alpha}},$$

düsturu doğrudur, burada

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u\, p(u)\,du, \quad u^* > 0, \quad 1 < \alpha < 2.$$

L. – P. p.-nın xarakteristik funksiyası

$$f(t) = \exp\left\{ i M t - \left|u^* t\right|^{\alpha}\left(1 - \frac{i t}{|t|}\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left|\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right|\right\}$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər $M = 0$ və $u^* = 1$ olarsa, onda L. – P. p. normalanmış paylanma adlanır.

α parametri $1 < \alpha < 2$ münasibətilə verilən L. – P. p.-nın sıxlıq funksiyası $p(u),\ u \to \infty$ olduqda $p_{\alpha}(u) \sim C(\alpha) u^{-(\alpha+1)}$ xassəsinə malik olur. Bu mənada L. – P. p.-ları *Pareto paylanmasına* analojidir.

L. – P. p. [1]-də daxil olunmuşdur və empirik müşahidələrin geniş sinfi üçün, məs., gəlirin paylanması, şəhərlərin ölçülərinin və ya danışıqda sözlərin tezliyinin paylanması kimi, model olaraq tətbiq olunmuşdur.

Əd.: [1] Mandelbrot B., «Int. Econ. Rev.», 1960, v. 1, p. 79–106; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

LEVİ – PROXOROV METRİKASI « Леви – Прохорова метрика; Lévy – Prokhorov metric » – qiymətlərini hər hansı (U, d) metrik fəzasından alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\pi(X, Y) = \inf\{\varepsilon:\ \mathbf{P}_X(A) \le \mathbf{P}_Y(A^{\varepsilon}) + \varepsilon,$$
$$\mathbf{P}_Y(A) \le \mathbf{P}_X(A^{\varepsilon}) + \varepsilon,\ A \in \mathfrak{B}\} \qquad (*)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan sadə *ehtimal metrikası* π-dir, burada $\mathfrak{B}$, – U-nun Borel çoxluqlarının sistemidir və

$$A^{\varepsilon} = \{x:\ d(x, y) < \varepsilon,\ y \in A\}.$$

L. – P. m. [1]-də *Levi metrikasının* ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur. Əgər tərifdə iki bərabərsizlikdən birini saxlayaraq, $\mathfrak{B}$ bütün qapalı Borel çoxluqlarının sistemi ilə əvəz olunarsa, π kəmiyyəti (*)-da dəyişmir (bax, [2]). L. – P. m.-nın mühüm xassələri aşağıdakılardır:

1) M, – (U, d)-də bütün ehtimal ölçülərinin fəzası olsun. Onda (M, π) fəzası, yalnız və yalnız, o halda separabel fəzadır ki, (U, d) fəzası separabel olsun.

2) (M, π) fəzasının tamlığı (U, d) fəzasının tamlığını doğurur. Əgər M-dən olan ölçülərin separabel daşıyıcıları varsa, tərsi doğru deyildir.

3) L. – P. m. paylanmaların kompozisiyası əməlinə nəzərən requlyarlıq xassəsinə malikdir (xətti U fəzaları üçün) və bu xassə ekvivalent semiadditivlik xassəsinə malikdir, yəni asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin ixtiyari X_i, Y_i cütü üçün

$$\pi(X_1 + Y_1,\ X_2 + Y_2) \le \pi(X_1, X_2) + \pi(Y_1, Y_2)$$

münasibəti doğrudur.

Levi metrikasının ümumiləşməsi kimi L. – P. m. onun bir sıra xassələrini saxlayır və onların analoqlarına malikdir. Məs., ixtiyari $a \in U$, $b > 0$ və ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\pi(b\mathbf{P}_X,\ b\mathbf{P}_Y) \le b\pi(X/b + a,\ Y/b + a),$$
$$\lim_{b \to 0} \pi(X/b,\ Y/b) = \sigma(X, Y)$$

münasibətləri doğrudur, burada $\sigma(X, Y)$ – *tam variasiya metrikasıdır*. L. – P. m. (U, d) fəzasından qiymətləri olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün təyin olunan *Ki – Fan metrikası* üçün minimal metrikadır.

L. – P. m.-nın strukturu $\mathfrak{B}$ sisteminin digər Borel çoxluqlarının topluları ilə əvəz olunması hesabına digər metrikaların geniş spektrini almağa imkan verir. $U = \mathbb{R}^1$, $d = |x - y|$ olduğu halda π-nin tərifində $\mathfrak{B}$-nin əvəzinə bütün yarımoxların sistemi $\{(t < x): x \in \mathbb{R}^1\}$ çoxluğunu götürdükdə Levi metrikası alınır.

Çoxölçülü fəzalarda semifəza anlayışı daxil olunduğu hallar üçün Levi metrikasının təbii analoqu $\mathfrak{B}$ əvəzinə U-da bütün semifəzaların sistemini saxlayan L. – P. m.-nın konstruksiyasıdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177 – 238; [2] Dudley R. M., «Ann. Math. Statist.», 1968, v. 39, № 5, p. 1563 – 72; [3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

LEVİNSON ALQORİTMİ « Левинсона алгоритм; Levinson algorithm », Levinson– Derbin alqoritmi – əmsalları simmetrik və Teplitsa matrisi (yəni $A_{ij} = A_{ji}$ şərtini ödəyən və A_{ij}-lər isə yalnız $(i - j)$-dən asılı olan) ilə verilən

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}\, x_j = B_i, \quad i = 1, ..., m \qquad (1)$$

xətti sistem tənliklərinin həlli üçün sürətləndirilmiş rekurrent metoddur. Belə tipli tənliklər, məs., stasionar təsadüfi X_t ardıcıllığının onun müşahidə olunmuş qiymətlərinin sonlu sayda $X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-m}$ qiymətləri üzrə xətti ekstrapolyasiyası

məsələsinin həllində, belə ardıcıllığın spektral statistik qiymətinin maksimal entropiyasının

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} r^*_{|i-j|}\,\beta_i = -r^*_i, \qquad i=1,\ldots,m;\\ &\sum_{j=1}^{m} r^*_j\beta_j \;-\; \sigma^2 = -r^*_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Yul – Uoker tənliklər sisteminin $\beta_1,\ldots,\beta_m,\ \sigma^2$ məchullarına görə həlli əsasında qurulmasında və ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın bir sıra məsələlərində yaranır.

L. a.-ndən istifadə etdikdə m sayda (1) tənliklər sistemi əvəzinə, ardıcıl surətdə, k sayda tənlikdən ibarət «kəsilməz sistemlər» sırası həll olunur, burada $k = 1, 2, \ldots, m$ və bu «kəsilməz sistemlər» $i > k$ olan bütün tənliklərin atılması ilə və $x_{k+1}, \ldots, x_m$ məchullarının sıfra bərabər götürülməsi ilə alınır; bu halda k-cı tərtib sistemin $x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ həlləri sonrakı $(k+1)$-ci tərtib sistemin $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_k^{(k+1)}, x_{k+1}^{(k+1)}$ həllərinin təyin olunmasında bilavasitə istifadə olunur. Nəticədə, aparılan rekurrent prosedurun m-ci addımında (1) sisteminin ilkin $x_1^{(m)} = x_1, \ldots, x_m^{(m)} = x_m$ həlləri alınır.

Yul – Uokerin (2) tənliklər sisteminin xüsusi halında rekurrent prosedurun ilk addımında

$$\beta_1^{(1)} = -r_1^*/r_0^*, \quad c^2_{(1)} = [1 - (\beta_1^{(1)})^2]\, r_0^* \qquad (3)$$

qiymətləri alınır, k-cı tərtib sistemin həlləri, $k = 2, \ldots, m$ ardıcıl surətdə tapılır:

$$\beta_k^{(k)} = -\left[r_k^* + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j^{(k-1)} r_{k-j}^* \right] \Big/ c^2_{(k+1)},$$

$$\beta_j^{(k)} = \beta_j^{(k-1)} + \beta_k^{(k)}\beta_{k-j}^{(k-1)}, \quad j = 1, \ldots, k-1;$$

$$c^2_{(k)} = [1 - (\beta_k^{(k)})^2]\, c^2_{(k-1)}.$$

Ümumi (1) sistemi halında L. a. analoji olur. Asanlıqla göstərmək olur ki, L. a. m sayda xətti tənliklər sisteminin həllini m^2 sayda hesab əməllərinin köməyilə tapmağa imkan verir, lakin sistemin əmsallarının düz çevirməsinə əsaslanan adi həll metodunun tətbiqində m^3 saydaya yaxın hesab əməlindən istifadə olunmalıdır (bax, məs., [1] – [5]).

L. a. ilk dəfə, [6]-da N. Levinson tərəfindən stasionar ardıcıllıqların xətti – ekstrapolyasiyası məsələsinə tətbiqdə təklif olunmuşdur, sonradan C. Derbin [7]-də onun modifikasiyasını almışdır. Sonradan bir sıra müəlliflər əmsalları Teplitsa matrisi ilə (simmetrik olmaya da bilər, məs., kompleks Hermit və ya daha ümumi olan) verilən və bu matrislərin çevirmələri ilə xətti tənliklər sisteminin digər rekurrent həll metodlarını da inkişaf etdirmişlər (bax, məs., [8] – [10]). Çoxölçülü stasionar ardıcıllıqlar nəzəriyyəsində yaranan xətti tənliklər sisteminin analoji həll metodları mövcuddur. Əmsallar matrisi qeyri – simmetrik, Teplitsa tipli xətti tənliklər stasionar ardıcıllığın spektral sıxlığının ARSO – statistik qiymətlərinə daxil olan avtoreqression əmsalların hesablanmasında yaranır (bax, *Parametrik spektral statistik qiymət* və [10]).

Əd.: [1] К е й С. М., М а р п л С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5 – 51; [2] К э д з о у Д ж. А., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9, с. 256 – 93; [3] Nonlinear methods of spectral analysis, 2 ed., B., 1983; [4] P a p o u l i s A., Probability, random variables and stochastic processes, 2 ed., N. Y., 1984; [5] P a p o u l i s A., «SIAM Rev.», 1985, v. 27, № 3, p. 405 – 41; [6] L e v i n s o n N., «J. Math. and Phys.», 1947, v. 25, № 4, p. 261 – 78; [7] D u r b i n J., «Rev. Inst. intern. statist.», 1960, v. 28, № 3, p. 233 – 44; [8] D e l s a r t e P., G e n i n Y. V., K a m p Y. G., «IEEE Trans. Acoustics, Speech. Sign. Process», 1985, v. ASSP-33, № 4, p. 964 – 71; [9] D e m e u r e C. J., S c h a r f L. L., «IEEE Trans. Acoustics, Speech. Sign. Process», 1987, v. ASSP-35, № 1, p. 29 – 42; [10] Z o h a r S., «IEEE Trans. Acoustics, Speech. Sign. Process», 1979, v. ASSP-27, p. 656 – 58; [11] I n o u y e Y., «IEEE Trans. Automat. Contr.», 1983; v. AC-28, № 1, p. 94 – 95.

LEVİNSON – DERBİN ALQORİTMİ « Левинсона – Дербина алгоритм; Levinson – Durbin algorithm » – bax, *Levinson alqoritmi.*

LƏNGİDİCİ BARYER « задерживающий барьер; holding sticky boundary / elastic barrier » – bax, *Viner prosesi* y a r ı m o x d a.

LƏNGİDİCİ VƏZİYYƏT « задерживающее состояние; stable state » – bax, *Dayanıqlı vəziyyət*, *Markov prosesi*; t r a y e k t o r i y a l a r ı n d a x i l i x a s s ə l ə r i.

LƏNGİMƏ / GECİKMƏ « задержка / запаздывание; delay / lag » l a q, – 1) L. $B_X(\tau)$ avtokorrelyasion funksiyasının arqumentidir. τ L.-si üçün onun qiyməti – τ uzunluqlu zaman intervalı ilə aralanan $X(t)$ və $X(t-\tau)$ kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalına bərabərdir, burada $X(t)$ – stasionar təsadüfi prosesdir.

2) L. – fazası sıfırdan fərqli olan filtrli xətti filtr təsadüfi prosesinə təsirdir. Ən sadə halda, filtr fazası $\varphi(\lambda) = \lambda\tau$ xətti funksiyası olduqda, filtr L.-si $\tau : X(t) \to X(t-\tau)$ olan ləngitmə operatoru kimi təsir edir. Əgər faza λ_0 nöqtəsi ətrafında hamar funksiya olarsa, onda, adətən, q r u p l ə n g i m ə s i adlanan $\varphi'(\lambda_0)$ kəmiyyətinə baxılır; $\varphi'(\lambda_0)$, – λ_0 ətrafında tezliklərin dar diapozonuna uyğun kəmiyyətdir.

LƏNGİMƏ ƏMSALI « задержки коэффициент; delay coefficient » – bax, *Markov prosesi*; d a v a m ı.

LƏNGİMƏ PƏNCƏRƏSİ « запаздывания окно; lag window » – bax, *Korrelyasion pəncərə*, *Spektral sıxlıq*; q e y r i – p a r a m e t r i k s t a t i s t i k q i y m ə t.

LİFLƏR PROSESİ « волокон процесс; fibre process » – bax, *Riyazi stereologiya.*

LİMİT TEOREMLƏRİ « предельные теоремы; limit theorems » – ehtimal nəzəriyyəsində araşdırmaların əsas istiqamətlərindən birini təşkil edən, onun praktiki əhəmiyyətinin böyük sahəsini özündə əks etdirən teoremlərin geniş qrupunun ümumi adıdır.

Elmin bu sahəsinin riyazi fənn kimi yaranması, 1713-də ilk dəfə L. t. – *Bernulli teoreminin* nəşri ilə başlanmışdır. Bu teoremi A. Muavr (A. Moivre) 1730 – 33-cu illərdə dəqiqləşdirilmiş formada isbat etmişdir; bu *Muavr – Laplas teoremidir*. P. Laplas (P. Laplace) K. Qaussla (C. Gauss) birlikdə 19-cu əsrin başlanğıcında *xətalar nəzəriyyəsinin* əsasını qoyaraq bu teoremin böyük praktiki əhəmiyyəti olduğunu başa düşərək, onun yalnız populyarlaşmasına deyil, ümumiləşdirilməsinə də cəhd göstərmişdir. Bu teoremlərin hər ikisi sonradan onların çoxsaylı analoqları və ümumiləşmələrinin alınması üçün nümunə olmuşdur ki,

hal-hazırda bunlar *böyük ədədlər qanunu* və *mərkəzi limit teoremi* adları ilə iki qrupda birləşmişlər. 20-ci əsrin əvvəllərində ehtimal nəzəriyyəsinə daha dörd limit teoremi də əlavə olunur; bunlardan ikisi birinci qrupa aid olur [S. Puasson (S. Poisson), 1837; P. L. Çebışev, 1867], biri – ikinci qrupa (A. M. Lyapunov, 1900 – 01) aid və xüsusi yer tutan və Muavr – Laplas teoremini tamamlayan, mühüm *Puasson teoremidir*. Hal-hazırda L. t.-nin sayı yüzlərlədir. L. t.-nin qurulması və onun istifadəolunma (tətbiqi) ideyasını qısa surətdə aşağıdakı kimi təsvir etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri üçün tipik olan cəhət odur ki, məsələnin həlli hər hansı $\mathscr{A} = \{A\}$ σ – cəbrində verilən ehtimal paylanmalarının ailəsi $\{\mathbf{P}_t,\ t \in T\}$ terminlərilə təsvir olunur və bir qayda olaraq, bu ehtimal paylanmalarının analitik ifadələrinin ədədi hesablanması aşkar və rahat olmur. Bu halda t parametrinin mümkün qiymətləri arasında ən çox maraq doğuran müəyyən mənada hər hansı θ kritik qiymətinə yaxın qiymətlərdir. Bu halda $\mathbf{P}_t$ üçün (və ya onları təyin edən paylanma funksiyası, paylanmasının sıxlıq funksiyası kimi xarakteristikalar üçün) olduqca sadə təqribi ifadələr axtarmaq təbiidir. $\mathbf{P}_t$ paylanmalarının θ nöqtəsində μ metrikasına nəzərən kəsilməz olduqları fərz olunur, bu metrika müvafiq seçilmiş yığılma topologiyasını reallaşdırır, onda elə $\mathbf{P}_\theta$ paylanması vardır ki (ailəyə aid olmaya da bilər), $t \to \theta$ olduqda

$$\mu(\mathbf{P}_t, \mathbf{P}_\theta) \to 0\,. \qquad (1)$$

Bu halda $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına $\mathbf{P}_t$ $(t \approx \theta)$ paylanmalarının ən maraq doğuran hissəsinin təqribi ifadəsi kimi baxmaq olar. Məsələni sadələşdirmək lazım gəldikdə, t parametri nəzərə alınmır; bir çox hallarda $\mathbf{P}_\theta$ müəyyən analitik strukturlu olduqda, məs., *sonsuz bölünən paylanma* olduqda da məsələnin sadələşməsinə nail olunur. Lakin qeyd olunan limit paylanması, hətta zəif yığılma topologiyası h seçildiyi halda belə mövcud olmaya bilər. Onda aşağıdakı əlavə prosedurdan istifadə olunur. $\{\mathscr{I}_t,\ t \in T\}$, – $\mathscr{A}$-nın özünə qarşılıqlı birqiymətli inikasları ailəsi, Q, – $\mathscr{A}$-da elə paylanma olsun ki, çevrilmiş $\overline{\mathbf{P}}_t(A) = \mathbf{P}_t(\mathscr{I}_t^{-1} A)$ ölçüləri $t \to \theta$ olduqda seçilmiş μ metrikası mənasında $\mathbf{Q}$ ilə yaxınlaşsınlar, yəni $t \to \theta$ olduqda

$$\mu(\overline{\mathbf{P}}_t, \mathbf{Q}) \to 0\ . \qquad (2)$$

Təbii olaraq bu halda gözləmək olardı ki, P_t üçün yaxınlaşmalar rolunu $\mathbf{Q}_t(A) = \mathbf{Q}(\mathscr{I}_t A)$ paylanmaları ifadə etməlidir. Əgər μ metrikası uyğun invariantlıq xassəsinə malik olarsa, yəni

$$\mu(\overline{\mathbf{P}}_t,\ \mathbf{Q}) = \mu(\mathbf{P}_t, \mathbf{Q}_t), \quad t \in T \qquad (3)$$

olarsa, bu həqiqətən də belə olur. $\mathbf{P}_t$ paylanmaları haqqında ilkin informasiya $\mathbf{Q}_t$-yə $\mathbf{Q}$ və tam surətdə $\mathscr{I}_t$ (odur ki, P_t paylanması $\mathbf{Q}_t$ və $\mathscr{I}_t$ üzrə bərpa olunur) və ya $\mathscr{I}_t$-nin yalnız bir hissəsi vasitəsilə daxil olur. Sonuncu halda informasiyanın bir hissəsinin itməsi onun istifadəsinin sadələşdirilməsi hesabına kompensasiya olunur (əgər, məs., $\mathscr{I}_t$ yalnız t və $\mathbf{P}_t$-nin funksionallarının sonlu saydasından asılı olarsa). Bax, *Toplayıcılıq*(ğ ı) l i m i t t e o r e m l ə r i n i n.

L. t. yalnız bir deyil, müəyyən şərtlər sisteminə tabe P_t ardıcıllıqlarının çoxluğuna baxdığından, təbii olaraq, iki tip suallar qarşıya çıxır ki, bunların cavabını tapmağa həmişə cəhd göstərilir.

I. Edilmiş fərziyyələr çərçivəsində (2)-dəki mümkün limit paylanmalarının çoxluğu $\mathscr{Q} = \{\mathbf{Q}\}$ nə cür çoxluqdur?

II. $\overline{\mathbf{P}}_t$ ardıcıllığının $\mathscr{Q}$-dən seçilmiş $\mathbf{Q}$ paylanmasına yığılma kriteriisi ($\mathbf{P}_t$ paylanmasını verən hər hansı xarakteristikalar terminlərilə) nə cür kriteridir? Bu sualla yanaşı, digər sual da yaranır – baxılan topologiyada $\overline{\mathbf{P}}_t$ ardıcıllığı üçün limit paylanmasının varlığı kriterisi nə cürdür?

Bu suallara cavablar təbii olaraq ondan asılı olur ki, (3)-də hansı yığılma topologiyasından (yəni μ metrikasından) istifadə olunur. Bu suallara tam cavablar almağa yalnız o hallarda müyəssər olunmuşdur ki, seçilmiş topologiya müəyyən mənada verilmiş model üçün təbii olsun.

Bu qeyd olunanlar ehtimal nəzəriyyəsində daha çox yayılmış bir modeldə – *təsadüfi kəmiyyətləri cəmləmə sxemində* aşağıda şərh olunur. Bu istiqamətdə ilk araşdırmaların əsası P. Laplas və K. Qaussun işlərində qoyulmuşdur və adət olunan forması 19-cu əsrin 2-ci yarısında alınmışdır (P. L. Çebışev, A. M. Lyapunov, A. A. Markov və b.). 20-ci əsrin 20-ci illərinin əvvəllərinə qədər xüsusi hala – təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri $S_n = X_1 + \ldots + X_n$-lərin, $n = 1, 2, \ldots$ a r t a n c ə m l ə r s x e m i n ə (rus. схема нарастающих сумм) və ya daha xüsusi hala – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artan cəmlər sxeminə baxılırdı. S_n cəmlərinin paylanma funksiyaları $U_n(x)$-lərin çevirmələri $\mathscr{I}_n$-lər kimi yalnız $\overline{S}_n = \mathscr{I}_n^{-1} S_n = B_n^{-1}(S_n - A_n)$ xətti cəmlərindən istifadə olunurdu, burada $A_n, B_n \neq 0$ həqiqi sabitlər cütləri ardıcıllığı, $\overline{U}_n(x) = U_n(\mathscr{I}_n x) = U_n(B_n x + A_n)$. $\mathscr{I}_n$ çevirmələri $\overline{U}_n$ ardıcıllığını tam yığılma mənasında kompaktlaşdırır. Əgər X_j toplananları sonlu riyazi gözləmələri və dispersiyası olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda, adətən, $A_n = \mathbf{M} S_n$, $B_n^2 = \mathbf{D} S_n$ götürülür. O dövrdəki L. t.-nin hamısında məğzinə görə güclü yığılma topologiyasından (məs., μ metrikası kimi ρ *müntəzəm metrikasının* seçilməsi) istifadə olunurdu, baxmayaraq ki, təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləmə sxemi üçün zəif yığılma topologiyası təbii sayılır. O dövrün L. t.-ndə artan cəmlər sxemində limit paylanmaları kimi yalnız *normal paylanmalar* götürülürdü. Bu paylanmalar kəsilməz olduğundan bunlarla bağlı zəif və güclü yığılmalar ekvivalent olur (Q l i v e n k o t e o r e m i). Bununla belə, ρ metrikası (3) mənasında $\mathscr{I}_n$-ə nəzərən invariantdır və buna əsasən, U_n və $\overline{U}_n$ funksiyalarının asimptotik yaxınlaşması məsələləri eynigüclü olur.

1932 – 33-cü illərdə *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfi $\mathbf{G}$-nın öyrənilməsi ilə A. N. Kolmoqorov yeni model təklif etmişdir, bu modeldə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış artan cəmlər sxemi və Puasson teoremində istifadə olunan sxem ümumiləşdirilmişdir. K o l m o q o r o v m o d e l i n d ə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən A_n sabitlərilə mərkəzlənmiş cəmlərinə baxılır:

$$Z_n = X_{n1} + \ldots + X_{nn} - A_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (4)$$

burada $X_{n1}, X_{n2}, \ldots$ – təsadüfi kəmiyyətlərin *seriyalar sxemini*

təşkil edir. X_{nj} toplananlarının *sonsuz kiçilənlik şərtinə* tabe olduqları fərz olunur, yəni: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\sup_j \mathbf{P}\{ |X_{nj}| > \varepsilon \} \to 0 \ . \qquad (5)$$

Kolmoqorov modelinin səciyyəvi cəhəti və originallığı məhz (5) şərti ilə bağlıdır, belə ki, (4) şəkilli cəmlərə seriyalar sxemi üçün hələ 1922-də S. N. Bernşteyn tərəfindən baxılmışdır.

F_n və F_{nj} – uyğun olaraq, Z_n və X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyaları olsun. Kolmoqorov modelində L. t.-nin qurulmasında zəif yığılma topologiyasından istifadə olunur (yəni μ metrikası kimi L *Levi metrikasını* götürmək olar). A. N. Kolmoqorov belə fərz etmişdir ki, onun təklif etdiyi modeldə $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}$ (I suala cavab). X_{nj} – sonlu, ikinci tərtib momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda bu hipotez [3]-də Q. M. Bavli tərəfindən təsdiq olunmuşdur; o isbat etmişdir ki, limit paylanmaları $\mathfrak{G}$-da sonlu ikinci momentlərə malik sonsuz bölünən paylanmaların alt sinfi $\mathfrak{G}_0$-ı əmələ gətirir. Hipotez tamamilə A. Ya. Xinçin tərəfindən isbat olunmuşdur (1938). $\mathfrak{G}_0$-ın təsviri A. N. Kolmoqorov tərəfindən, bütün $\mathfrak{G}$ sinfinin təsviri isə P. Levi (P. Lèvy, 1934) tərəfindən $\mathfrak{G}$-dan olan G paylanmalarına uyğun xarakteristik f funksiyaları terminlərilə alınmışdır, yəni

$$f(t; G) = \\ = \exp\left\{ it\gamma + \int (e^{itx} - 1 - it \sin x) \, \frac{1 + x^2}{x^2} \, dW(x) \right\} \qquad (6)$$

xarakteristik funksiyaları terminlərilə, burada γ – həqiqi sabit, W isə $W(-\infty) = 0$, $W(\infty) < \infty$ şərtlərini ödəyən $\mathbb{R}^1$-də azalmayan funksiyadır, yəni G paylanması (γ, W) cütü ilə təyin olunur. F_n ardıcıllığının verilən $G = G(x; \gamma, W)$ funksiyasına zəif yığılma kriterisi (II suala cavab) B. V. Qnedenko (1939) tərəfindən tapılmışdır. Modernlənmiş formada (bax, [4]) bu aşağıdakı kimi ifadə olunur. f_{nj}, – X_{nj} toplananlarının xarakteristik funksiyaları, $C_1(X_{nj}) = \operatorname{Im} \ln f_{nj}(1)$ – bunlara müvafiq *mərkəzlər* olsun, bu mərkəzlərin varlığını olduqca böyük n-lər üçün (5) şərti təmin edir. $A_n = \gamma + \sum_j C_1(X_{nj})$ seçilir və

$$W_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2} \, dF_{nj}(u + C_1(X_{nj})), \quad n \geq 1$$

funksiyası qurulur.

Onda $n \to \infty$ olduqda

$$L(F_n, G) \to 0 \Leftrightarrow L(W_n, W) \to 0$$

münasibəti doğrudur.

1949-da B. V. Qnedenko və A. N. Kolmoqorovun [1] kitabı çıxır və bu kitabda Kolmoqorov modeli çərçivəsində L. t. üzrə tədqiqlərin nəticələri verilmişdir. Bu tədqiqatların nəticələri alınmış faktlarla birlikdə bəzən limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsi adlanır.

20-ci yüzillikdə bu nəzəriyyənin nailiyyətlərinin inkişafı müxtəlif istiqamətlərdə aparılmışdır; məs., həqiqi ox üzərində nəticələr sonluölçülü və sonsuzölçülü fəzalara, matrislər çoxluğuna və abstrakt qruplara keçirilmiş (qiymətlər fəzasının belə dəyişməsi təsadüfi kəmiyyətlər cəminin özünə məxsus təyin olunması zərurətini yaradır), toplananların asılı olmamazlıq şərtləri daha zəif tələblərlə əvəz olunmuşdur (bax, *Mərkəzi limit teoremi* Banax fəzasında, *Limit teoremləri* Markov zəncirləri üçün, *Qarışdırma şərtləri*, *Limit teoremləri* martinqallar və semi–martinqallar üçün). L. t.-nin müxtəlif dəqiqləşmələrinə çoxsaylı səylər göstərilmişdir (bax, *Mərkəzi limit teoremi*, *Lokal limit teoremləri*, *Təkrar loqarifm qanunu*, *Berri – Esseen teoremi*, *Edcvort – Kramer ayrılışı*, *Böyük yayınmalar ehtimalları*). L. t.-nin klassik nəzəriyyəsi əsasında cəmləmə sxeminin qeyri – xətti tip modellərlə əvəz olunması ilə bağlı tədqiqatlar istiqamətləri yaranır. Aşağıda belə «qeyri – standart» L. t., cəmləmə sxemi ilə sıx bağlı L. t.-nə aid misallar şərh olunmuşdur.

1) S_n – riyazi gözləmələri $\mathbf{M} S_n = 0$, dispersiyaları $\sigma^2 = \mathbf{D} S_n$, $\gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}|X_j|^3 < \infty$ şərtlərilə verilən təsadüfi kəmiyyətlər cəminin ardıcıllığı, $n \to \infty$ olduqda $\gamma_n / \sigma_n^3 \to \infty$ olsun. Onda ((5)-dən alınan nəticə):

$$\mathbf{P}\{ \max_k |S_k| < x\sigma_n \} \to \mathbf{Q}(x) = \\ = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{1}{2k+1} \exp(-(2k+1)^2 x^2 / 8\pi)$$

münasibəti doğrudur.

2) S_n – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri olsun; bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyaları asta dəyişən: $x \to \infty$, $0 < p < 1 - q < 1$ olduqda $1 - F(x) \sim h_1(x)$, $F(-x) \sim h_2(x)$, $h_1(x)/(h_1(x) + h_2(x)) \to p$ şərtlərilə verilən «qalıq» paylanma funksiyalarına malikdirlər. Əgər

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/(1 - F(x)), & x \geq 1 \\ \theta(1)(1+x)/2 + \theta(-1)(1-x)/2, & |x| < 1 \\ -1/F(x), & x \leq -1 \end{cases}$$

olarsa, onda $Z_n = \theta(S_n)/n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathbf{P}\{Z_n < x\}$ paylanma funksiyalarının ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda

$$V(x) = \begin{cases} q + p \exp(-1/px), & x > 0 \\ q - q \exp(1/qx), & x < 0 \end{cases}$$

paylanma funksiyasına zəif yığılır (bax, [6] və [4]).

3) $Z_n = Q_n(X_1, ..., X_n)$, – $k \geq 2$ dərəcəli bircins simmetrik çoxhədlilərin hər hansı ardıcıllığı olsun; bu çoxhədlilərin arqumentləri ümumi simmetrik $F(x)$ paylanma funksiyası olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $c > 0$, $0 < \alpha < 2$ və $x \to \infty$ olduqda $1 - F(x) \sim c x^{-\alpha}$. Simmetrik çoxhədlilər

$$Q_n = \Lambda_n(S_{n_1}, ..., S_{n_k}),$$

$$S_{nm} = X_1^m + ... + X_n^m, \quad 1 \leq m \leq k$$

şəklində ifadə oluna bilər, burada Λ_n – əmsalları n-dən asılı ola bilən k dərəcəli çoxhədlidir (Q_n üçün də ola bilər). Fərz olunur

ki, bu əmsallar mütləq qiymətcə 1-i aşmır. Əgər $n \to \infty$ olduqda $n^{-k/\alpha} Q_n$ ardıcıllığı cırlaşmayan Z təsadüfi kəmiyyətinə paylanmaya görə yığılarsa (yəni bunların paylanmaları zəif yığılarsa), onda Z təsadüfi kəmiyyəti, paylanmalarının bərabər olması mənasında, $\Lambda(Y)$ təsadüfi kəmiyyəti ilə üst-üstə düşür, burada Λ – dərəcəsi k -nı aşmayan çoxhədli, $Y \in \mathbb{R}^k$ – xarakteristik funksiyası –

$$f(t) = \exp\left\{ c \int\limits_{\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}} (e^{ig} - 1 - i[\alpha] t_1 w) |w|^{-1-\alpha} dw \right\},$$

$$g = \sum_{j=1}^{k} t_j w^j, \quad t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$$

şəklində olan təsadüfi vektordur, $[\cdot]$ – tam hissəni ifadə edir (bax, [7]).

Klassik nəzəriyyənin tamamlanmış olduğu sayılsa da, bir sıra riyaziyyatçılar onun fundamental konsepsiyalarının bəzilərini yenidən araşdırmağa başladılar, ilk əvvəl (5) şərtindən imtina olunma halına baxıldı (bununla əlaqədar [2]-də teorem 38 kimi P. Levinin mülahizələri ifadə olunmuşdur). Bu problemə ciddi maraq 20-ci əsrin 60-cı illərində yaranmış [L. Le Kam (L. Le Cam), Yu. V. Linnik, V. M. Zolotarev, Yu. Yu. Maçis, H. Berqstrem (H. Bergström) və s.], 1969-da (5) şərtindən istifadə etməməklə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün L. t. nəzəriyyəsinin yaranması ilə nəticələnmişdir (bax, [4]). Yeni nəzəriyyənin mühüm cəhəti ondan ibarətdir ki, burada $\mathcal{Q}$ mümkün limit qanunları çoxluğu əvəzinə $\mathbb{R}^1$-də bütün paylanmaların çoxluğu $\mathcal{F}$ -ə baxılır ((5) şərtindən imtina bununla nəticələnir).

Sonradan *qeyri–klassik qoyuluşda* L. t.-nə həm çoxölçülü fəzalarda (bax, [8]), həm də cəmlərdə toplananların asılı olmamazlıq şərti zəifləndirildiyi hallarda baxılmışdır (bax, [9]). Qeyri – klassik qoyuluşda L. t.-nin yaranması asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri cəmləmə sxemində L. t.-nə yeni nöqteyi – nəzərə – digər paylanmaların kompozisiyalarının limit paylanmalarının ayrılışlarının dayanıqlılığı teoremləri kimi yanaşmanın formalaşmasına səbəb olmuşdur (bax, *Lindeberq – Feller teoremi*). Bu nöqteyi – nəzərə yaxın olan, *psevdomomentlərdən* istifadə edən L. t.-nin müxtəlif dəqiqləşmələri də alınmışdır. L. t.-nin konsepsiyası dayanıqlılıq teoremləri kimi bir sıra xətti modellərdə özünü təsbit etmişdir (bax, [10]).

L. t.-nin klassik nəzəriyyəsinə ikinci tənqidi yanaşma onunla bağlıdır ki, Kolmoqorov modelində yığılmanın təbii topologiyası xətti çevirmələrə nəzərən (3) invariantlıq xassəsinə malik olmayan μ metrikaları ilə reallaşan zəif topologiyadır. Buna görə də, $\mathbf{P}_t$ və $\overline{\mathbf{P}}_t$ paylanmalarının yaxınlaşmalarının qurulması məsələləri ekvivalent olmur. Bu aşağıdakı misalda aydın olur.

X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin (4)-dəki cəmlərdə elə simmetrik paylanmalara malik olduğu fərz olunur ki,

$$\mathbf{P}\{|X_{nj}| = 1\} = (1 - 1/n);$$

$$\mathbf{P}\{|X_{nj}| = n\sqrt{5}\} = 1/n, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

(5) şərti bunlar üçün ödənilmir, buna görə miqyas normalanması üçün $\overline{Z}_n = Z_n / n\sqrt{5}$ götürülür. Onda $\mathbf{M}\overline{Z}_n = 0$, $n \to \infty$ olduqda, $\mathbf{D}\overline{Z}_n \to 1$. F_n və $\overline{F}_n$ – uyğun olaraq, Z_n və $\overline{Z}_n$ cəmlərinin paylanma funksiyaları, G isə xarakteristik funksiyası $\exp(\cos t - 1)$ olan simmetriklənmiş Puasson qanununun paylanma funksiyası olsun. Onda $n \to \infty$ olduqda $L(\overline{F}_n, G) \to 0$ münasibəti ödənilir, yəni G funksiyası $\overline{F}_n$ üçün asimptotik yaxınlaşmadır. Lakin buna əsaslanaraq, $F_n(x)$ -i $G_n(x) = G(x/n\sqrt{5})$ paylanmalarına yaxınlaşdırmaq mümkünlüyünü hökm etmək olmaz, çünki, $L(F_n, G_n) \geq G(+0) - 1/2 > 0$, $n \geq 1$. (2) münasibətinə əsaslanaraq limit yaxınlaşmalarının qurulması ideyasının özü verilmiş $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$ paylanmalarına yığılma kriterilərinə uyğun olmayan ilkin hallara baxılmanı zəruri olaraq istisna edir. Bu vəziyyətdən çıxmaq məqsədilə qoyulmuş məsələnin genişləndirilməsi təbiidir. $\overline{\mathbf{P}}_t$ paylanmalar ardıcıllığının bir paylanmaya deyil, paylanmalar ailəsinə yaxınlaşma məsələsi araşdırılmalıdır, bu da məsələnin məğzinə görə $\overline{\mathbf{P}}_t$ paylanmalarının analitik strukturu daha aydın olan hər hansı paylanmalar çoxluğu ilə yaxınlaşması məsələsidir.

A. N. Kolmoqorov paylanmaların kompozisiyasının sonsuz bölünən paylanmalara yaxınlaşması məsələsinə, yəni

$$\Delta_n = \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{G \in \mathfrak{G}} \rho(F^{*n}, G)$$

kəmiyyətinin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxarkən, məsələnin bu qoyuluşunu nəzərdə tutmuşdu. O, 1956-da isbat etmişdir ki, $\Delta_n \leq c n^{-1/5}$, c – ədədi sabitdir. Sonradan bu nəticə yaxşılaşdırılmışdır (A. N. Kolmoqorov, L. Le Kam, Yu. V. Proxorov). 1981-də T. Arak isbat etmişdir ki, $\Delta_n \leq c n^{-2/3}$ yaxşılaşmayan statistik qiymətdir və bununla da, bu problem qapanmışdır (bu və buna yaxın problemlər də, bax, [12]).

L. t.-nin klassik nəzəriyyəsinin inkişafında digər maraqlı istiqamət 1 ehtimalla baş verən, təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri ilə bağlı fenomenlərin öyrənilməsidir. Belə fenomenlərdən *gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu* və *təkrar loqarifm qanununu* qeyd etmək olar. Elə nəticələr alınmışdır ki, bunları özünəməxsus mərkəzi limit teoremi kimi interpretasiya etmək olar (bax, məs., [13] və *Mərkəzi limit teoremi*).

20-ci əsrin 70 – 80-ci illərində müxtəlif qeyri – xətti modellərdə L. t.-nə: asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün (xüsusi halda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün), təsadüfi indeksdən asılı cəmlər ardıcıllığı üçün (yəni cəmin toplananları sayı təsadüfi kəmiyyət olduqda, (bax, [14])) L. t.-nə maraq olduqca artır; uyğun L. t. *köçürtmə teoremləri* adlanır.

Ədd.: [1] Гнеденко Б. В., Предельные распределения для сумм случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Lèvy P., Theorie de l'addition des variables aléatories, P., 1937; [3] Bawly G. M., «Матем. сб.», 1936, т. 1 (43), с. 917 – 30; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 114 – 16; [6] Darling D. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 73, № 1, p. 95 – 107; [7] Сейдль Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 2, с. 266 – 78; [8] Круглов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 2, с. 209 – 27; [9] Jacod J., Schiryaev A. N., Limit theorems for stochastic processes, B. – [a. o.], 1987; [10] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в. 1, с. 178 – 89; [11] Komlos J., Major P., Tusnady G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, H. 1, S. 33 – 58; [12] Арак Т., Зайцев А. Ю., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1986, т. 174, с. 3 – 214; [13] Dynkin E. B., Mandelbaum A., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 3, p. 739 – 45; [14] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988.

LİMİT TEOREMLƏRİ diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin «**предельные теоремы** метрической теории диофантовых приближений; **limit theorems** of the metric theory of diophantine approximation» – *ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin* (geniş mənada) istiqamətlərindən biridir və burada endomorfizmlərin funksiyaları üçün Lebeq ölçüsünə nəzərən limit münasibətləri müəyyən olunur. Bu teoremlər $(0,1)$ intervalının verilmiş approksimasiya dəqiqliyini təmin edən nöqtələri çoxluğunun ölçüsünü qiymətləndirməyə imkan verir. Ən əhatəli nəticələr $(0,1)$ intervalının özünə inikasları: $T_1:\alpha\to\{\alpha q\}$ və $T_2:\alpha\to\{1/\alpha\}$ üçün alınmışdır, bunlar uyğun olaraq α-nın q-lük və zəncirvari kəsrə ayrılışı ilə sıx bağlıdırlar.

Ədədlərin metrik nəzəriyyəsinin ilk limit teoremlərindən biri Borel teoremidir; bu teoremdə hökm olunur ki, $\{\alpha q^n\}$, $n=1,2,...$ ədədlərinin ($q>0$ tam ədəddir) kəsri hissələri $(0,1)$ intervalında müntəzəm paylanırlar. Bu teorem bir çox istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir və bu zaman müxtəlif metodlar, o cümlədən, ehtimal nəzəriyyəsi metodları tətbiq olunmuşdur. Sonuncu halda $\alpha\in(0,1)$ ədədlərinin q-lük ayrılışında təsadüfi kəmiyyətlər kimi interpretasiya olunan $0,1,...$ rəqəmlərinin asılı olmamazlığından istifadə olunmuşdur; $\alpha\in(0,1)$ ədədləri $(0,1)$ parçasından yaranmış ehtimal fəzasında Lebeq çoxluqlarının σ – cəbri və Lebeq ölçüsü ilə təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlər kimi interpretasiya olunur.

Üstlü funksiyanın kəsri hissələrinin müntəzəm paylanması üçün ilk mərkəzi limit teoremi Forte – Kas teoremində hökm olunur ki: əgər $f(t)$ Lebeq mənada inteqrallanan həqiqi funksiya, onun Furye sırasının əmsalları $|b_n|\le M/n^\beta$ bərabərsizliyində bərabərlik halı M və β-nın sabit qiymətlərində ödənilirsə, onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n-1}f(T_1^k(\alpha)-b_0)\right)^2 d\alpha=\sigma^2 \qquad (1)$$

limiti vardır və əgər $\sigma\neq 0$ olarsa, onda ixtiyari həqiqi x üçün

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}\left\{\alpha:\ 0\le\alpha\le 1,\ \sum_{k=0}^{n-1}f(T_1^k(\alpha)-b_0)<x\sqrt{n}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2\sigma^2}dz \qquad (2)$$

münasibəti doğrudur.

(2) münasibətində yığılma sürəti [5]-də öyrənilmişdir. $(0,1)$ intervalından olan nöqtələr çoxluğunun ölçüsü – $\{\alpha 2^k\}$, $k=0,1,...,n-1$ kəsri hissələrinin $\Delta\in(0,1)$ parçasına düşməsi sayı verilmiş ədədə bərabər olan ölçü qiymətləndirilmişdir (lokal limit teoremi). Matris-üstlü funksiyanın kəsri hissələrinin paylanması üçün də mərkəzi limit teoremi alınmışdır (bax, [2]). İkiölçülü tor üçün erqodik endomorfizmlər nəzəriyyəsi təklif olunmuşdur (bax, [4]). İ. A. İbrahimov zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə nəzəriyyəsini inkişaf etdirərək, mərkəzi limit teoreminin daha güclü formasını almışdır (bax, [1]).

Zəncirvari kəsrlərin parametrlərinin metrik analizinə K. Qauss (C. Gauss) tərəfindən baxılmışdır. $\alpha\in(0,1)$ və $\alpha=[0;a_1,...]$ – zəncirvari kəsrə ayrılış, $q_n(\alpha)$ – yarayan n-ci $[0;a_1,...,a_n]$ kəsrinin məxrəci, $r_n(\alpha)=[a_n,a_{n+1},...]$ olsun. R. O. Kuzmin K. Qaussun aşağıdakı fərziyyəsini isbat etmişdir:

$$\sup_x\left|\operatorname{mes}\{\alpha:\ r_n(\alpha)-a_n<x\}-\ln(1+x)/\ln 2\right|=$$

$$=O(e^{-\lambda\sqrt{n}}),\ \lambda>0$$

və bu münasibət $O(e^{-\lambda n})$ dəqiqliyinə kimi P. Levi (P. Lévy) tərəfindən yaxşılaşdırılmışdır. Zəncirvari kəsrlər üçün (1) və (2) münasibətləri ilə ifadə olunan mərkəzi limit teoremləri T_1-in T_2 ilə əvəz olunması ilə V. Döblin (W. Doeblin) tərəfindən isbat olunmuşdur.

Zəncirvari kəsrlərin metrik nəzəriyyəsinin A. Ya. Xinçin tərəfindən alınmış bir çox nəticələri sıfır, yaxud vahid qanunları tiplidir. Bundan başqa, onluq və ya zəncirvari kəsrlərdən daha ümumi olan ədədi sistemlərin metrik nəzəriyyəsi də öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [2] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процесссов, М., 1964; [3] Мисявичюс Г. А., «Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. math.», 1971, v. 14, p. 77 – 92; [4] Москвин Д. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 1, с. 69 – 100; [5] Постников А. Г., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 82, с. 3 – 111.

LİMİT TEOREMLƏRİ kompakt qruplarda «**предельные теоремы** на компактных группах; **limit theorems** on compact groups» – kompakt qruplarda yığılma şərtlərini və ehtimal paylanmalarının kompozisiyalarının limitləri növlərini təsvir edən teoremlərdir. G – kompakt qrup, $\{\mu_n\}$ – bu qrupda ölçülərin hər hansı ardıcıllığı olsun. Əgər ixtiyari $i\ge 1$ qiymətlərində $\nu_n^{(i)}=\mu_i\mu_{i+1}...\mu_n$ ardıcıllığı $n\to\infty$ olduqda zəif yığılırsa, $\{\mu_n\}$ ardıcıllığı kompozision yığılan ardıcıllıq adlanır (bax, [1]). χ_H, – G qrupunun altqrupu H-da Haar ölçüsü olsun. Onda $n\to\infty$ olduqda $\nu_n^{(i)}$-nin limiti var və bu limit χ_H-a bərabərdir, burada H ən böyük elə altqrupdur ki, bütün $\nu_n^{(i)}$-lər bu qrupa görə invariantdır, yəni $\nu_n^{(i)}\chi_H=\nu_n^{(i)}$. χ_H ölçüsünün daşıyıcısı H altqrupu kompozision yığılan ardıcıllığının əsası adlanır. Kompozision yığılmanın praktiki istifadəsi ona əsaslanır ki, G-də ixtiyari $\{\mu_n\}$ ardıcıllığı üçün G-nin elementlərinin elə $\{\alpha_n\}$ ardıcıllığı tapılar ki, $\{\mu_n'\}$ paylanmalar ardıcıllığı kompozision yığılır, burada $\mu_n'=\alpha_n^{-1}\mu_n\alpha_{n+1}$.

Demək olar ki, kompozision yığılan $\{\mu_n\}$ ardıcıllığı üçün $\mu_1\mu_2...\mu_n$ hasili «mahiyyətcə» yığılır. Doğrudan da, elə $\{\widetilde{\mu}_n\}$ ardıcıllıqları göstərmək olar ki, $\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_2...\widetilde{\mu}_n$ hasili yığılandır, lakin $\widetilde{\mu}_2...\widetilde{\mu}_n$ kompozisiyalarının bu yığılması μ_1 ölçüsünə görə yığılmadır. Məs., μ_1 G-də müntəzəm ölçüdürsə, onda $\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_2...\widetilde{\mu}_n$ ardıcıllığı ixtiyari $\widetilde{\mu}_i$, $i>1$ üçün yığılır.

$\{\mu_n\}$ ardıcıllığından yerinidəyişmələr vasitəsilə, ümumiyyətlə, müxtəlif əsaslarlı bir neçə müxtəlif kompozision yığılan ardıcıllıqlar qurmaq olar, lakin bu əsaslar qoşma qruplar olacaqdır. Əgər elə

$\alpha_n \in G$ elementləri tapılarsa ki, $\{\mu_n' = \alpha_n^{-1}\mu_n\alpha_{n+1}\}$ ardıcıllığı H qrupuna qoşma əsasla kompozision yığılsın, onda deyilir ki, $\{\mu_n\}$ ardıcıllığı G-də $\sigma(H)$ tiplidir (bax, [1]). Beləliklə, hər hansı ardıcıllıq hər hansı $\sigma(H)$ tipinə aiddir. Ən mühüm hal $\sigma(e_1)$ tipidir, burada e_1, – G qrupunun vahididir. Məs., qiymətləri G-dən olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasilinin sanki yığılması G qrupunda $\{\mu_n\}$ ehtimallar ardıcıllığının e_1 əsası ilə kompozision yığılmasına ekvivalentdir, burada μ_n, – X_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasıdır. Kommutativ G qrupu üçün $\sigma(H)$ tipli ardıcıllığın H altqrupu üzrə faktorizasiya yolu ilə yığılmasının öyrənilməsi G/H qrupunda $\sigma(e_1)$ tipli ölçülər ardıcıllığının yığılmasının öyrənilməsinə gətirilir.

Kompakt qruplarda eyni olmayan paylanmaların kompozisiyalarının əsas yığılma problemlərini aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

1. $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcıllığı hansı şərtlərdə kompozision yığılan ardıcıllıqdır (xüsusi halda, hər bir ölçünün ayrılıqda xarakteristikası ilə ifadə olunan)?
2. Əgər $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcıllığı kompozision yığılan ardıcıllıqdırsa, $\{\mu_n\}$-in əsasını necə tapmaq olar? Əsası μ_n ölçülərinin daşıyıcılarının xassələri ilə ifadə edən şərtlər hansılardır?
3. G-də ixtiyari $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcıllıqlarının tipini müəyyən etmək. $\sigma(e_1)$ tipi halı xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

Kompozision yığılma haqqında mühüm nəticə aşağıdakından ibarətdir. H kompozision yığılan ardıcıllığın əsası olarsa, H altqrupunun ixtiyari ətrafı $U(H)$ üçün $\sum_{n=1}^{\infty}\{1-\mu_n(U(H))\}$ sırası yığılır.

Qruplarda paylanmaların kompozisiyalar halı bir ölçünün kompozisiyasının qüvvət üstlü üçün kompakt qruplarda tamamilə araşdırılmışdır (bax, [2]). G-də ixtiyari μ ölçüsü üçün $A(\mu)$ – üstlü ölçülər çoxluğu $\{\mu^n\}$-in bütün limit nöqtələrinin birləşməsi, $n \geq 1$, $A(\mu)$ – kompakt qrup olsun; $\operatorname{supp}\mu$, – μ ölçüsünün daşıyıcısı, $[M]$, – M çoxluğunun doğurduğu qrup olsun. Onda, əgər G kompakt qrupdursa və μ, – G-də ehtimal ölçülərinin $M^1(G)$ semi – qrupuna aiddirsə, λ, – $A(\mu)$ qrupunun vahididirsə, $\mathscr{H} = \operatorname{supp}\lambda$, $\mathscr{K} = [\operatorname{supp}(\mu)]$ olarsa, aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir:

1) $\lim_{n\to\infty}\mu^n$ vardır;

2) $\lim_{n\geq 1}\operatorname{supp}(\mu^n) \neq \varnothing$;

3) $\operatorname{supp}(\mu^n)$, $n \geq 1$ ardıcıllığı yığılır;

4) $\left[\bigcup_{n\geq 1}\operatorname{supp}(\mu)^n \operatorname{supp}(\mu)^{-n}\right]^- = \mathscr{K}$;

5) $\mathscr{K}$ qrupunun özünün qarışıq sinfində elə qapalı normal altqrup yoxdur ki, bu qrup üzrə $\operatorname{supp}(\mu)$ olsun.

6) $\mathscr{H}$ üzrə $\operatorname{supp}(\mu)$ μ ölçüsünün daşıyıcısı $\mathscr{K}$ qrupunun heç bir özünə aid qarışıq sinfində yoxdur;

7) $\chi = \chi_{\mathscr{K}}$.

Bu müddəalardan bir çox məlum nəticələr alınmışdır. Məs., əgər $\mu \in M^1(G)$ olarsa, onda aşağıdakı müddəalar doğrudur: a) $\lim_{n\to\infty}\mu^n = \chi_{\mathscr{K}}$; b) $\lim_{n\geq 1}\operatorname{supp}(\mu^n) = \mathscr{H}$. Və ya əgər G qrupu əlaqələnmişdirsə, μ isə $M^1(G)$-dən χ_G – mütləq kəsilməz simmetrik ölçüdürsə, onda $\lim_{n\to\infty}\mu^n = \chi_G$. Beləliklə, μ ölçüsünün üstlü ardıcıllıqları yığılırsa, onda bu ardıcıllığın limiti $\mathscr{H}$-da Haar ölçüsü ilə üst-üstə düşən idempotent ölçüdür.

$M^1(G)$-də $\{\mu_j\}$, $j \geq 1$ ölçülər ardıcıllığında hər bir $n \geq 1$ üçün μ_n ölçüsü sonsuz say dəfə təkrar olunursa, $\{\mu_j\}$, $j \geq 1$ ardıcıllığı normal ardıcıllıq (Borel mənada) adlanır. G – kompakt qrup, $\{\mu_j\}$, $j \geq 1$, – $M^1(G)$-də normal ardıcıllıq, $\{\nu_n = \mu_1 * \ldots * \mu_n\}$, $n \geq 1$ – kompozision hasillər ardıcıllığı olsun. Onda aşağıdakı müddəalar ekvivalentdir: $\lim_{n\to\infty}\nu_n$ vardır və

$$\left[\bigcap_{j\geq 1}\operatorname{supp}(\mu_j)\right]^- =$$

$$= \left[\bigcap_{n\geq 1}\operatorname{supp}(\mu_1)\ \ldots\ \operatorname{supp}(\mu_n)\ \operatorname{supp}(\mu_n)^{-1}\ldots\ \operatorname{supp}(\mu_1)^{-1}\right]^-$$

bərabərliyi ödənilir.

Eyni olmayan $\{\mu_n\}$ paylanmalarının kompozisiyaları halında limit ölçüləri Haar ölçüləri ilə üst-üstə düşməyə bilər. Buna görə də, $\{\mu_n\}$ ardıcıllığının bütün qrupda daşıyıcısı ilə Haar ölçüsünə kompozision yığılması üçün ölçülər üzərinə qoyulan şərtlər araşdırılır. Məs., əgər mütləq kəsilməz paylanmaların sıxlıqları $p_n(g)$ üçün $p_n \leq c_n < \infty$ olarsa və $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}$ sırası dağılırsa, onda $|p_1 * \ldots * p_n(g) = 1| \to 0$ münasibəti doğrudur, burada $p_1 * \ldots * p_n(g)$, $-\mu_1 * \ldots * \mu_n$ kompozisiyasının sıxlığıdır (bax, [4]).

Sonlu qruplarda eyni olmayan paylanmaların kompozisiyaları üçün sonlu qruplar üçün aşağıdakı spesifik fundamental nəticə alınmışdır ki, bu nəticədən L. t. alınır (bax, [5]). $\{\mu_n\}$ – sonlu G qrupunda paylanmalar ardıcıllığı, $\mu_n(e_1) > \varepsilon > 0$ olsun, burada e_1 – qrupun vahididir. Daha sonra, H G-nin elə altqrupu olsun ki, o, elə $e_i \in G$ elementləri ilə doğurulmuş olsun ki, bunlar üçün $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(e_i)$ sırası dağılan olsun; onda $\{\mu_n\}$ ölçülər ardıcıllığı kompozision yığılır və H qrupu bu ardıcıllığın əsasıdır.

Əd.: [1] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 1, с. 52 – 66; [3] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», т. 13, в. 2, с. 295 – 307; [4] Шлосман С. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 614 – 19; [5] Kawada Y., Ito K., «Proc. Phys.-Math. Soc. Japan», 1940, v. 22, p. 977 – 98.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov prosesində nisbətlər üçün «**предельные теоремы** для отношений, отвечающих марковскому процессу; ratio **limit theorems** for a Markov process» –

$$\int_0^T \mathbf{P}_t f_1(a)\,dt \Big/ \int_0^t \mathbf{P}_t f_2(b)\,dt$$

şəklində nisbətlər üçün $T \to \infty$ olduqda limitlər haqqında teoremlərdir (burada a və b bircins $X = (X_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_t)$; $t \geq 0$ *Markov prosesinin* vəziyyətləri çoxluğu $\mathcal{E}$-dən götürülür; $f_1, f_2 \geq 0$ $\mathcal{E}$-də ölçülən funksiyalar; $\mathbf{P}_t$ isə X prosesinin keçid funksiyasına müvafiq operatorlardır). Hesabidən çox olmayan $\mathcal{E}$ halı üçün bax, [1]. $\mathcal{E}$ çoxluğu daha ümumi təbiətli olduğu halda müəyyən «kiçik» çoxluqdan kənarda yerləşən a və $b \neq a$ üçün qeyd olunan limitlərin varlığı məsələsi də araşdırılmışdır (bax, [2] – [5]); bu «kiçik» çoxluq əksər hallarda yarıpolyar çoxluq kimi xarakterizə olunur (bax, [3], [5]). Additiv funksionallar üçün analoji problemə toxunulmuşdur (bax, [2], [6]).

Bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirində nisbətlər üçün.

Əd.: [1] Чжун Кай лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., M., 1964; [2] Azema J., Kaplan – Duflo M., Revuz D., «Z. Warh. und verw. Geb.», 1967, Bd 8, № 3, S. 157 – 81; [3] Fukushima M., «J. Math. Soc. Japan», 1974, v. 26, № 1, p. 17 – 32; [4] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 3, с. 493 – 505; [5] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 4, с. 712 – 28; [6] Диреев Ю. В., «Матем. заметки», 1980, т. 28, в. 1, с. 153 – 58.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov prosesləri üçün «**предельные теоремы** для марковских процессов; **limit theorems** for Markov processes» – şərti olaraq iki qrupa bölünməsi mümkün olan teoremlərdir. Birinci qrupa aid olunan limit teoremlərində ilkin təsadüfi kəmiyyətlər üzərinə Markov xassəsindən başqa, müəyyən zəif yığılma şərtləri də qoyulur (bax, məs., [1], [2]). Bu L. t., bir qayda olaraq, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün uyğun limit teoremlərinin birbaşa ümumiləşmələridir. İkinci qrupa aid limit teoremləri hər hansı Markov proseslərinin funksionallarının paylanmalarının digər Markov proseslərinin funksionallarının paylanmalarına, xüsusi halda, diffuzion proseslərin funksionallarının paylanmalarına yığılması haqqında teoremlərdir (bax, [1]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, M., 1971; [2] Rosenblatt M., Markov processes, B. – [a. o.], 1971.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov zəncirində nisbətlər üçün «**предельные теоремы** для отношений, отвечающих цепи Маркова; ratio **limit theorems** for a Markov chain» – *Markov zənciri* trayektoriyalarının uzunluğu məhdud olmadan artan zaman intervalı boyunca müxtəlif vəziyyətlər çoxluğunda orta qalma müddətlərini müqayisə etmək üçün teoremlərdir.

Hesabi Markov zəncirinin $\{1,2,...\}$ çoxluğunda verildiyi və n addıma *keçid ehtimalının* $p_{ij}(n)$, $i, j, n \geq 1$ olduğu fərz olunur. Onda

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ij}(n) \Big/ \sum_{n=1}^{N} p_{kl}(n) \qquad (*)$$

kəsrinin surəti başlanğıc vəziyyətin i olması şərtilə zəncirin trayektoriyasının $[1, N]$, $N \geq 1$ zaman intervalında j vəziyyətində orta qalma müddəti kəmiyyətidir; məxrəc də analoji məna daşıyır. Əgər i, j, k, l əlaqəli vəziyyətlərdirsə (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı), onda (*) münasibəti $N \to \infty$ olduqda hər hansı sonlu limitə yaxınlaşır. Bu zaman üzrə nisbətlər üçün ilk limit teoremi Döblin teoremidir (bax, [4]). Qeyd olunan limitin qiymətini Çjun Kay-lay 1950-də hesablamışdır (bax, [4]). Qayıdışlı zəncir halında bu limit üçün daha maraqlı bir neçə ekvivalent ifadələr tapılmışdır ki, xüsusi halda bu limiti μ_i/μ_l nisbəti kimi yazmaq olur, burada $\{\mu_i;\ i \geq 1\}$ – sıfır olmayan invariant ölçüdür (bax, *Stasionar paylanma*; baxılan halda bu ölçü ədədi vuruq dəqiqliyi ilə yeganədir). İxtiyari ölçülən fəzalarda zəncirlər halında bu nəticələrin ümumiləşmələri vardır (bax, [2], [8], [9]), xüsusi halda, Harris qayıdışlı zəncirlər üçün (bax, *Markov zənciri*). Bu mövzu Ornsteyn – Çekon erqodik teoremi ilə sıx bağlıdır (bax, [8], [9]).

Nisbətlər üçün L. t.-nin ən güclü tip adlandırılan nəticələrindən ən çox məlum olanı aşağıdakılardır (bax, [3], [8]). Yuxarıda baxılan Markov zəncirinin qayıdışlı və qeyri – periodik olduğu fərz olunur və bütün $i \geq 1$ və bəzi ε, $N > 0$ üçün $\sum_{n=1}^{N} p_{ii}(n) > \varepsilon$ olsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty} [\, p_{ij}(n) / \, p_{kl}(n+t)] = \mu_j/\mu_l$$

münasibəti bütün i, j, k, l vəziyyətləri və bütün $t = 0, 1, ...$ üçün doğrudur; μ_i – qeyd olunan mənanı daşıyır. Bu teoremin analoqları müəyyən tip qayıdışsız hesabi zəncirlər üçün (bax, [5], [6]) və ixtiyari ölçülən fəzalarda zəncirlər üçün (bax, [10], [11]) mövcuddur.

Nisbətlər üçün güclü limit teoremini ilk dəfə 1951-də Çjun Kay-lay (bax, [4]) və tamqiymətli şəbəkədə təsadüfi dolaşmaları öyrənən P. Erdeş (P. Erdös) isbat etmişlər. Hal-hazırda belə problem çox və ya az ixtiyari qruplarda təsadüfi dolaşmaların tədqiqi çərçivəsində görkəmli yer tutur (bax, [7], [10]).

Əd.: [1] Doeblin W., «Bull. Soc. math. France», 1938, t. 66, № 2, p. 210 – 20; [2] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 389 – 416; [3] Kingman J. F. C., Orey S., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 15, № 6, p. 907 – 10; [4] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., M., 1964; [5] Pruitt W. E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 16, № 2, p. 196 – 200; [6] Молчанов С. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 2, с. 124 – 25; [7] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., M., 1969; [8] Orey S., Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probability, N. Y. – [a. o.], 1971; [9] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., M., 1997; [10] Guivarc'h Y., «Asterisque», 1980, v. 74, p. 15 – 28; [11] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 4, с. 692 – 702; 1985, т. 30, в. 2, с. 241 – 51.

LİMİT TEOREMLƏRİ Markov zəncirləri üçün «**предельные теоремы** для цепей Маркова; **limit theorems** for Markov chains» – addımlar sayı artan Markov zəncirlərində keçid ehtimallarının struktur xüsusiyyətlərini öyrənən teoremlər (məs. erqodik teoremlər) və ehtimal nəzəriyyəsinin klassik limit teoremlərini *Markov zənciri* əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər üçün ifadə edən teoremlərdir; məs., böyük ədədlər qanunu zəif və güclü formalarında, mərkəzi L. t., təkrar loqarifm qanunu və s., həmçinin belə teoremlərin funksional variantları. Bu teoremlərin

dəqiqləşdirilməsi (məs., yığılma sürətinin qiymətləndirilməsi və mərkəzi limit teoremində asimptotik ayrılış) və genişləndirilməsi (məs., zəncir əmələ gətirən, qiymətləri funksional fəzalardan olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün) öyrənilən sahələrdəndir. Markov zəncirləri üçün çoxsaylı tətbiqi məsələlərdə spesifik limit teoremləri (məs., dayanıqlılıq teoremləri) yaranır.

Zəncir əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər üçün limit teoremləri ilk dəfə $1907 - 08$-də A. A. Markov tərəfindən alınmışdır (bax, [1]). $X_1, ..., X_n$ sonlu sayda qiymətlər alan və bircins zəncir əmələ gətirən təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Fərz olunur ki, bir addıma keçid ehtimalları müsbətdir. Onda əgər

$$a = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\, n^{-1}(X_1 + ... + X_n)$$

limiti vardırsa, böyük ədədlər qanunu ödənilir, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\, | n^{-1}(X_1 + ... + X_n) - a | > \varepsilon\} \to 0$$

münasibəti doğrudur. Əgər bundan başqa

$$0 < \sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} n^{-1} (X_1 + ... + X_n - an)^2 < \infty$$

olarsa, onda mərkəzi limit teoremi ödənilir, yəni $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ y \le \frac{1}{\sigma n^{1/2}} (X_1 + ... + X_n - an) \le x \right\} \to (2\pi)^{-1/2} \int_y^x e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

Bircins olmayan zəncirlər üçün böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi A. A. Markov tərəfindən alınmışdır (bax, [1]).

Təsadüfi proseslər üçün L. t.-nin isbatı metodlarının çoxu Markov zəncirləri üçün L. t.-nin tədqiqi ilə bağlı yaranmışdır. [2]-dəki işlərdə ilk dəfə X_i və X_j kəmiyyətləri arasında asılılığın $|i - j|$ fərqi artdıqca zəifləməsindən istifadə olunmuşdur, bu da $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ cəmini asılı olmayan toplananların cəminə yaxınlaşdırmağa imkan verir (zəif asılılıq metodu). [3] və [4]-dəki işlərin metodunun əsası belə bir müddəaya əsaslanır: zəncirin ixtiyari Δ qayıdış vəziyyətinə düşməsi anları

$$T_0 = \min(n > 0 : X_n \in \Delta),$$

$$T_k = \min(n > T_{k-1} : X_n \in \Delta), \qquad k = 1, 2, ...$$

– regenerasiya anlarıdır, yəni bu anlar zənciri qarşılıqlı asılı olmayan parçalar – regenerasiyanın tsikllərindəki artımlar ardıcıllığına bölür. Belə bölgü S_n cəmini təsadüfi sayda $(\nu(n) = \max(k \ge 0 : T_k < n))$ asılı olmayan toplananların cəminə yaxınlaşdırmağa imkan yaradır (regenerativ metod). Diskret Markov zənciri əmələ gətirən asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəminin araşdırılmasında xarakteristik funksiyalar metodunun ilk tətbiqlərindən biri [5]-də verilmişdir.

Sonrakı araşdırmalarda əsas məqsəd məlum L. t.-nin dəqiqləşdirilməsi və genişləndirilməsi, zəncirlərin ergodiklik şərtlərinin zəiflədilməsi, zəncirin vəziyyətlər fəzasının diskret olması tipli struktur məhdudiyyətlərindən imtina edilməsidir. Qeyd etmək lazımdır ki, hal-hazırda Markov zəncirləri üçün L. t.-nə aid olduqca çoxsaylı jurnal və monoqrafik ədəbiyyat mövcuddur.

Ehtimal nəzəriyyəsinin L. t.-nin əksəriyyətinin Döblin şərtini ödəyən ixtiyari vəziyyətlər fəzası ilə verilən Markov zəncirlərinə köçürülməsi istiqamətindəki nəticələr [6]-da şərh olunmuşdur. Bu nəticələrin əsasında xətti operatorların spektral nəzəriyyəsinə əsaslanan xarakteristik funksiyalar metodunun inkişafı durur. Lakin Döblin şərti zəncirin müntəzəm güclü qarışma şərtinə ekvivalentdir və bu şərt ağır məhdudiyyətdir. Məs., tətbiqi məsələlərdə tez-tez yaranan Markov avtoreqressiya sxemi bu şərti ödəmir. Operatorların kükrəntilər nəzəriyyəsinin tətbiqi, sonradan maksimal korrelyasiya əmsalları terminlərində verilən şərtlərlə kifayətlənməyə imkan yaratdı. Döblin şərti tipli şərti ödəyən bircins olmayan Markov zəncirləri üçün L. t., məs., [7]-də verilir.

Erqodik tipli ən məlum şərtlərdən biri – Döblin şərtlərini genişləndirən – Harris qayıdış şərtidir. Bu şərti ödəyən zəncirlər sinfi genişdir və çoxsaylı tətbiqlər üçün yetərlidir. Belə zəncirlərdə regenerativ genişlənmə mümkündür, bu da vəziyyətlər fəzası diskret olan zəncirlər üçün regenerativ metodla alınmış L. t.-ni (bax, məs., [8]) bu sinfə köçürməyə imkan verir (bax, məs., [9], [10]).

Markov zəncirləri üçün funksional L. t. haqqında, bax, məs., [11].

Əd.: [1] Марков А. А., Избр. труды. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1951, с. 339–62; 363–98; 465–508; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 121–76, 177–96, 322–30; [3] Doeblin W., «Bull. Soc. Math. France», 1938, v. 66, № 2, p. 210–20; [4] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, в. 4, с. 281–300; [5] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949; [6] Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К., Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова, Таш., 1979; [7] Статулявичюс В. А., «Литов. матем. сб.», 1961, т. 1, в. 1–2, с. 231–314; [8] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [9] Boltshausen E., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1982, Bd 60, H. 3, S. 283–89; [10] Малиновский В. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 2, с. 315–32; 1989, т. 34, в. 2, с. 289–303; [11] Bhattacharya R. N., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1982, Bd 60, H. 2, S. 185–201.

LİMİT TEOREMLƏRİ martinqal və semimartinqallar üçün « **предельные теоремы** для мартингалов и семимартингалов; **limit theorems** for martingales and semimartingales » – *martinqallar* və ya *semimartinqallar* ardıcıllığının yığılma şərtlərini müəyyən edən teoremlərdir.

$X = (X_t)_{t\ge 0}$ semimartinqalı $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t\ge 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində verilmiş elə təsadüfi prosesdir ki, hər bir $t \ge 0$ qiymətində X_t $\mathcal{A}_t$ – ölçüləndir və onun trayektoriyaları sol limitləri olan, sağdan kəsilməz həqiqi funksiyaların fəzası D-dəndirlər.

D fəzası Skoroxod metrikası ilə tam separabel metrik fəzaya çevrilir və buna görə də, X^n, $n \ge 1$ semimartinqallar ardıcıllığının X semimartinqalına yığılmasının təbii növlərindən biri ($X^n \xrightarrow{D} X$ simvolu ilə işarə olunur) X^n semimartinqallarının uyğun paylanmaları $\mathbf{P}^n$-lərin X semimartinqalının paylanması $\mathbf{P}$ -yə zəif yığılması ($\mathbf{P}_n \xrightarrow{D} \mathbf{P}$ kimi işarə olunur) kimi anlaşıla bilinər. (Paylanmalar uyğun metrika ilə doğurulmuş və silindrik çoxluqların σ – cəbri ilə üst-üstə düşən Borel σ – cəbrində ehtimal paylanmaları kimi anlaşılır).

Hər bir X semimartinqalı ilə onun öngörül xarakteristikalarının tripleti $T(B, C, \nu)$ bağlıdır ki, bir çox hallarda o, X-in paylanması $\mathbf{P}$-ni tamamilə təyin edir. Bununla bağlı olaraq,

$X^n \xrightarrow{D} X$ yığılmasının şərtləri haqqında məsələnin təbii qoyuluşu tripletlərin bu və ya digər yığılmasının ($T^n \to T$) bu yığılmanı nə vaxt təmin etməsinin araşdırılmasından ibarətdir: $T^n \to T \Rightarrow X^n \xrightarrow{D} X$.

Maraq doğuran məsələlərdən biri də tripletlərin yığılması üçün X^n semimartinqallarının bütün sonluölçülü paylanmalarının X -in paylanmasını ($X^n \xrightarrow{D_f} X$ kimi işarə olunur) və ya $S \subseteq \mathbb{R}_+$ çoxluğunda yığılmasını ($X^n \xrightarrow{D_f(S)} X$ kimi işarə olunur) təmin edən şərtlərin müəyyən olunmasıdır.

$T^n \to T$ yığılması terminlərilə ifadə olunan $X^n \xrightarrow{D} X$ yığılmasının (yəni $\mathbf{P}^n \xrightarrow{D} \mathbf{P}$ zəif yığılmasının) əsas ümumi isbat metodlarından biri aşağıdakı üç ara mərhələlərinin cəlb olunmasından ibarətdir:

I) paylanmalar ailəsinin sıxlığının müəyyənləşdirilməsi;

II) bütün zəif limitlərin xarakterizasiyası;

III) identifikasiya, yəni ixtiyari $\mathbf{P}' = \omega = \mathbf{P}^{n'}$ ehtimal ölçüsü üçün

$$T^n \to T \Rightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{P}$$

münasibətinin ödənilməsi.

Bu üç mərhələ ehtimal nəzəriyyəsinin klassik limit teoremlərinin bir çox isbatlarında (məs., xarakteristik funksiyalar metodunda) bu və ya başqa cür də olsa iştirak edir. Əgər X, X^n xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq,

$$T = \{f(t),\, t \in \mathbb{R}\}, \quad T^n = \{f^n(t),\, t \in \mathbb{R}\}$$

olan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $T^n \to T$ yığılması xarakteristik funksiyaların nöqtəvi $f^n(t) \to f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ yığılması kimi anlaşılır və bu da, məlum olduğu kimi, X^n kəmiyyətlərinin paylanmalarının X kəmiyyətinin paylanmasına zəif yığılmasını təmin edir və bu halda uyğun isbat **I**, **II**, **III** mərhələlərinin cəlb olunması ilə aparılır. Bu zaman $\{\mathbf{P}^n\}$ ailəsinin sıxlığı (**I** mərhələdə) məlum

$$\mathbf{P}^n\{\mathbb{R} \setminus [-1/a,\, 1/a]\} \le 7/a \int_0^a [1 - \operatorname{Re} f^n(t)]\, dt$$

qiymətləndirilməsindən və $t \in \mathbb{R}$, $f^n(t) \to f(t)$ yığılmasından alınır. Ədəd oxu üzərində paylanmalar halında $\{\mathbf{P}^n\}$ ailəsinin sıxlığı onun nisbi kompaktlığı ilə eynigüclüdür (« $\{\mathbf{P}^n\}$ -in hər bir altardıcıllığından müəyyən bir ehtimal paylanması $\mathbf{P}'$ -ə zəif yığılan $\{\mathbf{P}^{n'}\}$ altardıcıllığı seçmək mümkündür»). Buna görə də, $\mathbf{P}^{n'} \xrightarrow{w} \mathbf{P}'$ və $f^{n'}(t) \to f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ yığılmalarından aşağıdakı xarakterizasiya alınır: $\mathbf{P}'$ xarakteristik funksiyası $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ olan paylanmadır. Lakin xarakteristik funksiya birqiymətli olaraq uyğun paylanmanı təyin edir. Deməli, $\mathbf{P}'$ paylanması $\mathbf{P}$ ilə üst-üstə düşür (**III** mərhələ). Beləliklə, bütün zəif $w - \lim \mathbf{P}^{n'}$ limitləri $\mathbf{P}$ ölçüsü ilə üst-üstə düşür, deməli, bütün $\{\mathbf{P}^n\}$ ardıcıllığı $\mathbf{P}$ -yə yığılır, yəni $w - \lim \mathbf{P}^n$ vardır və bu limit $\mathbf{P}$ ilə üst-üstə düşür.

Təsvir olunmuş üç mərhələnin («sıxlıq» $\oplus$ «xarakterizasiya» $\oplus$ «identifikasiya») ideologiyası əslində $\{P^n\}$ paylanmalar ailəsinin sıxlığını müəyyən etmək mümkün olduqda (ara nəticələri kimi) $X^n \xrightarrow{D} X$ limit (funksional) teoremlərinin isbatında və bütün sonluölçülü paylanmaların zəif yığılmasını müəyyən etmək mümkün olduqda, $X^n \xrightarrow{D_f} X$ limit teoremlərinin isbatında da istifadə olunur. Bu metod («sıxlıq» $\oplus$ «sonluölçülü paylanmaların yığılması») $\mathbf{P}'$ paylanmalarının xarakterizasiyasını aşağıdakı kimi verməyə imkan verir (**II** mərhələ): $\mathbf{P}'$ ölçülərinin bütün sonluölçülü daralmaları $\mathbf{P}$ ölçülərinin sonluölçülü daralmaları ilə üst-üstə düşür.

D fəzası halında Borel σ – cəbri silindrik çoxluqların σ – cəbri ilə üst-üstə düşür. Silindrik çoxluqlar σ – cəbrində $\mathbf{P}$ paylanması sonluölçülü paylanmalarla tamamilə təyin olunur. Buna görə də, bu metodda **III** mərhələ trivial olur, yəni $\mathbf{P}'$-in $\mathbf{P}$ ilə identifikasiyası, sadəcə olaraq, onların bütün sonluölçülü daralmaları vasitəsilə həyata keçirilir.

$T^n \to T \Rightarrow X^n \xrightarrow{D} X$ yığılmasının isbat metodu «sıxlıq» $\oplus$ «sonluölçülü paylanmaların yığılması» vasitəsilə əsasən o halda «işlək» olur ki, limit prosesi nisbətən sadə struktura malik olsun, məs., proses asılı olmayan artımlarlı proses olduğu halda. Bir çox hallarda isə, məs., diffuzion tip proseslərə funksional yığılma məsələlərində $X^n \xrightarrow{D_f} X$ sonluölçülü paylanmalar yığılması üçün şərtlərin axtarılması çətin məsələdir və buna görə digər metodlara müraciət olunur. Belə metodlardan biri çox vaxt martinqal metodu adlandırılan metoddur. Metoda verilən ad onunla bağlıdır ki, burada baxılan X^n və X prosesləri semimartinqallar olduqda stoxastik hesabının və martinqallar nəzəriyyənin anlayışları və aparatından istifadə olunur.

Bu metodun məğzi (**I** , **II** , **III** mərhələlərin cəlb olunması ilə) aşağıdakından ibarətdir. X^n və X – tripletləri $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ və $T = (B, C, \nu)$ olan semimartinqallar olsun. Yenə də əvvəlcə $\{\mathbf{P}^n\}$ ailəsinin sıxlığı müəyyən olunur (tripletlərin yığılması əsasında və martinqal metodlardan istifadə olunmaqla). Sonra göstərilir ki, tripletlərin fərz olunan $T^n \to T$ yığılması aşağıdakı xarakterizasiyanı təmin edir: paylanmaları $\mathbf{P}'$ – zəif, $w - \lim \mathbf{P}^{n'}$ limiti olan bütün X' prosesləri semimartinqallardır, bunların tripletləri T' dəqiqliklə T tripleti ilə üst-üstə düşür. Nəhayət, bu metodda **III** mərhələ T tripletinin X semimartinqalının paylanmasını birqiymətli olaraq təyin etməsinin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir.

Konkret halların baxılması üçün aşağıda fərz olunur ki, X^n semimartinqallar, $n \ge 1$, $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ uyğun tripletlərdir; X^n -lərin kumulyantı aşağıdakı kimidir:

$$G_t^n(\lambda) = i\lambda B_t^n - \frac{\lambda^2}{2} C_t^n + \int_0^t \int (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda h(x))\, \nu^n(ds, dx),$$

burada $h = h(x)$ – kəsilməz kəsik funksiyadır ($h(x) = h(-x)$, hər hansı $[-a, a]$ intervalı xaricində, $h(x) = 0$); $G^n(\lambda)$ üzrə qurulmuş

$$\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t = e^{G_t^n(\lambda)} \prod_{0<s\le t} (1 + \Delta G_s^n(\lambda))\, e^{-\Delta G_s^n(\lambda)}$$

stoxastik eksponenti

$$d\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t = \mathscr{E}(G^n(\lambda))_t - d\,G_t^n(\lambda)$$

tənliyinin həlli olsun.

T e o r e m 1. X^n, $n \ge 1$ – tripletləri T^n olan semimartinqallar, X – tripleti T olan, ehtimala görə kəsilməz, asılı olmayan artımlarlı proses olan semimartinqal olsun. Əgər

$$\mathscr{E}(G^n(\lambda))_t \to \mathscr{E}(G(\lambda))_t, \quad t \in S \subseteq \mathbb{R}_t$$

münasibəti ödənilərsə, onda bütün sonluölçülü paylanmalar üçün

$$\mathbf{P}^n_{t_1,\dots,t_k} \xrightarrow{w} \mathbf{P}_{t_1,\dots,t_k}, \ t_i \in S, \ i = 1, \dots, k$$

zəif yığılması ödənilir [burada $\mathbf{P}^n_{t_1,\dots,t_k}$ və $\mathbf{P}_{t_1,\dots,t_k}$ – $(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k})$ və $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ vektorlarının paylanmalarıdır].

Bu teoremə xarakteristik funksiyalar metodunun teoremlərinin ümumiləşməsi kimi baxmaq olar və o, yığılma üçün «triplet» şərtlər almağa imkan yaradır.

T e o r e m 2. X^n, $n \ge 1$ – tripletləri $T^n = (B^n, C^n, \nu^n)$ olan semimartinqallar olsun;

$$\widetilde{C}_t^n = C_t^n + \int_{(0,t]\times \mathrm{R}\setminus\{0\}} h^2(x)\,\nu(ds, dx) - \sum_{0<s\le t} (\Delta B_s^n)^2$$

və $(T^n \to T)$ aşağıdakı şərtlər ödənilmiş olsun:

$$\sup_{s\le t} \nu^n(\{s\}\times(|x| \ge \varepsilon)) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

$$B_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} B_t, \quad \widetilde{C}_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} \widetilde{C}_t,$$

$$g * \nu_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} g * \nu_t, \quad t \in S, \quad g \in C_1,$$

burada $g * \nu_t^n = \int_{(0,t)\times \mathrm{R}\setminus\{0\}} g(x)\,\nu(ds, dx)$,

$$g * \nu_t = \int_{(0,t)\times \mathrm{R}\setminus\{0\}} g(x)\,\nu(ds, dx).$$

və C_1 – sonsuzluqda limitləri olan, sıfır ətrafında sıfra bərabər kəsilməz məhdud funksiyalar çoxluğudur. Onda $X^n \xrightarrow{D_f} X$.

Bu teoremlərdən aydındır ki, bunlardakı şərtlər erqodik teoremlərin öyrənilməsi xarakterini daşıyır (böyük ədədlər qanunu tipli). Buna əsasən hökm etmək olar ki, mahiyyət etibarilə bu teoremlər tripletlər üçün böyük ədədlər qanunu tipli şərtlərin (daha sadə olan) ödənilməsi üçün paylanmaya görə yığılmanın yoxlanılmasını doğuran teoremlərdir.

X ehtimala görə kəsilməz, asılı olmayan artımlarlı proses olarsa, $X^n \xrightarrow{D} X$ funksional yığılmasına görə «sıxlıq» $\oplus$ «sonluölçülü paylanmaların yığılması» metodu ilə aşağıdakı nəticə alınır: fərz olunur ki, ixtiyari $t > 0$ üçün

$$\sup_{s\le t} \left| B_s^n - B_s \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

$$\sup_{s\le t} \left| \widetilde{C}_s^n - \widetilde{C}_s \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

$$\sup_{s\le t} \left| g * \nu_s^n - g * \nu_s \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad g \in C_1;$$

Onda $X^n \xrightarrow{D} X$.

«Limit» prosesi X -in ehtimala görə kəsilməz olması şərtindən imtina etdikdə [bu determinə olunmuş $B = (B_t)_{t\ge 0}$, $C = (C_t)_{t\ge 0}$, $(g*\nu) = (g*\nu_t)_{t\ge 0}$, $g \in C_1$ funksiyalarının kəsilməzliyi ilə eynigüclüdür], $\mathscr{E}(G(\lambda))$ sıfra bərabər olmadığı halda əvvəlki nəticənin ümumiləşməsi alınır, yəni fərz olunur ki, Skoroxod topologiyasında $B^n \xrightarrow{\mathbf{P}} B$, $\widetilde{C}^n \xrightarrow{\mathbf{P}} \widetilde{C}$, $g * \nu^n \xrightarrow{\mathbf{P}} g * \nu$, $g \in C_1$; onda $X^n \xrightarrow{D} X$.

Daha ümumi hallarda, $X = (X_t)_{t\ge 0}$ «limit» semimartinqalı kanonik şəkildə verilərsə və onun tripleti $T = (B, C, \nu)$ D fəzasının $x = (x_s)_{s\ge 0}$ funksiyalarında təyin olunmuşdursa, $\mathrm{I}\oplus\mathrm{II}\oplus\mathrm{III}$ sxemi üzrə alınan aşağıdakı nəticə doğrudur: Sk – Skoroxod metrikası,

$$\mathrm{Sk}(B^n, B\circ X^n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \ \mathrm{Sk}(\widetilde{C}^n, \widetilde{C}\circ X^n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

$$\mathrm{Sk}(g*\nu^n, (g*\nu)\circ X^n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$$

və $T = (B, C, \nu)$ tripleti X semimartinqalının paylanmasını birqiymətli təyin etmiş olsun; onda $X^n \xrightarrow{D} X$.

Yuxarıda qeyd olunmuş triplet şərtlərini xüsusi hallar üçün konkretləşdirməklə bunlardan, məs., daha çox adət olunmuş terminlərlə aşağıdakı nəticələri almaq olur.

1) $M = (M_t)_{t\ge 0}$ – kvadratik – inteqrallanan martinqal olsun; M – eyni zamanda spiraldır (yəni stasionar artımlarlı prosesdir) və $X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$ olsun. Onda $X^n \xrightarrow{D} \eta w$ doğrudur, burada $\eta^2 = \mathbf{M}(M_1^2 | J)$, J – invariant M çoxluqlarının sistemi, w isə η -dan asılı olmayan standart Viner prosesidir. Bu nəticə:

a) ikinci momentləri sonlu, yəni $\mathbf{M}\xi_i^2 < \infty$ və $\mathbf{M}\xi_1 = 0$ olan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün Donsker invariantlıq prinsipini (əgər $M_{nt} = \sum_{k\le [nt]} \xi_k$ olarsa, onda $X^n \xrightarrow{D} w$) və

1) $\xi_1, \xi_2, \dots$ – martinqal – fərq olan stasionar erqodik ardıcıllıq olduqda analoji nəticəni daxilinə alır.

2) $X^n = (X_t^n)_{t\ge 0}$ – kompensatorları $A^n = (A_t^n)_{t\ge 0}$ olan nöqtəvi proseslər, $X = (X_t)_{t\ge 0}$ – determinə olunmuş, kompensatoru $A = (A_t)_{t\ge 0}$ olan nöqtəvi proses olsun (deməli, həm də asılı olmayan artımlarlı proses). Onda əgər $A_t^n \xrightarrow{\mathbf{P}} A_t$, $\sum_{s\le t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \sum_{s\le t} (\Delta A_s)^2$ olarsa [bu $\mathrm{Sk}(A^n, A) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ münasibətilə eynigüclüdür], $X^n \xrightarrow{D} X$ olur.

3) $\xi^n = (\xi_k^n)_{k\geq 1}$ – hər bir $n \geq 1$ üçün elə stoxastik ardıcıllıq olsun ki, ξ_k^n -lər $\mathscr{A}_k^n$ – ölçülən olsunlar və $\mathscr{A}_0^n = \{\varnothing, \Omega\} \subseteq \subseteq \mathscr{A}_1^n \subseteq \mathscr{A}_2^n \subseteq \ldots$. Fərz olunur ki,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{|\xi_{nk}| > \delta \,\big|\, \mathscr{A}_{k-1}^n\} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \delta \in (0, 1],$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\{\xi_{nk} I(|\xi_{nk}| \leq 1) \,\big|\, \mathscr{A}_{k-1}^n\} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big[\mathbf{M}\{\xi_{nk}^2 I(|\xi_{nk}| \leq \delta) \,\big|\, \mathscr{A}_{k-1}^n\} - \mathbf{M}\{\xi_{nk} I(|\xi_{nk}| \leq \delta) \,\big|\, \mathscr{A}_{k-1}^n\}\Big] \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2 .$$

Onda $n \to \infty$ olduqda $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} \xrightarrow{D} S$, burada S – normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət, $\mathbf{M}S = 0$, $\mathbf{M}S^2 = \sigma^2$.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [2] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994; [3] Стохастическое исчисление, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 49, М., 1989.

LİMİT TEOREMLƏRİ stoxastik differensial tənliklər üçün « **предельные теоремы** для стохастических дифференциальных уравнений; **limit theorems** for stochastic differential equations » – *stoxastik differensial tənliklərin* həllərinin limitə yaxınlaşması haqqında teoremlərdir; fərz olunur ki, verilən tənliyi təşkil edən elementlər (yəni başlanğıc şərti, tənliyin əmsalları, tənliyə daxil olan martinqal ölçüləri, semimartinqallar və s.) parametrdən (kəsilməz və ya diskret) asılıdırlar və bu parametrin limit yaxınlaşmasında bu elementlər özlərini bu və ya digər şəkildə aparırlar (məs., limit stoxastik differensial tənliyinin elementlərinə müəyyən mənada yığılırlar). Bundan başqa, bu bölməyə həmçinin bu və ya digər dərəcədə ixtiyari strukturlu təsadüfi proseslərin (məs., sonlufərqlərli tənliklər ardıcıllıqlarının həlləri nəticəsində alınan proseslər) stoxastik differensial tənliklərinin həllərinə yığılma haqqında müddəalar da daxil olunur. Stoxastik differensial tənliklər üçün L. t. müxtəlif qoyuluşlarda bir çox müəlliflər tərəfindən isbat olunmuşdur. Aşağıda əsas tip məsələlər şərh olunmuşdur və bəzi nəticələr verilmişdir.

1. Stoxastik differensial tənliklərin həlləri üçün ehtimala görə və kvadratik orta mənada yığılma.

a) Hər hansı ehtimal fəzasında parametrdən asılı olmayan semimartinqal, martinqal ölçüsü və verilmiş semimartinqal, martinqal üzrə inteqralları özündə saxlayan stoxastik differensial tənliyin əmsalları ardıcıllığı verilir. Fərz olunur ki, əmsalların bu ardıcıllığı müəyyən mənada limit stoxastik differensial tənliyin əmsallarına yığılır. Limitəqədərki tənliklərin həllərinin kvadratik orta mənada (və ya ehtimala görə) limit stoxastik differensial tənliyin həllinə yığılması araşdırılır. Olduqca «yaxşı» əmsallarlı stoxastik differensial tənliyin həllərinin varlığı teoremləri əsasında əvvəlkiləri sonuncularla approksimasiya edərək, qeyri – Lipşits əmsallarlı stoxastik differensial tənliyin güclü həllərinin varlığı teoremlərini almaq olur. Əksinə, limit stoxastik differensial tənliyin güclü həllinin varlığı faktından limitəqədərki tənliklərin həllərinin bu həllə yığılmasının isbatında istifadə oluna bilinər. Aşağıdakı nəticədən bu aydın olur (bax, [1], [2]).

d – ölçülü $w(t)$ Viner prosesi verilmiş hər hansı ehtimal fəzasında təsadüfi olmayan $x \in \mathbb{R}^d$ başlanğıc şərti və əmsalları $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ -də d dim. – ölçülü $a_n(t, y)$ vektor funksiyası və xətti operator funksiyası $\sigma_n(t, y)$ olan

$$dX_n(t) = a_n(t, X_n(t))dt + \sigma_n(t, X_n(t))dw(t), \quad X_n(0) = x \tag{1}$$

stoxastik differensial tənliklər ardıcıllığının verildiyi fərz olunur. Əmsalların müntəzəm məhdud, fəza dəyişəninə görə Lipşits əmsalları (ümumiyyətlə, n -dən asılı konstantla) olduğu fərz olunur; $\sigma_n \sigma_n^*$ operatorunun müntəzəm cırlaşmayan operator olduğu fərz olunur. Əgər sanki bütün t, x üçün

$$\lim_{n\to\infty} a_n(t, x) = a(t, x), \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(t, x) = \sigma(t, x)$$

münasibətləri ödənilərsə və

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t), \quad X(0) = x \tag{2}$$

tənliyinin güclü həlli vardırsa, onda $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)$ münasibəti kvadratik orta yığılma mənada $t \in [0, T]$ üzrə müntəzəm ödənilir.

b) Semimartinqal və martinqal ölçü parametrdən asılı olduqda a) bəndindəki məsələyə oxşar məsələnin qoyuluşu daha ümumidir. Aşağıda bu tipli olduqca ümumi nəticə şərh olunmuşdur (bax, [3]).

Hər hansı ehtimal fəzasında elə d – ölçülü $(Z_n(t))_{t\in[0,T]}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ semimartinqallarının verildiyi fərz olunur ki, bütün $n = 0, 1, 2, \ldots$ qiymətlərində $\mathbf{M} \sup_{t\leq T} |Z_n(t)|^2 < \infty$. Qiymətləri $\mathbb{R}^d$ xətti operatorlar fəzasından olan, üç dəfə kəsilməz differensiallanan və bütün törəmələrilə birlikdə məhdud $\sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ funksiyası üçün

$$X_n(t) = x + \int_0^t \sigma(X_n(s)) \circ dZ_n(s) \tag{3}$$

tənliyinə baxılır, burada sağdakı inteqral simmetrik stoxastik inteqraldır (Fisk – Stratonoviç inteqralı). Bu tənliyin həlli vardır və bu həll bütün $n = 0, 1, 2, \ldots$ qiymətlərində yeganədir. $j, l = 1, 2, \ldots, d$ qiymətləri üçün

$$Z_n^{jl}(t) = \frac{1}{2}\Big(\langle Z_n^l, Z_0^j \rangle_t - \langle Z_n^j, Z_0^l \rangle_t \Big) - \int_0^t [Z_0^j(s) - Z_n^j(s)]\, d[Z_0^l(s) - Z_n^l(s)]$$

olsun, burada $\langle Z^j, Z^l \rangle$, – Z^j və Z^l semimartinqallarının martinqal hissələrinin qarşılıqlı kvadratik xarakteristikasıdır (Z^j, – Z vektorunun j -ci koordinatıdır). Fərz olunur ki,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \sup_{t\leq T} |Z_n(t) - Z_0(t)|^2 = 0$$

və bütün i, j üçün elə məhdud variasiyalı $A^{ij}(t)$ prosesi vardır ki,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \sup_{t\le T} \left| Z_n^{ij}(t) - A^{ij}(t) \right|^2 = 0 .$$

Onda, əgər bəzi texniki xarakterli tələblər də ödənilərsə (bax, [3]),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \sup_{t\le T} \left| X_n(t) - X_0(t) \right|^2 = 0$$

doğrudur, burada $X_0(t)$, –

$$X_0^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(X_0(s)) \circ dZ_0^j(s) +$$

$$+ \sum_{j,k,l=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^k} (X_0(s))\, \sigma_{kl}(X_0(s))\, d\, A^{jl}(s) ,$$

$$i = 1,2,...,d \qquad (4)$$

tənliyinin həllidir ($X_0^i(t)$, – $X_0(t)$ vektorunun i-ci koordinatıdır).

Beləliklə, (3) stoxastik differensial tənliyində limitə keçid tənliyin sağ tərəfində əlavə toplananların yaranmasına səbəb olur. $A^{ij} = -A^{ji}$ bərabərliyi həmişə doğrudur, odur ki, $A^{ii} = 0$. Əgər bütün $i, j = 1,2,...,d$ qiymətlərində $A^{ij} = 0$ da olarsa, onda $Z_0(t)$ semimartinqalının approksimasiyası $Z_n(t)$ simmetrik approksimasiya adlanır. Bu halda qeyd olunan nəticədən aşağıdakı müddəa alınır: (3) stoxastik differensial tənliyi $Z_0(t)$ semimartinqalının simmetrik kükrəntilərinə nəzərən dayanıqlıdır.

Yuxarıdakı nəticənin bir xüsusi halını qeyd etmək diqqətəlayiqdir. $d = 1$, (3) tənliyi isə (2) İto stoxastik differensial tənliyi şəklində yazılmış olsun. Əgər bu tənlikdə Viner prosesini hamar $w_n(t)$ prosesləri ilə elə approksimasiya etmək olarsa ki, $\mathbf{M} \sup_{t\in T} \left| w_n(t) - w(t) \right|^2 = 0$ olsun, onda

$$X_n(t) = x + \int_0^t a(s, X_n(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X_n(s)) w_n(s) ds$$

tənliyinin həlli $X_n(t)$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \sup_{t\in T} \left| X_n(t) - X(t) \right|^2 = 0$$

münasibəti doğrudur, burada $X(t)$, –

$$X(t) =$$

$$= x + \int_0^t \left[a(s, X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s, X(s)) \frac{\partial \sigma(s, X(s))}{\partial x} \right] ds +$$

$$+ \int_0^t \sigma(s, X(s))\, d\, w(s)$$

İto tənliyinin həllidir və bu həll Stratonoviç formasında

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) \circ d\omega(s)$$

şəklində ifadə olunur.

Bu nəticədən aydın olur ki, belə teoremlərdə Fisk – Stratonoviç inteqralından istifadə etmək daha məqsədəuyğundur.

2. Stoxastik differensial tənliklərin həllərinin zəif yığılması.

a) Elə əmsallar ardıcıllığının verildiyi fərz olunur ki, uyğun stoxastik differensial tənliklər funksional fəzada (kəsilməz funksiyalar fəzasında, Skoroxod fəzasında və s.) ölçülərin zəif kompakt ardıcıllığını təyin etmiş olsun. Verilən ardıcıllıq üçün zəif yığılma mənada limit ölçülərinin təsviri məsələsi araşdırılır. Əgər əlavə olaraq tələb olunarsa ki, limitəqədərki tənliklərin əmsalları limit tənliklərinin əmsallarına yığılsın (hər hansı mənada), onda hamar olmayan əmsallarlı stoxastik differensial tənliklərin zəif həllərinin varlığı teoremlərini almaq olur (bu metodu A. V. Skoroxod ilk dəfə [4]-də kəsilməz əmsallarlı stoxastik differensial tənliklərin həllərinin varlığının isbatı üçün təklif etmişdir). Təqdirəlayiqdir ki, bəzi şərtlərlə limit ölçüsü, əmsalların yığılması fərziyyəsi olunmadan, stoxastik differensial tənliyin həllinə uyğun olur. Bu aşağıdakı nəticədən aydındır (bax, [5]).

(1) tənliyinin əmsalları müntəzəm məhdud, $\sigma_n\sigma_n^*$ operatoru cırlaşmayan operator olsun; əmsalların hər bir n qiymətində x-ə görə törəməsi məhdud, hamar funksiya olduğu fərz olunur. Onda kəsilməz funksiyalar fəzasında (1) tənliyinin həllərinə uyğun ölçülər ardıcıllığı zəif kompakt ardıcıllıqdır və bu ardıcıllıq üçün limit ölçüsü olan ixtiyari ölçü (2) şəklində hər hansı stoxastik differensial tənliyin həllinə uyğundur. Bu tipli nəticələr elliptik və parabolik operatorların G – yığılma anlayışı ilə bağlıdırlar.

Əmsalların məhdudluq şərti nəzərə alınmadıqda vəziyyət çətinləşir. Bu aşağıdakı misalda aydın olur (bax, [6]).

M i s a l. (1) tənliyində $d = 1$, $\sigma_n(t, x) \equiv 1$, $a_n(t, x) = n \cos nx$ olsun. İsbat etmək olar ki, belə tənliklərə uyğun ölçülər ardıcıllığı $a(t, x) \equiv 0$, $\sigma(t, x) \equiv k$ olan (2) tənliyinin həllinə uyğun ölçüyə zəif yığılır, burada $k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j!)^{-2} \right)^{-1}$.

b) Əksər hallarda kiçik $\varepsilon > 0$ parametrli stoxastik differensial tənliklərə baxılır. Bu sahədə həm nəzəri, həm də tətbiqi xarakterli nəticələr stoxastik differensial tənliklər üzrə bütün nəşrlərin əsas hissəsini təşkil edir. Bu sahədə araşdırılan məsələlərin yalnız bəzilərinin keyfiyyətli təsviri aşağıda şərh olunmuşdur.

Əgər ε parametri (2) tənliyinin sağ tərəfindəki ikinci toplanana vuruq kimi daxil olarsa, onda uyğun sistem kiçik təsadüfi kükrəntiyə məruz qalan 1-ci tərtib adi differensial tənliklərlə ifadə olunan dinamik sistem kimi interpretasiya olunur. Bu halda ya kükrəntiyə məruz qalmış sistemin böyük zaman intervallarında (ε^{-1}, ε^{-2},... ilə müqayisə olunan) dəyişiklikləri, ya da $\varepsilon \downarrow 0$ olduqda azehtimallı hadisələrin asimptotikası, məs., kiçik diffuziya nəticəsində prosesin verilmiş oblastın sərhədinə çıxması kimi (bu oblast dayanıqlı tarazlıq nöqtəsini özündə saxlayarsa) hadisənin asimptotikası araşdırıla bilinər (bax, [8]).

Kiçik parametrli stoxastik differensial tənliklərlə təsvir olunan sistemlərin mühüm sinfi komponentlərinin bir hissəsi sürətlə dəyişən (bu komponentlər tez zamanda t/ε, t/ε^2 və s. olduqda fəaliyyət göstərir) sistemlər əmələ gətirir. Məsələ sürətli komponentlərin bütün sistemə təsirini təsvir etməkdən ibarətdir. Aydın olmuşdur ki (bax, [7]), $\varepsilon \downarrow 0$ olduqda bu təsir sürətli komponentlərin erqodik paylanması üzrə xarakteristikaları ortalanan sistemə gətirir (bunların erqodikliyi fərz olunur). Bu Boqolyubov ortalama prinsipinin stoxastik variantına uyğundur.

3. Təsadüfi proseslərin stoxastik differensial tənliyin həllərinə yığılması. «Stoxastik differensial tənlik» terminini [9]-da S. N. Bernşteyn təklif etmişdir, o, bu termini Fokker – Plank tənliyinin həllində bəzi sonlufərqlərli sxemlərdə yaranan Markov zəncirlərinin paylanmalarının yığılmasını araşdırarkən istifadə etmişdir. Markov zəncirlərinin doğurduğu proseslərin diffuzion proseslərə zəif yığılması haqqında olduqca ümumi teoremlər [11]-də şərh olunmuşdur; daha ümumi stoxastik differensial tənliklərlə ifadə olunan proseslərə yığılma ilə [10]-da tanış olmaq olar.

İxtiyari təbiətli proseslərin stoxastik differensial tənliklərin həllərinə yığılması üçün ümumi teoremlər [10]-da şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Звонкин А. К., Крылов Н. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 25–30 ноября 1974 г.), т. 2, Вильнюс, 1975, с. 9–88; [2] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 4, с. 675–82; [3] Мацкявичюс В., «Литов. матем. сб.», 1985, т. 25, № 4, с. 72–84; [4] Скороход А. В., «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 1, с. 129–37; [5] Алюшина Л. А., Крылов Н. В., «Теория вероятн. и её примен.», 1988, т. 33, в. 1, с. 3–13; [6] Кулинич Г. Л., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1976, в. 15, с. 99–114; [7] Скороход А. В., Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений, К., 1987; [8] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [9] Бернштейн С. Н., «Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова», 1934, т. 5, с. 95–124; [10] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [11] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – Hdlb.– N. Y., 1979.

LİMİT TEOREMLƏRİ təsadüfi çoxluqlar üçün « **предельные теоремы** для случайных множеств; **limit theorems** for random sets» – *təsadüfi çoxluqların* paylanmalarının asimptotikası haqqında teoremlərdir. Təsadüfi çoxluqlar üçün L. t.-nin müxtəlif növləri vardır. Bunlardan birincisi Banax fəzasında təsadüfi kompaktların Minkovski cəmlənməsi ilə bağlıdır (bax, *Minkovski əməlləri*). A_i – təsadüfi kompakt çoxluqlar, M_i – determinə olunmuş kompaktlar, ρ – Hausdorf metrikası olsun;

$$\lim_n \rho\left(\frac{1}{b_n} \oplus_{i=1}^n A_i ,\ \frac{1}{b_n} \oplus_{i=1}^n M_i \right) = 0 ,\ \ b_n > 0$$

münasibəti şəklində sanki yəqin və ya ehtimala görə yığılma haqqında teoremlər böyük ədədlər qanunları adlanır. Bir qədər zəif normalanmalarla asimptotik yaxınlaşmalar haqqında teoremlər mərkəzi limit teoreminin analoqlarıdır. Bu növ faktların isbatları bir qayda olaraq, qabarıq A_n -lər halına gətirilməyə əsaslanır ki, bunlara dayaq (təsadüfi) funksiyalarını qarşı qoymaq olur və bu funksiyalara sferada kəsilməz funksiyaların Banax fəzasının elementləri kimi baxmaq olur.

Xüsusi halda, A_k – asılı olmayan eyni qanunla paylanmış, riyazi gözləmələri olan (bax, *Riyazi gözləmə*(si) təsadüfi çoxluğun) təsadüfi kompaktlar və $b_n = n$ olarsa, gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu haqqında Xinçin teoreminin analoqu doğrudur, bu halda $\mathbf{M}_k$ əvəzinə A_1 -in riyazi gözləməsini götürmək kifayətdir (bax, [1], [3], [5]).

Müxtəlif tədqiqlər üçün $\oplus_{i=1}^n A_i = A$ cəmlərinin funksionallarının paylanmalarının asimptotikası haqqında L. t.-nin nəticələri, adətən, maraqlıdır, məs., A çoxluğunun eni

$$\mathrm{br}(A) = \inf_{\|\alpha\|=1} (\varkappa_A(\alpha) - \varkappa_A(-\alpha))$$

haqqında, A -nın diametri

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{\|\alpha\|=1} (\varkappa_A(\alpha) - \varkappa_A(-\alpha))$$

haqqında, x nöqtəsinə nəzərən asimmetriya dərəcəsi

$$\mathrm{asym}_x(A) = \sup_{\|\alpha\|=1} (\varkappa_A(\alpha) - \varkappa_A(-\alpha) - 2(\alpha, x))$$

haqqında (burada $\varkappa_A$, – A qabarıq örtüyünün dayaq funksiyası, (α, x) – skalyar hasildir).

İkinci tip L. t. *sonlu təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsində təbii surətdə yaranır. Məs., (A_k) qeyd olunmuş sonlu universumun asılı olmayan altçoxluqlarının ardıcıllığı, $M_n(p)$ isə $A_1, ..., A_n$ – lərin empirik ortası, $M(A_1, p)$, – A_1 -in tərtibi p -yə bərabər orta qiymətidir (bax, *Riyazi gözləmə*(si) təsadüfi çoxluğun), onda hər hansı təsadüfi nömrədən başlayaraq $M_n(p) = M(A_1, p)$ bərabərliyi 1 ehtimalla doğrudur (bax, [4]).

Üçüncü tip L. t.-ində təsadüfi proseslərin trayektoriyalarının qrafikləri ardıcıllığına təsadüfi çoxluqlar kimi baxılır və bu təsadüfi çoxluqların paylanmalarının zəif yığılmasının müxtəlif əlamətləri müəyyənləşdirilir. Belə ki, müstəvidə qapalı təsadüfi çoxluqların $\mathscr{P}_n$ paylanmaları ardıcıllığının zəif yığılması üçün $[x, z] \times [t, y]$ düzbucaqlılarının sonlu birləşmələrində uyğun müşayiətedici funksionalların yığılması kifayətdir, burada (x, y), (z, t) nöqtələri müstəvidə sıx çoxluqdan götürülür. Xüsusi halda, proseslərin ilkin ardıcıllığı $X_n(t) = b_n X(n t)$ şəklində olarsa, burada $X(t) = \alpha_{[t]} + \langle t \rangle \mathbf{1}_W([t])\,(\alpha_{[t]+1} - \alpha_{[t]})$, α_i – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $[t]$ t -nin tam hissəsi, $\langle t \rangle = t - [t]$, $\mathbf{1}_W$, – W çoxluğunun indikatorudur, $W \subset \mathbb{Z}_0^+$. Onda təsadüfi çoxluqların mümkün limit paylanmaları sinfi $T(K) = 1 - \exp(-\mu_0(K))$ şəklilli müşayiətedici funksionallarla verilir, belə ki, $\mu_0 = \pi(J)\mu + (1 - \pi(J))\mu^*$, burada $J = Y \cap (Y+1)$, $Y = \mathbb{Z}_0^+ \setminus W$, π – çoxluğun asimptotik sıxlığı, $\mu = \mathrm{mes}_1 \otimes \nu$, mes_1 – birölçülü Lebeq ölçüsü, ν – yarımoxda üstlü monoton funksiyalarla verilən, ədəd oxunda ölçüdür, $\mu^*(K) = \mu(K^*)$,

$$K^* = \bigcup_{(x, y) \in K} (\{x\} \times [\min(0, y),\ \max(0, y)]) .$$

Burada həll olunan məsələlər dairəsinə cırlaşmayan paylanmaya yığılma, qeyd olunmamış nöqtələrsiz (yəni limit realizasiyasına sanki yəqin aid olan x nöqtələri) paylanmaya yığılma şərtlərinin axtarılması, həmçinin ilkin trayektoriyaların müxtəlif funksionallarının paylanmalarının yığılması aiddir.

Əd.: [1] Artstein Z., Vitale R. A., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 5, p. 879–82; [2] Cressie N., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 49, № 1, S. 37–47; [3] «Lect. Notes in Math.», 1983, v. 990; [4] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [5] Ляшенко Н. Н., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1979, т. 85, с. 113–28; [6] Ляшенко Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 81–90.

LİMİT TEOREMLƏRİ təsadüfi matrislər üçün «**предельные теоремы** для случайных матриц; **limit theorems** for random matrices» – çoxsaylı təsadüfi faktorların təsiri nəticəsində yaranan bu və ya digər qanunauyğunluqların şərtlərini göstərən *təsadüfi matrislər* nəzəriyyəsinin bir sıra teoremlərinin ümumi adıdır. Bu teoremləri üç böyük qrupa ayırmaq olar. Birinci qrupa təsadüfi matrislərin elementlərinin bəsit funksiyalarının asimptotik paylanmaları haqqında, bu matrislərin tərtibi sonsuzluğa yaxınlaşdığı hal üçün teoremlər aiddir. İkinci qrupu sayı sonsuzluğa yaxınlaşan təsadüfi matrislərin hasillərinin bəzi funksiyalarının asimptotik paylanması haqqındakı teoremlər təşkil edir. Üçüncü qrupa seriyalar sxemindəki L. t. aid olunur, bu halda təsadüfi matrislərin paylanmaları matrislərin sayından (seriyanın nömrəsindən) asılıdır.

Birinci qrup teoremlər atom nüvələrinin energetik səviyyələrinin bəzi modellərinin araşdırılması ilə bağlı yaranmışdır; bunlar

$$\mu(x) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \chi(\lambda_k < x)$$

təsadüfi matrislərinin normalanmış spektral funksiyaları üçün L. t.-dir, burada λ_k – tərtibi n -ə bərabər $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|$ kvadrat həqiqi matrisinin məxsusi qiymətləri, $\chi(\lambda_k < x)$ isə $(\omega : \lambda_k < x)$ hadisəsinin indikatorudur. İsbat olunmuşdur ki, $\mu_n(x)$ ehtimala görə sıxlığı yarımçevrə şəklində olan müəyyən təsadüfi olmayan funksiyaya yaxınlaşır. Bu hökm *semi – dairəvi qanun* adlanır.

Sonrakı araşdırmalar təsadüfi matrisin diaqonalda yerləşən və diaqonaldan yuxarıdakı elementləri asılı olmayan və sonsuz kiçilən olduqda *simmetrik təsadüfi matrislərin* limit spektral funksiyalarının ümumi ifadəsinin tapılmasına istiqamətlənmişdir. Bu halda olduqca ümumi şərtlərlə limit spektral funksiyaların Stiltyes çevirmələri *kanonik spektral tənliyi* ödəyirlər.

Qeyd olunan L. t.-dən başqa $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|$ *qeyri – simmetrik təsadüfi matrislərinin*

$$\nu_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \chi(\operatorname{Re}\lambda_k < x)\,\chi(\operatorname{Im}\lambda_k < y)$$

normalanmış spektral funksiyalarının limit yaxınlaşmaları haqqında teoremlər isbat olunmuşdur. İsbat olunmuşdur ki, limit spektral funksiyanın sıxlığı sərhədi ellips olan oblastda konstanta bərabərdir (bax, *Elliptik qanun*). Ξ təsadüfi matrislərinin məxsusi qiymətləri üçün L. t. də birinci qrup teoremlərə aiddir. Bu teoremlərin isbatında

$$\lim_{h\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\operatorname{tr}\Xi_n\Xi_n^* \geq h\} = 0$$

şərtindən istifadə olunmuşdur. Əsas nəticə ondan ibarətdir ki, bu şərt ödənildikdə və həmçinin Ξ_n təsadüfi matrisinin elementləri asılı olmayan və sonsuz kiçilən olduqda, Ξ_n matrisinin modullarının artmasına görə nizamlanmış məxsusi qiymətləri müəyyən qaydalı statistikanın hədləri kimi paylanır. Bu da təsadüfi matrisin məxsusi qiymətlərinin limit paylanmasının tapılmasına imkan yaratmışdır (bax, [1]). Təsadüfi matrisin determinantı üçün L. t. də birinci qrupun mühüm teoremləri kimi sayılır. Mərkəzi L. t. tipli teoremlər isbat olunmuşdur (bax, *Təsadüfi determinant*) ki, bu teoremlər kimi aşağıdakı ixtiyari müddəa anlaşılır. Hər hansı sabit a_n və b_n qiymətlərində və Ξ_n təsadüfi matrisinin üzərinə qoylan bəzi şərtlərlə aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{b_n^{-1}[\ln|\det\Xi_n| - a_n] < x\} = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy\,.$$

Birinci qrupa aid növbəti teoremlər sinfi əmsalları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan $\Xi_n x_n = b_n$ xətti cəbri tənliklər sisteminin həlləri üçün bu tənliklərin dərəcəsi sonsuzluğa yaxınlaşdığı halda baxılan L. t.-dir. Burada arktangens qanunu əsas yer tutur (bax, [1]): $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ təsadüfi matrisinin elementləri ξ_{ij} və b_n vektorunun elementləri asılı olmayan, riyazi gözləmələri sıfra, dispersiyaları 1-ə bərabər elə təsadüfi kəmiyyətlərdir ki, onların $4+\delta, \delta > 0$ tərtib momentləri məhduddurlar, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{x_k < r\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} z$$

münasibəti doğrudur, burada x_k – həllin k -cı komponentidir.

İkinci qrup L. t. təsadüfi matrislərin hasillərinin elementlərinin bəzi funksiyalarının limit paylanmalarının öyrənilməsi üçün araşdırmaları əks etdirir, bu araşdırmalar üç istiqamətdə aparılır. Birinci istiqamətdə kompakt qrupda qiymətlər alan asılı olmayan matrislərin limit paylanmaları öyrənilir. Bu halda fərz olunur ki, matrislərin paylanmaları bu qrupda Haar ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər, bəzi əlavə şərtlərlə belə asılı olmayan matrislərin hasilləri üçün limit ölçüsü bu qrupda normalanmış Haar ölçüsünə bərabərdir (bax, [2]). İkinci istiqamət limit paylanmalarının öyrənilməsi və qiymətləri müəyyən lokal kompakt qrupdan olan asılı olmayan A_i təsadüfi matrislərinin hasilləri $\prod_{i=1}^{n} A_i$ -lərin normalanmış funksiyalarının paylanmalarının bu limit paylanmalarına yığılma şərtlərinin öyrənilməsi ilə bağlıdır (bax, [3]). Normalanmış funksiyalar kimi bir qayda olaraq $X_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ matrislər hasili $X_n = U_1\Lambda U_2$ kimi ifadə olunan matris, burada U_1 və U_2 – ortoqonal (unitar) matrislərdir və $\Lambda = \left\| \lambda_i \delta_{ij} \right\|$ – mənfi olmayan elementlərli diaqonal matris götürülür. Onda X_n matrisinin normalanmış funksiyaları kimi

$$\{[\ln\lambda_i(X_n) - a_n]\,b_n^{-1},\ \ i = 1,...,m,\ U_1(X_n), U_2(X_n)\}$$

funksiyaları götürülür, burada a_n və b_n – bəzi normalayıcı funksiyalardır. Üçüncü istiqamət $X_n = F_n(X_{n-1}) + B_{n-1}$ şəkilli rekurrent tənliklərin həllərinin paylanmalarının öyrənilməsi ilə bağlıdır, burada $F_n(x)$ və B_{n-1} – uyğun olaraq, asılı olmayan təsadüfi matris funksiyalar və təsadüfi matrisdir. Xüsusi halda, rekurrent tənliklər sisteminin parametrlərinin qiymətləndirilmə məsələləri belə tənliklərin öyrənilməsinə gətirir.

Üçüncü qrup L. t. seriyalar sxemində təsadüfi matrislərin hasillərinin asimptotik yaxınlaşmasına aid teoremlərdir, bu halda fərz olunur ki, seriyanın nömrəsi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda hər bir təsadüfi matris ehtimala görə hər hansı təsadüfi olmayan matrislə yaxınlaşır (bax, [6]).

Ədl.: [1] Гирко В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980; [2] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [3] Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 19–32; [4] Андер-

с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [5] Д а й с о н Ф., Статистическая теория энергетических уровней сложных систем, пер. с англ., М., 1963; [6] Б у ц а н Г. П., Статистические полу-группы, К., 1977; [7] M e h t a M. L., Random matrices and the statistical theory of energy levels, N. Y. – L.,1967; [8] F u r s t e n b e r g H., K e s t e n H., «Ann. Math. Statist.», 1960, v. 31, p. 457–69.

LİMİT TEOREMLƏRİ t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n « **предельные теоремы** д л я с л у ч а й н ы х п р о ц е с с о в; **limit theorems** f o r s t o c h a s t i c / r a n d o m p r o c e s s e s » – *təsadüfi proseslərin* bu və ya digər mənada limit prosesinə yığılma şərtlərini müəyyənləşdirən teoremlərdir.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası və $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbb{T})$, – $\mathbb{T}$ parametrik çoxluğunda həqiqiqiymətli $x(t)$ funksiyaları fəzası, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ – ixtiyari $t \in \mathbb{T}$ və $u \in \mathbb{R}$ üçün $\{x(t) < u\}$ silindrik çoxluqlarını özündə saxlayan, $\mathbb{T}$ fəzasının çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasının $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ fəzasına ölçülən inikası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-də [və ya $(\mathcal{X}(\mathbb{T}), \mathcal{B}_{\mathcal{X}(\mathbb{T})}, \mathbf{P})$-də] verilmiş $t \in \mathbb{T}$ parametrindən asılı $X(t, \omega)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ailəsi kimi interpretasiya olunan t ə s a d ü f i p r o s e s d i r. $\mathbb{T}$ kimi, adətən, birölçülü və ya çoxölçülü interval (bu hallarda p r o s e s və ya k ə s i l m ə z z a m a n l ı m e y d a n) və ya sonsuz ardıcıllıq (d i s k r e t z a m a n l ı p r o s e s) götürülür. Ehtimal fəzası kimi $(\mathcal{X}(\mathbb{T}), \mathcal{B}_{\mathcal{X}(\mathbb{T})}, \mathbf{P})$ seçimi fəzasının özünü götürmək məqsədəuyğun sayılır, burada $\mathbf{P}$, – Ω əzasının $\mathcal{X}(\mathbb{T})$ fəzasına inikası ilə doğurulmuş ölçüdür.

Təsadüfi proseslərdə, $[0, T]$, $T > 0$ şəkilli $\mathbb{T}$ çoxluqları üçün, adətən, aşağıdakı fəzalara baxılır.

1. $\mathcal{X}(\mathbb{T}) = (\mathbb{R})^{[0, T]} = \prod_{t \in \mathbb{T}} (\mathbb{R})^t$ fəzası $X(t, \omega)$ təsadüfi prosesinin qiymətlər çoxluğudur; burada $(\mathbb{R}^t)$, – $(-\infty, \infty)$ həqiqi oxunun nümunəsidir. $(\mathbb{R})^{[0, T]}$, – $\mathbb{T}$-də bütün həqiqi funksiyalar fəzasıdır. Bu fəzaya silindrik çoxluqların doğurduğu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}[0,T]}$ σ – cəbri ilə birlikdə baxmaq məsləhətdir.

2. $\mathcal{X}(\mathbb{T}) = C(0, T)$ – $[0, T]$-də bütün kəsilməz funksiyalar fəzasıdır; bu fəzaya silindrik σ – cəbr ilə üst-üstə düşən Borel çoxluqlarının σ – cəbri [$\rho_C(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$ müntəzəm metrikasına nəzərən] $\mathcal{B}_{C[0, T]}$ ilə birlikdə baxılır.

3. $\mathcal{X}(\mathbb{T}) = D(0, T)$ – hər bir nöqtədə ya sağdan və ya soldan kəsilməz, $x(0) = x(+0)$, $x(T) = x(T-0)$ və 2-ci növ kəsilmə nöqtələri olmayan, $[0, T]$-də bütün $x(t)$ funksiyalarının fəzası; $\mathcal{B}_{D(0,T)}$ σ – cəbri kimi, silindrik σ – cəbr ilə üst-üstə düşən, Skoroxod – Proxorov metrikası ρ_D-yə nəzərən Borel σ – cəbri götürülür.

$X_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ təsadüfi prosesləri üçün iki tip L. t.-nə baxmaq olar. Birinci tipdə (bu daha çox yayılmışdır) X_n-in eyni bir ehtimal fəzasında verilmədiyi fərz olunur və bu halda X_n proseslərinin paylanmalarının yığılmasına baxılır. İkinci tipdə X_n prosesləri eyni bir fəzada verildiyi halda X_n-lərin trayektoriyalarının yığılmasına baxılır.

$X_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ təsadüfi prosesləri ardıcıllığı – $\mathcal{X}$-də, ümumiyyətlə isə, eyni ehtimal fəzasında verilməyən təsadüfi proses olsun. Əgər $t_1, \ldots, t_k$-ların ixtiyari ($t_i \in S$) toplusu üçün $n \to \infty$ olduqda $(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_k))$ toplularının birgə paylanması $(X(t_1), \ldots, X(t_k))$ toplusunun paylanmasına zəif yığılarsa, X_n prosesinin sonluölçülü paylanmaları $S \subset T$ çoxluğunda X prosesinin sonluölçülü paylanmalarına $\mathcal{X}$-də (zəif) yığılır, deyilir. Bu, proseslərin yığılmasının ən geniş anlayışıdır. Lakin bu tətbiq cəhətdən kafi deyildir, çünki, ümumiyyətlə, X_n-in funksionallarının geniş sinfi üçün paylanmaların yığılmasını təmin etmir [məs., $\int_a^b \varphi(X_n(t))dt$, $\sup_{t \in [a, b]} X_n(t)$ kimi] . Təsadüfi proseslər üçün yığılma teoremləri həmişə bu və ya başqa cür paylanmaları öyrənilən proses funksionallarının sinfi ilə bağlıdır.

Təsadüfi proseslər üçün yığılma teoremlərini növlərə ayırmaq olar: ü m u m i t e o r e m l ə r (bunlar $\mathcal{X}$ fəzasının təbiəti ilə bağlı olmayan teoremlərdir, $\mathcal{X}$-i, məs., ixtiyari topoloji fəza hesab etmək olar) və k o n k r e t f ə z a l a r d a [məs., $C[0,T), D(0,T)$] verilmiş proseslər üçün y ı ğ ı l m a t e o r e m l ə r i, ya da x ü s u s i f u n k s i o n a l l a r s i n f i n d ə y ı ğ ı l m a t e o r e m l ə r i.

Ümumi teoremlər. Təsadüfi proseslər üçün ümumi L. t.-nin alınmasına bir neçə yanaşma vardır.

1. Ölçülərin zəif yığılma aparatının metrik (və ya topoloji) fəzalarda istifadə olunması. Bu yanaşma Yu. Proxorov tərəfindən [1]-də işlənilmişdir. Fərz olunur ki, $\mathcal{X}$ metrikası $\rho_{\mathcal{X}}(x, y)$ olan metrik fəza, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ onun Borel çoxluqlarının σ – cəbridir və silindrik çoxluqları özündə saxlayır.

Bütün mümkün olan $f \in C(\mathcal{X})$ kəsilməz funksionallarının – $f(X_n)$-lərin paylanmalarının yığılmaları, yəni $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{f(X_n) < u\} \Rightarrow \mathbf{P}\{f(X) < u\} \qquad (1)$$

yığılmaları öyrənilir. Bu yığılma $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ fəzasında σ – additiv ölçülərin zəif yığılmasına ekvivalentdir. Əgər $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}$, – $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ fəzasında X_n və X $(\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(X_n(\cdot) \in A))$ proseslərinə uyğun paylanmalardırsa, onda $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılması

$$\int f \, d\mathbf{P}_n \to \int f \, d\mathbf{P}$$

münasibətinin ixtiyari məhdud $f \in C(\mathcal{X})$ funksionalı üçün ödənilməsi kimi anlaşılmalıdır; bu isə (1) yığılmasına ekvivalentdir.

$\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılmasını $\mathbf{P}_n(A)$-nın $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ çoxluqlarının xüsusi siniflərində yaxınlaşma xüsusiyyətləri ilə xarakterizə etmək olar. Doğrudan da, $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ yaxınlaşması, yalnız və yalnız, o halda yerinə yetir ki, aşağıdakı ekvivalent şərtlərdən biri:

1) $\mathbf{P}_n(A) \to \mathbf{P}(A)$ münasibəti bütün $\mathbf{P}$ – kəsilməz çoxluqların sinfi $D_{\mathbf{P}} = \{A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}; \mathbf{P}(\partial A) = 0\}$ üçün; burada ∂A, – A çoxluğunun sərhədidir;

2) $\lim_{n \to \infty} \sup \mathbf{P}_n(F) \leq \mathbf{P}(F)$ münasibəti bütün qapalı $F \subset \mathcal{X}$ çoxluqlarında;

3) $\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(G) \geq \mathbf{P}(G)$ münasibəti bütün açıq $G \subset \mathscr{X}$ çoxluqlarında ödənilsin (A l e k s a n d r o v t e o r e m i).

1) şərtindən bütün $f \in C_{\mathbf{P}}(X) \supset C(\mathscr{X})$ funksionalları üçün $f(X_n)$ -lərin paylanmalarının yığılması alınır, burada $C_{\mathbf{P}}(X)$, – $\mathbf{P}$ – kəsilməz funksionalların, yəni $A \subset \mathscr{X}$ çoxluğunda kəsilməz funksionalların sinfidir, $\mathbf{P}(A) = 1$.

1) – 3)-də qeyd olunmuş çoxluqlar sinifləri yoxlanılma üçün demək olar ki, olduqca genişdir və yoxlama üçün əlverişli deyildir. Əgər ixtiyari deyil, yalnız sekvensial kompakt $\{\mathbf{P}_n\}$ ailələrinə baxılarsa, vəziyyət olduqca dəyişir. Bu məsələnin qoyuluşunun daralması deyildir, belə ki, $\{\mathbf{P}_n\}$ ailələrinin kompaktlığı $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılması üçün zəruridir. $\{\mathbf{P}_n\}$ ardıcıllıqlarının kompaktlığı üçün $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılması A çoxluqlarının daha dar siniflərində $\mathbf{P}_n(A) \to \mathbf{P}(A)$ yaxınlaşması ilə təmin olunur.

Əgər ixtiyari $\mathbf{Q}$ ölçüsü üçün $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A)$ bərabərlikləri bütün $A \in \mathfrak{A}\, D_{\mathbf{P}}$ çoxluqları üçün $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ bərabərliklərini doğurursa, $\mathfrak{A}$ s i n f i $\mathbf{P}$ ö l ç ü s ü n ü t ə y i n e d i r, deyilir.

Əgər $\mathfrak{A}$ cəbr olarsa və $\sigma(\mathfrak{A}\, D_{\mathbf{P}}) = \mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ şərti [$\sigma(\mathfrak{A}) = \mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ şərti kifayət deyil] ödənilərsə, $\mathfrak{A}$ s i n f i $\mathbf{P}$ ö l ç ü s ü n ü təyin edir.

Analoji olaraq, f funksionallarının Φ sinfi daxil olunur, bu funksionallar X prosesinin paylanması $\mathbf{P}$ -ni təyin edir: ixtiyari $\mathbf{Q}$ üçün $f(X)$ paylanmalarının $f \in \Phi \bigcap C_{\mathbf{P}}(\mathscr{X})$ üçün üst-üstə düşməsi $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ bərabərliyini doğurur.

$\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılması üçün zəruri və kafidir ki:

1) $\mathbf{P}_n$ ardıcıllığı sekvensial kompakt olsun;

2) $\mathbf{P}$ ölçüsünü təyin edən elə $\mathfrak{A} \subset \mathscr{B}$ hadisələr sinfi olsun ki, hər bir $A \in \mathfrak{A}\, D_{\mathbf{P}}$ üçün $\mathbf{P}_n(A) \to \mathbf{P}(A)$ ödənilsin (bax, [1], [2]).

2) şərtinə alternativ $\mathbf{P}$ ölçüsünü təyin edən funksionallar sinfi elə Φ -in varlığı şərti ola bilər ki, bütün $f \in \Phi \bigcap C_{\mathbf{P}}(\mathscr{X})$ üçün $\mathbf{P}\{f(X_n) < u\} \to \mathbf{P}\{f(X) < u\}$ münasibəti ödənilsin.

Əgər trayektoriyalar fəzası $\mathscr{X}$ kimi topoloji vektor fəzasına baxılarsa, onda ölçü təyin edən funksionallar sistemi kimi $\mathscr{X}$ -də xətti kəsilməz funksionallardan ibarət və $\mathscr{X}$ ilə qoşma $\mathscr{X}^*$ fəzasını istifadə etmək olar.

$$\chi(x^*, \mathbf{P}) = \int e^{ix^*(x)}\, d\,\mathbf{P}(x)$$

qiymətinə $\mathbf{P}$ ölçüsünün x a r a k t e r i s t i k f u n k s i o n a l ı [yəni $\chi(x^*, \mathbf{P})$ -yə] deyilir, $x^*(x) \in \mathscr{X}^*$. Əgər $\mathscr{X}$ lokal qabarıq fəza olarsa, onda xarakteristik funksionallar ixtiyari $\mathbf{P}$ ölçüsünü birqiymətli təyin edir (bax, [3]).

$\{\mathbf{P}_n\}$ ardıcıllıqlarının kompaktlıq şərtlərini müəyyənləşdirdikdə $\{\mathbf{P}_n\}$ ailəsinin sıxlıq anlayışı mühüm rol oynayır. İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $K = K_\varepsilon \subset \mathscr{X}$ kompaktı varsa ki, $\mathbf{P}_n(K) > 1 - \varepsilon$ şərti bütün n -lər üçün ödənilsin, onda $\{\mathbf{P}_n\}$ paylanmalar ailəsi $\mathscr{X}$ -də s ı x a i l ə adlanır. Aşağıdakı P r o x o r o v t e o r e m i doğrudur: $\{\mathbf{P}_n\}$ ailəsi kompaktdırsa, o, sekvensial kompaktdır. Əgər $\mathscr{X}$ tam separabel fəza olarsa, onda tərs müddəa da doğrudur (bax, [2]).

Bir çox funksionallar fəzaları üçün [məs., $C(0,T)$, $D(0,T)$ fəzaları üçün] kompaktlar aşkar təsvir olunduqlarından bu fəzalarda $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılma şərtlərini tədqiq etmək imkanı yaranır (bax, aşağı). Elə Hilbert fəzaları sinfini seçib ayırmaq olar ki, bu sinifdə $\{\mathbf{P}_n\}$ ailəsinin sıxlığı $\chi_n(x^*) = \chi_n(x^*; \mathbf{P}_n)$ xarakteristik funksionallar ailəsinin hər hansı topologiyada $x^* = 0$ nöqtəsində eynidərəcəli kəsilməzliyi nəticəsidir (bax, [3]).

Alınan nəticələr ixtiyari topoloji fəzalara da köçürülə bilinər. Lakin bu zaman texniki olduğu kimi prinsipial əlavə çətinliklər də yaranır ki, nəticədə baxılan fəzaların siniflərini daraltmaq məcburiyyəti yaranır. Bu çətinliklərdən yan keçmək üçün digər yanaşmalardan istifadə olunur (bax, **II** – **IV** bölmələr).

II. Təsadüfi proseslər üçün limit teoremlərinə digər – çox geniş tətbiqi olan yanaşma A. V. Skoroxodun adı ilə bağlıdır; bu b i r e h t i m a l f ə z a s ı m e t o d u adlanır. Bu metod 0 və T nöqtələrini daxilinə alan, hər yerdə sıx hər hansı $S \subset [0,T]$ çoxluğunda elementləri öz qiymətlərilə birqiymətli təyin olunan $\mathscr{X} = \mathscr{X}(0,T)$ funksional fəzasının hər hansı topologiyasında kəsilməz funksionalların tədqiqinə aiddir. Bu metodun mahiyyəti aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\{X_n(t),\ t \in [0,T]\}$, – $\mathscr{X}$ -də verilmiş proseslər ardıcıllığı olsun. Əgər S çoxluğunda $X_n(t)$ proseslərinin sonluölçülü paylanmalarının $X(t)$ -nin paylanmalarına yığılması varsa, onda eyni bir ehtimal fəzasında elə $\overline{X}_n(t)$ və $\overline{X}(t)$ prosesləri qurmaq olar ki:

1) $X_n(t)$ və $\overline{X}_n(t)$ -nin; $X(t)$ və $\overline{X}(t)$ -nin paylanmaları üst-üstə düşür,

2) $\mathbf{P}\{\overline{X}_n(t) \to \overline{X}(t)$ bütün $t \in S$ üçün $\} = 1$ münasibəti ödənilir.

Əgər X_n ardıcıllığı üzərinə $\mathscr{X}$ -də baxılan $\mathfrak{g}$ topologiyasından asılı olaraq əlavə şərtlər qoyularsa (bax, aşağıdakı hökmün **2)** şərti), onda 2) xassəsilə yanaşı $n \to \infty$ olduqda $\mathfrak{g}$ topologiyasında $\overline{X}_n \to \overline{X}$ yığılması sanki yəqin ödəniləcək. Lakin bu onu göstərir ki, $\mathfrak{g}$ – kəsilməz f funksionalı üçün $f(\overline{X}_n) \to f(\overline{X})$ münasibəti sanki yəqin ödəniləcək, bu da $f(X_n)$ paylanmalarının $f(X)$ paylanmasına yığılmasını doğurur.

Bu metodla alınmış əsas nəticələr beş müxtəlif topologiya $(U, J_1, J_2, M_1, M_2$ topologiyaları; bax, [4]) baxılmış D fəzasına aiddir.

U və J_1 topologiyaları uyğun olaraq, C və D fəzalarında ρ_C və ρ_D metrikalarının doğurduğu topologiyalara ekvivalentdirlər. D fəzasında J_2 və M_2 topologiyaları uyğun olaraq, ρ_E və ρ_F metrikalarının doğurduğu topologiyalara ekvivalentdirlər (bax, [5]).

Bu beş topologiyadan hər birinə onun elə kəsilməzlik modulu $w_\Delta^{\mathfrak{g}}(x)$ uyğundur ki,

1) $x_n(t) \to x(t)$, $n \to \infty$ və $t \in S$,

2) $\lim_{\Delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}}\ w_\Delta^{\mathfrak{g}}(x_n) = 0$

şərtləri $n \to \infty$ olduqda $\mathfrak{g}$ – yığılma üçün zəruri və kafidir.

$X_n(t)$ və $X(t)$ proseslərinin D fəzasında verildiyi fərz olunur. İxtiyari $\mathfrak{g}$ – kəsilməz f funksionalı üçün $f(X_n)$ paylanması $f(X)$ paylanmasına, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki:

1) X_n prosesinin sonluölçülü paylanmaları X-in paylanmalarına hər hansı hər yerdə sıx S çoxluğunda yığılsınlar,

2) $\lim\limits_{\Delta\to 0}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{w_\Delta^{\mathfrak{g}}(X_n)>\varepsilon\}=0$ ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün ödənilsin (bax, [3]).

III. Bu bölmədə şərh olunan yanaşma daha elementardır və onu approksimativ yanaşma adlandırmaq olar. Bu yanaşmanın məğzi belədir (bax, [5]). Ölçülən f funksionalı üçün $f(X_n)$ paylanmalarının yığılması öyrənilir və $\mathscr{X}(\mathbb{T})$ fəzasında f-lə yanaşı f_N ölçülən funksionalları verilmişdir, bu funksionalların çoxluğu $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ isə Φ ilə işarə edilir. Bundan başqa, $\mathscr{K}=\{K_M\}_{M=1}^{\infty}$, – $K_M\in\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ çoxluqlarının çoxluğudur.

Əgər $N\to\infty$, $M\to\infty$ olduqda $\psi(M,N)=\sup\limits_{x\in K_M}\left|f(x)-f_N(x)\right|\to 0$ olarsa, f funksionalı $(\mathscr{K},\Phi)$ – approksimallanan adlanır.

Əgər M və ya N dəyişənlərindən yalnız biri məhdud olmadan artarsa, burada ψ funksiyasının 0-a yığılması hökmən deyildir.

Əgər $\bigcap K_M=K_\infty$ kəsişməsi boş çoxluq olmazsa, f funksionalı K_∞-da f_N funksionalına müntəzəm yaxınlaşır, yəni

$$\sup_{k\in K_\infty}\left|f(x)-f_N(x)\right|\le\psi(N,N).$$

Əgər $\mathscr{X}=C(0,T)$, $f\in C(\mathscr{X})$ və deməli, $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon(\rho_C(x,y))$, $\upsilon\to 0$ olduqda $\varepsilon(\upsilon)\to 0$ olarsa, onda $f_N(x)=f(x_N)$ götürdükdə, f funksionalı $(\mathscr{K},\Phi)$ – approksimallanan olur, burada x_N, –

$$(kT/N,\ x(kT/N)),\ k=0,1,...,N$$

nöqtələrində düyünləri yerləşən kəsilməz sınıq xətdir, K_M çoxluğu əvəzinə

$$K_M=\{x:\ w_\Delta^C(x)<\delta(\Delta),\ \Delta\ge 1/M\}$$

çoxluğu götürülür, burada $\Delta\to 0$ olduqda $\delta(\Delta)\to 0$, $w_\Delta^C(x)$, – C-də kəsilməzlik moduludur. Onda $N\le M$ olduqda

$$\psi(M,N)\le\sup_{K_M}\varepsilon(\rho_C(x,x_N))\le\varepsilon(\delta(T/N)).$$

K_M-in monotonluğu ilə birlikdə bu onu ifadə edir ki, $M\to\infty$, $N\to\infty$ olduqda $\psi(M,N)\to 0$ olur və $\mathscr{K}$ və Φ-in qeyd olunan mənalarında $C(\mathscr{X})$-dən olan ixtiyari funksional $(\mathscr{K},\Phi)$ – approksimallanandır. Burada $K_\infty=\bigcap K_M$, – $C(0,T)$-də kompaktdır.

Φ çoxluğunun elementləri digər funksionallar da ola bilər, məs., Furye sırasının parçaları.

$$\mathbf{P}\{f(X_n)<u\}\Rightarrow\mathbf{P}\{f(X)<u\}\qquad(2)$$

yığılmasının ödənilməsi üçün ixtiyari $\gamma>0$ üçün elə $\Phi^\gamma=\{f_N^\gamma\}_{N=1}^{\infty}$ və $\mathscr{K}^\gamma=\{K_M^\gamma\}_{M=1}^{\infty}$ ailələrinin varlığı zəruri və kafidir ki:

1) f funksionalı $(\mathscr{K}^\gamma,\Phi^\gamma)$ – approksimallanan olsun;

2) $f_N^\gamma(X_n)$ funksionalının paylanması hər bir N və γ üçün $f_N(X)$ funksionalının paylanmasına zəif yığılsın;

3) ixtiyari M üçün

$$\lim_{n\to\infty}\sup\ \mathbf{P}\{X_n\in K_M^\gamma\}>1-\gamma,\ \ \mathbf{P}\{X\in K_M^\gamma\}>1-\gamma$$

münasibəti ödənilsin (bax, [5]).

IV. Təsadüfi proseslər üçün L. t.-nin alınması üçün aşağıdakı ümumi yanaşma da vardır. Verilmiş f funksionalı və ya belə funksionalların sinfi $\mathscr{F}$ üçün (2) yığılması haqqında məsələ araşdırılır. Əgər (2) bütün $f\in\mathscr{F}$ üçün ödənilərsə, onda $\mathbf{P}_n$ paylanmalarının $\mathbf{P}$ paylanmasına $\mathscr{F}$ – yığılması anlaşılır və bu yığılma $\mathbf{P}_n\xrightarrow[\mathscr{F}]{}\mathbf{P}$ kimi işarə olunur. Əgər $\mathscr{X}(\mathbb{T})$ fəzasında topologiya təyin olunmuşdursa və $\mathscr{F}=C(\mathscr{X}(\mathbb{T}))$ olarsa, onda $\mathscr{F}$ – yığılma $\mathbf{P}_n\Rightarrow\mathbf{P}$ zəif yığılmasına çevrilir. Bu bölmədə şərh olunan yanaşma (bax, [6], [7]) **I** bölmədəki yanaşmanın ümumiləşməsidir. Mühüm fərq ondan ibarətdir ki, bütün konstruksiya üçün ilkin şərt burada funksionalların verilmiş $\mathscr{F}$ sinfidir. Bu sinif üzrə ən zəif σ – topologiyası qurulur (bax, aşağı; məs., $\mathscr{F}$ yalnız bir funksionaldan ibarət olarsa, bu topologiya çox zəif ola bilir), bu topologiyaya nəzərən $f\in\mathscr{F}$ kəsilməz funksionallardır və alınmış σ – topoloji fəzada əksər hallarda $\mathscr{F}$ – yığılmaya ekvivalent olan ölçülərin zəif yığılması öyrənilir.

Belə yanaşmada məsələnin daha ümumi qoyuluşuna digər nöqteyi – nəzərdən baxmaq; paylanmalar ardıcıllığının yığılmasını deyil, Θ qismən nizamlanmış çoxluq [uyğun qayda münasibəti $\ge$ kimi işarə olunur] olduqda $\{\mathbf{P}_\theta\}$, $\theta\in\Theta$ şəbəkələr ardıcıllıqlarının yığılmasını öyrənmək təbiidir.

Müəyyənlik üçün və ardıcıllıqlarla böyük analogiya üçün yuxarı istiqamətlənmiş Θ çoxluqlarına baxılır: Θ-nın ixtiyari θ_1 və θ_2 elementləri üçün də elə $\theta\in\Theta$ elementi var ki, $\theta\ge\theta_1$, $\theta\ge\theta_2$.

$\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ ölçülər şəbəkəsinə $\{X_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ təsadüfi proseslər şəbəkəsi uyğundur.

$$\mathbf{P}_\theta\{f(x)<u\}\Rightarrow\mathbf{P}\{f(x)<u\},\quad f\in\mathscr{F}$$

yığılması onu ifadə edir ki, ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün və $\mathbf{P}\{f(x)<u\}$-nun ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsi u üçün elə $\theta_\varepsilon\in\Theta$ var ki, bütün $\theta\ge\theta_\varepsilon$ üçün

$$\left|\mathbf{P}_\theta\{f(x)<u\}-\mathbf{P}\{f(x)<u\}\right|<\varepsilon.$$

$\mathbf{P}_\theta$ şəbəkəsinə misal $\theta=(\alpha,\beta)$ parametrlərindən asılı, $\alpha_2\ge\alpha_1$, $\beta_2\ge\beta_1$ bərabərsizlikləri ilə təyin olunan, $\theta_2\ge\theta_1$ qayda münasibətli ($\alpha>0$, $\beta>0$) kvadrantında qiymətlər alan ölçülər ailəsi ola bilər ($\theta_i=(\alpha_i,\beta_i)$). Burada $\alpha\to\infty$ olduqda

$\beta = C\alpha$ istiqamətlərində ölçülərin yığılması, ümumiyyətlə, şəbəkənin yığılmasını təmin etmir.

$\mathfrak{u}$, – $\mathscr{X}$ fəzasının çoxluqlarının elə sistemi olsun ki, $(\mathscr{X}, \mathfrak{u})_\sigma$ σ – *topoloji fəzadır*.

Əgər düzxətt üzərində ixtiyari açıq çoxluğun proobrazı açıq olarsa (yəni $\mathfrak{u}$ -ya aid olarsa), f funksionalı $(\mathscr{X}, \mathfrak{u})_\sigma$ -da kəsilməzdir.

Əgər $\mathfrak{G}$ Hausdorf funksionallarının $\mathscr{X}$ -də tam sinfidirsə, onda $\{g(x) > 0\}$, $g \in \mathfrak{G}$ tipli çoxluqlar sinfi $\mathfrak{g}$ σ – topoloji $(\mathscr{X}, \mathfrak{g})_\sigma$ fəzasını yaradır. $(\mathscr{X}, \mathfrak{g})_\sigma$ fəzasında bütün kəsilməz funksiyalar çoxluğu $\mathfrak{G}$ ilə üst-üstə düşür (bax, *Hausdorf teoremi*).

İlkin $\mathscr{F}$ sinfini tam sinfə qədər həmişə tamamlamaq mümkündür (əgər o, tam sinif deyilsə), bu sinif $\mathscr{F}$ -i özündə saxlayan minimal tam sinifdir, o, $\mathscr{F}_c$ ilə işarə olunur. Əgər $\{f(x) > 0\}$, $f \in \mathscr{F}_c$ tipli çoxluqlar toplusu $\mathfrak{f}$ ilə işarə olunarsa, onda $(\mathscr{X}, \mathfrak{f})_\sigma$ cütü σ – topoloji fəzadır. Bununla da, $\mathscr{X}$ -də ən zəif σ – topologiyası daxil olunur ki, bu topologiya da $\mathscr{F}$ kəsilməz funksionallar sinfindən olur.

$\mathscr{B}_\mathfrak{f} = \sigma(\mathfrak{f})$, – $\mathfrak{f}$ sinfinin doğurduğu σ – cəbr olsun. $f = \mathscr{F}_c$ funksionalları $\mathscr{B}_\mathscr{X}$ -ə nəzərən ölçülən olduğundan $\mathscr{B}_\mathfrak{f} \subset \mathscr{B}_\mathscr{X}$ münasibəti doğrudur.

Ölçülər şəbəkəsinin σ – topoloji fəzada zəif yığılmasının tərifi adi tərifdən mahiyyətcə fərqlənmir: Əgər $\int f\, d\mathbf{P}_\theta \to \int f\, d\mathbf{P}$ münasibəti ixtiyari kəsilməz məhdud f funksionalı üçün ödənilərsə, onda $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılması $(\mathscr{X}; \mathfrak{f})_\sigma$ fəzasında ödənilir (və ya ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün və $\mathbf{P}\{f(x) < u\}$ -nun ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsində elə $\theta_\varepsilon \in \Theta$ vardır ki, bütün $\theta \geq \theta_\varepsilon$ üçün $\left|\mathbf{P}_\theta\{f(x) < u\} - \mathbf{P}\{f(x) < u\}\right| < \varepsilon$ münasibəti doğrudur).

Əgər $\mathscr{F}$ sinfi:

1) $f \in \mathscr{F}$ münasibəti – $f \in \mathscr{F}$, $f + c \in \mathscr{F}$, $c = \text{const}$ münasibətlərini doğurur,

2) $f_1 \in \mathscr{F}$, $f_2 \in \mathscr{F}$ münasibətləri $\max(f_1, f_2) \in \mathscr{F}$ münasibətini doğurur şərtlərini ödəyərsə, $\mathscr{F}$ müştərək sinif (rus. совместный класс) adlanır.

$f_1 \in \mathscr{F}$, $f_2 \in \mathscr{F}$ münasibəti ixtiyari α, β üçün $\alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathscr{F}$ münasibətini doğurursa, $\mathscr{F}$ xətti sinif adlanır.

Əgər $\mathscr{F}$ sinfi müştərək və ya xətti sinif olarsa, onda $\mathscr{F}$ – yığılma $\mathscr{F}_c$ – yığılmaya ekvivalentdir (bax, [7]).

Təsadüfi proseslər üçün L. t.-nə belə yanaşma σ – topoloji $(\mathscr{X}; \mathfrak{f})_\sigma$ fəzasında $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ yığılmasının şərtlərinin, yaxud $\mathbf{P}_\theta \underset{\mathscr{F}_c}{\Rightarrow} \mathbf{P}$ $\mathscr{F}_c$ – yığılmasının şərtlərinin öyrənilməsinə əsaslanmışdır.

L, – $\mathbf{P}_\theta$ şəbəkəsinin limit nöqtələrinin sinfi olsun. $(\mathscr{X}; \mathfrak{f})_\sigma$ fəzasında $\mathbf{P}_\theta \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılmasının ödənilməsi üçün aşağıdakı iki şərt zəruri və kafidir.

1) Elə $\mathfrak{A}$ çoxluqlar sinfi vardır ki, ixtiyari $\mathbf{Q} \in L$ ölçüsü üçün $\mathfrak{A}\, D_\mathbf{Q}$ sinfi $\mathbf{P}$ ölçüsü təyin edir və ixtiyari $A \in \mathfrak{A}\, D_\mathbf{P}$ üçün

$$\lim_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta(A) = \mathbf{P}(A) \tag{3}$$

münasibəti ödənilir.

2) $\mathscr{X}(\bigcup G_i = \mathscr{X})$ çoxluğunun ixtiyari açıq hesabi $\{G_i\}$ örtüyü və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə sonlu $G_1, ..., G_n$ toplusu seçmək olar ki,

$$\limsup_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta\{\mathscr{X} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} G_i\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənsin.

Ölçü təyin edən funksionallar sinfi terminlərində analoji şərtlər qoymaq olar, bundan başqa, (3) şərti ödənilən $\mathbf{P}$ ölçüsünün varlığı əvvəlcədən məlum olmadığı halda da bu mümkündür.

Əgər $\{\mathbf{P}_\theta\}$ şəbəkəsi sıx olarsa, 2) şərti həmişə ödənilir, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə K kompaktı vardır ki, bu kompaktın ixtiyari ətrafı $G(K)$ üçün

$$\limsup_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta\{\mathscr{X} \setminus G(K)\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənilir; əgər K -nın ixtiyari hesabi örtüyü $\{G_i\}$ və ixtiyari $B \subset K$, $B \in \mathscr{B}$ üçün

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{P}\left\{B \cap \left[\mathscr{X} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} G_i\right]\right\} = 0 \tag{4}$$

münasibəti ödənilərsə, K – kompaktdır.

(4) ödənildikdə (3)-dəki $\mathbf{P}$ ölçüsü sıx ölçü olur.

Paylanmaların $\mathscr{F}$ – yığılmasının öyrənilməsində məsələnin σ – topoloji fəzalarda yığılmaya gətirilməsi adi topoloji fəzalarda yığılmadan istifadədən daha təbiidir, bu aşağıdakı səbəblərlə izah olunur.

1) Əgər $(\mathscr{X}, \mathfrak{g})$ normal fəza, limit ölçüsü requlyar olarsa, adi topoloji $(\mathscr{X}, \mathfrak{g})$ fəzalarında ölçülərin zəif yığılması təbii xassələrə malik olur (məs., $\mathbf{P}$ – kəsilməz çoxluqlarda və funksionallarda və s. yığılma xassələri kimi). $(\mathscr{X}, \mathfrak{f})_\sigma$ fəzası bu xassələrə həmişə malikdir.

2) Adi $(\mathscr{X}, \mathfrak{g})$ topoloji fəzasında ölçülərin zəif yığılması $(\mathscr{X}; \mathscr{B}_{(\mathfrak{g})})$ fəzasında baş verdiyi halda (burada $\mathscr{B}_{(\mathfrak{g})} = \sigma(\mathfrak{g})$ – Borel σ – cəbridir),

$$\mathbf{P}_\theta\{f(x) < u\} \Rightarrow \mathbf{P}\{f(x) < u\},\ f \in C(X)$$

yığılmasını $\{f(x) > 0\}$, $f \in C(X)$ çoxluqlarının doğurduğu $\mathscr{B}^*$ σ – cəbrinin ($\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}_{(\mathfrak{g})}$) kənarına çıxmadan da öyrənmək olur (burada $\mathscr{B}^*$ Ber σ – cəbri olub, tamamilə normal, yəni $(\mathscr{X}, \mathfrak{f})_\sigma$ fəzası kimi fəzalarda Borel σ – cəbri ilə üst-üstə düşür). Ümumi halda $\mathscr{B}_{(\mathfrak{g})}$ və $\mathscr{B}^*$ fəzalarının üst-üstə düşməməsi bir sıra hallarda ölçünün $\mathscr{B}^*$-dan $\mathscr{B}_{(\mathfrak{g})}$-yə davamı kimi çətin məsələyə gətirir.

3) σ – topoloji fəzalarda yığılma üçün alınan nəticələr adi topoloji fəzalarda fəzanın tipinə məhdudiyyət qoyulmadan yığılma teoremlərinin alınmasına imkan yaradır.

4) Baxılan yanaşmada müştərək və xətti siniflər üçün $\mathscr{F}$ – yığılmanın zəruri və kafi şərtləri alınır, lakin adi topoloji fəzalarda yığılma şərtləri baxılan obyektlər üzərinə qoyulan əlavə şərtlərlə də «ağırlaşdırıldıqda» bu mümkün olmur ([10] ilə müq. et).

Yuxarıda şərh olunmuş dörd yanaşmadan hər biri konkret funksional fəzalarda zəif yığılma haqqında (L^2 tip fəzalar üçün ikinci yanaşma istisnadır) və funksionalların konkret siniflərində paylanmaların yığılması haqqında teoremlərin alınmasına imkan verir. Təsadüfi proseslər üçün L. t.-nin daha ümumi forması IV yanaşmadan istifadə etdikdə alınır.

Funksionalların xüsusi siniflərinin yığılması üçün teoremlər. Burada sadəlik üçün proseslər ardıcıllıqlarına (şəbəkəsinə deyil) baxılır.

1. $C(0,1)$-də prosesə yığılma. X_n və X proseslərinin $[0,1]$ parçasında bütün həqiqi funksiyaların $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{[0,1]}})$ fəzasında verildikləri, separabel olduqları,

$$w_\Delta^C(x) = \sup_{|t-t'|<\Delta} |x(t) - x(t')|$$

olduğu fərz olunur.

f funksionallarının elə $\mathscr{F}_C$ sinfinə baxılır ki, f-lər:

a) $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{[0,1]}})$ fəzasına nəzərən ölçüləndirlər,

b) ρ_C müntəzəm metrikasında $C(0,1)$-in nöqtələrində kəsilməzdirlər.

Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi, $\mathbf{P}_n \underset{\mathscr{F}_C}{\Rightarrow} \mathbf{P}$, $\mathbf{P}\{C(0,1)\} = 1$ yığılması üçün zəruri və kafidir:

1) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{\Delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{w_\Delta^C(X_n) > \varepsilon\} = 0,$$

2) $[0,1]$-də hər yerdə sıx elə S çoxluğu var ki, $\{X_n(t),\ t\in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları $\{X(t),\ t\in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmalarına yığılır.

2) şərtində S çoxluğunu $[0,1]$ ilə əvəz etmək olar.

2. $D[0,1]$-də prosesə yığılma. $\mathbb{R}^{[0,1]}$-də separabel X_n və X prosesləri verilmişdir:

$$w_\Delta^D(x) = \sup_t \min(w^+(t,\Delta),\ w^-(t,\Delta)),$$

$$w^\pm(t,\Delta) = \sup_{\substack{0<u<\Delta \\ t\pm u\in[0,1]}} |x(t) - x(t\pm u)|.$$

$\mathscr{F}_D$ funksionallar sinfinə baxılır:

a) funksionallar $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{[0,1]}})$ fəzasına nəzərən ölçüləndirlər,

b) Skoroxod – Proxorov metrikasında D-nin kəsilməzlik nöqtələrində

$$\rho_D(x,y) = \inf_\lambda [\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_t |\lambda(t) - t|]$$

burada $\lambda(t)$, – $[0,1]$ parçasını özünə inikas etdirən, ciddi artan və kəsilməz funksiyalardır və $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$.

$\mathbf{P}_n \underset{\mathscr{F}_D}{\Rightarrow} \mathbf{P}$ yığılması üçün $\mathbf{P}(D) = 1$ aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi zəruri və kafidir:

1) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{\Delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{w_\Delta^D(X_n) > \varepsilon\} = 0;$$

2) hesabi hər yerdə sıx elə S çoxluğu var ki, $\{X_n(t),\ t\in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları $\{X(t),\ t\in S\}$ prosesinin sonluölçülü paylanmalarına yığılır.

3)

$$\rho_{L^2}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x(t) - y(t))^2\, dt$$

metrikası ilə $L^2(0,2\pi)$ fəzasında proseslər.

X_n və X-in ölçülən proseslər olduğu fərz olunur, bu proseslərin verilməsi $(L^2, \mathscr{B})$ fəzasında uyğun olaraq $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}$ paylanmalarını doğurur; $\mathscr{B}$, – L^2-nın Borel çoxluqlarının σ – cəbridir.

L^2-də $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ zəif yığılmasının olması üçün zəruri və kafidir ki;

1) $\{a_k(X_n),\ b_k(X_n)\}_{k=0}^\infty$ Furye əmsalları ardıcıllıqlarının sonluölçülü paylanmaları $\{a_k(X),\ b_k(X)\}_{k=0}^\infty$ ardıcıllıqlarının sonluölçülü paylanmalarına yığılsın, burada

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin kt\, dt;$$

2) İxtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{\Delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{w_\Delta^{L^2}(X_n) > \varepsilon\} = 0$$

münasibəti ödənilir, burada

$$w_\Delta^{L^2}(x) = \int_0^{2\pi} (x(t+\Delta) - x(t))^2\, dt, \quad x(t+\Delta) = 0,$$

əgər $t + \Delta > 2\pi$ olarsa.

4. İnteqral funksionalların paylanmalarının yığılması. $X_n(t)$, $X(t)$ prosesləri üçün seçimi fəza kimi $[0,1]$-də bütün ölçülən funksiyalar fəzası $M(0,1)$, silindrik çoxluqları özündə saxlayan hər hansı $\mathscr{B}$ σ – cəbri ilə birgə götürülür.

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(x(t))\, dt, \quad \varphi\in C(-\infty,\infty)$$

şəkilli funksionallar sinfi $\mathscr{F}$-ə baxılır.

$\mathbf{P}_n$ paylanmalarının $\mathbf{P}$ paylanmalarına yığılması üçün zəruri və kafidir ki,

1) ixtiyari $\varphi\in C(-\infty,\infty)$ və $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{N\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\int_{t:|X_n(t)|>N} \varphi(X_n(t))\, dt > \varepsilon\right\} = 0;$$

2) ixtiyari v_j, u_j və r üçün

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r} \mathbf{P}\{\cap[v_j \le X_n(t_j) < u_j]\}\, dt_1 \dots dt_r =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r} \mathbf{P}\{\cap[v_j \le X(t_j) < u_j]\}\, dt_1 \dots dt_r$$

münasibətləri ödənilsin, burada $v_j, u_j \in S \subset \mathbb{R} \setminus H$, S çoxluğu $\mathbb{R} \setminus H$-ın ixtiyari, hər yerdə sıx altçoxluğu, H elementləri sayı hesabidən çox olmayan hər hansı çoxluqdur.

Əgər $X_n(t)$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları yığılırsa, onda 2) şərti ödənilir.

Əgər $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\psi$ sinfi yalnız $\varphi(x)$ funksiyaları ilə doğurulmuşdursa, $|x| \to \infty$ olduqda $|\varphi(x)| = o(\psi(x))$ olarsa, onda yığılma üçün 1) şərti $\psi(x)$-in artma sürətindən asılı olaraq genişləndirilə bilinər.

5. Bütün ədəd oxunda verilmiş proseslərin funksionallarının paylanmalarının yığılması. Hələlik sonlu $(0, T)$ intervalında verilən proseslərə baxılırdı. Əgər $T = \infty$ olarsa, onda funksionallar sinfinin təbii seçimi problemi yaranır (burada ρ_C və ρ_D metrikalarında kəsilməz funksionallara baxılması mənasızdır).

Sadəlik üçün $\mathbb{T}$ parametrik çoxluğunun $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ...\}$ ardıcıllığı olduğu hala baxılır, $\mathscr{X} = \mathbb{R}^\infty$.

$$f(x) = \sup_{k>0} x(k), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{x(k)} \tag{5}$$

ifadələrilə verilən stasionar bağlı kəmiyyətlərin cəminin belə mühüm funksionallarının öyrənilməsi aşağıdakı kimi təyin olunan $\mathscr{F}_a$ siniflərinə gətirir.

$$V_{N,a} = \{x: x(k)/k < a,\ k \geq N\},$$

$$V_a = \bigcup_{\alpha<a} \bigcup_N V_{N,\alpha} = \{x: \lim_{k\to\infty} \sup\ x(k)/k < \alpha\}$$

olsun. Əgər $x \in V_{a-\beta}$ şərtini ödəyən ixtiyari $x \in V_a$, $\varepsilon > 0$ və ixtiyari β üçün elə $N = N(x, \varepsilon, \beta) \geq 1$ və $\delta = \delta(x, \varepsilon, \beta) > 0$ tapılarsa ki,

$$y \in V_{N,a-\beta}, \quad \max_{j<N} |x(j) - y(j)| < \delta$$

olduqda

$$x \in V_{N,a-\beta}, \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olsun, onda ölçülən f funksionalı V_0 – kəsilməz funksional ($f \in \mathscr{F}_a$) adlanır.

(5) funksionalları V_a – kəsilməz funksionallardır.

X_n, $X \in \mathbb{R}^\infty$ olsun. $\mathbf{P}_n$-in $\mathbf{P}$-yə $\mathscr{F}_a$ – yığılması üçün [V_a – kəsilməz f funksionallarının $f(X_n)$ paylanmalarının yığılması üçün] zəruri və kafidir ki:

1) bütün k-lar üçün $(X_n(1), ..., X_n(k))$ toplularının birgə paylanmaları $(X_n(1), ..., X_n(k))$ toplularının paylanmasına zəif yığılsın, $\mathbf{P}\{X \in V_a\} = 1$;

2) $\lim_{\beta\downarrow 0} \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbf{P}\{X_n \notin V_{N,a-\beta}\} = 0$

şərtləri ödənilsin (bax, [11]).

Qeyd etmək lazımdır ki, V_a – kəsilməz funksionalları ilə doğurulmuş topologiya metriklənməyəndir və Proxorov kriterisinə əsaslanan **I** bənddəki yanaşmanı burada tətbiq etmək olmur. Yığılma haqqındakı müddəa burada **III** bölmədəki yanaşmanın köməyilə alınmışdır.

Əgər $Y(1), Y(2), ...;\ Y_n(1), Y_n(2), ...$ dar mənada stasionar ardıcıllıqlar, $X(k) = \sum_{j=1}^{k} Y(j)$, $X_n(k) = \sum_{j=1}^{k} Y_n(j)$ olarsa və $(Y_n(1), ..., Y_n(k))$ toplularının sonluölçülü paylanmaları ixtiyari k qiymətində $(Y(1), ..., Y(k))$ toplusunun paylanmasına yığılarsa, $\mathbf{P}\{X \in V_0\} = 1$ olarsa, onda X_n prosesinin paylanmalarının $\mathscr{T}_0$ – yığılması üçün zəruri və kafidir ki, $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{M}(Y_n(1);\ Y_n(1) \geq 0) \to \mathbf{M}(Y(1);\ Y(1) \geq 0)$ münasibəti ödənilsin (bax, [11]).

Kəsilməz funksionallar sinfi $\Lambda_{g,a}$ üçün də analoji mülahizələr doğrudur. $\mathbb{T}$-də müsbət g funksiyası verilir,

$$\Lambda_{N,g,a} = \{x \in \mathbb{R}^\infty: |x(k)/g(k)| < a,\ k \geq N\},$$

$$\Lambda_{g,a} = \bigcap_{\alpha>a} \bigcup_N \Lambda_{N,g,a} = \{x: \lim\ \sup\ |x(k)/g(k)| < a\}.$$

Əgər ixtiyari $x \in \Lambda_{g,a}$ və $\varepsilon > 0$ üçün elə $\beta = \beta(x, \varepsilon) \geq 0$, $N = N(x, \varepsilon) \geq 1$, $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ tapılarsa ki,

$$y \in \Lambda_{N\,g,a+\beta}, \quad \max_{j<N} |x(j) - y(j)| < \delta$$

olduqda

$$x \in \Lambda_{N\,g,a+\beta}, \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olsun, onda $\mathbb{R}^\infty$-da f funksionalı $\Lambda_{g,a}$ – kəsilməz funksional adlanır (bax, [11]).

$g(k) = k^\beta$, $\beta \leq a > 0$, $a < 1$ olduqda

$$f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{|x(k)| - k^a}$$

funksionalı $\Lambda_{g,a}$ – kəsilməz funksionaldır.

$\Lambda_{g,a}$ – kəsilməz funksionalların paylanmasının yığılması üçün zəruri və kafidir ki:

1) X_n proseslərinin sonluölçülü paylanmaları yığılan olsunlar;

2) $\lim_{N\to\infty}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbf{P}\{X_n \notin \Lambda_{a+\beta,N}\} = 0$, $\beta > 0$

münasibəti ödənilsin.

Baxılan $\Lambda_{g,a}$ topologiyası əvəzinə

$$\rho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|/g(t)$$

metrikasının doğurduğu topologiya daxil edilərsə, $C(0, \infty)$-dan olan kəsilməz zamanlı proseslərin baxılması $C(0, \infty)$-un separabel olmamazlığına, Borel σ – cəbrinin isə silindrik çoxluqların doğurduğu σ – cəbrlə müqayisədə olduqca geniş olmasına gətirir. Bundan başqa, Viner prosesinin $C(0, \infty)$-da paylanmasını silindrik σ – cəbrdən Borel σ – cəbrinə davam etdirmək mümkün olmur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Биллингслей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [3] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [4] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [5] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 3–41; [6] Боровков А. А., Печерский Е. А., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 28, № 1, S. 5–22; [7] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [8] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, с. 307–48; 1941, т. 9, с. 563–628; 1943, т. 13, с. 169–238; [9] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.-Л., 1937; [10] Topsøe F., «Math. scand.», 1969, Bd 25, № 1, p. 97–104; [11] Боровков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 128, с. 41–65; [12] Саханенко А. И., «Сиб. матем. ж.», 1974, т. 15, № 1, с. 102–19; [13] Боровков А. А., Саханенко А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 4, с. 812–15; [14] Bauer H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 58, № 2, S. 257–65.

LİMİT TEOREMLƏRİ təsadüfi proseslər üçün; martinqal metodları « **предельные теоремы** для случайных процессов, мартингальные методы; **limit theorems** for stochastic processes, martingale methods » – *təsadüfi proseslər* ardıcıllığının zəif yığılması şərtlərini limit nöqtələrinin martinqal xarakterizasiyası əsasında müəyyənləşdirən teoremlərdir.

Təsadüfi proseslərin verilmiş limit prosesinə zəif yığılmasını: ilkin paylanmaların zəif yığılması, müvafiq funksional fəzada uyğun ehtimal ölçüləri ardıcıllığının zəif nisbi kompaktlığını təmin edən şərtlər və ixtiyari zəif yığılan ardıcıllığın hər bir limit ölçüsünün limit prosesinin bu və ya digər xarakterizasiya xassəsinə malik olma şərtləri təyin edir. Təsadüfi proseslərin zəif yığılmasının effektivliyi və şərtlərinin forması kompaktlığa görə istifadə olunan kriterilər və limit prosesinin xarakterizasiya olunma üsulundan olduqca asılıdır.

Funksional fəzalarda ehtimal ölçülərinin sonluölçülü paylanmalarla ənənəvi xarakterizasiyası, bir qayda olaraq, çətin yoxlanılan şərtlərə gətirir. Limit proseslərinin martinqal xarakterizasiyasının istifadəsi topoloji fəzalarda ehtimal ölçüləri ardıcıllığının zəif yığılması haqqında əksər məlum teoremlərini yeganə və effektiv yanaşma ilə əhatə edir.

$\mathscr{X}$ – topoloji fəza, $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ – Borel altçoxluqları σ – cəbri, $\mathbb{B} = \{\mathscr{B}_t,\ t \geq 0\}$, – $\mathscr{B}_t \subset \mathscr{B}(\mathscr{X})$, $t \geq 0$ σ – cəbrlərinin hər hansı artan ailəsi, $\mathbb{B}_+ = \{\mathscr{B}_{t+},\ t \geq 0\}$, $\mathscr{B}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{B}_{t+\varepsilon}$, μ_0, – $\mathscr{B}_0$-da ehtimal ölçüsü, $\mathbb{M} = \{M_t^i(x),\ t \geq 0,\ x \in \mathscr{X},\ i \in \mathbf{I}\}$, – t-yə görə sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan funksionallar ailəsi, $\mathbf{I}$ – indekslərin hər hansı çoxluğu olsun. $\mathscr{P}(\mu_0, \mathbb{M})$ isə $\mathscr{B}(\mathscr{X})$-də elə $\hat{\mathbf{P}}$ ehtimal ölçülərinin sinfi olsun ki, bunlar burada martinqalların $(\mu_0, \mathbb{M})$ – probleminin həlləri kimi adlandırılır (bax, [1]) və hər bir $i \in \mathbf{I}$ üçün $\hat{\mathbf{P}}\big|_{\mathscr{B}_0} = \mu_0$ və M^i, – $(\hat{\mathbf{P}}, \mathbb{B}_+)$ – lokal martinqaldır. Əgər $\mathscr{P}(\mu_0, \mathbb{M})$ yeganə $\hat{\mathbf{P}}$ nöqtəsindən ibarət olarsa, onda μ_0 və $\mathbb{M}$ ailəsi $\hat{\mathbf{P}}$ ölçüsünün $\mathscr{B}(\mathscr{X})$-də martinqal xarakterizasiyasını verir. Məs, $\mathscr{X} = C_{[0,\infty)}(\mathbb{R}^m)$ – kompaktlarda müntəzəm yığılma topologiyalı, $[0, \infty)$-da bütün m – ölçülü kəsilməz $\omega(\cdot)$ funksiyalarının fəzası, $\mathscr{B}_t$ isə $C_s(\Gamma) = \{\omega : \omega(s) \in \Gamma\}$, $s \leq t$, $\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ silindrik çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbr olsun. Verilmiş $a(t, y) = (a_1(t, y), ..., a_m(t, y))$ funksiyaları və $A(t, y) = \| a_{ij}(t, y) \|_1^m$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ müsbət müəyyən simmetrik martinqallar üçün

$$M_t^{1,z}(\omega) = (\omega(t) - \omega(0),\ z) - \int_0^t (a(s, \omega(s)), z)\, ds$$

$$M_t^{2,z}(\omega) = [M_t^{1,z}(\omega)]^2 - \int_0^t (z,\ A(s,\ \omega(s))z)\, ds,\quad t \geq 0,\quad z \in \mathbb{R}^m$$

funksionallar ailəsi ilə verilən martinqallar probleminin həlləri başlanğıc paylanması μ_0, aparı vektoru $a(t, y)$, diffuziya əmsalları matrisi $A(t, y)$ olan diffuzion proseslərə uyğun ehtimal ölçüləri olacaqdır (bax, [2]). Xüsusi halda, $\mu_0 = \varepsilon_0$ (dirak ölçüsü), $a(t, y) \equiv 0$ və $A(t, y)$ – vahidi matris olarsa, onda uyğun martinqallar probleminin yeganə həlli Viner ölçüsüdür.

X^n, – $(\Omega^n, \mathscr{A}^n, \mathbf{P}^n)$ ehtimal fəzasında təsadüfi $\mathscr{X}$ – rəqəmli element, $\mathbb{A}^n = \{\mathscr{A}_t^n,\ t \geq 0\}$, $\mathscr{A}_t^n \subset \mathscr{A}^n$, $t \geq 0$, – $(\Omega^n, \mathscr{A}^n, \mathbf{P}^n)$ fəzasının artan σ – cəbrlər ailəsi, $\hat{\mathbf{P}}^n(B) = \mathbf{P}^n\{X^n \in B\}$, $B \subset \mathscr{B}(\mathscr{X})$, $\mu_0^n = \hat{\mathbf{P}}^n\big|_{\mathscr{B}_0}$, $n \geq 1$ olsun.

$\{\hat{\mathbf{P}}^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığının $\hat{\mathbf{P}} \in \mathscr{P}(\mu_0, \mathbb{M})$-yə zəif yığılmasının şərtləri, verilmiş $\mathbb{M}^n = \{M_t^{n,i},\ t \geq 0, i \in \mathbf{I}\}$ ailələrinin $(\mathbf{P}^n, \mathbb{A}^n)$ – lokal martinqallarının terminlərilə ifadə olunur və bu şərtlərə μ_0^n ölçülərinin μ^0 ölçüsünə zəif yığılması, $\{\hat{\mathbf{P}}^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığının zəif nisbi kompaktlığı şərtləri, $\mathbb{B}$ ailəsinin requlyarlığı məhdudiyyətləri, $\mathbb{M}^n$-dən olan funksionalların x-ə görə kəsilməzliyi, $\mathbb{M}^n$-dən olan proseslərin müntəzəm inteqrallananlığı və

$$\{M_t^i(X^n),\ t \geq 0,\ i \in \mathbf{I}\} \quad \text{və} \quad \{M_t^{ni},\ t \geq 0,\ i \in \mathbf{I}\}$$

təsadüfi proseslər ailələrinin yaxınlığı fərziyyələri kimi şərtlər daxildir.

$\mathscr{T}(\mathbb{A}^n)$, – $\mathbb{A}^n$ ailəsinə nəzərən dayanma anları sinfi və hər bir $T > 0$ üçün $\Sigma(T)$ bütün elə $\{S^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllıqlarının sinfi olsun ki, $S^n = S^n(T) \in \mathscr{T}(\mathbb{A}^n)$, $S^n \leq T$ və $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n\{S^n < T\} = 0$ şərtlərini ödəsin. $\hat{\mathscr{P}}$, – $\{\mathbf{P}^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığının limit nöqtələri çoxluğu və K isə elə artan $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funksiyaları sinfi olsun ki, $t \to \infty$ olduqda $G(t)/t \to \infty$ olsun; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Fərz olunur ki, hər bir $\nu \in \hat{\mathscr{P}}$ və $i \in \mathbf{I}$ üçün elə hər yerdə sıx $Q = Q^{\nu,i} \subset \mathbb{R}_+$ altçoxluğu və $G^{\nu,i} \in K$ var ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a) bütün $t \in Q$ üçün $\mathscr{B}_t = \sigma\{f : f \in \mathbb{B}_t\}$, burada $\mathbb{B}_t$, – ν – sanki yəqin kəsilməz məhdud funksiyalar çoxluğudur;

b) bütün $t \in Q$ və $i \in \mathbf{I}$ üçün $M_t^i(\cdot)$ funksionalı ν – sanki yəqin kəsilməzdir;

c) hər hansı $\{T_k,\ k \geq 1\}$, $0 \leq T_k \uparrow \infty$ ardıcıllığı üçün elə $\{S_k^n,\ n \geq 1\} \in \Sigma\{T_k\}$ ardıcıllıqları var ki, bütün $t \in Q$, $i \in \mathbf{I}$ və $k \geq 1$ üçün

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{M}^n G\left[\left|M^{ni}_{t \wedge S_k^n}\right|\right] < \infty,$$

$\mathbf{M}^n$ – riyazi gözləmədir.

Topoloji fəzalarda ehtimal ölçülərinin zəif yığılmasında martinqal metodlarının əsası aşağıdakı müddəalardan ibarətdir (bax, [3]).

1. $\{\hat{\mathbf{P}}^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı zəif nisbi kompaktdır;

2. μ_0 ölçüsünü təyin edən hər hansı $B \in \mathscr{B}_0$ çoxluqlar alt sinfi üçün

$$\lim_{n \to \infty} \mu_0^n(B) = \mu_0(B);$$

3. a) – c) fərziyyələri ödənilmişdir.

4. ixtiyari $\varepsilon > 0$, $t \in \bigcup_{\nu \in \hat{\mathscr{P}}} Q^{\nu,i}$ və $i \in \mathbf{I}$ üçün

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n\{\,|M_t^{ni} - M_t^i(X^n)| > \varepsilon\} = 0$$

şərtləri ödənilmiş olsun. Onda $\hat{\mathscr{P}} \subseteq \mathscr{P}(\mu_0, \mathbb{M})$.

Əksər tətbiqlərdə $\mathscr{X}$ fəzası tamamilə requlyar topoloji fəzadır. Belə fəzalar üçün Proxorov kriterisi doğrudur: əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $K_\varepsilon \subset \mathscr{X}$ kompaktı varsa ki,

$$\inf_{n \geq 1} \hat{\mathbf{P}}^n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

şərtini ödəsin, $\{\hat{\mathbf{P}}^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı zəif nisbi kompaktdır (bax, [4]). X-in kompakt altçoxluqlarının təsviri məlum olarsa, ehtimal ölçüləri ardıcıllığının zəif nisbi kompaktlığını yoxlamaq mümkündür. Məs., əgər $\mathscr{X} = D_{[0,\infty)}(S)$ – qiymətlərini tam separabel metrik (S, ρ) fəzasından alan, $\mathbb{R}_+$-da sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan bütün funksiyaların fəzası – Skoroxod fəzası, $X^n = \{X^n(t),\ t \geq 0\}$ isə $D_{[0,\infty)}(S)$-də trayektoriyalar ilə uzlaşmış təsadüfi proses olarsa, onda $\{\hat{\mathbf{P}}^n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığının zəif nisbi kompaktlığı üçün X^n, $n \geq 1$ proseslərinin sonluölçülü paylanmalarının zəif nisbi kompaktlığı və bütün $\varepsilon > 0$, $T > 0$ üçün

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{T^n \in \mathscr{T}(\mathbf{A}^n)} \mathbf{P}^n\{\,\rho(X^n((T_+^n \delta) \wedge T),$$
$$X^n(T^n \wedge T)) > \varepsilon\} = 0$$

şərtinin ödənilməsi kafi şərtdir (Aldous – Rebolledo şərti) (bax, [5]).

$\mathbb{M}^n$ ailəsinin seçilməsi, adətən, çətinlik törətmir və limit ölçüsünü xarakterizə edən $\mathbb{M}$ ailəsinin seçilməsi ilə təyin olunur.

Martinqal metodun tətbiqinin illüstrasiyası kimi X_t^n, $t \geq 0$, $n \geq 1$ nöqtəvi proseslərinin λ parametrli Puasson prosesinə zəif yığılma şərtlərinə baxmaq olar. $\mathbb{N}$ – yalnız vahid sıçrayışla artan, $\mathbb{R}_+$-da pilləvari $\omega(\cdot)$ funksiyalarının sinfi, $\omega(0) = 0$, $\mathscr{X} = D_{[0,\infty)}(\mathbb{R}^1) \bigcap \mathbb{N}$ olsun. Limit prosesinə uyğun $\hat{\mathbf{P}}_\lambda$ ölçüsü $\mathscr{P}(\varepsilon_0, \mathbb{M})$-in yeganə elementidir. Burada $\mathbb{M}$ yalnız yeganə $M_t(\omega) = \omega(t) - \lambda t$, $t \geq 0$ elementindən ibarətdir (Vatanabe teoremi). Əgər hər hansı artan A_t^n, $t \geq 0$ prosesi üçün $M_t^n = X_t^n - A_t^n$, $t \geq 0$, – $(\mathbf{P}^n, \mathbb{A}^n)$ – lokal martinqaldırsa, $n \geq 1$ və bütün $t > 0$ və $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n\{\,|A_t^n - \lambda t| > \varepsilon\} = 0$$

olarsa, onda $\{X_t^n,\ t \geq 0,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı λ parametrli Puasson prosesinə zəif yığılır.

Diffuzion proseslərin martinqal xarakterizasiyası ilk dəfə P. Levi (bax, [6]) və C. Dubun (bax, [7]) işlərində tapılmışdır. Təsadüfi proseslərin diffuzion proseslərə zəif yığılması haqqında məsələlərdə martinqal metodları ilk dəfə aşkar surətdə D. V. Struk və S. R. S. Varadan tərəfindən [8]-də istifadə olunmuşdur; [9], [10]-a da bax.

Əd.: [1] Jacod J., «Lect. Notes in Math.»,1979, № 714; [2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [3] Григелионис Б., Микулявичус Р., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 320–32; [4] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977; [5] Aldous D., «Ann. Probab.», 1978, v. 6, № 2, p. 335–40; [6] Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., «Comm. Pure Appl. Math.», 1969, v. 22, p. 345–400, 479–530; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [10] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

LİMİT TEOREMLƏRİNİN DAVAMOLUNANLIĞI « предельных теорем продолжимость; continuation of limit theorems » – əlavə fərziyyələr etmədən $F_n(x)$ paylanma funksiyaları ardıcıllığının $F(x)$ paylanma funksiyasına zəif yığılmasının $x \in A \subset \mathbb{R}^1$ çoxluğundan bütün həqiqi $\mathbb{R}^1$ ədəd oxuna genişləndirilməsidir. Xüsusi halda, F_n asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin paylanması olarsa, L. t. d. sonsuz bölünən paylanmaların davamolunanlığı ilə sıx bağlıdır. Eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin paylanma funksiyaları $F_n(x)$-lərin ardıcıllığının $x > 0$ yarımoxunda standart normal qanunun paylanma funksiyasına yığılması haqqında L. t. d.-nın varlığı V. M. Zolotarev tərəfindən göstərilmişdir. Bu hipotez H. - J. Rossberqin işində, [1]-də təsdiq olunmuşdur. Limit qanunlarının geniş sinfi üçün bir qədər məhdud şərtlərlə davamolunanlığın mümkünlüyü təyin olunmuşdur (bax, [2]). L. t. d.-nın əsasını paylanmaların bərpa olunmasının analitik xassəsi təşkil edir, lakin buna görə yarımoxda onların sonlu kompozisiyalarının qiymətləri məlum olmalıdır (bax, [3]).

Əd.: [1] Rossberg H.-J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 824–28; [2] Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G., Analytic methods of probability theory, B., 1985; [3] Kruglov V. M., Titov A. N., «Lect. Notes in Math.», 1987, № 1233, p. 41–56.

***LİMİTİ, TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR ARDICILLIĞININ « предел последовательности случайных событий; limit of sequence of random events »** – $\{A_n\}_{n=1,2,...}$ təsadüfi hadisələr ardıcıllığının aşağı və yuxarı limitləri – $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ və $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ varsa və $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ bərabərliyi ödənilərsə,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

bərabərlikləri ilə təyin olunan *təsadüfi hadisəyə* deyilir.

Monoton azalan və monoton artan hadisələr ardıcıllıqlarının limitləri vardır və bu limitlər uyğun olaraq,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap A_n \quad \text{və} \quad \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup A_n$$

düsturları ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

LİNDEBERQ ŞƏRTİ « Линдеберга условие; Lindeberg condition » – bax, *Lindeberq – Feller teoremi.*

LİNDEBERQ ŞƏRTİ təsadüfi matrislər üçün **« Линдеберга условие** для случайных матриц; **Lindeberg condition** for random matrices **»** – bax, *Semi – dairəvi qanun.*

LİNDEBERQ – FELLER TEOREMİ « Линдеберга – Феллера теорема; Lindeberg – Feller theorem » – *limit teoremlərinin* klassik nəzəriyyəsinin əsas nəticələrindən biridir. L. – F. t. ilkin variantda

$$Z_n = B_n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - a_j) = X_{n1} + ... + X_{nn}, \quad n \geq 1 \qquad (1)$$

asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artmaqda olan cəmlərinin sxemi ilə bağlı olmuşdur, burada fərz olunur ki, $a_j = \mathbf{M} X_j$, $\sigma_j^2 = \mathbf{D} X_j$ sonludurlar və bu təsadüfi kəmiyyətlər $k \leq n$ şərtini ödəyən k -ya görə müntəzəmdirlər, yəni $n \to \infty$ olduqda

$$\sigma_{nk}^2 = \sigma_k^2 / B_n^2 \to 0 . \qquad (2)$$

F_n, F_{nj} və Φ – uyğun olaraq, Z_n, $X_{nj} = (X_j - a_j)/B_n$ və standart normal qanunun paylanma funksiyaları olsun. L. – F. t.-ndə hökm olunur ki, F_n-in Φ -ə *ρ müntəzəm metrikasında* yığılması üçün zəruri və kafidir ki, hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\delta_n(\varepsilon) = \sum_j \int_{|x|>\varepsilon} x^2 \, dF_{nj}(x) \to 0 \qquad (3)$$

münasibəti ödənilsin. Limit teoremlərində əsas diqqət obyekti A. N. Kolmoqorov modeli (bax, *Limit teoremləri*) olduqda, bu şərtin kafiliyi [1]-də C. Lindeberq, zəruriliyi V. Feller tərəfindən [2]-də isbat olunmuşdur, L. – F. t.-nin isə müddəası təbii surətdə genişləndirilmişdir. Məhz yeni variantda (Lindeberq – Feller modeli) Z_n cəmlərindəki X_{nj} asılı olmayan toplananlarının hökmən müəyyən strukturlu olması o qədər də vacib deyildir, lakin onlar üçün yalnız $\mathbf{M} X_{nj} = 0$, $\sigma_{nj}^2 = \mathbf{D} X_{nj}$ sonlu və $\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + ... = 1$ şərtlərinin və (2) şərtinin ödənilməsi tələb olunur. Bu zaman hökmün özü qüvvədə qalır, yəni

$$\rho(F_n \Phi) \to 0 \Leftrightarrow \delta_n(\varepsilon) \to 0 \qquad (4)$$

münasibəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ödənilir. Lindeberq – Feller modelini daha da genişləndirmək olar, lakin bu (4) şərti ödənilməklə aşağıdakı dəyişikliklər hesabına olunur.

1) Z_n -dəki toplananların sayı sonsuz ola bilər. Bu halda fərz olunur ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət sıra paylanmaya görə yığılır.

2) (2) şərti daha məhdud *sonsuz kiçilənlik şərti*, yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\sup_j \mathbf{P}\{|X_{nj}| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (5)$$

şərti ilə əvəz olunur. Bu modeldə (3) şərti aşağıdakı şərtə ekvivalentdir (bax, [3]):

hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\sum_j \mathbf{P}\{|X_{nj}| > \varepsilon\} \to 0 . \qquad (6)$$

Limit paylanmasının varlığı fərz olunduqda, Kolmoqorov modelində, limit paylanmasının normal paylanma olması üçün (6) şərtinə kriteri kimi baxılması hələ A. Ya. Xinçinə məlum idi və bu [5]-də təkrar olunur. Lakin Lindeberq – Feller modeli çərçivəsində (6) şərtinin (3) şərtinə ekvivalentliyi o vaxtlar məlum deyildi. S. N. Bernşteyn 1926-da [6]-da Lindeberq – Fellerin genişləndirilmiş modelində (3) şərtinin kafiliyini isbat etmişdir, 1946-da isə o isbat edir ki, L. – F. t. ilkin variantda Lyapunov teoreminin nəticəsidir (bax, [7]), bu [5]-də də qeyd olunmuşdur. L. – F. t.-nin Kolmoqorov modelindən fərqli modellərdə müxtəlif analoqları və ümumiləşmələri mövcuddur (bax, məs., [8]). Belə ümumiləşmələrdən biri (5) şərtindən imtina ilə bağlıdır. Bu halda F_n-in Φ -ə yığılma şərtlərinin xarakteri olduqca dəyişir, belə ki, Z_n cəmlərində elə toplananlar ola bilir ki, özünün mühümlüyü ilə bütün cəmlə müqayisə olunur.

$$V = \{\upsilon = (G_1, G_2, ...) : G_k(x) = \Phi(x/\sigma_k), \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... = 1\}$$

olsun, yəni $G_1 * G_2 * ... = \Phi$ bərabərliyi hər bir $\upsilon \in V$ toplusu üçün ödənilsin. Onda $n \to \infty$ olduqda $\rho(F_n, \Phi) \to 0$ münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\mu(u_n, \upsilon_n) = \sup_j L(F_{nj}, G_{nj}) + L(F_n^*, G_n^*) \to 0 \qquad (7)$$

münasibətini ödəyən $\nu_n = (G_{n1}, G_{n2}, ...)$ toplular ardıcıllığının varlığı zəruri və kafidir, $u = (F_{n1}, F_{n2}, ...)$, L – Levi metrikası, F_n^* və

$$F_n^*(x) = \sum_j \int_{-\infty}^{x} \lambda^2 \, dF_{nj}(\lambda)$$

qaydası ilə uyğun toplular üzrə qurulur.

Məsələn, belə u_n ardıcıllığı kimi $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$ olan $(\Phi_{n1}, \Phi_{n2}, ...)$ toplularını götürmək olar.

$$\int x\,dF_k(x) = 0\,, \quad \sum_j x^2\,dF_j(x) = 1$$

şərtləri ilə qurulan $u = (F_1, F_2, ...)$ toplularının U fəzasında digər μ funksionallarının çoxluğu mövcuddur, bu funksionalların köməyilə də yığılma kriterisi (7) formasında ifadə oluna bilinir (bax, [9] – [11]). Bu forma L. – F. t.-ni (7) qeyri – klassik qoyuluşunda Φ limit qanununun kompozisiyaya ayrılışının dayanıqlılıq teoremi kimi interpretasiya etməyə imkan verir.

W , – $\int x\,dF(x) = 0$, $\int x^2 dF(x) = 1$ şərtlərini ödəyən paylanma funksiyaları çoxluğu olsun. W -dan olan normal çoxluqların çoxluğu B yalnız bircə Φ funksiyasından ibarətdir. $Ju = F_1 * F_2 * ...$ $J : U \to W$ inikası olsun; B -nin U -da tam proobrazı V çoxluğudur. (7) müddəası aşağıdakı müddəaya ekvivalentdir:

$$\rho(Ju,\ B) \to 0 \Leftrightarrow \mu(u, J^{-1}B) \to 0\,.$$

Elementdən çoxluğa qədər məsafə ümumi qəbul olunmuş mənada anlaşılır. Limit teoremlərinin qeyri – klassik qoyuluşda belə interpretasiyası (yəni (5) şərtindən istifadə olunmamaqla) ümumi halın özündə mümkündür (bax, [10]).

Əd.: [1] L i n d e b e r g J. W., «Math. Z», 1922, Bd 15, S. 211–25; [2] F e l l e r W., «Math. Z», 1935, Bd 40, S. 521–59; [3] Л о э в M., Теория вероятностей, пер. с англ.. M., 1962; [4] Х и н ч и н А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, M. – Л., 1938; [5] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, M. – Л., 1949; [6] Б е р н ш т е й н С. Н., Собр. соч., т. 4, M., 1964, с. 121–76; [7] Б е р н ш т е й н С. Н., Собр. соч. , т. 4, M., 1964, с. 434–47; [8] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, M., 1986; [9] З о л о т а р е в В. M., Современная теория суммирования независимых случайных величин, M., 1986; [10] З о л о т а р е в В. M., «Теория вероятн. и ее примен.», 1989, т. 34, в. 1, с. 178–89; [11] Р о т а р ь В. И., «Матем. заметки», 1975, т.18, № 1, с. 129–35.

LİNDELÖF XASSƏSİ « Линделефа свойство; Lindelöf property » – bax, *Ölçü*.

LİNNİK DİSPERSİON METODU « Линника дисперсионный метод; Linnik dispersion method » – bax, *Dispersion metod* ə d ə d l ə r n ə z ə r i y y ə s i n d ə.

LİNNİK SİNFİ « Линника класс; Linnik class » – *Levi – Xinçin kanonik ifadəsində* spektral funksiyası $G(x)$, artım nöqtələri çoxluğu

$$\{\mu_{m_1}\}_{m=-\infty}^{\infty} \bigcup \{\mu_{m_2}\}_{m=-\infty}^{\infty} \bigcup \{0\}$$

şəklində sıçrayışlar funksiyası olan *sonsuz bölünən paylanmalar* sinfidir, burada $\mu_{m_1} > 0$, $\mu_{m_2} < 0$ və $\mu_{m+1,r}/\mu_{m,r}$ $(r = 1, 2,$ $m = 0, \pm 1, ...)$, – 1-dən fərqli natural ədədlərdir. L. s. sonsuz bölünən paylanmaların ayrılışı nəzəriyyəsində mühüm rola malikdir (bax, *Sonsuz bölünən paylanma*; a y r ı l ı ş).

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 1, с. 3–40.

LİNNİK YIĞILMA ZONALARI « Линника зоны сходимости; Linnik zones of convergence » – Yu. V. Linnikin [1]-də daxil etdiyi $0 \le x \le \Lambda(n)$ şəklində elə oblastdır ki, bu zonada $n \to \infty$ olduqda

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \to 1\,, \quad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \to 1$$

münasibətləri ödənilir, burada $F_n(x)$, – n sayda asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin normalanmış cəmlərinin *paylanma funksiyasıdır*, bu şərtlə ki, baxılan təsadüfi kəmiyyətlər zəiflədilmiş *Kramer şərtini* ödəyirlər, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır və $n \to \infty$ olduqda $\Lambda(n) \to \infty$.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 2, с. 245–63; [2] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, M., 1965.

LİTTL DÜSTURU « Литтла формула; Little formula » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*.

LİUVİLL STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİYİ « Лиувилля стохастическое дифференциальное уравнение; Liouville stochastic differential equation » – adi *stoxastik differensial tənliyin* birinci inteqralı üçün tənlikdir. Düz və tərs L. s. d. t.-ləri vardır. Düz tənliyi ilkin stoxastik differensial tənliyi doğuran Viner prosesinin «keçmişindən» asılı birinci inteqral ödəyir, ikinci tənliyi isə bu prosesin «gələcəyindən» asılı inteqral ödəyir. Hər iki L. s. d. t.-ləri ikinci tərtib *xətti stoxastik parabolik tənliklərdir*.

Əd.: [1] Р о з о в с к и й Б. Л., Эволюционные стохастические системы, M., 1983.

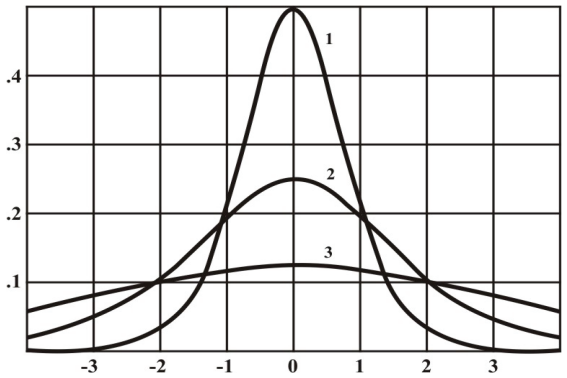
LOGİSTİK PAYLANMA « логистическое распределение; logistic distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = 1/4\ \beta\ \mathrm{ch}^2\,(x-\alpha)/2\beta$$

düsturu ilə verilən (şəkil), $(-\infty, \infty)$ -da topalanmış, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, burada α, β – parametrlərdir, $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$. L. p.-nın paylanma funksiyası

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\{(x-\alpha)/\beta\}}$$

özünün riyazi gözləməsi $x = \alpha$ -ya nəzərən simmetrikdir; dispersiyası $\pi^2\beta^2/3$ -ə bərabərdir, xarakteristik funksiyası isə $f(t) = e^{i\alpha t}\,\pi\beta t/\mathrm{sh}(\pi\beta t)$ düsturu ilə ifadə olunur.



$\alpha = 0$ və (1) $\beta = 0{,}5$; (2) $\beta = 1$; (3) $\beta = 2$ olduqda loqistik paylanmanın sıxlıq funksiyaları.

Biologiyada, iqtisadiyyatda, sosiologiyada və s. L. p.-nı tətbiq etmək məqsədilə çoxsaylı əsaslandırılmamış cəhdlər edilmişdir. L. p. normal paylanmadan az fərqlənir, bəzi hallarda ondan istifadə daha məqsədəuyğundur və tibbi – bioloji obyektlərin statistik araşdırılmasında ondan istifadə olunur.

L. p.-nın modelləşdirilməsində onun müntəzəm paylanma ilə aşağıdakı əlaqəsindən istifadə olunur: əgər η $[0,1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\xi = \alpha + \beta \ln\eta/(1-\eta)$ təsadüfi kəmiyyəti α və β parametrlərli L. p. qanunu ilə paylanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

LOKAL BƏRPA TEOREMİ « локальная теорема восстановления; local renewal theorem » – bax, *Bərpa teoremi*.

LOKAL BİRCİNS TƏSADÜFİ MEYDAN « локально однородное случайное поле; locally homogeneous random field » – bax, *Təsadüfi meydan* bircins artımlarlı.

LOKAL BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı **« локально однородный случайный процесс** с независимыми приращениями; **locally homogeneous random process with** independent increments **»** – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

LOKAL ERQODİK TEOREM « локальная эргодическая теорема; local ergodic theorem » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təsir edən $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ ölçülən axınının trayektoriyalarının lokal dəyişilmələrini xarakterizə edən aşağıdakı kimi ifadə olunan hökmdür: ixtiyari $f \in L_p^1(\Omega)$ funksiyası üçün bütün $\omega \in \Omega$ üçün $\mathbf{P}$ – sanki

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} f(T^t\omega)\,dt = f(\omega)$$

bərabərliyi doğrudur. L. e. t. ona ekvivalent digər formada ifadə olunur: əgər ζ_t başlanğıc birinci momenti sonlu, dar mənada stasionar, ölçülən təsadüfi prosesdirsə,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\varepsilon} \zeta_t\,dt = \zeta_0$$

bərabərliyi sanki yəqin ödənilir. Bu teoremi N. Viner [1]-də isbat etmişdir. Bu teorem, digər *erqodik teoremlər* kimi σ – sonlu ölçünü saxlayan çevirmələr qrupunun geniş sinfi üçün ümumiləşdirilir.

Əd.: [1] Wiener N., «Duke Math. J.», 1939, v. 5, № 1, p. 1–18; [2] Petersen K., Ergodic theory, Camb., 1983.

LOKAL ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « локально наиболее мощный критерий; locally most powerful test » – elə φ_0 *statistik kriterisidir* ki, onunla eyni səviyyəli hər bir φ kriterisi üçün onun elə ilkin hipotez ətrafı vardır ki, burada φ_0 kriterisinin güc funksiyası φ kriterisinin güc funksiyasından kiçik deyildir.

Daha dəqiq, $d(\theta)$ – alternativ θ və ilkin H hipotezi arasında fərqlənmə ölçüsü, $\beta(\varphi, \theta)$ isə φ kriterisinin güc funksiyası olsun. Əgər α səviyyəli hər bir $\varphi \in \Phi$ kriterisi üçün elə Δ tapılarsa ki, $0 < d(\theta) < \Delta$ şərtini ödəyən bütün θ-lar üçün $\beta(\varphi_\theta, \theta) \geq \beta(\varphi, \theta)$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda α səviyyəli φ_0 kriterisi Φ kriterilər sinfində lokal ən güclü kriteri adlanır. L. ə. g. k. ranq kriteriləri sinfində lokal ən güclü ranq kriterisi, meylsiz kriterilər sinfində lokal ən güclü meylsiz kriteri və s. adlanır.

θ həqiqi və $d(\theta) = \inf\limits_{\theta_0 \in H} |\theta - \theta_0|$ olduğu hal üçün aşağıda misallar verilmişdir.

Misal 1. Əgər hər bir kriterinin güc funksiyası θ_0 nöqtəsində kəsilməz differensiallanandırsa, onda $K: \theta > \theta_0$ alternativ hipotezinə qarşı $H: \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması məsələsi üçün α səviyyəli bütün kriterilər sinfində L. ə. g. k. vardır və bu kriteri onunla təyin olunur ki, o, $\left.\frac{d}{d\theta}\beta(\varphi, \theta)\right|_{\theta_0}$ törəməsini maksimallaşdırır. Xüsusi halda, əgər

$$\beta(\varphi, \theta) = \int \varphi(x)\, p_\theta(x)\, d\mu(x)$$

olarsa və ixtiyari φ kritik funksiyası üçün θ üzrə inteqral işarəsi altında differensiallama mümkün olarsa, onda

$$\left.\frac{d}{d\theta}\beta(\varphi, \theta)\right|_{\theta_0} = \int \varphi(x) \left.\frac{\partial}{\partial\theta} \log p_\theta(x)\right|_{\theta_0} p_{\theta_0}(x)\, d\mu(x)$$

bərabərliyi doğrudur və Neyman – Pirson lemmasına əsasən bu bərabərliyin maksimumu $\beta(\varphi, \theta_0) = \alpha$ şərtində təmin olunur, bu şərtlə ki, $\varphi(x)$ μ ölçüsü üzrə $\left\{ x: \left.\frac{\partial}{\partial\theta} \log p_\theta(x)\right|_{\theta_0} \geq k \right\}$ şəklində çoxluğun sanki yəqin indikatoru olsun.

Misal 2. Əgər hər bir kriterinin güc funksiyası θ_0 nöqtəsində iki dəfə kəsilməz differensiallanandırsa, onda $K: \theta \neq \theta_0$ alternativinə qarşı $H: \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün α səviyyəli elə lokal ən güclü meylsiz kriteri vardır ki, bu kriteri H üçün α səviyyəli bütün meylsiz kriterilər arasında $\left.\frac{d^2}{d\theta^2}\beta(\varphi, \theta)\right|_{\theta_0}$ törəməsini maksimallaşdırır.

Əgər

$$\beta(\varphi, \theta) = \int \varphi(x)\, p_\theta(x)\, d\mu(x)$$

olarsa, onda inteqral işarəsi altında θ üzrə ikiqat differensiallama mümkün olduqda lokal ən güclü meylsiz kriterinin kritik oblastı

$$\left\{ x: \left.\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\, p_\theta(x)\right|_{\theta_0} \geq k_1 \left.\frac{\partial}{\partial\theta}\, p_\theta(x)\right|_{\theta_0} + k_2 p_{\theta_0}(x) \right\}$$

çoxluğu şəklində ifadə olunur.

Misal 3. $f(y)$ – Lebeq ölçüsü üzrə $\mathbb{R}^1$-də mütləq kəsilməz sıxlıq funksiyası və $\int |f'(y)|\,dy < \infty$ olsun. Uyğun çoxölçülü

sıxlıq funksiyası $\prod_{i=1}^{m} f(x_i-\theta)\prod_{i=m+1}^{m+n} f(x_i)$, $\theta \geq 0$ olan $X_1,...,X_m$, $X_{m+1},...,X_{m+n}$ seçimi müşahidə olunur. $K: \theta > 0$ alternativinə qarşı $H: \theta = 0$ hipotezinin yoxlanılması məsələsinə baxılır. $a_{m+n}(i, f)$, $1 \leq i \leq m+n$, – f sıxlıq funksiyasına uyğun nişanlar (işarələr), R_i, – X_i-lərin ranqları, $1 \leq i \leq m+n$ olsun. Onda kritik oblastı

$$\sum_{i=1}^{m} a_{m+n}(R_i, f) \geq k$$

olan kriteri alternativ K hipotezinə qarşı H hipotezinin yoxlanılması üçün lokal ən güclü ranq kriterisidir.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] К о к с Д., Х и н к л и Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978, [3] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [4] N e y m a n J., «Bull. Soc. math. France», 1935, v. 63, p. 246–66; [5] L e h m a n n E., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, № 3, p. 399–419.

LOKAL İNTEQRALLANAN PROSES « локально интегрируемый процесс; locally integrable process » – bax, *Kompensator.*

LOKAL İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDAN « локально изотропное случайное поле; locally isotropic random field » – bax, *Təsadüfi meydan* i z o t r o p a r t ı m l a r l ı.

LOKAL LİMİT TEOREMLƏRİ « локальные предельные теоремы; local limit theorems » – paylanmaların sıxlıq funksiyaları üçün *limit teoremləridir*, yəni paylanmaların sıxlıq funksiyalarının limit sıxlıq funksiyasına yığılmasını (əgər bunlar varsa) müəyyənləşdirən teoremlərdir və ya klassik variantda şəbəkəvari paylanmalar üçün lokal teoremlərdir.

$\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, ...$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan cırlaşmayan, yalnız $b + kh$ ($h > 0$, b – sabitlərdir, $k \in \mathbb{Z}$) kimi qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun (yəni ξ_i h addımlı şəbəkəvari paylanmaya malikdir). L. l. t. ş ə b ə k ə v a r i p a y l a n m a l a r üçün

$$\mathbf{P}_n(k) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i = nb + kh\right)$$

ehtimalının asimptotikasını müəyyənləşdirir.

$\mathbf{M}\xi_i = a$, $\mathbf{D}\xi_i = \sigma^2 > 0$ olsun.

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\mathbf{P}_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{nb+kh-na}{\sigma\sqrt{n}}\right]^2\right\} \to 0$$

münasibətinin $n \to \infty$ olduqda k-ya görə müntəzəm ödənilməsi üçün h addımının maksimal olması zəruri və kafidir (Q n e d e n k o t e o r e m i; bax, [1]).

Burada L. l. t. ən sadə hal üçün – eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər və normal limit qanunu paylanması üçün verilmişdir. Bu teoremin xüsusi halları, yalnız iki qiymət alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün hələ A. Muavr (A. Moivre, 1730) və P. Laplasa (P. Laplace, 1812) məlum idi.

$\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, ...$ – ümumi paylanma funksiyası $F(x)$, riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\xi_i = a$ və dispersiyası $\mathbf{D}\xi_i = \sigma^2 > 0$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və $S_n = (1/\sigma\sqrt{n})\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)$ olsun. Paylanma sıxlıqları üçün L. l. t. S_n təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası $p_n(x)$-in asimptotik yaxınlaşmasını ifadə edir. $n \to \infty$ olduqda

$$p_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

münasibətinin x-ə görə müntəzəm ödənilməsi üçün elə bir k qiymətinin varlığı zəruri və kafidir ki, $p_k(x)$-in məhdud olmasını təmin etsin (B. V. Qnedenko, bax, [2]).

Hal-hazırda normal qanuna yığılma deyil, yığılma sürəti də öyrənilmişdir və asimptotik ayrılış mənasında L. l. t.-nin dəqiqləşdirmələri alınmışdır (bax, [4]). Limit paylanması kimi ixtiyari dayanıqlı paylanmalara baxılır (bax, [3]). L. l. t. müxtəlif paylanmalı təsadüfi kəmiyyətlər və vektorlar üçün də araşdırılmışdır (bax, [2], [4]).

Bax, *Təsadüfi dolaşma* q r u p d a; l o k a l t e o r e m l ə r.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 3, с. 187–94; [2] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] С т а т у л я в и ч у с В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 4, с. 645–59.

LOKAL MARTİNQAL « локальный мартингал; local martingale » – elə *təsadüfi prosesdir* ki, onun Markov anlarının elə azalmayan ardıcıllığı tapılar ki, «dayanan» proseslər müntəzəm inteqrallanan *martinqallar* olur. $\zeta = \{\zeta_t\}_{t\geq 0}$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı, $\mathcal{A}_t$ σ – cəbrlərinin sağdan kəsilməz $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ ailəsi (axını) ilə uzlaşmış təsadüfi proses olsun. Əgər $\mathbf{M}|\zeta_t| < \infty$ və $\mathbf{M}|\zeta_t | \mathcal{A}_s| = M_s$, $s \leq t$ **P** – sanki yəqin olarsa, ζ prosesi m a r t i n q a l adlanır. $\{\zeta_t\}_{t\geq 0}$ ailəsinin müntəzəm inteqrallananlığı şərtində, yəni

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{t\geq 0} \mathbf{M}|\zeta_t|\mathbf{I}(|M_t| > c) = 0$$

şərti ödənildiyi halda ζ martinqalı m ü n t ə z ə m i n t e q r a l l a n a n m a r t i n q a l adlanır. Markov anları $(T_n)_{n\geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin azalmayan ardıcıllığı üçün $\lim_n T_n = \infty$ (**P** – sanki yəqin) olması şərtilə, hər bir $n \geq 1$ qiymətində $M_{T_n} = (M_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ «dayanan» prosesi müntəzəm inteqrallanan martinqal olarsa, M prosesi l o k a l m a r t i n q a l adlanır. N – ixtiyari, $\mathbb{A}$ ilə uzlaşmış, kəsilməz trayektoriyalarlı məhdud martinqal olarsa, ixtiyari N üçün MN prosesi L. m. olarsa, M L. m. s ı r f k ə s i l ə n martinqal adlanır. Trayektoriyaları lokal inteqrallanan variasiyalı hər bir L. m. sırf kəsilən martinqaldır. M lokal martinqalının iki cür ayrılışı vardır: $M = M^1 + M^2$ və $M = M^c + M^d$. Birinci ayrılışda

M^1 – lokal inteqrallanan variasiyalı trayektoriyalarlı L. m., M^2 – lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır. İkinci ayrılışda M^c – kəsilməz trayektoriyalarlı (kəsilməz martinqal komponentli) L. m. və $M_0^c = 0$ – lokal kvadratik inteqrallanan martinqal, M^d – sırf kəsilən L. m.-dır.

L. m. M ilə, adətən, artan təsadüfi proseslər əlaqələndirilir, yəni aşağıdakı kimi proseslər:

$$M^* = \left(\sup_{s \le t} |M_s| \right)_{t \ge 0}, \quad (\Delta M)^* = \left(\sup_{s \le t} |\Delta M_s| \right)_{t \ge 0},$$

$$\sum (\Delta M)^2 = \left(\sum_{s \le t} (\Delta M_s)^2 \right)_{t \ge 0},$$

burada $\Delta M_s = M_s - \lim\limits_{u \uparrow s} M_u$. Bu halda M^* və $(\Delta M)^*$ prosesləri lokal inteqrallanan, $\sum (\Delta M)^2$ -nın isə $\sum\limits_{s \le t} (\Delta M_s)^2 < \infty$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin), $t > 0$ xassəsinə malik proses olduğu fərz olunur.

L. m. M üçün $[M, M] = ([M, M]_t)_{t \ge 0}$ kvadratik variasiyası təyin olunur, bu halda $[M, M]_t = \left\langle M^c \right\rangle_t + \sum\limits_{s \le t} (\Delta M_s)^2$; $\left\langle M^c \right\rangle$ – lokal kvadratik inteqrallanan M^c martinqalının ($M = M^c + M^d$ ayrılışındakı) kvadratik xarakteristikasıdır.

Ədd.: [1] I t o K., W a t a n a b e S., «Ann. Inst. Fourier», 1965, v. 15, p. 13–30; [2] J a c o d J., «Lect. Notes Math.», 1979, v. 714; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

LOKAL MARTİNQAL; i n t e q r a l i f a d ə **« локальный мартингал; интегральное представление; local martingale;** i n t e g r a l r e p r e s e n t a t i o n o f **».** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \ge 0}, \mathbf{P})$ – stoxastik bazis, $\zeta = \{\zeta_t\}_{t \ge 0}$ – ayrılışında kəsilməz martinqal komponenti $\zeta^c = \{\zeta_t^c\}_{t \ge 0}$ olan, sıçrayışlar ölçüsü $\mu = \mu(dt, dx)$ kimi ifadə olunan və öngörül xarakteristikalarının tripleti $T = (B, C, \upsilon)$ üçlüyü olan, $(\mathbb{A}, \mathbf{P})$ -yə nəzərən semimartinqal olsun. Əgər kəsilməz ζ^s lokal martinqalı və $\mu - \upsilon$ ölçüsü üzrə stoxastik inteqralların varlığı şərtlərini ödəyən elə $\mathcal{P}$ – ölçülən (öngörül) $h = h(\omega, t)$ funksiyası və $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – ölçülən [$\mathcal{B}(\mathbb{R})$, – $\mathbb{R}$ -də Borel σ – cəbridir] $H = H(\omega, t, x)$ funksiyası varsa ki, $(\mathbb{A}, \mathbf{P})$ -yə nəzərən $M = (M_t)_{t \ge 0}$ lokal martinqalı M_0 və stoxastik inteqrallarla

$$M_t = M_0 + h\zeta_t^c + H^*(\mu - \upsilon)_t \qquad (*)$$

cəmi şəklində ifadə olunsun, onda sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı $M = (M_t)_{t \ge 0}$ *lokal martinqalı* üçün (*) inteqral martinqal ifadəsi mümkündür. M üçün inteqral ifadəsinin varlığı şərtləri

$$\mathcal{S}_{\mathbf{P}} = \{\widetilde{\mathbf{P}} : \widetilde{\mathbf{P}} \ll \widetilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P},\ \widetilde{T} \overset{\mathbf{P}}{=} T\}$$

ehtimal ölçüləri ailəsi ilə bağlıdır və bu ailə onunla səciyyəvidir ki, $\mathcal{S}_{\mathbf{P}}$ -dən olan hər bir $\widetilde{\mathbf{P}}$ ölçüsü $\mathbf{P}$ -yə nəzərən mütləq kəsilməzdir, onun $\mathcal{A}_0$ -a daralması $\mathbf{P}$ -nin $\mathcal{A}_0$ -a daralması ilə üst-üstə düşür və ζ -in $(\mathbb{A}, \mathbf{P})$ – semimartinqalının tripleti T isə T tripletli $\mathbf{P}$ – fərqlənməz tripletdir ($\{\widetilde{\mathbf{P}} << \mathbf{P}$ ölçüsünün isə mütləq kəsilməz əvəz olunmasında ξ prosesinin semimartinqallıq xassəsi olduğu kimi qalır).

Sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalarlı ixtiyari M lokal martinqalının [$(\mathbb{A}, \mathbf{P})$ -yə nəzərən] (*) inteqralının varlığı $\mathcal{S}_{\mathbf{P}} = \{\mathbf{P}\}$ şərtinə, yəni $\mathcal{S}_{\mathbf{P}}$ -nin bir nöqtədən ibarət olması şərtinə ekvivalentdir. Buna ən sadə misal elə $\mathbf{P}$ ölçüsüdür ki, ζ semimartinqalı bu ölçüyə nəzərən asılı olmayan artımlarlı prosesdir.

Ədd.: [1] J a c o b J., «Proc. of Symp. in Pure Math.», 1977, v. 31, p. 37–53; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

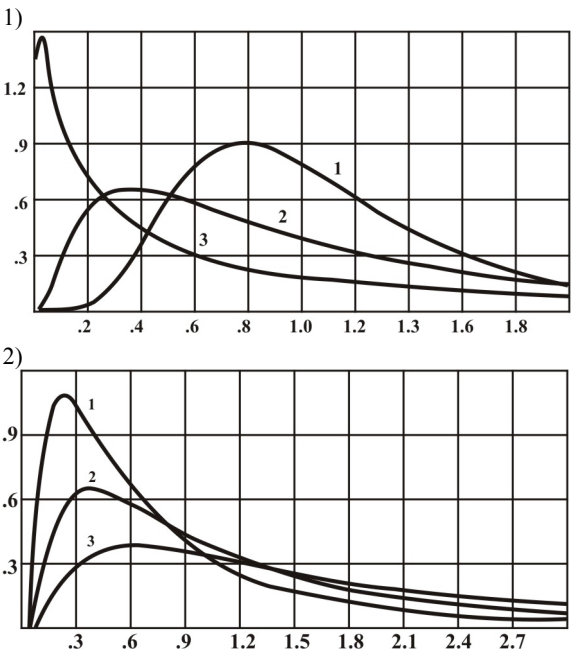
LOKAL SONLU ÖLÇÜ « локально конечная мера; locally finite measure » – bax, *Radon ölçüsü.*

LOQARİFMİK DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİYASI « логарифмическая функция правдоподобия; logarithmic likelihood function / log–likelihood » – bax, *Doğruyaoxşarlıq funksiyası.*

LOQARİFMİK NORMAL PAYLANMA « логарифмически нормальное распределение; log–normal distribution », l o q n o r m a l p a y l a n m a – $(0, \infty)$ -da topalanmış, paylanmasının sıxlıq funksiyası –

$$p(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - a)^2 / 2\sigma^2} \qquad (*)$$

düsturu ilə verilən, kəsilməz ehtimal paylanmasıdır (şəkil),



1) $a = 0$ və (1) $\sigma = 0{,}5$; (2) $\sigma = 1$; (3) $\sigma = 2$ və

2) $\sigma = 1$ və (1) $a = -0{,}5$; (2) $a = 0$; (3) $a = 0{,}5$

olduqda loqarifmik normal paylanmanın sıxlıq funksiyaları

burada $-\infty < a < \infty$, σ – parametrlərdir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin loqarifmi $\ln \xi$ təsadüfi kəmiyyəti a və σ parametrləri normal paylanma qanununa tabedirsə, ξ təsadüfi kəmiyyəti paylanma sıxlığı (*) olan L. n. p. qanununa tabedir. Beləliklə, $a = \mathbf{M} \ln \xi$, $\sigma^2 = \mathbf{D} \ln \xi$. L. n. p. unimodal paylanmadır və müsbət asimmetriyaya malikdir. a və σ^2 parametrlərli L. n. p. qanununa tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri $\mathbf{M}\xi^k = e^{ka + k^2\sigma^2/2}$ düsturu ilə ifadə olunur, riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq $e^{a+\sigma^2/2}$ və $e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ ədədlərinə bərabərdir. Özünün momentləri ilə birqiymətli təyin olunmayan paylanmalardan biri də L. n. p.-dır. L. n. p.-nın xassələri uyğun normal paylanmanın xassələri ilə təyin olunur. L. n. p.-nın mühüm xassəsi: asılı olmayan L. n. p.-ya tabe təsadüfi kəmiyyətlərin hasili də L. n. p. qanununa tabedir. Mərkəzi limit teoreminin analoqu: n sayda asılı olmayan müsbət təsadüfi kəmiyyətlərin hasilinin paylanması bəzi ümumi şərtlərlə $n \to \infty$ olduqda L. n. p.-ya yaxınlaşır. Bəzi sxemlərdə, məs., hissəciklərin bölünməsi modellərində, artım modellərində L. n. p. limit paylanması kimi yaranır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 2, с. 99–101, (в его кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 264–67); [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Aitchison J., Brown J., The lognormal distribution, Camb., 1957.

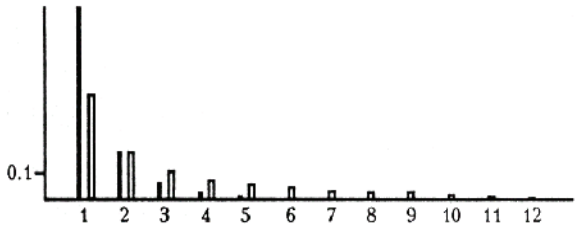
LOQARİFMİK PAYLANMA « логарифмическое распределение; logarithmic series distribution », loqarifmik sıra paylanması, – tam müsbət $k = 1, 2, ...$ qiymətlərini

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = -\frac{1}{\ln(1-q)}\frac{q^k}{k}, \quad 0 < q < 1$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal *paylanmasıdır* (şəkil). L. p.-nın doğuran və xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq,

$$\psi(z) = \frac{\ln(1-qz)}{\ln(1-q)}, \quad f(t) = \frac{\ln(1-qe^{it})}{\ln(1-q)}$$

düsturları ilə verilir.



$q = 0{,}4$ və $q = 0{,}9$ qiymətlərində loqarifmik paylanma

L. p.-nın riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $\alpha q/(1-q)$ və $\alpha q(1+\alpha q)/(1-q)^2$ ifadələrilə təyin olunur, burada $\alpha = -1/\ln(1-q)$.

L. p. ilk dəfə ekologiya məsələlərilə əlaqədar [1]-də daxil olunmuşdur. Müxtəlif növ fərdlərin böyük qruplarının ovlanmasında eyni növ ovlanmış fərdlərin sayı riyazi gözləməsi növdən asılı Puasson paylanması ilə yaxşı təsvir olunur, təsadüfi seçilmiş növ fərdlərin orta qiyməti qamma – paylanma ilə təsvir edilir. Onda aydındır ki, təsadüfi seçilmiş növ ovlanmış fərdlərin sayı *mənfi binomial paylanma* – $\mathbf{P}\{\eta = k\} = (1-q)^r q^k$, $k = 0, 1, ...$ qanunu ilə təsvir olunur, burada $0 < q < 1$, $r > 0$ isə kiçik parametrdir. Heç olmasa bir ədəd fərd ovlanılmış növləri araşdırmaq məqsədəuyğundur, buna görə də, şərti ehtimalla ifadə olunan

$$\mathbf{P}\{\eta = k \mid \eta \geq 1\} = q^k(1-q)^r / [1-(1-q)^r], \quad k = 1, 2, ...$$

paylanmadan istifadə olunmalıdır. $r \to \infty$ olduqda bu paylanma L. p.-ya yığılır.

Təsadüfi sayda asılı olmayan $\xi_1, ..., \xi_\nu$ təsadüfi kəmiyyətləri L. p.-ya malikdirlər və q bu paylanmanın parametri, υ isə λ parametrli Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. Onda $\xi_1, ..., \xi_\nu$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $p = 1-q$, $r = \lambda/\ln p$ parametrlərli mənfi binomial paylanma qanunu ilə paylanır.

Əd.: [1] Fisher R., Corbet A., Williams C., «J. Animal Ecology», 1943, v. 12, p. 42–57; [2] Quenouille M., «Biometrics», 1949, v. 5, p. 162–64; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [4] Moran P., An introducetion to probability theory, Oxf., 1968.

LOQNORMAL PAYLANMA « логнормальное распределение; lognormal distribution » – *loqarifmik normal paylanmadır*.

LYAPUNOV BƏRABƏRSİZLİYİ « Ляпунова неравенство; Lyapunov's inequality » – ξ təsadüfi kəmiyyətinin mütləq momentləri arasında bərabərsizlikdir: $0 < s < t$ olduqda

$$(\mathbf{M}|\xi|^s)^{1/s} \leq (\mathbf{M}(\xi)^t)^{1/t}.$$

Xüsusi halda, $s = 1$, $t = 2$ olduqda $(\mathbf{M}|\xi|)^2 \leq \mathbf{M}\xi^2$ L. b. – *Yensen bərabərsizliyinin* xüsusi halıdır.

Əd.: [1] Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 1, М., 1954.

LYAPUNOV KƏSRİ « Ляпунова дробь; Lyapunov fraction / ratio » – bax, *Lyapunov teoremi*.

LYAPUNOV STOXASTİK FUNKSİYASI « Ляпунова стохастическая функция; Lyapunov stochastic function » – elə mənfi olmayan $V(t, x)$ funksiyasıdır ki, $(V(t, x), \mathcal{A}_t)$ cütü *supermartinqaldır*, burada $\zeta(t)$ – hər hansı təsadüfi proses, $\mathcal{A}_t$, – $s \leq t$ olduqda $\{\zeta(s) \leq A\}$ hadisələrinin doğurduğu σ – cəbrdir. Əgər $\zeta(t)$ diskret zamanlı Markov prosesi olarsa, onda L. s. f. elə funksiyadır ki, bu funksiya üçün

$$LV(t, x) = \mathbf{M}\{V(t+1, \zeta(t+1)) \mid \zeta(t) = x\} - V(t, x)$$

ifadəsi müsbət deyildir. Kəsilməz zamanlı Markov prosesləri üçün L operatoru uyğun prosesin infinitezimal operatorudur və buna görə də, $LV(t, x) \leq 0$ şərtinin konkret hallarda yoxlanılması çətinlik törətmir. L. s. f. adi differensial tənlik üçün klassik Lyapunov funksiyasının (proses determinə olunduğu halda L. s. f. bu funksiyaya çevrilir) ümumiləşməsidir. Əksər hallarda supermartinqalı asanlıqla ifadə etməyə imkan verən funksiyalara da L. s. f. deyilir.

Təsadüfi proseslərin trayektoriyalarının xüsusiyyətlərini keyfiyyətlə araşdırmaq üçün iki tipik kriteri L. s. f. terminlərində aşağıda verilir.

1. Əgər elə $V(t, x) \geq 0$ L. s. f. və elə $c \geq 0$ varsa ki, $R \to \infty$ olduqda

$$\inf_{t \geq 0, |x| > R} V(t, x) \to \infty, \quad L\,V(t, x) \leq cV(t, x)$$

münasibətləri ödənilsin, onda $\mathbb{R}^k$-da verilən Markov prosesi sonlu müddətə ∞-a sanki yəqin çatmır.

2. Əgər elə Lyapunov mənada müsbət müəyyən elə L. s. f. varsa ki, bu funksiya üçün $x = 0$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında $L\,V(t, x) \leq 0$ şərti ödənilsin, onda Markov prosesinin $\zeta(t) \equiv 0$ trayektoriyası ehtimala görə güclü mənada dayanıqlıdır (bax, [1] – [3]).

Əd.: [1] К у ш н е р Г. Д ж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969; [2] Х а с ь м и н с к и й Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [3] К а л а ш н и к о в В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978.

LYAPUNOV ŞƏRTİ « Ляпунова условие; Lyapunov condition » – bax, *Lyapunov teoremi*.

LYAPUNOV TEOREMİ « Ляпунова теорема; Lyapunov theorem » – *Muavr – Laplas teoreminin* ümumiləşdirilməsində ilk mühüm irəliləyişdir. L. t.-nin müasir ifadəsi aşağıdakı kimidir: $\zeta_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $n \geq 1$ – sonlu riyazi gözləmələri $a_k = \mathbf{M}\xi_k$, r tərtib mərkəzi mütləq momentləri $\beta_k(r) = \mathbf{M}\left|\xi_k - a_k\right|^r$, $2 < r \leq 3$ olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin ardıcıllığı olsun. Əgər $n \to \infty$ olduqda

$$\varepsilon_n(r) = B_n^{-r}\,(\beta_1(r) + ... + \beta_n(r)) \to 0$$

– L y a p u n o v ş ə r t i ödənilərsə, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\Delta = \rho(F_n, \Phi) = \sup_x \left|F_n(x) - \Phi(x)\right| \to 0$$

münasibəti doğrudur, burada $B_n^2 = \mathbf{D}\xi_1 + ... + \mathbf{D}\xi_n$, F_n, –

$$B_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

cəminin paylanma funksiyasıdır və $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\,dt$.

Bu teorem ehtimal nəzəriyyəsinin yeni – *xarakteristik funksiyalar metodu* ilə isbat olunmuşdur (bax, [2], [3]). Problemi P. L. Çebışev qoymuşdur və onun mümkün həlli yolunu *momentlər metodu* ilə aparılmasını da o, [1]-də təklif etmişdir. Bu metodla nəticə A. A. Markov tərəfindən [4]-də təkrar alınmışdır. [2] və [3]-də F_n-in Φ-ə müntəzəm yığılmasından başqa, bir neçə sərbəst parametrlərdən asılı yığılma sürəti üçün qiymətlər tapılmışdır. Bunlardan yığılma sürətinin qiymətləri üçün sadələşdirilmiş variantlar alınmışdır (bax, [5]): məs.,

$$\Delta_n \leq \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{M}{3-r}\,\exp\left(\dfrac{4}{r-2}\right)\varepsilon_n(r), & \text{əgər } 2 < r < 3, \\ \mathbf{M}\varepsilon_n(r)\left|\log \varepsilon_n(r)\right|, & \text{əgər } r = 3 \text{ olarsa,} \end{array} \right\} \qquad (*)$$

burada M – ədədi sabitdir. A. Berri [6], K. Esseen [7]-də ($r = 3$ halında) və M. Kas [8]-də bu qiymətləri dəqiqləşdirmişlər:

$$\Delta_n \leq C\varepsilon_n(r), 2 < r \leq 3,$$

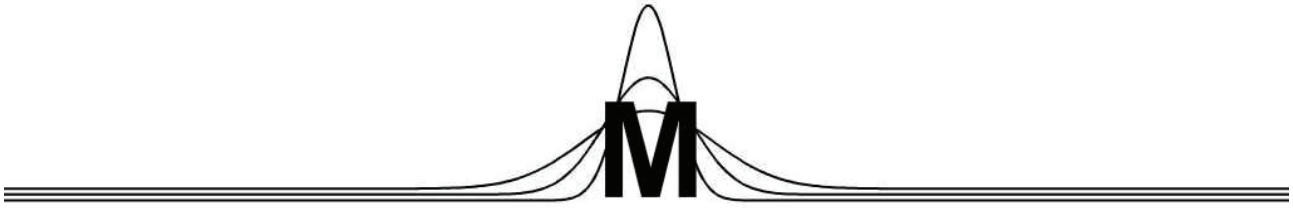
burada C – ədədi sabitdir. Hal-hazırda məlumdur ki, $C \geq 0{,}4097...$ (K. Esseen, [7]) və $C \leq 0{,}7915$ (İ. S. Şiqanov, [8]). Əgər $\varepsilon_n(3) < \infty$ olarsa, $r = 3$ halına üstünlük verilməsi ənənəvi hala çevrilmişdir, bu da ξ_k təsadüfi kəmiyyətlərinin yalnız eyni qanunla paylanmasına əsaslandırılmışdır (bunu A. M. Lyapunov [2]-də göstərmişdir, o, $\varepsilon_n(5/2) = o(\varepsilon_n(3))$ olduğu hal üçün misal qurmuşdur, bax, [5]). L. t. əslinə qalanda, formal olaraq asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artan cəmləri sxemilə bağlı olduğuna baxmayaraq (*) qiymətlərindən aydındır ki, bu teorem *seriyalar sxemi halında* da doğrudur.

L. t.-nin sonrakı inkişafı haqqında *Mərkəzi limit teoremi* məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Ч е б ы ш е в П. Л., «Зап. имп. Акад. наук», 1887, т. 55, № 6, Приложение; [2] L i a p o u n o f f A., «Изв. имп. Акад. наук», 5 серия, 1900, т. 13, № 4, с. 359–86; [3] L i a p o u n o f f A., «Зап. имп. Акад. наук», 8 серия, 1901, т. 12, № 5, с. 1–24; [4] М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [5] З о л о т а р е в В. М., «Труды матем. ин-та АН СССР», 1988, т. 182, с. 24–47; [6] B e r r y A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 122–36; [7] E s s e e n C. G., «Acta. Math.», 1945, v. 77, p. 1–125; [8] K a t z M., «Acta. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 3, p. 1107–08; [9] E s s e e n C. G., «Skand. Aktuarientidskr», 1956, v. 39, № 3–4, p. 160–70; [10] Ш и г а н о в И. С., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, Тр. семинара, М., 1982, с. 109–15.

LYUSİAN « люсиан; lusian », B e r n u l l i v e k t o r u, – elə *təsadüfi vektordur* ki, onun koordinatları asılı olmayan *Bernulli sınaqlarının* nəticələridir (ümumiyyətlə, müxtəlif paylanmaya malik), yəni 0 və 1 qiymətlərini alan asılı olmayan $X_1, X_2, ..., X_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin sonlu ardıcıllığıdır, belə ki, $\mathbf{P}\{X_i = 1\}$ ədədləri fərqlənə bilərlər. L. anlayışı (bax, [1]) qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin *statistikasında* geniş istifadə olunur. Təsadüfi tolerantlıqlar (refleksiv və simmetrik binar münasibətlər), asılı olmayan elementlərli *sonlu təsadüfi çoxluqlar*, asılı olmayan cüt müqayisələr ardıcıllığı L.-a gətirir. L.-dan məhsulun keyfiyyətinin idarəolunması üçün statistik idarəetmə metodlarında, tibbi, sosioloji, ekspert, psixoloji məlumatların yenidən işlənilməsində istifadə olunur.

Əd.: [1] О р л о в А. И., в кн.: Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа, М., 1980, с. 287–308; [2] О р л о в А. И., в кн.: Экспертные оценки в задачах управления, М., 1982, с. 58–66; [3] Р ы д а н о в а Г. В., в кн.: Случайный анализ, М., 1987, с. 68–81; [4] Р ы д а н о в а Г. В., «Вестн. МГУ. Вычисл. матем. в киберн.», 1987, № 2, с. 54–58.



MAHALANOBİS METRİKASI « Махаланобиса метрика; Mahalanobis metric » – bax, *Mahalanobis məsafəsi.*

MAHALANOBİS MƏSAFƏSİ « Махаланобиса расстояние; Mahalanobis distance » – iki *paylanma* arasında məsafəni xarakterizə edən kəmiyyətdir. μ_1, μ_2 – paylanmaların uyğun riyazi gözləmə vektorları, Ξ – hər iki paylanma üçün eyni fərz olunan kovariasion matris olarsa, M. m.

$$D^2 = (\mu_1 - \mu_2)^{\mathsf{T}} \Xi^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$$

düsturu ilə ifadə olunur. P. Mahalanobis tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur.

Əgər paylanmalar normal qanuna tabe olarsa, *xətti diskriminant funksiyadan* istifadə olunduqda, M. m. *səhv təsnifat ehtimalı* ilə funksional əlaqəlidir. M. m.-nin seçimi qiyməti $\hat{D}^2$ riyazi gözləmə vektorları və kovariasion qiymətlərin statistik qiymətlərinin əvəz olunması ilə alınır. Bu statistik qiymət vuruq dəqiqliyi ilə Hotellinq statistikası ilə üst-üstə düşür. Əgər seçimlər normal paylanmalardan aparılmışdırsa, M. m.-nin meylsiz statistik qiyməti

$$\hat{\hat{D}}^2 = \frac{n_1 + n_2 - p - 2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\hat{D}^2 - \frac{p}{n_1} - \frac{p}{n_2} \right)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada n_i, – i-ci paylanmanın seçiminin həcmidir, $i = 1, 2$, p – fəzanın dim. – ölçüsüdür. Kovariasiyalar matrisləri eyni olmadığı halda, bəzən, M. m.-nin aşağıdakı düsturla ifadə olunan analoqundan istifadə olunur:

$$D^2 = (\mu_2 - \mu_1)^{\mathsf{T}} (\alpha \Xi_1 + \beta \Xi_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_2),$$

α, β – bəzi mənfi olmayan konstantlardır.

Çoxölçülü statistik analizdə, məs., *klaster – analizdə* də Mahalanobis metrikası istifadə olunur və bu metrika iki X və Y vektorları arasında M. m. tipli məsafəyə əsaslanır və o, aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$d^2(X, Y) = (X - Y)^{\mathsf{T}} \Xi^{-1} (X - Y),$$

Ξ – hər hansı müsbət müəyyən matrisdir, məs., kovariasiyalar matrisinin statistik qiyməti.

Əd.: [1] Mahalanobis P. C., «Proc. Nat. Inst. Sci. India», 1936, v. 12, p. 49–55; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., M., 1963.

MAHİYYƏTCƏ TAM SİNİF(fi) kriterilərin « существенно полный класс критериев; essential complete class of tests » – bax, *Statistik kriteri; tam sinif.*

MAKSİMAL ADDIM(ı) paylanmanın « максимальный шаг распределения; span of a distribution » – bax, *Şəbəkəvari paylanma*.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ METODU « максимального правдоподобия метод; maximum likelihood method », ən böyük doğruyaoxşarlıq metodu – aparılan müşahidələr nəticəsində alınmış eksperimental məlumatlara əsasən parametrlərin *statistik qiymətlərinin* tapılması üçün ən geniş yayılmış metodlardan biridir.

Araşdırılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $\rho(x; \theta)$-nın hər hansı bir $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^s$ çoxluğunda qiymətlər alan $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ parametrindən asılı olduğu fərz olunur və

$$F(x; \theta) = \mathbf{P}\{\xi < x; \theta\} = \mathbf{P}\{\xi_k < x; \theta\}$$

olduğu qəbul olunur; ξ_k, – k-cı sınaqda $(k = \overline{1,n})$ müşahidə oluna bilən təsadüfi kəmiyyət olub, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylandığı qanunla paylanmışdır. Aparılan sınaqlar asılı olmadığından, $\xi_1, \dots, \xi_n$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ n – ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin n – ölçülü paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta) = p(\xi_1; \theta)\, p(\xi_2; \theta) \cdot \dots \cdot p(\xi_n; \theta) \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Aydındır ki, $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi nöqtəsinin mərkəzi n – ölçülü fəzanın $(x_1, \dots, x_n)$ nöqtəsində, tillərinin isə $dx_1, \dots, dx_n$ olduğu n – ölçülü paralelepipedə məxsus olması hadisəsinin ehtimalının (θ-nın funksiyası kimi) öz maksimumunu θ parametrinin hansı qiymətində alacağı şərti təyin olunduğu halda, θ parametrinin statistik qiymətini hesablamaq olur.

Diskret halda $L(\cdot)$ funksiyası

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta) = p_{i_1}(\theta) \cdot \dots \cdot p_{i_n}(\theta) \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunur.

$L(\theta) = L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta)$ funksiyasına θ parametrinin doğruyaoxşarlıq funksiyası, (1), (2) bərabərliklərinin sol tərəfindəki ehtimalların θ-nın funksiyası kimi maksimum nöqtəsi θ^*-ya M. d. m. ilə hesablanmış maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti deyilir.

Aydındır ki, $L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta)$ funksiyasının maksimum nöqtələrini təyin etmək üçün

$$\frac{\partial L(\xi_1, \dots, \xi_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (3)$$

tənliyini həll etmək lazımdır, çünki $L(\theta)$-nın maksimum nöqtəsində $L'(\theta) = 0$ şərti ödənilməlidir. (3) bərabərliyi doğruyaoxşarlıq tənliyi adlanır. Bu halda θ^* doğruyaoxşarlıq

tənliyinin həlli olacaqdır. Bir çox hallarda $L(\theta)$ unimodal olur və bu halda θ^* doğruyaoxşarlıq tənliyi (3)-ün yeganə həllidir və bu da θ^* statistik qiymətinin

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (4)$$

tənliyinin həllinin olması ilə ekvivalentdir. Doğrudan da, $L(\theta)$ və $\ln L(\theta)$ funksiyalarının maksimum nöqtələrinin üst-üstə düşməsinə əsasən, (3) tənliyi əvəzinə (4) tənliyini həll etmək məqsədəuyğundur. Belə ki,

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{L(\theta)} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}.$$

Naməlum parametrlərin sayı birdən çox olarsa, bu parametrlərin statistik qiymətlərini M. d. m. ilə təyin etmək üçün aşağıdakı tənliklər sistemini həll etmək lazımdır:

$$\frac{\partial L(\xi_1, ..., \xi_n; \theta_1, ..., \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \qquad j = \overline{1,k}.$$

ξ diskret təsadüfi kəmiyyət olsun. Onun naməlum θ parametrindən asılı paylanma qanunu aşağıdakı kimi verilir:

$$\mathbf{P}\{\xi = x_k\} = p_k(\theta), \quad k = \overline{1,n}; \quad x_1 < x_2 < ... < x_n. \qquad (5)$$

Aydındır ki, bu halda doğruyaoxşarlıq funksiyası

$$L(\xi_1,...,\xi_n;\theta) = \prod_{k=1}^{n} p_k(\theta) \qquad (6)$$

düsturu ilə təyin olunacaqdır.

(3) tənliyini həll etdikdə $\theta = \text{const}$ tipli bütün köklər nəzərə alınmamalı, lakin tənliyin həlli yalnız $\xi_1, ..., \xi_n$ seçimi qiymətlərindən asılı kök sayılmalıdır. Doğruyaoxşarlıq tənliyinin hər bir həlli θ üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymət olur.

Paylanma qanunlarının geniş bir sinfi üçün M. d. m. ilə təyin olunan parametrlərin staitistik qiymətləri tutarlı statistik qiymətlər olur və bu statistik qiymətlər asimptotik olaraq normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olub, qiymətləndirilən parametrin digər statistik qiymətləri ilə müqayisədə ən kiçik dispersiyaya malik olur.

M. d. m. ilə təyin olunmuş statistik qiymətlər üçün səciyyəvi mühüm xüsusiyyətlər aşağıdakılardır:

1) doğruyaoxşarlıq tənliyinin həlli vardır və bu həll θ parametrinin tutarlı statistik qiymətidir;

2) doğruyaoxşarlıq tənliyinin kökü θ parametri üçün asimptotik effektiv statistik qiymətdir;

3) doğruyaoxşarlıq tənliyinin kökü asimptotik normal limit paylanması ilə paylanmışdır, yəni $n \to \infty$ olduqda təyin edilmiş statistik qiymət uyğun normallaşdırılmadan sonra Qauss paylanması ilə paylanır;

4) əgər θ parametrinin effektiv statistik qiyməti vardırsa, doğruyaoxşarlıq tənliyinin bu effektiv qiymət ilə üst-üstə düşən yeganə kökü vardır.

M. d. m. ilə təyin edilmiş statistik qiymət meylsiz statistik qiymət ola bilər.

Misallar.

1) X təsadüfi kəmiyyəti 0 və 1 qiymətlərini uyğun olaraq $1-p$ və p ehtimalları ilə alır, $0 < p < 1$. Bu halda hər hansı bir n həcmli seçimdə m sayda 1, $n-m$ sayda 0-lar olacaqdır.

Onda doğruyaoxşarlıq tənliyi

$$L(X_1, ..., X_n; p) = p^m(1-p)^{n-m}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və bu halda (4) düsturuna analoji aşağıdakı düstur alınır:

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{m}{p} - \frac{n-m}{1-p} = 0.$$

Bu tənlikdən isə onun yeganə olan həllinin

$$p^*(x_1, ..., x_n) = \frac{m}{n}$$

olduğu alınır.

Beləliklə, m/n statistikası maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir; bu qiymət meylsiz statistik qiymətdir, çünki $\mathbf{M}\left(\frac{m}{n}\right) = p$. Digər tərəfdən, o həm də tutarlı statistik qiymətdir, çünki $n \to \infty$ olduqda böyük ədədlər qanununa əsasən $\frac{m}{n} \xrightarrow{P} p$ münasibəti ödənilir. Daha sonra bu statistika asimptotik olaraq Qauss paylanması ilə paylanmış statistik qiymətdir.

2. X_k, $k = 1, ..., n$ – paylanmalarının sıxlıq funksiyaları

$$\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^{-1} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $a = \mathbf{M}X_k$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_k$ naməlum parametrlərdir. Bu halda doğruyaoxşarlıq tənliyi

$$L = L(X_1, ..., X_n; a, \sigma^2) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - a)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

və

$$\ln L = -\frac{n}{2}(\ln 2\pi + \ln \sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - a)^2$$

olur. Onda $\widetilde{a}$ və $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ parametrləri üçün

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial a} = \dfrac{1}{\widetilde{\mathbf{D}}_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - \widetilde{a}_n) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\widetilde{\mathbf{D}}_n} + \dfrac{n}{2(\widetilde{\mathbf{D}}_n)^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - \widetilde{a}_n)^2 = 0 \end{cases}$$

tənliklər sistemi alınır.

Birinci tənlikdən

$$\widetilde{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

olduğu aydındır. $\widetilde{a}_n$-in bu qiymətini sistemin ikinci tənliyində yerinə yazdıqda

$$\widetilde{\mathbf{D}}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2$$

və

$$\mathbf{M}\,\widetilde{\mathbf{D}}_n = \frac{n-1}{n}\,\mathbf{D}\,X_k$$

olur. Deməli, $\frac{n}{n-1}\widetilde{\mathbf{D}}_n$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti meylsiz və tutarlı statistik qiymətdir.

Müəyyən ümumi şərtlər daxilində (4) doğruyaoxşarlıq tənliyinin elə həlli vardır ki, o, $n \to \infty$ olduqda ehtimala görə θ parametrinin əsl qiymətinə yığılır. Bu həll θ parametri üçün asimptotik-normal və asimptotik – effektiv statistik qiymətdir.

M. d. m.-nu statistik qiymətlərin tapılması üçün ümumi bir metod kimi R. Fişer $[1]$-də təklif etmişdir. Bu metod daha ümumi halda da istifadə olunur: əgər X müşahidəsinə müvafiq doğruyaoxşarlıq funksiyası $L(\theta)$ olarsa, onda M. d. m. yenə də maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti kimi $\hat{\theta}$ nöqtəsini tövsiyyə edir, burada $L(\theta)$ özünün ən böyük qiymətini alır. Məs., X müşahidəsi $dX(t) = \boldsymbol{\theta} S(t)\,dt + d\boldsymbol{w}$ stoxastik differensial tənliyinin həlli, θ – naməlum parametr, $\boldsymbol{w}$ – Viner prosesi, S – məlum funksiya olarsa, onda doğruyaoxşarlıq funksiyası

$$L(\theta) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}\int_0^1 S(u)\,dX(u) - \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{2}\int_0^1 S^2(u)\,du\right\},$$

maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti isə

$$\hat{\theta} = \int_0^1 S(u)\,dX(u) \Bigg/ \int_0^1 S^2(u)\,du$$

olur.

Bax, *Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi*.

Əd.: [1] F i s c h e r R., «Mess. of Math.», 1912, v. 41, p. 155–60; [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ « максимального правдоподобия принцип; maximum likelihood principle » – bax, *Ən böyük doğruyaoxşarlıq prinsipi.*

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ SPEKTRAL STATİSTİK QİYMƏTİ « максимального правдоподобия спектральная оценка; maximum likelihood spectral estimator » – bircins fəza – zaman $\zeta(t, \mathbf{x})$ təsadüfi meydanının *spektral sıxlığı* $f(\lambda, \mathbf{k})$-nın statistik qiymətidir, burada $\lambda \in [0, 2\pi]$ – normalanmış dairəvi tezlik, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ – dalğa ədədi, $t \in \mathbb{Z}$ – diskret zaman, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – fəza koordinatlarıdır. Əgər meydanın seçimi funksiyası fəzanın $x_1, \ldots, x_M$ nöqtələrində və $1 \le t \le N$ zaman intervalında məlum olarsa, onda M. d. s. s. q.

$$\hat{f}(\lambda, \mathbf{k}) = \left\{\sum_{m,j=1}^{M} \hat{\varphi}_{m,j}(\lambda)\,\exp[\,i\mathbf{k}^{\mathsf{T}}(x_m - x_j)]\right\}^{-1}, \qquad (1)$$

düsturu ilə hesablanır, burada $[\hat{\varphi}_{m,j}(\lambda)] = \hat{R}^{-1}(\lambda)$, $-R^{-1}(\lambda)$ matrisinin seçimi statistik qiymətidir və

$$R(\lambda) = \left\| \rho_{m,j}(\mathbf{x}) = \int f(\lambda, \mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}^{\mathsf{T}}(x_m - x_j)}\,d\mathbf{k},\ 1 \le j, m \le M \right\|$$

üçün tərs matrisin seçimi statistik qiymətidir. $R(\lambda)$ martisi M – ölçülü $Y(t) = (\zeta(t, x_1), \ldots, \zeta(t, x_M))$ stasionar prosesinin spektral sıxlıqlarının matrisidir. $\hat{R}^{-1}(\lambda)$ seçimi statistik qiyməti $Y(t)$-nin $1 \le t \le N$ intervalında müşahidə olunan realizasiyası üzrə çoxölçülü stasionar prosesin spektrinin məlum qiymətləndirilmə metodlarından birinə müvafiq olaraq alınır.

M. d. s. s. q.-nin adı onunla əlaqədar verilmişdir ki,

$$\hat{f}(\lambda, \mathbf{k}) = \sum_{m,j=1}^{M} \rho_{m,j}(\lambda_0)\,\exp[\,i\mathbf{k}_0^{\mathsf{T}}(x_m - x_j)]^{-1} \quad (2)$$

ifadəsi $a\exp[\,i\lambda_0 t + i\mathbf{k}_0^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}]$ a harmonikinin amplitudu üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinin dispersiyasıdır, əgər bu statistik qiymət $\zeta(t, \mathbf{x}) + a\exp[\,i\lambda_0 t + i\mathbf{k}_0^{\mathsf{T}}\mathbf{x}]$ meydanının $x_1, \ldots, x_M$ nöqtələrində və $1 \le t \le N$ intervalında müşahidə olunmuş realizasiyası üzrə alınmış olarsa. Bu zaman fərz olunur ki, N olduqca böyükdür və

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \int e^{i\lambda t + i\mathbf{k}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}\,dz(\lambda, \mathbf{k}),$$

burada $z(\lambda, \mathbf{k})$ – ortoqonal spektral ölçüdür, yəni spektral sıxlığı $f(\lambda, \mathbf{k})$ olan Qauss meydanıdır. Maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti $\hat{a}$ bu halda effektivlik xassəsinə malikdir və buna görə də, $\zeta(t, \mathbf{x})$ meydanındakı $\exp[\,i\lambda t + i\mathbf{k}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}]\,dz(\lambda, \mathbf{k})$ şəklindəki harmonik komponentlər $k \ne k_0$, $\lambda \ne \lambda_0$ olduqda (2) dispersiyasına minimal mümkün əlavə verir və bu kəmiyyət isə əsas etibarilə $k = k_0$ və $\lambda = \lambda_0$ komponentləri ilə təyin olunur. Buna görə də, (2) və onun seçimi variantı (1) $f(\lambda, \mathbf{k})$-nın statistik qiyməti kimi istifadə olunur. M. d. s. s. q. D. Keypon tərəfindən $[1]$, $[2]$-də daxil olunmuşdur və bu statistik qiymət $[3]$-də baxılan statistik qiymətlərin xüsusi halıdır.

Əd.: [1] К е й п о н Д., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлект.», 1969, т. 57, № 8, с. 69–79; [2] К е й п о н Д., Г р и н ф и л д Р., К о л к е р Р., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлект.», 1967, т. 55, № 2, с. 66–83; [3] P i s a r e n k o V. F., «Geophys. J. Roy. Astron. Soc.», 1972, v. 28, p. 511–31.

MAKSİMAL DOĞRUYAOXŞARLIQ STATİSTİK QİYMƏTİ « максимального правдоподобия оценка; maximum likelihood estimator » – *maksimal doğruyaoxşarlıq metodu* ilə qurulmuş *statistik qiymətdir.*

MAKSİMAL ENTROPİYA; s p e k t r a l s t a t i s t i k q i y m ə t **« максимальная энтропия;** с п е к т р а л ь н а я о ц е н к а; **maximum entropy;** s p e c t r a l e s t i m a t o r **»**, a v t o r e q r e s s i o n s p e k t r a l s t a t i s t i k q i y m ə t, – diskret zamanlı stasionar təsadüfi prosesin spektral sıxlığı $f(\lambda)$ üçün elə $f_q^*(\lambda)$ statistik qiymətidir ki, bu statistik qiymətin aşağı tərtib avtokorrelyasiyalarına uyğun qeyd olunmuş q ədədi seçimi korrelyasion funksiyanın müşahidə verilənləri üzrə hesablanmış uyğun qiymətləri ilə üst-üstə düşür və bu halda spektral sıxlığı $f_q^*(\lambda)$ olan Qauss təsadüfi prosesinin məxsusi

entropiyası (rus. уделная энтропия, xüsusi entropiya) bütün mümkün entropiyalardan ən böyüyü olur. Əgər müşahidələrdən x_t-nin N sayda seçimi qiymətləri məlum olmuşdursa, $t = 1, \dots, N$ və bu qiymətlər isə spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan həqiqi stasionar $X(t)$ prosesinin bir realizasiyasının parçası olarsa, onda $f_q^*(\lambda)$ statistik qiyməti

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\lambda \; f_q^*(\lambda)d\lambda \; = \; r_k^* \; \Xi \; N^{-1} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k}, \quad k \; = \; 0, 1, \dots, q \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \; f_q^*(\lambda)d\lambda \; = \max \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunur, burada Ξ işarəsi «tərifə görə bərabərdir» kimi anlaşılır. M. e.-nın spektral statistik qiyməti 1967-də J. Berq tərəfindən geofizika konferensiyasındakı məruzəsində (bax, [1]) təklif olunmuşdur; M. e.-nın spektral statistik qiyməti

$$f_q^*(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi \left| 1 + \beta_1 \exp(i\lambda) + \dots + \beta_q \exp(iq\lambda) \right|^2} \qquad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\beta_1, \dots, \beta_q, \sigma^2$ əmsalları $q+1$ sayda (1) tənliklərindən təyin olunur. (3) düsturundan aydındır ki, $f_q^*(\lambda)$ spektral statistik qiyməti E. Parzenin [2]-də, H. Akaikenin [3]-də bir-birindən asılı olmadan təklif etdikləri avtoreqression spektral statistik qiymət ilə (belə adlandırılmış) üst-üstə düşür. M. e.-ya tətbiqdə müsbət tam q ədədi periodoqramın hamarlanmasının köməyilə spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində spektral pəncərənin tərs eni kimi bir rol oynayır; müşahidələrin verilənləri üzrə q-nün optimal qiymətinin qiymətləndirilməsi üçün bir sıra xüsusi metodlar «*Parametrik model*; tərtibin seçilməsi» məqaləsində şərh olunmuşdur. $\beta_1, \dots, \beta_q, \sigma^2$ əmsallarının qiymətlərini *Yul – Uoker tənlikləri* –

$$r_k^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_{[k-j]}^* = 0,$$

$$k = 1, \dots, q, \quad r_0^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_j^* = \sigma^2$$

sisteminin həllinin köməyilə tapmaq olar (bax, *Yul – Uoker statistik qiymətləri* avtoreqressiya parametrlərinin). Bu əmsalların hesablanması üçün daha münasib digər metodlar da mövcuddur (bax, *Berq metodu* avtoreqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün, həm də [4] – [6]).

Spektral statistik qiymətlərin M. e. və bunları ümumiləşdirən parametrik spektral statistik qiymətlər seçimin həcmi N nisbətən kiçik olduğu halda və ya spektral sıxlıqların mürəkkəb formalı olduqları hallarda $f(\lambda)$ funksiyasının qeyri – parametrik statistik qiymətləri ilə müqayisədə müəyyən üstünlüklərə malikdirlər: bunlar, adətən, daha düzgün formaya malikdirlər və spektral sıxlığın qrafikinin yaxın zirvələrini daha yaxşı fərqləndirməyə imkan yaradır (bax, məs., [1], [4] – [7]). Buna görə də, M. e.-nın spektral statistik qiymətləri, stasionar təsadüfi proseslərin tətbiqi spektral analizində geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Modern spectrum analysis, N. Y., 1978; [2] Parzen E., «Radio Sci», 1964, v. 68D, № 9, p. 937–51; [3] Akaike H., «Ann. Inst. Statist. Math.», 1969, v. 21, p. 407–19; [4] Nonlinear methods of spectral analysis, 2 ed., B. – [a. o.], 1983; [5] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51; [6] Методы спектрального оценивания, «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9; [7] Писаренко В. Ф., в сб.: Вычислительная сейсмология, в. 10, М., 1977, с. 118–49.

MAKSİMAL KORRELYASİYA ƏMSALI « максимальный коэффициент корреляции; maximal correlation coefficient » – ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin qarşılıqlı asılılıq xarakteristikasıdır, həqiqi $\varphi_1(\xi)$ və $\varphi_2(\eta)$ təsadüfi kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsallarının* qiymətlərinin dəqiq yuxarı sərhədi kimi təyin olunur, bu şərtlə ki,

$$\mathbf{M}\varphi_1(\xi) = \mathbf{M}\varphi_2(\eta) = 0 \quad \text{və} \quad \mathbf{D}\varphi_1(\xi) = \mathbf{D}\varphi_2(\eta) = 1$$

şərtləri ödənilsin; yəni M. k. ə.

$$\rho^*(\xi, \eta) = \sup \mathbf{M}[\varphi_1(\xi) \; \varphi_2(\eta)].$$

Əgər bu yuxarı sərhəd $\varphi_1 = \varphi_1^*(\xi)$ və $\varphi_2 = \varphi_2^*(\eta)$ üçün təmin olunursa, onda ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında M. k. ə. $\varphi_1^*(\xi)$ və $\varphi_2^*(\eta)$ kəmiyyətləri arasında korrelyasiya əmsalına bərabərdir. M. k. ə. belə bir xassəyə malikdir ki, ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı üçün $\rho^*(\xi, \eta) = 0$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Təsadüfi kəmiyyətlər arasında xətti korrelyasiya olduqda M. k. ə. adi korrelyasiya əmsalı ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Сарманов О. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 4, с. 715–18; [2] Сарманов О. В., «Докл. АН СССР», 1946, т. 53, № 9, с. 781–84; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

MAKSİMAL KÜTLƏ METODU « максимальной массы метод; maximum mass method » – bax, *Pisarenko spektral statistik qiyməti*.

MAKSİMİN KRİTERİ « максиминный критерий; maximin test » – mühümlük ölçüsü eyni α-ya bərabər H kriterisinin K kriterisinə qarşı yoxlanılması üçün kriterilər sinfində gücünün minimal qiyməti maksimal olan mürəkkəb $K: \theta \in \Theta_k$ alternativ hipotezinə qarşı $H: \theta \in \Theta_H$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. Başqa sözlə, əgər α hüdudlu ixtiyari ξ kriterisi üçün

$$\inf_{\theta \in \Theta_k} \mathbf{M}_\theta \varphi \; \geq \; \inf_{\theta \in \Theta_k} \mathbf{M}_\theta \xi$$

münasibəti ödənilərsə, α hüdudlu φ kriterisi α hüdudlu maksimin kriteri adlanır. Əgər $\left\{ \mathbf{P}_\theta, \; \theta \in \Theta_H \bigcup_k \Theta_k \right\}$ paylanmalar ailəsi $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında σ – sonlu μ ölçüsü ilə dominarlanan ailədirsə və $\mathscr{A}$ – doğurucuların hesabi çoxluğuna malikdirsə, onda ixtiyari $\alpha \in (0, 1)$ üçün M. k. vardır.

Əgər H-ın K-ya qarşı yoxlanılması məsələsi hər hansı G qrupunun çevirmələrinə nəzərən invariant olarsa, onda maksiminlik xassəsi və invariantlıq arasında sıx əlaqə vardır.

T e o r e m. $\mathscr{B}$, – G qrupunun altçoxluqlarının σ – meydanı, $\{\nu_n\}$, – $(G, \mathscr{B})$-də elə ehtimal ölçüləri çoxluğu olsun ki: 1) ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün $gx \in \mathscr{A}$ olduqda (x, g) cütlər çoxluğu $A \times \mathscr{B}$-dəndir; 2) $Bg \in \mathscr{B}$ münasibəti ixtiyari $B \in \mathscr{B}$ və $g \in G$ üçün doğrudur; 3) ixtiyari $g \in G$, $B \in \mathscr{B}$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \nu_n(Bg) - \nu_n(B) \right| = 0$. Onda ixtiyari $\alpha \in (0, 1)$ üçün α hüdudlu sanki invariant kriteri vardır və bu kriteri M. k.-dir.

Teoremin şərtlərini aşağıdakı çevirmələr qruplarının tipləri ödəyir: 1) $\mathbb{R}^n$-də köçürtmələr qrupu $g : (x_1, ..., x_n) \to (x_1 + g, ..., x_n + g)$; 2) $\mathbb{R}^n$-də miqyas dəyişmələri qrupu $g : (x_1, ..., x_n) \to (g x_1, ..., g x_n)$, $0 < g < \infty$; 3) $\mathbb{R}^n$-də ortoqonal çevirmələr qrupu; 4) $\mathbb{R}^n$-də oxşarlıq çevirmələri qrupu; 5) sonlu qruplar; 6) 1) – 5) tipli qrupların sonlu saydasının düz hasili.

Konkret məsələlərdə M. k.-nin axtarılmasında invariantlıq mülahizələrindən başqa o fakt da əsas götürülə bilinər ki, çox geniş hallarda M. k. münasib seçilən Beyes probleminin həlli ilə üst-üstə düşür.

T e o r e m. $\mathscr{B}_H$ və $\mathscr{B}_k$, – Θ_H və Θ_k-da verilmiş σ – meydanlar, $p_\theta(x) = d\mathbf{P}_\theta / d\mu$ sıxlıq funksiyaları $(\mathscr{A} \times \mathscr{B}_H)$ və $(\mathscr{A} \times \mathscr{B}_K)$ fəzalarına nəzərən ölçülən olsunlar. λ və λ', – $\mathscr{B}_H$ və $\mathscr{B}_k$-da ixtiyari paylanmalar və $\varphi_{\lambda,\lambda'}$ –

$$h(x) = \int\limits_{\Theta_H} p_\theta(x)\, d\lambda(\theta)$$

hipotezini

$$h'(x) = \int\limits_{\Theta_k} p_\theta(x)\, d\lambda'(\theta)$$

alternativinə qarşı yoxlamaq üçün α hüdudlu ən güclü kriteri olsun. Bundan başqa, $\beta_{\lambda,\lambda'}$ bu kriterinin h' alternativində gücü olsun. Əgər elə λ və λ' varsa ki,

$$\sup_{\Theta_H} \mathbf{M}_\theta \varphi_{\lambda,\lambda'}(X) \le \alpha \ , \quad \inf_{\Theta_k} \mathbf{M}_\theta \varphi_{\lambda,\lambda'}(X) = \beta_{\lambda,\lambda'}$$

münasibətlərinin ödənilməsi təmin olunsun, onda $\varphi_{\lambda,\lambda'}$, – K hipotezinə qarşı H hipotezinin yoxlanılması üçün α hüdudlu M. k.-dir; bu kriteri bu xassəli yeganə kriteridir, bu şərtlə ki, h' alternativində h-ın yoxlanılması üçün α hüdudlu ən güclü kriteri də yeganə olsun.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

MAKSİMUM SXEMİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « максимума случайных величин схема; maximum scheme for random variables » – *təsadüfi kəmiyyətləri cəmləmə sxeminin* analoqudur, burada

$$S_n = \max(X_1, ..., X_n)$$

maksimumlarının toplularına baxılır. T. k. m. s. riyazi statistikada tətbiq olunur, belə ki, S_n variasion sıranın axırıncı həddidir. T. k. m. s.-də paylanmaların, o cümlədən, asimptotik paylanmaların analizi çoxsaylı nəticələrin alınmasına əsas olmuşdur (bax, məs., [1] – [3]).

Əd.: [1] Г а л а м б о ш Я., Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, пер. с англ., М., 1984; [2] П а н ч е в а Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 4, с. 730–44; [3] П а н ч е в а Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 1, с. 167–70.

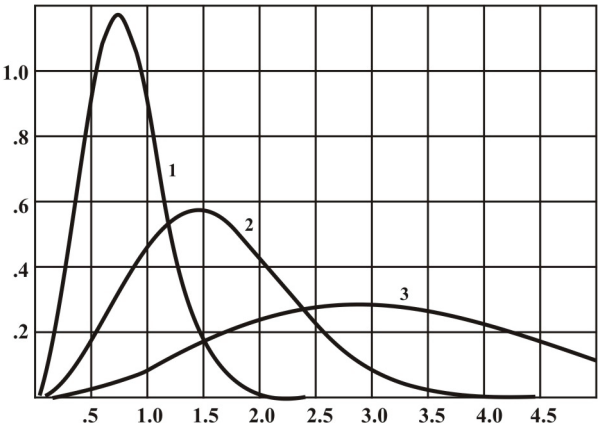
MAKSVELL PAYLANMASI « Максвелла распределение; Maxwell distribution » – kəsilməz, $(0, \infty)$-da topalanmış, paylanma sıxlığı (şəkil)

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{x^2}{\sigma^3}\ e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (*)$$

olan ehtimal *paylanmasıdır*, $\sigma > 0$. Paylanma funksiyası

$$F(x) = 2\Phi(x/\sigma) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{x}{\sigma}\ e^{-x^2/2\sigma^2} - 1$$

düsturu ilə təyin olunur, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. M. p.-nın asimmetriya əmsalı müsbətdir, o, unimodal paylanmadır, modası $x = \sqrt{2}\sigma$ nöqtəsindədir. M. p.-nın ixtiyari tərtib sonlu momentləri vardır; riyazi gözləmə və dispersiyası uyğun olaraq, $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sigma$ və $\frac{3\pi - 8}{\pi}\ \sigma^2$-na bərabərdir.



(1) $\sigma = 0{,}5$; (2) $\sigma = 1$; (3) $\sigma = 2$; olduqda Maksvell paylanmasının sıxlıqları

Əgər X_1, X_2, X_3 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri 0 və σ^2 parametrləri ilə normal qanunla paylanmışlarsa, onda $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ təsadüfi kəmiyyəti sıxlıq funksiyası (*) olan M. p. ilə paylanır. Yəni M. p. üçölçülü fəzanın dekord koordinat sistemində koordinatları asılı olmayan və 0 və σ^2 parametrləri ilə normal qanunla paylanmış təsadüfi vektorun uzunluğunun paylanması kimi alına bilinir. $\sigma = 1$ olduqda M. p. sərbəstlik dərəcəsi sayı üçə bərabər xi – kvadrat paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin kvadrat kökünün paylanması ilə üst-üstə düşür (bax, *Reley paylanması*). M. p. kinetik tənliklər nəzəriyyəsində, xüsusilə də, *Boltsman tənliyində* mühüm rol oynayır. Məs., M. p. Boltsman tənliyinin stasionar həllini verir, bu həllin «kiçik ətrafında» xəttiləşdirilmiş tənliyin araşdırılması Koşi məsələsinin lokal həllinin varlığını isbat etməyə imkan verir. İlk dəfə C. Maksvell tərəfindən ideal qazın molekullarının sürətlərinin paylanması haqqında məsələnin həllində müəyyən olunmuşdur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984 .

MAKSVELL – BOLTSMAN STATİSTİKASI « Максвелла – Больцмана статистика; Maxwell – Boltzmann statistic » – bax, *Boltsman paylanması.*

MALİYYƏ RİYAZİYYATI « финансовая математика; mathematics of finance » – riyaziyyatın bölməsidir, qeyri – müəyyən şəraitdə fəaliyyət göstərən maliyyə strukturlarının analizinə və z a m a n, r i s k, s t o x a s t i k e v o l y u s i y a və s. kimi faktorlar nəzərə alınmaqla maliyyə strukturları və vasitələrinin idarəolunması üçün ən rasional üsulların tapılmasına xidmət edir.

M. r.-nın məşğul olduğu obyektlər və strukturlardan əsas sayılanlardan aşağıdakıları qeyd etmək olar: f ə r d l ə r (individiumlar), f i r m a l a r (məs., kompaniyalar, korporasiyalar), ə l a q ə ç i (rus. посреднические) s t r u k t u r l a r (məs., investisiya kompaniyaları, təqaüd fondları) və m a l i y y ə b a z a r l a r ı. Məhz maliyyə bazarları stoxastik M. r.-nın vasitələrilə öyrənilən əsas obyektlərdən biri sayılır və stoxastik M. r.-nın bu sahədə istifadə olunan vasitələri isə təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi, təsadüfi proseslər statistikası, stoxastik analiz, stoxastik optimizasiya və s. kimi ehtimali – statistika nəzəriyyələrinə əsaslanır.

Qəbul olunmuş terminologiyaya uyğun olaraq maliyyə bazarı pul və valyuta bazarlarından, qiymətli metallar bazarlarından və maliyyə vasitələrindən (qiymətli kağızlar da daxil olmaqla) ibarətdir. Maliyyə vasitələri iki sinfə ayrılır: əsas (ilkin) və törəmə (ikinci) maliyyə vasitələri. Əsas maliyyə vasitələrinə qiymətli kağızlar (bank hesabları, aksiyalar, istiqraz vərəqləri) aid edilir. Opsionlar (opsion kontraktlar), varrantlar, svoplar, kombinasiyalar, spredlər, birləşmələr, fyuçerslər (fyuçers kontraktlar) törəmə maliyyə vasitələridir. Törəmə maliyyə vasitələri ilə əməliyyatlar m a l i y y ə m ü h ə n d i s l i y i n i n öyrəndiyi və araşdırdığı sahədir.

M. r.-na stoxastik yanaşmada fərz olunur ki, hər hansı ilkin ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ vardır. M. r.-da z a m a n və d i n a m i k a onun ayrılmaz komponentləri olduğundan, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fəzasının xüsusi strukturlu olduğunu hesab etmək, yəni diskret halda $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ σ – cəbrlər axını, kəsilməz halda isə $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ σ – cəbrlər axını ilə verildiyini fərz etmək məqsədəuyğundur. Bu qayda ilə alınan $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$ və $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ fəzaları uyğun olaraq, d i s k r e t və k ə s i l m ə z f i l t r l ə n m i ş e h t i m a l f ə z a l a r ı (f i l t r a s i y a l ı e h t i m a l f ə z a l a r ı), $\mathcal{A}_n$ -dən (uyğun olaraq, t -dən) olan hadisələr isə n anında (uyğun olaraq, t) «bazarda» müşahidə olunan hadisə kimi interpretasiya olunur.

Diskret zaman. Bu halda $B = (B_n)_{n\geq 0}$ bank hesabının vəziyyətinin evolyusiyasının təsvirində, adətən, aşağıdakı iki modeldən biri istifadə olunur:

$$B_n = B_0 e^{r_1 + \ldots + r_n} \tag{1}$$

və

$$B_n = B_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + \hat{r}_k), \tag{2}$$

burada f a i z t a r i f l ə r i (rus. процентные ставки) r_k və $\hat{r}_k$, – $\mathcal{A}_{k-1}$ – ölçülən (başqa sözlə, öngörül) kəmiyyətlərdir. Sonuncu fərziyyə bank hesabının o xassəsini ifadə edir ki, bankın «sabahkı» vəziyyəti artıq «bu gün» məlum olur. (1) modelində kapital əlavələri «mürəkkəb faizlər» ilə aparılır. Bu zaman fərz olunur ki, $\hat{r}_k > -1$. Aydındır ki, $r_k = \ln(1 + \hat{r}_k)$ və $\hat{r}_k = e^{r_k} - 1$.

Əgər $S = (S_n)_{n\geq 0}$ aksiyanın dəyəri (qiyməti) kimi anlaşılarsa, onda (1) və (2)-yə analoji olaraq, S_n aşağıdakı şəkildə təsvir olunur:

$$S_n = S_0 e^{\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k} \tag{3}$$

və

$$S_n = S_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + \hat{\rho}_k), \tag{4}$$

burada ρ_k və $\hat{\rho}_k$, – $\mathcal{A}_k$ – ölçülən fərz olunur (r_k və $\hat{r}_k$ kəmiyyətlərinin $\mathcal{A}_{k-1}$ – ölçülən olduqlarından fərqli olaraq). S_n, $n \geq 1$ qiymətlərinin müsbət olmaları üçün fərz olunur ki, bütün k -lar üçün $S_0 > 0$ və $\hat{\rho}_k > -1$ olmalıdır.

Bank hesabı B və S aksiyalarının hər bir cütü (B, S) ilə (B, S) – b a z a r anlayışı, $\pi(\beta, \gamma)$ s t r a t e g i y a (ç a n t a s t r a t e g i y a s ı) anlayışı daxil olunur ki, burada $\beta = (\beta_n)_{n\geq 0}$ və $\gamma = (\gamma_n)_{n\geq 0}$ öngörül ardıcıllıqlardır; daha sonra bu strategiyaya müvafiq $X^\pi = (X_n^\pi)_{n\geq 0}$ k a p i t a l ı anlayışı da daxil olunur, burada

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n = (\beta_n B_n + \sum_{i=1}^{d} \gamma_n^i S_{n_i}^i). \tag{5}$$

Əgər $S = (S^1, \ldots, S^d)$ d aksiyadan ibarət p a k e t olarsa, π çantasının komponenti γ, – d – ölçülü öngörül $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^d)$ ardıcıllığıdır və (5)-də $\gamma_n S_n$ həddi $(\gamma_n, S_n) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_n^i S_n^i$ skalyar hasili kimi anlaşılır.

Bütün π strategiyalarının sinfində X kapitalının evolyusiyası

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \quad n \geq 1 \tag{6}$$

düsturları ilə təyin olunan ö z ü - ö z ü n ü m a l i y y ə l ə ş d i r ə n s t r a t e g i y a l a r xüsusi olaraq seçilir; (6)-dan aydındır ki, kapitalın dəyişməsi, yalnız bank hesabı vəziyyətinin və aksiyaların dəyərinin dəyişməsi nəticəsində baş verir, lakin səhvən belə hesab olunur ki, bu dəyişmə güya çanta vəziyyətlərinin dəyişməsi, yəni $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0$, $n \geq 1$ olması nəticəsində baş verir.

Fərz olunur ki, (B, S) – bazarında maliyyə aktivliyi $n = 0, 1, \ldots, N$ anları ilə kifayətlənilir.

T ə r i f 1. Əgər ilkin kapitalı $X_0^\pi = 0$ şərtilə verilən kapital 1-ə bərabər $\mathbf{P}$ ehtimalı ilə (və ya $\mathbf{P}$ – sanki yəqin) $X_N^\pi \geq 0$ olarsa, müsbət $\mathbf{P}$ ehtimalı ilə $X_N^\pi > 0$ olarsa, özü-özünü maliyyələşdirən π strategiyası (N anında) a r b i t r a j i m k a n r e a l l a ş d ı r ı r, deyilir.

T ə r i f 2. Əgər özü-özünü maliyyələşdirən arbitrajlar çoxluğu boş çoxluq olarsa [yəni əgər özü-özünü maliyyələşdirən π strategiyası üçün ilkin kapital $X_0^\pi = 0$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) olarsa və bundan başqa

$\mathbf{P}(X_N^\pi \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathbf{P}(X_N^\pi = 0) = 1$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin)

olarsa, onda $X_N^\pi \geq 0$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin)], onda (B, S) – bazarında arbitraj imkanlar yoxdur, deyilir və ya deyilir ki, bu bazar arbitrajsız bazardır.

Daxil olunan arbitraj konsepsiyası ilə yanaşı (B, S) – bazarının tamlığı anlayışı da daxil olunur və bu anlayış maliyyə riyaziyyatı və maliyyə praktikasında mühüm rol oynayan hedc (ing. hedge, rus. забор – çəpər, burada sipər) (hedcləyici çanta, sipərləyici çanta) anlayışının tərifinə əsaslanır.

$f_N = f_N(\omega),\ \omega \in \Omega$ – hər hansı $\mathcal{A}_n$ – ölçülən mənfi olmayan funksiya olsun, $f_N(\omega)$ – «ödəniş öhdəçiliyi», «terminal ödə(n)mə» və ya «məqsəd funksiyası» kimi anlaşılır.

Tərif 3. Əgər $X_0^\pi \equiv x$, $X_N^\pi \geq f_N$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) olarsa, (B, S) – bazarında qiymətli kağızların özü-özünü maliyələşdirən $\pi = (\beta, \gamma)$ çantasına (x, f_N) hedc deyilir.

Əgər $X_0^\pi = x,\ X_N^n = f_N$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) olarsa, onda π – mükəmməl (x, f_N) hedci adlanır.

Bu tərifə verilən hedc anlayışı (bəzən yuxarı hedc adlandırılan) M. r.-nda qoruyucu vasitə rolunu ifadə edərək, f_N qiymətindən ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) az olmayan (X_N^π) kapitalının alınmasına xidmət edir.

Tərif 4. Əgər məhdud (uyğun olaraq, hər bir) ödəniş tapşırığı f_N mümkün olan (müyəssər) ödəniş (rus. достижимый) tapşırığıdırsa və ya yenidən təkrar oluna bilinərsə, yəni onun üçün $X_0^\pi = x$ və $X_N^\pi = f_N$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) şərtlərini ödəyən mükəmməl (x, f_N) – hedc π tapılarsa, onda (B, S) – bazarı N anı üçün tam (B, S) – bazardır [mükəmməl (B, S) – bazardır], deyilir.

Arbitrajsız və tam bazarlar nəzəriyyəsində aşağıdakı iki teorem əsas rol oynayır.

Teorem A («Maliyyə aktivləri hesabı nəzəriyyəsinin birinci fundamental teoremi»). $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n \geq N}, \mathbf{P})$, $N < \infty$ filtrlənmiş ehtimal fəzasında təyin olunmuş maliyyə (B, S) – bazarının $B = (B_n)_{n \leq N}$, $B_n > 0$ bank hesabı və sonlu d sayda $S = (S_n^1, \ldots, S_n^d)_{n \leq N}$ aktivlərindən ibarət olduğu fərz olunur. $A_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ və $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}$ olsun. (B, S) – bazarın arbitrajsız bazar olması üçün $\mathbf{P}$ ölçüsünə ekvivalent (bax, *Ekvivalent ölçülər*) heç olmasa bir $\tilde{\mathbf{P}}$ ölçüsünün varlığı (bu ölçü «martinqal» ölçü və ya «neytral – risk» ölçü adlandırılır) zəruri və kafidir ki, bu ölçüyə nəzərən d – ölçülü normalanmış

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n^1}{B_n}, \frac{S_n^2}{B_n}, \ldots, \frac{S_n^d}{B_n} \right)_{n \leq N}$$

ardıcıllığı $\tilde{\mathbf{P}}$ – martinqaldır: bütün $i = 1, \ldots, d$ və $n = 1, \ldots, N$ üçün

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \left| \frac{S_n^i}{B_n} \right| < \infty$$

və

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \left(\frac{S_n^i}{B_n} \mid \mathcal{A}_{n-1} \right) = \frac{S_{n-1}^i}{B_{n-1}} .$$

Teorem B. («Maliyyə aktivləri hesabı nəzəriyyəsinin ikinci fundamental teoremi»). Arbitrajsız maliyyə (B, S) – bazarı, yalnız və yalnız, o halda tam (B, S) – bazardır ki, bütün martinqal ölçülərinin çoxluğu $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ yalnız bir ölçüdən ibarət olsun. Bununla belə, arbitrajsızlıq onu ifadə edir ki, $\mathcal{P}(\mathbf{P}) \neq \varnothing$, onda arbitrajsız bazarın tamlığı şərti olaraq $\left|\mathcal{P}(\mathbf{P})\right| = 1$ şəklində yazıla bilinər.

İqtisadi nöqteyi – nəzərdən maliyyə bazarının arbitrajsızlığı onun «rasional», «effektiv» fəaliyyət göstərdiyini ifadə edir.

A və B teoremlərinin əhəmiyyəti ondadır ki, bunlar maliyyə aktivləri, maliyyə vasitələri və aşağıdakı kimi təyin olunan hedcləmə qiymətlərinin (dəyərlərinin) hesabları ilə əlaqədar analitik hesablamaların aparılmasına imkanlar yaradır.

Tərif 5. f_N ödəniş öhdəçiliyi olsun.

$$\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P}) = \inf \{x:\ X_0^\pi = x \text{ və } X_N^\pi = f_N \text{ (} \mathbf{P} \text{ – sanki yəqin) şərtlərini ödəyən } \exists \pi\}$$

kəmiyyətinə ixtiyari $\mathcal{A}_n$ – ölçülən f_N ödəniş tapşırığının mükəmməl hedcləmə (avropa tipli) qiyməti deyilir.

Arbitrajsız tam bazarlarda $\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P})$ qiyməti

$$\mathbb{C}(f_N; \mathbf{P}) = B_0 \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \tag{7}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\tilde{\mathbf{P}}$ – (yeganə) martinqal ölçüdür.

Bu düsturun isbatı çox sadədir. Doğrudan da, əgər π mükəmməl (x, f_N) hedc olarsa, yəni $X_0^\pi = x,\ X_N^n = f_N$ ($\mathbf{P}$.– s. y.) olarsa, onda

$$\frac{f_N}{B_N} = \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta \left(\frac{S_k}{B_k} \right),$$

çünki

$$\Delta \left(\frac{X_n^\pi}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right).$$

Buna görə də, aydındır ki,

$$\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} = \frac{x}{B_0}$$

və deməli,

$$x = B_0 \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \tag{8}$$

Qeyd etmək lazımdır ki, (8)-in sağ tərəfi π , (x, f_N) hedcinin strukturundan asılı deyildir. Başqa sözlə, əgər π' başqa bir hedcdirsə, onda ilkin x və x' qiymətləri üst-üstə düşməlidirlər.

Arbitrajsız natamam bazarlar halında məsələ mürəkkəbləşir və bu halda bunlar üçün «özü-özünü maliyyələşdirmə» anlayışı bir qədər genişləndirilməlidir. $C = (C_n)_{n \leq N}$, – $C_0 = 0$ şərtini ödəyən və komponentləri $\mathcal{A}_n$ – ölçülən, mənfi olmayan azalmayan

proses olsun. Əgər π çantasının kapitalı $(X_n^{\pi,C})_{n\le N}$ elə evolyusiya edirsə ki,

$$\Delta X_n^{\pi,C} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta C_n$$

bərabərliyi ödənilsin, onda π çantası və C prosesi «özü-özünü maliyyələşdirən, istehlak etməyə malik strategiya» təşkil edir, deyilir.

Tərif 6.

$$\mathbb{C}^*(f_N;\mathbf{P}) = \inf\{x:\ X_0^{\pi,C} = x \text{ və } X_N^{\pi,C} \ge f_N \text{ (} \mathbf{P}-\text{sanki yəqin) şərtlərini ödəyən } \exists\pi\}$$

kəmiyyətinə məhdud $\mathcal{A}_N$ – ölçülən ixtiyari f_N ödəniş tapşırığının hedcləmə qiyməti (dəyəri) deyilir.

Ümumi nəzəriyyəyə görə, aydındır ki, arbitrajsız bazarlarda

$$\mathbb{C}^*(f_N;\mathbf{P}) = \sup_{\tilde{\mathbf{P}}\in\mathcal{P}(\mathbf{P})} B_0 \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{B_N} \qquad (9)$$

münasibəti ödənilir, burada $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ – bütün martinqal ölçülərinin çoxluğudur (tam bazarlar halında $\mathcal{P}(\mathbf{P})$ çoxluğu bir ölçüdən ibarət olur) və (9) düsturu (7) düsturuna çevrilir. «Rasional» və «ədalətli» qiymətlərin hesablanılmasında, məs., opsionlar (avropa tipli) kimi törəmə maliyyə vasitələrinin hesablanmasında (7) və (9) düsturları əsas rol oynayırlar.

Opsion – əvvəlcədən razılaşdırılmış şərtlərlə razılaşdırılmış müddətdə (və ya anda) müəyyən dəyərli bir şeyin (məs., istiqraz vərəqəsi, aksiya, valyuta) alıcıya almaq və ya satmaq hüququnu verən qiymətli kağızdır (kontraktdır).

Ümumi qəbul edilmiş terminologiyaya əsasən opsionlar iki sinfə ayrılır: alıcı opsionları və satıcı opsionları. Alıcı opsionları alış hüququ, satıcı opsionları satış hüququ verir. Əgər opsion əvvəlcədən təyin olunmuş N müddətinə icra üçün təqdim olunarsa, onda N icra anı adlanır, opsion bu halda avropa tip opsiondur, deyilir. Əgər opsion icraya ixtiyari anda (o cümlədən, təsadüfi anda) təqdim olunarsa, onda opsion amerikan tip opsiondur, deyilir.

Müəyyənlik üçün satıcının avropa tip standart opsionu olduğu hala baxıldığı fərz olunur. Bu tip opsion satın alınmış şeyin (qeyd olunmuş) K qiyməti ilə xarakterizə olunur ki, bu qiymət üzrə alıcı N anında, məs., aksiyaları ala bilər və bunların dəyəri S_N N zaman anında faktiki olaraq K-dan fərqlənə bilər. Əgər $S_N > K$ olarsa, onda bu vəziyyət alıcı üçün əlverişli hesab edilir. Doğrudan da, kontrakt şərtlərinə görə onun aksiyaları K qiymətinə almaq hüququ olduğundan, o, bunu edə bilər. Sonra o, bunları bazar qiyməti S_N ilə dərhal sataraq, bu əməliyyat nəticəsində $S_N - K$-ya bərabər gəlir əldə edir. $S_N < K$ olarsa, onda K qiyməti ilə satın alma hüququ alıcıya heç bir gəlir gətirmir, belə ki, o, daha az S_N qiyməti ilə aksiya ala bilər. Bu iki haldan belə nəticə alınır ki, alıcının N anındakı gəliri $f_N = (S_N - K)^+$ düsturu ilə təyin olunur (burada x həqiqi olduğu halda, əgər $x \ge 0$ olarsa $x^+ = x$, $x < 0$ olarsa, $x^+ = 0$ götürülür). Satıcı üçün f_N-in qiyməti «ödənc» kəmiyyətini təyin edir, o, bu ödənci N anında elə yerinə yetirməlidir ki, π çantasının qurulmasında müvafiq kapital əvvəlcədən f_N-dən kiçik olmuş olsun.

Opsion hesablamaları nəzəriyyəsinin əsas məsələləri aşağıdakılardan ibarətdir: 1) ilkin minimal elə x kapitalı təyin olunmalıdır ki, bu kapital nəticəsində $X_N^{\pi} \ge f_N$ kapitalı alınsın (x opsion alan alıcıya verilən «mükafat»dır) və 2) hedcləyici $X_N^{\pi} \ge f_N$ bərabərsizliyini ödəyən hedcləyici π çantaları təyin olunsun.

Yuxarıda verilən tərif 5-dən belə nəticə alınır ki, arbitrajsız tam bazarlar halında ilkin minimal x kapitalı $\mathbb{C}(f_N;\mathbf{P})$ kapitalının elə özüdür və bu kəmiyyəti opsionlar hesabı nəzəriyyəsində opsionların «düzgün», «rasional» dəyəri kimi adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Arbitrajlarsız natamam bazarlar halında bu dəyər hedcləmə dəyəri $\mathbb{C}^*(f_N;\mathbf{P})$ ilə üst-üstə düşür.

Ən sadə və eyni zamanda olduqca populyar (B, S)– bazar modeli Koks–Ross–Rubinşteyn modelidir, bu modeldə

$$\Delta B_n = r B_{n-1}, \quad \Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \qquad (10)$$

burada $(\rho_n)_{n\le N}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, $-1 < a < b$ şərtini ödəyən a və b qiymətlərini sıfırdan fərqli ehtimallarla alan, Bernulli təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığıdır. Əgər $-1 < a < r < b$ şərti ödənərsə, onda baxılan bazar arbitrajsız və tam bazardır və bu halda yeganə martinqal ölçüsü $\tilde{\mathbf{P}}$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\tilde{\mathbf{P}}\{\rho_n = b\} = \frac{r-a}{b-a}, \quad \tilde{\mathbf{P}}\{\rho_n = a\} = \frac{b-r}{b-a}$$

və $(\rho_n)_{n\le N}$ kəmiyyətləri yenə də asılı olmayan ($\tilde{\mathbf{P}}$ ölçüsü üzrə) kəmiyyətlər olur.

Baxılan halda

$$\mathbb{C}(f_N;\mathbf{P}) = \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_N}{(1+r)^N}. \qquad (11)$$

Ödəniş funksiyası $f_N = f(S_N)$ olan (burada $f(x) = (x-K)^+$) avropa tip standart opsion halı üçün (11) düsturu ilə hesablanan ədalətli $\mathbb{C}(f_N;\mathbf{P})$ qiyməti

$$\mathbb{C}(f_N;\mathbf{P}) = S_0 \mathbb{B}(K_0, N; p^*) - K(1+r)^N \mathbb{B}(K_0, N; \mathbf{P})$$

ifadəsilə təyin olunur, burada

$$p^* = \frac{1+b}{1+r}\tilde{\mathbf{P}}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \frac{r-a}{b-a},$$

$$K_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+b}{1+a} \right],$$

$$\mathbb{B}(j, N, p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Kəsilməz zaman. Bu halda bank hesabı, aksiyaların qiyməti və digər maliyyə aktivlərinin dinamikasının təsvirində istifadə olunan əsas modellər – xüsusi təsadüfi proseslərdən *semimartinqallardan* istifadəyə əsaslanan modellərdir. Əgər $X = (X_t)_{t\le T}$ hər hansı aktivin dəyəridirsə, onda hesab olunur ki,

$$X_t = X_0 e^{H_t},$$

burada $H = (H_t)_{t\le T}$ – hər hansı semimartinqaldır [müq. et, (1) və (2) ilə]. (2) və (4)-ün analoqu

$$X_t = X_0 \mathscr{E}(\hat{H}_t)$$

ifadəsi olacaqdır, burada

$$\hat{H}_t = H_t + \frac{1}{2}\left\langle H^c \right\rangle_t + \sum_{0<s\le t} (e^{\Delta H_s} - 1 - \Delta H_s),$$

və $\mathscr{E}(\hat{H}) = (\mathscr{E}(\hat{H})_t)_{t\le T}$ – aşağıdakı düsturla ifadə olunan – Dolean stoxastik eksponentidir:

$$\mathscr{E}(\hat{H}_t) = e^{\hat{H}_t - \frac{1}{2}\left\langle \hat{H}^c \right\rangle_t} \prod_{0<s\le t} (1 + \Delta\hat{H}_s)\, e^{-\Delta\hat{H}_s}.$$

[Stoxastik analizdə qəbul edildiyi kimi $\left\langle H^c \right\rangle$, – H semimartinqalının kəsilməz martinqal komponenti H^c-nin öngörül kvadratik variasiyasıdır (kvadratik xarakteristikasıdır) və $\Delta H_s = H_s - H_{s^-}$].

(B, S) – bazarın bank hesabı $B = (B_t)_{t\le T}$ və müsbət semimartinqallar olan $S = (S_t)_{t\le 1}$ aksiyalarından ibarət olduğu fərz olunur. Diskret zaman halında olduğu kimi hər bir $\pi = (\beta, \gamma)$ strategiyası üçün $X^\pi = (X_t^\pi)_{t\le T}$ kapitalı anlayışı təyin olunur, burada

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t ,$$

$\beta = (\beta_t)_{t\le T}$ və $\gamma = (\gamma_t)_{t\le T}$ öngörül ardıcıllıqlardır.

(6)-ya analoji olaraq π strategiyasını (çantasını),

$$dX_t^\pi = \beta_t\, dB_t + \gamma_t\, dS_t$$

olarsa, özü-özünü maliyyələşdirən strategiya adlandırmaq təbiidir.

Sonuncu münasibət o mənada anlaşılmalıdır ki,

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_u\, dB_u + \int_0^t \gamma_u\, dS_u ,$$

buradakı inteqrallar semimartinqallar üzrə *stoxastik inteqrallardır.*

Stoxastik inteqrallardan istifadə məqbul sayılan $\pi(\beta, \gamma)$ strategiyasına müəyyən məhdudiyyətlər daxil edilməsinə səbəb olur. Bir tərəfdən bu strategiyalar elə olmalıdır ki, uyğun stoxastik inteqrallar mövcud olsun. Digər tərəfdən, iqtisadi mülahizələrə görə X_t^π kəmiyyətləri mümkün qədər böyük mənfi qiymətlər almamalıdır və bu da məqbul π strategiyalarına aşağıdakı tip müəyyən məhdudiyyətlər qoyulmasına səbəb olur:

$$X_t^\pi \ge -\alpha , \quad 0 \le t \le T , \quad \alpha > 0 . \qquad (12)$$

Diskret zaman halı üçün yuxarıda daxil olunmuş arbitraj, arbitrajsızlıq, tamlıq və s. kimi anlayışlar avtomatik olaraq kəsilməz zaman halında da təyin olunur. Bu zaman fundamental A və B teoremləri «əsasən» doğru qalır.

Məs., əgər semimartinqal (B, S) – bazarında martinqal ölçüsü vardırsa, onda (12) şərtini ödəyən məqbul strategiyalar sinfində arbitraj imkanlar olmur.

Belə (B, S) – bazarlarının müxtəlif modelləri arasında ən çox məşhur olan model Blek–Merton–Şouls modelidir:

$$dB_t = rB_t\, dt , \quad dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dw_t) , \qquad (13)$$

burada $r > 0$, $B_0 > 0$, $S_0 > 0$ və $w = (w_t)_{t\le T}$ – standart Viner prosesidir (Braun hərəkəti) [müq. et, Koks – Ross – Rubinşteyn modeli (10) ilə].

(13) modeli arbitrajsız və tam modeldir. $\mathscr{A}_t$ – ölçülən ödəniş funksiyası f_T olan opsionun «rasional», «düzgün» dəyəri üçün uyğun düstur

$$\mathbb{C}(f_T; \mathbf{P}) = B_0\, \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}} \frac{f_T}{B_T}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\tilde{\mathbf{P}}$ – martinqal ölçüdür.

(13) modeli üçün bu düstur [ödəniş funksiyası $f_T = (S_T - K)^+$ olan alıcının standart opsionu üçün] aşağıdakı Blek–Şouls düsturuna çevrilir:

$$\mathbb{C}(f_T; \mathbf{P}) = S_0 \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \right) -$$

$$- Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}} \right),$$

burada

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy .$$

Stoxastik M. r. və maliyyə mühəndisliyinin müxtəlif aspektlərinin ətraflı şərhi (1) və (2)-də verilmişdir və burada bu məsələlərlə bağlı geniş biblioqrafiya da əks olunmuşdur.

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Основы стохастической финансовой математики, т. 1–2, М., 1998; [2] Мельников А. В., Финансовые рынки; стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг, М., 1997.

MALLYAVİN HESABI « Маллявена исчисление; Malliavin calculus », stoxastik variasiyalar hesabı, – diffuzion prosesin keçid ehtimalının hamarlığı və ya Hermander teoreminin və 2-ci tərtib differensial operatorların hipoelliptikliyinin isbatı üçün P. Mallyavinin təklif etdiyi ehtimali yanaşmadır (bax, [1], [2]). M. h.-nın digər interpretasiyaları bir qədər sonra təklif olunmuşdur (bax, [3] – [5]).

Fərz olunur ki, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında d – ölçülü $w = (w(t))$, $0 \le t \le T$ Viner prosesi verilmişdir.

$$\zeta(t) = x + \int_0^t \sigma(\zeta(s))\, dw(s) + \int_0^t b(\zeta(s))\, d(s), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

– İto tənliyinin həlli olan N – ölçülü diffuzion $(\zeta(t))$ prosesinə baxılır, burada $\sigma = \left\| \sigma_{i,k} \right\|$, – $(N \times d)$ – matris, $b = (b_i)$, –

N – ölçülü vektordur, σ , b və $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$, $\frac{\partial b}{\partial x_i}$ – törəmələri sonsuz differensiallanan və məhduddurlar.

Ehtimali terminlərlə Hermander teoremində belə hökm olunur ki, ixtiyari $t > 0$ qiymətində $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\mathbf{P}_t(x, \cdot)$ -nin, $V^{(1)}, ..., V^{(d)}$, $[V^{(1)}, U], ..., [V^{(d)}, U]$ vektor meydanları üzərini örtmüş Li cəbrinin hər bir $x \in \mathbb{R}^N$ nöqtəsində dim. – ölçüsü N -ə malik olarsa, hamar sıxlığı vardır, burada

$$V^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \le k \le d,$$

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

U_i əmsalları σ_{ik} , b_i -lərin və bunların törəmələrinin hər hansı funksiyaları, $[X, Y]$, – X və Y vektor meydanlarının Li mötərizələridir.

σ və b əmsalları üzərinə qoyulan şərtlərə görə tənliyin güclü həlli vardır və bu həll Viner prosesinin funksionalıdır. Buna görə də, Hermander teoremi onu ifadə edir ki, $\mathbf{M}\left| A[w] \right|^2 < \infty$ şərtini ödəyən hər hansı A^w – ölçülən $A[w]$ funksionalının hamar ehtimal sıxlığı vardır, burada $A^w = \sigma\{w_s,\ 0 \le s \le T\}$, – w prosesinin doğurduğu σ – cəbridir (Bundan sonra $d = 1$ götürülür).

M. h.-nın əsas anlayışları (bax, [5]). $A[w]$ funksionalı çoxqat Viner inteqrallarından ibarət sıra şəklində ifadə olunur, yəni

$$A[w] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$$

burada

$$I_n = \int\limits_{s_1 < ... < s_n \le T} \int f_n(s_1 < ... < s_n)\, d w_{s_1} ... d w_{s_n},$$

$$f_n \in L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

Aşağıdakı anlayışlar daxil olunmuşdur.

Mallyavin törəməsi:

$$L A[w] = \sum_{n=0}^{\infty} n I_n ;$$

$u \in L^2(\Omega, \mathcal{A}^w, \mathbf{P})$ istiqaməti üzrə törəmə:

$$D_u A[w] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{A[w + \varepsilon u] - A[w]}{\varepsilon}$$

kvadratik forma:

$$(DA, DA) = \sum_{i=1}^{\infty} (D_{\eta_i} A)^2 ,$$

burada η_i , – $L^2([0, T])$ -də ortonormalanmış bazisdir;

bixətti forma:

$$(DA_1, DA_2) = \frac{1}{4} \left[(D(A_1 + A_2), D(A_1 + A_2)) - \right.$$
$$\left. - (D(A_1 - A_2), D(A_1 - A_2)) \right]$$

M. h.-nın əsas qaydaları:

$$LA_1A_2 = A_1 L A_2 + A_2 L A_1 - 2(DA_1, DA_2) \qquad (1)$$

(bu tənlik inteqral şəklində hissə-hissə inteqrallanma düsturu adlanır),

$$L \varphi(A) = \varphi'(A) L A - \varphi''(A)(DA, DA) . \qquad (2)$$

$A[w]$ funksionalının paylanma sıxlığının varlığının isbatı (ölçülər üçün Furye çevirmələri nəzəriyyəsinə əsasən)

$$\left| \mathbf{M} \varphi'(A) \right| \le K \left\| \varphi \right\|_c , \quad \varphi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^1) ,$$

statistik qiymətinin alınmasına gətirilir, bu statistik qiymət (1), (2) münasibətlərinə əsasən alınır (bax, [5]).

M. h.-nın tətbiqinin olduqca genişləndirilməsi və bu nəzəriyyənin dərinləşdirilməsi S. Kusuoka və D. Struk ([6]), J. Norris ([7], ümumi Hermander şərtlərində stoxastik differensial tənlik), J. Bismut ([8], [9]) və b. (sıçrayışlarlı stoxastik differensial tənlik, asimptotik məsələlər və böyük yayınmalar) tərəfindən həyata keçirilmişdir. S. Vatanabe ([10], [11]) («ümumiləşmiş» M. h.-nın yaranması), D. Nyualar və M. Zakai ([12]) M. h.-nın *genişləndirilmiş stoxastik inteqral* nəzəriyyəsinin dərin əlaqələri olduğunu aydınlaşdırmışlar (bax, [13], [14]).

M. h.-nın əsas anlayışları ilə S. Vatanabe, N. İkeda [15], D. Bell [16], A. Yu. Veretennikovun [17] işlərində tanış olmaq olar.

Əd.: [1] Malliavin P., в сб.: Proceedings of the international conference on stochastic differential equations (Kyoto, 1976), Tokyo, 1978, p. 195–263; [2] Malliavin P., в кн.: Stochastic analysis, N. Y. – [a. o.], 1978, p. 199–214; [3] Stroock D. W., «Math. Systems Theory», 1981, v. 14, № 1, p. 25–65; № 2, p. 141–71; [4] Bismut J.-M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 56, S. 469–505; [5] Zakai M., «Acta Appl. Math.», 1985, № 3, p. 175–207; [6] Kusuoka S., Stroock D., в кн.: Stochastic analysis. Proceedings of the Taniguchi international symposium on stochastic analysis (Katata and Kyoto, 1982), Amst. – [a. o.], 1984, p. 271–306; [7] Norris J. L., «Lect. Notes in Math.», 1986, v. 1204, p. 101–30; [8] Bismut J.-M., Large deviations and the Malliavin calculus, Boston – [a. o.], 1984; [9] Bismut J.-M., «Ann. sci. Ecole norm. supèr.», 1984, sèr. 4, t. 17, p. 507–622; [10] Watanabe S., Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus, B. – [a. o.], 1984; [11] Watanabe S., «Ann. Probab.», 1987, v. 15, № 1, p. 1–39; [12] Nualart D., Zakai M., «Probab. Theory and Related Filds», 1986, v. 73, № 2, p. 255–80; [13] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен», 1975, т. 20, в. 2, с. 223–38; [14] Кабанов Ю. М., Скороход А. В., в сб.: Труды школы–семинара по теории случайных процессов, Друскининкой, 25–30 нояб. 1974, Вильнюс, 1975, с. 123–67; [15] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [16] Bell D. R., The Malliavin calculus, L., 1987; [17] Веретенников А. Ю., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3, с. 113–25.

MALLYAVİN STOXASTİK TÖRƏMƏSİ « Малявена стохастическая производная; Malliavin stochastic derivative » – bax, *Stoxastik törəmə.*

MALTUS PARAMETRİ « мальтусовский параметр; Malthusian parameter » ümumi şaxələnən prosesin, –

$$\mathbf{M} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\, d N(t) = 1$$

tənliyinin kökü olan, həqiqi α ədədidir, burada $N(t)$, – $t = 0$ anından başlayaraq $[0, t]$ müddəti ərzində bir hissəciyin yaratdığı varislərin sayıdır. Əgər $\mathbf{M}\, N(\infty) < 1$ olarsa, onda M. p. mövcud olmaya bilər. $\mu(t)$ – ümumi şaxələnən prosesdə t anında hissəciklər sayı olsun. $N(t)$ prosesinin xarakteristikalarına bəzi məhdudiyyətlərlə

$$\mathbf{M}\mu(t) \sim ce^{-\alpha t}, \quad c > 0, \; t \to \infty$$

münasibəti doğrudur. Bu asimptotik ifadə populyasiyadakı hissəciklər sayının artması haqqında Maltus qanununa analojidir.

Bax, *Şaxələnən proses* yaşından asılı.

Əd.: [1] Ватутин В. А., Зубков А. М., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [2] Jagers P., Branching processes with biological application, L. – [a. o.], 1975.

MANN – UİTNİ KRİTERİSİ « Манна – Уитни критерий; Mann – Whitney test » – $n + m$ sayda bütün elementləri qarşılıqlı asılı olmayan və kəsilməz paylanma qanunlarına tabe olan $X_1, \ldots, X_n$ və $Y_1, \ldots, Y_m$ seçimlərinin bircinsliyi haqqında H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. H. Mann və D. Uitni tərəfindən [1]-də təklif olunmuş bu kriteri

$$U = W - \frac{1}{2} m(m+1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}$$

statistikası əsasında qurulmuşdur, burada W – *Uilkokson kriterisinin* statistikasıdır ki, məhz H_0 hipotezinin yoxlanılmasına xidmət edir və ümumi variasion sırada ikinci seçimin elementlərinin ranqlarının cəminə bərabərdir, δ_{ij} isə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } X_i < Y_j \text{ olarsa,} \\ 0, & \text{əks halda.} \end{cases}$$

Beləliklə, U statistikası ikinci seçim elementlərinin birinci seçim elementlərindən böyük olduğu halların sayını hesablayır. U statistikasının tərifindən aydındır ki, əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda

$$\mathbf{M}U = nm/2, \quad \mathbf{D}U = nm(n + m + 1)/12 \qquad (*)$$

və bundan başqa, bu statistika Uilkokson statistikası W -nun malik olduğu bütün xassələrə, o cümlədən, (*) parametrlərli asimptotik normallıq xassəsinə də malikdir, buna görə də, praktikada yalnız $\min\{n, m\} > 25$ olduğu halda M. – U. k. istifadə olunur.

Əd.: [1] Mann H. B., Whitney D. R., «Ann. Math. Statist.», 1947, v. 18, p. 50–60.

***MARGİNAL DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİYASI « маргинальная функция правдоподобия; marginal likelihood function »** – bax, *Doğruyaoxşarlıq funksiyası.*

MARGİNAL PAYLANMA « маргинальное распределение; marginal distribution », xüsusi paylanma – *çoxölçülü paylanmanın* koordinat oxuna hər hansı koordinat vektorlarının toplusu ilə doğurulmuş alt fəzaya proyeksiyasıdır. $F(x_1, \ldots, x_n)$ n – ölçülü $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vektorunun paylanma funksiyası olarsa, $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$, $m < n$ şərtlərilə təyin olunan ixtiyari m sayda $(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ toplusunun paylanma funksiyası F funksiyasına nəzərən marginal paylanma funksiyası, uyğun ehtimal paylanması marginal paylanma adlanır.

M. p. paylanma funksiyası F vasitəsilə sadə ifadə olunur, məs., $m = 1$ olduqda ξ_1-in birölçülü marginal paylanma funksiyası

$$F_1(x_1) = F\left(x_1, \underbrace{\infty, \ldots, \infty}_{n-1 \text{ sayda}}\right)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

MARGİNAL PAYLANMA FUNKSİYASI « маргинальная функция распределения; marginal distribution function » – bax, *Marginal paylanma.*

MARGİNAL YANAŞMA « марджиналистический подход; marginal approach » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

MARKOV ANI « марковский момент; Markov stopping time » – bax, *Dayanma anı.*

MARKOV AVTOMORFİZMİ « Маркова автоморфизм; Markov automorphism » – bax, *Markov yerinidəyişməsi.*

MARKOV BƏRABƏRSİZLİYİ « Маркова неравенство; Markov's inequality » – bax, *Çebışev bərabərsizliyi.*

MARKOV BƏRPA PROSESİ « марковского восстановления процесс; Markov renewal process » – bax, *Semi – Markov prosesi.*

MARKOV BƏRPA TƏNLİYİ « марковского восстановления уравнение; Markov renewal equation » – bax, *Semi – Markov prosesi.*

MARKOV DİNAMİK SEMİ – QRUPU « марковская динамическая полугруппа; Markov dynamical semigroup » – bax, *Kvant dinamik semi – qrup.*

MARKOV XASSƏSİ « марковское свойство; Markov property » təsadüfi prosesin – *təsadüfi prosesin* hər hansı t anında (indiki) vəziyyəti məlum olduqda onun t anından sonrakı (gələcək) vəziyyətinin evolyusiyası və bu ana qədərki (keçmiş) evolyusiyasının şərti asılı olmamazlığı xassəsidir. M. x.-nə ilk dəfə [1]-də A. A. Markov tərəfindən 1907-də təsadüfi ardıcıllıqlar üçün baxılmışdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası və $\zeta = \zeta_t(\omega)$, $t \in T \subseteq (-\infty, \infty)$ – qiymətləri hər hansı ölçülən $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ fəzasından olan təsadüfi proses olsun. Hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ anı üçün keçmiş hadisələr σ – cəbri – $\mathcal{N}_t = \sigma\{\zeta_s, s \le t\}$ və gələcək hadisələr σ – cəbri – $\mathcal{N}^t = \sigma\{\zeta_u, u \ge t\}$ təyin olunur. İxtiyari $A \in \mathcal{N}_t$ keçmiş hadisə, $B \in \mathcal{N}^t$ gələcək

h a d i s ə adlanır. Əgər ixtiyari $t \in T$ və ixtiyari $A \in \mathcal{N}_t$, $B \in \mathcal{N}^t$ hadisələri üçün

$$\mathbf{P}\{AB \mid \zeta_t\} = \mathbf{P}\{A \mid \zeta_t\}\, \mathbf{P}\{B \mid \zeta_t\} \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}) \quad (1)$$

münasibəti ödənilərsə, ζ təsadüfi prosesi M a r k o v x a s s ə s i n ə malikdir, deyilir. (1) xassəsi ixtiyari $h > 0$ və $\Gamma \in \mathscr{B}$ üçün

$$\mathbf{P}\{\zeta_{t+h} \in \Gamma \mid \mathcal{N}_t\} = \mathbf{P}\{\zeta_{t+h} \in \Gamma \mid \zeta_t\} \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}) \quad (2)$$

münasibətinə də ekvivalentdir. Markov xassəli təsadüfi proseslərə *Markov prosesləri* deyilir. Ω fəzasında $\mathbb{A} = \{\mathscr{A}_t\}_{t \in T}$ σ – cəbrlər axınının verildiyi fərz olunur və ζ_t, – $\mathbb{A}$ ilə uzlaşan proses (yəni $\mathcal{N}_t \subseteq \mathscr{A}_t$; bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses*) olsun.

İxtiyari $h > 0$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ üçün

$$\mathbf{P}\{\zeta_{t+h} \in \Gamma \mid \mathscr{A}_t\} = \mathbf{P}\{\zeta_{t+h} \in \Gamma \mid \zeta_t\} \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}) \quad (3)$$

şərti də M a r k o v x a s s ə s i adlandırılır və bu xassə (2) xassəsinin ümumiləşmiş formasıdır. (1)-dən fərqli olaraq, (3) xassəsinə görə keçmiş və gələcəyin şərti asılı olmamazlığını hökm etmək olmaz. Bir sıra hallarda, M. x., *ciddi Markov xassəsi* adlandırılan, gücləndirilmiş formada – (2) və (3) düsturlarında qeyd olunmuş t anlarının *dayanma anları* $\tau(\omega)$ -larla əvəz olunması ilə alınan düsturlarla ifadə olunur.

M. x. anlayışını təsadüfi meydanlar üçün də vermək olar. Əgər hər hansı sinfin ixtiyari oblastı üçün (məs., kompakt sərhədli ixtiyari qapalı oblast üçün) oblastda meydanın qiymətləri və oblastdan xaricdə meydanın qiymətləri meydanın oblast sərhədindəki (və ya onun infinitezimal ətrafında) verilmiş qiymətlərindən şərti asılı olmazsa, təsadüfi meydan üçün M. x. ödənilir, deyilir. Bu tərifi müxtəlif üsullarla səlis ifadə etmək olar və bu da birbirindən olduqca fərqli təriflərin alınmasına səbəb olur. Meydanların ən maraqlı sinifləri – oblastın sərhədində meydanın qiymətlərinə sərhədin sonsuz kiçik ətrafındakı qiymətlərin, o cümlədən, sərhəddə meydanın normal törəmələrinin də daxil edildiyi nəzərə alınan siniflərdir.

Bax, *Markov təsadüfi meydanı.*

Əd.: [1] M a r k o v A. A., «Изв. физ.-матем. об-ва Казан. ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135–57; [2] D o o b J. L., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] G i k h m a n I. I., S k o r o k h o d A. V., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [4] R o z a n o v Yu. A., Марковские случайные поля, М., 1981.

MARKOV XASSƏSİ GENİŞ MƏNADA « марковость в широком смысле; wide sense Markov property » – bax, *Təsadüfi funksiya*; g e n i ş m ə n a d a x a s s ə.

MARKOV İNİKASI; d i n a m i k i n i k a s **« марковское отображение;** д и н а м и ч е с к о е о т о б р а ж е н и е; **Markov,** d y n a m i c a l m a p **»** – statistik mexanikada cəbri şəkildə, həm də qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində *müşahidələnənlərin* və sistemin *vəziyyətlərinin*, ümumiyyətlə, çevrilməyən evolyusiyasının sonlu dəyişikliyini təsvir edən inikasdır. $\mathfrak{A}$ və $\mathfrak{B}$ – vahidlərə malik hər hansı C^* – cəbrlər olsun (bax, *Cəbri, müşahidələnənlərin*). $\mathfrak{A}$ cəbrindən vahidi $\mathfrak{B}$ cəbrindən vahidə keçirən *tamamilə müsbət* Φ *inikasına* $\mathfrak{A}$ -dan $\mathfrak{B}$ -yə k e ç i d i n i k a s ı deyilir. Əgər $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ olarsa, keçid inikası M a r k o v i n i k a s ı adlanır.

Hər bir keçid inikası üçün qoşma Φ^* inikası vardır ki, o, affin inikasdır və $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ vəziyyətlər çoxluğunu $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ -ya zəif * – kəsilməz inikas etdirir. Əgər $\mathfrak{A}$ və $\mathfrak{B}$, – W^* – cəbrlər olarsa və inikas ixtiyari, məhdud istiqamətlənmiş özü-özünə qoşma $\{\zeta_\alpha\} \subset \mathfrak{A}$ elementlərinin çoxluğu üçün $\sup\limits_\alpha \Phi(\zeta_\alpha) = \Phi(\sup\limits_\alpha \zeta_\alpha)$ münasibəti mənasında normal inikas olarsa, onda Φ^* inikası normal vəziyyətləri normal vəziyyətlərə çevirir.

M i s a l l a r. 1) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ – ölçülən Ω fəzasında məhdud ölçülən funksiyaların kommutativ cəbri, $\mathbf{P}\{d\omega \mid \omega'\}$, – Ω -da keçid ehtimalı olsun.

$$\Phi(\zeta)(\omega') = \int_\Omega \mathbf{P}\{d\omega \mid \omega'\}\, \zeta(\omega),\ \zeta \in \mathfrak{A}$$

münasibəti M. i. təyin edir. Bu halda Φ^* Ω -da bütün ehtimal ölçülərinin qabarıq çoxluğunda affin inikas doğurur.

2) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(H)$, – H Hilbert fəzasında bütün məhdud operatorların cəbri olsun. Hər bir normal M. i.

$$\Phi(\zeta) = \sum_i V_i^* \zeta V_i$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $V_i \in \mathfrak{A}(H)$, $\sum\limits_i V_i^* V_i = \mathbf{I}$ – vahidi operatordur.

Kvant ölçmə nəzəriyyəsində s u b m a r k o v i n i k a s ı adlanan t a m a m i l ə m ü s b ə t Φ i n i k a s ı əməli mühüm rol oynayır, bu əməl $\Phi(\mathbf{I}) \leq \mathbf{I}$ şərtini ödəyir və $\mathfrak{A}$ C^* – cəbrinə Φ^* inikasını təmin edir.

Əd.: [1] K a d i s o n R., «Topology», 1965, v. 3, suppl. 2, p. 177–98; [2] S t ø r m e r E., «Lect. Notes in Phys.», 1974, v. 29, p. 85–106; [3] M o r o z o v a E. A., Ч е н ц о в N. N., «Матрицы вероятностей и стохастические суперматрицы», М., 1973 (ИПМ АН СССР, препринт № 84).

MARKOV KEÇİD FUNKSİYASI « марковская переходная функция; Markov transition function » – bax, *Keçid funksiyası* M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n.

MARKOV QAUSS PROSESİ « марковский гауссовский процесс; Markov Gaussian process » – bax, *Qauss – Markov prosesi.*

MARKOV MƏLUMATLAR MƏNBƏİ « марковский источник сообщений; Markov source » – diskret zamanlı məlumatlar mənbəidir, mənbənin hasil etdiyi məlumatları ifadə edən X_k təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığının sonlu *Markov zənciri* əmələ gətirməsi ilə səciyyəvidir. Diskret stasionar M. m. m. U üçün (bu Markov zənciri stasionar olarsa və bütün X_k -lar eyni bir sonlu $\mathfrak{X}$ çoxluğundan qiymətlər alarsa) bərpaolunmanın dəqiqliyi şərtində məlumatların yaranma sürəti

$$\overline{H(U)} = H(X_0 \mid X_{-k}^{-1})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada k – Markov zəncirinin tərtibidir,

$$X_{-k}^{-1} = \{X_l,\ -k \leq l \leq -1\},$$

H – entropiyadır.

Əd.: [1] G a l l a g e r R., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., 1974; [2] K o l e s n i k V. D., P o l t y r e v G. Sh., Курс теории информации, М., 1982.

MARKOV MODELİ « марковская модель; Markov model » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

MARKOV ÖLÇÜSÜ « марковская мера; Markov measure » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

MARKOV PROSESİ « марковский процесс; Markov process » – prosesin ixtiyari qeyd olunmuş t anından sonrakı evolyusiyası (gələcək) və t anına qədərki evolyusiyası (keçmiş) prosesin t anındakı (indiki) məlum vəziyyətindən şərti asılı olmayan *təsadüfi prosesdir*. M. p.-ni təyin edən, gələcək və keçmişin şərti asılı olmamazlığı xassəsi *Markov xassəsi* adlandırılmışdır; bu xassə ilk dəfə [1]-də A. A. Markov tərəfindən təsadüfi ardıcıllıqlar üçün dürüst ifadə olunmuşdur. Lakin L. Başelyenin [2] əsərində Braun hərəkətinin M. p. kimi çox da ciddi olmayan izahına cəhd edilmişdir: belə yanaşmanın düzgünlüyü N. Viner tərəfindən [3]-də əsaslandırılmışdır. Kəsilməz zamanlı M. p. ümumi nəzəriyyəsinin əsasları hələ 1931-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən qoyulmuşdu (bax, [4]) və burada göstərilmişdi ki, M. p.-nin keçid funksiyası müəyyən bir parabolik differensial tənliyi ödəyir. Bu fakt M. p.-nin qurulması və analizində 2-ci tərtib differensial tənliklər nəzəriyyəsindən istifadə olunması üçün əsas olmuşdur; V. Feller özünün [5], [6]-da dərc olunmuş işlərində bu sahəni olduqca zənginləşdirmişdir. M. p. nəzəriyyəsinin bu ilkin inkişaf mərhələsində, əsas etibarilə, M. p.-nin trayektoriyaları deyil, onun keçid funksiyasının xassələri araşdırılırdı. Lakin bir sıra məsələlərlə əlaqədar olaraq, M. p.-nin trayektoriyalarının tədqiq olunması zərurəti yarandı və bununla bağlı Markov xassəsini təsadüfi zaman anlarının bəzi siniflərinə də şamil etmək zəruri oldu (*ciddi Markov xassəsi*). Kəsilməz zamanlı proseslər üçün bunu həyata keçirmək mürəkkəb problemdir; ciddi Markov xassəsi C. Dub (J. Doob) tərəfindən öyrənilmişdi, lakin indi, ümumi qəbulolunmuş formasında, bu xassə Ye. B. Dınkin (E. B. Dinkin) və A. A. Yuşkeviç tərəfindən [7]-də isbat olunmuşdur.

20-ci əsrin 50-ci illərində M. p. nəzəriyyəsinin inkişafı M. p. nəzəriyyəsinin bəzi bölmələrinin müstəqil istiqamətlərinin, ilk növbədə, diffuzion proseslər və şaxələnən proseslərin müstəqil sahələr kimi ayrılmasına səbəb oldu. Eyni zamanda belə bir zərurilik yarandı ki, M. p.-nin tərifi elə ifadə olunmalıdır ki, onun başlanğıc vəziyyətinin dəyişməsi bu tərifdə əks olunsun. Nəzəriyyənin bununla əlaqədar yenidən işlənilməsi istiqamətində Ye. B. Dınkinin mühüm xidməti xüsusi qeyd olunmalıdır (bax, [8], [9]). Bununla əlaqədar, M. p. ilə differensial tənliklərin əlaqəsinin də xarakteri dəyişmiş oldu: əgər əvvəllər M. p.-nin tədqiqatında yalnız analitik metodların istifadəsi nəzərdə tutulurdusa, indi differensial tənliklərin həllini M. p. nəzəriyyəsinin köməyilə, onları prosesin xüsusi funksionallarının riyazi gözləmələri kimi ifadə etməklə qurmaq imkanı yarandı. M. p. nəzəriyyəsini differensial tənliklərlə (stoxastik İto inteqralları və stoxastik differensial tənliklər kimi, bax, [10]) əlaqələndirən bir sıra ideya və metodlar sonradan qeyri – Markov prosesləri üçün də işlənildi. M. p. nəzəriyyəsi zəruri bir texniki aparatın – «təsadüfi proseslərin ümumi nəzəriyyəsi» adlandırılan, sonradan martinqallar nəzəriyyəsində və idarəolunan təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində geniş surətdə tətbiq olunan bir aparatın yaranmasına səbəb oldu. 20-ci əsrin 60–70-ci illərində M. p. nəzəriyyəsinin inkişafına C. Dubun göstərmiş olduğu – klassik potensial nəzəriyyəsi və M. p.-nin əlaqələrinin mühüm təsiri olmuşdu (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün).

M. p.-ləri sinfi ən mühüm təsadüfi proseslər siniflərindən biridir və bu sinfin mühüm tətbiqi əhəmiyyəti vardır. M. p. aparatı bir çox real obyektlərin təsviri və araşdırılmasında istifadə olunur, məs., kütləvi xidmət sisteminin təsviri üçün, radiorabitə proseslərinin modelləşdirilməsi üçün. M. p.-nin tətbiqi əhəmiyyəti ilk öncə onunla təyin edilir ki, bunlar bir çox real proseslərin təsviri üçün olduqca adekvat formadır; M. p. olmayan təsadüfi prosesləri, əksər hallarda, olduqca sadə M. p. şəklinə – prosesin özünün sturukturuna əlavə koordinatlar daxil etməklə mürəkkəbləşdirərək – gətirmək olur (bax, məs., *Semi – Markov* prosesi). İkincisi, M. p. üçün prosesin tələb olunan xarakteristikalarını tapmağa və tətbiqlə əlaqədar yaranan bir çox məsələləri həll etməyə imkan yaradan inkişaf etmiş riyazi aparat vardır. M. p.-nin tətbiqi məsələləri [13], [14]-də işıqlandırılmışdır.

Bu məqalə, əsas etibarilə, əsas tərifl ərə həsr olunmuşdur; M. p. ilə əlaqədar digər informasiya «Markov prosesi» adı ilə başlanan məqalələrdə, həmçinin: *Markov xassəsi*, *Markov zənciri*, *Markov semi – qrupu*, *Diffuzion proses*, *Şaxələnən proses*, *Keçid funksiyası*, *Kolmoqorov – Çepmen tənliyi*, *İnfinitezimal operator*, *Xarakteristik operator*, *Ciddi Markov prosesi*, *Feller prosesi*, *Hant prosesi*, *Martin sərhədi* Markov prosesinin, *Ehtimali həlli*, *differensial tənliklərin* adlı məqalələr seriyasında verilmişdir.

Markov xassəsi. Markov xassəsinin yuxarıda qeyd olunmuş şəkildə formalaşması müxtəlif üsullarla edilə bilər ki, bu da M. p.-nin olduqca müxtəlif tərifl ərinə gətirir. Bunlardan ən sadə və ən təbiisi aşağıdakı tərifdir. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında, qiymətləri ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ vəziyyətlər fəzasından olan $\zeta_t = \zeta(t),\ t \in T \subseteq (-\infty, \infty)$ təsadüfi prosesinin verildiyi fərz olunur. Hər bir $t \in T$ üçün $\mathscr{A}_{t_-} = \sigma\{\zeta_s, s \le t\}$ – keçmişin σ – cəbri və $\mathscr{A}_{t_+} = \sigma\{\zeta_u, u \ge t\}$ – gələcəyin σ – cəbri təyin olunur. Əgər ixtiyari $t \in T$ və ixtiyari $A \in \mathscr{A}_{t_-}$, $B \in \mathscr{A}_{t_+}$ hadisələri üçün Markov xassəsi –

$$\mathbf{P}(AB \mid \zeta_t) = \mathbf{P}(A \mid \zeta_t)\,\mathbf{P}(B \mid \zeta_t) \qquad (1)$$

bərabərliyi $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilərsə, ζ_t prosesi Markov prosesi adlanır. Bu tərifdə keçmiş və gələcək simmetrikdirlər: $\zeta_t^* = \zeta_{-t}$ çevrilmiş prosesinə keçdikdə Markov xassəsi öz qüvvəsində qalır.

Ən maraq doğuran və tez-tez təsadüf olunan hallar – T -nin həqiqi oxun intervalı [kəsilməz zaman halında: ən çox istifadə olunan $T = [0, \infty)$ və ya $T = (-\infty, \infty)$ halları] və ya tam ədədlər çoxluğunun altçoxluğu [diskret zaman halında: bir qayda olaraq $T = \{0, 1, 2, ...\}$ və bəzən də $T = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ halları] olduğu hallardır. Diskret zamanlı M. p. – *Markov zənciri* adlanır. Markov zəncirlərin ən mühüm altsinfi vəziyyətlər fəzası $\mathscr{E}$ -nin vəziyyətləri sayı hesabini aşmayan zəncirlər sinfidir. (Vəziyyətləri fəzasının vəziyyətləri sayı hesabini aşmayan kəsilməz zamanlı M. p. də kəsilməz zamanlı Markov zənciri adlanır). *Diffuzion proseslər*, asılı olmayan artımlarlı *təsadüfi proseslər*, o cümlədən, *Viner prosesi* və *Puasson prosesi* – kəsilməz zamanlı M. p.-ləridir.

Markov prosesi. (1) Markov xassəsinə əsaslanan M. p.-nin yuxarıda verilmiş tərifi tətbiqi nöqteyi – nəzərdən təbii və münasib olduğu halda, nəzəriyyə qurmaq üçün əlverişli deyildir. Belə ki, ixtiyari bir anda ixtiyari başlanğıc vəziyyətindən evolyusiyada olan M. p.-ni araşdırmaq, yəni faktiki olaraq, müəyyən sürətdə bir-birilə uzlaşmış təsadüfi proseslər ailəsini tədqiq etmək mümkünlüyü tələb olunur. Bu ideyanı müxtəlif üsullarla həyata keçirmək olar. Bunlardan ən yaxşı işlək tərif aşağıdakı sayılır ([8], [9]-la müqayisədə). $(\Omega, \mathscr{A})$ – ölçülən fəzasının və hər bir $s < t$ üçün $[s, t]$ parçasında müşahidə olunabilinən hadisələr

çoxluğu kimi interpretasiya olunan $\mathcal{A}_{[s,t]} \subseteq \mathcal{A}$ σ – cəbrinin verildiyi fərz olunur, $s, t \in [-\infty, \infty]$. Və fərz olunur ki, əgər $[s, t] \subseteq [u, v]$ olarsa, $\mathcal{A}_{[s,t]} \subseteq \mathcal{A}_{[u,v]}$. $\zeta_t(\omega)$, $t \in (-\infty, \infty)$ – qiymətləri ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasından olan təsadüfü proses olsun, $t \in [s, u]$ olduqda isə ζ_t-nin $\mathcal{A}_{[s,u]}$-ya nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur. Daha sonra fərz olunur ki, hər bir $x \in \mathscr{E}$, $t \in (-\infty, \infty)$ üçün $\mathcal{A}_{[t,\infty]}$ σ – cəbrində elə $\mathbf{P}_{t,x}$ ehtimal ölçüsü verilir ki, hər bir $A \in \mathcal{A}_{[t,\infty]}$ üçün $\mathbf{P}_{t,x}$ funksiyası x -ə görə ölçüləndir. Əgər ixtiyari $s \le t$, $s, t \in (-\infty, \infty)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{A}_{[t,\infty]}$ üçün

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A \mid \mathcal{A}_{[s,t]}\} = \mathbf{P}_{t,\xi_t}(A) \quad (\ \mathbf{P}_{s,x} \text{ – sanki yəqin}\ ) \qquad (2)$$

ödənilərsə, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}_{t,s})$ üçlüyü $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında Markov prosesi (qırılmayan) adlanır. $\mathbf{P}_{s,x}$ ölçüsü s anında x vəziyyətindən başlayan prosesə müvafiq ölçü kimi interpretasiya olunur; bununla əlaqədar olaraq, adətən, fərz olunur ki, $\mathbf{P}_{s,x}\{\zeta_s \in \Gamma\} = \mathbf{I}_\Gamma(x)$, – Γ çoxluğunun indikator funksiyasıdır.

Aşağıda yalnız qırılmayan proseslərə baxılır; lakin bir sıra təbii konstruksiyalar elə proseslərin əmələ gəlməsinə gətirir ki, bunlar zamanın hər bir anı üçün təyin olunmur və yalnız müəyyən ana qədər təyin olunur (bax, *Qırılma anı*, *Qırılan Markov prosesi*).

$\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}_{t,s})$, – (2) tərifi mənasında M. p. olsun. İxtiyari qeyd olunmuş s_0, x_0 üçün ζ_t, $t \ge s_0$ təsadüfi prosesi (1) tərifi mənasında $\mathbf{P}_{s_0,x_0}$ ölçüsünə nəzərən M. p.-dir. Lakin (1) tərifindən fərqli olaraq, verilən tərif zamanın çevrilməsinə görə invariant deyildir. Bu vəziyyət çevrilmiş zamanda prosesin trayektoriyalarının araşdırılmasında, həm də dual M. p.-lərinin öyrənilməsində olduqca namünasibdir. Buna görə də, bəzən aşağıdakı simmetrik tərif daha münasibdir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, ζ_t – qiymətləri vəziyyətlər fəzası $\mathscr{E}$ -dən olan təsadüfi proses olsun. $\mathcal{A}_{[s,t]}$ σ – cəbrlərinin (2) tərifindəki kimi olduğu fərz olunur. Daha sonra fərz olunur ki, hər bir $t \in (-\infty, \infty)$ və $x \in \mathscr{E}$ üçün $\mathcal{A}_{[t,\infty]}$ σ – cəbrində $\mathbf{P}_{t,x}$ ehtimal ölçüsü, $\mathcal{A}_{[-\infty,t]}$ σ – cəbrində isə ${}_{t,x}\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü təyin olunmuşdur.

Əgər ixtiyari $s < u$, $x \in \mathscr{E}$, $A \in \mathcal{A}_{[u,\infty]}$, $B \in \mathcal{A}_{(-\infty,s]}$ üçün

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\{A \mid \mathcal{A}_{(-\infty,u]}\} = \mathbf{P}_{u,\zeta_u}(A) \quad (\mathbf{P} \text{ – sanki yəqin}),\\ &\mathbf{P}_{s,x}\{A \mid \mathcal{A}_{[s,u]}\} = \mathbf{P}_{u,\zeta_u}(A) \ (\mathbf{P}_{s,x} \text{ – sanki yəqin}),\\ &\mathbf{P}\{B \mid \mathcal{A}_{[s,\infty)}\} = {}_{s,\xi_s}\mathbf{P}(B) \quad (\mathbf{P} \text{ – sanki yəqin}),\\ &{}_{u,x}\mathbf{P}\{B \mid \mathcal{A}_{[s,u]}\} = {}_{s,\xi_s}\mathbf{P}(B) \quad (\ {}_{u,x}\mathbf{P} \text{ – sanki yəqin}), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

münasibətləri ödənilərsə, $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[s,t]}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{s,x}, {}_{t,x}\mathbf{P})$ toplusu ikitərəfli Markov prosesi adlanır.

(2) tərifi halında olduğu kimi, bir sıra məsələlərdə təsadüfi zaman intervalında təyin olunmuş ikitərəfli Markov prosesləri yaranır; bu halda hərəkətin başlanğıc və final anlarının təsadüfi olduqlarını fərz etmək lazım gəlir (bax, [15]). (3) tərifinin digər mühüm ümumiləşməsi – $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ şərtinin birölçülü $\mathbf{P}\{\zeta_t \in \Gamma\}$ paylanmalarının σ – sonlu olması şərtilə əvəz olunmasından alınır; belə proseslər dual M. p.-nə baxıldıqda və həm də ikitərəfli M. p.-lərinin bəzi çevrilmələri nəticəsində təbii surətdə yaranır (bax, *Dual Markov prosesi*, [15], [16]). Nəhayət, bəzi mühüm konstruksiyalar vəziyyətlər fəzası zamandan asılı proseslərə gətirir: hər bir t qiymətində $\zeta_t \in \mathscr{E}_t$.

(1), (2), (3) tərifl ərinin bir-birinə olduqca yaxın olduqları aşağıdakı nəticədən aydındır. Doğrudan da, ζ_t, – (1) mənasında tərifl ə verilmiş M. p. olsun. Ω, – $\mathscr{E}$ fəzasında bütün $\{\omega_t\}_{t \in T}$ trayektoriyalarının fəzası və $\zeta_t(\omega) = \omega_t$ olsun. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ – Borel fəzası, yəni Borel σ – cəbrli tam separabel metrik fəzasının Borel altçoxluğuna izomorf fəza olsun. Aydınlaşdırmaq olur ki, bu şərtlərlə, $\mathcal{A}_{[s,u]} = \sigma\{\zeta_t, s \le t \le u\}$ qəbul edərək iki elə $\{\mathbf{P}_{t,x}\}$ və $\{{}_{t,x}\mathbf{P}\}$ ehtimal ölçüləri ailəsini qurmaq olar ki, (3) ödənilsin.

Bundan sonra M. p. (2) tərifi mənasında M. p. anlaşılır.

$\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_{[x,t]}, \mathbf{P}_{s,x})$ M. p. və $\mathscr{E}$ -də ixtiyari ehtimal ölçüsü μ üçün $\mathbf{P}_{s,\mu}$ ölçüsü

$$\mathbf{P}_{s,\mu}(A) = \int \mu(dx)\, \mathbf{P}_{s,x}(A)$$

düsturu ilə təyin olunur. $\mathbf{P}_{s,\mu}$ başlanğıc anı s və ilkin paylanması μ olan prosesə müvafiq ölçüdür.

$p(s, x, t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}(\zeta_t \in \Gamma)$ funksiyasına M. p.-nin keçid funksiyası deyilir. İxtiyari $s < t < u$, $x \in \mathscr{E}$, $\Gamma \in \mathscr{B}$ üçün keçid funksiyası –

$$\int p(s, x; t, dy)\, p(t, y; u, \Gamma) = p(s, x; t, \Gamma) \qquad (4)$$

Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyir.

Öz növbəsində əgər $p(s, x; t, \Gamma)$, x -ə görə ölçülən funksiya, Γ-yə görə ehtimal ölçüsü olarsa və (4) tənliyini ödəyərsə, $\mathscr{E}$ isə vəziyyətlərin Borel fəzası olarsa, onda p funksiyası hər hansı M. p.-nin keçid funksiyasıdır. Bundan başqa, əgər $\mathscr{E}$ tam separabel metrik fəza və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\lim\limits_{h \downarrow 0} \alpha_\varepsilon(h) = 0$, $V_\varepsilon(x)$ isə x nöqtəsinin ε – ətrafının tamamlayıcısı olarsa, onda elə M. p. vardır ki, prosesin keçid funksiyasıdır, bu proses sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalara malikdir; burada

$$\alpha_\varepsilon(h) = \sup\{p(s, x; t, V_\varepsilon(x)) : x \in \mathscr{E},\ s \le t \le s + h\}.$$

Kəsilməz M. p.-nin varlığı $h \downarrow 0$ olduqda $\alpha_\varepsilon(h) = o(h)$ şərti ilə təmin olunur (bax, [8], [18]).

Bircins Markov prosesi. M. p.-ləri nəzəriyyəsində zamana görə bircins M. p.-nə xüsusi diqqət yetirilir. Bircins M. p. üçün keçid funksiyası bircinsdir, yəni yalnız $t - s$ arqumentlər fərqindən asılıdır:

$$p(s, x; t, \Gamma) = p(t - s, x; \Gamma),$$

öz növbəsində $\mathbf{P}_{s,x}$ ölçüləri, müxtəlif s qiymətlərində ciddi surətdə bir-birilə bağlıdırlar, bu da yalnız $\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_{0,x}$ ölçüləri və $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{[0,t]}$ σ – cəbrlərinə baxmağa imkan yaradır. Formal tərif: $(\Omega, \mathcal{A})$ – ölçülən fəza, $\{\mathcal{A}_t\}_{t \ge 0}$, $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ – hər hansı σ – cəbrlər axını, ζ_t – qiymətləri $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ -dən olan $\mathcal{A}_t$ – uzlaş-

mış təsadüfi proses olsun. Fərz olunur ki, hər bir $x \in \mathscr{E}$ vəziyyətinə $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında elə $\mathbf{P}_x$ ehtimal ölçüsü uyğundur ki, $\mathbf{P}_x(A)$ funksiyası ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün ölçüləndir. Və nəhayət, Ω fəzasının bircins olması o mənada anlaşılır ki; ixtiyari $\omega \in \Omega$ və $h > 0$ üçün elə $\omega' \in \Omega$ tapılar ki, $\zeta_{t+h}(\omega) \equiv \zeta_t(\omega')$ [bu şərt daha ciddi formada qoyulur: ixtiyari $h > 0$ üçün elə yerinidəyişmə operatoru – $\theta_h : \Omega \to \Omega$ inikası vardır ki, $\zeta_{t+h}(\omega) = \zeta_t(\theta_h \omega)$]. Əgər ixtiyari $t, h > 0$, $\Gamma \in \mathscr{B}$, $x \in \mathscr{E}$ üçün

$$\mathbf{P}_x\{\zeta_{t+h} \in \Gamma \mid \mathscr{A}_t\} = \mathbf{P}_{\zeta_t}\{\zeta_h \in \Gamma\} \quad (\mathbf{P}_x \text{ – sanki yəqin}) \qquad (5)$$

münasibəti ödənilərsə, $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ toplusu bircins Markov prosesi əmələ gətirir, deyilir. $\mathscr{N}$ – minimal σ – cəbr olsun və fərz olunur ki, ζ_t, $t \geq 0$ təsadüfi kəmiyyətləri $\mathscr{N}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndirlər. $A \in \mathscr{N}$ hadisələri üçün Ω fəzasının bircins olduğu faktına əsasən $\theta_h^{-1} A \in \mathscr{N}$ yerinidəyişmələrini elə təyin etmək olar ki, $\theta_h^{-1}\{\zeta_t \in \Gamma\} = \{\zeta_{t+h} \in \Gamma\}$ bərabərliyi ödənilsin (əgər yerinidəyişmə operatorları θ_h varsa, onda θ_h^{-1} operatorları θ_h -a tərs operatorlardır). θ_h^{-1} operatorlarından istifadə edərək (5) xassəsini

$$\mathbf{P}_x\{\theta_t^{-1} A \mid \mathscr{A}_t\} = \mathbf{P}_{\zeta_t}(A) \quad (\mathbf{P}_x \text{ – sanki yəqin}) \qquad (6)$$

münasibəti şəklində yazmaq olar.

Bircins M. p.-nin mühüm xarakteristikası, başlanğıc nöqtəsinin sonsuz kiçik ətrafında, M. p.-nin evolyusiyasını təsvir edən xarakteristik operatordur. Bu terminlərdə, məs., elə diffuzion proseslər sinfi təyin olunur ki, bu proseslər «kiçiklik» anlamında Braun hərəkəti prosesləridir (aparıya malik və kovariasion matrisli).

M. p.-lərinin ən mühüm siniflərindən biri də ciddi Markov prosesləridir ki, bunlar üçün (2) xassəsi [və ya bircins proses üçün (6) xassəsi] determinik t anlarından $\tau(\omega)$ Markov anlarına keçilərək ifadə olunur. Ciddi Markov prosesləri sinfindən «yaxşı» xassələrli trayektoriyaların müxtəlif altsinifləri ayrılır (bax, məs., *Standart Markov prosesi*, *Sağ Markov prosesi*).

Əd.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-матем. об-ва. Казан. ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135–56; [2] Bachelier L., «Ann. Sci. Ecole norm. super.», 1900, t. 17, p. 21–86; [3] Wiener N., «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, p. 131–74; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [5] Feller W., «Ann. Math.»,1952, v. 55, p. 468–519; [6] Feller W., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 417–36; [7] Дынкин Е. В., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149–55; [8] Дынкин Е. В., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [9] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963; [10] Ito K., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1944, v. 20, p. 519–24; [11] Doob J. L., «Bull. Goc. math. France», 1957, v. 85, p. 431–58; [12] Хант Дж. А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [13] Баруча-Рид А. Т., Элементы теории Марковский процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [14] Тихонов В. И., Миронов М. А., Марковские процессы, М., 1977; [15] Кузнецов С. Е., в кн.; Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178; [16] Mitro J. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 47, H. 2, s. 139–56; [17] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.»,1980, т. 25, в. 2, с. 389–93; [18] Kinney J. R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 74, p. 280–302; [19] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [20] Getoor R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, B., 1975; [21] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [22] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [23] Жун-Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [24] Вентцель А. Д., Фрейдмен М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [25] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [26] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972; [27] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [28] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [29] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [30] Вентцель А. Д., предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов, М., 1986.

MARKOV PROSESİ; additiv funksional **« марковский процесс;** аддитивный функционал; **Markov process;** additiv functional of » – Markov prosesinin additivlik xassəsinə malik, yəni $s \leq t \leq n$ olduqda $\varphi_t^s + \varphi_n^t = \varphi_n^s$ şərtini ödəyən, geniş mənada ixtiyari $\varphi = \varphi_t^s$, $s \leq t$ funksionalıdır (bax, *Markov prosesi*; funksional), burada s, t, n – zaman parametrinin qiymətləri çoxluğunda dəyişirlər. Əgər $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$, – θ_t yerinidəyişmə operatorlarına malik, $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında bircins M. p.-dirsə, onda başqa şərtlər qoyulmazsa, ζ prosesinin φ funksionalı yalnız o halda additiv funksional adlanır ki, o, yalnız additiv deyil, həm də mənfi olmasın və bircins olsun [yəni $\varphi_t^s(\theta_h \omega) = \varphi_{t+h}^{s+h}(\omega)$, $s, t, h \geq 0$].

Misal: $\varphi_t^s = \int_s^t g(\zeta_u)\, du$ olsun, burada $g \geq 0$ funksiyası elə seçilmişdir ki, inteqralın mənası olsun.

Əgər ζ prosesinin additiv φ funksionalı sonludursa [yəni bütün $0 \leq s \leq t$ üçün $\varphi_t^s < \infty$ bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilirsə], onda bu funksional aşağıdakı xassələrə malik $A = A_t \equiv \varphi_t^0$, $t \geq 0$ sağdan kəsilməz prosesi ilə birqiymətli bərpa olunur: a) $A_0 = 0$ və A_t t artdıqca azalmır; b) $0 \leq s \leq t$ olduqda $A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t \omega)$; c) $\{A_t\}$, $t \geq 0$ ailəsi ζ prosesinin funksionalıdır. Ənənəyə görə, a) – c) xassələrinə malik olan, qiymətləri $[0, \infty)$ olan, sağdan kəsilməz ixtiyari A_t, $t \geq 0$ prosesi də ζ prosesinin additiv funksionalı adlanır; bəzən yalnız tələb olunur ki, a) – c) xassələri sanki yəqin ödənilsin (ixtiyari ilkin paylanmaların verildiyi fərz olunduqda). Əgər ixtiyari $t > 0$ qiymətində $A_t(\omega)$-nın qiyməti $A_u(\omega)$, $0 \leq u \leq t$ funksiyasının sıçrayışlarının cəmi ilə üst-üstə düşərsə, A additiv funksionalı tamamilə kəsilən funksional hesab olunur. Natural additiv funksionalların (bu funksionallar ζ-nın trayektoriyalarının bütün kəsilmə anlarında sanki yəqin kəsilməz trayektoriyalarlı additiv funksionallar kimi təyin olunur) xüsusi halı olan kəsilməz additiv funksionallar da təbii

olaraq daxil edilir. A və B additiv funksionalları $A_t \equiv B_t$, $t > 0$ münasibətini sanki yəqin ödəyərlərsə, A və B – ekvivalent funksionallar adlanır.

Additiv funksionallar M. p. nəzəriyyəsində əsas vasitələrdəndir (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr, həm də [1] – [6]). Bəzi, ölçülər sinifləri və additiv funksionallar arasında əlaqələrin təsvirinə ümumi yanaşma [4]-də təklif olunmuşdur. $A(t)$, $t \geq 0$ – müəyyən tələblərə tabe olan, $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verilmiş ζ standart prosesinin additiv funksionalı olsun. Hər bir m ekssessiv ölçüsü ilə (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) $\mathscr{B}$-də verilən υ_A ölçüsü (Revuz ölçüsü) məhdud $\mathscr{B}$ – ölçülən $f \geq 0$ funksiyaları üçün

$$\int f \, d\upsilon_A = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} M_m \int_0^t f(\zeta_t) dt$$

bərabərliyi vasitəsilə əlaqələnir, burada $M_m(\cdot) = \int M_x(\cdot)\, m(dx)$ fərz olunmuşdur. Əgər $A = A(t) < \infty$ additiv funksionalı naturaldırsa, ξ prosesi isə $r_\alpha(\cdot, \cdot)$, $\alpha \geq 0$ – Qrin α funksiyalarına malikdirsə, onda bütün $\alpha \geq 0$ və bütün qeyd olunan şəkilli f -lər üçün

$$M_x \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(\zeta_t) dA_t = \int_{\mathscr{E}} r_\alpha(x, y) f(y) \upsilon_A(dy)$$

bərabərliyi doğrudur. Tamamilə kəsilən additiv funksionallar haqqında bax, *Levi sistemi* Markov prosesi üçün.

Additiv funksionallar ailəsi multiplikativ funksionallar ailəsi ilə sıx əlaqədardır; multiplikativ funksionalların tərifi additiv funksional φ və A -nın tərifləndəki toplama əməlinin vurma əməli ilə əvəz olunması nəticəsində alınır. Əgər $A = A_t$, $t \geq 0$ additiv funksional olarsa, onda $\alpha = \alpha_t = \exp A_t$, $t \geq 0$ multiplikativ funksionaldır.

Qırılan proseslər üçün baxılan tərifl ərə təbii dəyişikliklər daxil olunur.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Волконский В. А., «Тр. Моск. матем. об-ва.», 1960, т. 9, с. 143–89; [4] Revuz D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 148, № 2, p. 501–30; [5] Dynkin E. B., «Ann. Probab.» 1977, v. 5, № 5, p. 653–77; [6] Getoor R. K., Sharpe M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1984, Bd 67, № 1, S. 1–62; [7] Dynkin E. B., Getoor R. K., «J. Funct. Anal.», 1985, v. 62, № 2, p. 221–65.

MARKOV PROSESİ bircins « **марковский процесс;** однородный; homogeneous **Markov process** » – bax, *Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; böyük ədədlər qanunu « **марковский процесс;** закон больших чисел; **Markov process;** law of large numbers » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* Markov prosesləri üçün.

MARKOV PROSESİ; çevirmələr « **марковский процесс;** преобразования; **Markov process;** transformations » – *Markov prosesinin Markov xassəsini* dəyişməz saxlayan çevirmələrdir. Bunlardan ən çox istifadə olunanlar – *zamanın təsadüfi əvəzlənməsi*, zamanın çevrilməsi (bax, *Çevrilmiş Markov prosesi*) və prosesin öləziməsi (rus. – убивание процесса), yəni hər hansı *altprosesə* keçilməsi kimi çevirmələrdir.

M. p.-nin çevirmələrindən verilmiş proses üzrə yeni M. p.-lərinin qurulmasında vasitə kimi istifadə olunur. Məsələn, altprosesə keçmə və zamanın təsadüfi əvəzlənməsi ardıcıl surətdə aparıldıqda, geniş şərtlərlə ilkin ζ M. p.-indən yeni, çıxış ehtimalları (yəni $F \in \mathscr{B}$ çoxluqlarından ilk çıxış anlarının paylanmaları) ζ M. p.-nin çıxış ehtimallarını aşmayan proses almağa imkan verir. Əksinə, ζ -nın çıxış ehtimalları ilə majorantlanan çıxış ehtimallarlı, ζ^* M. p. üçün ona ekvivalent olan və ζ prosesindən qeyd olunan əməliyyatlar vasitəsilə alınan M. p. göstərmək olar (bax, [3], [6]). ζ və ζ^* M. p.-lərinin çıxış ehtimalları üst-üstə düşdüyü halda altprosesə keçid istifadə olunmur (bax, *Zamanın təsadüfi əvəzlənməsi*). ζ^* tipli proseslərin infinitezimal operatorlarının strukturu qeyd olunan çevirmələrin xarakteristikaları terminlərində yaxşı təsvir olunur (bax, [4]).

Aşağıdakı çevirmələrdən daha çox istifadə olunur.

Faza fəzasının çevrilməsi. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ olan (qırılan) bircins $\zeta = (\zeta_t, \zeta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ M. p. və elə $\gamma : (\mathscr{E}, \mathscr{B}) \to (\widetilde{\mathscr{E}}, \widetilde{\mathscr{B}})$ ölçülən inikası verilir ki, $\widetilde{\Gamma} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$, $\gamma(x) = \gamma y$ $(x, y \in \mathscr{E})$ olduqda $\gamma(\mathscr{E}) = \widetilde{\mathscr{E}}$, $\gamma(\mathscr{B}) \subset \widetilde{\mathscr{B}}$ və $p(t, x; \gamma^{-1}\widetilde{\Gamma}) = p(t, y; \gamma^{-1}\widetilde{\Gamma})$ münasibətləri ödənilsin.

$\widetilde{p}(t, \widetilde{x}; \widetilde{\Gamma}) = p(t, \gamma^{-1}\widetilde{x}; \gamma^{-1}\widetilde{\Gamma})$, $\widetilde{x} \in \widetilde{E}$, $\widetilde{\Gamma} \in \widetilde{\mathscr{B}}$ bərabərliyi $(\widetilde{\mathscr{E}}, \widetilde{\mathscr{B}})$ -də keçid funksiyası təyin edir; bu keçid funksiyasına hər hansı $\widetilde{\zeta}$ M. p. uyğundur ki, ona ζ -nın obrazı kimi baxılır. Belə hesab etmək olar ki, ζ və $\widetilde{\zeta}$ proseslərinin elementar hadisələr fəzası ümumidir (bax, [1]). $\widetilde{\zeta}$ -nın trayektoriyaları kimi $\gamma\zeta_t$, $0 \leq t \leq \xi$ funksiyalarını götürmək olar. Təsvir olunan konstruksiya həqiqi oxun parçalarında kəsiməz M. p.-nin qurulmasında istifadə olunur.

Markov prosesinin bərpası – verilmiş qırılan prosesi qırılmayan prosesə qədər davam etdirməyə imkan yaradan əməliyyatdır.

Markov prosesinin calanması (bax, *Calaşdırılma*(sı) təsadüfi proseslərin) – $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ və $(\mathscr{E}_1, \mathscr{B}_1)$ ölçülən fəzalarda verilən ζ və ζ_1 M. p.-ləri cütünə $(\mathscr{E} \cup \mathscr{E}_1, \mathscr{B}_2)$ fəzasında verilən üçüncü bir $\widetilde{\zeta}$ M. p.-ni qarşı qoyan elə əməliyyatdır ki, $\widetilde{\zeta}$ prosesi $\mathscr{E}$ fəzasını tərk edənə qədər özünü ζ kimi, $\mathscr{E}_1$ -i tərk edənə qədər ζ_1 kimi aparır (bax, [7]), burada $\mathscr{B}_2$, – $\mathscr{E} \cup \mathscr{E}_1$ -in elementlərindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbrdir (calanma əməliyyatı bəzi şərtlərdən, o cümlədən, ζ və ζ_1 -in $\mathscr{E} \cap \mathscr{E}_1$ -də uzlaşma şərtindən də asılıdır).

M. p.-nin digər çevirmələri də mövcuddur.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 2, с. 260–82; [4] Шур М. Г., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 731–62; [5] Ikeda N., Nagasawa M., Vatanabe S., «Proc. Japan Amad.», 1966, v. 42, № 4, p. 370–75; [6] Shih C. T., «Trans. Amer. Marh. Soc.», 1967,

v. 129, № 1, p. 157–79; [7] Meyer P.-A., «Ann. Inst. Fourier», 1975, t. 25, № 3-4, p. 465–97.

MARKOV PROSESİ çevrilmiş « **марковский процесс** обращенный; reversed **Markov process** » – bax, *Çevrilmiş Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; davamı « марковский процесс; продолжение; **Markov process;** extension of » – müəyyən hissəsi hər hansı çoxluqda ilkin Markov prosesinə ekvivalent olan (bax, *Markov prosesi*; hissəsi), yəni eyni keçid funksiyasına malik olan M. p.-dir. Əvvəllər yalnız müəyyən $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ oblastında verilən diffuzion proseslərin bu oblastın qapayıcısında verilən proseslərə qədər davamı məsələlərinə baxılırdı (bax, *Markov prosesi*; sərhəd şərti). Bu məsələlərə ümumi yanaşma M. Motoo və Ye. B. Dınkinin işlərində araşdırılmışdır (bax, [1] – [3]).

$\zeta = (\zeta_t, \zeta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, – $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ vəziyyətlər fəzasında verilən standart Markov prosesi olsun, $\widetilde{\zeta} = (\widetilde{\zeta}_t, \widetilde{\zeta}, \widetilde{\mathscr{A}}_t, \widetilde{\mathbf{P}}_x)$ M. p. isə $D \subset \mathscr{E}$ açıq çoxluğunda ζ prosesinin hissəsinə ekvivalent prosesdir. $V \setminus V_r$ çoxluğu polyar çoxluq fərz olunur, burada $V = \mathscr{E} \setminus D$, V_r, – V üçün requlyar nöqtələrin çoxluğudur. Onda ζ prosesinin rezolventi (bax, [2]) iki operatorun cəminə ayrılır. Bunlardan birincisi $\widetilde{\zeta}$-nın rezolventidir (daha dəqiq, onun xətti genişlənməsi olub, D-dən kənarda verilən funksiyaları 0 kostantına çevirən). İkinci operatorun birqiymətli təsviri üçün aşağıdakıların verilməsi zəruridir: a) D çoxluğunun hər hansı tamamlayıcısında ikinci arqumentə görə ölçü olan, giriş paylanması adlandırılan $b(x, dy)$-in; b) ləngimə əmsalı $l(x)$, $x \in V_r$, – hər hansı məhdud ölçülən funksiyasının; c) Y_r-də $\Phi(t)$, $t \geq 0$ lokal müddətinin – $\zeta_t \notin V_r$ şərtini ödəyən zaman intervalarında sabitliyini sanki yəqin saxlayan, ζ prosesinin kəsilməz additiv funksionalının. Adətən, Φ-i Φ – lokal müddətinin doğurduğu, zamanın təsadüfi əvəz edilməsi ilə ζ^*-dan alınan, V_r çoxluğunda verilən ζ^* sərhəd prosesi ilə əvəzetməyə üstünlük verilir. (b, l, ζ^*) sərhəd sisteminin elementləri arasında müəyyən əlaqələr vardır.

Daha ümumi situasiya da araşdırılmışdır (bax, [3]). $\widetilde{\zeta}$ üzrə ζ prosesinin qurulması, verilmiş sərhəd sisteminə görə ζ prosesinin qurulması kimi əks məsələlərə də baxılmışdır (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Motoo M., «Proc. 5th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1967, v. 2, pt 2, p. 75–110; [2] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 4, с. 708–13; [3] Дынкин Е. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 3, с. 409–36; [4] Meyer P.-A., «Ann. Inst. Fourier, Grenoble», 1975, t. 25, № 3–4, p. 465–97; [5] Silverstein M. L., «Lect. Notes Math.», 1976, № 516.

MARKOV PROSESİ; dayanıqlılıq **« марковский процесс;** устойчивость; **Markov process;** stability **»** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğı) Markov proseslərinin.

MARKOV PROSESİ Dirixle forması **« марковский процесс;** форма Дирихле; **Markov process;** Dirichlet form **»** – simmetrik bixətti qapalı elə $\mathscr{E} = \mathscr{E}[u, v]$ Markov formasıdır ki, bu forma $L^2 = L^2(E, m)$ həqiqi fəzasının sıx xətti $D = D(\mathscr{E})$ çoxobrazlısının u, v elementləri üçün təyin olunmuşdur və $u \in D$ üçün $\mathscr{E}[u, u] \geq 0$ şərtini ödəyir [hətta belə də deyilir ki, $(D, \mathscr{E})$ cütü Dirixle fəzası təşkil edir]. Burada E, – $\mathscr{B}$ σ – cəbri ilə verilmiş lokal kompakt separabel Hausdorf fəzası, m – daşıyıcısı E-dən olan Radon ölçüsüdür. $\mathscr{E}$-nin qapalılıq şərtində fərz olunur ki, $D(\mathscr{E})$ sıx metrik fəzadır və bu fəza $\|\cdot\|_1 = [\mathscr{E}[\cdot, \cdot] + (\cdot, \cdot)]^{1/2}$ normasının doğurduğu metrika ilə verilir, burada $(\cdot, \cdot)$, – L^2-də skalyar hasildir. $\mathscr{E}$-də Markov xassəlilik ondan ibarətdir ki, – $v \equiv \min(u^+, 1) \in D$ və bütün $u \in D$ üçün $\mathscr{E}[v, v] \leq \mathscr{E}[u, u]$ şərtlərinin ödənilməsini ifadə edir, burada $u^+ = \max(u, 0)$.

Hər bir bircins, ümumiyyətlə, $(E, \mathscr{B})$-də verilmiş, sağdan kəsilməz trayektoriyalara malik və m – simmetrik (yəni m-ə nəzərən özü-özünə dual) *qırılan* $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ *Markov prosesi* ilə kanonik olaraq hər hansı Dirixle formasını əlaqələndirirlər (bax, [2]). Doğrudan da, ζ-in keçid funksiyası təbii surətdə L^2-də xətti operatorların güclü kəsilməz semi – qrupunu doğurur və D əvəzinə bu semi – qrupun doğuran A operatorunun təyin olunma oblastını qəbul etdikdə, fərz edilir ki, ixtiyari $u, v \in D$ üçün

$$\mathscr{E}(u, v) = (\sqrt{-Au}, \sqrt{-Av}).$$

İlk dəfə, Dirixle fəzaları bir qədər başqa şəkildə 1958 – 59-da A. Beyrlinq və J. Deni tərəfindən [1]-də klassik Dirixle inteqralını ümumiləşdirmək məqsədilə daxil olunmuşdur. Burada istifadə olunan terminologiya M. Fukusimeyə (bax, [2]) məxsusdur, o, müzakirə olunan anlayışlar və Markov prosesləri nəzəriyyəsi arasında əlaqəni aşkar etmişdir.

Dirixle formaları nəzəriyyəsi M. p.-lərinin geniş sinfinin qurulması üçün yeni üsullar verir (bax, [2], [5]). Fərz olunur ki, $\mathscr{E}$ requlyar formadır, yəni $C_0 \cap D$, – D-də $\|\cdot\|_1$ normasına nəzərən və C_0-da müntəzəm normaya nəzərən sıx formadır; C_0 – kompakt daşıyıcılara malik E-də kəsilməz funksiyalar çoxluğudur. Onda $(E, \mathscr{B})$ fəzasında Hant prosesi vardır və bu proses $\mathscr{E}$ ilə yuxarıda təsvir olunduğu kimi əlaqəlidir.

Misal. E, – $\mathbb{R}^n$-də oblast, m, – E-də Lebeq ölçüsü olsun. C^∞ sinfindən olan, E-də verilmiş və E-də kompakt daşıyıcıları olan u və v funksiyaları üçün

$$\mathscr{E}_0[u, v] = \sum_{i, j} \int_E a_{ij}(x)\, u'_{x_i} u'_{x_j}\, dx$$

forması daxil olunur, burada $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a(x) \equiv a_{ij}(x)$, – E-də lokal inteqrallanan funksiyalardır, $1 \leq i, j \leq n$. Əgər hər hansı $\delta > 0$ və bütün $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ üçün

$$\sum_{i, j} a_{ij}(x) y_i y_j \geq \delta \sum_i y_i^2$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $\mathscr{E}_0$ forması requlyar Dirixle formasına qədər təyin oluna bilər və bu formaya E-də m – simmetrik kəsilməz M. p. uyğundur.

Qeyri – simmetrik Dirixle formaları nəzəriyyəsi də yaranmışdır (bax, [3], [6]).

Əd.: [1] Beurling A., Deny J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1959, v. 45, p. 208–15; [2] Fukushima M., Dirichlet forms and Markov processes, Amst.– N.Y.– Oxf., 1980; [3] Carrillo – Menendez S., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 33, № 2, S. 139–54; [4] Le San Y., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1977, Bd. 37, № 4, S. 297–319; [5] Fukushima M., Oshima Y., Takeda M., Dirichlet forms and symmetric Markov processes, B. – N. Y., 1994; [6] Ma Z. M., Rockner M., Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms, B., 1992.

MARKOV PROSESİ; ekskursiya « **марковский процесс;** экскурсия; **Markov process;** excursion of » – bax, *Ekskursiya*(sı) Markov prosesinin.

MARKOV PROSESİ; enerji « **марковский процесс;** энергия; **Markov process;** energy of » – potensial nəzəriyyəsində istifadə olunan enerji anlayışının nəzəri – ehtimali analoqudur (bax, [1]). Enerjinin ehtimali izahı M. p. nəzəriyyəsi çərçivəsində P. A. Meyer tərəfindən [3]-də təklif olunmuşdur; martinqallar nəzəriyyəsinə də uyğun anlayış onun tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [2]). Lokal kompakt separabel Hausdorf fəzası $\mathscr{E}$-də $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ qırılmayan Hant prosesinin verildiyi fərz olunur. Bu prosesin natural additiv $A = A_t,\ t \geq 0$ funksionalı üçün (bax, *Markov prosesi*; additiv funksional)

$$\mathbf{M}_x(A_\infty^2) = 2\mathbf{M}_x\left[\int_0^\infty R_A(\zeta_{t-})dA_t\right] + \mathbf{M}\Big[\sum \Delta A_t\Big]^2, \qquad (*)$$

enerji düsturu doğrudur (bax, [2]), burada $x \in \mathscr{E}$, $A_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} A_t$, $R_A(x) = \mathbf{M}_x A_\infty$, – A funksionalının potensialıdır, cəmləmə isə elə $t > 0$ anları üzrə aparılır ki, bunlarda $\Delta A_t = A_t - A_{t-0}$ sıçrayışları sıfırdan fərqlidir. Əgər A funksionalı kəsilməz olarsa, (*)-nun sağ tərəfindəki ikinci toplananı yazmamaq olar. $V_A(x) = \mathbf{M}_x(A_\infty^2)$ funksiyası A funksionalının və ya onun potensialının energetik funksiyası adlanır. Əgər η ekssessiv ölçüsü μ ölçüsünün $\mathscr{E}$-də hər hansı Borel potensial ölçüsü olarsa (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün), onda

$$e_\eta(A) = \frac{1}{2}\int V_A\, d\mu$$

A funksionalının η-ya nəzərən enerjisi adlanır. Bir sıra hallarda, məs., simmetrik hallarda, yəni özünə dual Hant prosesləri hallarında funksionalın enerjisinin digər təriflərindən də istifadə olunur (bax, [4], [5]). Yuxarıda daxil olunmuş terminologiyanın məhz belə seçilməsi onunla izah olunur ki, ν ölçüsünün klassik enerjisi (bax, [1]), ν, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ fəzasında Borel ölçülərinin geniş sinfində dəyişdikdə, olduqca dəqiqliklə $e_{\eta_n}(A)$, $n \geq 1$ enerjisi ilə approksimasiya olunur, belə ki, η_n ölçüləri ν-nün seçilməsindən asılı olmurlar, A – Viner prosesinin kəsilməz additiv funksionalı isə elə seçilməlidir ki, onun Lebeq ölçüsünə nəzərən Revuz ölçüsü (bax, *Markov prosesi*; additiv funksional) ν ilə üst-üstə düşsün.

Fərz olunur ki, elə Hant prosesi tapılar ki, o, hər hansı Borel ölçüsünə nəzərən ilkin ζ prosesinə güclü dual proses olsun. Əgər ζ prosesinin hər hansı natural additiv A funksionalı üçün $V_A(x)$ funksiyası sonlu olarsa, onda bu funksiya eyni tipli hər hansı $B = B_t,\ t \geq 0$ funksionalının potensialı $R_B(x)$ ilə üst-üstə düşür və bu halda B funksionalının Revuz ölçüsünün tam kütləsi $V_A(x)$ funksiyasının enerjisi və ya energetik norması adlanır.

Qırılan proseslər üçün analoji təriflər daxil olunur.

M. p.-ləri nəzəriyyəsi çərçivəsində energetik anlayışlar additiv funksionallar, eyniçəkili paylanmalar, energetik normanın doğurduğu yığılma ilə əlaqədar istifadə olunur (bax, [2] – [6]).

Əd.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel. Chap. 5–8. Théorie des martingales, P., 1980; [3] Meyer P.-A., in: Seminaire Brelot – Choquet – Deny, Inst. H. Poincaré. Théorie du potentiel (1962 / 1963, № 2), P., 1964; [4] Chung K. L., Rao M., «Probab. and Math. statist.», 1980, v. 1, № 2, p. 99–108; [5] Graversen S. E., Rao M., «Nagoya Math. J.», 1985, v. 100, p. 163–80; [6] Pop – Stojanovic Z. R., Rao M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1985, Bd 69, S. 593–608.

MARKOV PROSESİ; faza fəzası « **марковский процесс;** фазавое пространство; **Markov process;** state space of » – bax, *Faza fəzası* Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin.

MARKOV PROSESİ; faza fəzasının kompaktifikasiyası « **марковский процесс;** компактификация фазового пространства; **Markov process;** phace / state space compactification » – *Markov prosesinin* vəziyyətləri fəzasının proseslə bağlı hər hansı metrikada genişləndirilmiş fəzada bu və ya digər yaxşı xassələrli proses almağa imkan verən tamamlanması əməliyyatıdır.

Praktik olaraq, $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ bircins M. p.-nə tətbiq olunan Rey – Nayt kompaktifikasiyası və Martin kompaktifikasiyasından istifadə olunur. Rey – Nayt kompaktifikasiyasında istifadə olunan metrika elə seçilir ki, f funksiyalarının geniş sinfi üçün

$$R_\lambda f(x) = \int r_\lambda(x, dy) f(y)$$

şəklində funksiyaların müntəzəm kəsilməzliyi təmin olunsun [r_λ, – ζ prosesinin rezolventidir; fərz olunur ki, $R_\lambda f(x)$ funksiyaları vəziyyətlər fəzası $\mathscr{E}$-nin nöqtələrini ayırır]. İsbat olunur ki, genişləndirilmiş $\mathscr{E}$ fəzasında hər hansı sağdan kəsilməz, 2-ci növ kəsilmələri olmayan elə ciddi M. p. vardır ki, onun rezolventi kəsilməzlik üzrə ilkin prosesin rezolventi olub, həm də Rey rezolventidir (bax, Rey prosesi). Yeni prosesin trayektoriyaları müəyyən mənada ilkin prosesin trayektoriyalarının hər yerdə sıx hesabi çoxluq üzrə götürülmüş sağ limitləridir.

Martin kompaktifikasıyası daha ağır şərtlərlə həyata keçirilir; bu əməliyyat M. p.-nin final gedişatının araşdırılmasında və ekssessiv funksiyaların müəyyən bir ayrılışında istifadə olunur. Bax, *Martin sərhədi* Markov prosesinin.

Əd.: [1] Ray D., «Ann. Math.», 1959, v. 70, p. 43–72; [2] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137–72; [3] Knight F., «III. J. Math.», 1965, v. 9, p. 548–52; [4] Getoor R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, B., 1975; [5] Engelbert H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 85, S. 235–66; [6] Дынкин Е. Б., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 89–152; [7] Jeulin T., « Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 42, H. 3, S. 229–60.

MARKOV PROSESİ; funksional « **марковский процесс;** функционал; **Markov process;** functional of » – s və t Markov prosesinin zaman parametrinin qiymətlər çoxluğunda dəyişdikdə, t anına qədər *Markov prosesinin* evolyusiyası ilə təyin olunan hər bir φ_t^s və ya ψ_t kəmiyyətlərinin $\varphi = \{\varphi_t^s\}$, $s \le t$ və ya $\psi = \{\psi_t\}$ ailəsidir. Fərz olunur ki, $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında bircins $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \ge 0$ M. p. $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzası ilə verilmişdir. Əgər $0 \le s \le t$ ($t \ge 0$ olduqda) olduqda $\varphi_t^s\,(\psi_t)$ kəmiyyəti $\overline{G} \cap \mathscr{A}_t$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən olarsa (G σ – cəbri ζ_t kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir, $\overline{G}$ bütün $\mathbf{P}_x$, $x \in \mathscr{E}$ ölçüləri üzrə G-nin bütün tamamlayıcılarının kəsişməsidir), qiymətləri $[-\infty, \infty]$-dan olan $\varphi = \{\varphi_t^s\}$, $0 \le s \le t < \infty$ (uyğun olaraq, $\psi = \{\psi_t\}$, $t \ge 0$) təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi ζ-nın funksionalıdır. Qırılan proses üçün funksionalın yuxarıda verilən tərifi təbii surətdə modifikasiya olunur. Additiv və multiplikativ funksionallar xüsusi maraq doğuran funksionallardandır. Vektor qiymətlərli və digər qiymətlərli funksionallara da baxılır.

Bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

MARKOV PROSESİ geniş mənada « **марковский процесс** в широком смысле; wide-sense **Markov process** » – bütün t-lər üçün $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2 < \infty$ və $t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ şərtini ödəyən ixtiyari $t_1, \ldots, t_n$ qiymətlərində

$$\widetilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t_n) \mid \zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_{n-1})\} = \widetilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t_n) \mid \zeta(t_{n-1})\}$$

şərtlərini ödəyən *təsadüfi prosesdir*, burada

$$\widetilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t) \mid \zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)\} = \sum_{i=1}^{k} a_i \zeta(t_i)$$

– $\zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin elə xətti kombinasiyasıdır ki, $\mathbf{M}\left|\zeta(t) - \sum_{i=1}^{k} a_i \zeta(t_i)\right|^2$ ən kiçik qiymət alır [yəni $\widetilde{\mathbf{M}}\{\zeta(t) \mid \zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)\}$ xətanın kvadratının minimumu mənada $\zeta(t)$-yə $\zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)$-dan xətti asılı ən yaxşı yaxınlaşmadır].

Geniş mənada M. p. anlayışı C. Duba məxsusdur (bax, [1]). Markov prosesinin geniş mənada tərifinə xas olan bu xassə $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin yalnız korrelyasion funksiyasına məhdudiyyətlərə səbəb olur və Qauss Markov prosesi geniş mənada adi Markov prosesi olur (bax, *Təsadüfi funksiya*; *Qauss – Markov prosesi*; geniş mənada xassə).

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Beutler F., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, № 2, p. 424–38; [3] Mandrekar V., «Nagoya Math. J.», 1968, v. 33, p. 7–19.

MARKOV PROSESİ; hissəsi « **марковский процесс;** часть; **Markov process;** part of » – qeyd olunmuş vəziyyətlər çoxluğundan ilk çıxış anında verilmiş Markov prosesinin yox olması nəticəsində alınan *Markov prosesidir* (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr, *İlk çatım anı*). Məs., $\zeta = (\zeta_t, \zeta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, – $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında standart M. p., τ – prosesin açıq $D \in \mathscr{E}$ çoxluğundan ilk çıxış anı olsun. Onda x D-də dəyişdikdə $\widetilde{\zeta} = (\widetilde{\zeta}_t, \tau, \widetilde{\mathscr{A}}_t, \mathbf{P}_x)$ prosesi ζ prosesinin D-də hissəsidir, bu şərtlə ki, $0 \le t < \tau(\omega)$ olduqda $\widetilde{\zeta}_t(\omega) = \zeta_t(\omega)$, hər bir $\widetilde{\mathscr{A}}_t$, $t \ge 0$ σ – cəbri isə $\mathscr{A}_t$-nin $\{\omega : \tau > t\}$ çoxluğunda izi olsun (bundan başqa fərz olunur ki, D çoxluğunda ölçülən struktur onun bütün altçoxluqlarının toplusu ilə verilir). Bu halda $\widetilde{\zeta}$ standart proses, ζ prosesi isə onun D çoxluğundan davamı kimi interpretasiya olunur (bax, *Markov prosesi*; davamı).

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963.

MARKOV PROSESİ xəttivari « **марковский процесс** линейчатый; **Markov** linewise **process** » – bax, *Xəttivari Markov prosesi*, *Semi – Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ idarəolunan « **марковский процесс** управляемый; controlled **Markov process** » – bax, *İdarəolunan Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ ikili/dual « **марковский процесс** двойственный; dual **Markov process** / **Markov process** in duality of » – bax, *Dual Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ ikitərəfli « **марковский процесс** двусторонний; two–sided **Markov process** » – bax, *Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; infinitezimal xarakteristikalar « **марковский процесс;** инфинитезимальные характеристики; **Markov process;** infinitezimal characteristics of » – bircins *Markov prosesinin* evolyusiyasını «az» da olsa təsvir edən bu və ya digər xarakteristikalarının toplularıdır.

Vəziyyətləri fəzası hesabi Markov prosesləri. $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ – sağdan kəsilməz bircins, hesabi (və ya sonlu) vəziyyətlər fəzası $\mathscr{E} = \{1, 2, \ldots\}$-də M. p. olsun. ζ prosesinin keçid funksiyası faktik olaraq, $\left\| p_{ij}(t) \right\|_{i,j \in \mathscr{E}}$ matrisi (sonsuz) ilə verilir, burada $p_{ij}(t) = \mathbf{P}_i\{\xi_t = j\}$. $a_{ij} = p_{ij}(t)|_{t=0}$ törəmələri infinitezimal xarakteristikalar kimi anlaşılır. $A = \left\| a_{ij} \right\|$ matrisi prosesin xarakteristik operatorunu müəyyən edir. Bu halda $(-a_{ii})^{-1}$ trayektoriyanın i nöqtəsindən çıxış müddətinin orta qiyməti kimi anlaşılır, $\pi_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ ($a_{ii} \ne -\infty$) kəmiyyətləri prosesin ilk sıçrayışından sonrakı vəziyyətinin ehtimal paylanmasını təyin edir. Belə təsviri daha ümumi vəziyyətlərdə sıçrayışvari M. p.-ləri üçün də vermək olur.

Asılı olmayan artımlarlı proseslər. $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, – $\mathbb{R}^1$-də verilmiş sağdan kəsilməz, asılı olmayan artımlarlı proses olsun. Bu halda infinitezimal xarakteristikalar kimi diffuziya əmsalı a, aparı əmsalı b və xarakteristik operatora

$$\mathscr{U} f(x) = \frac{1}{2} a f''(x) + b f'(x) + \int_{\mathbb{R}^1} (f(x+y) - f(x) - y f'(x) \mathbf{I}_{|y|<1})\, v(dy)$$

münasibətilə daxil olan sıçrayışlar ölçüsü $\upsilon(dy)$ kimi kəmiyyətlər çıxış edir, burada $a \geq 0$, υ ölçüsü isə

$$\int \frac{\upsilon(dy)\,y^2}{1+y^2} < \infty$$

şərtini ödəyir. a diffuziya əmsalı və b aparı əmsalı prosesin ifadəsində kəsilməz komponenti xarakterizə edir, sıçrayışlar ölçüsü υ isə

$$\upsilon(\Gamma)dt = M_0\left(\sum_{s\in(t_0,\,t_0+dt)} \mathbf{I}_{\Gamma\setminus\{0\}}(\Delta\xi_s)\right)$$

münasibətini təyin edir və sıçrayışların orta intensivliyini və onların paylanmasını müəyyən edir. Bu təsviri bütün bircins olmayan (zaman üzrə) proseslər üçün də vermək olur.

Diffuzion proseslər. $\mathbb{R}^d$-də diffuzion proseslər üçün infinitezimal xarakteristika: diffuziya matrisi $a_{ij}(x) \geq 0$, aparı vektoru $b_i(x)$ və öləzimə əmsalı (rus. коэффициент убивания) $c(x) \leq 0$ ($\equiv 0$, qırılmayan proseslər üçün) kimi kəmiyyətlər toplusudur. Uyğun xarakteristik operator aşağıdakı kimidir:

$$\mathscr{U} f(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum a_{ij}\,\frac{\partial^2 f}{\partial k_i\,\partial x_i}(x) \;+\; \sum b_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \;+\; c(x)\,f(x).$$

Bu halda, $a(\zeta_t)dt$ matrisi artımın kovariasion matrisi mənasında anlaşılır, $b(\zeta_t)dt$ – artımın riyazi gözləməsi, $c(\zeta_t)dt$ – prosesin qırılmasının şərti ehtimalıdır (qırılma anı $\zeta > t$ şərtinə nəzərən).

Əd.: [1] Ч ж у н К а й - л а й, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [3] С к о р о х о д А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [4] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [5] М а к к и н Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972.

MARKOV PROSESİ; k e ç i d f u n k s i y a s ı **« марковский процесс;** п е р е х о д н а я ф у н к ц и я; **Markov process;** t r a n s i t i o n f u n c t i o n **» –** bax, *Keçid funksiyası.*

MARKOV PROSESİ k v a z i h a m a r **« марковский процесс** к в а з и г л а д к и й; q u a s i s m o o t h **Markov process »** – bax, *Kvazihamar Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ q a r ş ı l ı q l ı t ə s i r l i **« марковский процесс** с в з а и м о д е й с т в и е м; i n t e r a c t i o n **Markov process »** – vəziyyətlər fəzası lokal tip bəzi xassələrli komponent – fəzaların sonsuz hasili olan *Markov prosesidir*. Prosesin komponentlərinin qiymətlərinin fəzasının sonlu X fəzası olduğu və prosesin komponentlərini parametrikləşdirən T çoxluğunun hesabi çoxluq olduğu ən sadə halda, vəziyyətlər fəzası X^T fəzasıdır (silindrik altçoxluqların doğurduğu σ – cəbr ilə), odur ki, verilən anda prosesin qiyməti təsadüfi meydan olur. Diskret zamanlı və eyni zamanda kəsilməz zamanlı proseslərə baxılır (bax, [1], [3] və [1], [2], [3]).

Proses diskret zamanlı və zaman üzrə bircins olarsa, fərz olunur ki, keçid ehtimalı $\mathbf{P}\{\cdot \mid x\}$, X^T-də *prodaktmerdir*, $x = (x_t, t \in T) \in X^T$. Bu zaman ən çox baxılan hallarda $T = \mathbb{Z}^d$ olur, burada $\mathbb{Z}^d$, – d – ölçülü şəbəkədir; adətən, fərz olunur ki, x'_s, $s \in \mathbb{Z}^d$ komponenti üçün $\mathbf{P}\{\cdot \mid x\}$ ölçüsünün doğurduğu şərti birölçülü $\mathbf{P}_s\{x'_s \mid x_s\}$ paylanmaları yalnız elə x_u-ların qiymətlərindən asılıdır ki, bunlar üçün $|u-s| \leq r$ bərabərsizliyi təmin olunsun, burada $r > 0$ a s ı l ı l ı q r a d i u s u adlanan konstantdır (l o k a l l ı q x a s s ə s i) və $\mathbb{Z}^d$-də yerinidəyişmələr üzrə təbii ifadə olunan translyasion invariantlıq şərti də ödənilir. Ən sadə qeyri – trivial misal S t a v s k a y a m o d e l i d i r ki, burada $T = \mathbb{Z}$, $X = \{0,1\}$ və $0 < p_0 < 1$ şərtini ödəyən hər hansı p_0 qiymətində

$$p_s(1 \mid x_s) = \begin{cases} 1, & x_s = x_{s+1} = 1 \text{ olduqda} \\ p_0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

(məs., lampa s nöqtəsində p_0 ehtimalı ilə yanır və $1-p_0$ ehtimalı ilə digər lampalardan asılı olmayaraq sönür, lakin bu şərtlə ki, əgər baxılan lampadan sağdakı qonşu lampa yanırsa, o, lampanın sönməsi halı istisna olunur).

Kəsilməz zaman halında proses $\lambda\{x'_s \mid x\}$, $x'_s \neq x_s$ keçid sıxlıqlarının toplusu ilə təyin olunur və bunlar isə (aşkar surətdə) infinitezimal ehtimalı, yəni digər komponentlərin verilmiş vəziyyətləri halında s-ci komponentin öz qiymətini x_s-dən x'_s-ə dt müddəti ərzində dəyişəcəyinin ehtimalını təyin edir. Daha sonra yenidən fərz olunur ki, $T = \mathbb{Z}^d$ və lokallıq şərtləri: $\lambda_s\{x'_s \mid x_u\}$ yalnız $|u-s| \leq r$ şərtini ödəyən x_u komponentlərindən asılıdır – şərtləri ödənilir. $X^{\mathbb{Z}^d}$-də M. p.-ni limitə keçid vasitəsilə təsvir etmək olur. Əvvəlcə vəziyyətlər fəzası sonlu X^{Q_n} olan, sıçrayışvari M. p.

$$\lambda(x' \mid x) = \begin{cases} \lambda_s(x'_s \mid x,\ \bar{x}_n), & \text{əgər } x, x' \in Q_n,\ x_u = x'_u, \\ & n \neq s,\ x_s \neq x'_s,\ s \in Q_n, \\ 0, & \text{digər cütlər üçün} \end{cases}$$

keçid ehtimalları vasitəsilə verilir, burada $Q_n = \{u \in \mathbb{Z}^d : |u| \leq n\}$. Belə prosesin keçid ehtimalları ardıcıllığının $n \to \infty$ olduqda limiti vardır və bu limit $X^{\mathbb{Z}^d}$-də elə M. p. təyin edir ki, o, $\bar{x}_n \in X^{\mathbb{Z}^d} \setminus Q_n$ şərtilə verilən $\bar{x}_n$-dən asılı olmur.

Misallar: s ə s v e r m ə p r o s e s i, burada $X = \{0,1\}$ və $\lambda_s\{x'_s \mid x_s\}$ elə $u \neq s$ indekslərinin sayına bərabərdir ki, $|u-s| \leq r$ və $x_u \neq x'_s$ şərtləri ödənilsin (səsverən şəxs əvvəl verdiyi qərarı əks qərara dəyişir, bu isə onun səsvermədə iştirak edən əks fikirdə olan qonşularının sayından asılı olduğundan edilir); k o n t a k t l a r p r o s e s i, burada $X = \{0,1\}$ və əgər $x'_s = 0$ olarsa, $\lambda_s\{x'_s \mid x\} = \lambda$ olur, $\lambda\{x'_s \mid x\}$ isə yenə də elə $u \neq s$, $|u-s| \leq r$ şərtlərini ödəyən indekslərin sayına bərabərdir ki, $x'_s = 1$ olarsa, $x_u = 1$ olur (orqanizm dt müddəti ərzində sabit ehtimalla sağalır, xəstə qonşuların sayına mütənasib ehtimalla isə xəstələnir). Bəzi komponentlərin eyni zamanda dəyişməsi də mümkündür. Q a d a ğ a l a r l ı p r o s e s belə prosesdir, burada $X = \{0,1\}$ və $x_u = 1$ olması faktı hissəciyin

u pozisiyasında olması kimi interpretasiya olunur. Aydın şəkildə bu onu təsvir edir ki, hissəcik dt müddəti ərzində $p(s-u)dt$ ehtimalı ilə s pozisiyasından u pozisiyasına keçir, bu şərtlə ki, bu pozisiya artıq tutulmuş olmasın.

Qarşılıqlı təsirli M. p. nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyekti prosesin stasionar (zaman üzrə) paylanmaları çoxluqlarının və onların cazibə oblastlarının təsviridir. Bu çoxluq həmişə qabarıq çoxluqdur, odur ki, onun requlyar təsadüfi meydanlar olan kənar nöqtələrini göstərmək kifayətdir. Burada yaranan situasiyalar olduqca rəngarəng olur, faza keçidləri tipli hallar yaranır və modellərin hər bir sinfi üçün fərdi araşdırma metodunun tətbiqi tələb olunur. Məs., Stavskaya modelində $x=(x_n=1,\ n\in\mathbb{Z}^d)$ realizasiyasında topalanmış stasionar paylanma vardır. Lakin $0<p_{\mathrm{cr}}<1$ şərtini ödəyən hər hansı p_{cr} və bütün $p<p_{\mathrm{cr}}$ qiymətləri üçün hətta qeyri – trivial ekstremal stasionar paylanma da vardır. p_{cr} -in qiyməti aşkar şəkildə tapılmamışdır. Səsvermə modelində $x_n\equiv 0$ və $x_n\equiv 1$ realizasiyalarında topalanmış iki qeyri – trivial stasionar vəziyyət vardır. $d=1,2$ olduqda, digər belə vəziyyətlər yoxdur, $d\geq 3$ olduqda isə $0<\rho<1$ şərtini ödəyən ρ parametrindən asılı qeyri – trivial translyasion – invariant stasionar paylanmalar ailəsi də vardır, belə ki, $\rho\ \ x_n=1$ olması ehtimalıdır; $0<\rho<1$. Kontakt prosesində hər hansı $\lambda_d>0$ və bütün $\lambda>\lambda_d$ üçün $x_n\equiv 0$ komponentində topalanmış qeyri – trivial stasionar paylanmadan başqa, digər bir qeyri – trivial paylanma da vardır, $\lambda<\lambda_d$ olduqda isə belə paylanmalar yoxdur. Qadağalarlı prosesdə əlavə $p(u)=p(-u)$ simmetriya şərtində yalnız Bernulli ölçüləri stasionar ölçülər olur.

Daha ümumi yanaşma çevrilən (zaman üzrə) M. p.-lərinin tədqiqində mümkündür, belə ki, bu halda stasionar paylanmalar sinfi prosesin keçid sıxlıq funksiyaları ilə aşkar ifadə olunan potensiallı Gibbs təsadüfi meydanları sinfi ilə üst-üstə düşür. Bu proseslər sinfi hələ 1963-də fiziki ədəbiyyatda daxil olunmuşdur və Qlauber modelləri adlandırılmışdır. Qarşılıqlı təsirli M. p.-ləri bioloji, kimyəvi, iqtisadi, ictimai təbiətli modellərin qurulmasında da tətbiq olunur.

Əd.: [1] Васильев Н. Б., Добрушин Р. Л., Пятецкий - Шапиро И. И., Советско-японский симпозиум по теории вероятностей – Хабаровск, 1969, Новосиб., 1969, с. 4–30; [2] Добрушин Р. Л., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, с. 57–66; [3] Ставская О. Н., Пятецкий - Шапиро И. И., «Проблемы кибернетики», 1968, в. 20, с. 91–106; [4] Clauber R., «J. Math. Phys.», 1963, v. 4, p. 294–307; [5] Griffeath D., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 724; [6] Liggett T., Interacting particle systems, N. Y. – [a. o.], 1985; [7] Toom A. L., Vasilyev N. B., Kurdumov D. L., в кн.: Stochastic cellolar system. Ergodicity, memory, morphogenesis, Manchester, 1988; [8] Spitser F., «Lect. Notes. in Math.», 1969, v. 89, p. 201–23.

MARKOV PROSESİ qayıdışlı « **марковский процесс** возвратный; recurrent **Markov process** » – bax, *Qayıdışlı Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; qərarların qəbulu « **марковский процесс;** принятия решений; **Markov decision process** » – bax, *İdarəolunan Markov zənciri*, *İdarəolunan Markov prosesi*, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

MARKOV PROSESİ qırılan « **марковский процесс** обрывающийся; killed **Markov process** » – bax, *Qırılan Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ qırılmayan « **марковский процесс** необрывающийся; nonkilled **Markov process** » – bax, *Qırılma anı.*

MARKOV PROSESİ; Levi sistemi « **марковский процесс;** система Леви; **Markov process;** Levi system » – bax, *Levi sistemi* Markov prosesi üçün.

MARKOV PROSESİ; limit teoremləri « **марковский процесс;** предельные теоремы; **Markov process;** limit theorems » – bax, *Limit teoremləri* Markov prosesləri üçün.

MARKOV PROSESİ; limit teoremləri nisbətlər üçün « **марковский процесс;** предельные теоремы для отношений; **Markov process;** ratio limit theorems » – bax, *Limit teoremləri* Markov prosesində nisbətlər üçün.

MARKOV PROSESİ; lokal müddət « **марковский процесс;** локальное время; **Markov process;** local time of » – Markov prosesinin verilmiş vəziyyətdə olduğu anlar çoxluğunda təsadüfi zaman şkalasını təyin edən, Markov prosesinin mənfi olmayan additiv funksionalıdır. Viner prosesi üçün lokal müddət P. Levi tərəfindən [1]-də daxil olunmuş və araşdırılmışdır; birölçülü proseslərin daha geniş sinfini E. Boylan (E. Boylan; 1964) tədqiq etmişdir, standart proseslərin lokal müddətinin öyrənilməsinə [4] işilə başlanmışdır.

$\zeta=(\zeta_t,\mathscr{A}_t,\mathbf{P}_x)$, – $(\mathscr{E},\mathscr{B})$ vəziyyətlər fəzasında verilmiş qırılmayan standart proses olsun və fərz olunur ki, E_r çoxluğu vəziyyətlərin hər birinin doğurduğu birnöqtəvi çoxluq üçün requlyar olan bütün vəziyyətlərdən təşkil olunmuşdur. Onda hər bir $x\in E_r$ nöqtəsi üçün bu nöqtədə lokal müddət mövcuddur, yəni ζ prosesinin elə kəsilməz $L_t^x=L_t^x(\sigma)$ additiv funksionalı mövcuddur ki, bu funksional (ixtiyari başlanğıc vəziyyətində sanki yəqin) $\{t\geq 0:\zeta_t\neq x\}$ çoxluğunda artımlara malik olmur, lakin $t>0$ olduqda $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin müsbət olur (bax, [4]).

Hər bir $x\in\mathscr{E}$ nöqtəsində lokal müddətin varlığı fərz olunarsa, aşağıdakı kimi qoyulmuş məsələ böyük maraq doğurur. Hansı şərtlər qoyulmalıdır ki, verilmiş vəziyyətdə olma müddətinin sıxlığı rolunu ifadə edə bilən L_t^x variantı mövcud olsun; vəziyyətdə olma müddətinin sıxlığı isə o mənada anlaşılır ki, bütün $B\in\mathscr{B}$ və $t\geq 0$ üçün

$$\int_0^t \mathbf{1}_B(\zeta_s)\,ds=\int_B L_t^x\,\zeta(dx) \qquad (*)$$

bərabərliyi $\mathscr{B}$-də ξ ölçüsü münasib seçildiyi halda ödənilir, burada $\mathbf{1}_B$, – B çoxluğunun indikator – funksiyasıdır. Məlumdur ki, əgər $\alpha>0$ olduqda bütün Qrin α – ölçüləri (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) $\mathscr{B}$-də verilmiş hər hansı σ – sonlu ξ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz və əgər $\psi(x,y)=M_x e^{-T(y)}$ $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ fəzasında Borel funksiyası

[burada $T(y)$, – y nöqtəsinə ilk çatım anıdır] olarsa, (*) münasibətinin ödənilməsi təmin olunur. (*) münasibətinə L_t^x variantının seçilməsində normalaşdırıcı kimi baxmaq olar [normalaşmanın digər ən çox yayılmış üsulu (bax, [4]) $x \in E_r$ olduqda $\mathbf{M}_x \int_0^\infty e^{-t} dL_t^x = 1$ bərabərliyinin postulat kimi qəbul edilməsindən ibarətdir].

Birölçülü Viner prosesi halında L_t^x lokal müddətini (t, x) dəyişənləri toplusu üzrə kəsilməz hesab etmək olar (bax, [3]). ζ üçün lokal müddətin normalaşdırılmasının ikinci üsulu seçildikdə, $\mathscr{E} = E_r$ əvəzinə isə həqiqi oxun intervalı götürülür və

$$\int_0^1 p(u)\, u^{-1} du < \infty$$

şərti qoyulur, burada

$$p(u) = \sup_{|x-y| \le u} [1 - \psi(x, y)\, \psi(y, x)]^{1/2}$$

(bax, [5]).

ζ qırılan proses olduğu hal baxılan hala analojidir.

Lokal müddət nəzəriyyəsi mühüm tətbiqlərilə məlumdur, məs., birölçülü diffuziyaların araşdırılmasında, $\{t \ge 0;\ \zeta_t = x\}$ şəklində sədli təsadüfi çoxluqların tədqiqatında, burada x – prosesin qeyd olunmuş vəziyyətidir, additiv funksionalların inteqral ayrılışında (bax, [2], [8]). Viner prosesi halında lokal müddət nəzəriyyəsi müvəffəqiyyətlə tətbiq olunur (bax, [1], [2], [9]). Uyğun proseslərin trayektoriyalarının müxtəlif sadə funksionalları ilə lokal müddətin approksimasiya üsulları intensiv araşdırmaların mövzusudur (bax, [1]).

Ü m u m i l ə ş m ə l ə r. Yuxarıda verilmiş lokal müddət anlayışının bir çox ümumiləşmələrində (*) ifadəsinə istinad olunur. Əgər, məs., $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verilən hər hansı ζ Markov prosesi və ixtiyari $x \in \mathscr{E}$ üçün ξ ölçüsünün və $\mathscr{B}$-nin münasib seçildiyi halında və bütün $B \in \mathscr{B}$ üçün kəsilən (ola bilsin ki,) additiv L_t^* funksionalı göstərmək olarsa, onda L_t^x yenə də x nöqtəsində lokal müddət adlanır. Kəsilən lokal müddətlərə aid misallar [5]-də şərh olunmuşdur. Oxşar tərif Qauss prosesləri və meydanları üçün də verilir (bax, [6], [8]). [7] işi ilə lokal müddətin semimartinqallar nəzəriyyəsi çərçivəsində araşdırılmasına başlanmışdır.

«Lokal müddət» termini bəzən aşağıdakı mənada istifadə olunur. Kifayət qədər hamar ∂D sərhədli D oblastının hər hansı n – ölçülü, $n \ge 2$, $\mathscr{E}$-nin qapayıcısında sərhəddə inikaslı diffuzion prosesin verildiyi fərz olunur (bax, *Markov prosesi*; s ə r h ə d ş ə r t i). Onda geniş şərtlərlə sərhəddə lokal müddət mövcuddur, bu isə ζ-nın elə kəsilməz additiv L_t funksionalı kimi anlaşılır ki, bu funksional bütün $x \in \partial D$ üçün $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n^{-1} \int_0^1 \mathbf{1}_{D_n}(\zeta_s)\, ds, \quad t > 0$$

limiti ilə üst-üstə düşsün, bu şərtlə ki, $\rho_n \downarrow 0$ ədədləri münasib seçilsin, D çoxluğu, yalnız və yalnız, elə $x \in \mathscr{E}$ nöqtələrindən təşkil olunsun ki, bu nöqtələrdən ∂D-yə olan məsafə ρ_n-i aşmasın.

Əd.: [1] L e v y P., Processus stochastiques et mouvement brownien, 2 ed., P., 1965 (в рус. пер. – Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, М.,1972); [2] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [3] T r o t t e r H. F., «III. J. Math.», 1958, v. 2, p. 425–33; [4] B l u m e n t h a l R. M., G e t o o r R. K., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 50–74; [5] G e t o o r R. K., K e s t e n H.,«Composito math.», 1972, t.24, p.277–303; [6] B e r m a n S. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 137, p. 277–99; [7] M e y e r P.-A., «Lect. Notes Math.», 1975, v. 511, p. 245–400; [8] G e m a n D., H o r o w i t z J., «Ann. Probab.», 1980, v. 8, p.1–67; [9] K n i g h t F. B., Essentials of Brownian motion and diffusion, Providence, 1981; [10] Н а с ы р о в Ф. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1995, т. 40, в. 4, с. 798–812.

MARKOV PROSESİ; m ə r k ə z i l i m i t t e o r e m i **« марковский процесс;** ц е н т р а л ь н а я п р е д е л ь н а я т е о р е м а; **Markov process;** c e n t r a l l i m i t t h e o r e m **»** – bax, *Mərkəzi limit teoremi* M a r k o v p r o s e s l ə r i ü ç ü n.

MARKOV PROSESİ; m ü t l ə q p a y l a n m a **« марковский процесс;** а б с о л ю т н о е р а с п р е д е л е н и е; a b s o l u t e p r o b a b i l i t i e s o f a **Markov process »** – bax, *Mütləq paylanma*(s ı) M a r k o v z ə n c i r i və ya M a r k o v p r o s e s i n i n.

MARKOV PROSESİ n o r m a l **« марковский процесс** н о р м а л ь н ы й; n o r m a l **Markov process »** – bax, *Sıfır – vahid qanunu* M a r k o v p r o s e s l ə r i ü ç ü n, *Qırılma anı.*

MARKOV PROSESİ; r e z o l v e n t **« марковский процесс;** р е з о л ь в е н т а; **Markov process;** r e z o l v e n t **»** – bircins *Markov prosesinin* keçid funksiyasının Laplas çevirməsidir. $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ – bircins M. p., $p(t, x; \Gamma) = \mathbf{P}_x\{\zeta_t \in \Gamma\}$ – onun keçid funksiyası olsun. Fərz olunur ki, $\zeta_t(\omega)$ prosesi t və ω arqumentlər çoxluğu üzrə ölçülən prosesdir (məs., proses t üzrə sağdan kəsilməz olduqda belə olur). Onda $p(t, x; \Gamma)$ funksiyası t, x üzrə ölçülən funksiyadır və rezolventi

$$r_\lambda(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x; \Gamma)\, dt, \quad \lambda > 0$$

düsturu ilə təyin olunur. $r_\lambda(x, \Gamma)$ funksiyaları nüvədirlər, yəni Γ qeyd olunduqda x üzrə ölçülən, x qeyd olunduqda Γ üzrə (sonlu) ölçüləndirlər. r_λ nüvələri ilə R_λ operatorları

$$R_\lambda f(x) = \int_E r_\lambda(x, dy) f(y) = M_x \int_0^\xi e^{-\lambda t} f(\zeta_t)\, dt$$

düsturu ilə əlaqələnir, burada $\xi = \xi(\omega)$, – ζ prosesinin qırılma anıdır (qırılmayan proses üçün $\xi = \infty$).

r_λ rezolventi aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\| \lambda R_\lambda f \| \le \| f \|$, $\lambda > 0$, burada $\| f \| = \sup |f(x)|$; qırılmayan proseslər üçün $\lambda R_\lambda \mathbf{1} \equiv 1$;

b) $R_\lambda = R_\mu + (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$, $\lambda, \mu > 0$ (r e z o l v e n t t ə n l i y i).

a) və b) şərtlərini ödəyən $r_\lambda(x, dy)$ nüvələrinin ixtiyari ailəsinə uyğun keçid funksiyası p (və ζ M. p.) həmişə mövcud olmur. Əgər $\mathscr{E}$ metrik kompakt olarsa, r_λ nüvələrinin ailəsi də Rey rezolventini əmələ gətirərsə (o cümlədən, bu onu ifadə edir ki, R_λ operatorları kəsilməz funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirir), onda r_λ nüvələri ailəsi sağdan kəsilməz ciddi hər hansı M. p.-nin rezolventidir.

r_λ rezolventi ζ prosesinin infinitezimal A operatoru ilə $R_\lambda = (A - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ ($\mathbf{I}$ eynilik operatorudur) münasibəti ilə və ya məhdud ölçülən f funksiyalar üçün $AR_\lambda f - \lambda R_\lambda f = f$, $\lambda > 0$ bərabərliyi ilə əlaqələnir. Ciddi M. p. üçün

$$M_x e^{-\lambda\tau} R_\lambda f(\xi_\tau) - R_\lambda f(x) = -M_x \int_0^\tau e^{-\lambda s} f(\zeta_s) ds$$

münasibəti doğrudur (Dınkin düsturu).

Trayektoriyaların requlyarlıq xassələri rezolvent terminləri ilə rahat ifadə oluna bilinir (bax, *Sağ Markov prosesi*). Rezolvent Martin sərhədlərinin qurulmasında, proseslərin sərhədlərdə davranışının araşdırılmasında, dual M. p.-lərinin tədqiqində vasitələrdən biridir. Rezolventin belə rolu $z_t = R_\lambda f(\zeta_t)$, $t \geq 0$ təsadüfi prosesinin aşağıdakı xassələri ilə bir qədər izah olunur:

1) z_t bircins prosesdir, yəni $z_{t+s}(\omega) = z_t(\theta_s, \omega)$, burada θ_s – yerinidəyişmə operatorudur;

2) $e^{-\lambda\tau} z_t$, – $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrlərinə nəzərən supermartinqaldır.

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

MARKOV PROSESİ sağ « **марковский процесс;** правый; right **Markov process** » – bax, *Sağ Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; sərhəd şərti « **марковский процесс;** граничное условие; **Markov process;** boundary condition » – n – ölçülü $(n \geq 1)$ oblastın sərhədində verilən *Markov prosesinin* infinitezimal operatorunun təyin olunma oblastından olan olduqca hamar, bu oblastın qapayıcısında funksiyaların ödədiyi şərtdir. Baxılan prosesin, adətən, bircins olduğu və oblastdan çıxışa qədər özünü müəyyən diffuzion proses kimi apardığı fərz olunur, ümumi halda isə onun trayektoriyalarının sərhəddə olduğu anlarda sıçrayışlarının ola biləcəyi və sərhəddə qalmaması hallarının da mümkünlüyü fərz olunur. Birölçülü hal [1] məqaləsindən başlayan silsilədə V. Feller tərəfindən araşdırılmışdır. Çoxölçülü hallarda oxşar araşdırılmaların təşəbbüskarı A. D. Ventsel olmuşdur.

$n \geq 2$ olduqda sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi yaranır. Olduqca yaxşı ∂D sərhədinə malik olan n – ölçülü D oblastının qapayıcısı $\overline{D}$ -də

$$Au(x) = a^{-1}(x) \sum_{i,j=1}^{n} \left[a^{ij}(x)\, a(x)\, u'_{x^j}(x) \right]'_{x^i} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\, u'_{x^i}(x) + c(x)\, u(x)$$

elliptik operatoru verilir, burada $u(x)$ – olduqca hamar funksiyadır, $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ əmsalları da özlərini requlyar kimi aparır, $c(x) \leq 0$, $\mathscr{A} = \left\| a^{ij}(x) \right\|$ matrisi isə simmetrik və müsbət müəyyən matrisdir, $a(x) = \det^{-1/2} \mathscr{A}$. $\overline{D}$ -də yuxarıda qeyd olunmuş tip Feller prosesinin varlığı fərz olunur; bu prosesin isə D oblastında hər hansı diffuzion prosesin davamı olduğu (bax, *Markov prosesi*; davamı), bu diffuzion prosesin infinitezimal operatorunun isə D -də olduqca hamar funksiyalarda $\mathscr{A}$ operatoru ilə üst-üstə düşdüyü fərz olunur. Onda $\overline{D}$ -də hamar olan, $\overline{D}$ -də prosesin infinitezimal operatorunun təyin olunma oblastına daxil olan hər bir $u(x)$ funksiyası üçün (bax, [3]) $Lu(x) = 0$, $x \in \partial D$ sərhəd şərti ödənilir; bu şərt Ventsel şərti adlanır. Burada

$$Lu(x) = \mathscr{B} u(x) + \alpha(x)\, u(x) + \beta(x)\, Au(x) - \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \mathscr{K} u(x), \quad x \in \partial D, \qquad (*)$$

$\mathscr{B}$ hər hansı, ola bilər ki, cırlaşan, elliptik tip operator, $\mathscr{K}$ – xüsusi strukturlu inteqral operator, α, β, γ, – ∂D -də verilən, müsbət olmayan funksiyalar, $\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}$, – ∂D -yə daxili normal istiqamətində törəmədir.

$\mathscr{B} \equiv 0$ və $\mathscr{K} \equiv 0$ olduqda (*) şərti xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsindən yaxşı məlum olan şəkil alır. $\mathscr{K} \equiv 0$ halında, yəni prosesin $\overline{D}$ -də kəsilməz olduğu halda (*) şərtini belə interpretasiya etmək olar: D -də diffuziya edən hissəcik, ∂D sərhədində olaraq, dayana bilər, yox ola bilər, sərhəddən əks oluna bilinər və ya müəyyən müddət ərzində sərhəddə dolaşa bilər, bu hərəkətin müəyyən kombinasiyalarında ola bilər, əgər hissəcik hərəkətdədirsə və yox olmamışdırsa, onda o, D oblastına qayıdır, sonra isə yenidən sərhədə daxil olur və s. Əgər (*) sərhəd şərti $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$, $x \in \partial D$ münasibətləri şəklində ifadə olunarsa, onda $\overline{D}$ -də ona uyğun proses D -də sərhəddə əks olunan diffuzion proses adlanır.

A operatoru və (*) sərhəd şərtinə görə $\overline{D}$ -də uyğun M. p.-nin qurulması tərs məsələsi də böyük maraq doğurmuşdur (bax, [4], [5] – [7]).

Bütün qeyd olunan problemlər ixtiyari şəkildə M. p.-lərinin mümkün davamlarının təsviri məsələlərində daha ümumi cəhətdən də araşdırıla bilinər (bax, *Markov prosesi*; davamı).

Bax, *Birölçulü diffuziya.*

Əd.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Вентцель А. Д., «Докл. АН СССР», 1956, т. 111, с. 269–72; [3] Вентцель А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с. 172–85; [4] Вентцель А. Д., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, с. 202–04; [5] Ueno T., «Proc. 5th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1967, v. 2, pt 2, p. 111–30; [6] Kunita H., «J. Math. Kyoto Univ.», 1970, v. 10, p. 273–335; [7] Silverstein M. L., «Lect. Notes Math.», 1976, № 516.

MARKOV PROSESİ sıçrayışvari « **марковский процесс;** скачкообразный; **Markov jump process** » – bax, *Sıçrayışvari Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; sıfır-vahid qanunu **« марковский процесс;** закон нуль-единица; **Markov process;** zero-one law **»** – bax, *Sıfır – vahid qanunu* Markov prosesləri üçün.

MARKOV PROSESİ standart **« марковский процесс** стандартный; standard **Markov process »** – bax, *Standart Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ stasionar **« марковский процесс** стационарный; stationary **Markov process »** – bax, *Stasionar Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; statistik məsələlər **« марковский процесс;** статистические задачи; **Markov process;** statistical problems **»** – bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

MARKOV PROSESİ şərti **« марковский процесс** условный; conditional **Markov process »** – bax, *Şərti Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ topoloji qayıdışlı **« марковский процесс** топологически возвратный; topologically recurrent **Markov process »** – bax, *Qayıdışlı Markov prosesi.*

MARKOV PROSESİ; trayektoriyaların daxili xassələri **« марковский процесс;** внутренние свойства траекторий; **Markov process;** intrinsic properties of paths **»** – yalnız *Markov prosesi* trayektoriyalarının keçdiyi nöqtələr çoxluğundan və zaman üzrə trayektoriyaların bu keçidləri qaydasından asılı trayektoriyaların xassələridir. Daha dəqiq, fərz olunur ki, sağ Markov prosesi $\zeta = (\zeta_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasından qiymətlər alır. $\omega_1(t) \equiv \xi_t(\omega_1)$ və $\omega_2(t) \equiv \xi_t(\omega_2)$ – trayektoriyalardır, burada $t \geq 0$, ω_1 və $\omega_2 \in \Omega$, ω_1, ω_2 – elementar hadisələr, Ω – elementar hadisələr fəzasıdır; əgər elə kəsilməz birqiymətli $\varphi : [a_2, b_2) \to [a_1, b_1)$ inikası varsa ki, $\omega_2(\cdot) \equiv \equiv \omega_1(\varphi(\cdot))$ münasibəti $[a_2, b_2)$-də ödənilsin, onda $[0, \infty)$-un $[a_1, b_1)$ və $[a_2, b_2)$ zaman intervallarında $\omega_1(t)$ və $\omega_2(t)$ trayektoriyaları bir-birinə ekvivalent hesab olunur. Əgər $\zeta_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$ trayektoriyasının hər hansı xassəsi ona ekvivalent olan bütün trayektoriyalara xas olarsa, bu xassə trayektoriyanın daxili xassəsi adlanır (misal: trayektoriyanın hər hansı qeyd olunmuş vəziyyətlər çoxluğunda və ya belə bir neçə çoxluqda verilmiş qaydada olmasından ibarət xassə).

[4]-də təklif olunmuş formada (bax, həm də, [5]) Çekon – Cemison teoremində hökm olunur: fərz olunur ki, $\mathscr{E}$-də ζ prosesinin ləngidici vəziyyətləri, yəni t-nin bütün olduqca kiçik $t > 0$ qiymətlərində $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin $\zeta_t(\omega) = x$ olan x nöqtələri yoxdur. Onda verilən prosesin ilkin paylanması ixtiyari olduqda, ehtimalı sıfra bərabər olan elə $\Omega_1 \subset \Omega$ ölçülən çoxluğu vardır ki, əgər $\omega_1, \omega_2 \notin \Omega_1$ və $\zeta_t(\omega_1)$, $\zeta_t(\omega_2)$ trayektoriyaları hər hansı $[a_1, b_1)$ və $[a_2, b_2)$ zaman intervallarında ekvivalent olarsa, onda $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ olur. Başqa sözlə: əgər ω_1 və ω_2 göstərilən qayda ilə seçilmişsə, onda $\zeta_t(\omega_1)$ trayektoriyasının hər bir hissəsi $a_1 \leq t < b$ olduqda ikinci trayektoriyanın uyğun trayektoriyası kimi «eyni sürətlə keçilir», yəni trayektoriyanın bu və ya digər hissəsinin «keçmə qaydasını» onun daxili xassələrinə aid etmək olar.

Qırılan M. p.-ləri halı da analoji qaydada izah olunur. Qeyd olunan teorem bir-birindən ya zamanın təsadüfi əvəz olunması, ya təsadüfi əvəzetmə və yox edilməsi ilə alınan M. p.-ləri cütünü xarakterizə edən nəticələri ümumiləşdirməyə imkan yaratmış oldu (bax, *Markov prosesi*; çevirmələr).

Əd.: [1] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y., 1968; [2] Chacon R. V., Jamison B., «Israel J. Math.», 1979, v. 33, p. 241–69; [3] Chacon R. V., Jamison B., «Z. Wahr und verw. Geb.», 1981, Bd 58, S. 169–82; [4] Le Jan Y., «Adv. Math.», 1981, v. 42, p. 136–42; [5] Walsh J. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1984, Bd 68, S. 9–28.

MARKOV PROSESİ vəziyyətləri çoxluğu hesabi **« марковский процесс** со счетным множеством состояний; **Markov process** with a countable/denumerable state space **»** – hesabi $\mathscr{E}$ çoxluğundan (faza fəzasından) qiymətlər alan kəsilməz zamanlı, qırılmayan *Markov prosesi* ζ-dır. Bu anlayış ilk dəfə 1931-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən vəziyyətlər çoxluğu sonlu $\mathscr{E}$ olan M. p.-nin təbii ümumiləşməsi kimi daxil olunmuşdur (bax, [1]). Vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p. kütləvi xidmət nəzəriyyəsində, əməliyyatların tədqiqində, fizikada, biologiyada texnoloji proseslərin təsvirində geniş surətdə tətbiq olunur. *Puasson prosesi*, *doğum və ölüm prosesi* belə proseslərdəndir.

Vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p.-ləri nəzəriyyəsinin ilkin anlayışları vəziyyətləri çoxluğu sonlu Markov proseslərindən yalnız onunla fərqlənir ki, $i, j, \ldots$ indeksləri sonlu sayda deyil, hesabi sayda qiymətlər alır. Bu – keçid ehtimalları $p_{ij}(s, t)$ [bircins halda $p_{ij}(t)$], keçid matrisi $\mathbf{P}(s, t)$ [və ya $\mathbf{P}(t)$], Markov xassəsi, Kolmoqorov – Çepmen tənliyi üçün, Kolmoqorov teoremi əsasında $\mathbf{P}_{s,x}$ (və ya $\mathbf{P}_x$) ölçülərinin qurulmasında, t anında mütləq paylanma düsturunda, q_i çıxış və q_{ij} keçid ehtimallarının sıxlıqları anlamı üçün də, düz və tərs Kolmoqorov differensial tənlikləri üçün də belə anlaşılır. Vəziyyətlər çoxluğunun hesabi olması spesifikası özünü sonlu halda həmişə doğru olan infinitezimal xarakteristikalar üçün münasibətlərin pozulmasında, Kolmoqorov differensial tənliklər sisteminin həllinin yeganə olmamasında və ya keçid ehtimalları üçün bunların doğru olmamasında, trayektoriyaların qeyri – adiliyində biruzə verir. Əvvəllər «patoloji» kimi qəbul edilən misalların öyrənilməsi vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p.-ləri nəzəriyyəsinin inkişafı üçün stimul oldu.

Hesabi, qeyri – bircins halda tərs Kolmoqorov differensial tənliklər sisteminin ödənilməsi üçün:

1)

$$q_i(t) = -q_{ii}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t,\ t+h)}{h}, \quad i \in \mathscr{E} \qquad (1)$$

çıxış ehtimalları sıxlıqlarının kəsilməz və (1)-də yığılma hər bir i qiymətində t üzrə müntəzəm olmalı;

2)

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t,\ t+h)}{h}, \quad i \neq j \in \mathscr{E} \qquad (2)$$

keçid ehtimalları sıxlıqlarının kəsilməz və (2)-də yığılma ixtiyari i, j üçün t üzrə müntəzəm olmalı;

3)

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty, \quad i \in \mathscr{E} \tag{3}$$

şərti ödənilməlidir.

Düz Kolmoqorov differensial tənliklər sistemi üçün əlavə olaraq fərz olunur ki, (2)-də yığılma hər j qiymətində i üzrə müntəzəm olsun (bax, [1], [4]).

Vəziyyətləri çoxluğu hesabi bircins M. p.-ləri nəzəriyyəsi ən inkişaf edilmiş hesab olunur; bu nəzəriyyənin əsasları [2] – [5]-də qoyulmuşdur. Vəziyyətlərin sayı hesabi olduğu halda başlanğıc şərtləri

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{4}$$

olan,

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum p_{ij}(t) = 1 \tag{5}$$

tələblərini ödəyən

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathscr{E}} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t), \quad s \geq 0,\ t \geq 0,\ i, j \in \mathscr{E} \tag{6}$$

Kolmoqorov – Çepmen tənliklərinin həlli ölçülən olmaya da bilər. Bütün $p_{ij}(t)$ funksiyalarının Lebeq mənada ölçülənliyi onların ixtiyari (s, ∞), $s > 0$ intervalında müntəzəm kəsilməzliyinə ekvivalentdir, həm də, ola bilər ki, (4)-dən fərqli olan $p_{ij}(+0)$ limitlərinin varlığına ekvivalentdir. Keçid ehtimallarının ölçülənliyi fərziyyəsi alternativ hala:

$$p_{ij}(t) \equiv 0,\ t > 0 \quad \text{və ya} \quad p_{ij}(t) > 0,\ t > 0 \tag{7}$$

münasibətlərinə gətirir. Bütün sonrakı nəzəriyyə qurularkən

$$p_{ij}(+0) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathscr{E} \tag{8}$$

fərziyyəsi qəbul olunur ki, bu da (4)-ün, həm də ölçülənlik tələbinin güclənməsini təmin edir; (8) şərtini ödəyən $\mathbf{P}(t) = \| p_{ij}(t) \|$ keçid matrisləri **standart matrislər** adlanır.

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j \in \mathscr{E}$$

sonlu limitləri və sonlu və ya $+\infty$ -a bərabər

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii} = q_i \geq 0, \quad i \in \mathscr{E} \tag{9}$$

limitləri mövcuddur,

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i \tag{10}$$

bərabərsizliyi də doğrudur.

Misallardan aydın olur ki, q_i -nin sonsuzluğa bərabər olması və (10)-da bərabərlik halının pozulması həqiqətdə mümkündür.

M i s a l 1. $\mathscr{E} = \{1, 2, \ldots\}$, $q_1 = \infty$, $q_{1j} = 1$ $(j \geq 2)$, $q_i = q_{i1} > 0$, $(i \geq 2)$ və

$$\sum_{i=2}^{\infty} q_i^{-1} < \infty, \tag{11}$$

və bütün digər q_{ij} -lərin 0 olduğu verilir. Aydındır ki, 1 vəziyyətindən digər vəziyyətlərə və tərsinə sonsuz sayda sıçrayışlar çox kiçik zaman ərzində baş verir (hər bir qeyd olunmuş $j \geq 2$ vəziyyətinə sıçrayışlar sayı sonludur). (11) şərtinə əsasən uyğun $p_{ij}(t)$ keçid funksiyaları qurulur.

M i s a l 2. $\mathscr{E} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $i \geq 2$ olduqda $q_i = q_{i,i-1} > 0$, $q_1 = 0$, $q_0 = 1$ digər q_{ij} -lər $q_{ij} = 0$ olur və (11) şərti ödənilir. Burada $q_0 > q_{01} + q_{02} + \ldots = 0$. (11) şərti ödənildiyindən sistem sonlu zaman ərzində $\ldots, i, \ldots, 2, 1$ vəziyyətlərinin sonsuz zəncirini ardıcıl keçə bilir. 1 vəziyyətində udulma baş verir, 0 vəziyyətindən isə 1 intensivliklə bu zəncirin sonsuz uzaq başlanğıcına sıçrayış olur.

M i s a l 3. Burada sadəlik üçün (5)-də bərabərlik tələb olunmur (proses qırıla bilər). $\mathscr{E}$ bütün r_i, $i \geq 1$ rasional ədədlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür, sistem bu vəziyyətlərdə $-\infty$ -dan $+\infty$ -a qədər artan qaydada olur. Belə proses (11) şərtində mümkündür. Burada $i \neq j$ olduqda bütün q_{ij} -lər $q_{ij} = 0$ olur, bütün q_i -lər isə $q_i > 0$ və sonludur.

$q_i < \infty$ şərtini ödəyən i vəziyyətləri **dayanıqlı**, $q_i = \infty$ şərtini ödəyən i vəziyyətləri **ani vəziyyətlər** adlanır. (3) şərtini ödəyən $Q = \| q_{ij} \|$ infinitezimal matrisləri **konservativ matrislər** adlanır. Ani vəziyyətləri olan proses üçün Kolmoqorov differensial tənliklər sistemi öz mənasını itirmiş olur.

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathscr{E}} q_{ik}\, p_{kj}(t), \qquad t \geq 0, \quad i, j \in \mathscr{E} \tag{12}$$

tərs sisteminin doğruluğu üçün Q matrisinin konservativ matris olması zəruri və kafidir. Hətta Q matrisi konservativ olduqda belə

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathscr{E}} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad t \geq 0, \quad i, j \in \mathscr{E} \tag{13}$$

düz sistemi mümkün olmaya da bilər və $p_{ij}(t)$ ehtimalları $Q = P'(0)$ matrisi ilə birqiymətli təyin olunmaya bilər, lakin (12) və (13) düsturları bunlarda $=$ işarəsi $\geq$ işarəsi ilə əvəz olunduqda həmişə doğrudur. q_i sıxlıqlarının məhdudluğu halında qeyd olunmuş «patologiyalar» istisnadır, sonlu saylı vəziyyətlər halı ilə tam analogiya müşahidə olunur. İsbat olunur ki, $p'_{ij}(0) = -q_i$ törəmələrinin məhdudluğu tələbi aşağıdakı şərtlərdən ixtiyari birinə ekvivalentdir: 1) $t \downarrow 0$ olduqda $p_{ii}(t) \to 1$ i-yə görə müntəzəm yığılmadır, 2) (9)-da limitə yaxınlaşma i-yə görə müntəzəmdir. $p_{ij}(t)$ keçid funksiyaları $t > 0$ olduqda differensiallanandırlar (bax, [6] – [9]). $p'_{ij}(t)$ törəmələri, $q_i = \infty$ olduqda, ola bilər ki, $t = 0$ nöqtəsində p'_{ii} istisna olmaqla, hər yerdə kəsilməzdirlər (bax, [10]). $t > 0$ olduqda ikinci tərtib $p''_{ij}(t)$ törəməsi ∞ ola bilər (bax, [8]), $t > 0$ olduqda $\mu_i(t) = \mathbf{P}\{\zeta_t = i\}$ mütləq ehtimalları differensiallanmayan da ola bilərlər (bax, [11]). Belə bir hipotez söylənilmişdi ki, prosesin bütün vəziyyətləri ani vəziyyətlər ola bilməz (bax, [5]). Bunu inkar edən misallar asılı olmadan qurulmuşdur

(bax, [12] və [13]). Ani vəziyyətlərli misalların ([17]-də) konstruksiyaları ətraflı araşdırılmışdır; $q_i \equiv \infty$ olan bütün mümkün Q matrisləri tamamilə təsvir olunmuşdur. Keçid ehtimalları $p_{ii}(t)$ və $p_{ij}(t)$ ola bilən $f(t),\ t \geq 0$ funksiyalarının xarakterizasiyası alınmışdır (bax, [21]).

ζ – separabel proses, $S_i(\omega) = \{t : t \geq 0,\ \zeta(t, \omega) = i\}$, – $i \in \mathscr{E}$ vəziyyətində qalma çoxluqları (rus. множества пребывания) olsun. Dayanıqlı i vəziyyəti üçün S_i çoxluğu, sanki yəqin, bir-birilə ümumi sərhəd nöqtələrinə malik olmayan $S_i^1, S_i^2, \ldots$ intervallarından ibarətdir; bunların son ucları $\tau_i^1 < \tau_i^2 < \ldots$ i vəziyyətinə birinci, ikinci və s. keçmə anları adlanır. Bütün S_i^m-lərin uzunluqları bir-birindən və prosesin digər vəziyyətlərindən asılı deyildirlər və bunlar $\mathbf{P}\{|S_i^m| > t\} = \exp(-q_i t)$ eksponensial qanunu ilə paylanır. Hər bir dayanıqlı i vəziyyəti üçün belə intervalların sayı ixtiyari sonlu zaman parçasında sanki yəqin sonludur. i ani vəziyyət olduğu halda S_i çoxluğu sanki yəqin heç yerdə sıx deyildir; lakin ixtiyari $t > 0$ üçün $\zeta_t = i$ olduqda

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \operatorname{mes}\{S_i \cap (t - \varepsilon,\ t + \varepsilon)\} = 1$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur [$t = 0$ olduqda, $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ intervalı $(0, 2\varepsilon)$ ilə əvəz olunmalıdır]. i ani vəziyyəti üçün bu vəziyyətə keçmə anlarından yalnız $\tau = \inf\{t : t \in S_i\}$ – birinci keçmə anı təyin olunmuşdur; i vəziyyətinə ikinci və s. keçmə anları bu halda təyin olunmur. Separabel proses halında, ümumiyyətlə, fiktiv vəziyyətlərdən istifadə olunur. Məs., misal 3-də hər bir realizasiya üçün t qiymətlərinin sanki yəqin elə hesabi çoxluğu vardır ki, bu anlarda proses r_i vəziyyətlərindən heç birində olmur; yəni bu çoxluq ζ_t-nin irrasional nöqtələrində ötüm anları çoxluğudur; bu çoxluq S_i-lərin açıq çoxluqlar olduğu fərz olunduqda əsl Kantor çoxluğuna oxşardır. Ən sadə üsul (əgər tərsi nəzərdə tutulmursa, aşağıda tətbiq olunan) yeganə fiktiv vəziyyət ∞ ilə kifayətlənməkdir, bu halda bu vəziyyətin artan indekslərli $\{i_k\}$ vəziyyətlərinin ixtiyari ardıcıllığının limiti olduğu fərz olunur. S_∞ – vəziyyətdə qalma çoxluğunun Lebeq ölçüsü sanki yəqin sıfra bərabərdir. $t > 0$ olduqda $p_{i\infty}(t) = 0$ götürmək olar, $p_{\infty i}(t)$ ehtimalları isə, ümumiyyətlə, heç bir mənа daşımır [misal 3-də bütün irrasional ədədlərə müvafiq fiktiv α vəziyyəti üçün, lakin yeganə $\alpha = \infty$ üçün deyil, $p_{\alpha i}(t)$ ehtimalları təyin etmək ağlabatandır].

Trayektoriyaların ixtiyari $t \geq 0$ kəsilmə nöqtəsində $s \downarrow t$ olduqda (həm də, əgər $t > 0$ olarsa, $s \uparrow t$ olduqda) aşağıdakı alternativlərdən biri sanki yəqin doğrudur: 1) $\zeta_s \equiv i$, i – dayanıqlı vəziyyətdir; 2) $\zeta_s \to \infty$ (ola bilər ki, ∞ fiktiv qiymətini də alaraq); 3) ζ_s-in yalnız iki limit nöqtəsi: i və ∞ vardır, burada i ani vəziyyətdir.

Vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p. üçün *ciddi Markov xassəsi* tam olaraq doğru deyildir; bu xassə yalnız $\zeta_\tau \neq \infty$ şərtini ödəyən τ dayanma anları üçün, həm də dayanıqlı i vəziyyətindən ilk çıxış anları – $\rho_i(\omega) = \inf\{t : t \geq 0, \zeta_t \neq i\}$ üçün doğrudur (bax, [8], [15]). Faza fəzası $\mathscr{E}$-nin elə kompaktifikasiyası mümkündür ki, bu zaman sağdan kəsilməz ciddi M. p. qurulur, bu prosesin $\mathscr{E}$-də izi ilkin ζ prosesi olmalıdır, lakin bu halda intuisiyanın tərzindən olduqca çox fiktiv vəziyyətlər daxil olunur (bax, [18]). q_i sıxlıqları məhdud olduğu halda sağdan kəsilməz ciddi M. p.-nin alınması üçün fiktiv vəziyyətlərə ehtiyac olmur.

Kolmoqorov düz və tərs differensial tənliklərinin doğruluğu üçün zəruri və kafi şərtlər trayektoriyaların kəsilənliyi terminlərilə verilir (bax, [15]). Verilən i və bütün j-lər üçün (12) tənlikləri, yalnız və yalnız, o halda doğrudurlar ki, i dayanıqlı vəziyyətdir və i vəziyyətindən başlayan trayektoriyaların ilk qırılması sanki yəqin hər hansı k vəziyyətinə sıçrayışdır (yəni $t \downarrow \rho_i$ olduqda, ya $\zeta_t \equiv k$, k isə dayanıqlı vəziyyətdir və ya ζ_t-nin iki limit nöqtəsi: k ani vəziyyəti və ∞ limit nöqtələri vardır). Verilən j və bütün i-lər üçün (13) tənlikləri, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, j dayanıqlı vəziyyətdir və hər bir $t > 0$ qiymətində $\zeta_t = j$ şərti ödənildikdə trayektoriyanın t anından əvvəlki qırılması ∞-dan j vəziyyətinə 1-ə bərabər şərti ehtimalla sıçrayışa səbəb olmur (yəni ani k vəziyyətindən sıçrayış ehtimalı sıfra bərabər olduğundan dayanıqlı k vəziyyətindən j-yə sıçrayış olur). Belə nəticə alınır ki, hər iki (12) və (13) sistemləri bütün i və j-lər üçün, yalnız və yalnız, o halda doğrudurlar ki, bütün vəziyyətlər dayanıqlı olsun və ixtiyari başlanğıc vəziyyətində trayektoriyalar sanki yəqin aşağıdakı xassəyə malik olsunlar: əgər $t \downarrow s$ olduqda $\zeta_t \to \infty$ olarsa, onda $t \uparrow s$ olduqda $\zeta_t \to \infty$ olur və əksinə.

ζ prosesinin $P'(0) = Q$ şərtini ödədiyi fərz olunur, burada Q – verilən matrisdir və $0 \leq q_{ij} < \infty$, $i \neq j$, $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq -q_{ii} = q_i \leq \infty$. Əgər bütün q_i-lər sonlu olarsa, onda $\overline{\mathbf{P}}(0) = \mathbf{I}$, $\overline{\mathbf{P}}'(0) = Q$ şərtlərini ödəyən $\overline{\mathbf{P}}(t) = \left\| \overline{p}_{ij}(t) \right\|$ matrislərinin minimal semistoxastik semi – qrupu vardır. p_{ij} ədədləri i vəziyyətindən j vəziyyətinə t müddəti ərzində sonlu sayda sıçrayışla keçid ehtimalları kimi anlaşılır [$P'(0) = Q$ şərtilə verilən ixtiyari ζ prosesi üçün]. $\overline{p}_{ij}(t)$ funksiyaları hər iki – (12) və (13) sistemlərini ödəyirlər. Əgər

$$\sum_j \overline{p}_{ij}(t) = 1, \quad t > 0, \quad i \in \mathscr{E}$$

olarsa, onda $\overline{\mathbf{P}}(t)$ semi – qrupu $P(0) = \mathbf{I}$, $P'(0) = Q$ şərtlərini ödəyən yeganə stoxastik (həm də yeganə semistoxastik) semi – qrupdur, $\overline{p}_{ij}(t)$ funksiyaları (4) başlanğıc şərtlərində (12) və (13) sistemlərinin yeganə həlli olur; bu halda Q matrisi hök-mən konservativ matrisdir. Digər tərəfdən, əgər Q konservativ matris olarsa, $\overline{p}_{ij}(t)$ minimal həlli stoxastik olmazsa, onda son-suz sayda çoxlu müxtəlif $P(t)$ stoxastik semi – qrupları vardır ki, bunlar üçün $\mathbf{P}'(t) = Q$. Bunların hamısı Kolmoqorov düz differensial tənliklər sistemini deyil, tərs sistemi ödəyirlər. Bütün bu proseslərin təsviri üçün çıxış – sərhəd, həm də, əgər varsa, giriş –

sərhədin əvvəlcədən qurulması tələb olunur (misal 2-də giriş-sərhəd bircə ∞ nöqtəsindən ibarətdir). Sonra çıxışlar $\mathscr{E}$-dən vəziyyətlərlə və ya sərhəd şərtlərinin vasitəsilə girişlərlə «calaşdırılır» (bax, *Markov prosesi*; sərhəd şərti). Çıxış-sərhəd sonlu olduğu halda və yalnız bu halda müəyyən dərəcədə aydın bir konstruksiya alınır (bax, [19], [20]).

Vəziyyətləri çoxluğu hesabi M. p. ζ-nın vəziyyətinin təsnifini ya ζ prosesinin zaman üzrə diskret $Y(n)=\xi(nh)$, $h>0$, $n=0,1,2,...$ yaxınlaşmasına keçməklə və ya bilavasitə kəsilməz zamana keçməklə aparmaq olar. Markov zənciri Y-in vəziyyətlərinin təsnifi (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı) h-dan asılı deyildir və birinci yanaşmada, tərifə görə, ζ prosesinə də şamil olunur. (7) alternativinə görə vəziyyətlərin mühüm sinifləri tsiklik altsiniflərə ayrılmır. İkinci yanaşmada i-dən j-yə ilk keçmə anları – $\tau_{ij}=\inf\{t: t>\rho_i,\ \zeta_t=j$ və ya $t=\infty\}$ kəmiyyətləri (τ_{ii}, – i vəziyyətindən çıxan prosesin yenidən i vəziyyətinə ilk qayıdış anı adlanır), bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmaları və orta qiymətləri də daxil olunur; yəni

$$F_{ij}(t)=\mathbf{P}_i\{\tau_{ij}<t\}$$

paylanma funksiyaları,

$$\mathbf{m}_{ij}=\mathbf{M}_i\tau_{ij}=\begin{cases}\int\limits_0^\infty t\,dF_{ij}(t), & \text{əgər } F_{ij}(+\infty)=1 \text{ olarsa,}\\ +\infty, & \text{əgər } F_{ij}(+\infty)<1 \text{ olarsa,}\end{cases}$$

riyazi gözləmələri. Əgər hər hansı $t>0$ üçün $F_{ij}(t)>0$ olarsa, i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid mümkündür və bu halda j – i vəziyyətindən j-yə keçid mümkün olan vəziyyət adlanır (rus. – j достижимо из i): bu bütün $t>0$ olduğu hallara da ekvivalentdir. Bu anlayışa əsaslanaraq, diskret zaman halında olduğu kimi, $\mathscr{E}$ çoxluğunun qeyri – mühüm vəziyyətlərin R sinfinə və bir-birilə qarşılıqlı əlaqəli mühüm vəziyyətlərin C_α siniflərinə bölgüsü alınır. Əgər i dayanıqlı vəziyyət və $F_{ii}(+\infty)=1$ və ya i ani vəziyyət və ixtiyari $j\neq i$ üçün

$$F_{ij}(+\infty)=F_{ij}(+\infty)F_{ji}(+\infty)$$

[i ani vəziyyət olduqda $F_{ii}(t)\equiv 1$, $t>0$] olarsa, i mühüm vəziyyətinə qayıdışlı vəziyyət deyilir. Qayıdışlı i vəziyyəti dayanıqlı və $m_{ii}<\infty$ olarsa və ya i ani vəziyyət və ixtiyari j üçün həm də $F_{ij}(t)>0$ olduğu halda (i ani vəziyyət olduqda $m_{ii}=0$) $m_{ij}+m_{ji}<\infty$ olarsa, qayıdışlı i vəziyyəti müsbət qayıdışlı vəziyyət adlanır. Müsbət olmayan qayıdışlı vəziyyət sıfır vəziyyəti adlanır. Vəziyyətlərin qayıdışlı, qayıdışsız, müsbət, sıfır xassəli vəziyyətlər olması vəziyyətlər sinfinin də xassəsi hesab edilir. i vəziyyəti, yalnız və yalnız, o halda qayıdışlı vəziyyətdir ki,

$$\int\limits_0^\infty p_{ii}(t)\,dt=\infty$$

olsun; yalnız və yalnız, o halda müsbət qayıdışlı vəziyyətdir ki,

$$\lim_{t\to\infty} p_{ii}(t)>0$$

olsun. Dayanıqlı i vəziyyəti üçün

$$\int\limits_0^\infty p_{ii}(t)dt=\frac{1}{q_i[1-F_{ii}(+\infty)]},\qquad \lim_{t\to\infty}p_{ii}(x)=\frac{1}{q_i m_{ii}}$$

münasibətləri ödənilir.

Vəziyyətləri fəzası hesabi M. p.-nin stasionar paylanmaları və bunların ixtiyari yaxınlaşması diskret zaman halında eyni olur və bunlar diskret zaman halında olduğu kimi vəziyyətlər siniflərinin terminlərilə təsvir olunur. Requlyarlığın bəzi şərtlərində (məs., əgər q_i sıxlıqları məhduddurlarsa) stasionar μ paylanması $\mu Q=0$ tənliyini ödəyir ki, bu tənlik isə $\mathscr{E}$ sonlu olduğu halda həmişə doğrudur.

Ədd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 60–105; [2] Doob J. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1942, v. 52, p. 37–64; [3] Doob J. L., «Trans. Amer. Soc.», 1945, v. 58, p. 455–73; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 363–70; [5] Levy P., «Ann. sci Ecole norm. super», 1951, t. 68, p. 327–81; [6] Austin D. G., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, p. 751–61; [7] Austin D. G., «Duke Math. J.», 1958, v. 25, p. 625–29; [8] Юшкевич А. А., «Уч. зап. МГУ», 1959, в. 186, с. 141–59; [9] Ornstein D., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 66, p. 36–39; [10] Smith G., «Trans. Amer. Math. Soc.», v. 110, p. 185–95; [11] Orey S., «Quart. J. Math.», 1962, v. 13, p. 252–54; [12] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 4, с. 481–85; [13] Feller W., Mc Kean H. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1956, v. 42, p. 351–54; [14] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [15] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [16] Freedman D., Markov chains, San Francisco, 1971; [17] Freedman D., Approximating countable Markov chains, N. Y., 1983; [18] Doob J. L., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1968, Bd 10, S. 236–51; [19] Williams D., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 227–46; [20] Дынкин Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 2, с. 222–57; [21] Kingman J. F., C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 7, S. 248–70; Bd 9, S. 1–9; [22] Williams D., «Lect. Notes in Math.», 1976, v. 511, p. 216–34, 505–20; [23] Williams D., «Lect. Notes in Math.», 1978, v. 649, p. 310–31; [24] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

MARKOV PROSESİ vəziyyətləri çoxluğu sonlu « **марковский процесс;** с конечным множеством состояний; **Markov process** with finite state space » – sonlu $\mathscr{E}$ çoxluğundan (faza fəzasından) qiymətlər alan, kəsilməz zamanlı *Markov prosesidir.* $\mathscr{E}$ çoxluğunun bütün altçoxluqlarının ölçülən olduğu fərz olunur. $\mathscr{E}$ çoxluğunun elementlərini natural – $1, 2, ..., n$ ədədlərilə eyniləşdirmək qəbul olunmuşdur. Adətən, fərz olunur ki, ζ qırılmayan prosesdir (qırılan proses halı qırılmayan prosesə əlavə, $(n+1)$ uducu vəziyyətinin daxil edilməsilə alınır). Vəziyyətləri sayı sonlu, bircins və bircins olmayan M. p.-ləri, Markov proseslərinin ([1] terminologiyasında – stoxastik təyin olunmuş) ilk, sadə nümunələri olub, A. N. Kolmoqorov tərəfindən 1931-də daxil olunmuşdur.

Bircins olmayan halda ζ prosesinə həqiqi oxun ixtiyari T intervalında baxılır. M. p.-nin ümumi müasir tərifinə uyğun olaraq, fərz olunur ki, $\zeta_t=\zeta(t)$ prosesi ixtiyari $s\in T$ anında ixtiyari $i\in\mathscr{E}$ vəziyyətindən başlaya bilər; bu şərtləri ödəyən, Ω əsas fəzasında təyin olunan ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}_{s,i}$ ilə işarə olunur.

Bəzən ilkin vəziyyət əvəzinə başlanğıc paylanma – $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ paylanmasına baxılır, burada

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_1 + ... + \mu_n = 1. \tag{1}$$

Uyğun ölçü

$$\mathbf{P}_{s,\mu} = \sum_{i \in \mathscr{E}} \mu_i \mathbf{P}_{s,i} \tag{2}$$

düsturu ilə təyin olunur.

M. p.-nin əsas xarakteristikası keçid funksiyası $p(s, i; t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,i}\{\zeta_t \in \Gamma\}$ olub, vəziyyətləri çoxluğu fəzası $\mathscr{E}$ sonlu (və ya hesabi) olduğu halda birölçülü çoxluqlarda öz qiymətlərilə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$p(s, i, t, \Gamma) = \sum_{j \in \Gamma} p(s, i; t, j).$$

$$p_{ij}(s, t) = p(s, i; t, j), \quad s \leq t \in T, \quad i \in \mathscr{E}, \quad j \in \mathscr{E}$$

kəmiyyətləri prosesin *keçid ehtimalları* adlanır. Bu ehtimallar mənfi deyildirlər,

$$p_{ij}(t, t) = \delta_{ij} \tag{3}$$

və proses qırılmayan proses olduğundan

$$\sum_{j \in \mathscr{E}} p_{ij}(s, t) = 1, \quad i \in \mathscr{E} \tag{4}$$

şərti də ödənilir. Keçid ehtimalları

$$p_{ij}(s, u) = \sum_{k \in \mathscr{E}} p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, u), \quad s < t < u \in T \tag{5}$$

düsturu ilə ifadə olunan Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyirlər. $P(s, t) = \| p_{ij}(s, t) \|$ matrisi prosesin keçid matrisi adlanır. $P(s, t)$ stoxastik matrisdir və (3), (5) şərtləri onun vasitəsilə $P(t, t) = \mathbf{I}$, $P(s, u) = P(s, t)P(t, u)$ münasibətilə ifadə olunur.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu (və ya hesabi) proseslər üçün Markov xassəsini yalnız bir nöqtəvi çoxluqlar üçün postulat kimi qəbul etmək kifayətdir; bu aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$\mathbf{P}_{s,\mu}\{\zeta(t_{m+1}) = i_{m+1} \mid \zeta(t_1) = i_1, ..., \zeta(t_m) = i_m\} =$$
$$= p_{i_m i_{m+1}}(t_m, t_{m+1}), \quad s \leq t_1 < t_2 < ... < t_m \in T, \tag{6}$$
$$i_1, ..., i_{m+1} \in \mathscr{E}, \quad m = 2, 3, ...$$

Ehtimalların vurulması və toplanmasından və (2) və (6) düsturlarından istifadə edərək, ixtiyari silindrik çoxluqların ehtimallarını başlanğıc ehtimalı μ verildiyi halda,

$$\mathbf{P}_{s,\mu}\{\zeta(t_1) \in \Gamma_1, ..., \zeta(t_m) \in \Gamma_m\}, \quad t_k \geq s, \quad \Gamma_k \subseteq \mathscr{E}, \tag{7}$$

keçid ehtimalları vasitəsilə ifadə etmək olur.

Verilən sonluölçülü (7) paylanmaları ilə uzlaşdırılmış təsadüfi prosesin varlığı haqqında Kolmoqorov teoremi əsas Ω fəzasında elə uyğun $\mathbf{P}_{s,\mu}$ ölçüsünü qurmağa imkan verir ki, ζ M. p.-nin tərifinə daxil olan bütün şərtlər ödənilsin və $p_{ij}(s, t)$ funksiyaları, həqiqətən də, ζ prosesinin keçid ehtimalları olsun. Beləliklə, 1) mənfi olmayan $p_{ij}(s, t)$, $s \leq t$, $s \in T$, $t \in T$, $i \in \mathscr{E}$, $j \in \mathscr{E}$ funksiyaları, yalnız və yalnız, o halda keçid ehtimalları ola bilər ki, (3) – (5) şərtləri ödənilmiş olsun; 2) hər bir belə funksiyalar toplusuna $\mathscr{E}$-də $\{\zeta_t\}_{t \in T}$ M. p. uyğundur. Bu qayda ilə təsadüfi prosesin qurulmasında çatışmayan cəhət ondan ibarət olur ki, $\mathscr{E}$-də «tipik» təsadüfi proses üçün təbii sayılan bir çox «yaxşı» çoxluqlar ölçülməyən olur; məs., vəziyyətlərin sayı $n \geq 2$ olduqda və $p_{11}(s, t) = 1$ halında $\mathbf{P}_{s,1}$ ehtimalı – $h > 0$ olduqda yəqin hadisə sayılan $\{\zeta_t \equiv 1, t \in [s, s + h]\}$ hadisəsinin ehtimalı təyin olunmamışdır. Bu çətinlik ζ prosesinin separabel versiyası adlandırılan konstruksiya vasitəsilə və ya elementar nəticələr fəzasının digər «təmizlənmə» üsullarının köməyilə aradan qaldırılır (bax, [3], [6]).

Zaman üzrə vəziyyətlərin $\mu(t) = \{\mu_1(t), ..., \mu_n(t)\}$ mütləq paylanmasının evolyusiyası keçid ehtimalları vasitəsilə

$$\mu_j(t) = \sum_{i \in \mathscr{E}} \mu_i(s) p_{ij}(s, t), \quad s \leq t \leq T, \quad j \in \mathscr{E}$$

düsturu ilə və ya matris yazılışda $\mu(t) = \mu(s)\mathbf{P}_{s,\mu}(s, t)$ düsturu ilə ifadə olunur, burada $\mu_i(t) = \mathbf{P}\{\zeta_t = i\}$.

Sonrakı nəzəriyyə prosesin keçid ehtimallarının bu və ya digər requlyarlığı fərziyyəsi ilə qurulur. Vəziyyətləri fəzası $\mathscr{E}$ sonlu (və ya hesabi) M. p. üçün sağdan stoxastik kəsilməzlik tələbi

$$\lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(t, t + h) = \delta_{ij}, \quad t \in T, \ i \in \mathscr{E}, \ j \in \mathscr{E} \tag{8}$$

və ya matris yazılışda $P(t, t + 0) = \mathbf{I}$ şərtinə gətirilir.

Daha güclü şərtlər – birincisi $p_{ij}(s, t)$ funksiyalarının hər yerdə kəsilməzliyi fərziyyəsindən ibarətdir ki, bunlar (8) tələbini də əhatə edir və ikincisi bu funksiyaların $s \neq t$ olduqda xüsusi törəmələrinin varlığı fərziyyəsindən ibarətdir. Bu fərziyyədən

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t + h)}{h} = q_i(t) = -q_{ii}(t) \geq 0, \tag{9}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + h)}{h} = q_{ij}(t) \geq 0, \quad i \neq j \tag{10}$$

sonlu limitlərinin varlığı və keçid ehtimalları üçün differensial tənliklərin iki sisteminin doğruluğu [1]-də isbat olunmuşdur. Aydındır ki, $q_{ij}(t)dt$, – t-dən $t + dt$-yə qədər keçən müddətdə i-dən j vəziyyətinə keçid ehtimalı, $q_1 dt$ isə bu zaman ərzində i vəziyyətindən çıxış ehtimalıdır. q_{ij}, $i \neq j$ ədədi i-dən j-yə keçid ehtimalı sıxlığı (keçid intensivliyi), q_i isə i-dən çıxış ehtimalı sıxlığı (çıxış intensivliyi) adlanır. Konkret məsələlərdə bunlar fiziki mülahizələr əsasında tapılır.

(4)-dən

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i \left(\sum_{j \in \mathscr{E}} q_{ij} = 0 \right), \quad i \in \mathscr{E} \tag{11}$$

olduğu alınır.

(9) – (10) münasibətlərini digər

$$Q(t)=\left.\frac{\partial\, p(t,u)}{\partial u}\right|_{u=t}$$

şəklində yazmaq olar, burada $Q(t)=\left\|q_{ij}(t)\right\|$. Birinci və ya («irəliyə istiqamətlənmiş») Kolmoqorov düz differensial tənliklər sistemi –

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t}=\sum_{k\in\mathscr{E}} p_{ik}(s,t)\,q_{kj}(t),\ s\le t,\ i,j\in\mathscr{E};\qquad (12)$$

ikinci və ya («geriyə istiqamətlənmiş») Kolmoqorov tərs differensial tənliklər sistemi –

$$\frac{\partial\, p_{ij}(s,t)}{\partial s}=-\sum_{k\in\mathscr{E}} q_{ik}(s)\,p_{kj}(s,\ t),\ \ s\le t,\quad i,j\in\mathscr{E};$$

matris yazılışda, uyğun olaraq

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t}=P(s,t)\,Q(t)\quad \text{və}\quad \frac{\partial P(s,t)}{\partial t}=-\,Q(s)\,P(s,t)$$

bərabərlikləri kimi ifadə olunur. (12) tənlikləri i-nin hər bir qeyd olunmuş qiymətində $p_{i1},\dots,p_{in}$ məçhulları üçün qapalı sistemdir; j -nin qeyd olunmuş qiymətində tərs tənliklər də analoji olur. Əgər $q_{ij}(t)$ funksiyaları kəsilməzdirlərsə, onda (3) başlanğıc şərtlərilə verilən (12) sisteminin yeganə həlli vardır. Bundan başqa, ixtiyari məhdud kəsilməz $q_{ij}(t)\ge 0,\ \ t\in T,\ \ i\ne j$ funksiyaları və (11)-dən alınan $q_{ii}(t)$ funksiyaları üçün (3) başlanğıc şərtlərilə verilən (12) sisteminin həlli vardır və bu həll hər hansı qırılmayan ζ prosesinin keçid ehtimallarını təyin edir. Prosesin separabel olduğu versiyasında, qeyd olunmuş fərziyyələrlə, prosesin trayektoriyaları 1 ehtimalla hissəvi sabitdirlər (ixtiyari sonlu zaman parçasında sonlu sayda sıçrayışlarlı pilləvari funksiyalardır). Əgər $q_{ij}(t)$ ehtimal sıxlıqları qeyri – məhdud olarsa və ya mövcud olmazlarsa, onda prosesin trayektoriyaları, ümumiyyətlə, mürəkkəb quruluşa malik olur. Trayektoriyaların pilləvari olmaları üçün hansı şərtlərin ödənilməsi və keçid ehtimallarının differensiallanan olmadığı halında Kolmoqorov differensial tənliklərinin ümumiləşmələri öyrənilmişdir (bax, [7], [8]). Ehtimali strukturu zamanın yerinidəyişməsinə nəzərən invariant olan vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins M. p.-ləri halında nəzəriyyə sadələşir. Bircins proseslər üçün $T=[0,\infty)$ götürülür, $\mathbf{P}_{s,i}$ (və ya $\mathbf{P}_{s,\mu}$) ölçüləri yalnız $s=0$ halı üçün baxılır və $\mathbf{P}_i$ ($\mathbf{P}_\mu$) ilə işarə olunur. Vəziyyətləri çoxluğu sonlu (və ya hesabi) $\mathscr{E}$ fəzası olan bircins M. p.-nin əsas xarakteristikası i vəziyyətindən j vəziyyətinə t müddəti ərzində keçid ehtimallarıdır: $p_{ij}(t)=$ $=\mathbf{P}_i\{\zeta_t=j\},\ \ t\ge 0,\ \ i,j\in\mathscr{E}$.

$$p_{ij}(t)\ge 0,\quad p_{ij}(0)=\delta_{ij},\ i,j\in\mathscr{E};\ \sum_{j\in\mathscr{E}} p_{ij}(t)=1,\ i\in\mathscr{E}\qquad (13)$$

şərtlərini və

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in\mathscr{E}} p_{ik}(s)\,p_{kj}(t),\ \ t\ge 0,\ \ s\ge 0,\ \ i,j\in\mathscr{E}\qquad (14)$$

Kolmoqorov – Çepmen tənliyini ödəyən ixtiyari funksiyalar $p_{ij}(t)$ keçid ehtimaları kimi hesab oluna bilinər. Elementləri keçid ehtimalları olan $P(t),\ \ t\ge 0$ matrisi bircins ζ prosesinin keçid matrisi adlanır. (13), (14) münasibətlərindən aydındır ki, $P(t)$ stoxastik matrisdir və

$$P(0)=\mathbf{I},\quad P(s+t)=P(s)\,P(t)\qquad (15)$$

[$P(t)_{t\ge 0}$ – stoxastik matrislərin semi – qrupudur]. t anında $\mu(t)$ mütləq paylanması $\mu(t)=\mu P(t)$ düsturu ilə $\mu=\mu(0)$ başlanğıc paylanması vasitəsilə ifadə olunur. (13), (14) münasibətlərindən alınır ki, $p_{ij}(t)$ funksiyaları $t>0$ olduqda ölçüləndirlər və t -yə görə kəsilməzdirlər və $t\downarrow 0$ olduqda $p_{ij}(+0)$ limitlərinə malikdirlər (bax, [2]).

Lakin bu limitlər δ_{ij} ilə üst-üstə düşməyə bilər, məs., keçid matrisi aşağıdakı kimi verildiyi halda belə olur:

$$P(0)=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad P(t)=\begin{Vmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{Vmatrix},\quad t>0\,.$$

Bu misalda ixtiyari başlanğıc vəziyyətində bütün ζ_t təsadüfi kəmiyyətləri $t>0$ halında qarşılıqlı asılı olmayan və paylanmaları $\mu(t)=(0{,}5;\ 0{,}5)$ olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. ζ prosesinin trayektoriyaları olduqca qeyri – requlyardırlar. Belə potologiyaların olmaması üçün həmişə fərz olunur ki, ζ prosesi stoxastik kəsilməzdir, bu isə $p_{ij}(+)$ funksiyalarının sıfırda kəsilməzliyinə, yəni

$$P(+0)=\mathbf{I}\qquad (16)$$

şərtinə ekvivalentdir.

(16) şərtində $P(t),\ t\ge 0$ matris funksiyası sıfırda sağdan differensiallanandır (bax, [2]). $Q=P'(0)$ infinitezimal matrisinin elementləri keçid ehtimalları sıxlıqlarının ($-q_{ii}=q_i$ çıxış ehtimalları sıxlıqlarıdır) qeyri – bircinslik halındakı mənada anlaşılır və eyni (11) münasibətlərini ödəyirlər, lakin bu halda bunlar t -dən asılı olmur. Kolmoqorov düz və tərs differensial tənliklər sistemləri

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in\mathscr{E}} p_{ik}(t)q_{kj}=\sum_{l\in\mathscr{E}} q_{il}\,p_{lj},\ \ t\ge 0,\quad i,j\in\mathscr{E}$$

və ya matris yazılışında

$$P'(t)=P(t)Q,\quad P'(t)=Q\,P(t)$$

münasibətləri şəklində ifadə olunur. Sabit əmsallarlı bu xətti tənliklər sisteminin hər birinin (16) başlanğıc şərtində yeganə həlli vardır. Sonluölçülü paylanmalar baxımından n sayda vəziyyətlərli bircins M. p. n^2-n sayda mənfi olmayan q_{ij} sabitlərilə tamamilə təyin olunur, $i\ne j$ [q_{ii} bunlar vasitəsilə (11) düsturları ilə təyin olunur]; bunların qiymətləri ixtiyari ola bilər.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins M. p.-nin separabel versiyasında trayektoriyalar hissəvi sabit olub, sıçrayışların ardıcıl baş verməsi ilə səciyyəvidir; trayektoriya kəsildiyi nöqtədə onun soldan və ya sağdan kəsilməz olduğunu hesab etmək olar. Adətən, elementar nəticələr fəzasının seçilməsində prosesin sağdan kəsilməz olması halına üstünlük verilir, belə ki, bu halda o,

ciddi Markov xassəsinə malik olur. Başlanğıc vəziyyəti i olan ζ prosesinin sağdan kəsilməzliyi aşağıdakı kimi təyin olunur. Başlanğıc vəziyyətindən ilk çıxış anı $\tau = \inf\{t: t \in [0, +\infty),\ \zeta_t \neq i\}$ parametri q_i-yə bərabər eksponensial paylanma ilə paylanır, yəni $\mathbf{P}_i\{\tau > t\} = \exp\{-q_i t\},\ t \geq 0$. $q_i = 0$ olduqda sanki yəqin $\tau = \infty$ olur və bu halda vəziyyət uducu vəziyyət adlanır. Əgər $q_i > 0$ olarsa, onda τ sanki yəqin sonludur, ζ_τ təsadüfi qiyməti τ-dan asılı olmayıb, $\mathbf{P}_i\{\zeta_\tau = j\} = q_{ij}/q_i,\ j \neq i,\ j \in \mathscr{E}$ ehtimal paylanmasına malikdir. Sonra ciddi Markov xassəsinə görə eyni mənzərə təkrar olunur, bu şərtlə ki, başlanğıc anı olaraq τ, başlanğıc vəziyyəti ζ_t götürülür və s., bu halda ζ prosesinin ardıcıl dəyişən vəziyyətləri Markov zəncir (ola bilər ki, qırılan) yaradır və bu zəncir üçün keçid ehtimalları

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i, & j \neq i,\ q_i > 0 \\ 0, & \text{digər hallarda.} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur; bu zəncir ζ prosesinə görə daxil-edilmiş zəncir adlanır.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins M. p.-nin stasionar paylanması həmişə mövcuddur, yəni elə başlanğıc paylanması μ vardır ki, zaman keçdikcə dəyişmir: $\mu = \mu P(t)$. Stasionarlıq üçün $\mu Q = 0$ olması zəruri və kafidir. Bu tənlikdən (1) ilə birlikdə, μ-nün tapılması üçün istifadə olunur. Stasionar paylanmanın yeganəlik məsələsi vəziyyətlərin təsnifi və $t \to \infty$ olduqda $p_{ij}(t)$-nin asimptotikası ilə bağlıdır.

Vəziyyətləri çoxluğu sonlu M. p. üçün i və j verildiyi halda bütün $t > 0$ üçün ya $p_{ij}(t) \equiv 0$ və ya bütün $t > 0$ üçün $p_{ij}(t) > 0$ olur. Buna görə də, diskret zaman halından fərqli olaraq, belə proseslərin tsiklik altsinifləri olmur (başqa cəhətlərə görə təsnifat diskret zaman halına analojidir; bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı).

Tsiklik olmadığı halla bağlı olaraq $t \to \infty$ olduqda $p_{ij}(t)$-lərin limitləri həmişə vardır və burada yığılma eksponensial surətdə sürətli olur. Hər bir mühüm C_α sinfinə ζ prosesinin C_α-da topalanmış yeganə stasionar μ^α paylanması uyğundur; bu halda bütün $j \in C_\alpha$ üçün $\mu_j^\alpha > 0$ olur. Bundan başqa,

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \begin{cases} \mu_j^\alpha, & i \in C_\alpha,\ j \in \mathscr{E}, \\ \sum\limits_\alpha \pi_{i\alpha}\mu_j^\alpha, & i \in R,\ j \in \mathscr{E}, \end{cases}$$

burada $\pi_{i\alpha}$ ədədləri hərəkətini mühüm olmayan R sinfinin i vəziyyətindən başlayan sistemin C_α sinfilə udulma ehtimalları mənasında anlaşılır. α-nın verilmiş qiymətində $\pi_{i\alpha}$ ehtimalları

$$\pi_{i\alpha} = \begin{cases} 0, & i \in \mathscr{E} \setminus (C_\alpha \cap R) \\ 1, & i \in C_\alpha \end{cases}$$

«sərhəd şərtlərilə» verilən

$$q_i\pi_{i\alpha} = \sum_{j\neq i} q_{ij}\,\pi_{j\alpha},\ i \in R$$

tənliklər sisteminin yeganə həllidir.

Udulmaya qədər keçən müddətin orta qiyməti

$$m_i = M_i\tau,\ \tau = \inf\{t: t \geq 0, \zeta_t \in \mathscr{E}\setminus R\},\ i \in \mathscr{E}$$

– $m_i = 0,\ i \in \mathscr{E}\setminus R$ «sərhəd şərtlərilə»

$$q_i m_i = 1 + \sum_{j\neq i} q_{ij}\,m_j,\ i \in R$$

tənliklər sistemindən tapılır. Bütün stasionar paylanmalar çoxluğu μ^α vektorlarının qapalı örtüyü ilə üst-üstə düşür. Stasionar paylanma, yalnız və yalnız, o halda yeganədir ki, mühüm siniflərin sayı 1 olsun. Sonuncu halda erqodik teorem (böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu) doğrudur: $\mathscr{E}$-də ixtiyari həqiqi f funksiyası üçün

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\zeta_s)\,ds = \sum_{j\in\mathscr{E}} \mu_j f(j)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir. M. p.-ləri üçün *mərkəzi limit teoremi və təkrar loqarifm qanunu* da ödənilir. *Daxil edilmiş Markov zəncirlərinin* tətbiqi belə limit teoremlərini diskret haldan kəsilməz hala keçirməyə imkan yaradır. Vəziyyətləri çoxluğu sonlu M. p.-ləri kütləvi xidmət nəzəriyyəsi məsələlərində və əməliyyatların tədqiqində istifadə olunur; bunlar sifarişlər axını Puasson qanunu ilə paylandığı, xidmət müddətləri isə eksponensial qanunla paylandığı halda da tətbiq olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 60–105; [2] Doeblin W., «Bull. sci. math.», 1938, t. 62, p. 21–32, 1940; t. 64, p. 35–37; [3] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, M., 1984; [5] Карлин С., Основы теории случайных процессов, пер. с англ., M., 1971; [6] Дынкин Е. Б., Основания теория Марковских процессов, M., 1959; [7] Добрушин Р. Л., «Матем. сб.», 1953, т. 33, с. 567–96; [8] Добрушин Р. Л., «Матем. сб.», 1954, т. 34, с. 541–56.

MARKOV PROSESİ; zamanın təsadüfi əvəzlənməsi « **марковский процесс;** случайная замена времени; **Markov process;** random time change » – *Markov prosesinin* hər bir ayrıca götürülmüş trayektoriyasında zamanın elə monoton çevrilməsidir ki, bu çevirmədə *Markov xassəsi* öz qüvvəsində qalır. Məs., $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathscr{A}_{t_1}, \mathbf{P}_x),\ t \geq 0$ – faza fəzası $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$-də qırılan sağ M. p., $A_t = A_t(\omega), -\ t \in [0, \xi(\omega))$ olduqda ζ-nin kəsilməz additiv ciddi artan funksionalı olsun. Daha sonra, $0 \leq t < \widetilde{\xi}(\omega)$ olduqda $\widetilde{\xi}(\omega) = A_\xi - (\omega),\quad \tau_t(\omega) = \inf\{s: A_s(\omega) > t\}$ və $\{A, \tau \leq t < \xi\} \in \mathscr{A}_t$ $\inf\{s: A_s(\omega) > t\}$ şərtini ödəyən bütün $A \subset \{\tau_t < \xi\}$ hadisələrinin çoxluğu $\widetilde{\mathscr{A}_t}$ olsun. Onda $\widetilde{\zeta} = (\zeta_{\tau_t}, \widetilde{\xi}, \widetilde{\mathscr{A}_t}, \mathbf{P}_x),\ t \geq 0$ ailəsi (bax, [1], [2]) $(\mathscr{E}, \mathscr{B}^*)$ faza fəzasında ciddi sağdan kəsilməz M. p.-dir, burada $\mathscr{B}^*$, – $\mathscr{B}$ σ – cəbrinin $\mathscr{B}$-də verilən bütün sonlu ölçülər üzrə tamamlanmalarının kəsişməsidir (çox vaxt $\mathscr{B}^*$-nu $\mathscr{B}$ ilə əvəz etmək

mümkün olur). ζ prosesi ilkin prosesdən zamanın təsadüfi əvəzlənməsindən alınır kimi deyim qəbul edilmişdir.

B l y u m e n t a l – G e t u r – M a k k i n teoremində (1962) göstərilir ki, geniş şərtlərlə, eyni fəzada, eyni paylanma qanunu ilə verilən M. p., ixtiyari kompaktlara ilk çatım anlarında, bir-birindən zamanın göstərilən şəkilli təsadüfi əvəzlənməsi vasitəsilə alınır (bax, [2]).

Zamanın təsadüfi əvəzlənməsinin bir qədər başqa şəkillərinə də baxılır (bax, [5]). Zamanın təsadüfi əvəzlənməsinə ilk dəfə [4]-də baxılmışdır.

Əd.: [1] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] B l u m e n t h a l R. M., G e t o o r R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [3] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [4] В о л к о н с к и й В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, с. 332–50; [5] G l o v e r J., «Ann. Probab.», 1981, v. 9, № 6, p. 1019–29.

MARKOV PROSESİ, SIÇRAYIŞVARİ İDARƏOLUNAN « марковский скачкообразный управляемый процесс; controlled Markov jump process » – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses.*

MARKOV SEMİ – QRUPU « марковская полугруппа; Markov semigroup » – bircins $\zeta = (\zeta_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ *Markov prosesi* ilə əlaqəli,

$$P_t f(x) = \mathbf{M}_x f(\zeta_t)\ , t > 0$$

düsturu ilə təyin olunan, məhdud ölçülən funksiyalar fəzasında operatorlar ailəsidir. ζ prosesinin keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ ilə P_t operatorları

$$P_t f(x) = \int\limits_{\mathscr{E}} p(t, x, dy) f(y)$$

münasibətilə əlaqəlidirlər.

Kolmoqorov – Çepmen tənliyinə əsasən P_t operatorları

$$P_{t+s} = P_t P_s, \quad s,t > 0$$

semi – qrupunu əmələ gətirir. P_t operatorları daraldıcı (rus. сжимающие) operatorlardır, yəni

$$\| P_t f \| \le \| f \|,$$

burada $\| f \| = \sup |f(x)|$ və $f \ge 0$ olduqda, $P_t f \ge 0$ şərtini ödəyirlər. Qırılmayan proseslər üçün, həm də, $P_t \mathbf{1} \equiv 1, \ t > 0$ – konservativlik şərti də ödənilir. Ümumi halda, $P_t \mathbf{1} \le 1$; belə qruplar bəzən s u b m a r k o v q r u p l a r ı adlandırılır.

$\mathscr{E}$ – lokal kompakt metrik fəza olsun. Əgər P_t operatorları kəsilməz funksiyalar fəzasını özünə çevirirlərsə, M. s. F e l l e r M. s. adlanır. Əgər M. s. Feller M. s.-dursa, onda ζ prosesini sağdan kəsilməz və ciddi Markov prosesi hesab etmək olar (daha dəqiq, bu xassələrə malik olan, ona stoxastik ekvivalent proses vardır). Digər, mühüm proseslər sinfi P_t operatorları sonsuzluqda sıfra yığılan kəsilməz funksiyalar fəzasını özünə çevirdikdə yaranır. Bu halda ζ prosesini standart proses hesab etmək olar (bax, *Standart Markov prosesi*). Trayektoriyaların kəsilməzlik xassələri də P_t operatorları terminlərilə ifadə olunur (bax, *Markov prosesi*).

M. s. ilə r e z o l v e n t – $R_\lambda, \lambda \ge 0$ operatorlarının ailəsi, əlaqəlidir; bu operatorlar

$$R_\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt$$

düsturu ilə təyin olunur. R_λ operatorları $\lambda > 0$ olduqda məhduddurlar və r e z o l v e n t t ə n l i y i adlanan

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu, \quad \lambda, \mu > 0 > 0$$

tənliyini ödəyirlər.

$R = R_0$ operatoru p o t e n s i a l da adlandırılır; bu operator, ümumiyyətlə, məhdud deyildir. Onun xassələri, məs., ζ prosesinin qayıdışlı olması xassələri ilə də bağlıdır.

M. s.-nun tədqiqində *infinitezimal operator* mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

MARKOV STRATEGİYASI « марковская стратегия; Markov strategy / polisy » – bax, *Strategiya*, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*, *İdarəolunan təsadüfi proses* d i s k r e t z a m a n l ı, *Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi.*

MARKOV TƏSADÜFİ DOLAŞMASI « марковское случайное блуждание; Markov random walk » – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma*.

MARKOV TƏSADÜFİ MEYDANI « марковское случайное поле; Markov random field » – təyin olunduğu T oblastının kəsişməyən altçoxluqlarının nizamlanmış (S_1, Γ, S_2) üçlüyünün qeyd olunmuş sisteminə nəzərən *Markov xassəsinə* malik $\zeta(t)$ *təsadüfi funksiyasıdır.* Markov xassəsi onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ funksiyasının qiymətlər oblastının ixtiyari ölçülən B altçoxluğu üçün ixtiyari $t_0 \in S_2$ qiymətində

$$\mathbf{P}\{\zeta(t_0) \in B \,|\, \zeta(t),\ t \in S_1 \cup \Gamma\} = \mathbf{P}\{\zeta(t_0) \in B \,|\, \zeta(t),\ t \in \Gamma\}$$

bərabərliyi sanki yəqin ödənilir (başqa sözlə, gələcək S_2 qeyd olunmuş indiki Γ şərtində keçmiş S_1-dən asılı deyildir).

M i s a l 1. $T = \mathbb{R}^n$, $\{\Gamma\}$, – $\mathbb{R}^n$-dəki bütün kürələrin ailəsi, S_1, – Γ-nin daxili, S_2, – Γ-nin xarici olsun. Bircins və izotrop Qauss $\zeta(t)$ təsadüfi meydanı $\{S_1, \Gamma, S_2\}$ sisteminə nəzərən Markov xassəsinə, yalnız və yalnız, o halda malikdir ki, $\zeta(t) = \xi$ olsun, ξ – hər hansı təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [1]).

Bircins və izotrop M. t. m.-larına aid qeyri – trivial misallar ümumiləşmiş meydanlara keçdikdə təsadüf olunur.

M i s a l 2. Əvvəlki misalın şərtlərində ümumiləşmiş Qauss bircins və izotrop təsadüfi meydanlar sinfində M. t. m. spektral sıxlığı $f(\lambda) = \lambda^{n-1} / (\lambda_0^2 + \lambda^2)$ olan s ə r b ə s t m e y d a n adlandırılan (N e l s o n m e y d a n ı) meydandır (bax, [2]).

M i s a l 3. $\{S, \partial S, \bar{S}\}$ – bütün mümkün ola bilən üçlüklər ailəsi olsun və burada S, – $\mathbb{R}^n$-də oblast, ∂S – onun sərhədi, $\bar{S}$ – onun qapayıcısının tamamlayıcısı olsun. Spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan bircins ümumiləşmiş Qauss təsadüfi meydanı $\zeta(\varphi)$,

$\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\{S, \partial S, \overline{S}\}$ sisteminə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda M. t. m.-dır ki, $1/f(\lambda)$ polinom olsun (bax, [3]).

M i s a l 4. Əvvəlki misalın şərtlərində S və ya $\overline{S}$ məhdud oblast olsun. $\mathbb{R}^n$-də *Levi meydanı*, yalnız və yalnız, o halda M. t. m.-dır ki, n tək ədəd olsun.

M. t. m. üçün yuxarıda verilmiş tərifl ərdən başqa, parçalayan σ – cəbrlər (rus. расщепляющая σ – алгебра) və L – Markov xassəsi terminlərində də tərifl ər məlumdur (bax, [3]).

M. t. m. sinfi $\mathbb{Z}^n$ -də bircins Qauss meydanları, $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ fəzasında çoxölçülü bircins ümumiləşmiş Qauss meydanları, həmçinin çoxölçülü bircins və izotrop ümumiləşmiş Qauss təsadüfi meydanları üçün tamamilə təsvir olunmuşdur. M. t. m. anlayışı statistik fizika və kvant meydan nəzəriyyəsində mühüm tətbiqlərilə səciyyəvidir.

Bax, *Gibbs təsadüfi meydanı.*

Əd.: [1] Я д р е н к о М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [2] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е А., Математические методы квантовой физики, пер. с англ., М., 1984; [3] Р о з а н о в Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [4] Р о з а н о в Ю. А., Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными, М., 1995.

L – MARKOV TƏSADÜFİ MEYDANI « **L – марковское случайное поле; L – Markov random field** » – bax, *Təsadüfi meydan.*

MARKOV YERİNİDƏYİŞMƏSİ « **Маркова сдвиг; Markov shift** » – $\omega = \{..., y_{-1}, y_0, y_1, ...\}$ ikitərəfli ardıcıllıqlarının ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında T yerinidəyişməsidir, burada $y_i \in Y$, $(Y, \mathfrak{A})$ – ölçülən fəza, μ ölçüsü isə $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında $\mathbf{P}(y, C)$, $y \in Y$, $C \in \mathfrak{A}$ stoxastik operatoru və bu operatorun invariant μ ölçüsü ilə təyin olunur və $A = \{\omega \in \Omega : y_i \in C_0,\ y_{i+1} \in C_1, ..., y_{i+r} \in C_r\}$ silindrik çoxluqlarında $C_i \in \mathfrak{A}$, $r \geq 0$, $-\infty < i < \infty$

$$\mu(A) = \int\limits_{C_0} d\sigma(y_i) \int\limits_{C_1} \mathbf{P}(y_i, dy_{i+1}) \ ... \int\limits_{C_r} \mathbf{P}(y_{i+r-1}, dy_{i+r})$$

bərabərliyi ilə verilir.

Bu ölçü Kolmoqorov teoreminə görə bütün $\mathscr{A}$ σ – cəbrinə davam oluna bilinər. T əksər hallarda M a r k o v a v t o m o r f i z m i adlandırılır. Sonlu fəzalar halında M. y. erqodik xassələri tam araşdırmağa imkan verir. Əgər M. y. bir sinif və bir altsinfə malik olarsa, onda o, K – avtomorfizmdir və *Bernulli yerinidəyişməsinə* izomorfdur.

Əd.: [1] Р о х л и н В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [2] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

MARKOV YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN « **марковское размещение частиц; Markov allocation of particles** » – hissəciklərin oyuqlar üzrə elə ardıcıl yerləşdirilməsi prosesidir ki, ardıcıl götürülən 1-ci, 2-ci,... hissəciklərin yerləşdikləri oyuqların nömrələri *Markov zənciri* əmələ gətirir. Markov zənciri trayektoriyasının parçasında müşahidə olunan vəziyyətlər saylarının paylanmaları öyrənilir. Hissəciklərin Markov yerləşməsi – *hissəciklərin polinomial yerləşməsi* sxeminin ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] З у б к о в А. М., «Матем. сб.», 1979, т. 109, № 4, с. 491–532; [2] И в а н о в В. А., И в ч е н к о Г. И., М е д в е д е в Ю. И., Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика, 1984, т. 22, с. 3–60.

MARKOV ZƏNCİRİ « **Маркова цепь; Markov chain** » – ölçülən fəzada verilmiş diskret zamanlı *Markov prosesidir.* M. z. nəzəriyyəsinin əsasları (hər halda vəziyyətləri sayı M. z.-ni) [1]-də A. A. Markov tərəfindən qoyulmuşdur. Daha mürəkkəb vəziyyətlər fəzası olan zəncirlərin araşdırılmasına 1931–37-də ən əvvəl A. N. Kolmoqorov (bax, [2] – [4]) və V. Döblin (bax, [5] – [6]) tərəfindən başlanılmışdır. M. z.-nin ümumi nəzəriyyəsinin əsas məsələsi M. z.-lərinin və bunlarla əlaqəli kəmiyyətlərin strukturunun və asimptotik xassələrinin aşkar edilməsidir ([7] – [14]) və əgər hal-hazırki dövrə qədər vəziyyətləri çoxluğu hesabi və sonlu bircins M. z. nəzəriyyəsi müəyyən dərəcədə sona çatdırılmışdırsa, ümumi M. z. nəzəriyyəsində hələ mühüm irəliləyişlər mümkündür. M. z. özü-özlüyündə yalnız riyazi maraq doğurması ilə deyil, həm də, məs., bəzi mürəkkəb asılılıqların və proseslərin tədqiqi üçün bir vasitə olması ilə səciyyəvidir; bunların riyaziyyata aid olmayan sahələrdə müxtəlif tətbiqləri olduqca təqdirəlayiqdir (bax, [7], [15], [16]).

Markov zəncirləri və keçid ehtimalları. M. z.-nin ən dəqiq tərifinin müxtəlif variantları vardır və ən sadə və intuitiv aydın tərif aşağıdakı kimi verilir: $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında qiymətləri $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasından olan $\{\xi_n \equiv \xi_n(\omega);\ n \geq 0\}$ təsadüfi ardıcıllığı verilir (müəyyənlik üçün n, m tipli bütün ədədi parametrlərin tamqiymətli olduğu fərz olunur). Əgər ixtiyari $n \geq 1$ qiymətlərində «k ə ç m i ş i n» σ – cəbri $\mathscr{A}_{n-1} = \sigma(\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ «g ə l ə c ə y i n» σ – cəbri $\mathscr{A}^{n+1} = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...)$ σ – cəbrindən, ξ_n məlum olduqda, yəni «i n d i k i» vəziyyət məlum olduqda, şərti asılı olmayan cəbrlər olarsa, yəni bu ardıcıllıq üçün M a r k o v x a s s ə s i ödənilərsə, $\{\xi_n\}$ ardıcıllığı k l a s s i k m ə n a d a M a r k o v z ə n c i r i adlanır (burada, məs., $\sigma(\xi_0, ..., \xi_{n-1})$, – Ω -da $\xi_0, ..., \xi_{n-1}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir). Bu xassə ixtiyari $n \geq 1$, $\mathbb{B} \in \mathscr{B}$ üçün $\mathbf{P}\{\xi_n \in \mathbb{B} \mid \mathscr{A}_{n-1}\} = \mathbf{P}\{\xi_n \in \mathbb{B} \mid \xi_{n-1}\}$ bərabərliyinin sanki yəqin ödənilməsi ilə ekvivalentdir. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzası (və ya əgər $\mathbb{B}$ seçilməsi aydındırsa, $\mathscr{E}$ çoxluğunun özü) z ə n c i r i n f a z a f ə z a s ı və ya z ə n c i r i n v ə z i y y ə t l ə r f ə z a s ı adlanır; $\mathscr{E}$ -nin nöqtələri vəziyyətlər kimi anlaşılır. Tərifə görə M. z.-nin b a ş l a n ğ ı c p a y l a n m a s ı $\mu(\mathbb{B}) = \mathbf{P}\{\xi_0 \in \mathbb{B}\}$ ölçüsü ilə təyin olunur, $\mathbb{B} \in \mathscr{B}$. M. z.-nin t r a y e k t o r i y a s ı qeyd olunmuş $\omega \in \Omega$ ilə $\{\xi_n(\omega);\ n \geq 0\}$ ardıcıllığı ilə (ədədi ardıcıllıq) təyin olunur.

M. z.-ləri bir-birindən asılı təkrarlanan sınaqların elə ümumiləşmiş sxemini əhatə edir ki, bu sxemdə ixtiyari bir sınaqda baş verən hadisənin ehtimalı yalnız bu sınaqdan əvvəlki sınağın nəticəsindən asılıdır. Bu halda hər bir sınaqda mümkün nəticələr (sonlu və ya hesabi sayda) $E_1, E_2, ...$ olarsa, (z ə n c i r i n v ə z i y y ə t l ə r i ç o x l u ğ u $\mathscr{E} = \{E_1, E_2, ...\}$ işarə olunur), k -cı sınaqda E_j nəticəsini E_{j_k} ilə işarə etdikdə E_{j_k} -nın ehtimalı $p_j = \mathbf{P}\{E_j\}$ şərtsiz ehtimalına bərabər olmur ($p_j = \mathbf{P}\{E_j\} = \mathbf{P}\{E_{j_k}\}$, $j = 1, 2, ...$, $k = 1, 2, ...$ bərabərliyi yalnız sınaqlar asılı olmadıqda doğrudur); bu ehtimal, yəni $\mathbf{P}\{E_{j_k}\}$ ehtimalı

$(k-1)$-ci sınaqda hər hansı $E_{i_{k-1}}$ nəticəsinin baş verməsi şərti nəzərə alınmaqla $(E_{i_{k-1}},\ E_{j_k})$ nəticəsinin şərti ehtimalı ilə verilir; bu ehtimal $p_{i_{k-1}j_k}$ ilə işarə olunur:

$$\mathbf{P}\{(E_{j_k} \mid E_{i_{k-1}})\} = p_{i_{k-1}j_k};\ \ j_k, i_k = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Bu halda yalnız iki ardıcıl sınağın nəticəsinə baxıldığından $p_{i_{k-1}j_k}$ əvəzinə p_{ij} işarələməsindən də istifadə olunur. Beləliklə, Markov sxemində ixtiyari iki ardıcıl sınağın nəticəsinə p_{ij} şərti ehtimalı qarşı qoyulur:

$$\mathbf{P}\{(E_{j_k} \mid E_{i_{k-1}})\} = p_{i_{k-1}j_k} = p_{ij} = \mathbf{P}\{(E_j \mid E_i)\}, \qquad (1)$$
$$i, j = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots,\ \ i_k, j_k = 1, 2, \ldots.$$

Markov sxemi ardıcıl sınaqlarla bağlı olduğundan iki, üç, dörd və s. sınaqlar ardıcıllığının hər birinə uyğun nəticənin ehtimalı aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunmalıdır:

$$\mathbf{P}\{(E_{j_1}, E_{i_2})\} = \mathbf{P}\{(E_{j_1})\} \cdot \mathbf{P}\{(E_{i_2} \mid E_{j_1})\} = p_{j_1} p_{j_1 i_2} = p_j p_{ji},$$

$$\mathbf{P}\{(E_{j_1}, E_{i_2}, E_{r_3})\} = \mathbf{P}\{(E_{j_1})\} \cdot \mathbf{P}\{(E_{i_2} \mid E_{j_1})\} \times \mathbf{P}\{(E_{r_3} \mid E_{i_2})\} = p_{j_1} p_{j_1 i_2} p_{i_2 r_3} = p_j p_{ji} p_{ir},$$

$$\mathbf{P}\{(E_{j_1}, E_{i_2}, E_{r_3}, E_{s_4})\} = p_{j_1} p_{j_1 i_2} p_{i_2 r_3} p_{r_3 s_4} = p_j p_{ji} p_{ir} p_{rs}$$

və ümumiyyətlə,

$$\mathbf{P}\{(E_{j_1}, \ldots, E_{j_n})\} = p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-2} j_{n-1}} \cdot p_{j_{n-1} j_n}, \qquad (2)$$

burada E_{j_1}-in j_1-dəki «1» indeksi ilk sınağın nömrəsi kimi nəzərdə tutulur, bu nöqteyi – nəzərdən, $p_{j_1} = p_j,\ j = 1, 2, \ldots$ ehtimalları *başlanğıc ehtimalları* adlanır; p_{ij} sistemin bir addımda E_i vəziyyətindən E_j vəziyyətinə *keçid ehtimalı* adlanır.

Təbiidir ki, bu qayda ilə təyin olunmuş təkrarlanan asılı sınaqlara və ehtimallara uyğun hər hansı bir ehtimal fəzasını təyin etmək üçün müəyyən şərtlər ödənilməlidir: ilk növbədə

$$p_i \geq 0,\ \ \sum_i p_i = 1 \qquad (3)$$

şərtlərini ödəyən başlanğıc ehtimalları verilməlidir. p_{ij} ehtimallarının onlara verilən mənaya uyğun olmaları üçün onlar da aşağıdakı şərtləri ödəməlidir:

k-cı sınaqda E_i baş vermişdirsə, $(k+1)$-ci sınaqda E_j-lərdən biri hökmən baş verməlidir, yəni bütün k-lar üçün və bütün i, j qiymətlərində

$$p_{ij} \geq 0,\ \ p_{i1} + p_{i2} + \ldots = \sum_j p_{ij} = 1 \qquad (4)$$

şərtləri ödənilməlidir. (3) və (4) şərtlərini ödəyən, ixtiyari p_i və p_{ij} ədədləri ilə ifadə olunan və (2) düsturu ilə təyin olunan ehtimallar $(i, j = 1, 2, \ldots)$ n sınağa uyğun elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş ehtimallardır.

M. z.-nin tərifi digər variantda aşağıdakı kimi verilir.

Fərz olunur ki, hər hansı bir sistemin vəziyyəti $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_r\}$ faza fəzasındakı e_i nöqtələri ilə təyin olunur. Bu nöqtələri sadəcə $1, 2, \ldots, r$ ədədləri ilə işarə etmək olar. Fərz olunur ki, sistemin vəziyyəti T müddəti ərzində müşahidə olunur və $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Tədqiq olunan sistemin evolyusiyası $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_T)$ trayektoriyası ilə müəyyən olunur və burada $\{\omega_t = i\}$ – sistemin t anında i vəziyyətində olması təsadüfi hadisəsidir. Bu qayda ilə təyin olunmuş stoxastik eksperimentə uyğun trayektoriyalar fəzası – $\Omega = \{\omega\}$, $\mathscr{A}$ – cəbri – Ω fəzasının bütün altçoxluqları sinfi, $\mathbf{P}$ isə elementar ehtimal $\mathbf{P}(\omega)$-larla təyin olunan ehtimal olacaqdır; yəni $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasıdır.

Hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ üçün $A_i(t) = \{\omega:\ \omega_t = i\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ hadisələri müəyyən bir α_t *bölgüsünü* təyin edir. Bu bölgü $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}(\alpha_t)$ hadisələr cəbrini doğurur. Onda

$$\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_T \qquad (5)$$

hadisələr cəbrləri ardıcıllığı təsadüfi sınaqlar ardıcıllığı olacaqdır. Bir çox təsadüfi proseslər üçün bir model kimi tətbiq edilən, birbirindən asılı sınaqlar ardıcıllığı 1907-də A. A. Markov tərəfindən tədqiq olunmuşdur. Bu model vasitəsilə təyin olunan proseslər qısa müddətdə böyük səylə araşdırılaraq dövrümüzdə *Markov prosesləri* nəzəriyyəsi səviyyəsinə yüksəlmişdir. Markov prosesinin sadə bir modeli – M. z. aşağıdakı kimi təyin olunur. (5) sınaqlar ardıcıllığında hər hansı t anı qeyd olunur.

$\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{t-1}$ cəbrlərinin doğurduğu $\mathscr{A}_0^{t-1}$ cəbri – keçmiş hadisələr cəbri; $\mathscr{A}_{t+1}, \mathscr{A}_{t+2}, \ldots, \mathscr{A}_T$ cəbrlərinin doğurduğu $\mathscr{A}_{t+1}^T$ cəbri – gələcək hadisələr cəbri, $\mathscr{A}_0^{t-1}$ cəbrindən olan ixtiyari hadisəyə keçmiş hadisə, $\mathscr{A}_{t+1}^T$ cəbrindən olan hadisəyə gələcək hadisə, $\mathscr{A}_t$ cəbrindən olan hadisəyə indiki hadisə deyilir. Məs.,

$\{\omega:\ t < k < T$ şərtini ödəyən elə k tapılar ki, $\omega_k = \omega_{k+1}\}$ – gələcək hadisədir;

$\{\omega:\ 0 \leq k < t$ şərtini ödəyən bütün k-lar üçün $\omega_k \neq r\}$ – keçmiş hadisədir.

Tərif. $1 \leq k < r,\ t = 1, 2, \ldots, T-1$ şərtlərini ödəyən k və t-nin ixtiyari qiymətlərində ixtiyari qeyd olunmuş $\{\omega_t = k\} \in \mathscr{A}_t$ indiki hadisəsi üçün keçmiş $\mathscr{A}_0^{t-1}$ və gələcək $\mathscr{A}_{t+1}^T$ cəbrləri asılı olmayan cəbrlərdirsə, (5) sınaqlar ardıcıllığına M. z. deyilir.

Başqa sözlə, $1 \leq k < r$ və $t = 1, 2, \ldots, T-1$ şərtlərini ödəyən ixtiyari k, t-lər üçün və ixtiyari $A \in \mathscr{A}_0^{t-1}$, $B \in \mathscr{A}_{t+1}^T$ hadisələri üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilməlidir:

$$\mathbf{P}\{A \cap B \mid \{\omega_t = k\}\} = \mathbf{P}\{A \mid \{\omega_t = k\}\} \cdot \mathbf{P}\{B \mid \{\omega_t = k\}\}. \qquad (6)$$

Şərti ehtimalın tərifinə əsasən $\mathbf{P}\{\{\omega_t = k\} \cap A\} > 0$ olduğundan (6) şərti

$$\mathbf{P}\{B \mid \{\omega_t = k\} \cap A\} = \mathbf{P}\{B \mid \{\omega_t = k\}\} \qquad (7)$$

şərti ilə ekvivalentdir, yəni indiki hadisə – $\{\omega_t = k\}$ məlum olduqda sistemin gələcək vəziyyəti onun keçmişindən asılı deyildir.

M. z.-nin, digər variantda, təsadüfi kəmiyyətlər terminologiyasında tərifi aşağıdakı kimidir.

T ə r i f. $\{\xi_t : t = 0, 1, ...\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\mathcal{N} = \{1, 2, ..., N\}$ sistemin vəziyyətlər fəzası olsun. Əgər $\sum \mathbf{P}\{\xi_t = k\} = 1$, $t = 0, 1, 2, ...$ olarsa və $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n < s < t$ ($n = 1, 2, ...$) şərtini ödəyən $t_1, ..., t_n, s$ -lər, ixtiyari i, j elementləri ($i, j \in \mathcal{N}$) və $\mathbf{B}_i \subset \mathcal{N}$, $i = \overline{1, n}$ ardıcıllıqları üçün

$$\mathbf{P}\{\xi_t = j \mid \{\xi_{t_1} \in \boldsymbol{B}_1, ..., \xi_{t_n} \in \boldsymbol{B}_n,\ \xi_s = i\}\} = \mathbf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_s = i\} \tag{8}$$

bərabərliyi ödənilərsə, $\{\xi_t;\ t = 0, 1, 2, ...\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığına M. z. deyilir.

ξ_t – tədqiq olunan sistemin t anındakı ($t = 0, 1, 2, ...$) vəziyyətidir. (8) xassəsi onu ifadə edir ki, sistemin $s < t$, s anında qeyd olunmuş indiki vəziyyəti məlum olarsa, sistemin gələcək vəziyyəti onun keçmiş vəziyyətlərindən asılı deyildir; daha sadə deyilişdə: sistemin indiki qeyd olunmuş məlum vəziyyətində gələcək keçmişdən asılı deyildir (Markov xassəsi).

(8) və ya (2) münasibətlərilə təyin olunan xassə Markov xassəsidir.

İxtiyari $i, j \in \mathcal{N}$ üçün

$$\mathbf{P}\{\xi_{t+1} = j \mid \{\xi_t = i\}\} = p_{ij},\quad t = 0, 1, ... \tag{9}$$

bərabərliyi ödənilərsə, yəni p_{ij} ehtimalları t -dən asılı olmazsa, M. z. b i r c i n s M. z. adlanır. Bu halda elementləri (9) ehtimalları ilə təyin olunan $\mathbf{P} = \| p_{ij} \|$ matrisinə bircins M. z.-nin k e ç i d e h t i m a l l a r ı m a t r i s i deyilir. Keçid ehtimalları üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$p_{ij} \ge 0,\quad \sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1. \tag{10}$$

$p = (p_1, ..., p_N)$, $p_i = P\{\xi_0 = i\}$, $i = \overline{1, N}$ vektoruna b a ş l a n ğ ı c e h t i m a l l a r ı v e k t o r u deyilir, burada

$$p_i \ge 0,\quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1. \tag{11}$$

Elementləri (10) şərtini ödəyən ixtiyari $\mathbf{P} = \left\| p_{ij} \right\|$ matrisinə *stoxastik matris* deyilir; bu matrisin elementləri müsbətdir və hər bir sətir elementlərinin cəmi vahidə bərabərdir.

İxtiyari $\{\xi_t;\ t = 0, 1, 2, ...\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının M. z. olması üçün bu ardıcıllıq (10), (11) və

$$\mathbf{P}\{\xi_0 = i_0,\ \xi_1 = i_1, ..., \xi_{t-1} = i_{t-1},\ \xi_t = i_t\} = p_{i_0}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdot ... \cdot p_{i_{t-1} i_t},\quad i_k = 1, 2, ..., k = 1, 2, ... \tag{12}$$

şərtlərini ödəməlidir.

M. z.-nin adi qaydada verilməsinə aid aşağıdakı misal verilir.

Bundan sonrakı şərh üçün M. z.-nin verilməsinin adi qaydası aşağıdakı misalda verilir.

M i s a l 1. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında $\{p_m(x, S);\ m \ge 0\}$ stoxastik nüvələr ailəsinin verildiyi fərz olunur [$p(x, S)$, $x \in \mathscr{E}$, $S \in \mathscr{B}$ funksiyası əgər S qeyd olunduqda $\mathscr{B}$ – ölçülən, x qeyd olunduqda $\mathscr{B}$ -də ehtimal ölçüsü olarsa, ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ s t o x a s t i k n ü v ə adlanır]. $\mathscr{B}$ -də ehtimal ölçüsü μ -nü verərək başlanğıc paylanması μ olan, ixtiyari $S_0, ..., S_n \in \mathscr{B}$, $n \ge 1$ üçün sonluölçülü paylanmaları

$$\mathbf{P}\{\xi_0 \in S_0, ..., \xi_n \in S_n\} = \int_{S_0} \mu(d x_0) \int_{S_1} p_0(x_0,\ d x_1)\ ... \int_{S_n} p_{n-1}(x_{n-1},\ d x_n) \tag{13}$$

düsturu ilə verilən $\{\xi_n;\ n \ge 0\}$ M. z.-ni qurmaq olur (bax, [9], [13]). (13)-ə görə (bax, həm də, [4]) $p_m(x, S)$ nüvələri həm bu M. z.-nin, həm də bu sonluölçülü paylanmalarlı ixtiyari M. z.-nin b i r a d d ı m l ı k e ç i d e h t i m a l l a r ı adlanır. $0 \le m < n$, $x \in \mathscr{E}$, $S \in \mathscr{B}$ olduqda keçid ehtimalları $p(m, x;\ n, S)$ -lərin tam toplusu rekurrent prosedur vasitəsilə daxil olunur:

$p(m, x; n, \cdot)$ ehtimalları məlum olduğundan,

$$p(m, x; m + 1, S) = p_m(x, S)$$

və sonra

$$p(m, x; n + 1, S) = \int_{\mathscr{E}} p(m, x; n, dy)\, p_n(y, S)$$

götürülür; m və n -in qeyd olunmuş qiymətlərində $p(m, x; n, S)$ funksiyası stoxastik nüvədir və ixtiyari x, S və $m < k < n$ qiymətlərində

$$p(m, x; n, S) = \int_{\mathscr{E}} p(m, x; k, dy)\, p(k, y; n, S)$$

K o l m o q o r o v – Ç e p m e n t ə n l i y i n i ödəyir.

Bu funksiya baxılan M. z.-nin ehtimali mexanizmini idarə edir, yəni bütün $m < n$ və S üçün

$$p\{\xi_n \in S \mid \xi_m\} = p(m, \xi_m; n, S) \tag{13}$$

bərabərliyi sanki yəqin ödənilir və bu isə $p(m, x; n, S)$ funksiyasının $p\{\xi_n \in S \mid \xi_m = x\}$ şərti ehtimalı kimi adi interpretasiyasının doğruluğuna haqq qazandırır.

Misal 1 onu göstərir ki, klassik mənada M. z.-nin geniş sinfi üçün keçid ehtimallarını təyin etmək mümkündür (məs., $\mathscr{E}$ – tam metrik separabel fəza, $\mathscr{B}$ isə bu fəzada təyin olunmuş Borel σ – cəbri olarsa). Digər tərəfdən misal 1 çərçivəsində $p_m(x, S)$ nüvələri üzrə yalnız bir zəncir deyil, bir-birilə uzlaşan, klassik mənada M. z.-lərinin bütöv bir sinfini qurmaq olar (bax, [13]). Daha dəqiq, elə

$$X = \{\Omega, \mathscr{A}, \xi_n, \mathbf{P}_{kx};\ k, n \ge 0,\ x \in \mathscr{E}\} \tag{14}$$

toplusu göstərmək olar ki, $(\Omega, \mathscr{A})$ – hər hansı ölçülən fəza, ξ_n, – $(\Omega, \mathscr{A})$ -nın $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ -yə ölçülən inikasları, $\mathbf{P}_{kx}$, –

$\mathscr{A}^k = \sigma(\xi_k, \xi_{k+1}, \dots)$ σ – cəbrlərində verilmiş elə ehtimallardır ki, bunlar üçün $\mathbf{P}_{kx}$ – sanki yəqin: a) $n > m \geq k$ olduqda

$$\mathbf{P}_{kx}\{\xi_n \in S \,|\, \xi_k, \dots, \xi_m\} = \mathbf{P}_{kx}\{\xi_n \in \Gamma \,|\, \xi_m\} = \\ = p(m, \xi_m; n, S) \qquad (15)$$

bərabərlikləri doğrudur; və b) $\xi_k \in S$, əgər $x \in S$ olarsa $(S \in \mathscr{B})$. $\mathscr{B}$ σ – cəbri $\mathscr{E}$ -nin bütün birnöqtəli çoxluqlarını da özündə saxladığından, b) şərti sadəcə, $\xi_k = x$ bərabərliyinin $\mathbf{P}_{kx}$ – sanki yəqin ödənildiyini ifadə edir, buna görə də, $k \geq 1$ anından başlayan M. z.-ləri halı üçün M. z.-nin ilkin tərifini ümumiləşdirərək $\{\xi_n;\ n \geq k\}$ toplusunu $\mathbf{P}_{kx}$ ölçüsünə nəzərən klassik mənada M. z. kimi, k anında x nöqtəsindən vəziyyəti ilə başlayan, biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(\cdot, \cdot)$, $m \geq k$ ilə M. z. kimi xarakterizə etmək olar.

Bundan sonra (14) toplusu da M a r k o v z ə n c i r i adlandırılacaqdır, lakin əvvəlki tərifdən fərqləndirmək üçün (14) toplusu M a r k o v z ə n c i r i n i n a ç ı q l a n m ı ş f o r m a s ı (rus. развернутая форма) adlandırılacaqdır. Bu halda yeri gəldikdə, uyğun $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzası və $p_m(x, S)$ biraddımlı keçid ehtimalları və ya $p(m, x; n, S)$ keçid ehtimallarının bütün toplusu göstərilməlidir. $p_m(x, S)$ nüvələrinin əvvəlcə verilməsi şərtindən və sonuncu (15) bərabərliyindən imtina edildikdə, $\mathbf{P}_{mx}\{\xi_{m+1} \in S\}$. $S \in \mathscr{B}$ funksiyalarının x üzrə $\mathscr{B}$ – ölçülənliyi şərtində biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(x, S) = \mathbf{P}_{mx}\{\xi_{m+1} \in S\}$ ilə həmin tərif alınır. Keçid ehtimalları eyni olan M. z.-ləri ekvivalent zəncirlər hesab olunur. (14)-ün ətraflı ifadəsi daha qısa $X = (\xi_n, \mathbf{P}_{mx})$ şəkildə yazılır.

Əgər başlanğıc paylanması μ və hər hansı keçid ehtimalları ilə verilən M. z.-nə baxılarsa, onda klassik mənada uyğun zəncirə baxıldığı nəzərdə tutulur. Belə zəncir eyni keçid ehtimallarına malik $X = (\xi_n, \mathbf{P}_{mx})$ M. z. üzrə asanlıqla qurulur: buna görə $B \in \mathscr{A}$ üçün $\mathbf{P}_\mu\{B\} = \int_{\mathscr{E}} \mathbf{P}_{ox}\{B\}\mu(dx)$ götürərək $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}_\mu)$ ehtimal fəzasında $\{\xi_n;\ n \geq 0\}$ ardıcıllığına baxmaq kifayətdir.

Baxılan M. z. üçün zaman parametri n üzrə bircinslik şərtləri qoyulmadığından belə zəncirlər q e y r i – b i r c i n s M. z. adlandırılır.

Bircins Markov zəncirləri: Zaman üzrə bircinslik xüsusilə maraqlıdır.

$(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında ya klassik mənada, ya da genişləndirilmiş formada M. z. verilir; bu zəncirin biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(x, S)$ -lər m -dən asılı deyildirlər: $p_m(x, S) \equiv p(x, S)$. Onda keçid ehtimalları $p(m, x; n, S)$ -lərin bütün toplusu b i r c i n s l i k və ya s t a s i o n a r l ı q x a s s ə s i n ə malikdir: $p(m, x; n, S) \equiv p(0, x; n-m, S)$ və $[m, n]$ zaman parçasında $(m < n)$ zəncirin evolyusiyasının ehtimali xüsusiyyəti, yalnız bu parçanın uzunluğu $(n - m)$ -dən və təbii ki, ξ_n -dən asılıdır. Buna görə də, belə zəncirlər b i r c i n s M. z.-ləri adlanır.

Lakin (14) şəklində verilmiş bircins M. z. ilə əlaqədar məsələlərdə $\mathbf{P}_{mx}$ və $\mathbf{P}_{ox}$ ölçüləri arasında yaranan əlaqəni nəzərə alaraq, adətən (müvəqqəti olaraq), $\mathbf{P}_x \equiv \mathbf{P}_{ox}$ götürərək

$$\{\Omega, \mathscr{A}, \xi_n, \mathbf{P}_x;\ n \geq 0,\ x \in \mathscr{E}\} \qquad (16)$$

– redüslənmiş toplusuna baxılır. (16) toplusu aşağıdakı xassələrə malikdir: 1) ξ_n, – $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasının $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasına ölçülən inikasıdır; 2) $\mathbf{P}_x$, – $\mathscr{A}$ -da ehtimal ölçüsüdür;

$$3) \qquad p(x, S) = \mathbf{P}_x\{\xi_1 \in S\},\ S \in \mathscr{B} \qquad (17)$$

bərabərliyi $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ -də stoxastik nüvə təyin edir;

4) $\mathbf{P}_x\{\xi_{n+1} \in S \,|\, A_n\} = p(\xi_n, S)$ bərabərliyi $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilir (bax, [1]; $\mathscr{A}_n$ əvvəlki verilmiş mənada anlaşılır). Əgər əlavə şərtləşmələr olmasa, 1) – 4) xassələrilə verilən ixtiyari (16) toplusu konkret mənşəindən asılı olmayaraq a ç ı q l a n m ı ş f o r m a d a b i r c i n s M a r k o v z ə n c i r i adlanır, bu zəncirin biraddımlı keçid ehtimalları $p(x, S)$ -lərdir. n addıma uyğun keçid ehtimalları $p(n, x, S)$ -lər

$$p(n, x, S) = \mathbf{P}_x\{\xi_n \in S\},\ x \in \mathscr{E},\ S \in \mathscr{B}$$

düsturu ilə və ya misal 1-də verilmiş rekurrent prosedur vasitəsilə təyin olunur; bu halda $p(1, x, S) \equiv p(x, S)$. Bu ehtimallar üçün $m, n \geq 0$ olduqda Kolmoqorov – Çepmen tənliyinin

$$p(m+n, x, S) = \int_{\mathscr{E}} p(m, x, dy)\, p(n, y, S)$$

bircins variantı doğrudur. (15) bərabərliyi bu halda $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin

$$\mathbf{P}_x\{\xi_n \in S \,|\, \mathscr{A}_m\} = \mathbf{P}_x\{\xi_n \in S \,|\, \xi_m\} = \\ = p(n-m, \xi_m, S),\quad n > m \geq 0$$

şəklində olur.

S ı r f M a r k o v x a s s ə s i – X bircins Markov zəncirinin (13) Markov xassəsinin gücləndirilmiş formasıdır (ciddi Markov zəncirinin tam tərifi Markov proseslərinin ümumi nəzəriyyəsi çərçivəsində verilir).

τ funksiyası X M. z.-nin Markov anı olsun, $\tau : \Omega \to [0, \infty]$, yəni τ, $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{A}_n$, $n \geq 0$ kimi təyin olunsun. (Misallar: $\tau \equiv m$, $m \geq 0$ və ya $\tau_S = \inf\{n > 0;\ \xi_n \in S\}$ – başlanğıc andan sonra S -ə $(S \in \mathscr{B})$ ilk çatma anı olsun; burada tərifə görə $\inf \varnothing = \infty$). $\Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$ çoxluğunun altçoxluğu B -nin $(B \subset \Omega_\tau)$ – τ anından gec olmayaraq baş verən hadisələr çoxluğu – $\mathscr{A}_\tau$ ailəsindən olduğu nəzərdə tutulur.

Ən sadə şəkildə sırf Markov xassəsi (bax, [12])

$$\mathbf{P}_x\{\xi_{n+\tau} \in S \,|\, \mathscr{A}_\tau\} = p(n, \xi_\tau, S)$$

bərabərliyinin Ω_τ çoxluğunda $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilməsinə gətirilir. Qeyri – bircins zəncirlər üçün bu hökmün uyğun modifikasiyası doğrudur.

M i s a l 2. Bircins M. z.-nə aid mühüm misallar bircins *sonlu Markov zəncirləri* və *hesabi Markov zəncirlərilə* əlaqədar alınır. Belə zəncirlər üçün uyğun $\mathscr{E}$ fəzası bu və ya digər qayda ilə sonlu $\{1, \dots, N\}$ toplusu ($N \geq 1$) və ya hesabi $\{1, 2, \dots\}$ toplusu ilə eyniləşdirilir; $\mathscr{B}$ σ – cəbrləri kimi $\mathscr{E}$ -nin bütün mümkün altçoxluqları çoxluğu götürülür. Ənənəvi olaraq, belə zəncirlərin

keçid ehtimalları kimi (17) ölçülərinin tam toplusu deyil, yalnız $\{p_{ij};\ i, j \in \mathscr{E}\}$ toplusu götürülür və burada $p_{ij} = p(1, i, \{j\})$, – i vəziyyətindən j vəziyyətinə bir addıma keçid ehtimalıdır. Bu hallara uyğun düsturlarda inteqrallanmanı cəmləmə ilə əvəz etmək mümkün olur (məs., Kolmoqorov – Çepmen tənliyində).

M i s a l 3. $\mathscr{E}$ kimi topoloji qrup götürülür, $\mathscr{B}$ uyğun Borel σ – cəbridir. $\mathscr{B}$ -də təyin olunmuş ixtiyari ehtimal ölçüsü μ hər hansı bircins M. z.-nin biraddımlı keçid $p(x, S) = \mu(x^{-1}, S)$ ehtimallarını doğurur, $x \in \mathscr{E}$, $S \in \mathscr{B}$, x^{-1}, – x -ə tərs element, $x^{-1}S = \{x^{-1}y;\ y \in S\}$. Bu bircins M. z.-nə $\mathscr{E}$ -də s a ğ t ə - s a d ü f i d o l a ş m a və ya ixtiyari $y \in \mathscr{E}$ üçün $p(yx, yS) \equiv$ $\equiv p(x, S)$ olduğundan $\mathscr{E}$ -də s o l y e r d ə y i ş m ə l ə r ə n ə z ə r ə n i n v a r i a n t M a r k o v z ə n c i r i deyilir, s o l t ə s a d ü f i d o l a ş m a l a r analoji qaydada təyin olunur. Daxil olunmuş bu anlayışlar stoxastik qrup anlayışı ilə bilavasitə əlaqədardır (bax, [12], [17]).

M i s a l 4. Ölçülən $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzasında verilmiş və biraddımlı keçid ehtimalları $p_m(x, S)$ olan qeyri – bircins M. z.-ni araşdırmaq üçün qayda vardır, bu qayda ilə baxılan M. z. $(\widetilde{\mathscr{E}}, \widetilde{\mathscr{B}}) =$ $= (\mathscr{E} \times T, \mathscr{B} \times \mathscr{B}_0)$ faza fəzasında hər hansı bircins M. z.-nə gətirilir, burada $T = \{0, 1, ...\}$, $\mathscr{B}_0$, – T -nin bütün altçoxluqlarının çoxluğudur. Qeyd olunan zəncirin biraddımlı keçid ehtimalları $\widetilde{p}(\widetilde{x}, \widetilde{S})$, $x \in \widetilde{\mathscr{E}}$, $S \in \widetilde{\mathscr{B}}$, – $\widetilde{x} = (x, m)$, $x \in \mathscr{E}$, $m \in T$, $S = \{y \in \mathscr{E};\ (y, m+1) \in \widetilde{S}\}$ olduqda $\widetilde{p}(\widetilde{x}, \widetilde{S}) =$ $= p_m(x, S)$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Beləliklə, vəziyyətlərin T -dəki proyeksiyaları, yeni zəncirin $\mathscr{E} \times T$ -dəki trayektoriyalarının keçdiyi vəziyyətlərin proyeksiyaları, determinik olaraq dəyişir.

Ayrılmayan bircins Markov zəncirləri.

Vəziyyətləri sayı hesabini aşmayan yaxşı araşdırılmış M. z.-nin tərif və nəticələrinin ümumi hal üçün ifadə olunması istiqamətində kifayət qədər səylər göstərilmişdir (bax, [5], [6], [9], [11], [12], [15]). $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verilmiş $X = (\xi_n, \mathbf{P}_x)$ bircins M. z.-nin n addıma keçid ehtimalları $p(n, x, S)$, μ, – $\mathscr{B}$ -də σ – sonlu ölçü olsun. Əgər $\inf\limits_{n \geq 1} \{p(n, x, S)\} > 0$ və ya bu şərtlə eynigüclü $\mu(S) > 0$ olduqda ixtiyari $x \in \mathscr{E}$ üçün $\mathbf{P}_x\{\tau_S < \infty\} > 0$ şərti ödənilərsə (τ_S -in tərifi üçün bax yuxarı), X zənciri tərifə görə μ – a y r ı l m a y a n z ə n c i r d i r.

Ayrılmayan Markov zəncirinin klassik anlayışı sonlu və ya hesabi $\mathscr{E}$ çoxluğu və $\mathscr{E}$ -nin hər bir nöqtəsinə müsbət çəki qarşı qoyan μ ölçüsünə görə təyin olunur: bu halda sonuncu tərifdəki bütün bərabərsizliklər S -in ixtiyari birnöqtəli çoxluqları üçün şübhəsiz ki, ödənilir və bu da nəzəriyyənin ciddi sadələşməsinə səbəb olur.

Ümumi halda belə çoxluqlar rolunu müəyyən qədər C – ç o x - l u q l a r ı oynayır; ixtiyari $A \in \mathscr{B}$ çoxluğu üçün elə $\upsilon(A) > 0$ və müsbət b və natural n varsa ki, $B \in \mathscr{B}$, $x \in A$ olduqda $p(n, x, B \cap A) \geq b\upsilon(B \cap A)$ olsun, onda C – ç o x l u q adlanır. Əgər $\mathscr{B}$ σ – cəbri özünün hesabi saydan çox olmayan elementlərinin doğurduğu σ – cəbr olarsa, onda ixtiyari $S \in \mathscr{B}$ $[\upsilon(S) > 0]$ özündə hər hansı C – çoxluğu saxlayır (bax, [11], [12], [25]).

X -in μ – ayrılmayan zəncir olmasından alınır ki, natural d ədədlərinin elə sonlu toplusu vardır ki, bunlardan hər biri üçün cüt-cüt kəsişməyən $C_i \in \mathscr{B}$, $1 \leq i \leq d$ çoxluqlarını göstərmək mümkündür və bu çoxluqlar:

1) əgər $x \in C_i$, $i < d$ olarsa, $p(x, C_{i+1}) = 1$,
əgər $x \in C_d$, olarsa, $p(x, C_1) = 1$;

2) $\bigcup C_i$ birləşməsinin tamamlayıcısı $\mathbf{D}$ -nin ölçüsü μ, 0-a bərabərdir və $\mathbf{D}$ tamamlayıcısı tranzitiv $\mathbf{D}_i, i \geq 1$ çoxluqlarının hesabi birləşməsi kimi ifadə oluna bilinir ($\mathbf{D}_i$ -nin tranzitivliyi: ixtiyari $x \in \mathscr{E}$ üçün $\xi_n \in \mathbf{D}_i$, $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin yalnız n qiymətlərinin sonlu toplusu üçün doğrudur). Qeyd olunan xassələrə malik d ədədlərindən ən böyüyü z ə n c i r i n p e r i o d u adlanır ($d = 1$ olduqda z ə n c i r q e y r i – p e r i o d i k adlanır). Tərifə görə uyğun $C_1, ..., C_d$ çoxluqları M. z.-nin t s i k l i k s i n i f l ə r i d i r (bax, *Markov zənciri*; v ə z i y y ə t l ə r i n t ə s n i f a t ı). Vəziyyətlər çoxluğu $\mathscr{E}$ -nin $\mathscr{E} = D \cup \left[\bigcup\limits_{1 \leq i \leq d} C_i\right]$ ayrılışı ilə υ – ölçüsü sıfra bərabər çoxluq dəqiqliyi ilə yeganədir (bax, [11]). Hər bir C – çoxluq olan S (υ – ölçüsü sıfra bərabər çoxluq dəqiqliyi ilə) tsiklik siniflərin birinə daxildir və n -in olduqca böyük qiymətlərində bütün $x \in S$ -lər üçün eyni zamanda $p(nd, x, S) > 0$ olur.

Harris qayıdışı. Diskret M. z. nəzəriyyəsinin mərkəzi anlayışlarından biri – *qayıdışlı Markov zənciri* anlayışı ümumi hal üçün baxıldıqda müxtəlif şəkillərdə ifadə olunur (məs., ölçülən strukturun seçilməsindən və ya $\mathscr{E}$ -də topologiyanın mümkünlüyündən asılı olaraq).

Geniş istifadə olunan tərif [18]-də şərh olunmuşdur. Bu tərif aşağıdakı kimi ifadə olunur. $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ -də keçid ehtimalları $p(x, S)$ olan $X = (X_n, P_n)$ M. z.-nin verildiyi fərz olunur, ν, – $\mathscr{B}$ -də σ – sonlu ölçü olsun. Əgər $\nu(S) > 0$ olduqda bütün $x \in \mathscr{E}$ üçün $\tau_S < \infty$, $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilərsə, X zənciri H a r r i s q a y ı d ı ş l ı və ya ν – q a y ı d ı ş l ı z ə n c i r adlanır. Belə zəncir υ – ayrılmayandır, sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə σ – sonlu $\mu \not\equiv 0$ invariant ölçüsünə malikdir [bütün $S \in \mathscr{B}$ üçün əgər $\int\limits_{\mathscr{E}} p(x, S)\mu(dx) = \mu(S)$ olarsa, $\mathscr{B}$ -də təyin olunmuş μ ölçüsü X üçün i n v a r i a n t ö l ç ü d ü r] və μ – qayıdışlıdır. Belə bir fakt tez-tez tətbiq olunur: hər hansı $S \in \mathscr{B}$ üçün $\mu(S) > 0$, yalnız və yalnız, o halda olur ki, X_n nöqtəsi n -in sonsuz sayda çoxlu qiymətləri üçün $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin S çoxluğuna daxil ola bilsin, məhz bu Harris qayıdışının tərifi üçün əsas götürülür (bax, [12]).

X zəncirinin Harris qayıdışlı zəncir olması X -də bir sıra mühüm erqodik xassələrin varlığını təmin edir (bax, [12]). Belə ki, əgər f, g, – $\mathscr{E}$ -də verilən, μ üzrə inteqrallanan funksiyalardırsa və $\mu(g) \equiv \int g d\mu \neq 0$ olarsa, onda $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin $x \in \mathscr{E}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n} f(X_m)\Big/\sum_{m=1}^{n} g(X_m)\right] = \mu(f)/\mu(g) \qquad (18)$$

və μ – sanki hər yerdə $\mathscr{E}$ -də

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=1}^{n} \mathbf{P}^m f\Big/\sum_{m=1}^{n} \mathbf{P}^m g\right] = \mu(f)/\mu(g) \qquad (19)$$

münasibətləri ödənilir; burada, məs.,

$$\mathbf{P}^m g(x) = \int_{\mathscr{E}} g(y)\, p(m, x, dy), \quad m \geq 1.$$

Həqiqətdə də, (19) münasibəti $\mathscr{E}$ -də hər yerdə doğrudur, bu şərtlə ki, f və g funksiyaların olduqca geniş xüsusi bir sinfindən götürülsün (bax, [12]). $\mu(\mathscr{E}) < \infty$ olan mühüm xüsusi bir halda (18) böyük ədədlər qanununa gətirilir;

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-1}\sum_{m=1}^{n} f(X_n)\right] = \mu(f)/\mu(1)$$

münasibəti $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilir, $x \in \mathscr{E}$.

Orey teoreminə əsasən $\mathscr{B}$ -də ixtiyari ν_i, $i = 1, 2$ ehtimal ölçüləri üçün X -in qeyri – periodik olması tələbi $\nu_1\mathbf{P}^n - \nu_2\mathbf{P}^n$ nüvəsinin tam variasiyasının sıfra $n \to \infty$ olduqda yaxınlaşmasını təmin edir, burada

$$\nu_i\mathbf{P}^n(\cdot) = \int p(n, y, \cdot)\, \nu_i(dy)$$

(xüsusi halda, $\mu(\mathscr{E}) < \infty$ və $\tilde{\mu} = a_\mu$, $a = \mu^{-1}(\mathscr{E})$ olarsa, $\nu_1\mathbf{P}^n - \tilde{\mu}$ tam variasiyası sıfra yaxınlaşır).

M. z. ümumi nəzəriyyəsində Harris qayıdışı şərtindən başqa digər tələblərə də təsadüf olunur; məs., *Döblin şərti* belə tələblərdəndir, bu şərt uyğun zəncirlərin strukturu və asimptotikasını xarakterizə etməyə imkan yaradır.

M. z. anlayışının bir sıra bilavasitə alınan ümumiləşmələri vardır. Məs., zaman parametri n -in $\{\dots, -1, 0\}$ çoxluğundan adi qayda ilə və ya adi qaydaya tərs qayda ilə qiymətlər aldığını fərz etmək olar (bax, *Çevrilmiş Markov zənciri*). Markov prosesləri nəzəriyyəsi ilə analoji təsadüfi yaranış (doğum) anlarlı və kəsilən anlarlı M. z.-ləri və zamandan asılı vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən M. z. də daxil olunur (bax, *Mürəkkəb Markov zənciri*, *Semi – Markov prosesi*).

M. z.-nin ən yeni problematikası əsas etibarilə; M. z.-lərinin asimptotikasının araşdırılmasına istiqamətlənmişdir. Bu istiqamətdə əsas diqqət ehtimal nəzəriyyəsi üçün klassik üslublu limit teoremlərinin (bax, [21], [24]), erqodik teoremlərin, nisbətlər üçün limit teoremlərinin qoyuluşu ilə bağlı məsələlərə yönəlir (bax, [22], [23], həmçinin *Limit teoremləri* Markov zəncirləri üçün, *Limit teoremləri* M. z.-ndə nisbətlər üçün).

Qeyri – bircins Markov zəncirləri nəzəriyyəsi üzrə də araşdırmalar vardır.

Sonlu və ya hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə təyin olunan Markov prosesinə də bəzən M. z. kimi baxılır.

Əd.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-мат. об-на Казан. ун-та», 1906, т. 15, с. 135–56; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1986, с. 60–105; [3] Колмогоров А. Н., «Матем. сб.», 1936, т. 1 с. 607–10; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1936, с. 183–97; [5] «Bull. Math. Soc. Roum. Sci.», 1937, t. 39, № 1, p. 57–115; № 2, p. 3–61; [6] Doedlin W., «Ann. Sci. Ecole norm. sup.», 1940, t. 57, p. 61–111; [7] Феллер В., Введения в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [8] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [9] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [10] Сарымсаков Т. А., Основы теории процессов Маркова, М., 1954; [11] Orey S., Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probilities, N. Y., – [a. o.], 1971; [12] Revuz D., Markov chains, Amst. – Oxf. – N. Y., 1975 (рус. пер. – Ревюз Д., Цепи Маркова, М., 1997); [13] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [14] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [15] Барруча – Рид А. М., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [16] Королюк В. С., Турбин А. Ф., Математические основы фазового укрупнения сложных систем, К., 1978; [17] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [18] Harris T. E., в сб.: Proceeding of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 2, Berk. – Los Ang., 1956, p. 113–24; [19] Tweedie R. L., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, № 5, p. 840–78; [20] Mukherjea A., «Math. Z.», 1983, Bd 183, № 3, S. 293–309; [21] Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К., «Теория вероят. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 219–28; [22] Шум М. Г., «Теория вероят. и ее примен.», 1984, т. 29, № 4, с. 692–702, 1985, т. 30, № 2, с. 241–51; [23] Карташов Н. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1985, т. 30, № 2, с. 230–41; [24] Малиновский Э., «Теория вероят. и ее примен.», 1985, т. 31, № 2, с. 315–32; [25] Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы, пер. с англ., М., 1989; [26] Ширяев А. Н., Вероятность, М., Наука, 1980.

MARKOV ZƏNCİRİ açılmış formada « **Маркова цепь** в развернутой форме; **Markov chain in the expanded form** » – bax, *Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ atsiklik/aperiodik « **Маркова цепь** ациклическая/апериодическая; aperiodic/nonperiodic/non-cyclic **Markov chain** » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ ayrılan « **Маркова цепь** приводимая/разложимая; reducible/decomposable **Markov chain** » – bax, *Ayrılan Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ ayrılmayan « **Маркова цепь** неразложимая, неприводимая; irredicible/indecomposable **Markov chain** » – bax, *Ayrılmayan Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ bircins « **Маркова цепь** однородная; homogeneous **Markov chain** » – bax, *Markov zənciri*, *Bircins Markov zənciri zaman üzrə*.

MARKOV ZƏNCİRİ çevrilmiş « **Маркова цепь** обращенная; reversed **Markov chain** » – bax, *Çevrilmiş Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ daxil edilmiş « **Маркова цепь** вложенная; embedded **Markov chain** » – bax, *Daxil edilmiş Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ dissipativ « **Маркова цепь** диссипативная; dissipative **Markov chain** » – bax, *Daxil edilmiş Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; ekssessiv funksiya « **Маркова цепь;** экспоненциальная функция; **Markov chain;** exponential function » – bax, *Ekssessiv funksiya* Markov zənciri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ; ekssessiv ölçü « **Маркова цепь;** экспоненциальная мера; **Markov chain;** exponential measure » – bax, *Ekssessiv ölçü* Markov zənciri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ ergodik « **Маркова цепь** эргодическая; ergodic **Markov chain** » – bax, *Ergodik Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; ergodik sinif « **Маркова цепь;** эргодический класс; ergodic class / set of a **Markov chain** » – vəziyyətləri çoxluğu $\mathscr{E}$ sonlu və ya hesabi bircins Markov zəncirinin vəziyyətlərinin müsbət sinfidir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Ergodik sinif adı onunla izah olunur ki, bütün vəziyyətləri bir ergodik sinif əmələ gətirən M. z.-ində yeganə $\{p_j\}_{j\in\mathscr{E}}$ stasionar paylanması vardır və bu halda ergodik teorem (böyük ədədlər qanunu) doğrudur, yəni ilkin (başlanğıc) paylanma ixtiyari olduqda $\mathscr{E}$ -də ixtiyari f funksiyası üçün

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1} f(X_t)=\sum_{j\in\mathscr{E}} f(j)\,p_j \quad \text{(sanki yəqin)}$$

münasibəti sağ tərəfdəki sıra mütləq yığıldıqda doğrudur.

Bax, *Erqodik Markov zənciri.*

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

MARKOV ZƏNCİRİ; əlaqəli vəziyyətlər « **Маркова цепь;** сообщающиеся состояния; **Markov chain;** communicating states » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; faza fəzası « **Маркова цепь;** фазовое пространство; state space of a **Markov chain** » – bax, *Faza fəzası* Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin.

MARKOV ZƏNCİRİ; fundamental matris « **Маркова цепь;** фундаментальная матрица; **Markov chain;** fundamental matrix » – sonlu və ya hesabi vəziyyətlərli və (sub) stoxastik keçid matrisi P olan bircins Markov zəncirində

$$Z=I+\sum_{n=1}^{\infty}(P^n-P^{\infty})\ (=[I-(P-P^{\infty})]^{-1})$$

matrisidir, burada, ümumiyyətlə, sıra Abelə görə (və ya Çezaroya görə) cəmlənəndir; P^{∞} limiti də belə mənada anlaşılır. Sonlu zəncirdə fundamental matris həmişə mövcuddur. Başqa bir çoxluğu ilk keçmə anına qədər (və ya proses qırılana qədər) müəyyən bir çoxluğa keçidlər sayının (təsadüfi kəmiyyət olan) birinci və ikinci momentləri fundamental matrislə yaxşı surətdə ifadə olunur; müxtəlif ilkin vəziyyətlərdə verilən çoxluğa keçidlərin gözlənilən saylarının limit fərqləri $n\to\infty$ olduqda və bu gözləmələr sonsuzluğa yaxınlaşdıqda və s. hallarda da bunu söyləmək olar. Fundamental matrislər potensial nəzəriyyəsində və idarəolunan M. z.-də də tətbiq olunur.

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

MARKOV ZƏNCİRİ; harmonik funksiya « **Маркова цепь;** гармоническая функция; **Markov chain;** harmonic function » – bax, *Harmonik funksiya* Markov zənciri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ Harris qayıdışlı « **Маркова цепь** возвратная по Харрису; Harris recurrent **Markov chain** », ν – qayıdışlı – bax, *Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ hesabi « **Маркова цепь;** счетная; countable **Markov chain** » – bax, *Hesabi Markov zənciri*.

MARKOV ZƏNCİRİ idarəolunan « **Маркова цепь** управляемая; controlled **Markov chain** » – bax, *İdarəolunan Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; keçid ehtimalı « **Маркова цепь;** переходная вероятность; **Markov chain;** transition probability » – bax, *Ehtimal; keçid ehtimalı.*

MARKOV ZƏNCİRİ klassik mənada « **Маркова цепь** в классическом смысле; **Markov chain** in the classical sense » – bax, *Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ qayıdışlı « **Маркова цепь** возвратная; recurrent **Markov chain** » – bax, *Qayıdışlı Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ qayıdışsız « **Маркова цепь** невозвратная; transient/nonrecurrent **Markov chain** » – bax, *Qayıdışsız Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ qeyri–bircins « **Маркова цепь** неоднородная; nonhomogeneous **Markov chain** » – bax, *Qeyri – bircins Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ qeyri–dissipativ « **Маркова цепь** недиссипативная; non–dissipative **Markov chain** » – bax, *Qeyri – dissipativ Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ qeyri–periodik « **Маркова цепь** непериодическая; aperiodic **Markov chain** » – *atsiklik Markov zənciridir* (bax, *Markov zənciri*).

MARKOV ZƏNCİRİ; limit teoremləri « **Маркова цепь;** предельные теоремы; **Markov chain;** limit theorems » – bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirləri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ; limit teoremləri nisbətlər üçün « **Маркова цепь;** предельные теоремы для отношений; **Markov chain;** ratio limit theorems » – bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirində nisbətlər üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ mürəkkəb « **Маркова цепь** сложная; high-order **Markov chain** » – bax, *Mürəkkəb Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; mütləq paylanma « **Маркова цепь;** абсолютное распределение; **Markov chain;** absolute probabilities » – bax, *Mütləq paylanma*(sı) Markov zənciri və ya Markov prosesinin.

MARKOV ZƏNCİRİ; orta qayıdış müddəti « **Маркова цепь;** среднее время возвращения; **Markov chain;** mean recurrence time » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ periodik « **Маркова цепь** периодическая; cyclic/periodic **Markov chain** » – bax, *Tsiklik Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; potensial nəzəriyyəsi « **Маркова цепь;** теория потенциала; **Markov chain;** the potential theory » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zənciri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ requlyar « **Маркова цепь** регулярная; regular **Markov chain** » – bax, *Requlyar Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; statistik modelləşdirmə « **Маркова цепь;** статистическое моделирование; **Markov chain;** statistical modeling » – bax, *Statistik modelləşdirilmə*(si) Markov zəncirlərinin.

MARKOV ZƏNCİRİ; təkrar loqarifm qanunu « **Маркова цепь;** повторного логарифма закон; **Markov chain;** law of iterated logarithm» – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* Markov zəncirləri üçün.

MARKOV ZƏNCİRİ tranzitiv « **Маркова цепь** транзитивная; transitive **Markov chain** » – bax, *Qayıdışsız Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ tsiklik « **Маркова цепь** циклическая; cyclic **Markov chain** » – bax, *Tsiklik Markov zənciri.*

MARKOV ZƏNCİRİ; tsiklik vəziyyət « **Маркова цепь;** циклическое состояние; cyclic/periodic state of a **Markov chain** » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; uducu vəziyyət « **Маркова цепь;** поглощающее состояние; **Markov chain;** absorbing state» – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin altsinfi « **Маркова цепь;** подкласс состояний; **Markov chain;** cyclic subclass of states » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin çoxaldılması « **Маркова цепь;** укрупнение состояний; **Markov chain;** mergence of states» – *Markov zəncirinin* elə bir ifadəsidir ki, vəziyyətlərin faza fəzasının kəsişməyən X_u vəziyyətlərinin siniflərinə

$$X = \bigcup_{u \in U} X_u$$

bölgüsünün varlığı halında mümkündür və bu halda $x \in X_u$ üçün $u(x) = u$ çoxaltma funksiyası U faza fəzasında

$$y_n = u(x_n), \quad n \geq 0$$

M. z. təyin edir. Tətbiqi hallarda, seriyalar sxemində, $x_n^{(\varepsilon)}$, $n \geq 0$ M. z.-nin vəziyyətlərinin asimptotik çoxaldılması

$$y_n^{(\varepsilon)} = u(x_n^{(\varepsilon)}), \; n \geq 0$$

prosesinin (ümumiyyətlə, Markov prosesi olmayan) $\varepsilon \to 0$ olduqda limitdə U vəziyyətlər faza fəzasında y_n^0, $n \geq 0$ M. z.-nə yığıldığı halda ən effektiv olur (ε – seriyanın parametridir).

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970; [2] Королюк В. С., Турбин А. Ф., Математические основы фазового укрупнения сложных систем, К., 1978.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin əhəmiyyətsiz sinfi « **Маркова цепь;** несущественный класс состояний; **Markov chain;** non-essential set/class of states » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin mühüm sinfi « **Маркова цепь;** существенный класс состояний; **Markov chain;** essential class/set of states » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin müsbət sinfi « **Маркова цепь;** положительный класс состояний; **Markov chain;** positiv class/set of class » – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin sıfır sinfi « **Маркова цепь;** нулевой класс состояний; **Markov chain;** null set/class of states» – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MARKOV ZƏNCİRİ; vəziyyətlərin təsnifatı « **Маркова цепь;** классификация состояний; **Markov chain;** classification of states» – faza fəzası $\mathscr{E}$ sonlu və ya hesabi olan bircins Markov zənciri vəziyyətlərinin arifmetik xassələri və n addıma keçid ehtimallarının asimptotikası üzrə siniflərə bölgüsüdür. 1937-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən təklif edilmişdir (bax, [1]). ($\mathscr{E}$ sonlu fəza olduqda V. Döblin tərəfindən [2]-də asılı olmadan alınmışdır).

p_{ij}, $(i, j) \in \mathscr{E}$ – zəncirin keçid ehtimalları, $P = \| p_{ij} \|$ – Markov zəncirinin keçid ehtimalları matrisi olsun. $\| p_{ij}(n) \| = P^n$; bu bərabərlik $p_{ij}(n)$ n addıma keçid ehtimalları olduğu halda doğrudur. Tərifə görə $\| p_{ij}(0) \| = I$. Vəziyyətlərin faza fəzası $\mathscr{E}$ sonlu olduğu halda (hesabi halda baxıla bilinər) təsnifatın birinci mərhələsi P matrisində sıfırların yerləşməsi ilə təyin olunur (bu təsnifat vəziyyətlər fəzası sonlu olan zəncirləri əhatə edir). n -in hər hansı $n \geq 0$ qiymətində $p_{ij}(n) > 0$ olarsa, j vəziyyətinə i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid mümkün olan vəziyyət deyilir (rus. «состояние j достижимо из состояния i»), əgər bütün $n \geq 0$ qiymətlərində $p_{ij}(n) = 0$ olarsa, j i vəziyyətindən j-yə keçid mümkün olmayan vəziyyət adlanır (rus. «недостижимо из i»). Sonlu sayda addıma $i \in \mathscr{E}$ vəziyyətindən $j \in \mathscr{E}$ vəziyyətinə sıfırdan fərqli ehtimalla keçid mümkün

olub, j-dən i-yə keçid mümkün olmazsa, yəni elə m və j olarsa ki, $p_{ij}(m) > 0$ olub, bütün $n \geq 0$ qiymətlərində $p_{ij}(n) = 0$ olsun, onda i vəziyyətinə əhəmiyyətsiz (qeyri–mühüm) vəziyyət deyilir. Bütün əhəmiyyətsiz vəziyyətlərin çoxluğu $\mathscr{R}$ vəziyyətlərin əhəmiyyətsiz sinfi adlanır.

Sonlu Markov zəncirində $\mathscr{E} \setminus \mathscr{R}$ həmişə boş olmayan çoxluqdur, hesabi zəncirin bütün vəziyyətləri əhəmiyyətsiz vəziyyətlər ola bilər.

$\mathscr{E} \setminus \mathscr{R}$ çoxluğuna aid vəziyyətlərə mühüm vəziyyətlər (rus. существенные состояния) deyilir. Əgər i vəziyyəti j-dən i-yə keçid mümkün olan vəziyyətdirsə və j vəziyyəti də i-dən j-yə keçid mümkün olan vəziyyətdirsə, i və j vəziyyətləri qarşılıqlı əlaqəli vəziyyətlər adlanır. Vəziyyətlərin bir-birilə əlaqəliliyi xassəsi refleksiv, simmetrik və tranzitivdir. Buna görə də, mühüm vəziyyətlər çoxluğu $\mathscr{E} \setminus \mathscr{R}$ kəsişməyən elə C_α mühüm siniflərinin birləşməsidir ki, hər bir sinifdə bütün vəziyyətlər öz aralarında əlaqəlidirlər, lakin müxtəlif mühüm siniflərdən olan vəziyyətlərdən birindən digərinə keçid mümkün deyildir. Hər bir C_α sinfində

$$\sum_{j \in C_\alpha} p_{ij} = 1, \quad i \in C_\alpha$$

bərabərliyi ödənilir, odur ki, hər bir C_α sinfində müstəqil M. z. alınır. i mühüm vəziyyəti üçün $d = \text{ə.b.o.b.}\{n : n \geq 1,\ p_{ii}(n) > 0\}$ ədədinə i vəziyyətinin periodu deyilir. C_α mühüm sinfinin bütün vəziyyətlərinin periodları bərabərdirlər; d C_α sinfinin periodu da adlandırılır. Əgər $d > 1$ olarsa, i vəziyyəti periodik (və ya tsiklik) vəziyyət, $d = 1$ olarsa, qeyri–periodik (atsiklik) vəziyyət adlanır. d periodlu C_α mühüm sinfi cüt-cüt kəsişməyən elə $C_\alpha^0, C_\alpha^1, ..., C_\alpha^{d-1}$ altsiniflərinin birləşməsidir ki, əgər $i \in C_\alpha^k$ olarsa, onda

$$\sum_{j \in C_\alpha^l} p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{əgər } l - k \equiv 1 \pmod d \\ 0, & \text{əgər } l - k \neq 1 \pmod d \end{cases}$$

münasibəti doğrudur.

Beləliklə, hər bir addımda trayektoriya C_α^k altsinfindən C_α^{k+1} altsinfinə 1 ehtimalla keçir (C_α^{d-1}-dən C_α^0 altsinfinə). Əgər C_α^k altsinfi sonlu sayda vəziyyətlərdən ibarətdirsə, onda olduqca böyük bütün natural m ədədləri, ixtiyari $i, j \in C_\alpha^k$ vəziyyətlər cütü üçün $p_{ij}(md) > 0$ olur. Əgər C_α mühüm sinif olub, yeganə i vəziyyətindən ibarətdirsə, onda i uducu vəziyyət adlanır; uducu vəziyyət üçün n-in bütün qiymətlərində $p_{ii}(n) = 1$.

Zəncirin vəziyyətlərinin sonrakı təsnifatı $\mathscr{E}$ faza fəzasının hesabi olduğu halı üçün mühümdür, lakin bu təsnifat sonlu $\mathscr{E}$ üçün formal olaraq öz qüvvəsində qalır. Bu təsnifat verilən vəziyyətə qayıdış ehtimalı və orta müddəti ilə bağlıdır.

$$\tau_i = \begin{cases} +\infty, & \text{əgər bütün } t \geq 1 \text{ qiymətlərində } X_t \neq i \text{ olarsa,} \\ \min\{t : t \geq 1,\ X_t = i\}, & \text{əks halda} \end{cases}$$

olsun.

i vəziyyətinə qayıdış ehtimalı f_{ii}

$$f_{ii}(n) = \mathbf{P}_i\{X_t \neq i,\ 0 < t < n,\ X_n = i \text{ olarsa}\},$$

olarsa,

$$f_{ii} = \mathbf{P}_i\{\tau_i < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)$$

düsturu ilə təyin olunur. Əgər $f_{ii} = 1$ olarsa, $i \in \mathscr{E}$ qayıdışlı vəziyyət, $f_{ii} < 1$ olarsa, qayıdışsız vəziyyət adlanır.

Sonlu Markov zəncirində qayıdışsız vəziyyətlər çoxluğu əhəmiyyətsiz vəziyyətlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür, hesabi zəncirdə əhəmiyyətsiz vəziyyət qayıdışsız vəziyyətdir, tərsi isə, ümumiyyətlə, doğru deyildir (bax, aşağı, misal 2). Əgər i qayıdışlı vəziyyətdirsə, onda trayektoriyanın bu vəziyyətə sonsuz dəfə qayıdışı ehtimalı 1-ə bərabərdir, əgər i qayıdışsız vəziyyət olarsa, onda i-yə qayıdış ehtimalı sıfra bərabərdir. i vəziyyətinin qayıdışlı vəziyyət olması üçün zəruri və kafidir ki, i vəziyyətinə qayıdışlar sayının riyazi gözləməsi sonsuzluğa bərabər olsun, yəni $\sum_n p_{ii}(n)$ sırası dağılan olsun. Bir C_α sinfinin bütün vəziyyətlərinin hamısı ya qayıdışlı, ya da ki, hamısı qayıdışsızdırlar; bu hallarda C_α sinfi uyğun olaraq, qayıdışlı və ya qayıdışsız sinif adlanır. i vəziyyətinə orta qayıdış müddəti aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$m_{ii} = \mathbf{M}_i \tau_i = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n), & \text{əgər } i \text{ qayıdışlı vəziyyətdirsə,} \\ +\infty, & \text{əgər } i \text{ qayıdışsız vəziyyətdirsə.} \end{cases}$$

Əgər $m_{ii} = \infty$ olarsa, i sıfır vəziyyət, $m_{ii} < \infty$ olarsa, i müsbət vəziyyət adlanır. Hər hansı C_α sinfində bütün vəziyyətlər eyni zamanda ya sıfır vəziyyətlər və ya eyni zamanda müsbət vəziyyətlərdir; C_α sinfi, bu hallarda uyğun olaraq, vəziyyətlərin sıfır sinfi və ya vəziyyətlərin müsbət sinfi adlanır. Sonlu sayda vəziyyətlər çoxluğu olan mühüm C_α sinfi (o cümlədən, faza fəzası $\mathscr{E}$ sonlu zəncirin ixtiyari mühüm sinfi) hökmən qarşılıqlı və müsbət sinifdir.

Vəziyyətlərin bu və ya digər sinfə aid olması addımlar sayı n-in böyük qiymətlərində keçid ehtimallarının asimptotikası ilə bağlıdır. Əgər i əhəmiyyətsiz, qayıdışsız və ya sıfır vəziyyət olarsa, onda ixtiyari $i \in \mathscr{E}$ üçün

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = 0$$

münasibəti doğrudur. Eyni bir müsbət C_α sinfinin i və j vəziyyətləri üçün Çezaroya görə müsbət limitlər mövcuddur:

$$p_j = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} p_{ij}(t) = \frac{1}{m_{jj}}, \quad \sum_{j \in C_\alpha} p_j = 1;$$

əgər bundan başqa, C_α sinfinin periodu 1-ə bərabər olarsa, Çezaroya görə limiti adi limitlə əvəz etmək olar. C_α müsbət d sinfinin periodu 1-dən böyük olarsa, $i \in C_\alpha^k$, $j \in C_\alpha^l$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(l-k+nd) = d/m_{jj}$$

münasibəti doğrudur və əgər $t \not\equiv l-k \pmod d$ olarsa, $p_{ii}(t) = 0$ olur. Əgər $j \in C_\alpha$ müsbət qeyri – periodik vəziyyət, i əhəmiyyətsiz vəziyyət olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_{i\alpha}/m_{jj}$$

münasibəti doğrudur, burada $\pi_{i\alpha}$, – i vəziyyətindən çıxan trayektoriyanın C_α mühüm sinfində udulması ehtimalıdır; $d > 1$ olduqda bu münasibət Çezaro mənada limit üçün də doğrudur.

Zəncirin müsbət sinifləri ilə stasionar paylanmalar, yəni $\mu_i \geq 0$, $\sum_i \mu_i = 1$ elə $\mu = \{\mu_i\}_{i\in\mathscr{E}}$ ədədlər topluları ilə bağlıdırlar ki, bunlar

$$\mu_j = \sum_{i\in\mathscr{E}} \mu_i p_{ij}, \quad j \in \mathscr{E}, \tag{1}$$

münasibətilə təyin olunurlar.

Hər bir müsbət C_α sinfinə C_α-da topalanmış yeganə μ^α stasionar paylanması uyğundur, yəni $\mu_i^\alpha = \mu_i = m_{ii}^{-1}$, $i \in C_\alpha$. α zəncirin bütün müsbət siniflərinin çoxluğunda dəyişdikdə, bütün stasionar paylanmaların çoxluğu μ^α vektorlarının qabarıq örtüyüdür. Əgər zəncirin müsbət sinifləri vardırsa (məs., əgər $\mathscr{E}$ sonlu fəza olarsa), onda stasionar paylanma vardır, əgər belə sinif yeganədirsə, stasionar paylanma da yeganədir.

Hər bir qarşılıqlı C_α sinfinə C_α-da topalanmış, sabit vuruq dəqiqliyinə qədər yeganə invariant μ^α ölçüsü uyğundur: (1) münasibətini ödəyən, $\mathscr{E}$-də sıfırdan fərqli mənfi olmayan sonlu funksiya; əgər C_α müsbət sinif olarsa, onda μ^α stasionar paylanmaya mütənasibdir, əgər C_α sıfır sinif olarsa, onda $\sum_i \mu_i^\alpha = \infty$ olur. Qayıdışsız mühüm C_α sinfində və ya sonsuz əhəmiyyətsiz $\mathscr{R}$ sinfində (həmçinin $\mathscr{R}$ ilə sonsuz mühüm siniflərin birləşməsində) invariant ölçülər çox ola bilər, onların təsviri Markov zəncirinin sərhədinin qurulması ilə əlaqədardır.

Misal 1. (yarımoxda təsadüfi dolaşma). $\mathscr{E} = \{0, 1, 2, ...\}$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q = 1-p$, $i = 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$ olsun. $p_{01} = 1$ olduqda 0 vəziyyəti dolaşmanın əksedici vəziyyətidir. Bu zəncirin bütün vəziyyətləri iki tsiklin altsinfə ayrılan yeganə mühüm vəziyyətlər sinfini əmələ gətirir: bunlar $C^0 = \{0, 2, 4, \ldots\}$, $C^1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$ siniflərdir.

C sinfi $p > 1/2$ olduqda qayıdışsız sinif ($t \to \infty$ olduqda $\lim X_t = +\infty$ vahid ehtimalla ödənilir), $p = 1/2$ olduqda qayıdışlı və sıfır sinif, $p < 1/2$ olduqda qayıdışlı və müsbət sinifdir. İnvariant μ ölçüləri

$$\mu_0 = a, \ \mu_i = a\,\frac{p^{i-1}}{q^i}, \ i \geq 1, \tag{2}$$

düsturları ilə təyin olunurlar; burada $a > 0$, $p < 1/2$ olduqda $\sum_i \mu_i$ sırası yığılır və (2) düsturundan $a = (q-p)(q-p+1)^{-1}$ olduqda stasionar paylanma alınır.

Əgər $p_{00} = 1$, $p_{01} = 0$ götürülərsə (digər p_{ij} ehtimallarını olduğu kimi saxlamaq şərtilə), sıfırda udulan dolaşma alınır. Burada əhəmiyyətsiz $R = \{1, 2, \ldots\}$ sinfi və mühüm müsbət $C = \{0\}$ sinfi vardır; 0 vəziyyəti uducu vəziyyətdir. $i \geq 1$, $a > 0$ olduqda ixtiyari invariant ölçü $\mu_0 = a$, $\mu_i = 0$ olur.

Misal 2. (ədəd oxunda təsadüfi dolaşma).

Əgər $\mathscr{E} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q = 1-p$, $0 < p < 1$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ olarsa, onda yeganə $C = \mathscr{E}$ mühüm sinfi vardır ki (iki tsiklik altsiniflərdən ibarət), bu sinif $p \neq 1/2$ olduqda qayıdışsız sinifdir və $p = 1/2$ olduqda qayıdışlı və sıfır sinifdir. $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $\mu_i^{(1)} = 1$, $\mu_i^{(2)} = (p/q)^i$, $i \in \mathscr{E}$ olduqda ixtiyari invariant ölçü $\mu = a_1\mu^{(1)} + a_2\mu^{(2)}$ düsturu ifadə olunur. Qayıdışlı halda, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$.

Ədd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986; с.183–97; [2] Doeblin W., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 203, p. 24–26; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [4] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [5] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

MARTİN KOMPAKTI « Мартина компакт; Martin compactum / boundary » – bax, *Martin sərhədi.*

MARTİN SƏRHƏDİ Markov prosesinin **« Мартина граница** марковского процесса; **Martin boundary** for a Markov process **»** – *Markov prosesinin* və ya onun faza fəzasının R. Martinin verdiyi sxem üzrə qurulan hər hansı kompaktda obrazının sərhədidir (bax, [1], [9]). M. s. nəzəriyyəsinin əsas problemləri arasında Markov prosesinin final gedişatının və ekssessiv funksiyalarının konusunun strukturunun təsvirini qeyd etmək lazımdır (terminologiya ilə əlaqədar, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün məq.-nə bax).

Martin sxeminin ehtimali izahı ilk dəfə eyni zamanda C. Dub tərəfindən [2]-də və T. Vatanabe tərəfindən [3]-də təklif olunmuşdur. M. s. nəzəriyyəsi Markov zəncirləri üçün işlənilmişdir (bax, [8]).

$\mathscr{E}$ – separabel lokal kompakt fəza, $\mathscr{B}$ – bu fəzanın Borel çoxluqlarının ailəsi olsun. $\xi = (\xi_t, \zeta, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $x \in \mathscr{E}$, $t \geq 0$ bircins Markov prosesinin $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında öz keçid funksiyası $p(t, x; \Gamma)$ ilə verildiyi fərz olunur. Fərz olunur ki, $\mathscr{B}$-də verilən hər hansı σ – sonlu μ ölçüsü təyin olunmuş bu proses üçün Qrin α – funksiyası $\rho_\alpha(\cdot, \cdot)$, $\alpha \geq 0$ qurmaq olar və $\mathscr{B}$ – də təyin olunmuş hər hansı σ – sonlu γ ölçüsünün potensialı

$$q(\cdot) = \int_{\mathscr{E}} \rho_0(x, \cdot)\, \gamma(dx)$$

sonludur və müsbətdir. Geniş şərtlərlə (bax, [6]) elə $\mathcal{K}$ kompaktı (Martin kompaktı, $\mathcal{B}$ -də $K_y^\alpha(dx)$, $\alpha \geq 0$, $y \in \mathcal{K}$ ölçüləri və $i : \mathcal{E} \to \mathcal{K}$ inikası vardır ki, bunlar aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

a) $\mathcal{E}$ -nin obrazı $\mathcal{K}$ -da sıxdır,

b) əgər f $\mathcal{E}$ -də kompakt daşıyıcılarlı bütün kəsilməz funksiyalar ailəsidirsə, $K^{\alpha,f}(y) = \int_{\mathcal{K}} f(x)\, K_y^\alpha(dx)$ funksiyaları nöqtələri ayırır və $\mathcal{K}$ -da kəsilməzdirlər;

c) $y \in \mathcal{E}$ üçün $K_{i(y)}^\alpha(dx) = k_y^\alpha(x)\, m(dx)$, burada $k_y^\alpha(x) = \rho_\alpha(x, y) q^{-1}(y)$.

$i(\mathcal{E})$ çoxluğunun $\mathcal{K}$ -da tamamlayıcısı Martin sərhədi adlanır (o həm də çıxış sərhədi də adlandırılır; bu isə giriş sərhədi anlayışının da olduğunu qeyd etmək məqsədilə belə adlandırılır, bax, [2], [7]).

$\mathcal{K}$ -da xassələr h – proseslər terminlərilə təsvir olunur [h – ekssessiv funksiya, h – proses isə keçid funksiyası

$$p^h(t, x; \Gamma) = h^{-1}(x) \int_\Gamma h(y)\, p(t, x; dy)$$

olan $(\mathcal{E}^h, \mathcal{B}^h)$ -da Markov prosesidir, burada

$\mathcal{E}^h = \{ x \in \mathcal{E} : 0 < h(x) < \infty \}$, $\mathcal{B}^h = \{ A \in \mathcal{B} : A \subset \mathcal{E}^h \}$].

ξ prosesi də daxil olmaqla, bütün h – proseslər bunlar üçün ümumi olan elementar hadisələr fəzasında reallaşır, belə ki, bunlar yalnız $\mathbf{P}_x^h$ ölçüləri ailəsi ilə fərqlənirlər. $\mathcal{K}$ -da soldan kəsilməz elə z_t, $0 < t < \zeta$ prosesi vardır ki, bu proses üçün $z_t = i(\xi_t)$ bərabərliyi $\mathbf{P}_x^h$ – sanki yəqin ödənilir və $z_\zeta \equiv$ $\equiv z_{\zeta -}(t \geq 0,\ h \in L^1(\gamma))$ -nin limiti vardır.

$\mathcal{K}$ -da «çıxışlar fəzası» adlanan aşağıdakı xassələrə malik $\widetilde{\mathcal{K}}$ çoxluğu seçilir: 1) $z_\zeta \in \widetilde{\mathcal{K}}$ münasibəti $h \in L^1(\gamma)$ olduqda $\mathbf{P}_x^h$ – sanki yəqin ödənilir; 2) $y \in \widetilde{\mathcal{K}}$ olduqda $K_y^\alpha(dx)$ ölçüsünün m ölçüsünə nəzərən K_y^α sıxlığı vardır; 3) ixtiyari $h \in L^1(\gamma)$ funksiyasının

$$h(x) = \int_{\widetilde{\mathcal{K}}} k_y^0(x)\, \mu(dy)$$

şəklində yeganə ayrılışı mümkündür (μ ölçüsü h funksiyasının spektral ölçüsü adlanır); 4) k_y^0, $y \in \widetilde{\mathcal{K}}$ funksiyası ekssessiv funksiyadır və onun spektral ölçüsü y nöqtəsində topalanmışdır.

Bax, *Markov prosesi*; faza fəzasının kompaktifikasiyası.

Əd.: [1] Martin R. S., «Trans.Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137–72; [2] Doob J. L., «J. Math. and Mech.», 1959, v. 8, № 3, p. 433–58; [3] Watanabe T., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1960, v. 33, № 1, p. 39–108, [4] Kunita H., Watanabe T., «Ill, J.Math. », 1965, v. 9, № 3, p. 485–526; [5] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 1, с. 170–75; [6] Дынкин Е. Б., «Успехи матем. наук,» 1969, т. 24, в. 4, с. 89–152; [7] Дынкин Е. Б., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Ser. 1 A », 1970, v. 17, pt 1–2, p. 87–100; [8] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997; [8] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – B. – Hdlbg, 1984.

MARTİNQAL « мартингал; martingale » – həqiqiqiymətli, aşağıdakı tip *təsadüfi prosesdir.* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$, $t \in T$, $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$ – σ – cəbrlərinin azalmayan ailəsi, $T = \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ və ya $T = \mathbb{R}_+$ olsun ($t \in T$ parametri əksər hallarda zamanı ifadə edir, $\mathbb{A}$ ailəsi filtrasiya və ya axın, $\mathcal{B} = (\Omega, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mathbf{P})$ stoxastik bazis adlanır). Əgər:

$\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesi $\mathbb{A}$ – uzlaşan proses (yəni ζ_t, – $\mathcal{A}_t$ – ölçülən, $t \in T$) olarsa,

$$\mathbf{M}\left|\zeta_t\right| < \infty,\ t \in T;$$

$$\mathbf{M}[\zeta_t \,|\mathcal{A}_s] = \zeta_s \ (\ \mathbf{P} \text{ – sanki yəqin }),\quad s \leq t < \infty \qquad (1)$$

olarsa, $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ prosesinə martinqal ($\mathbb{A}$ axını və $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən) deyilir.

Supermartinqal (*submartinqal*) anlayışının tərifləri martinqal anlayışının tərifindən (1) münasibətində $=$ işarəsinin uyğun olaraq, $\geq$ ($\leq$) ilə əvəz olunması ilə alınır.

Əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ prosesinin martinqal olduğu hökm edilirsə və bu halda onun hansı σ – cəbrlər ailəsinə nəzərən martinqal olması qeyd olunmursa, onda $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$ σ – cəbrlər ailəsinin təbii σ – cəbrlər ailəsi, yəni $\mathcal{A}_t = \sigma\{(\zeta_s \in B),\ s \leq t,$ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ olduğu nəzərdə tutulur.

Misallar. a) $\xi_0, ..., \xi_n, ...$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\mathbf{M}\xi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Onda $\zeta_n = \xi_0 + ... + \xi_n$ martinqaldır. Kəsilməz zaman halında belə M.-ın analoqu asılı olmayan artımlarlı $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ prosesidir, $\mathbf{M}\zeta_t = 0$.

b) $w = (w_t)$, $t \in T$ – Viner prosesi, h, – $\mathbb{R}$ -də harmonik funksiya olsun. Onda $h(w)$ – M.-dır.

M. nəzəriyyəsində $\Omega \times T$ fəzalar hasilində öngörül $(\mathcal{P})$ və opsional $(\mathcal{O})$ σ – cəbrləri mühüm rol oynayır, burada

$$\mathcal{P} = \sigma\{A \times]s, t] : A \in \mathcal{A}_s,\ s < t,\ s, t \in T\}$$

$$\mathcal{O} = \sigma\{(\omega, t) :\ S(w) \leq t < \infty, s \in \mathcal{T}\}$$

$\mathcal{T}$ qiymətləri T -dən olan bütün dayanma anlarının ($\mathbb{A}$ -ya nəzərən) çoxluğudur. $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ σ – cəbrinin çoxluqları öngörül (opsional) çoxluqlar adlanır. Proses $\mathcal{P}$ – ölçülən dirsə ($\mathcal{O}$ – ölçülən dirsə), o öngörül (opsional) proses adlanır. $T = \mathbb{N}$ olduqda $\zeta = (\zeta_n)$ prosesi, yalnız və yalnız, o halda *öngörül* (opsional) *proses* olur ki, ζ_n təsadüfi kəmiyyətləri $\mathcal{A}_{n-1}$ – ölçülən (ζ_n, – $\mathcal{A}_n$ – ölçülən) proses olsun, $n \in \mathbb{N}$. $T = \mathbb{R}_+$ olduğu halda, ixtiyari soldan kəsilməz (sağdan kəsilməz soldan limitləri olan) $\mathbb{A}$ – uzlaşmış proses öngörül (opsional) prosesdir. İxtiyari M.-ın (supermartinqalın) opsional modifikasiyası vardır.

Zaman arqumentinin təsadüfi dəyişməsində martinqallığın qalması (itməməsi) mühüm xassədir (sərbəst seçimin çevrilməsi haqqında teorem): əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ opsional supermartinqalı sağdan qapalılıq şərtini ödəyərsə, yəni

elə inteqrallanan ξ təsadüfi kəmiyyəti varsa ki, $\zeta_t \geq \mathbf{M}[\xi|\mathscr{A}_t]$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin), $t \in T$ şərti ödənilir, onda ixtiyari sonlu $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{T}$ dayanma anları üçün ζ_{τ_1}, ζ_{τ_2} kəmiyyətləri inteqrallanandırlar və $\tau_1 \leq \tau_2$ üçün

$$\zeta_{\tau_1} \geq \mathbf{M}[\zeta_{\tau_2}|\mathscr{A}_{\tau_1}] \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}) \qquad (2)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$\mathscr{A}_{\tau_1} = \sigma\{A \in \vee_t \mathscr{A}_t : A \cap (U \leq t) \in \mathscr{A}_t, t \in T\}$$

və $\vee_t \mathscr{A}_t$, – $\mathscr{A}_t$, $t \in T$, σ – cəbrinin doğurduğu minimal σ – cəbrdir.

M. halında (ζ_t), $t \in T$ ailəsi müntəzəm inteqrallanan ailə olarsa, sağdan qapalılıq şərti ödənilir. (2)–dən aydındır ki, əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ opsional M., $S \in \mathscr{T}$ olarsa, $\zeta^S = (\zeta_{S \wedge t})$, $t \in T$ prosesi M.-dır ($\mathbb{A}$, $\mathbf{P}$ –yə nəzərən), burada $S \wedge t = \min(S, t)$. ζ^S prosesi dayandırılmış martinqal adlanır. (2)–dən Vald eyniliyi alınır, yəni $\xi_0, \xi_1, \ldots$ inteqrallanan asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\mathbf{M}(\xi_0 + \ldots + \xi_S) = \mathbf{M}S\,\mathbf{M}\xi_0$$

düsturu doğrudur, burada S, – $\mathscr{A}_n = \sigma\{\xi_k, k \leq n\}$ ailəsinə nəzərən inteqrallanan dayanma anıdır.

Aşağıdakı fundamental bərabərsizliklər doğrudur:

1) Əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ sağdan qapalı opsional supermartinqaldırsa, onda $\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{t \leq r} |\zeta_t| \geq \lambda\right\} \leq 3 \sup_{t<r} \mathbf{M}|\zeta_t|$, burada λ – müsbət sabitdir, $r \leq \infty$;

2) Əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ mənfi olmayan opsional submartinqaldırsa, onda

$$\left(\mathbf{M}\left[\sup_{t \in T} \zeta_t\right]^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t \in T} (\mathbf{M}\zeta_t^p)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Yığılma haqqında aşağıdakı teoremin çoxsaylı tətbiqi vardır: əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ opsional supermartinqalı L^1-də məhduddursa, yəni

$$\sup_{t \in T} \mathbf{M}|\zeta_t| < \infty$$

olarsa, onda elə inteqrallanan ξ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki,

$$\xi = \lim_{t \to \infty} \zeta_t \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin});$$

$\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ müntəzəm inteqrallanan M.-dırsa, onda L^1–də yığılma vardır və bu yığılma $\mathbf{P}$ – sanki yəqin yığılmadır və

$$\zeta_t = \mathbf{M}[\xi|\mathscr{A}_t] \quad (\mathbf{P} - \text{sanki yəqin}), \; t \in T.$$

$T = \mathbb{R}_+$ olduğu halda, opsional supermartinqalın demək olar ki, bütün trayektoriyalarının hər bir $x \in T$ nöqtəsində $t > 0$ olduqda soldan və $t \geq 0$ olduqda sağdan limitləri vardır.

Kəsilməz zamanlı martinqalların xassələri.

$\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ σ – cəbrlər ailəsinin tamamlanma və sağdan kəsilməzlik kimi adi şərtləri ödədiyi fərz olunur, yəni $\mathscr{A}_0$ bütün $\mathbf{P}$ – sıfır çoxluqları özündə saxlayır, $\mathscr{A}_s = \mathscr{A}_{s+}$, $s \in \mathbb{R}_+$, burada $\mathscr{A}_{s+} = \bigcap_{t>s} \mathscr{A}_t$.

Əgər $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ supermartinqalı üçün $t \to \mathbf{M}\zeta_t$ funksiyası sağdan kəsilməzdirsə, onda ζ –nın modifikasiyası vardır və bu modifikasiyanın bütün trayektoriyaları $t \geq 0$ olduqda sağdan kəsilməzdir və $t > 0$ olduqda bütün trayektoriyalarının soldan limiti vardır. Xüsusi halda, adi şərtlər daxilində ixtiyari M.-ın belə modifikasiyası vardır.

Fərz olunur ki, baxılan proseslərin trayektoriyaları $t \geq 0$ olduqda sağdan kəsilməzdirlər və onların $t > 0$ olduqda soldan limitləri vardır. $\mathscr{M}$, – $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\zeta_0 = 0$ müntəzəm inteqrallanan M. fəzası; $\mathscr{M}^2$ elə $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\zeta_0 = 0$ M. fəzası olsun ki, $\mathbf{M} \sup_t |\zeta_t|^2 < \infty$ (kvadratı ilə müntəzəm inteqrallanan M.-lar fəzası); V^+, – $A = (A_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $A_0 = 0$ artan $\mathbb{A}$ – uzlaşan proseslər fəzası $V = V^+ - V^-$, $A^+ = \{A = (A_t) \in V^+ : \mathbf{M}A_\infty < \infty\}$, $A = A^+ - A^-$ təsadüfi proseslərin hər hansı fəzasıdırsa, onda C təsadüfi proseslərin hər hansı fəzasıdırsa, onda $\zeta \in C_{\text{loc}}$ simvolik yazısı belə anlaşılır: $T_n \uparrow \infty$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) şərtini ödəyən $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{T}$ ardıcıllığı və $\zeta^{T_n} = (\zeta_{T_n \wedge t})_{t \in \mathbb{R}_+} \in C$, $n \in \mathbb{N}$ dayandırılmış prosesi vardır. $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ fəzasının elementləri lokal martinqallar adlanır. Əgər $\zeta \in \mathscr{N}$ münasibəti ixtiyari $T \in \mathscr{T}$ və $B \in \mathscr{A}_0$ üçün $\zeta^T \in \mathscr{N}$ və $\mathbf{I}_B \zeta \in \mathscr{N}$ münasibətlərini doğurursa, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}_{\text{loc}}$ altfəzası dayanıqlı fəza adlanır, burada $\mathbf{I}_B$, – B çoxluğunun indikatorudur. $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ fəzası $\mathscr{M}_{\text{loc}}^c$ və $\mathscr{M}_{\text{loc}}^d$ dayanıqlı altfəzalarının cəmi kimi ayrılışa malikdir, burada $\mathscr{M}_{\text{loc}}^c$ kəsilməz lokal M. altfəzası, $\mathscr{M}_{\text{loc}}^d$ isə lokal M. altfəzasıdır, bunlar sırf kəsilən M. adlanır. $\zeta \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^c$ və $\zeta^* \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^d$ iki ixtiyari M.-ın hasili – $\zeta\zeta^* \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ şərtini ödəyərsə, bu M.-lar ortoqonaldırlar.

Hər bir lokal ζ M. üçün bir sıra ayrılışlar vardır:

$$\zeta = \mathscr{M} + \mathscr{N}, \; \mathscr{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^2, \; \mathscr{N} \in A_{\text{loc}} \cap \mathscr{M}_{\text{loc}};$$

$$\zeta = \zeta^c + \zeta^d, \; \zeta^c \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^c, \; \zeta^d \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^d;$$

ζ^c, – ζ M.-nın kəsilməz martinqal komponenti, ζ^d isə ζ –nın sırf kəsilən komponentidir;

$\zeta = \mathscr{M} + \mathscr{N}$, $\mathscr{N} \in A_{\text{loc}} \cap \mathscr{M}_{\text{loc}}$, $\mathscr{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, $|\Delta\mathscr{M}| \leq K$, burada $\Delta\mathscr{M} = (\Delta\mathscr{M}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $\Delta\mathscr{M}_t = \mathscr{M}_t - \mathscr{M}_{t-}$, $t > 0$ olduqda, $\Delta\mathscr{M}_0 = \mathscr{M}_0$, K – öngörül artan prosesdir.

M. nəzəriyyəsinin müxtəlif tətbiqlərində $\zeta \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ və ya $f \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ martinqalı üzrə $\int f\, d\zeta$ stoxastik inteqralı mühüm rol oynayır. Bu inteqralların tərifləri aşağıda daxil olunmuş $[\zeta, \zeta]$, $\langle \zeta, \zeta \rangle$ proseslərinə əsaslanır.

Hər bir $\zeta \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ martinqalına elə yeganə $\langle \zeta, \zeta \rangle \in A^+_{\text{loc}}$ öngörül prosesi uyğundur ki, $\zeta^2 - \langle \zeta, \zeta \rangle$ fərqi $\zeta^2 - \langle \zeta, \zeta \rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ şərtini ödəyir. $\langle \zeta \rangle$ kimi də işarə olunan $\langle \zeta, \zeta \rangle$ prosesi ζ M.-nın **öngörül xarakteristikası** adlanır. Əgər $\zeta, \zeta^* \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ olarsa, onda bu martinqallara uyğun yeganə öngörül $\langle \zeta, \zeta^* \rangle \in A_{\text{loc}}$ $(\zeta\zeta^* - \langle \zeta\zeta^* \rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}})$ prosesi vardır və bu proses

$$\langle \zeta, \zeta^* \rangle = \big(\langle \zeta + \zeta^*, \zeta + \zeta^* \rangle - \langle \zeta - \zeta^*, \zeta - \zeta^* \rangle \big) / 4$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və bu proses ζ və ζ^* proseslərinin **qarşılıqlı öngörül xarakteristikası** adlanır. Hər bir $\zeta \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ prosesinə uyğun $[\zeta, \zeta] \in V^+$ prosesi vardır və bu proses

$$[\zeta, \zeta]_t = \langle \zeta^c, \zeta^c \rangle_t + \sum_{0 < s \le t} (\Delta\zeta_s)^2,$$
$$\Delta\zeta_s = \zeta_s - \zeta_{s^-}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada ζ^c, – ζ M.-nın ayrılışının kəsilməz komponentidir, sağdakı sıra $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ixtiyari $t \in \mathbb{R}_+$ üçün yığılır. $[\zeta, \zeta]$ prosesi ζ **martinqalının kvadratik variasiyası** adlanır.

Hər bir $\zeta, \zeta^* \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ cütünə $[\zeta, \zeta^*] \in V$ prosesi qarşı qoyulur və $[\zeta, \zeta^*]$ – ζ və ζ^* proseslərinin **kvadratik kovariasiyası** adlanır və

$$[\zeta, \zeta^*]_t = \langle \zeta^c, \zeta^{*c} \rangle_t + \sum_{0 < s \le t} (\Delta\zeta_s)(\Delta\zeta^*_s)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada sağdakı sıra $\mathbf{P}$ – sanki yəqin yığılır.

M.-lar üzrə stoxastik inteqrallar nəzəriyyəsində aşağıdakı **Kunita–Vatanabe bərabərsizlikləri** mühüm rol oynayır:

$$\left| \int_0^\infty H_s K_s\, d\langle \zeta, \zeta^* \rangle_s \right| \le$$

$$\le \left[\int_0^\infty H_s^2\, d\langle \zeta, \zeta \rangle_s \right]^{1/2} \left[\int_0^\infty K_s^2\, d\langle \zeta^*, \zeta^* \rangle_s \right]^{1/2};$$

$$\left| \int_0^\infty H_s K_s\, d[\zeta, \zeta^*]_s \right| \le$$

$$\le \left[\int_0^\infty H_s^2\, d[\zeta, \zeta]_s \right]^{1/2} \left[\int_0^\infty K_s^2\, d[\zeta^*, \zeta^*]_s \right]^{1/2},$$

burada $H, K,$ – $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ – ölçü funksiyalardır.

Fərz olunur ki, $\zeta \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$, $H \in \mathcal{P}$ və

$$\int_0^\infty H_s^2\, d\langle \zeta, \zeta \rangle \in A^+_{loc}.$$

Onda elə yeganə $\zeta^* \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ prosesi vardır ki, bu proses aşağıdakı xassələri ödəyir: ixtiyari $Z \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ üçün

$$\langle \zeta^*, Z \rangle_t = \int_0^t H_s\, d\langle \zeta, Z \rangle_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\Delta\zeta^*_t = H_t \Delta\zeta_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ζ^* prosesi H funksiyasının $\zeta \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ üzrə **stoxastik inteqralı** adlanır və

$$\zeta^*_t = \int_0^t H_s\, d\zeta_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

kimi işarə olunur. Əgər $H \in \mathcal{P}$ və $\mathbf{M} \int_0^\infty H_s^2\, d\langle \zeta, \zeta \rangle_s < \infty$ olarsa, onda

$$\zeta^* = \int H\, d\zeta \in \mathcal{M}^2.$$

Bu inteqralın konstruksiyası mahiyyətcə Viner prosesi üzrə stoxastik inteqralın konstruksiyası ilə üst-üstə düşür.

$\zeta \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, $H \in \mathcal{P}$ funksiyası isə elə olsun ki,

$$\left(\int_0^\infty H_s^2\, d[\zeta, \zeta]_s \right)^{1/2} \in A^+_{loc}$$

olsun. Onda elə yeganə $\zeta^* \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ prosesi vardır ki, bu proses aşağıdakı xassələrə malikdir: ixtiyari $Z \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ üçün

$$[\zeta^*, Z]_t = \int_0^t H_s\, d[\zeta, Z]_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\Delta\zeta^*_t = H_t \Delta\zeta_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ζ^* prosesi ζ lokal M. üzrə H funksiyasının **stoxastik inteqralı** adlanır və

$$\zeta^*_t = \int_0^t H_s\, d\zeta_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

kimi işarə olunur.

Əgər $\zeta \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ olarsa, onda

$$c\mathbf{M}[\zeta, \zeta]^{p/2}_T \le \mathbf{M}(\hat{\zeta}_T)^p \le C\mathbf{M}[\zeta, \zeta]^{p/2}_T, \quad p \ge 1$$

– mühüm rol oynayan **Burkholder–Handi–Devis bərabərsizlikləri** doğrudur, burada $\hat{\zeta}_t = \sup_{s \le t} |\zeta_s|$, $T \in \mathcal{T}$, c, C – universal sabitlərdir.

M. nəzəriyyəsi ilə funksional fəzaların əlaqəsini müəyyən etmək üçün H^p, $p \geq 1$ və BMO (bounded mean oscillation) fəzaları mühüm rol oynamışdır. H^p, $p \geq 1$ elə lokal ζ martinqallar fəzasıdır ki, $\mathbf{M}[\zeta, \zeta]_\infty^{p/2} < \infty$. Bu fəza norması $\|\zeta\|_{H^p} = \mathbf{M}[\zeta, \zeta]_\infty^{p/2}$ kimi təyin olunmuş tam, normalanmış fəzadır. Bu norma $\mathbf{M}(\hat{\zeta}_\infty)^p$ kəmiyyəti ilə təyin olunan normaya ekvivalentdir. $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ fəzası H^1_{loc} fəzası ilə üst-üstə düşür.

ζ müntəzəm inteqrallanan M. olsun. Əgər ixtiyari $T \in \mathscr{T}$ üçün

$$\mathbf{M}[\,|\zeta_\infty - \zeta_T|\,|\mathscr{A}_T] \leq c \quad (\mathbf{P}\text{–sanki yəqin})$$

münasibəti ödənilərsə, ζ martinqalı BMO fəzasındandır, deyilir. Bütün $T \in \mathscr{T}$ üçün bu bərabərsizliyi ödəyən minimal c sabiti $\|\zeta\|_{BMO}$ kimi işarə olunur.

BMO fəzası və H^1 fəzası ikilik xassəliyinə malikdirlər. Doğrudan da, əgər $l(\zeta)$ H^1-də xətti kəsilməz funksionaldırsa, onda elə $\zeta^* \in BMO$, $\|\zeta^*\|_{BMO} \leq 2\|l\|$ vardır ki, $l(\zeta) = \mathbf{M}\,\zeta_\infty \zeta^*_\infty$. Bundan başqa,

$$|l(\zeta)| \leq c\|\zeta\|_{H^1}\|\zeta^*\|_{BMO},$$

c – sabitdir (F e f f e r m a n b ə r a b ə r s i z l i y i).

M. ilə bağlı artan proseslərdən istifadə olunması yuxarıda şərh olunmuş yığılma haqqındakı nəticələri dəqiqləşdirməyə imkan yaratmışdır. $t \to \infty$ olduqda $\{\zeta \to\} = \{\omega : \zeta_t(\omega) \to \zeta_\infty(\omega)\}$, $\zeta_\infty(\omega)$ – sonlu təsadüfi kəmiyyət və $\zeta \in \mathscr{M}^2_{\text{loc}}$ olsun. Onda

1) $\{\langle\zeta, \zeta\rangle_\infty < \infty\} \subseteq \{\zeta \to\}$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin),

2) əgər ixtiyari $S \in \mathscr{T}$ üçün $\mathbf{M}|\Delta\zeta_s|^2 I_{\{s<\infty\}} < \infty$ olarsa, onda $\{\langle\zeta, \zeta\rangle_\infty < \infty\} = \{[\zeta, \zeta]_\infty < \infty\} = \{\zeta \to\}$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin) münasibətləri doğrudur.

$\zeta \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ olduğu halda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1) $\{A_\infty < \infty\} \subseteq \{\zeta \to\}$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin)

2) əgər ixtiyari $S \in \mathscr{T}$ üçün $\mathbf{M}|\Delta\zeta_s|^2 I_{\{s<\infty\}} < \infty$ olarsa, onda $\{A_\infty < \infty\} = \{[\zeta, \zeta]_\infty < \infty\} = \{\zeta \to\}$ ($\mathbf{P}$ – sanki yəqin), burada $A = \langle\zeta^c, \zeta^c\rangle + \widetilde{B}$, $\widetilde{B} \in \mathscr{P} \cap V^+$ elədir ki,

$$\sum_{0<s\leq t} \frac{(\Delta\zeta_s)^2}{1+|\Delta\zeta_s|} - \widetilde{B}_t$$

lokal M.-dır.

Ümumiləşmiş M. nəzəriyyəsinin bir sıra istiqamətləri mövcuddur: vektorqiymətli M. nəzəriyyəsi (məs., Banax qiymətli M. nəzəriyyəsi) və operatorqiymətli M. nəzəriyyəsi; T – qismən nizamlanmış çoxluqla M. nəzəriyyəsi (məs., $T = \mathbb{R}^2_+$, $T = \mathbb{N}^2$; $T = \mathbb{R}^2_+$ halı ən çox araşdırılan hallardandır, bax, [11]) və b.

Əd.: [1] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] М е й е р П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] D e l l a c h e r i e C, M e y e r P.-A., Probabilités et potentiel. Théorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80; [4] J a c o d J., «Lect. Notes Math.», 1979, № 714; [5] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [6] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [7] Г р и г е л и о н и с Б., М и к у л я в и ч ю с Р., «Лит. матем. сб.», 1981, т. 21, № 3, с. 1–24; [8] Г а л ь ч у к Л. И., «Матем. сб.», 1980, т. 112, № 4, с. 483–521; [9] L e n g l a r t E., «Lect. Notes Math.», 1980, № 784, p. 500–46; [10] M e t i v i e r M., Semimartingales, B. – N., Y., 1982; [11] C a i r o l i R., W a l s h J. B., «Acta math.», 1975, t. 134, № 1–2, p. 111–83; [12] Ж а к о д Ж., Ш и р я е в А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

MARTİNQAL d a y a n d ı r ı l m ı ş **« мартингал** o c т а н о в л е н н ы й; s t o p p e d **martingale »** – bax, *Martinqal.*

MARTİNQAL; k v a d r a t i k x a r a k t e r i s t i k a **« мартингал;** к в а д р а т и ч е с к а я х а р а к т е р и с т и к а; **martingale;** q u a d r a t i c c h a r a c t e r i s t i c o f **»**, $X = (X_t)$, $t \in T$ *kvadratik inteqrallanan martinqalının* ($\mathbf{M} \sup_t |X_t|^2 < \infty$) ö n g ö r ü l k v a d r a t i k v a r i a s i y a s ı, – elə $\langle X \rangle$, $\langle X \rangle_0^t = 0$ ($\langle X, X \rangle$ kimi də işarə olunan) prosesidir ki, bu proses artandır ($s \leq t$ olduqda, $\langle X \rangle_s \leq \langle X_t \rangle$), öngörüldür, inteqrallanandır ($\mathbf{M}\langle X \rangle_\infty < \infty$), $X^2 - \langle X \rangle$ fərqi müntəzəm inteqrallanan M.-dır. $\langle X \rangle$ kvadratik xarakteristikası lokal kvadratik inteqrallanan X martinqalı üçün də təyin olunur. Lokal kvadratik inteqrallanan X, Y M.-ları üçün onların q a r ş ı l ı q l ı k v a d r a t i k x a r a k t e r i s t i k a s ı (və ya ö n g ö r ü l k v a d r a t i k k o v a r i a s i y a) –

$$\langle X, Y \rangle = (\langle X+Y, X+Y \rangle - \langle X-Y, X-Y \rangle)/4$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $\langle X, Y \rangle$ prosesinə deyilir.

Əd.: [1] M e y e r P.-A., «Lect. Notes in Math.», 1976, № 511, p. 246–400; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

MARTİNQAL k v a d r a t i k i n t e q r a l l a n a n **« мартингал** к в а д р а т и ч н о и н т е г р и р у е м ы й; s q u a r e - i n t e g r a b l e **martingale »** – bax, *Kvadratik inteqrallanan martinqal.*

MARTİNQAL; k v a d r a t i k v a r i a s i y a **« мартингал;** к в а д р а т и ч е с к а я в а р и а ц и я; **martingale;** q u a d r a t i c v a r i a t i o n o f **»**, o p s i o n a l k v a d r a t i k v a r i a s i y a – $X = (X_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ martinqalının (lokal)

$$[X, X]_t = \langle X^c \rangle_t + \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2$$

bərabərliyi ilə təyin olunan variasiyası – $[X, X]$-dir, burada $\langle X \rangle$, – lokal X martinqalının ayrılışındakı kəsilməz X^c həddinin kvadratik xarakteristikasıdır, $\Delta X_s = X_s - X_{s^-}$; $\sum_{s\leq t} (\Delta X_s)^2$ sırası ixtiyari $t \in \mathbb{R}_+$ üçün 1 ehtimalla yığılır. Əgər X, Y lokal

M.-lar olarsa, onda $[X, Y]$ kvadratik kovariasiyası

$$[X, Y] = ([X+Y, X+Y] - [X-Y, X-Y])/4$$

düsturu ilə təyin olunur (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Meyer P.-A., «Lect. Notes in Math.», 1976, № 511, p. 246–400; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

MARTİNQAL; limit teoremləri « **мартингал;** предельные теоремы; limit theorems for **martingale** » – bax, *Limit teoremləri* martinqal və semimartinqallar üçün.

MARTİNQAL lokal « **мартингал** локальный; local **martingale** » – bax, *Lokal martinqal*.

MARTİNQAL; moment eynilikləri « **мартингал;** моментные тождества; moment identifies for **martingale** » – *martinqalın momentləri* və onun xarakteristikaları arasında münasibətlərdir. m_t, – $\mathscr{A}_t$, $t \geq 0$ σ – cəbrlər axınına nəzərən birölçülü M. olsun. M.-ın xarakteristikalarına (öngörül) bəzi şərtlərlə m_t -nin xarakteristikaları üzrə təyin olunan əmsallarlı, m_t -yə görə n tərtib polinom olan lokal $V_n(m_t, t)$ M.-nı təyin etmək olar. Əgər T $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anı olduqda $V_n(m_{t\wedge T}, t\wedge T)$ dayandırılmış prosesi t parametri üzrə müntəzəm inteqrallanan proses olarsa, onda

$$\mathbf{M}[V_n(m_T, T) - V_n(m_0, 0)] = 0 \qquad (*)$$

moment eyniliyi doğrudur. $\langle m \rangle_t$ M.-ın kvadratik xarakteristikası olduqda, $V_1(m_t) = m_t$, $V_2(m_t) = (m_t)^2 - \langle m \rangle_t$ eynilikləri doğrudur; bu halda (*) eyniliyinin ödənilməsi üçün uyğun olaraq, $\mathbf{M}(\langle m \rangle_T)^{1/2} < \infty$ və $\mathbf{M}\langle m \rangle_T < \infty$ şərtlərinin ödənilməsi kafidir.

$n > 2$ olduqda, m_t sıçrayışlar ölçüsünün t üzrə kəsilməz kompensatorlu stoxastik inteqral tip M. halı üçün $V_n(m_t, t)$ prosesinin şəkli [1] – [2]-də təsvir olunmuşdur. Məsələn, əgər m_t standart Viner prosesi üzrə stoxastik inteqral olarsa, onda

$$V_n(m_t, t) = H_n\{m_t / \langle m \rangle_t^{1/2}\} \langle m \rangle_t^{n/2}, \; n = 1, 2, \ldots$$

olur, burada $H_n\{x\}$ – Hermit çoxhədlisidir (çəki funksiyası $\exp\{-x^2/2\}$ olan); bu zaman (*) eyniliyinin doğruluğu üçün $\mathbf{M}\langle m \rangle_T^{n/2} < \infty$ şərtinin ödənilməsi kafidir.

Əd.: [1] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972; [2] Новиков А. А., «Матем. заметки», 1984, т. 35, в. 3, с. 455–71.

MARTİNQAL; öngörül xarakteristika « **мартингал;** предсказуемая характеристика; **martingale;** predictable characteristic of » – bax, *Martinqal*.

MARTİNQAL; öngörül kvadratik variasiya « **мартингал;** предсказуемая квадратическая вариация; **martingale;** predictable quadratic variation of » – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika.

MARTİNQAL ÇEVİRMƏSİ « мартингальное преобразование; martingale transformation », (diskret zamanlı) $(\zeta_n, \mathscr{A}_n)_{n\geq 0}$ martinqalının $(V_n, \mathscr{A}_{n-1})_{n\geq 0}$ öngörül ardıcıllığının köməyilə M. ç. elə $(V \cdot \zeta_n)_{n\geq 0}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır ki, bunlar üçün

$$V \cdot \zeta_n = V_0\zeta_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(\zeta_k - \zeta_{k-1})$$

bərabərliyi ödənilir. Kəsilməz zaman halında M. ç.-nin analoqu martinqal üzrə stoxastik inteqraldır. Diskret zaman halında və sıfır başlanğıc şərtlərində lokal martinqallar və ümumi martinqalların M. ç.-nin topluları üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

MARTİNQAL PROBLEMİ « мартингалов проблема; martingale problem » – *stoxastik differensial tənliklərin* zəif həllərinin varlığı probleminin ekvivalentidir. Fərz olunur ki: 1) $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ filtrasiyalı ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzası; 2) hər hansı $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{A}_0$ σ – cəbrində $\mathbf{P}_H$ ehtimal ölçüsü; 3) $D[0, \infty)$ – trayektoriyaları Skoroxod fəzasından olan $\zeta = (\zeta_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{A}$ – uzlaşmış (vektor) prosesi verilmişdir. Əgər $\mathbf{P}$ ölçüsünün $\mathscr{H}$ σ – cəbrinə daralması P_H ölçüsü ilə üst-üstə düşərsə, ζ prosesi stoxastik $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P})$ bazisində lokal martinqal olarsa, $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü martinqallar probleminin həlli adlanır.

M. p.-nin ən sadə həlləri Viner və Puasson ölçüləridir. Bu hallarda $\mathscr{H} = (\varnothing, \Omega)$; Viner ölçüsü $\mathbf{P}^w$ isə o xassəsilə səciyyəvidir ki, ζ kəsilməz lokal martinqaldır və $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, $Y_t = \zeta_t^2 - t$, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P}^w)$ stoxastik bazisində lokal martinqaldır, Puasson ölçüsü $\mathbf{P}^\pi$-nin daşıyıcısı $D\{1\}$, – $D[0, \infty)$-dan hissəvi sabit funksiyalar fəzasıdır və bu funksiyalar sıfır nöqtəsindən başlanır, sıçrayışların ölçüsü vahidə bərabərdir və o, aşağıdakı xassə ilə səciyyələnir ki, $Y_t = \zeta_t - t$ bərabərliyi ilə verilən $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ martinqalı $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P}^\pi)$ stoxastik bazisində lokal martinqaldır. Bu və digər misallar semimartinqallar üçün onun öngörül xarakteristikalarının (B, C, ν) tripleti terminlərində M. p.-nin həllərinin məhz xüsusi hallarıdır, burada $B = (B_t)_{t\geq 0}$, – $\mathbb{A}$ – öngörül sağdan kəsilməz, hər bir sonlu intervalda sonlu variasiyalı proses, $C = (C_t)_{t\geq 0}$, – $\mathbb{A}$ – uzlaşmış kəsilməz artan proses (semimartinqalın ayrılışındakı kəsilməz martinqal komponentin kvadratik xarakteristikası), $\nu = \nu(dt, dx)$ – semimartinqal sıçrayışlar ölçüsünün $\mathbb{A}$ – kompensatorudur.

(B, C, ν) – yuxarıda qeyd olunan xassələrli öngörül xarakteristikalar tripleti, $\mathbf{P}_H$, – $(\Omega, \mathscr{H})$-da ehtimal fəzası olsun. ζ, $\mathscr{H}$ və $(\mathbf{P}_H; B, C, \nu)$ üçün M. p.-nin həlli $(\Omega, \mathscr{A})$-da elə $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsüdür ki, $\mathbf{P}$-nin $\mathscr{H}$-da daralması $\mathbf{P}_H$ ilə üst-üstə düşür və $\zeta = (\zeta_t)_{t\geq 0}$ öngörül xarakteristikalar tripleti (B, C, ν) olan

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində semimartinqaldır. Xüsusi halda, əgər $\nu \equiv 0$ və

$$B_t = \int_0^t b(s, \zeta_s)ds, \quad C_t = \int_0^t c(s, \zeta_s)ds, \quad c(\cdot, \cdot) \geq 0$$

olarsa, onda M. p.-nin həlli

$$d\xi_t = b(t, \xi_t)dt + c^{1/2}(t, \xi_t)d\boldsymbol{w}_t$$

$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesinə nəzərən İto stoxastik differensial tənliyinin zəif həllinin varlığı probleminə ekvivalentdir; burada $b(s, x)$ və $c(s, x)$ – ölçülən funksiyalardır.

Əd.: [1] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [2] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [3] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случаяных процессов, пер. с англ., M., 1994.

MASSE KRİTERİSİ « Масса критерий; Masset criterion » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

MEDİAN « медиана; median » – təsadüfi kəmiyyətin ehtimal *paylanmasının* ədəd oxu üzərində ədədi xarakteristikasıdır. ξ – paylanma funksiyası $F(x)$ olan təsadüfi kəmiyyət olsun. $\mathbf{P}\{\xi \geq m\} \geq 1/2$ və $\mathbf{P}\{\xi \leq m\} \geq 1/2$ münasibətlərinin ödənilməsini təmin edən ixtiyari m ədədinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin (və ya F paylanmasının) mediana deyilir. M. həmişə vardır, lakin, ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur. Riyazi gözləmə ilə yanaşı M. təsadüfi kəmiyyətin ədəd oxu üzərində mühüm yerləşmə xarakteristikasıdır və bir çox hallarda mərkəzləndirmədə istifadə olunur.

Riyazi statistikada müşahidələrin asılı olmayan nəticələri $X_1, \ldots, X_n$ üzrə M.-nın statistik qiyməti kimi seçimi mediandan istifadə olunur; bu statistik qiymət uyğun $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ variasion sırası əsasında təyin olunan mediandır: əgər $n = 2k+1$ olarsa, yəni n tək olarsa, $X_{(k+1)}$, $n = 2k$ cüt olarsa, $(X_{(k)} + X_{(k+1)})/2$ ədədi seçimi M. kimi istifadə olunur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., M., 1975.

MEDİAN – MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT « медианно несмещенная оценка; median – unbiased estimator » – medianı qiymətləndiriləcək təsadüfi kəmiyyətin özü ilə üst-üstə düşən *statistik qiymətdir.* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbf{P}_\theta)$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi elementinin realizasiyaları üzrə θ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur, $\theta \in \Theta$. Fərz olunur ki, $T = T(X)$ θ parametri üçün X -in müşahidələri üzrə qurulmuş statistik qiymətdir və $\mathrm{med}_\theta T(X)$ T statistik qiymətinin medianıdır. Əgər $\mathrm{med}_\theta T(X) = \theta$ bərabərliyi bütün $\theta \in \Theta$ üçün ödənilərsə, onda T θ parametrinin median – meylsiz statistik qiyməti adlanır. [1]-ə görə θ parametrinin statistik qiyməti T, əgər $\mathbf{M}_\theta L(T, \theta) \leq \mathbf{M}_\theta L(T, \theta')$ bərabərsizliyi bütün $\theta' \neq \theta$ üçün ödənilərsə, $\mathbf{M}_\theta L(T, \theta)$ risk funksiyasına nəzərən meylsiz statistik qiymət adlanır, burada $L(T, \theta)$ – əvvəlcədən seçilmiş itki funksiyasıdır. Məs., $L = |T - \theta|$ olsun, onda $\mathbf{M}_\theta |T| < \infty$ şərtini ödəyən ixtiyari T statistik qiyməti üçün median – meylsizlik anlayışı və $\mathbf{M}_\theta |T - \theta|$ risk funksiyasına nəzərən meylsizlik anlayışları üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., M., 1979; [2] Voronov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their application, v. 1 – Univariale Case, Dordrect, 1993.

MELLİN – STİLTYES ÇEVİRMƏSİ « Меллина – Стилтьеса преобразование; Mellin – Stieltjes transform » – mənfi olmayan ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası F_ξ -nin aşağıdakı şəkildə inteqral çevirməsidir:

$$\mu_\xi(s) = \mathbf{M}\xi^s = \int_{+0}^{\infty} x^s \, dF_\xi(x)$$

və bu çevirməyə $\alpha, \beta \geq 0$ üçün hər hansı $-\alpha \leq \mathrm{Re}\, s \leq \beta$ zolağından olan kompleks s -lər üçün də baxılır. $s = it$ qiymətləri üçün $(t \in \mathbb{R}^1)$ M. – S. ç. həmişə vardır və $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 0$ olduqda o, $\log \xi$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası ilə üst-üstə düşür. Əgər F_ξ -nin sıxlıq funksiyası p_ξ olarsa, onda $\mu_\xi(s-1)$ analitik funksiyalar nəzəriyyəsində istifadə olunan, p_ξ funksiyasının Mellin çevirməsi ilə üst-üstə düşür. Təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulması sxemində, mənfi təsadüfi kəmiyyətlər üçün M. – S. ç. ümumi halda xarakteristik çevirmələrin rolunu ifadə edir. F_ξ paylanma funksiyasının Laplas – Stiltyes çevirməsi $\varphi_\xi(q) = \mathbf{M}\exp(-q\xi)$ ilə M. – S. ç.

$$\Gamma(1-s)\mu_\xi(s) + \int_0^\infty x^{-s} d\varphi_\xi(x) = 0,$$

$$-\alpha \leq \mathrm{Re}\, s \leq \min(1, \beta)$$

bərabərliyi ilə bağlıdır.

Əd.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., M. – Л., 1948; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, M., 1984; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 4, с. 444–69.

MELLOUS C_p – KRİTERİSİ « Мэллоуса C_p – критерий; Mallows C_p – criterion » – bax, *Predikторların ən yaxşı altçoxluğunun seçilməsi.*

MEŞƏ təsadüfi **« лес** случайный; random **forest »** – bax, *Təsadüfi meşə.*

METAN TEOREMİ « Метьı теорема; Mehta theorem » təsadüfi determinantlar üçün – bax, *Təsadüfi determinant.*

METEOROLOJİ İNFORMASİYANIN OPTİMAL İSTİFADƏSİ « метеорологической информации оптимальное использование; optimal use of meteorological information » – qeyri – müəyyən hava şəraitində qəbul olunan qərarların maksimal nəticəliyini təmin edən, meteoroloji informasiyanın təsvir formasını və ya qəbulolunma prosedurunu istehlakçının təsərrüfat tələblərinə uyğunlaşdıran

razılaşmadır. M. i. o. i. spesializasiya məsələləri və meteoroloji informasiyanın iqtisadi effektivlik qiymətlərilə sıx əlaqədardır.

M. i. o. i. üçün alqoritmlər statistik həllər nəzəriyyəsinə və «hava – meteoroloji informasiya (proqnozçu) – istehlakçı» sistemlərinin analizində tətbiq olunan digər statistik metodlara əsaslanır. Riyazi təsvirdə aşağıdakılar təyin olunur: meteoroloji vəziyyətlər çoxluğu F (bu vəziyyətlərdəki dəyişmələrə isteklakçı çox həssas olur); istehlakçının mümkün qərarları (həlləri) d -lərin çoxluğu; uduş (ziyan) funksiyası $u = u(F, d)$; məqbul strategiyalar çoxluğu S (bu strategiyalardan hər biri meteoroloji informasiyanın istifadə qaydasını təyin edir); optimallıq kriterisi. Optimal strategiyanın seçilməsi, bir qayda olaraq, Beyes yanaşmasına əsaslanır, yəni uduşun orta qiyməti statistik mənada maksimallaşdırılır və ya istehlakçının ziyanının orta qiyməti statistik mənada minimallaşdırılır. İnvariant kriteri meteoroloji itkilərin orta qiymətlərinin minimizasiyasıdır (bax, *Meteoroloji itkilər funksiyası*). Məsələn, istehlakçının itki funksiyası fərq – xətti funksiya olarsa, normal qanunla paylanmış x meteoelementinin reqression proqnozu x^* -nun istifadəsi üçün optimal strategiya x^* proqnozundan bir qədər fərqli $a = x^* + t_0 \sigma\sqrt{1-\rho^2}$ qiymətinə uyğunlaşan həllin qəbul edilməsinə gətirilir, burada σ, – x -in standart yayınmasıdır; ρ, – x və x^* arasında korrelyasiya əmsalıdır; t – yerinidəyişmə parametri olub, müxtəlif işarəli $\Delta = x - a$ xətalarının təsərrüfat «çəkilərinin» münasibətindən asılıdır.

M. i. o. i.-nin nəzəriyyə və metodları ilə: 1) istehlakçının qərarlarını (həllini) optimallaşdırmaq; 2) xüsusiləşdirilmiş meteoroloji təminatın optimal texnologiyasını qurmaq; 3) proqnozların özünü doğrultması üçün təsərrüfat baxımından əsaslandırılmış tələbləri ifadə etmək; 4) meteoroloji informasiyanın müxtəlif növlərinin potensial effektivliyini qiymətləndirmək mümkündür (bax, *Faydalılıq*(ğ ı) p r o q n o z u n). Qeyd olunmuş məsələlərə tətbiqi meteorologiyanın (i q t i s a d i m e t e o r o l o g i y a) müstəqil oblastı kimi baxmaq olar.

Əd.: [1] Б а г р о в Н. А., «Метеорология и гидрология», 1966, № 2, с. 3–12; [2] Ж у к о в с к и й Е. Е., Ч у д н о в с к и й А. Ф., Методы оптимального использования метеорологической информации при принятия решений, Л., 1978; [3] Ж у к о в с к и й Е. Е., Метеорологическая информация и экономические решения, Л., 1981; [4] М о н и н А. С., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1972, № 2, с. 218–28; [5] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339–49; [6] О м ш а н с к и й М. А., «Ж. геофизики», 1933, в. 4, с. 489–99; [7] M u r p h y A. H., «Mon. Wea. Rev.», 1977, № 7, p. 803–16.

METEOROLOJİ İTKİLƏR FUNKSİYASI « метеорологических потерь функция; meteorological loss function » – hava şəraiti F -ə nəzərən ən əlverişli sayılan təsərrüfat həlli $d_0(F)$ əvəzinə hər hansı başqa $d \in \Omega_d$ həlli götürüldükdə, meteoroloji informasiyadan istehlakçının qazancının nə dərəcədə azalacağı və ya itkisinin nə dərəcədə artacağını göstərən, mənfi olmayan $r(F, d)$ funksiyasıdır, burada Ω_d – məqbul həllər çoxluğudur (bax, [1], [2]). Planlaşdırma gözlənilən hava şəraiti əsasında aparıldığı halda gözlənilən hava şəraitinin faktiki hava şəraitindən yayınmaları nəticəsində yaranan ziyanı M. i. f. təyin edilir.

M. i. f. $r(F, d)$ ilə f a y d a l ı l ı q f u n k s i y a s ı $u(F, d)$ birqiymətli əlaqəlidir; $u(F, d)$ funksiyası konkret istehlakçı üçün (F, d) hadisələr cütü çoxluğunda müəyyən üstünlük şkalasını müəyyənləşdirir. u -nun artması ilə faydalılıq artırsa, onda $r(F, d) = u(F, d_0) - u(F, d)$ götürülür, burada $u(F, d_0) = \max\limits_{\Omega_d} u(F, d)$; əgər u artdıqca faydalılıq azalırsa, onda $r(F, d) = u(F, d) - u(F, d_0)$ götürülür, bu halda $u(F, d_0) = \min\limits_{\Omega_d} u(F, d)$. Bir sıra hallarda M. i. f. $r = r(x, a)$ kimi ifadə oluna bilər, bu halda x – təsiredici meteoroloji X elementinin (temperatur, yağıntı, külək və s.) faktiki qiyməti, a X -in elə qiymətidir ki, bu qiymət əsasında qərar (həll) qəbul olunur. M. i. f.-ları $r(x, a) = \varphi(x - a)$ olan m e t e o r o l o j i i t k i l ə r i n f ə r q l ə r f u n k s i y a l a r ı sinfi maraqlıdır. Məs.,

$$r(x-a) = \begin{cases} A_1(a-x), & x \le a \text{ olarsa,} \\ A_2(x-a), & x > a \text{ olarsa} \end{cases}$$

funksiyası belələrindəndir, burada A_1, A_2 – müxtəlif işarəli $\Delta = x - a$ vahid qiymətli yayınmaların təsərrüfat əhəmiyyətini xarakterizə edən çəki əmsallarıdır.

$R = \mathbf{M} r(F, d)$ m e t e o r o l o j i i t k i l ə r i n o r t a q i y m ə t i [ortalama təsadüfi hadisələr cütləri (F, d) -lərin ehtimal paylanmaları üzrə aparılır], adətən, keyfiyyət göstəricisi kimi meteoroloji informasiya əsasında qərarlar (həllər) qəbul edilməsində müxtəlif strategiyaların tutuşdurulması üçün istifadə olunur. Optimal strategiyanın seçilməsi R kəmiyyətinin minimizasiya şərtindən həyata keçirilir.

M. i. f. və meteoroloji itkilər üçün orta qiymətlər «təəssüf funksiyası» və «orta Beyes riski» kimi, *statistik həllər nəzəriyyəsində* istifadə olunan ümumi anlayışların analoqlarıdır (bax, məs., [3], [4]).

Əd.: [1] Г а н д и н Л. С., Ж у к о в с к и й Е. Е., «Метеорология и гидрология», 1973, № 2, с. 18–26; [2] Ж у к о в с к и й Е. Е., Ч у д н о в с к и й А. Ф., Методы оптимального использования метеорологической информации при принятии решений, Л., 1978; [3] Ч е р н о в Г., М о з е с Л., Элементарная теория статистических решений, пер. с англ., М., 1962; [4] Д е Г р о о т М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974.

METEOROLOJİ ÖLÇMƏLƏRİN STATİSTİK NƏZƏRİYYƏSİ « метеорологических измерений статистическая теория; statistical theory of meteorological measurement » – turbulentliyin statistik təsviri və alınan nəticələrin dəqiqlik qiymətlərinin statistik kriterilərinə əsaslanan turbulent atmosfer parametrlərinin ölçmə nəzəriyyəsidir.

M. ö. s. n.-ndə ölçüləcək $x = x(t)$ kəmiyyəti (temperatur, havanın rütubəti, küləyin sürəti və s.) müəyyən statistik strukturlu $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin realizasiyası kimi anlaşılır. Adətən, bu məqsədlə stasionar təsadüfi proseslər modeli istifadə olunur; qeyri – stasionar modellər, məs., ölçüləcək kəmiyyətin bütün gün ərzində (24 saat) dəyişmələrini nəzərə alan modellər az hallarda tətbiq olunur. Meteoroloji spektrlər xüsusi xassələrə malik olduqlarından (bax, məs., [1]) $\zeta(t)$ prosesinin bir sıra hallarda olduqca müxtəlif tezlik xarakteristikalarlı: turbulent pulsasiyalı «sürətli» komponent və nisbətən «yavaş», yəni baxılan meteoroloji elementin daha da uzun çəkən dəyişmələrini təsvir edən komponent kimi statistik asılı olmayan iki toplananın cəmi şəklində ifadə oluna bilməsi fərz olunur.

M. ö. s. n.-ndə meteoroloji xarakteristikaları ölçmə proseduru bir çox hallarda $\zeta(t)$ təsadüfi meteoroloji prosesinin, $\zeta(t)$ -ni ölçmə nəticəsində, $\mathrm{Z}(t)$ -yə çevirən Φ filtrindən keçməsi kimi

interpretasiya olunur (bax, [2] – [4]). Ümumi halda, $\mathrm{Z}(t) = \Phi\{\zeta(\tau)\}$ çevirməsi ölçmə sisteminin həyata keçirdiyi fiziki əməliyyatlardan başqa, verilənlər üzərində yenidən işlənilmələrlə bağlı, məs., hamarlama, zaman diskretizasiyası, səviyyə üzrə kvantlama, interpolyasiya, diskret hesabatlar üzrə xüsusi statistik işləmələrlə bağlı bir sıra digər əməliyyatlar da həyata keçirir.

Xətti cihazla $\zeta(t)$ prosesini ölçmə üçün rejimi təsvir edən ən sadə model – $\mathrm{Z}(t)$ çevirməsi

$$\mathrm{Z}(t) = \int_0^\infty h(\tau)\,\zeta(t-\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunan modeldir, burada $h(\tau)$ – uyğun ölçmə cihazının çəki (impuls keçid) funksiyasıdır. Meteoroloji cihazların əksəriyyəti üçün (bax, məs., [2], [5])

$$h(\tau) = \frac{1}{T_0}\exp(-\tau/T_0) \qquad (2)$$

götürmək olar. Bu halda T_0 kəmiyyəti ölçmə cihazının inersiyasını xarakterizə edir və onun zaman sabiti adlanır.

M. ö. s. n.-ndə alınan nəticələrin dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün, adətən, xətanın kvadrat ortası –

$$\mathbf{M}\Delta^2(t) = \mathbf{M}[\,\mathrm{Z}(t) - G(t)]^2 \qquad (3)$$

kəmiyyətindən istifadə olunur, burada $G(t) = A\{\zeta(\tau)\}$ – ölçmə zamanı təyin olunması tələb olunan kəmiyyətdir [məs., $G(t) = \zeta(t)$ meteoroloji elementinin ani qiymətlərini ölçdükdə; əgər meteoroloji elementin orta qiyməti T müddəti üçün təyin olunursa, onda $G(t) = (1/T)\int_{t-T}^{t} \zeta(\tau)\,d\tau$ və s.].

$\mathbf{M}\Delta^2(t)$ xətası t-dən asılı olduqda ölçmə dəqiqliyi əksər hallarda $\mathbf{M}\Delta^2(t)$ kəmiyyətinin maksimal $(\mathbf{M}\Delta^2)_{\max}$ və ya orta $(\mathbf{M}\Delta^2)_{\text{or.}}$ qiymətilə, müəyyən $[t_1, t_2]$ müddəti üçün qiymətləndirilir.

M. ö. s. n.-nin köməyilə ölçmələrin optimizasiyası məsələlərinin bir çoxu olduqca sadə həll olunur, məsələn, ölçmə sisteminin optimal parametrlərini tapmaq kimi məsələ. M. ö. s. n. əsasında həll olunan optimizasiya məsələlərinin digər sinfi, meteoroloji ölçmə nəticələrinin optimal interpretasiyası adlandırılan interpretasiya ilə bağlıdır (bax, [5]). Bu halda ölçmə sisteminin (yəni Φ operatorunun) xarakteristikalarının, həmçinin A operatorunun ümumi şəklinin məlum olduğu hesab edilir və $G(t) = A\{\zeta(\tau)\}$ kəmiyyətinin $\mathrm{Z}(t) = \Phi\{\zeta(\tau)\}$ çevirməsinə ən yaxın olmasını təmin edən (A operatorunun) parametrlərin tapılması məsələsi qoyulur. Bu növ tipik məsələ – inersion meteoroloji cihazın köməyilə aparılan ölçmə nəticələrinin optimal interpretasiyası məsələsidir. Məsələn, əgər ölçmənin məqsədi eksponensial korrelyasiya funksiyası $r_{xx}(\tau) = \exp(-|\tau|\,T_x)$ olan stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin ani qiymətlərini müəyyən etməkdən ibarətdirsə, onda [7]-yə əsasən, (3) xətasının kvadrat ortasının minimumu o halda alınacaqdır ki, çəki funksiyası (2) olan xətti cihazın cari t anında göstəricisi z daha əvvəllərdəki zaman anı $t' = t - \Delta t$-dəki qiymətinə bərabər götürülsün, burada Δt aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\Delta t = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\ln\frac{2}{\varkappa+1}\right)T_x, \quad \varkappa = T_0/T_x\,. \qquad (4)$$

Həmin cihazdan $[t-T,\ t]$ zaman intervalı üzrə orta qiymət təyin etmək üçün meteoroloji proseslərin geniş sinfi üçün T-ni təqribən $1{,}7\,T_0$ götürmək məqsədə uyğundur.

Ümummetodik cəhətdən M. ö. s. n.-nə fiziki ölçmələr üçün ümumi statistik nəzəriyyənin tətbiqlərindən biri kimi baxmaq olar (bax, məs., [8] – [10]). M. ö. s. n.-nin istifadəsinə aid konkret nəticələr [4] – [7]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Л а м л и Д ж., П а н о в с к и й Г., Структура атмосферной турбулентности, пер. с англ., М., 1966; [2] H a l l F., «J. Meteor.», 1950, v. 7, № 2, p. 121–29; [3] P e t e r s e n D. P., M i d d l e t o n D., «Tellus», 1963, v. 15, № 4, p. 387–405; [4] П е р с и н С. М., Основы теории и проектирования автоматических измерительных систем, Л., 1975; [5] Я г л о м А. М., «Труды Геофиз. ин-та АН СССР», 1954, в. 24(151), с. 112–62; [6] Г а н д и н Л. С., К а г а н Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976; [7] Ж у к о в с к и й Е. Е., К и с е л е в а Т. Л., М а н д е л ь ш т а м С. М., Статистический анализ случайных процессов в приложении к агрофизике и агрометеорологии, Л., 1976; [8] M c C o m b i e C. W., «Rep. Progress Phys.», 1953, v. 16, p. 266–320; [9] Н е м и р о в с к и й А. С., Вероятностные методы в измерительной технике, М., 1964; [10] Н о в и ц к и й П. В., Основы информационной теории измерительных устройств, Л., 1968.

METEOROLOJİ PROQNOZ a l t e r n a t i v **« метеорологический прогноз** а л ь т е р н а т и в н ы й; **forecast of meteorological** b i n a r y v a r i a b l e s o r e v e n t **»** – bax, *Alternativ meteoroloji proqnoz.*

METEOROLOJİ ZAMAN SIRALARININ ƏLAQƏLİLİYİ « метеорологических временных рядов связность; connectedness of meteorological time series » – zaman üzrə dəyişən hər hansı meteoroloji $x(t)$ kəmiyyətinin ardıcıl müşahidə olunmuş bir sıra qiymətləri – $x(t_0)$, $x(t_1)$, ... (bunlar alınan müşahidə nəticələrinin üzərində yenidən işlənilməklə də götürülə bilinər) kəmiyyətlərinin bir-birilə korrelyarlığıdır (və ya ümumiyyətlə, bir-birindən statistik asılılığıdır). Adətən, $x(t)$-yə təsadüfi prosesin realizasiyası kimi baxmaq olar (bu prosesi stasionar hesab etmək olar); bu halda M. z. s. ə., bir qayda olaraq, ona gətirir ki, baxılan və $X(t)$ prosesinin ehtimal xarakteristikalarının qiymətləndirilməsində istifadə olunan sonlu $x(t_0), \ldots, x(t_{n-1})$ seçimi eyni həcmli asılı olmayan müşahidələr ardıcıllığı ilə müqayisədə daha az informativ olur (yəni dəqiqliyi daha az olan statistik qiymətlərin alınması ilə səciyyəvi olur). Məs., əgər $X(t)$ riyazi gözləməsi $\mathbf{M}X(t) = m$, dispersiyası $\mathbf{M}[X(t) - m]^2 = \mathbf{D}_x$ və normalanmış korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}[X(t+\tau) - m][X(t) - m]/\mathbf{D}_x = r(\tau)$ düsturu ilə təyin olunan stasionar təsadüfi proses, $x(t_0), \ldots, x(t_{n-1})$ qiymətləri isə $(t_i = t_0 + i\Delta t)$

$$m^* = 1/n\sum_{j=0}^{n-1} x(t_j)$$

ədədi orta statistik qiymətinin qurulmasında istifadə olunarsa, onda m^* statistik qiymətinin dispersiyası aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\mathbf{D}_{m^*} = \mathbf{D}_x \lambda(n)/n ,$$

$$\lambda(n) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} (1-k/n)\, r(k\,\Delta(t)) \qquad (1)$$

(bax, məs., [1], [3], [4]), burada $\lambda(n)$ vuruğu $\mathbf{D}_{m^*}$-nun qiymətinin n sayda asılı olmayan müşahidələr üzrə hesablanmış ədədi orta statistik qiymətinin dispersiyasından fərqini xarakterizə edən kəmiyyət olub, demək olar ki, həmişə vahiddən böyük olur. $\mathbf{D}_{m^*}$ üçün (1) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\mathbf{D}_{m^*} = \mathbf{D}_x / n_e , \quad n_e = n/\lambda(n), \qquad (2)$$

burada n_e – asılı olmayan müşahidələr sayıdır və müşahidələr nəticəsində m^* üçün alınan dispersiya baxılan seçimi dispersiya ilə eynidir (bax, *Asılı olmayan sınaqların effektiv / ekvivalent sayı*). Praktikada tez-tez təsadüf olunan hallarda, $r(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ olduqda, (1)-dən aşağıdakı düstur alınır.

$$\lambda(n) = (1+p)/(1-p) - 2\rho(1-\rho^n)/n(1-\rho^2),$$
$$\rho = e^{-\alpha\Delta t} \qquad (3)$$

(bax, məs., [2], [6]). n-in böyük qiymətlərində (3)-ün sağ tərəfindəki toplananı nəzərə almamaq olar, odur ki, bu halda

$$\lambda(n) \approx (1+\rho)/(1-\rho),$$
$$n_e \approx n(1-\rho)/(1+\rho)$$

olur.

Meteoroloji qiymətlərin gün ərzində orta qiymətləri ardıcıllığı üçün uyğun M. z. s. ə., əksər hallarda, olduqca mühüm əhəmiyyət kəsb edir, belə ki, bu halda n_e-nin qiyməti n-dən olduqca kiçik olur (müqayisə et, [8]), belə sıralar üçün $n_e = n/3$ götürülməsi məsləhət görülür. Orta qiymətin, dispersiyanın və fluktuasiya edən meteoroloji kəmiyyətlərin statistik qiymətlərinin dəqiqliyinin analizində M. z. s. ə. haqqında bax, [3] – [7], [9].

Ədd.: [1] Виленкин С. Я., Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования, М., 1967; [2] Гандин Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963; [3] Жуковский Е. Е., Киселева Т. Л., Мандельштам С. М., Статистический анализ случайных процессов в приложении к агрофизике и агрометеорологии, Л., 1976; [4] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [5] Крылов Е. В., Марченко А. С, «Тр. научно-исслед. Ин.-та аэроклиматологии», М., 1967, в. 48, с. 28–35; [6] Марченко А., «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1965, т. 1, № 9, с. 906–13; [7] Маталас Н., в сб.: Статистические методы в гидрологии, пер. с англ., Л., 1970, с. 177–213; [8] Пановский Г. А., Брайер Г. В., Статистические методы в метеорологии, пер. с англ., Л., 1967; [9] Поляк И. И., Численные методы анализа наблюдений, Л., 1975.

METRİK ÇOXÖLÇÜLÜ ŞKALLA(N)MA « метрическое многомерное шкалирование; metric multidimensional scaling » – bax, *Çoxölçülü şkallanma*.

METRİK ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin **« метрическая энтропия** динамической системы; **metric entropy** of a dynamical system **»** – bax, *Entropiya*(sı) dinamik sistemin.

METRİK ƏTRAF « метрическая окрестность; metric neighbourhood » – bax, *Robast statistik qiymət.*

METRİK İNVARİANT « метрический инвариант; metric invariant » – bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin* metrik.

METRİK İZOMORFİZM « метрический изоморфизм; metric izomorphism » – bax, *İzomorfizmi, dinamik sistemlərin* metrik.

METRİK MƏSAFƏLƏR METODU « метрических расстояний метод; metric distance method » – *ehtimal metrikaları* və *psevdomomentləri* istifadə edən approksimasion tipli məsələlərdə limit münasibətlərinin və bərabərsizliklərin qurulması üçün lazım olan xassələrə malik müxtəlif üsullar toplusudur. Metodun ideyası ondan ibarətdir ki, qoyulan məsələnin həllində spesifik xassələri baxılan stoxastik modelin strukturu ilə yaxşı uzlaşan ehtimali metrikalarından istifadə olunur ki, bu halda məsələnin həlli olduqca asanlaşır. Digər metrikalara keçid *ehtimali metrikaların müqayisəsinə*, məs., ehtimali metrikalar arasında bərabərsizliklərə əsaslanır. Məsələnin həllinin qeyd olunan iki mərhələyə ayrılması məsələnin təbii mürəkkəbliyini pozmadan, mürəkkəbliyin əsas hissəsini ikinci mərhələyə keçirir. Belə üsullardan biri *minimal metrikalar metodudur*, digəri *ideal metrikalardan* istifadə ilə bağlıdır (limit teoremlərində yığılma sürətinin statistik qiymətlərinin qurulması) (bax, [4], [5]). M. m. m. limit teoemlərinin dəqiqləşdirilmələrində (bax, [2], [3]), paylanmaların xarakterizasiyasının dayanıqlılığı məsələlərində və bir sıra digər məsələlərdə geniş istifadə olunur.

M. m. m.-nun istifadəsi bəzən metrik yanaşma adlanır.

Ədd.: [1] Золотарев В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [2] Сенатов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 1, с. 108–13; [3] Сенатов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1988, т. 33, в. 3, с. 573–77; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Zolotarev V. M., «Lect. Notes in Math.», 1983, v. 982, p. 7–17.

METRİK TRANZİTİV STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES « метрически транзитивный стационарный случайный процесс; metrically transitive stationary random process » – bax, *Stasionar təsadüfi proses.*

METRİK TRANZİTİVLİK « метрическая транзитивность; metric transitivity » – bax, *Erqodiklik.*

***MEYDAN; σ – MEYDAN « поле; σ – поле; field; σ – field »** – Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş, boş olmayan sonlu sayda bütün əməllərə görə qapalı sinfə; – Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş, boş olmayan hesabi sayda bütün əməllərə görə qapalı sinfə deyilir. Hər bir σ – meydan meydandır. İkilik prinsipinə əsasən inkar əməli və sonlu (hesabi) sayda kəsişmə əməlinə görə sinfin *qapalı sinif* olmasından (bax, *Qapalı sinif*) onun sonlu (hesabi) sayda birləşmə əməlinə görə qapalı sinif olması alınır və əksinə.

Ədd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, М., 1962.

MEYER AYRILIŞI « Мейера разложение; Mayer expansion » – bax, *Ursell funksiyaları.*

MEYL « смещение; bias » – bax, *Sistematik xəta.*

MEYL(i) statistik qiymətin **« смещение** оценки; **bias** of an estimator **»** – bax, *Meylsiz statistik qiymət.*

***MEYLƏDÜZƏLİŞ METODU « поправка на смещение метод; method of correction to bias »** – bax, *Boyskaut bıçağı (qatlanan bıçaq) metodu.*

MEYLLİ STATİSTİK QİYMƏT « смещенная оценка; biased estimator » – qiymətləndirilən kəmiyyətlə onun riyazi gözləməsinin üst-üstə düşmədiyi *statistik qiymətdir.* X – seçimi $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi element, $T = T(X)$, – θ parametrinin statistik qiyməti olsun. Əgər $\theta \in \Theta$, $\mathbf{M}_\theta T \not\equiv \theta$ olarsa, T meylli statistik qiymət adlanır. Bu halda $b(\theta) = \mathbf{M}_\theta T - \theta$-yə T statistik qiymətinin meyli və ya sistematik xətası deyilir.

Misal. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – komponentləri asılı olmayan, $a = \mathbf{M}X_i < \infty$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_i > 0$ parametrlərli normal qanunla paylanmış təsadüfi vektor, $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ olsun.

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

statistikası σ^2 dispersiyasının M. s. q.-dir, belə ki, $\mathbf{M}s_n^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. s_n^2 statistik qiymətinin meyli $b(\sigma^2) = \mathbf{M}s_n^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$ ədədinə bərabərdir. Bu halda s_n^2-nın M. s. q.-dən σ^2-nın meylsiz statistik qiyməti $S_n^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2$ alınır, belə ki, bütün a və σ^2 üçün $\mathbf{M}S_n^2 = \sigma^2$ olur. M. s. q. və meylsiz statistik qiymətin kvadratik risklərinin

$$R(s_n^2, \sigma^2) = \mathbf{M}(s_n^2 - \sigma^2)^2 = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4,$$

$$R(S_n^2, \sigma^2) = \mathbf{M}(S_n^2 - \sigma^2)^2 = \frac{2}{n-1}\sigma^4$$

ifadələrindən aydındır ki, $n \geq 2$ olduqda

$$R(s_n^2, \sigma^2) < R(S_n^2, \sigma^2)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Voinov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 1–2, Dordrecht, 1993–96.

MEYLSİZ ETİBARLI ÇOXLUQ « несмещенное доверительное множество; unbiased confidence set » – parametrin ixtiyari bir qiymətini daxilinə alma ehtimalından kiçik olmayan ehtimalla parametrin naməlum əsl qiymətini daxilinə alan *etibarlı çoxluqdur*. X – seçimi $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$ fəzasından $(\theta \in \Theta)$ qiymətlər alan təsadüfi element, $C(X) \in \Theta$, – X-in müşahidəsi üzrə qurulmuş etibarlı çoxluq olsun; bu çoxluğun etibarlılıq əmsalının P-yə bərabər, yəni $P = \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{P}_\theta\{\theta \in C(X)\}$ olduğu fərz olunur. Əgər $C(X)$ çoxluğu elə olarsa ki, $P \geq \mathbf{P}_\theta\{\theta' \in C(X)\}$ bərabərsizliyi ixtiyari $\theta' \neq \theta$ üçün ödənilsin, onda belə çoxluq meylsiz etibarlı çoxluq adlanır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

MEYLSİZ HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « несмещенная решающая функция; unbiased decision function » – bax, *Meylsizlik*(yi) statistik prosedur.

MEYLSİZ XƏTTİ STATİSTİK QİYMƏT « несмещенная линейная оценка; unbiased linear estimator » – $\mathbf{P}_\theta$ paylanmalar ailəsinin θ parametrinin funksiyası $f(\theta)$-nın *xətti statistik qiymətidir*, onun $\mathbf{P}_\theta$ paylanması üzrə orta qiymət bütün θ-lar üçün $f(\theta)$-ya eyniliklə bərabərdir. M. x. s. q. ən çox xətti reqression eksperimentlər üçün tətbiq olunur; burada $\theta \in \mathbb{R}^p$ naməlum parametrlərinin xətti forması $l^{\mathsf{T}}\theta$ üçün $a^{\mathsf{T}}y$ statistik qiymətinin meylsizlik şərti $\Phi a = l$ şəklində olur; Φ – eksperimentin matrisidir.

MEYLSİZ KRİTERİ « несмещенный критерий; unbiased test » – gücü ölçüsündən az olmayan *statistik kriteridir.* Əgər $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ parametrik fəzadırsa və $H_1 : \theta \in \Theta_1$ alternativinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ hipotezi yoxlanılırsa, onda M. k.-yə görə ixtiyari $\theta \in \Theta_0$ qiymətində H_0 hipotezini qəbul etməmək (səhvən) ehtimalı ixtiyari $\theta \in \Theta_1$ qiymətində H_0 hipotezini qəbul etməmək (doğru olaraq) ehtimalını aşmır. Əgər müntəzəm ən güclü kriteri vardırsa, onda bu kriteri M. k.-dir. Bir sıra məsələlərdə müntəzəm ən güclü kriterinin olmadığı hallarda (bütün kriterilər sinfində) M. k.-lər sinfində müntəzəm ən güclü M. k. tapmaq mümkündür. Bunlar əsas etibarilə eksponensial paylanmalar ailəsinin birölçülü parametri haqqında hipotezin yoxlanılması məsələləridir (əngəlləyici parametrlərin ola biləcəyi mümkünlüyü halında).

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

MEYLSİZ ÖLÇMƏ « несмещенное измерение; unbiased measurement » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin.*

MEYLSİZ PLAN « несмещенный план; unbiased plan » – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə.*

MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT « несмещенная оценка; unbiased estimator » – riyazi gözləməsi qiymətləndirilən kəmiyyətin özü ilə üst-üstə düşən *statistik qiymətdir*. X – seçimi $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$ fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyət, $\theta \in \Theta$ və $T(X)$, – X üzərində aparılan müşahidə əsasında θ parametri üçün qurulmuş statistik qiymət olsun. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $\mathbf{M}_\theta T(X) = \theta$ bərabərliyi ödənilərsə, $T(X)$ statistikasına θ parametrinin meylsiz statistik qiyməti deyilir. Bir çox hallarda $T(X)$ M. s. q. orta mənada meylsiz statistik qiymət də adlandırılır, bu adlandırılma statistik qiymətin orta qiymətinin (riyazi gözləməsinin) qiymətləndirilən kəmiyyət ilə üst-üstə düşməsini qeyd etmək məqsədilə olunmuşdur.

Misal. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – komponentləri eyni üstlü qanunla paylanmış, paylanmalarının sıxlığı

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta^{-1}e^{-x/\theta}, & x \geq 0\ (\theta > 1) \quad \text{olduqda,} \\ 0, & \text{əks halda} \end{cases}$$

olan, asılı olmayan təsadüfi vektor olsun. Bu halda $\overline{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, – θ parametrinin M. s. q.-dir.

Riyazi statistikanın inkişafı və onun ideyalarının statistik həllər funksiyaları (qaydaları) terminologiyasında, statistik həlledici qaydanın meylsizliyi anlayışının tərifi E. Leman (E. Lehmann, bax, [1]) tərəfindən verilmişdir; bu tərif seçilmiş itki funksiyası $L(T, X)$-ə nəzərən parametrin $T(X)$ statistik qiymətinin risk funksiyası $\mathbf{M}_\theta L(T, \theta)$ terminlərilə ifadə edilmişdir. Əgər bütün $\theta' \neq \theta$ üçün $\mathbf{M}_\theta L(T, \overline{X}) \leq \mathbf{M}_\theta L(T, \theta')$ bərabərsizliyi ödənilərsə, $T(X)$ statistik qiyməti $\mathbf{M}_\theta L(T, \theta)$ risk funksiyasına nəzərən meylsiz statistik qiymət adlanır. M. s. q.-in klassik tərifi (orta mənada) bu tərifin xüsusi halıdır. Doğrudan da, $L(T, X) = (T - \theta)^2$ olsun. T statistikası, yalnız və yalnız, o halda $\mathbf{M}_\theta (T-\theta)^2$ kvadratik risk funksiyasına nəzərən θ parametrinin M. s. q.-dir ki, $T(X)$, – θ parametrinin orta mənada M. s. q.-i olsun.

Əgər itki funksiyası kimi $L(T, \theta) = |T - \theta|$ götürülərsə, onda T statistik qiyməti $\mathbf{M}_\theta |T - \theta|$ risk funksiyasına nəzərən M. s. q., yalnız və yalnız, o halda olar ki, T statistikasının medianı $\operatorname{med}_\theta T$, $\theta \in \Theta$ üçün $\operatorname{med}_\theta T = \theta$ bərabərliyi ödənilsin. Belə statistik qiymət bir çox hallarda median–meylsiz statistik qiymət adlandırılır. Məs., qoyulan məsələnin şərtləri ilə

$$T_1 = \frac{n}{\ln 2} X^{(1)}$$

statistikası θ parametrinin median – M. s. q.-dir, $X^{(1)} = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$, – $X = (X_1, \ldots, X_n)$ seçimi üzrə qurulmuş qaydalı statistikalar vektorudur.

Mühəndis praktikasında $\mathbf{P}_\theta\{|T - \theta| \geq \varepsilon\}$ risk funksiyasına nəzərən meylsiz statistik qiymətlər böyük rol oynayır, ε əvvəlcədən qeyd olunmuş müsbət ədəddir. Bu risk funksiyası

$$L(T, \theta) = \begin{cases} 1, & |T - \theta| \geq \varepsilon, \\ 0, & |T - \theta| < \varepsilon \end{cases}$$

itki funksiyasına uyğun olur.

Yuxarıda qeyd olunan meylsiz statistikalardan başqa praktikada modal meylsiz statistik qiymətlərdən də istifadə olunur. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ üçün $\operatorname{mod}_\theta T = \theta$ olarsa, θ parametrini qiymətləndirən statistika modal meylsiz statistik qiymət adlanır, $\operatorname{mod}_\theta T$ T statistikasının modasıdır. Məs., qoyulmuş məsələnin şərtləri ilə

$$T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n-1} \overline{X}_n$$

θ parametrinin modal – M. s. q.-dir. Əgər T_2 və $\overline{X}_n$ statistikaları $L(T, \theta) = (1/T - 1/\theta)$ itki funksiyasına nəzərən müqayisə olunarsa, onda bütün θ-lar üçün $\mathbf{M}_\theta L(T, \theta) > \mathbf{M}_\theta (\overline{X}_n, \theta)$ bərabərsizliyi ödənilir, yəni bu halda modal – M. s. q. orta mənada M. s. q.-dən yaxşıdır. Əgər bu statistik qiymətlər $L(T, \theta) = (T/\theta + \theta/T - 2)$ itki funksiyasına nəzərən müqayisə olunarsa, bu halda T_2 və $\overline{X}_n$-in statistik qiymətləri bütün θ-lar üçün eyni riskə malik olur, lakin bu $\overline{X}_n$-in T_2 statistikasından stoxastik kiçik, yəni $\mathbf{P}_\theta\{\overline{X}_n < T_2\} = 1$ olmasından asılı olmayaraq belə olur.

Bax, *Asimptotik meylsiz statistik qiymət.*

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., M., 1979; [2] Wasan T., Parametric estimation, N. Y. – [a. o.], 1970; [3] Voronov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their application, v. 1–2, Dordrecht,1993–96.

MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT ORTA MƏNADA « несмещенная в среднем оценка; mean unbiased estimator » – bax, *Meylsiz statistik qiymət.*

MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT, RİSK FUNKSİYASINA NƏZƏRƏN « несмещенная относительно функции риска оценка; risk unbiased estimator » – bax, *Meylsiz statistik qiymət.*

MEYLSİZLİK statistik oyunlar nəzəriyyəsində « **несмещенность** в теории статистических игр; **unbiasedness** in statistical game theory » – bütün həlledici qaydalar sinfinin yalnız meylsiz qaydalardan (qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *meylsiz statistik qiymətlərdən* və hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində *meylsiz kriterilərdən*) istifadə edilməsi hesabına daralması prinsipidir. D – həllər çoxluğu, Θ – parametrik çoxluq, $w(\delta, \theta)$, $\delta \in D$, $\theta \in \Theta$ – itki funksiyası, $X \in \mathscr{X}$, – $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasından seçim olsun. Əgər ixtiyari θ, $\theta' \neq \theta$ qiymətlərində $\mathbf{M}_\theta w(\delta(X), \theta) \leq \mathbf{M}_\theta w(\delta(X), \theta')$ bərabərsizliyi ödənilərsə, $\delta(X) : \mathscr{X} \to D$ həlledici funksiyası meylsiz həlledici funksiya adlanır. Başqa sözlə, $\upsilon = \theta$ qiymətində $\min_\upsilon \mathbf{M}_\theta w(\delta(X), \upsilon)$ alınır. Bu onu ifadə edir ki, $\delta(X)$ naməlum θ-ya orta hesabla hər hansı digər nöqtədən daha yaxındır [$w(\cdot, \cdot)$ məsafəsi anlamında].

Meylsiz statistik qiymətlər və meylsiz kriterilərin tərifləri bu tərifin xüsusi hallarıdır.

MEYLSİZLİK(yi) statistik prosedurun **« несмещенность** статистической процедуры; **unbiasedness** of a statistical procedure**»** – statistik prosedurda qəbul edilən həllərin düzgün olmayan həllərdən ixtiyari birinə deyil, düzgün həllə yaxın olmasından ibarət, *statistik prosedur* xassəsidir. M. üçün ümumi tərif statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində E. Leman tərəfindən [1]-də verilmişdir; əgər Θ parametrik fəzasının bütün θ, θ' nöqtələri üçün $L(\theta, d)$ itki funksiyası verildiyi halda $\mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X)) \geq \mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X))$ bərabərsizliyi ödənilərsə, $\delta = \delta(x)$ həlledici funksiyası meylsiz həlledici funksiya adlanır. Bu tərif əvvəllər məlum olan və geniş istifadə olunan xüsusi hallar kimi statistik praktikada parametrik $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin M.-nin tərifini: yəni $\mathbf{M}_\theta \hat{\theta} = \theta$ bərabərliyi ilə verilən tərifini (L – kvadratik itki funksiyasıdır; bax, *Meylsiz statistik qiymət*) və statistik kriterinin M.-nin tərifi: kriterinin gücü onun ölçüsündən böyükdür, tərifini (L, – $0-1$ tipli itki funksiyasıdır) əhatə edir.

Bütün mümkün həllər funksiyaları sinfinin meylsiz həllər funksiyalar sinfinə daralması (tamamilə məqbul statistikalar olduqda) bu sinifdə müntəzəm minimal riskli həlledici funksiyaların tapıl-

masına xidmət edir. Lakin M.-in Leman tərifi parametrik qiymətləndirmə məsələlərinə Beyes yanaşması ilə bir araya sığmır (bax, [2], [3]): Beyes statistik qiymətləri, bir qayda olaraq, meylli statistik qiymətlərdir və yalnız aprior riskləri sıfra bərabər Beyes statistik qiymətləri meylsiz statistik qiymətlər ola bilər.

Əd.: [1] L e h m a n n E. L., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 587–92; [2] Б л е к у э л л Д., Г и р ш и к М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., M., 1958; [3] B i c k e l P. J., B l a c k w e l l D., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, p. 1907–11.

MƏHDUD ŞAXƏLƏNƏN PROSES « ограниченный ветвящийся процесс; bounded branching process » – elə *şaxələnən prosesdir* ki, t anında hissəciklər sayı $\zeta(t)$, $\zeta(t-1)$ anındakı bütün hissəciklərin sayından və «məhdudlaşdıran» (ola bilsin ki, təsadüfi) $g(t)$ funksiyasının qiymətindən asılıdır. Məs., t və i-nin ixtiyari qiymətlərində $\xi_{t,i}$, – t-ci nəslin i-ci hissəciyinin bilavasitə varislərinin sayı, $F(s) = \mathbf{M}s^{\xi_{t,i}}$ – onun doğuran funksiyası olsun; fərz olunur ki, $\xi_{t,i}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və $\mathbf{M}\xi_{t,i} > 1$, $q = F(q) \in [0,1)$ uyğun Qalton – Vatson şaxələnən prosesinin cırlaşma ehtimalıdır. Əgər məhdud $\zeta(t)$ şaxələnən prosesi

$$\zeta(0) = 1, \quad \zeta(t+1) = \min\left\{g(t), \sum_{i=1}^{\zeta(t)} \xi_{t,i}\right\}, \quad t \geq 0 \qquad (*)$$

münasibətlərilə təyin olunarsa, onda

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) = 0\} = 1 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{\infty} q^{g(t)} = \infty$$

münasibəti doğrudur, burada $g(t)$ – determinə olunmuş funksiyadır (bax, [1]). (*)-nun digər variantlarına da baxılmışdır (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] З у б к о в А. М., «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 1, с. 9–18; [2] С е в а с т ь я н о в Б. А., «Докл. АН СССР», 1978, т. 238, № 4, с. 811–13; [3] B r u s s F. T., «J. Appl. Probab.», 1978, v. 15, № 1, p. 54–64.

MƏHDUD TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « ограниченный закон повторного логарифма; bounded law of the iterated logarithm » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* B a n a x f ə z a s ı n d a, *Təkrar loqarifm qanunu* e m p i r i k ö l ç ü l ə r ü ç ü n.

MƏHDUD TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR « ограниченный случайный линейный оператор; bounded random linear operator » – bax, *Təsadüfi xətti operator.*

MƏHDUD VARİASİYA « ограниченная вариация; bounded variation » – bax, *Variasiya*(s ı) ö l ç ü n ü n, *Vektor ölçü*.

MƏHDUDLAYICI « ограничитель; clipper » – bax, *Binar təsadüfi proses.*

MƏHDUDLUQ EHTİMALA GÖRƏ « ограниченность по вероятности; boundness in probability » – bax, *Stoxastik məhdudluq*.

MƏXSUSİ ƏDƏDLƏR, e m p i r i k k o v a r i a n s m a t r i s l ə r i n k ə n a r m ə x s u s i ə d ə d l ə r i **« собственные числа** к р а й н и е э м п и р и ч е с к и х к о в а р и а ц и о н н ы х м а т р и ц; **extreme eigenvalue** o f e m p i r i c a l c o v a r i a n c e s m a t r i c e s **»** – empirik kovariasion $\hat{\Xi}_m$ matrisinin minimal və maksimal məxsusi ədədləridir. Əgər $\hat{\Xi}_m$ matrisi m – ölçülü $\boldsymbol{X}$ normal vektoru üzərində aparılan müşahidələr nəticəsində alınmışdırsa və $\hat{\Xi}_m$ matrisinin məxsusi ədədləri λ_i-lər m-dən asılı olmayan hər hansı bir ədədlə məhduddurlarsa, onda n $\boldsymbol{X}$ vektoru üzərində asılı olmayan x_k müşahidələrin sayı olduqda, $\lim_{n\to\infty} mn^{-1} < 1$ şərti ödənilərsə,

$$p \lim_{n\to\infty} (\lambda_1(\hat{\Xi}) - \alpha_1) = 0,$$

$$\hat{p} \lim_{n\to\infty} (\lambda_m(\Xi) - \alpha_2) = 0$$

münasibətləri doğrudur, burada $\alpha_1 = \upsilon_i(1-\gamma) + \gamma\upsilon_i^2 m^{-1} \times$

$$\times \sum_{p=1}^{m} (\upsilon_i - \lambda_p)^{-1}, \quad \gamma = mn^{-1}, \quad i = 1, 2, \quad \upsilon_1, \upsilon_2, -$$

$$1 - \gamma + 2\gamma\upsilon m^{-1} \sum_{p=1}^{m} (\upsilon - \lambda_p)^{-1} =$$

$$= \gamma\upsilon^2 m^{-1} \sum_{p=1}^{m} (\upsilon - \lambda_p)^{-2}, \quad \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m$$

tənliyinin kəmiyyətcə maksimal və minimal həlləridir,

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \hat{x})(x_k - \hat{x})^{\mathsf{T}}, \quad \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Əd.: [1] Г і р к о В. Л., «Доповіді Укр. РСР », сер. А., 1998, № 10, с. 9–12.

MƏXSUSİ / CIRLAŞMAYAN PAYLANMA « собственное / невырожденное распределение; nondegenerate distribution » – X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathbf{P}\{X < \infty\} = 1$ şərtini ödəyən paylanmasıdır. Bax, *Cırlaşan paylanma*.

MƏQBUL HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « допустимая решающая функция; admissible decision function » – elə *həlledici funksiyadır* ki, ondan ciddi dominar həlledici funksiya yoxdur. Araşdırılan obyekti xarakterizə edən $\theta \in \Theta$ parametrinin naməlum qiyməti haqqında qərar qəbul etmək üçün istifadə olunan δ həlledici funksiyasının risk funksiyası $R(\theta, \delta)$ olsun. Əgər elə $\delta^* \in \mathcal{K}$ həlledici funksiyası yoxdursa ki, onun üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $R(\theta, \delta^*) \leq R(\theta, \delta)$ bərabərsizliyində ciddi bərabərsizlik münasibəti Θ parametrik fəzasının heç olmazsa bir nöqtəsində ödənilsin, onda $\delta \in \mathcal{K}$ həlledici funksiyası $\mathcal{K}$ s i n f i n d ə m ə q b u l h ə l l e d i c i f u n k s i y a adlanır; belə δ^* həlledici funksiyası (dominar) δ həlledici funksiyasını üstələyir, deyilir. M. h. f.-lar çoxluğu həlledici funksiyaların mahiyyətcə tam minimal sinfini əmələ gətirir. Bax, *Məqbulluq*(ğ u) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n, *Statistik prosedur*, t a m s i n i f.

MƏQBUL KRİTERİ « допустимый критерий; admissible test » – məqbulluq xassəsinə malik *statistik kriteridir* (bax, *Məqbulluq*(ğ u) s t a t i s t i k k r i t e r i n i n).

M. k. anlayışı *məqbul həlledici funksiya* ümumi anlayışının konkretləşdirilməsidir. Bütün məqbul kriterilər çoxluğu kriterilərin minimal tam sinfini təşkil edir.

Bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

***MƏQBUL MATRİS « допустимая матрица; admissible matrix »** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

***MƏQBUL PLAN « допустимый план; admissible design »** – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

MƏQBUL STATİSTİK QİYMƏT « допустимая оценка; admissible estimator » – qəbul edilə bilinən, yaxşılaşdırılması mümkün olmayan *statistik qiymətdir.* Daha dəqiq, $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ – müşahidə olunan X təsadüfi kəmiyyəti ilə bağlı ölçülən fəza, $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ isə $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ fəzasında ehtimal ölçüləri ailəsi olsun. Daha sonra, $L(\hat{\theta}, \theta)$ – *itki funksiyası*, $\mathscr{K}$ – hər hansı statistik qiymətlər sinfi, $R_\theta \hat{\theta}$ isə $L(\hat{\theta}, \theta)$ itki funksiyasına nəzərən $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin riski olsun. Əgər bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində $\tilde{\theta} \in \mathscr{K}$, $R_\theta \tilde{\theta} \le R_\theta \theta^*$ şərtlərindən $R_\theta \tilde{\theta} = R_\theta \theta^*$ bərabərliyi alınarsa, $\theta^* \in \mathscr{K}$ $\mathscr{K}$ sinfində məqbul statistik qiymət adlanır. Beləliklə, əgər θ^* $\mathscr{K}$ sinfində M. s. q.-dirsə, onda bu sinifdə elə statistik qiymət yoxdur ki, onun riski θ^* riskini aşmasın və θ-nın heç olmazsa bir qiymətində θ^* riskindən ciddi kiçik olsun. Əgər statistik qiymət bütün statistik qiymətlər sinfində məqbuldursa, onda o, müt-ləq məqbul və ya sadəcə məqbul statistik qiymət adlanır.

Risk funksiyasını minimallaşdıran statistik qiymətin seçilməsi baxımından, aydındır ki, qeyri – məqbul statistik qiymətlər qəbul olunmamalıdır. Elə hallar vardır ki, *ekvivariant statistik qiymət* qeyri – məqbul statistik qiymətdir. Məs., orta qiymətlər vektoru – m – ölçülü normal qanunun yerinidəyişmə parametrinin statistik qiyməti qeyri – məqbuldur; $m \ge 3$. Digər tərəfdən M. s. q.-lərin əksəriyyətindən istifadə etmək məsləhət deyildir. $\Theta = \mathbb{R}$ olduğu halda $\tilde{\theta} = \text{const}$ məqbul statistik qiymətdir.

M. s. q.-lər nəzəriyyəsində mühüm fakt birölçülü və ikiölçülü yerinidəyişmə parametrinin Pitmən statistik qiymətinin məqbulluğudur. Bütün elementləri məqbul statistik qiymətlər altsinfinin qurulması metodu aşağıdakı nəticədən alınır. Əgər hər bir $\hat{\theta}$ üçün risk funksiyası $R_\theta \hat{\theta}$ $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$-ə görə kəsilməzdirsə və əgər $\xi(\theta)$ daşıyıcısı θ olan aprior paylanmadırsa, onda $\xi(\theta)$-ya uyğun Beyes statistik qiyməti məqbul statistik qiymətdir (bax, [1]). Qeyd etmək lazımdır ki, M. s. q. bəzi xüsusi şərtlərlə Beyes statistik qiymətlərinin limitidir (bax, [2]). Rao – Kramer bərabərsizliyində aşağı və yuxarı sərhədlərə çatımın təmin olunması analizinə əsaslanan məqbulluğun isbat metodları mövcuddur (bax, [3]). M. s. q. və bəzi təsadüfi dolaşmaların qayıdışlı olması arasında əlaqə [4]-də şərh olunmuşdur. Xüsusi tip statistik qiymətlərin məqbulluğu xassəsi əksərən, ehtimal ölçülərinin uyğun ailəsi üçün səciyyəvi olur (bax, [5]).

M. s. q. anlayışı bir qayda olaraq, qeyd olunmuş n həcmli seçimlər üçündür. Lakin, bununla belə, bu anlayışla bağlı ikinci tərtib asimptotik məqbulluq anlayışı da mövcuddur ki, bu da $n \to \infty$ olduqda statistik qiymətin riskinin asimptotik ayrılışında ikinci həddin qiymətinin yaxşılaşdırıla bilinməməsindən ibarətdir. İkinci tərtib asimptotik məqbulluq məsələsinin şərhi Şredinger tənliyinin müsbət həllərinin xassələrilə əlaqəlidir (bax, [6]).

M. s. q.-lər sinfinin strukturunu itki funksiyasının qurulma prinsipinin əsası kimi götürmək olar. Məs., $x_1, \dots, x_n$ təkrarlanan seçimi əsasında qiymətləndirilmə halında M. s. q.-lər çoxluğunun simmetrik funksiyalardan ibarət olduğunu hesab etmək təbiidir. Arqumentlərin fərqindən asılı itki funksiyası üçün M. s. q.-lər çoxluğunun belə strukturlu olması yalnız $L(\hat{\theta}, \theta)$-nın qabarıqlığı halında mümkündür (bax, [7]).

Əd.: [1] Blyth C., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 22–42; [2] Stein C., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, p. 518–22; [3] Hodges J., Lehmann E., «Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist.», 1951, p. 13–22; [4] Brown L., «Ann. Statist.», 1979, v. 7, p. 960–94; [5] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, M., 1972; [6] Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, с. 309–38; [7] Какосян А. В., Клебанов Л. Б., Меламед И. А., Проблема построения моделей в статистической теории оценивания параметров, Тбилиси, 1986.

MƏQBUL STATİSTİK QİYMƏT xətti **« допустимая оценка** линейная; **admissible** linear **estimator »** – xətti statistik qiymətlər sinfində *məqbul statistik qiymətdir.*

Bax, *Məqbul statistik qiymət*, *Xətti statistik qiymət.*

MƏQBUL TOPOLOGİYA « допустимая топология; admissible topology », S – topologiya, – (sonsuzölçülü) fəzada topologiyadır, bu topologiyada müsbət – müəyyən funksionalın kəsilməzliyi onun hər hansı hesabi – additiv ölçünün xarakteristik funksionalı olması üçün zəruri və kafidir. Ekvivalent olaraq, M. t.-ni elə topologiya kimi təyin etmək olar ki, bu topologiyada silindrik ölçünün xarakteristik funksionalının kəsilməzliyi bu ölçünün hesabi – additivliyi ilə eynigüclüdür. M. t. Hilbert fəzası halında da mövcuddur (bax, *Sazonov topologiyası*). Nüvə hesabi – Hilbert fəzaları üçün ilkin topologiya – M. t.-dir. M. t.-ya digər misal *Qross topologiyasıdır.* M. t. həmişə mövcud deyildir. Hilbert fəzaları olmayan elə Banax fəzaları vardır ki, bunlar üçün M. t. mövcuddur.

Əd.: [1] Prokhorov Y. V., «Proc. 4-th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1961, v. 2, p. 403–19; [2] Муштари Д. Х., Вероятности и топологии в банаховых пространствах, Казань, 1989.

MƏQBUL YERİNİDƏYİŞMƏ(si) ölçünün **« допустимый сдвиг** меры; **admissible shift** of a measure **»**, vektor fəzasında və ya qrupda verilmiş ölçünün, – fəza və ya qrupun elə elementidir ki, sıfır ölçülü ixtiyari çoxluqla onun birləşməsi nəticəsində alınan çoxluğun ölçüsü də sıfra bərabər olur. T – vektor fəza və ya Abel qrupu olsun; $\mathscr{B}$, – T-nin elə altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun ki, əgər $B \in \mathscr{B}$ və $a \in T$ olarsa, onda

$$B + a = \{b + a : b \in B\} \in \mathscr{B}$$

münasibəti doğrudur, burada μ, – $\mathscr{B}$-də hər hansı ölçüdür. Əgər hər bir B, $B \in \mathscr{B}$ üçün $\mu(B) = 0$ və $\mu(B + a) = 0$ olarsa, $a \in T$ elementi μ ölçüsünün məqbul yerinidəyişməsi adlanır.

Əgər A_μ μ – ölçülü bütün məqbul yerinidəyişmələr çoxluğu və $A_\mu = T$ olarsa, onda μ kvaziinvariant ölçü adlanır. Sonsuzölçülü Banax fəzalarında kvaziinvariant ehtimal ölçüləri yoxdur. M. y. çoxluğu sonsuzölçülü fəza halında bir qayda

olaraq, birinci dərəcəli çoxluq olur və bu çoxluğu təsvir etmək çətin məsələdir. M. y. Qauss ölçüləri və bəzi digər ölçülər üçün sonsuzölçülü fəzalarda araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

MƏQBUL ZOLAQ « допустимая полоса; admissible band » – bax, *Etibarlı zolaq.*

MƏQBULLUQ(ğu) həlledici funksiyanın **« допустимость** решающей функции; **admissibility** of a design function **»** – bax, *Məqbulluq*(ğu) statistik prosedurun.

MƏQBULLUQ(ğu) statistik kriterinin **« допустимость** статистического критерия; **admissibility** of a statistical test **»** – müntəzəm yaxşı xarakteristikalara malik digər statistik kriterinin olmadığını ifadə edən *statistik kriteri* xassəsidir. Eksperimentin aparılmasının ardıcıl sxemində mühümlük ölçüsü, kriterinin gücü, seçimin orta həcmi (və ya müşahidə müddətinin orta qiyməti) və s. – belə müntəzəm yaxşı xarakteristikalardan sayılır. Statistik kriterinin M. anlayışı statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsi çərçivəsində statistik prosedurun *məqbulluğu* ümumi anlayışının konkretləşdirilmiş formasıdır (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*).

$\theta \in \Theta$ naməlum parametrindən asılı $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına malik müşahidəolunan təsadüfi X seçimi üzrə $H_1 : \theta \in \Theta_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, Θ_0 və Θ_1 Θ -nın kəsişməyən, boş olmayan altçoxluqlarıdır və $\Theta_0 \bigcup \Theta_1 = \Theta$. K – hipotezlərin yoxlanılması üçün bu məsələdə kriterilərin baxılan sinfi olsun (K bütün kriterilər sinfi ilə üst-üstə düşə bilər). Əgər

$$\mathbf{M}_\theta \Psi(X) \le \mathbf{M}_\theta \varphi(X), \quad \theta \in \Theta_0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}_\theta \Psi(X) \ge \mathbf{M}_\theta \varphi(X), \quad \theta \in \Theta_1 \qquad (2)$$

münasibətlərinin heç olmazsa bir $\theta \in \Theta$ nöqtəsində ciddi bərabərsizlik münasibətləri ilə ödənilməsini təmin edən $\Psi \in K$ kriterisi yoxdursa, $\varphi \in K$ kriterisi K sinfində məqbul kriteri adlanır.

Bəzən mühümlük ölçüsü $\alpha : K_\alpha = \left\{ \varphi : \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{M}_\theta \varphi(X) \le \alpha \right\}$ olan K_α kriterilər sinfinə baxıldıqda, (1) – (2) şərtləri yalnız (2) şərti ilə əvəz olunur. Müşahidələrin ardıcıl sxemində (1) – (2) şərtlərinə $\mathbf{M}_\theta N(\Psi) \le \mathbf{M}_\theta N(\varphi)$ tipli şərtlər əlavə oluna bilinər, burada $N(\varphi)$, – φ kriterisini ardıcıl istifadə etdikdə seçimin təsadüfi həcmidir.

Hipotezlərin yoxlanılmasının müxtəlif statistik məsələləri üçün statistik kriterinin M.-nun zəruri (hərdən kafi) şərtləri müəyyən olunmuşdur. Bəzən, belə şərtlər statistik kriterinin bəzi ümumi xassələri kimi müəyyən mənada monoton (bax, məs., *Doğruyaoxşarlıq nisbəti* monoton), hər hansı çevirmələr qrupuna görə invariant, seçimdən yalnız seçim üzrə qurulmuş kafi statistikanın qiyməti vasitəsilə asılı olması kimi xassələrlə ifadə olunur. Statistik kriterinin M.-nun zəruri və kafi şərtləri bəzən məqbul kriterinin strukturunun təsvirindəki terminlərlə verilir, məs., eksponensial ailələrin parametrləri üçün hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində məqbul kriterilərin strukturu haqqında ümumi nəticələr buna misaldır.

Hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələlərində statistik kriterinin asimptotik məqbulluğu anlayışı daxil olunmuşdur, bu halda, (1) və (2) münasibətləri asimptotik ödənilməlidir [$O(1)$ dəqiqliyi və ya daha dəqiqliklə]. Qeyri – parametrik hipotezlərin fərqləndirilməsi məsələlərində və ya uzlaşmanın yoxlanılması məsələlərində məqbulluq və ya asimptotik məqbulluq haqqında ümumi nəticələr də məlumdur (bax, məs., [6]).

Əd.: [1] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 1, с. 96–111; [2] Matthes T. K., Truax D. R., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, p. 681–97; [3] Eaton M. L., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, p. 1884–88; [4] Stein Ch., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, p. 616–23; [5] Бернштейн А. В., «Теория вероятн. и её примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 404–10; [6] Тюлягин А. Н., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1982, т. 46, № 3, с. 569–616.

MƏQBULLUQ(ğu) statistik prosedurun **« допустимость** статистической процедуры; **admissibility** of a statistical procedure **»** – müntəzəm yaxşı xarakteristikalarının olmaması xassəsinə malik *statistik prosedurdur.* Statistik prosedur *həlledici funksiya* ilə eyniləşdirildiyi hallarda (məs., statistik eksperiment əvvəlcədən təyin olunduqda) həlledici funksiyanın məqbul olduğu qəbul olunur və bu halda bu həlledici funksiyadan istifadə olunaraq qərar qəbul edilir.

$\mathcal{K}$ – həlledici funksiyaların hər hansı bir sinfi olsun. Əgər $\mathcal{K}$ sinfində elə $\delta^* \in \mathcal{K}$ həlledici funksiyası yoxdursa ki, bütün $\theta \in \Theta$ parametrləri üçün $R(\theta, \delta^*) \le R(\theta, \delta)$ münasibəti hər hansı bir $\theta_0 \in \Theta$ nöqtəsində ciddi bərabərsizlik münasibətilə ödənilsin, onda $\delta \in \mathcal{K}$ həlledici funksiyası $\mathcal{K}$ sinfində məqbul həlledici funksiya adlanır, burada $R(\theta, \delta)$ – araşdırılan obyekti xarakterizə edən naməlum $\theta \in \Theta$ parametri haqqında qərar qəbul etmək üçün istifadə olunuan δ həlledici funksiyasının risk funksiyasıdır. Statistik problemdə həmişə yalnız məqbul həlledici funksiyalarla kifayətlənmək məqsədəuyğundur və əgər müxtəlif həlledici funksiyalara müxtəlif risk funksiyaları uyğun olursa, onda ümumi halda hər hansı bir həlledici funksiyanı araşdırmadan, onu xaric etmək olmur, belə ki, bu halda qəbul ediləcək qərarların keyfiyyəti pisləşir (heç olmazsa $\theta \in \Theta$ parametrinin bəzi qiymətlərində). Daha dəqiq, məqbul həlledici funksiyalar çoxluğu həlledici funksiyaların minimal mahiyyətcə tam sinfini əmələ gətirir (bax, *Statistik prosedur*; tam sinif). Bu nəticədən əksər hallarda tam siniflərin qurulması üçün istifadə olunur (minimal olması zəruri deyildir): həlledici funksiyanın hər hansı bir xassəsinin onun məqbulluğunun zəruri şərti olmasından bu xassəyə malik həlledici funksiyalar çoxluğunun tam sinif əmələ gətirdiyini hökm etmək olar; əgər bu sinifdən olan bütün həlledici funksiyalar məqbul həlledici funksiyalardırsa, onda bu tam sinif minimal tam sinifdir.

Statistik prosedurun M. anlayışı G. Neyman və O. Morqenştern tərəfindən oyunlar nəzəriyyəsinin məsələləri ilə əlaqədar daxil olunmuşdur (bax, [1]); statistik həllər nəzəriyyəsində bu anlayışı A. Vald daxil etmişdir (bax, [2]).

Əd.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967, с. 300–522; [3] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958; [4] Заксе Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

MƏQBULLUQ(ğu) təsnifat prosedurunun « **допустимость** процедур классификации; **admissibility** of classification procedures » – müşahidələrin təsnifatı prosedurunun yalnız məqbul prosedurların mümkün qədər dar sinfi üzrə, müəyyən mənada optimal axtarışını məhdudlaşdırmağa imkan verən riyazi statistika anlayışıdır (bax, [1]).

Təsnifat prosedurunun M. anlayışının kifayət qədər geniş variantları toplusu vardır və bu da məsələnin qoyuluşundan asılı olaraq ən uyğun variantı seçməyə imkan verir.

Təsnifat prosedurunun M. üçün ən çox istifadə olunan nəticələr alınmışdır (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Fisher L., van Ness, John W., «Biometrika», 1971, v. 58, № 1, p. 91–104.

MƏQSƏDYÖNLÜ PROYEKSİYALA(N)MA(sı) çoxölçülü verilənlərin « **целенаправленное проецирование** многомерных данных; **projection pursuit** of multivariate data » – *tədqiqi statistik analiz* mərhələsində istifadə olunan və ilkin verilənlərin xətti proyeksiyalarının tətbiqinə əsaslanan, verilənlər üzərində statistik işlər aparılması üçün metodlar toplusudur. M. p. termini J. Fridman və J. Tyuki tərəfindən [1]-də daxil olunmuşdur. M. p. metodları *çoxölçülü statistik analiz*, *faktor analiz*, *baş komponentlər analizi*, *xətti diskriminant analiz* və s. kimi klassik metodların təbii ümumiləşməsidir. M. p.-ya dəyişənlər fəzasının dim. – ölçülərinin əvvəlcədən azaldılması üçün yanaşmalardan biri kimi baxmaq olar, məs., *klaster – analiz* məqsədləri üçün.

$X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, – p – ölçülü müşahidələrdən n – ölçülü seçim olsun. dim. – ölçü $p > 3$ olduqda və verilənlərin generasiyasının fiziki modeli haqqında aprior informasiya ya az, ya da ki, heç olmadıqda M. p. texnikasından verilənlərin strukturuna xas olan xüsusiyyətlər haqqında təsəvvür yaratmaq məqsədilə istifadə etmək olar. M. p. texnikası ilkin verilənlərin «maraqlı» q – ölçülü proyeksiyaları – $Z^n = A^{\mathrm{T}} X^{(n)}$ inikaslarının vizual analizinə əsaslanır. Formal baxımda, fərz olunur ki, U birölçülü proyeksiya təyin edən p – ölçülü vektordur və $Q(U, X^{(n)})$ «maraqlı» proyeksiya təyin edən hər hansı proyeksion indeksin seçimi qiymətidir. M. p.-da hər hansı q sayda $U_1, \ldots, U_q$ proyeksion vektorlarının alınması üçün, adətən, ardıcıl (addımbaaddım) yanama istifadə olunur. U vektoru əvvəlcə

$$U = \arg\max_{\tilde{U}} Q(\tilde{U}, X^{(n)}) \qquad (1)$$

maksimizasiya məsələsinin həlli kimi təyin olunur. Sonra hər bir növbəti vektor (1)-dən tapılır, lakin əlavə şərt qoyulur ki, əvvəl tapılmış vektorların təsiri bu və ya digər tərzdə nəzərə alınmışdır (bəzən, lakin həmişə yox: məs., $U_1, \ldots, U_q$ vektorlarının cüt-cüt ortoqonallıq şərti kifayətdir). Beləliklə, $Z = A^{\mathrm{T}} X$ q – ölçülü proyeksiyasını təyin etmək olur, burada A matrisinin sütunları məhz $U_1, \ldots, U_q$ vektorlarıdır. M. p. metodları təbii olaraq fəzanın dim. – ölçüsündən asılı olaraq, iki sinfə ayrılır və verilənlər bu siniflərə əks olunurlar. Əgər $q = 1, 2$ (çarəsiz qaldıqda 3) olarsa, onda metodlar ilk növbədə məhz tədqiqi analizə aiddir, bu halda hər hansı proyeksion indeks üzrə optimizasiyanın hesablanma prosedurunun köməyilə ən səlis proyeksiyalar verən inikaslar axtarılır, son qərar isə vizual analiz yolu ilə qəbul edilir, məs., displey ekranında $q = 1$ üçün əks olunmuş verilənlərin histoqramı və ya $q = 2$ olduqda onların səpələnmə diaqramı.

Anomal müşahidələrin aşkar olunması, qarışmaların ayrılması, klasterizasiya kimi məsələlərdə ən səmərəli nəticələr almaq olur, yəni struktur aşkar-aydın olduğu halda. Lakin bəzi hallarda verilənlər o dərəcədə mürəkkəb olur ki, proyeksiyaların sayının nisbətən az olması onların təsviri üçün kifayət etmir və bu halda bu verilənlərin strukturunun informasiyanın aqreqatlaşdırılması (bu informasiya belə azölçülü, olduqca çoxsaylı proyeksiyalarda olur) əsasında təsviri məsələsi yaranır.

Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətin sıxlığının bərpa olunması məsələsi, diskriminant analizdə siniflərin bəzi yerləşmə konfiqurasiyaları qeyd olunmuş sinfin tipik məsələsidir. Aşağıda bəzi proyeksion indekslər verilmişdir.

Klasterlərin aşkar olunması üçün proyeksion indekslər. Bu məqsədlə proyeksion indekslərin

$$Q_\beta(U, X) = s^\beta \mathbf{M}_f f^\beta(z) \quad (\beta > 0) \qquad (2)$$

şəklində birparametrli ailəsindən istifadə etmək olar, burada $\mathbf{M}_f$, – $f(z)$ sıxlığı üzrə riyazi gözləmə operatoru, $f(z)$, – $z = U^{\mathrm{T}} X$ birölçülü proyeksiyasının sıxlığı, $Q_\beta(U, X)$ – proyeksion indeksin seçimi $Q_\beta(U, X^{(n)})$ proyeksion indeksindən fərqli olaraq, «nəzəri» qiymətidir, s, – z-in dispersiyasıdır. Birölçülü $z = U^{\mathrm{T}} X$ proyeksiyaları üçün seçim üzrə (2) qiymətlərinin qiymətləndirilməsi qeyri – parametrik metodların köməyilə aparılır.

M. p.-da

$$Q(U, X) = -\mathbf{M}_f \ln f(z) + \ln s \qquad (3)$$

entropik kriterisi geniş istifadə olunur ki, bu kriteriyə $\beta \to 0$ olduqda (2)-nin limit forması kimi baxmaq olar.

(2), (3) kriteriləri üzrə proyeksiya axtarışı üçün S – ortoqonallıq şərtindən (S kovariasiyalar matrisi və ya onun statistik qiymətidir) istifadə edərək addımbaaddım optimizasiya tətbiq etmək olar.

Anomal müşahidələri aşkar etmək üçün proyeksion indekslər. Belə proyeksion indeks kimi

$$Q(U, X^{(n)}) = s^2(U) \big/ s^2_{\mathrm{rob}}(U)$$

kriterisini istifadə etmək olar, burada $s^2(U)$ – dispersiyanın birölçülü proyeksiyada adi statistik qiyməti, $s^2_{\mathrm{rob}}(U)$ – miqyas parametrinin hər hansı dayanıqlı statistik qiymətidir.

Əd.: [1] Freidman J. H., Tukey J. W., «IEEE Trans. Compt., v. C–23», 1974, № 9, p. 881–90; [2] Huber P. J., «Ann. Statist.», 1985, v. 13, p. 435–75; [3] Енюков И. С., Методы, алгоритмы, программы многомерного статистического анализа, М., 1986.

MƏLUMAT « сообщение; message » – bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi*.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ « сообщений источник; message source » – məlumatlar hasil edən sistemdir. M. m. $\mathscr{U}$-nun hasil etdiyi X məlumatı ölçülən $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ fəzasından qiymətlər alan, ehtimal paylanması $\mathbf{P}_X(\cdot) = p(\cdot)$ olan təsadüfi kəmiyyətdir. $(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}})$ bir qayda olaraq, ölçülən fəzaların düz hasili şəklində ifadə olunur:

$$(\mathfrak{X}, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}}) = \bigtimes_{t \in \Delta} (\mathfrak{X}_t, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}_t});$$

burada $(\mathfrak{X}_t, \mathbf{S}_{\mathfrak{X}_t})$ – eyni bir ehtimal fəzasının nümunələridir. t parametri $\mathfrak{X}_t$, adətən, hər hansı həqiqi ədədlər intervalından (kəsilməz zamanlı məlumatlar mənbəi), tam ədədlər çoxluğundan (diskret zamanlı məlumatlar mənbəi) və ya k – ölçülü fəzadan qiymətlər alır. Bu hallarda məlumatlar təsadüfi proseslər (və ya təsadüfi meydanlar), yəni $X = \{X(t),\ t \in \Delta\}$ təsadüfi prosesləri olur, $X(t)$, – t anında hasil olunan məlumat, $X_s^t = \{X(\tau),\ s < \tau \le t\}$ – məlumat parçasıdır.

Məlumatın – təsadüfi prosesin növündən asılı olaraq, M. m.-ləri də müxtəlif növlərə ayrılır. Məs., əgər $X(t)$ asılı olmayan qiymətlərli, Markov, stasionar, erqodik, Qauss və s. təsadüfi prosesi olarsa, onda M. m. də, uyğun olaraq, yaddaşsız, Markov, stasionar, erqodik, Qauss və s. məlumatlar mənbəi adlanır.

İnformasiya nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri M. m.-nin kodlanmasıdır (M. m.-nin kodlanma məsələlərinin bəziləri tətbiqdə verilənlər həcminin daraldılması, məlumatların kvantlanması və s. kimi adlandırılır). M. m.-nin kodlanması qeyd olunmuş uzunluqlu kodlarlı, uzunluğu dəyişkən kodlarlı kodlanma, ardıcıl kodlanma, məlumatlar statistikası naməlum olduğu halda universal kodlanma, məlumatların verilən dəqiqliklə bərpası şərtilə kodlanma kimi kodlanmalara ayrılır. Məs., fərz olunur ki, yaddaşsız diskret stasionar prosesi verilən dəqiqliklə bərpa ilə hasil edən M. m.-nin kodlanmasına baxılır. $X^N = (X_1, \dots, X_N)$ – belə məlumatın parçası olsun; X_j, $j = 1, \dots, N$ sonlu $\mathfrak{X}$ çoxluğundan qiymətlər alır və $\widetilde{\mathfrak{X}}$ digər sonlu çoxluqdur. N uzunluqlu X^N məlumat parçasının M həcmli kodlanması $\mathfrak{X}^N$-in $\widetilde{\mathfrak{X}}^N$ çoxluğunun M elementindən ibarət çoxluğuna inikasına deyilir (X^N, – $\mathfrak{X}$ çoxluğunun N sayda nümunəsinin düz hasilidir). Nəhayət, fərz olunur ki, bərpa dəqiqliyi mənfi olmayan $\rho(x, \widetilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}$ funksiyası ilə verilir; $\rho(x, \widetilde{x})$ təhrif ölçüsü adlanır və təhrifin orta qiyməti

$$\widetilde{\rho}_N = N^{-1}\mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{N} \rho(X_k, \widetilde{X}_k)\right)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əsas kodlama teoremi epsilon – entropiya anlayışı əsasında formalaşır. Yaddaşsız stasionar M. m. üçün epsilon – entropiyanın qiyməti

$$\overline{H}_\varepsilon(\mathscr{U}) = \inf I(X_1, \widetilde{X}_1)$$

düsturu ilə hesablanır, burada $I(\cdot,\cdot)$ – informasiya miqdarıdır, infimum isə $\mathbf{P}_X(\cdot) = p(\cdot)$ və $\mathbf{M}_\rho(X_1, \widetilde{X}_1) \le \varepsilon$ şərtlərini ödəyən $(X_1, \widetilde{X}_1)$, $X_1 \in \mathfrak{X}$, $\widetilde{X}_1 \in \widetilde{\mathfrak{X}}$ cütlərinin paylanmaları üzrə götürülür.

M. m.-nin kodlanma teoremi: $\mathscr{U}$ – yaddaşsız stasionar M. m., $M = \lfloor \exp NR \rfloor$ olsun; onda

1) $R > \overline{H}_\varepsilon(\mathscr{U})$ olduqda M həcmli elə kodlanma vardır ki,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \overline{\rho}_N \le \varepsilon;$$

2) $R < \overline{H}_\varepsilon(\mathscr{U})$ olduqda

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\rho}_N > \varepsilon;$$

$\varepsilon \to 0$ və

$$\rho(x, \widetilde{x}) = \begin{cases} 0, & \widetilde{x} = x \\ 1, & \widetilde{x} \ne x \end{cases}$$ olduqda

olarsa, bu teorem məlumatın dəqiq bərpa olunduğu hal üçün kodlanma teoremi olur.

Əd.: [1] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, пер. с англ., М., 1982; [5] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [6] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ çoxkomponentli **« сообщений источник** многокомпонентный; multiple–component **message source »** – bax, *Çoxkomponentli məlumatlar mənbəi*.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ Markov **« сообщений источник** марковский; Markov **message source »** – bax, *Markov məlumatlar mənbəi*.

MƏLUMATLAR MƏNBƏİ yaddaşsız **« сообщений источник** без памяти; memoryless **message source »** – diskret zamanlı məlumatlar mənbəidir, k anlarında (k tam qiymətlər alır) hasil edilən məlumatlar olan X_k təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı ilə xarakterizə olunur. Məs., diskret stasionar yaddaşsız M. m. onunla xarakterizə olunur ki, bütün X_k-lar eyni sonlu $\mathfrak{X}$ çoxluğundan qiymətlər alır, eyni $p(x) = \mathbf{P}\{X_k = x\}$ paylanmasına malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Yaddaşsız diskret stasionar M. m.-nin $\mathfrak{X}$ məlumatlarını hasiletmə sürəti, təhrif ölçüsü $\rho(x, \widetilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathfrak{X}}$ olduqda

$$H_\varepsilon(\mathscr{U}) = \inf I(X, \widetilde{X})$$

düsturu ilə təyin olunur, burada I – informasiya miqdarıdır, infimum isə $\mathbf{P}\{X = x\} = p(x)$ və $\mathbf{M}_\rho(X, \widetilde{X}) \le \varepsilon$ şərtlərini ödəyən, qiymətləri uyğun olaraq, $\mathfrak{X}$ və $\widetilde{\mathfrak{X}}$-dən olan təsadüfi kəmiyyətlərin bütün $(X, \widetilde{X})$ cütləri üzrə götürülür. Dəqiq bərpada $\overline{H_\varepsilon(\mathscr{U})} = H(x)$ – paylanması $p(\cdot)$ olan X təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

MƏLUMATLARIN BƏRPAOLUNMA DƏQİQLİYİ « сообщений точность воспроизведения; accuracy of the message reproduction » – qəbul edənin məlumatları bərpaetmə keyfiyyətinin ölçüsüdür. M. b. d., adətən, $(X, \widetilde{X})$ cütü üçün mümkün olan birgə paylanmalar sinfi W-nin seçilməsi ilə verilir; X – ötürülən, $\widetilde{X}$ – bərpa olunan (qəbul olunan) məlumatlardır. Xüsusi halda, W sinfi ölçülən mənfi olmayan

$\rho(x, \tilde{x}) = (\rho_1(x, \tilde{x}), \dots, \rho_k(x, \tilde{x}))$, $x \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$ vektor-funksiyası ($\mathfrak{X}$ və $\tilde{\mathfrak{X}}$ – uyğun olaraq, ötürülən və bərpa olunan məlumatların qiymətlər fəzalarıdır), $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ ε_j, $j = 1, \dots, k$ müsbət ədədləri vektoru ilə verilir və bu zaman fərz olunur ki, əgər $\mathbf{M}\rho_j(X, \tilde{X}) \le \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, k$ şərti ödənilərsə, $(X, \tilde{X})$ cütünün paylanması W sinfindəndir.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), [1971]; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

MƏLUMATLARIN HASİLOLUNMA SÜRƏTİ « сообщений скорость создание; rate – distortion function », vahid zamanda epsilon – entropiya, – məlumatların verilən dəqiqliklə bərpasında vahid zaman ərzində *informasiya miqdarını* təsvir edən kəmiyyətdir. $X(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərindən alınmış $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ məlumatını hasil edən məlumatlar mənbəi $\mathscr{U}$ üçün M. h. s.

$$\overline{H}_\varepsilon(\mathscr{U}) = \lim_{t-s\to\infty} (t-s)^{-1} H_\varepsilon(X_s^t) \qquad (1)$$

düsturu ilə təyin olunur, bu şərtlə ki, bu limit mövcud olsun, burada $H_\varepsilon(X_s^t)$, – $X_s^t = \{X(\tau),\ s < \tau \le t\}$ məlumatlarının *epsilon – entropiyasıdır*.

X_n təsadüfi kəmiyyətlərilə alınan $X = \{X_n, -\infty < n < \infty\}$ məlumatını hasil edən diskret mənbə üçün dəqiq bərpa halında M. h. s. (1) düsturu şəklində deyil,

$$\overline{H}(\mathscr{U}) = \lim_{n-m\to\infty} (n-m)^{-1} H(X_m^n) \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $H(X_m^n)$, – $X_m^n = \{X_l, m < l \le n\}$ təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır.

Stasionar mənbələr üçün (2) limiti vardır və bu limit

$$\lim_{m\to\infty} H(X_0 \mid X_1^m) = H(X_0 \mid X_1^\infty)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur.

Yaddaşsız stasionar mənbələr və Qauss mənbələri üçün $\overline{H}_\varepsilon(\mathscr{U})$ -nun aşkar düsturları alınır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., 1985.

MƏLUMATLARIN KVANTLANMASI « сообщений квантование; messages quantization » – bax, *Kvantlanması*, *məlumatların.*

MƏNBƏİ, MƏLUMATLARIN « источник сообщений; source » – bax, *Məlumatlar mənbəi.*

MƏNBƏLƏR VƏ KANALLAR ŞƏBƏKƏLƏRİ « источников и каналов сети; source-channel networks » – çoxsaylı abonentlərə xidməti reallaşdıran informasiya ötürmə sistemlərinin riyazi təsviri üçün istifadə olunan anlayışdır. M. və k. ş.-nin təsvir variantlarından biri M komponentli *çoxkomponentli məlumatlar mənbəi* U, kodlayıcı $E_1, \dots, E_K$ qurğular çoxluğu, dekodlayıcı $D_1, \dots, D_J$ qurğular çoxluğu və kodlayıcı ilə dekodlayıcı qurğuları əlaqələndirən K girişli, L çıxışlı çoxkomponentli kanal vasitəsilə ifadə olunur. $1 \le k \le K$ olduqda, hər bir kodlayıcı E_k qurğusu üçün $A_k \subset \{1, \dots, M\}$ altçoxluğu verilir (U mənbəsinin E_k qurğusunu kodlaşdıran komponentlər). $1 \le j \le J$ olduqda, hər bir dekodlayıcı D_j qurğusu üçün $B_j \subset \{1, \dots, M\}$ altçoxluqları (U mənbəsinin verilən D_j qurğusu ilə ötürüləcək (bərpa ediləcək) komponentləri) və $C_j \subset \{1, \dots, L\}$ (verilən D_j qurğusunu müşahidə edən kanallar şəbəkələrinin çıxışları) verilir. K girişli və L çıxışlı çoxkomponentli kanal (diskret, stasionar, yaddaşsız) K sayda $\mathscr{Y}_1, \dots, \mathscr{Y}_K$ giriş əlifbası, L sayda $\tilde{\mathscr{Y}}_1, \dots, \tilde{\mathscr{Y}}_L$ çıxış əlifbası (bütün $\mathscr{Y}_k$, $\tilde{\mathscr{Y}}_l$ sonlu çoxluqlardır) və $1 \le l \le L$ üçün $\tilde{y}_l \in \tilde{\mathscr{Y}}_l$, $1 \le k \le K$ üçün $y_k \in \mathscr{Y}_k$ olduqda $p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L \mid y_1, \dots, y_k)$ keçid ehtimalları (giriş simvolları $y_1, \dots, y_K$ olduqda çıxış simvollarının $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L$ olması şərti ehtimalı) toplusu ilə verilir. İxtiyari N üçün $p^{(N)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L \mid y_1, \dots, y_K)$ keçid ehtimallarının

$$p^{(N)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L \mid y_1, \dots, y_K) = \prod_{n=1}^{N} p(\tilde{y}_{1n}, \dots, \tilde{y}_{Ln} \mid y_{1n}, \dots, y_{Kn}) \qquad (1)$$

düsturu ilə verildiyi fərz olunur, burada $\tilde{y}_l \in \tilde{\mathscr{Y}}_L^N$, $y_k \in \mathscr{Y}_K^N$ ($\tilde{\mathscr{Y}}_l^N$, $\mathscr{Y}_k^N$ uyğun fəzaların N-ci dekart qüvvət üstləridir), $\tilde{y}_l = (\tilde{y}_{l1}, \dots, \tilde{y}_{lN}) \in \tilde{\mathscr{Y}}_l^N$, $y_k = (y_{k1}, \dots, y_{kN}) \in \mathscr{Y}_k^N$.

M. və k. ş. üçün (N_1, N_2) parametrlərli kod K sayda kodlayıcı φ_k, $1 \le k \le K$ və J sayda dekodlayıcı ψ_j, $1 \le j \le J$ funksiyaları toplusu ilə verilir. E_k qurğusu üçün φ_k kodlayıcı funksiyası

$$\varphi_k : \left(\prod_{m \in A_k} \mathscr{X}_m \right)^{N_1} \to \mathscr{Y}_k^{N_2}$$

inikasıdır, burada $\prod$ – dekart hasildir, $\mathscr{X}_m$, – U mənbəinin m-ci komponentinin əlifbasıdır. Dekodlayıcı ψ_j funksiyası –

$$\psi_j : \left(\prod_{l \in C_j} \tilde{\mathscr{Y}}_l \right)^{N_2} \to \left(\prod_{m \in B_j} \mathscr{X}_m \right)^{N_1}$$

inikasıdır. φ_k, ψ_j funksiyalar toplusu (1) keçid ehtimalları və $p^{(N)}(x_1, \dots, x_m)$ mənbə ehtimalları ilə birlikdə $X_m^{N_1}$, $1 \le m \le M$; $Y_k^{N_2}$, $1 \le k \le K$; $\tilde{Y}_l^{N_2}$, $1 \le l \le L$; $\hat{X}_{jm}^{N_1}$, $1 \le j \le J$, $m \in B_j$ ($X_m^{N_1}$, $\hat{X}_{jm}^{N_1}$ $\mathscr{X}_m^{N_1}$ -dən qiymətlər alır; $Y_k^{N_2}$ $\mathscr{Y}_k^{N_2}$, $\tilde{Y}_l^{N_2}$ isə $\tilde{\mathscr{Y}}_l^{N_2}$ -dən qiymətlər alır) təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanmasını

$$\mathbf{P}\{X_m^{N_1} = x_m, Y_k^{N_2} = y_k, Y_l^{N_1} = \tilde{y}_l, \hat{X}_{jm}^{N_1} = \hat{x}_{jm}\} =$$

$$= \begin{cases} p^{(N_1)}(x_1, \dots, x_M)\, p^{N_2}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L \mid y_1, \dots, y_k), & \text{əgər} \\ \text{bütün } k\text{–lar üçün } \varphi_k(x_m, m \in A_k) = y_k & \text{olarsa;} \\ \psi_j(\tilde{y}_l, l \in C_j) = (\hat{x}_{jm}, m \in B_j), & \text{bütün } j\text{–lar üçün;} \\ 0, & \text{əks halda} \end{cases}$$

düsturu ilə təyin edir.

M. və k. ş.-nin xəta ehtimalı $P_e(\varphi, \psi)$ kodlayıcı $\varphi = \{\varphi_k\}$ və dekodlayıcı $\psi = \{\psi_j\}$ funksiyaları vasitəsilə

$$P_e = 1 - P\ \{x_{jm} = x_m, \text{bütün } j \text{ qiymətlərində}, 1 \le j \le J$$
$$\text{bütün } m \in B_j \text{ üçün } \}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əgər verilmiş M. və k. ş. üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində (N_1, N_2) parametrlərli elə (φ, ψ) kodu vardırsa ki, bu M. və k. ş. üçün $N_2 \le (\theta + \varepsilon) N_1$ və $P_e(\varphi, \psi) < \varepsilon$ münasibətləri ödənilir, onda verilmiş M. və k. ş. üçün θ ləngiməsi mümkün ola bilər, deyilir. M. və k. ş. üçün kodlama nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri mümkün ola bilən ləngimələrin aşağı sərhədi Θ-nın hesablanılmasıdır. Hal-hazırda bu məsələnin həllinə müyəssər olunmamışdır. Bəzi məlum nəticələr *Genişyayımlı kanal*, *İnterferens kanal*, *Çoxgirişli kanal*, *Kodlanma*(sı) əlavə informasiyalı mənbənin məqalələrində verilmişdir.

M. və k. ş. üçün kodlama məsələlərinin xüsusi halları çoxkomponentli məlumatlar mənbəi və çoxkomponentli kanal üçün kodlama məsələləridir. Birinci halda fərz olunur ki, çoxkomponentli kanalın ayrı-ayrı komponentləri asılı olmayandırlar, yəni $K = L$ və keçid ehtimalları

$$p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L \mid y_1, \dots, y_L) = p_1(\tilde{y}_1 \mid y_1) \dots p_L(\tilde{y}_L \mid y_L) \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $p_1, \dots, p_L$ – yaddaşsız diskret stasionar kanalların keçid ehtimallarıdır. $R_1, \dots, R_L$ – bu kanalların ötürücülük qabiliyyətləri xarakteristikaları olsun. Əgər verilmiş M. və k. ş. üçün $\theta = 1$ ləngiməsi mümkün ola bilərsə, onda kodlayıcı E_l qurğuları və dekodlayıcı D_l qurğuları ilə verilən (yəni A_l, B_l, C_l altçoxluqları ilə) kodlama sxemli çoxkomponentli U mənbəi üçün $R = (R_1, \dots, R_L)$ toplusu mümkün ola bilinəndir, deyilir. Şennon teoreminə əsasən, (2) növlü kanal üçün θ qiymətinin mümkünlüyü yalnız R-dən asılı olub, konkret $p_1, \dots, p_L$ keçid ehtimalları toplusundan asılı deyildir. Mümkün ola bilən bütün $R = (R_1, \dots, R_L)$ toplular çoxluğu, verilmiş kodlama sxemində, çoxkomponentli U mənbəi üçün $\mathscr{R}$ kodlamasının məqbul sürətlər oblastı adlanır. $M = L = 1$ (bir mənbə, bir kanal) halında mənbə üçün adi kodlama teoremi alınır: $\mathscr{R} = \{R \ge H(X)\}$; $H(X)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin entropiyasıdır. $K = L = 2$, $J = 1$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $B_1 = C_1 = \{1, 2\}$ olduqda

$$\mathscr{R} = \{(R_1, R_2),\ R_1 \ge H(X_1 \mid X_2),\ R_2 \ge H(X_2 \mid X_1),$$
$$R_1 + R_2 \ge H(X_1, X_2)\}$$

teoremi alınır (bax, *Kodlanma*(sı) əlavə informasiyalı mənbənin).

Analoji olaraq, $p(x_1, \dots, x_M) = p_1(x_1) \dots p_M(x_M)$ şərti ödənilən asılı olmayan komponentli mənbəyə baxdıqda ehtimal paylanması p_m olan X_m təsadüfi kəmiyyəti verildiyi halda $R_m = H(X_m)$ olduğu fərz olunur ($H(X_m)$, – U mənbəinin m-ci komponentinin entropiyasıdır). Əgər verilmiş M. və k. ş. üçün $\theta = 1$ ləngiməsi mümkün ola biləndirsə, onda verilmiş kodlama sxemində $p(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_L \mid y_1, \dots, y_K)$ keçid ehtimalları ilə verilən kanallar şəbəkəsi üçün $R = (R_1, \dots, R_m)$ toplusu mümkün ola biləndir, deyilir. Yenə də Şennon teoreminə əsasən bu mümkünlüyün $p_1, \dots, p_M$ ehtimal paylanmalarından deyil, məhz R-dən asılı olduğu alınır. Bütün mümkün ola bilən $R = (R_1, \dots, R_m)$, $R_M \ge 0$ topluları oblastı $\mathscr{R}$ verilən kanallar şəbəkəsinin ötürücülük qabiliyyəti oblastı adlanır. Birkomponentli rabitə kanalı üçün $\mathscr{R} = \{0 \le R \le C\}$ alınır; C – keçid ehtimalları $p(\tilde{y} \mid y)$ olan kanalın ötürücülük qabiliyyətidir. Digər nəticələrlə *Çoxyayımlı kanal*, *Çoxgirişli kanal*, *İnterferens kanal* məqalələrində tanış olmaq olar.

Bir qədər daha çətin M. və k. ş.-inə də baxmaq olar. Belə ki, bəzən şəbəkəyə aralıq qurğular və əlavə kanallar daxil olunur ki, bunda məqsəd informasiyanın mənbədən qəbuledicyə ötürülməsinə kömək etməkdir (bu şəbəkələr retranslyatorlu şəbəkələr adlanır). M. və k. ş.-nə tərs rabitə (dekodlayıcı D_k qurğularından kodlayıcı E_k qurğularına), həm də kodlayıcı qurğular arasında müxtəlif tipli əlaqələr daxil etmək olar (baxışla kodlama adlanan). *Məlumatların bərpaolunma dəqiqliyi* kriterisi kimi xətanın ehtimalına deyil, orta təhrifə (yalnışlığa) baxmaq lazımdır (təhrifin vektor ölçüsünə görə). Sistemə elə kanallar daxil etmək olar ki, bu kanallar vasitəsilə informasiya bir neçə istiqamətdə ötürülsün (*çoxtərəfli kanallar*).

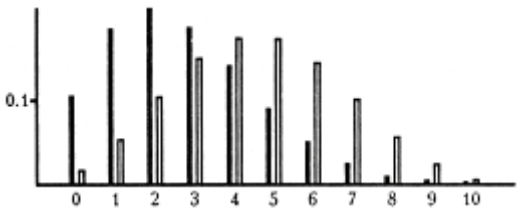
Nəhayət, kəsilməz əlifbalı və kəsilməz zamanlı M. və k. ş.-nə də baxmaq olar (bu halda, Qauss mənbələr və kanalları xüsusilə maraqlıdır).

Əd.: [1] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [2] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

MƏNFİ BİNOMİAL PAYLANMA « отрицательное биномиальное распределение; negative binomial distribution » – $k = 0, 1, 2, \dots$ tam qiymətlərini

$$f(k; r; p) = \mathbf{P}\{\xi = k\} = C^k_{r-1+k}\ p^r (1-p)^k \qquad (*)$$

ehtimalları ilə alan $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *diskret paylanmasıdır*, $0 < p < 1$ və $r > 0$ (bax, şəkil).



$p = 0,3;\ r = 1$ və $p = 0,6;\ r = 6$ qiymətlərində mənfi binomial paylanma.

$f(k; r, p)$ – Bernulli sınaqlar ardıcıllığında r-ci «müvəffəqiyyətə» qədər məhz k sayda «qeyri – müvəffəqiyyət», r-ci

«müvəffəqiyyətin» isə $(r+k)$-cı sınaqda baş verməsi hadisəsinin ehtimalı kimi interpretasiya olunur (bax, [2]). M. b. p.-nın doğuran və xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq,

$$\psi(s) = p^r (1-qs)^{-r},$$

$$\varphi(s) = p^r (1-q\,e^{is})^{-r}$$

düsturları ilə ifadə olunur; $q = 1-p$, p – Bernulli sınağında «müvəffəqiyyət» ehtimalıdır.

Riyazi gözləmə və dispersiya uyğun olaraq rq/p və rq/p^2; asimmetriya – $As = (2-p)/\sqrt{r(1-p)}$, eksses – $Es = 6/r + p^2/r(1-p)$ ifadələrilə təyin olunur. M. b. p. funksiyası beta-paylanma funksiyasının p nöqtəsində qiymətlərilə

$$F(k) = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{B(r, k+1)} \int_0^p x^{r-1}(1-x)^k\,dx$$

münasibətilə təyin olunur; $B(r, k+1)$ – beta – funksiyasıdır. «M. b. p.» (mənfi qüvvət üstlü binomun doğurduğu paylanma) termini (*) münasibətindəki ehtimalların $p^r(1-qs)^{-r}$-in (doğuran funksiyanın) s-ə görə ayrılışında əmsallar olduğu səbəbindən qəbul edilmişdir.

M. b. p. ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox tətbiqi məsələlərində təsadüf olunur. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi $r > 0$ tam qiymətlərində M. b. p. «r-ci müvəffəqiyyəti gözləmə müddəti»nin paylanması kimi interpretasiya olunur və bu formada, adətən, Paskal paylanması adlanır və o, qamma – paylanmanın diskret analoqudur. $r = 1$ olduqda, M. b. p. – həndəsi paylanma ilə üst-üstə düşür.

M. b. p.-ya paylanma parametrlərinin randomlanması ilə bağlı məsələlərdə çox təsadüf olunur: məs., ξ – təsadüfi λ parametrli Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət, λ-nın paylanması sıxlıq funksiyası $\frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-\alpha x}$, $x > 0$, $\mu > 0$ olan qamma – paylanma olarsa, onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması – parametrləri $r = \mu$, $p = \alpha/(1+\alpha)$ olan M. b. p.-dır. M. b. p. – Poya paylanmasının limit formasıdır.

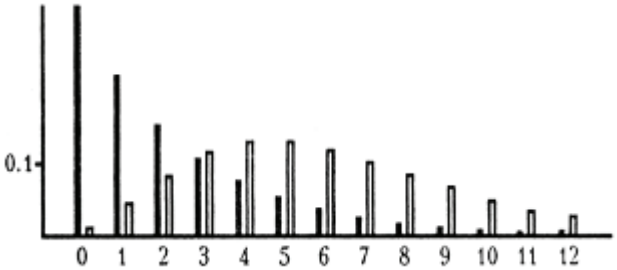
Parametrləri uyğun olaraq, p və $r_1, \ldots, r_n$ olan M. b. p. ilə paylanmış asılı olmayan $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi parametrləri p və $r_1 + \ldots + r_n$ olan M. b. p. ilə paylanır. r-in böyük, q-nün isə kiçik qiymətləri üçün $rq \sim \lambda$ olduqda M. b. p. λ parametrli Puasson qanununa yaxınlaşır. M. b. p.-nın xassələrinin əksəriyyəti onun ümumiləşmiş Puasson prosesi olması faktoru ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, M., 1984.

MƏNFİ HİPERHƏNDƏSİ PAYLANMA « отрицательное гипергеометрическое распределение; negative hypergeometric distribution » – $k = 0, 1, 2, \ldots$ tam qiymətlərini

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{C_{k+m-1}^{k} C_{N-m-k}^{M-m}}{C_N^M} \qquad (*)$$

ehtimalları ilə alan $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin diskret



$N = 20$, $M = 10$, $m = 3$ və $m = 5$ olduqda mənfi hiperhəndəsi paylanma.

paylanmasıdır, burada N, M, m – tam mənfi olmayan ədədlərdir və $m \le M \le N$. M. h. p. qaytarmamaq şərtilə seçim sxemində baxılan məsələlərdə alınır: hər hansı N həcmli ümumi çoxluqda M sayda «nişanlanmış», $N-M$ sayda «nişanlanmamış» eyni tipli element olsun. Bu çoxluqdan qaytarmamaq şərtilə sxemilə «nişanlanmış» elementlərin sayı qeyd olunmuş m-ə bərabər olana qədər $(0 \le m \le M)$ seçim aparılır, onda seçimdəki «nişanlanmamış» elementlərin sayı – ξ təsadüfi kəmiyyəti (*) M. h. p. qanunu ilə paylanır. $\xi + m$ təsadüfi kəmiyyəti – seçimin həcmi – də M. h. p. qanunu ilə paylanır. M. h. p. – qaytarmaq şərtilə sxemilə alınan *mənfi binomial paylanmaya* analoji adlandırılmışdır.

M. h. p. ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq:

$$m\,\frac{N-M}{M+1} \quad \text{və} \quad m\,\frac{(N+1)(N-M)}{(M+1)(M+2)}\left(1 - \frac{m}{M+1}\right)$$

ifadələrilə təyin olunur. $N \to \infty$, $M \to \infty$, $N - M \to \infty$ olduqda, $M/N \to p$, $(N-M)/N \to 1-p$ olduğundan M. h. p. m və p parametrli *mənfi binomial paylanmaya* yaxınlaşır.

N, M, m parametrləri M. h. p.-nın paylanma funksiyası $F(m)$ parametrləri N, M, m olan hiperhəndəsi paylanmanın paylanma funksiyası $G(n)$ ilə $F(m) = 1 - G(n-1)$ münasibətilə bağlıdır. Bu münasibətə əsasən M. h. p. ilə bağlı riyazi statistika məsələlərinin həllində hiperhəndəsi paylanma üçün mövcud cədvəllərdən istifadə edilir. M. h. p., məs., keyfiyyətə statistik nəzarət məsələlərində tətbiq olunur.

Əd.: [1] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, M., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., M., 1983.

MƏNFİ KORRELYASİYA « отрицательная корреляция; negative correlation » – iki təsadüfi kəmiyyət arasında elə korrelyasion asılılıqdır ki, bu asılılıq olduqda bir təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin artması digər təsadüfi kəmiyyətin şərti orta qiymətlərinin azalmasına səbəb olur. Əgər bu təsadüfi kəmiyyətlər üçün korrelyasiya əmsalı ρ vardırsa, onda $\rho < 0$.

Bax, *Asılılıq*.

MƏNFİ MÜƏYYƏN FUNKSİYA « отрицательно определенная функция; negative definite function » – mənfi-müəyyən nüvə, – *müsbət müəyyən funksiya* anlayışına dual anlayışdır. Λ – boş olmayan çoxluq olsun; əgər hər bir natural n, Λ-dan olan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ elementlərinin

ixtiyari toplusu və $\sum_{k=1}^{n} c_k\, 3 = 0$ şərtini ödəyən hər bir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kompleks ədədlər toplusu üçün

$$\sum_{k,j=1}^{p} c_k \bar{c}_j \rho(\lambda_k, \lambda_j) \leq 0$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, $\rho : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ funksiyasına m ə n f i m ü ə y y ə n f u n k s i y a deyilir. Əgər $X(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ ikinci tərtib təsadüfi funksiya olarsa, onda $\rho(s,t) = \mathbf{M}\left|X(s) - X(t)\right|^2$, $s, t \in \Lambda$ M. m. f.-dır. Əgər ρ Hermit funksiyası olarsa (yəni $\rho(s,t) = \overline{\rho(t,s)}$), onda ρ , yalnız və yalnız, o halda M. m. f.-dır ki, bütün $\alpha > 0$ üçün $\exp\{-\alpha\rho\}$ müsbət müəyyən funksiya olsun (*Şönberq teoremi*).

Λ qrup olarsa, $(s,t) \mapsto \Psi(s-t)$ funksiyası M. m. f. olarsa (ilkin tərif anlamında), $\Psi : \Lambda \to \mathbb{C}$ funksiyası M. m. f. adlanır.

MƏNFİ MÜƏYYƏN NÜVƏ « отрицательно определенное ядро; negative definite kernel » – bax, *Mənfi müəyyən funksiya.*

MƏNFİ POLİNOMİAL PAYLANMA « отрицательное полиномиальное распределение; negative multinomial distribution » – tam mənfi olmayan $m_1, \ldots, m_k$ qiymətlərini

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = m_1, \ldots, \xi_k = m_k\} =$$

$$= \frac{\Gamma(r + m_1 + \ldots + m_k)}{\Gamma(r)\, m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!}\; p_0^r\; p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}, \qquad (*)$$

$$r > 0,\ 0 < p_i < 1,\ i = 0, \ldots, k,\ p_0 + \ldots + p_k = 1$$

ehtimalları ilə alan $\xi_1, \ldots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal *paylanmasıdır*. M. p. p. mənfi tamqiymətli komponentlərli $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ təsadüfi vektorunun çoxölçülü diskret paylanmasıdır. $r, p_0, \ldots, p_k$ parametrlərli M. p. p.-nın doğuran funksiyası $\psi(z_1, \ldots, z_k) = p_0^r (1 - \sum_{i=1}^{k} z_i p_i)^r$ şəklindədir.

M. p. p. aşağıdakı polinomial sxemdə alınır. Asılı olmayan sınaqlar ardıcıl aparılır. Bu sınaqların hər birində $0, 1, \ldots, k$ indeksli $(k+1)$ sayda müxtəlif nəticələr uyğun olaraq, $p_0, p_1, \ldots, p_k$ ehtimalları ilə baş verə bilər, $p_0 + \ldots + p_k = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 0, 1, \ldots, k$. 0 indeksli nəticənin r -ci dəfə baş verməsinə qədər təkrarlanan sınaqlar ardıcıl aparılır (r – tam ədəddir); onda əgər ξ_i sınaqların sonuna qədər müddətdə i indeksli nəticənin baş verməsi sayı olarsa, onda (*) düsturunun sağ tərəfi 0 indeksli nəticə baş verənə qədər $1, \ldots, k$ indeksli nəticələrin uyğun olaraq $m_1, \ldots, m_k$ dəfə baş verməsi ehtimalının ifadəsidir; $i = 1, \ldots, k$. M. p. p. $k = 1$ halında *mənfi binomial paylanma* ilə üst-üstə düşür və qeyd olunan mənada mənfi binomial paylanmanın ümumiləşmiş halıdır.

Əgər $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ təsadüfi vektoru $k > 1$, $p_0, p_1, \ldots, p_k$ parametrlərli polinomial paylanmaya malikdirsə, k parametrinin özü isə $r > 0$, $0 < \pi < 1$ parametrlərli mənfi binomial paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda $\xi_0 = r$ şərtilə $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ vektorunun paylanması r, $p_0(1-\pi), \ldots, p_k(1-\pi)$ parametrlərli M. p. p.-dır.

Əd.: [1] Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия, M., 1999.

MƏNSUBLUQ FUNKSİYASI « принадлежности функция; membership function » – bax, *Qeyri – səlis çoxluq*.

MƏRKƏZ(i) t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t i n « **центр** с л у ч а й н о й в е л и ч и н ы; **centre** o f a r a n d o m v a r i a b l e », p a y l a n m a n ı n m ə r k ə z i, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının ədədi xarakteristikasıdır, bu təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyası $f_\xi(t)$ əsasında aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$C_r(\xi) = \int_0^1 \operatorname{Im} \log f_\xi(rt)\mu(dt) \Big/ r \int_0^1 t\,\mu(dt),$$

burada μ – hər hansı ölçüdür və bu ölçü üçün məxrəcdəki inteqral sonludur və r , – $\Delta(\xi)$ təsadüfi kəmiyyətinin indeksindən kiçik, müsbət ədəddir.

«Təsadufi kəmiyyətin M.» («m ə r k ə z») termini [1]-də daxil olunmuşdur. Təsadufi kəmiyyətin M. riyazi gözləmənin bir çox xassələrinə malikdir, o cümlədən, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün additivlik xassəsini ödəyir. O, zəif yığılma topologiyasında kəsilməzdir və ehtimal paylanmasının medianının bəzi xassələrini ödəyir. $t = 1$ nöqtəsində μ ölçüsü cırlaşan olduğu hala y ü n g ü l m ə r k ə z, $\mu(dt) = dt$ olduğu hala a ğ ı r m ə r k ə z uyğundur.

Təsadufi kəmiyyətin M. və onun ümumiləşmələri çoxölçülü halda təsadüfi kəmiyyətlər və vektorların cəmlənmə modellərində faydalı vasitədir (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 5, с. 1010–12; [2] К р у г л о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 2, с. 209–07; [3] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, M., 1986.

MƏRKƏZİ QARIŞIQ MOMENT « центральный смешанный момент; central mixed moment » – bax, *Çoxölçülü paylanma*.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ « центральная предельная теорема; central limit theorem » – baxılan modeldə limit paylanması kimi normal paylanmadan və ya onun hər hansı təbii analoqundan istifadə olunma ilə fərqlənən *limit teoreminin* geniş ailəsinə aid ümumiləşdirilmiş termindir. Adətən, bu belə anlaşılır ki, model asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə və ya uyğun olaraq, «ümumiləşmiş» cəmlənmə sxemidir (ola bilər ki, asimptotik mənada). *Muavr – Laplas teoremi*, *Lyapunov teoremi* və *Lindeberq – Feller teoremi* bu ailədən olan klassik limit teoremləridir. Bütün bu teoremlər qiymətləri $\mathbb{R}^1$ -dən olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin artmaqda olan $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ cəmlərinin sxemi ilə əlaqədardır; bu cəmlər hər hansı A_n və $B_n > 0$ sabitlərinin (bunları müvafiq surətdə seçmək olar) köməyilə xətti olaraq,

$$Z_n = B_n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n) - A_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

şəkildə ifadə oluna bilinirlər. Bu cəmlərin paylanma funksiyaları

üçün $n \to \infty$ olduqda asimptotik yaxınlaşma kimi standart normal qanunun paylanma funksiyası –

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)\, du$$

istifadə olunur və isbat olunur ki, X_j toplananlarının paylanmaları üçün müəyyən fərziyyələrlə

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_x \left| F_n(x) - \Phi(x) \right| \to 0, \; n \to \infty$$

münasibəti ödənilir.

20-ci əsrin 20-ci illərindən başlayaraq M. l. t.-lərinə daha ümumi konstruksiya çərçivəsində baxılmağa başlanıldı, yəni *seriyalar sxemi* əmələ gətirən X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin limit ehtimal paylanmaları araşdırılmağa başlanıldı; seriyalar sxemində cəmlər –

$$Z_n = X_{n_1} + X_{n_2} + \ldots - A_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

A_n – həqiqi sabitlərdir (bax, məs., [12]).

(1) sxemi ilə bağlı hər bir limit teoremində çoxqat kompozisiyalar –

$$F_n(x) = (F_{n_1} * F_{n_2} * \ldots)(x + A_n)$$

funksiyalarının asimptotikası araşdırılır, bunlar isə analitik baxımdan olduqca mürəkkəb və böyük obyektlər olur. 20-ci əsrin əvvəllərinə qədər, A. M. Lyapunovun *xarakteristik funksiyalar metoduna* qədər, Muavr – Laplas teoreminin toplananları təsadüfi kəmiyyətlər olan daha geniş sinif üçün genişləndirilmiş məsələsi olduqca mürəkkəb, məs., sadə ədədlərin paylanması məsələsi ilə müqayisə olunan bir məsələ idi. P. L. Çebışevin bu məsələni uğurla həll etməsinə baxmayaraq, o, M. l. t.-nin Lyapunov teoremi tipli halında isbatında yaranan bütün çətinliklərin öhdəsindən gələ bilməmişdi. Baxılan F_n, F_{nj} və Φ paylanmalarının f_n, f_{nj}, g xarakteristik funksiyalarından istifadə edərək, $n \to \infty$ olduqda, F_n-in Φ-ə qeyri – məhdud yaxınlaşmasının isbatı hər bir həqiqi t qiymətində

$$f_n(t) = f_{n_1}(t) f_{n_2}(t) \ldots e^{-itA_n} \to g(t) = e^{-t^2/2}$$

münasibətinin isbatı ilə əvəz olundu.

Normal paylanma kəsilməz paylanma olduğundan, M. l. t.-ində paylanmaların həm zəif, həm də güclü yığılmasından (yəni həm L – *Levi metrikası*, həm də ρ – *müntəzəm metrikasından*) istifadə etmək olar.

F_n, F_{nj} – uyğun olaraq, Z_n, X_{ij} təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyaları olsun. 20-ci əsrin 60-cı illərinə qədər klassik modellərdə S_n cəmlərində toplananların sayı sonlu fərz olunurdu və bu cəmlər getdikcə artan Z_n-lər sxemi ilə bağlı olduğundan, bu şərtdən imtina etmək mümkün olmurdu, lakin bununla belə, ümumi baxımdan, mahiyyəti dəyişmədən hesab etmək olar ki, Z_n-lər məhz asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin yığılan cəmləridir.

Kolmoqorov modelində toplananlar *sonsuz kiçilənlik şərtini* ödəyirlər: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sup \left[\mathbf{P} \{ |X_{nj}| > \varepsilon \} : \; j \geq 1 \right] \to 0, \; n \to \infty, \qquad (2)$$

şərti ödənildikdə F_n-in Φ yığılmasının ən ümumi kriterisi aşağıdakı kimi ifadə olunur. [Bu kriteri $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $W = \lambda G$, $\lambda \geq 0$ və G – hər hansı paylanma funksiyası olduqda, ixtiyari sonsuz bölünən $G(x, \gamma, W)$ qanununa yığılma üçün ümumi kriterinin xüsusi halıdır; bu kriteri *Limit teoremləri* məq.-də verilmişdir]. (bax, həm də [4], [1]-də isə o, ənənəvi formada şərh olunmuşdur) [1]-də A_n sabitlərinin $A_n = C_1(X_{n_1}) + C_1(X_{n_2}) + \ldots$ şəklində verildikləri fərz olunur, burada $C_1(X_{nj})$, – X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərinin *mərkəzidir*, bunlar (2)-yə əsasən n-in olduqca böyük qiymətləri üçün də mövcuddurlar.

$$\overline{F}_{nj}(r) = F_{nj}(x + C_1(X_{nj}))$$

və

$$W_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2} \, d\overline{F}_{nj}(u), \quad n \geq 1$$

funksiyaları daxil edilir. Φ funksiyasına onun $\gamma = 0$, $W = E_0$ xarakteristikaları uyğundur, burada E_0-la sıfırda cırlaşan paylanma işarə olunmuşdur. Qeyd olunmuş ümumi kriteriyə əsasən $n \to \infty$ olduqda

$$L(F_n, \Phi) \to 0 \Leftrightarrow L(W_n, E_0) \to 0 \qquad (3)$$

münasibəti alınır. Bundan əlavə, limit qanununun kəsilməzliyinə əsasən

$$L(F_n, \Phi) \to 0 \Leftrightarrow \rho(F_n, \Phi) \to 0$$

münasibəti ödənilir. (3) şərti aşağıdakı müddəa ilə eynigüclüdür: hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\sum_j \int_{|x|>\varepsilon} d\overline{F}_{nj}(x) \to 0, \qquad (4)$$

$$\sum_j \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 \, d\overline{F}_{nj}(x) \to 1 \qquad (5)$$

münasibətləri doğrudur. İlkin (2) şərti ödənildikdə, (4), (5) şərtləri F_n üçün limit qanununun varlığını və eyni zamanda bu qanunun məhz Φ olduğunu təmin edir. Əgər limit qanununun varlığı əlavə olaraq şərtləşdirilirsə, onda normal qanuna yığılma kriterisi (ola bilər ki, standart normal qanun olmasın) yalnız (4) şərtindən ibarət olur, bu şərt və (2) nəzərə alınmaqla (2) şərtinin daha güclü formasını almaq olur: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P} \{ \sup_j |X_{nj}| > \varepsilon \} \to 0, \quad n \to \infty \qquad (6)$$

münasibəti doğrudur (Xinçin teoremi). (1)-də təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərini mərkəzləşdirən A_n sabitlərinin seçilməsi müstəqil problemdir və bu problemin müxtəlif həll yolları araşdırılmışdır (bax, [4]). Ən sadə hal, X_{nj}-lərin sonlu momentlərə malik olduğu, bunların Z_n cəmində sonlu sayda olduğu hal sayılır, bu halda $A_n = \sum_j \mathbf{M} X_{nj}$ götürərək, $F_{nj}(X) = F_{nj}(x + \mathbf{M} X_{nj})$ paylanmalarından istifadə etmək olur.

Limit normal qanunu üçün spesifik (6) şərtinin şəkli **ekstremal kriteri** adlanan kriteri ilə sıx bağlıdır (bax, [2]).

(2) şərtindən imtina etdikdə F_n-in Φ-ə yığılma kriterisi bir qədər mürəkkəbləşir (bax, [4]). Doğrudan da, $G_{nj}(x) = \Phi(x/b_{nj})$, $j \geq 1$ – orta qiymətləri sıfra bərabər, dispersiyaları b_{nj}^2 ($b_{n1}^2 + b_{n2}^2 + \ldots = 1$) olan normal paylanma funksiyaları olduğu hala baxıldıqda, $\Phi = G_{n1} * G_{n2} * \ldots$ olur. K – bütün $\upsilon_n = \{G_{nj} : j \geq 1\}$ paylanmalarının çoxluğu və $\mathcal{N}_n(x)$ funksiyaları

$$\mathcal{N}_n(x) = \sum_j \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2}\, dG_{nj}(u), \quad n \geq 1$$

düsturu ilə təyin olunan funksiyalar olsun. Eyni qayda ilə $u_n = \{\overline{F}_{nj} : j \geq 1\}$ topluları üzrə $\mathcal{M}_n(x)$ funksiyaları qurulur. Fərz olunur ki,

$$\mu(u_n, \upsilon_n) = \sup_j L(\overline{F}_{nj}, G_{nj}) + Z(\mathcal{M}_n, \mathcal{N}_n).$$

$\rho(F_n, \Phi) \to 0$, $n \to \infty$ yığılma kriterisi belə anlaşılır: K-da elə υ_n^* topluları mövcud olmalıdır ki, bunlar üçün $n \to \infty$ olduqda $\mu(u_n, \upsilon_n^*) \to 0$ olsun. Bu kriteridə (2) şərti rolunu

$$\alpha_n = \sup_j L(\overline{F}_{nj}, G_{nj}^*) \to 0, \quad n \to \infty$$

şərti yerinə yetirir, bu şərtə görə u_n toplularından olan $\overline{F}_{nj}$ paylanmaları üçün onları υ_n^* toplularından olan uyğun G_{nj}^* paylanmalarına yaxınlaşdıran (j üzrə müntəzəm) toplular seçmək olar. Lakin (2)-dən fərqli olaraq, bu şərt, F_n və Φ-in asimptotik yaxınlaşması üçün zəruri şərt olur.

Əgər X_{nj} toplularının birinci və ikinci sonlu momentləri olarsa, onda kriteri olduqca sadələşir (bax, *Lindeberq – Feller teoremi*).

M. l. t. tətbiqdə ən tez-tez təsadüf olunan halları əhatə edir. Bununla əlaqədar olaraq, onun dəqiqləşdirilməsi və müxtəlif analoqlarının qurulmasına çox diqqət yetirilmişdir: zəif və müntəzəm yığılmalardan fərqli topologiyalarda yığılmalar, yığılma sürətinin qiymətləndirilməsi, asimptotik ayrılışlar, böyük yayınmalar ehtimallarının asimptotikası və s. kimi məsələlər öyrənilmişdir (bax, [3], [4]).

Misallar. $X_1, X_2, \ldots$ – ümumi paylanma funksiyası F və xarakteristik funksiyası f olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. (1) cəmlərində $X_{nj} = X_j/B_n$; A_n və $B_n > 0$ – sabitlərdir. Aşağıda *tam variasiya metrikası* σ ilə

$$\lambda_0(F_X, F_Y) = \sup_t |f_X(t) - f_Y(t)|$$

metrikası L_p – metrika ilə doğurulmuş yığılma topologiyalarına ba-xılır, burada f_X, – F_X paylanmasının xarakteristik funksiyasıdır.

1) $\lambda_0(F_n, \Phi) \to 0$, $n \to \infty$ yığılması, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $L(F_n, \Phi) \to 0$ və $\limsup_{t\to\infty} |f(t)| < 1$ münasibətləri ödənilsin (bax, [4]).

2) $\sigma(F_n, \Phi) \to 0$ yığılması, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $L(F_n, \Phi) \to 0$ münasibəti ödənilsin və $F^{*n}(F_n(x) = F^{*n}((x + A_n)B_n))$ n – qat kompozisiyası n-in hər hansı qiymətində *Lebeq ayrılışında* mütləq kəsilməz komponentə malik olsun (bax, [6]).

3) $p > 1/2$ olsun, onda $n \to \infty$ olduqda

$$L_p(F_n, \Phi) = \int |F_n(x) - \Phi(x)|^p dx \to 0 \Leftrightarrow \rho(F_n, \Phi) \to 0$$

münasibəti doğrudur (bax, [5]). Daha ümumi halda $|F_n - \Phi|^p$ əvəzinə $\varphi(F_n - \Phi)$ istifadə olunduqda və φ funksiyaların geniş bir sinfindən seçildikdə, məsafənin bu şəkildə seçilməsi mənasında F_n-in Φ-ə yığılma kriterisi [8]-də tapılmışdır.

4) $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 = 1$ hər hansı $r > 2$ üçün $\beta_r = \mathbf{M}|X_1|^r < \infty$ (bu halda $A_n = 0$, $B_n^2 = n$ götürmək olar) və γ_r – standart normal qanunun r tərtib mütləq momenti olsun. Onda

$$\rho(F_n, \Phi) + \left|\mathbf{M}|Z_n|^r - \gamma_r\right| \to 0, \quad n \to \infty$$

münasibəti doğrudur. Bu faktın S. N. Bernşteyn tərəfindən ümumiləşmiş halı [7]-də verilmişdir (bax, [11]).

5) Əvvəlki misalın fərziyyələrində $r = 3$ halında isbat olunmuşdur ki (bax, [9], [4]),

$$\rho(F_n, \Phi) \leq c_0 \beta_3 n^{-1/2} + o(n^{-1/2}), \qquad (7)$$

burada $c_0 = (\sqrt{10}+3)6\sqrt{2\pi} = 0{,}4097\ldots$ – (7)–də istifadə olunan bilən ən kiçik sabitdir. Mütləq qiymətlənmə *Berri – Esseen teoremi* məq.-də verilmişdir. Əgər $\mathcal{Q}$ $\mathbb{R}^1$-də verilmiş bütün normal paylanmalar çoxluğu olarsa, onda

$$\rho(F_n, \mathcal{Q}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \beta_3 n^{-1/2} + o(n^{-1/2}) \qquad (8)$$

münasibəti doğrudur (bax, [10], [4]).

Hər iki asimptotik qiymətləndirilmələrdə qeyd olunan moment şərtlərilə bağlı F paylanmaları sinfi üzrə, ([7], [8]-də) qalıq hədləri $o(n^{-1/2})$-lərin müntəzəm olması hələ ki, isbat olunmamışdır.

6) Eyni fərziyyələrlə (əvvəlki misaldakı) aşağıdakı **qeyri–müntəzəm qiymətləndirmə** də doğrudur:

$$\sup_x (1 + |x|^3)|F_n(x) - \Phi(x)| \leq c\,\beta_3\, n^{-1/2}, \; n \geq 1, \qquad (9)$$

burada c – mütləq sabitdir (bax, [3]).

(7) – (9) tipli M. l. t.-də **yığılma sürəti qiymətləndirmələri**, bir qayda olaraq, F_n-lərin Φ-ə yaxınlaşmasındakı əsl xətanı yaxşı əks etdirmir (bunu hələ [13]-də A. M. Lyapunov qeyd etmişdi). Bu onunla izah olunur ki, bir tərəfdən F paylanmaları olduqca müxtəlif ola bilir və bunlar da ənənəvi olaraq yalnız bir neçə moment şərtlərilə seçilir, digər

tərəfdən qiymətləndirmə strukturu $F_n(x)-\Phi(x)$ fərqlərinin asimptotik ifadələrilə bağlı verilir və bu da yalnız n -in böyük qiymətləri üçün təbii olur. M. l. t.-nin olduqca geniş istifadə edildiyi tətbiqi hallarda nəticələr çıxarıldıqda F_n -lərin Φ -ə yaxınlaşmalarının xətasının qiyməti haqqında məsələ əksər hallarda nəzərə alınmır, bu da ən tipik hallarda qiymətləndirmələrin mükəmməl olmadığına sübutdur.

M. l. t. ehtimal nəzəriyyəsinin, riyazi statistikanın, ehtimali ədədlər nəzəriyyəsinin müxtəlif bölmələrində tətbiq olunur. Aşağıdakı misaldan görünür ki, M. l. t. paylanmaların xarakterizasiyası kimi asimptotik yaxınlaşmalardan uzaq olan hallarda belə istifadə olunur.

7) Cırlaşmayan F paylanmalarının çoxluğunda

$$F(x) = (F*F)\,(x\sqrt{2}) \qquad (10)$$

funksional tənliyi verilir, f, – F paylanmasının xarakteristik funksiyası olsun. (10)-dan

$$f(t) = f^N(t/\sqrt{N}),\quad N = 2^n,\quad n = 1, 2, \ldots$$

bərabərliyi alınır. Bu isə onu ifadə edir ki, ixtiyari t qiymətində $f(t) \neq 0$ və

$$d(t) = -N \operatorname{Re} \log f(t/\sqrt{N}),$$

N -dən asılı deyildir. $N \to \infty$ olduqda

$$dt \sim N \operatorname{Re}(1-f(t/\sqrt{N})) =$$

$$= N\int (1-\cos tx/\sqrt{N})\, dF(x) \to \frac{1}{2}t^2\int x^2\, dF(x)$$

münasibəti doğrudur, yəni F paylanmasının ikinci momenti σ^2 sonludur. (10) ilə birlikdə bu onu ifadə edir ki, F paylanmasının birinci momenti sıfra bərabərdir. M. l. t.-nə müvafiq olaraq

$$f^N(t/\sqrt{N}) \to g(t) = \exp(-\sigma^2 t^2/2)$$

olur, yəni $f(t) = g(t)$ və $F(t) = \Phi(x/\sigma)$.

Böyük ədədlər qanununa qarşı *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* qoyulduğu kimi M. l. t.-nin gücləndirilmiş analoqunu axtarmaq təbiidir. Bu istiqamətdə araşdırmalar nəticəsində alınmış g ü c l ə n d i r i l m i ş M. l. t.-ni qeyd etmək olar (bax, [14]).

$\mathfrak{X}_F = \{X\}$ – ümumi F paylanmasına tabe bütün təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu və $\mathbf{M}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$, və $\mathbf{M}\exp(c\,|\,X\,|) < \infty$ şərti hər hansı $c > 0$ üçün ödənilmiş olsun. $\mathfrak{N}$ – standart normal paylanma qanununa malik tabe bütün təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu olsun. Onda elə $X_1, X_2, \ldots \in \mathfrak{X}_F$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı və elə asılı olmayan $Y_1, Y_2, \ldots \in \mathfrak{N}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı vardır ki,

$$(X_1+\ldots+X_n) - (Y_1+\ldots+Y_n) = O(\log n),\quad n \to \infty$$

münasibəti 1 ehtimalla doğrudur.

M. l. t.-nin klassik variantları çoxsaylı daha mürəkkəb müxtəlif modellər üçün, o cümlədən, Markov zəncirləri, zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün, Abel qrupları və semi – qruplar üçün, qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi üçün alınmışdır.

Bax, *Limit teoremləri.*

Ədd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Б е р н ш т е й н С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 66–70; [3] П е т р о в В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [4] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [6] П р о х о р о в Ю. В., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 3, с. 112; [7] Б е р н ш т е й н С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 358–63; [8] К р у г л о в В. М., «Матем. заметки», 1979, т. 26, № 3, с. 483–91; [9] E s s e e n C.-G., «Skand. aktuarietidskr.», 1956, v. 39, № 3 – 4, p. 160–70; [10] Р о г о з и н Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 1, с. 125–27; [11] К р у г л о в В. М., «Матем. заметки», 1973, т. 18, в. 4, с. 734–52; [12] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [13] Л я п у н о в А. М., Избр. труды, М., 1948, с. 219–50; [14] K o m l o s J., M a j o r P., T u s n a d y G., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 34, H. 1, p. 33–58.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ B a n a x f ə z a s ı n d a **« центральная предельная теорема** в б а н а х о в о м п р о с т р а н с т в е; **central limit theorem** i n B a n a c h s p a c e **»** – Banax fəzasında qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər (təsadüfi elementlər) üçün *mərkəzi limit teoreminin* ümumiləşməsidir. İlk növbədə eyni qanunla paylanmış, klassik mənada normalanmış toplananlar halı maraq doğurur. $X, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlər ardıcıllığının separabel Banax fəzası B -də verildiyi fərz olunur. Əgər

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \qquad (1)$$

ardıcıllığı B fəzasında hər hansı Qauss ölçüsünə paylanmaya görə yığılırsa, onda X M. l. t.-ni ödəyir, deyilir və bu $X \in \mathsf{MLT}(B)$ şəklində simvolik [rus. ЦПТ(B)] yazılır. Əgər $B = \mathbb{R}^1$ və X təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda $X \in \mathsf{MLT}(\mathbb{R}^1)$, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\mathbf{M}X^2 < \infty$ və $\mathbf{M}X = 0$ olsun; bu halda (1) ardıcıllığı $\mathbb{R}^1$-də orta qiyməti sıfra bərabər, dispersiyası $\mathbf{M}X^2$ olan Qauss ölçüsünə yığılır. Bu halda Banax fəzasında M. l. t. üçün aşağıdakı müddəalar alınır. Əgər $X \in \mathsf{MLT}(B)$ olarsa, onda

a) hər bir $x^* \in B^*$ kəsilməz xətti funksionalı üçün $\mathbf{M}(x^*(X))^2 < \infty$ olur, yəni X zəif 2-ci tərtiblidir, deməli, R_X kovariasion operatoru təyin oluna bilinər;

b) $\mathbf{M}X = 0$;

c) R_X kovariasion operatoru B -də (limit) Qauss ölçüsünün kovariasion matrisi ilə üst-üstə düşür (belə də deyirlər ki, X Q a u s s k o v a r i a s i y a s ı n a malikdir və ya X p r e - q a u s s t ə s a d ü f i e l e m e n t i d i r).

Məlumdur ki, əgər $X \in \mathsf{MLT}(B)$ olarsa, onda

ç) $\lim t^2\,\mathbf{P}\{\|X\| > t\} = 0$, məsələn $\mathbf{M}\|X\|^p < \infty$, $p < 2$ (lakin ola bilər ki, $\mathbf{M}\|X^2\| = \infty$ olsun).

Əgər $B = L_p$, $1 \le p < \infty$ olarsa, onda a), b), c), ç) $X \in \mathsf{MLT}(B)$ olması üçün kafi şərtlərdir. Lakin ümumi halda bu şərtlər M. l. t.-nin doğruluğunu təmin etmir. Məsələn, kəsilməz

funksiyaların $C[0,1]$ fəzasında elə məhdud təsadüfi X elementi vardır ki, (belə təsadüfi element üçün ixtiyari $p>0$ qiymətində $\mathbf{M}\|X\|^p<\infty$), onun orta qiyməti sıfra bərabərdir, R_X – Qauss kovariasiyasıdır, lakin X M. l. t.-ni ödəmir. Bu misal ümumi Banax fəzaları üçün M. l. t. probleminin çətinliyini göstərir.

Ümumi halda $X\in \mathrm{MLT}(B)$ olması üçün a), b), c), ç) şərtlərinin və kiçik kürələr kriterisinin (bax, [8]) ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu kriteri belə ifadə olunur: ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün

$$\liminf_{n\to\infty}\ \mathbf{P}\left\{\left\|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}\right\|<\varepsilon\right\}>0.$$

2 tip və 2 koptip fəzalarda M. l. t. ən çox araşdırılmış haldır. 2 kotip fəzalar üçün M. l. t. xüsusilə sadə ifadə olunur: əgər B 2 kotip fəzadırsa, onda $X\in \mathrm{MLT}(B)$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, X elementi a), b), c) şərtlərini ödəsin. Tərsi də doğrudur: əgər a), b), c) şərtləri B -də M. l. t.-nin doğruluğu üçün kafi şərtlərdirsə, onda B 2 kotip fəzadır (bax, [5]).

2 tip fəzalar üçün sadə kafi şərt vardır: əgər B 2 tip fəzadırsa, əgər $\mathbf{M}X=0$ və $\mathbf{M}\|X\|^2<\infty$ olarsa, onda $X\in \mathrm{MLT}(B)$. Və tərsinə: əgər B elə fəzadırsa ki, bu şərtlər B -də M. l. t.-nin doğruluğu üçün kafidir, onda B, – 2 tip fəzadır (bax, [6]).

Banax fəzasında ilk M. l. t. [4]-də G – fəzalar adlanan fəzalar halı üçün ifadə olunmuşdu, lakin orda isbat olunmuş nəticə mahiyyətcə bazisli, 2 tip fəzada M. l. t. idi. 2 kotip fəzalarda mərkəzlənmə və preqaussluq şərtlərinin M. l. t. üçün kafiliyi hələ [2]-də isbat olunmuşdu, burada M. l. t. l_p, $1\le p\le 2$ fəzaları üçün isbat olunmuşdu.

Metriklənən kompaktda kəsilməz funksiyaların $C(S)$ fəzasında M. l. t. halı ən azı iki səbəbdən mühümdür. Birincisi, kəsilməz funksiyalar fəzası – təsadüfi proseslərin geniş sinfinin realizasiyalarının fəzasıdır. İkincisi, $C[0,1]$ fəzası üçün M. l. t. probleminin həlli, onun universallığına görə, bu problemin həllini prinsip etibarilə, ümumi separabel Banax fəzası üçün verə bilərdi. Ən mühüm məlum nəticələr aşağıdakılardır.

X – orta qiyməti sıfır olan, Qauss kovariasiyasına malik $C(S)$ fəzasında təsadüfi element, Γ, – $C(S)$ -də Qauss təsadüfi elementi, $Y\ge 0$ isə $\sup\limits_{t>0} t^2\,\mathbf{P}\{Y\ge t\}<\infty$ xassəli təsadüfi kəmiyyət olsun.

Əgər

$$|X(t)-X(s)|\ \le\ Y\,\mathbf{M}|\Gamma(t)-\Gamma(s)|,\quad s,t\in S$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $X\in \mathrm{MLT}(C(S))$ (bax, [8]).

X – orta qiyməti sıfır olan, Qauss kovariasiyasına malik, $C(S)$ -də təsadüfi element olsun. Əgər hər hansı $\alpha>0$, bütün $s,t\in S$ və $\lambda\in\mathbb{R}^1$ qiymətlərində

$$\mathbf{M}\exp\{\lambda\,|X(t)-X(s)|\}\ \le\ \exp\{\alpha\lambda^2\,\mathbf{M}(X(t)-X(s))^2\}$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $X\in \mathrm{MLT}(C(S))$ münasibəti doğrudur.

Əgər X orta qiyməti sıfır olan,

$$|X(t)|\le 1,\quad \mathbf{M}|X(t)-X(s)|\le|t-s|,\quad s,t\in[0,1]$$

şərtlərini ödəyən, $C[0,1]$-də təsadüfi elementdirsə, onda $X\in \mathrm{MLT}(C[0,1])$ doğrudur. Lakin, əgər $\mathbf{M}|X(t)-X(s)|\le$ $\le|t-s|$ şərti əvəzinə $\mathbf{M}|X(t)-X(s)|^2\le|t-s|$ şərtinin ödənilməsi tələb olunarsa, onda X M. l. t.-ni ödəməyə bilər. Məs., bu halda aşağıdakı kontur misalı göstərmək olar: orta qiyməti sıfır olan, 2-ci zəif tərtibə malik və Viner kovariasiyalı (yəni $\mathbf{M}|X(t)-X(s)|^2=|t-s|$), $C[0,1]$-də elə təsadüfi element vardır ki, M. l. t.-ni ödəmir.

M. l. t.-nin Banax fəzasında isbatına aid bütün məlum metodlarda metrik fəzada ehtimal ölçüləri ailəsinin zəif nisbi kompaktlığının *Proxorov kriterisi* bu və ya digər formada istifadə olunur.

Banax fəzalarında M. l. t. invariantlıq prinsipi ilə əlaqəlidir. $t\in[0,1)$ və $n\in\mathbb{N}$ üçün

$$Y_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\sum_{k=1}^{[nt]}X_k+(nt-[nt])\,X_{[nt]+1)}\right\}$$

olsun, burada $[nt]$, – nt-nin tam hissəsidir. Y_n prosesinin paylanması ν_n Banax fəzası $C([0,1],B)$-də $C[0,1]$-də Viner ölçüsünə, yalnız və yalnız, o halda zəif yığılır ki, $X\in \mathrm{MLT}(B)$ ödənilsin.

Riyazi statistikada M. l. t.-nin tətbiqi. $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ – paylanma funksiyası kəsilməz F olan, asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər və

$$Y_i(t)=I_{[X_i<t]}-F(t)\ ,\quad -\infty<t<+\infty$$

olsun. Y_i-lərə $H=L_2(-\infty,+\infty,dF)$ Hilbert fəzasında, eyni qanunla paylanmış mərkəzlənmiş təsadüfi elementlər ardıcıllığı kimi baxmaq olar; R uyğun kovariasion operatordur və onun nüvəsi

$$r(s,t)=F(\min(s,t))-F(s)F(t)$$

düsturu ilə təyin olunur. H -da M. l. t.-nə əsasən

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ (Y_1+\ldots+Y_n)\xrightarrow{D}\Gamma$$

münasibəti doğrudur, burada Γ – kovariasion operatoru R olan, H -da mərkəzlənmiş Qauss təsadüfi elementidir. Beləliklə, $\sqrt{n}\,(G_n-F)\xrightarrow{D}\Gamma$ münasibəti doğrudur, burada $G_n(t)$, – F paylanmasından olan, n həcmli $X_1,\ldots,X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyasıdır. Onda

$$n\int_{-\infty}^{+\infty}(G_n(t)-F(t))^2\,dF(t)\xrightarrow{D}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma^2(t)\,dF(t)$$

münasibəti doğrudur, burada sağ və sol tərəflərdəki paylanmalar F -dən asılı olmur, sağ tərəf isə ω^2 – paylanma qanununa tabedir. Bu münasibət *Kramer – Mizes kriterisinin* əsasını təşkil edən

Smirnov teoremidir. Banax fəzalarında M. l. t.-nin empirik ölçülərlə əlaqələri haqqında bax, «*Yığılma*(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin» məqaləsinə.

Təsadüfi elementlər və fəzaların həndəsəsi üzərinə qoyulan müəyyən məhdudiyyətlərlə hər bir seriyada asılı olmayan təsadüfi elementlərin ümumi seriyalar sxemində (bu təsadüfi kəmiyyətlərin eyni qanunla paylanması şərt deyildir) Qauss ölçüsünə yığılma şərtləri də araşdırılmışdır (bax, [3]). Banax fəzalarında M. l. t.-ndə yığılma sürətinə çoxsaylı işlər həsr olunmuşdur. Hilbert fəzası halı üçün alınmış nəticələr ən sona çatdırılmış hesab oluna bilinər. Məs., (bax, [10]), əgər $S_n = n^{-1/2}\sigma^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{M}X_i)$, $\sigma^2 = \mathbf{M}\left|X_1 - \mathbf{M}X_1\right|^2$ – qiymətləri separabel H fəzasından olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin normalanmış cəmi, V X_1 kəmiyyətinin kovariasion operatoru və Y orta qiyməti sıfra bərabər, kovariasion operatoru $\sigma^2 V$ olan H – qiymətli Qauss təsadüfi kəmiyyəti olarsa, onda elə mütləq c sabiti vardır ki, ixtiyari $a \in H$, $r > 0$ üçün

$$\left|\mathbf{P}\{|S_n - a| < r\} - \mathbf{P}\{|Y - a| < r\}\right| \le$$

$$\le c\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i^{-1}\right)\sigma^3\mathbf{M}|X_1 - \mathbf{M}X_1|^3\,(1 + |a|^3)\,n^{-1/2}$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \ldots$, – V operatorunun məxsusi qiymətləridir.

Əd.: [1] Паулаускас В. И., Рачкаускас А. Ю., Точность аппроксимации в центральной предельной теореме, Вильнюс, 1987; [2] Vakhania N., «C. r. Acad. sci.», 1965, t. 260, p. 1560–62; [3] Araujo A., Gine E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y. – [a. o.], 1980; [4] Fortet R., Mourier E., «Studia Math.», 1955, v. 15, p. 62–79; [5] Pisier G., «Séminaire Maurey – Schwartz», 1975–76, exp. 3–4; [6] Hoffmann-Jorgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587–99; [7] Ledoux M., Talagrand M., «Probab. Theory and Related Fields», 1988, v. 77, p. 29–47; [8] Andersen N. T., Gine E., Ossiander M., Zinn J., «Probab. Theory and Related Fields», 1988, v. 77, p. 271–305; [9] Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В., «Матем. сб.», 1989, т. 180, № 12, с. 1587–1613.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ qruplarda «**центральная предельная теорема** на группах; **central limit theorem** on groups» – qiymətləri hər hansı lokal qrupdan olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin kompozisiyasının ehtimal paylanmasının bu qrupda Qauss paylanmasına zəif yığılması üçün şərtlər göstərilən bir sıra *limit teoremlərinin* ümumi adıdır.

G qrupunun vahidi e-nin $(e \in G)$ ixtiyari U ətrafı üçün

$$\lim_{t \to 0}\ \frac{1}{t}\ \mu_t(G \setminus U) = 0 \qquad (1)$$

münasibətini ödəyən, G qrupunda μ_t, $t \ge 0$ ölçülərinin kəsilməz konvolyusion semi – qrupuna daxil olan, G qrupunda sonsuz bölünən μ paylanmasına G qrupunda Qauss paylanması deyilir. (1) xassəli μ_t semi – qrupuna Qauss semi–qrupu deyilir. G-də hər bir Qauss semi – qrupu G qrupunun vahidinin əlaqə komponentində topalanmışdır, yəni bütün $t \ge 0$ üçün $\mu_t(G_0) = 1$. (ψ_1, ψ_2, η) üçlüyü ilə ifadə olunan kanonik ifadəsi mümkün olan μ_t semi – qrupu (bax, *Konvolyusion semi – qrupu, ölçülərin*; kanonik ifadə), yalnız və yalnız $\eta = 0$ şərtini ödədiyi halda Qauss semi – qrupudur (bax, [1]).

μ_{nj}, $j = 1,\ldots,k_n$ – ölçülərin infinitezimal sistemi, $\hat{\mu}_{nj}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, – G-də μ_{nj} ehtimal paylanmalarının *Furye çevirməsi* olsun. Fərz olunur ki, $\{\mu_{nj}\}$ kommutativ ölçülər sistemidir, yəni

$$\mu_{nj} * \mu_{nk} = \mu_{nk} * \mu_{nj},\ \ j,k = 1,\ldots,k_n,$$

həmçinin bütün $\gamma \in \Gamma$ və $u \in \mathscr{H}_0(\gamma)$ üçün

$$\lim_{n \to \infty}\sup \sum_{j=1}^{k_n}\left|\left\langle \hat{\mu}_{nj}(\gamma)u - u,\ u\right\rangle\right| < \infty \qquad (2)$$

şərti ödənilir; burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – ifadənin $\mathscr{H}(\gamma)$ fəzasında skalyar hasili, $\mathscr{H}_0(\gamma)$, – $\mathscr{H}(\gamma)$-da altfəzadır və differensiallanan vektorlar adlandırılan vektorların fəzasıdır (bax, [2]). $\{\mu_{nj}\}$, – $\mu_n = \mu_{n1} * \ldots * \mu_{nk_n}$ paylanmaların konvolyusionlarının ardıcıllığı olsun. (2) şərti zəif yığılma topologiyasında $\{\mu_n\}$ paylanmalar ardıcıllığının müşayiətedici Puasson paylanmalarının $\nu_n = \exp(\lambda_n)$ ardıcıllığı ilə yaxınlaşmasını təmin edir, burada

$$\lambda_n = \sum_{j=1}^{k_n}(\mu_{nj} - \delta_e),\ \ \exp(\lambda_n) = \delta_e + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n^{*k}/k!\ ,$$

λ_n^{*k}, – λ_n ölçüsünün konvolyusiya əməlinə görə k-cı dərəcəsidir, δ_e^n, – e vahidində cırlaşmış paylanmadır. Əgər $\{\mu_n\}$ və ya $\{\nu_n\}$ ardıcıllıqlarından hər hansı biri yığılırsa, onda digər ardıcıllıq da yığılır və bunların limitləri üst-üstə düşür.

Əgər (2) şərti və

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{j=1}^{k_n}\mu_{nk}(G \setminus U) = 0$$

münasibəti də G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün ödənilərsə, onda $\{\mu_n\}$ ardıcıllığı G-də bütün ehtimal ölçülərinin $\mathscr{M}^1(G)$ çoxluğunda nisbi kompaktdır və onun ixtiyari cırlaşmayan limit nöqtəsi μ G-də Qauss paylanmasıdır (bax, [2]). Bu M. l. t.-nin variantlarından biridir.

Əgər G Li qrupu, φ G-də Hant funksiyasıdırsa, onda Linderq teoreminə analoq aşağıdakı teorem doğrudur.

Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

1) $\sum_{j=1}^{k_n}\int_G \varphi(x)\mu_{nj}(dx) \le k < \infty$, bütün $n \ge 1$ üçün;

2) ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə kompakt $K_\varepsilon \subset G$ ətrafı vardır ki, bütün $n \ge 1$ üçün $\sum_{j=1}^{k_n}\mu_{nj}(G \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$;

3) G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün

$$\sum_{j=1}^{k_n} \int_{G\setminus U} \varphi(x)\, \mu_{nj}(dx) \to 0$$

(Lindeberq şərti), $n \to \infty$ olduqda

$$\sum_{j=1}^{k_n} \int_{U} y_i(x) y_k(x) \mu_{nj}(dx) \to a_{ik} = a_{kj},$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \left| \int_{U} y_i(x) \mu_{nj}(dx) \right| \to 0,$$

burada $\{y_1, \dots, y_d\}$, – G-də kanonik koordinatlar sistemidir. Onda $\mu_n = \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n}$ paylanmalarının ardıcıllığı G Li qrupunda kovariasiyalar matrisi $\alpha = \|a_{ik}\|$ olan Qauss paylanmasına zəif yığılır.

Birəlaqəli nilpotent Li qrupları üçün daha güclü nəticələr alınmışdır (bax, [9], [10]).

Abel lokal kompakt G qrupu üçün yuxarıda şərh olunmuş nəticələrdən birincisinə analoq aşağıdakı nəticədir. Fərz olunur ki, elə $x_n \in G$ elementləri vardır ki, $\mu_n = \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} * \delta x_n$ ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda μ ehtimal paylanmasına zəif yığılır. Aşağıdakı müddəalar ekvivalentdirlər: a) μ, – G-də Qauss paylanmasıdır; b) G qrupunun vahidinin ixtiyari U ətrafı üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mu_{nj}(G\setminus U) = 0$$

və G qrupunun xarakterlər qrupu $\hat{G}$-dən bütün γ-lar üçün

$$\sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{G} (1 - \operatorname{Re}\, \gamma(x)) \left|\mu_{nj}\right|^2 (dx) < \infty$$

(bax, [3]).

Ölçülərin infinitezimal sistemi əvəzinə $\mu_n = \nu_1 * \dots * \nu_n$ konvolyusionlar ardıcıllığının sisteminə baxıldıqda əlavə çətinliklər yaranır, burada $\{\nu_n, n \geq 1\}$, – $\mathcal{M}^1(G)$-də hər hansı qeyd olunmuş ardıcıllıqdır. Bu halda, μ_n ölçülərinə tətbiq olunduqda ölçülərin nisbi kompakt $\{\tau(\mu_n)\}$ ardıcıllığına gətirən normalayıcı $\{\tau_n\}$ çevirmələr ardıcıllığının tapılması zəruridir. Klassik halda ($G = \mathbb{R}^d$ olduqda), $\mathbb{R}^d$-də çırlaşmayan xətti operatorlarla, yəni $\mathbb{R}^d$ qrupunun avtomorfizmləri ilə doğurulan çevirmələr tətbiq olunurdu. Qeyri – Abel qrupları üçün belə kompaktifikasiyalayıcı avtomorfizmlər ardıcıllığı mövcud deyildir. Li qruplarının bəzi xüsusi sinifləri üçün M. l. t. G qrupunun elementlərinin qrupun spesifikasından istifadə olunaraq xüsusi şəkildə ifadə olunması ilə isbat olunmuşdur (bax, [4] – [8]).

Bax, həm də, *Cazibə oblastı* operator dayanıqlı paylanmanın, *Diffuzion proses* qrupda.

Əd.: [1] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981; [2] Siebert E., «Adv. Math.», 1981, v. 39, p. 111–54; [3] Wehn D., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1962, v. 48, p. 791–95; [4] Тутубалин В. Н., «Вестн. МГУ Матем. Мех.», 1966, № 2, с. 70–77; [5] Тутубалин В. Н., «Вестн. МГУ Матем. Мех.», 1967, № 6, с. 100–08; [6] Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 3, с. 531–39; [7] Вирцер А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 4, с. 685–704; [8] Вирцер А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 84–103; [9] Pap G., «Prob. Math. Stat.», 1993, v. 14, p. 287–312; [10] Scheffler H.-R., «Prob. Math. Stat.», 1993, v. 14, p. 327–45.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ Markov prosesləri üçün **« центральная предельная теорема** для марковских процессов; **central limit theorem** for Markov processes **»** – Markov prosesləri halında, məsələn, Markov zəncirləri halında asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün *mərkəzi limit teoreminə* aid bəzi faktların ümumiləşməsidir. Tipik misal Lindeberq teoreminin aşağıdakı ümumiləşməsidir (bax, [5]). $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i),\ i = 1, 2, \dots\}$ – ölçülən fəzaların ardıcıllığı, $\mathbf{P}_1(A_1)$, – $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ fəzasında ehtimal paylanması, $\mathbf{P}_i(\omega_{i-1}, A_i)$, – $(\Omega_{i-1}, \mathcal{A}_{i-1})$-dən $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$-yə keçid ehtimalı, $X_i = X_i(\omega_i)$, – $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$-də həqiqi ölçülən funksiya olsun. $\mathbf{P}_1(A_1)$, $\mathbf{P}_2(\omega_1, A_1)$, $\mathbf{P}_3(\omega_2, A_2)$,... ardıcıllığı Markov zəncirini tam mənası ilə təyin edir. Bu zəncirlə doğurulmuş X_i, $i = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri, bir çox hallarda Markov zəncirlərilə bağlı təsadüfi kəmiyyətlər adlandırılır.

$$\alpha(k) = 1 - \sup\Big\{ \big| \mathbf{P}_k(\omega', A) - \mathbf{P}_k(\omega'', A) \big| : \omega', \omega'' \in \Omega_{k-1},\ A \in \mathcal{A}_k \Big\}$$

$$\alpha_n = \min\{\alpha(k) : 2 \leq k \leq n\};$$

$F_i(x)$, – X_i, $i = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, $B_n^2 = \mathbf{M}(X_1 + \dots + X_n)^2$, $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/B_n$ olsun. Əgər hər bir $\delta > 0$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1} B_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x| > \delta \alpha_n B_n} |x|^2 \, dF_i(x) = 0$$

münasibəti ödənilərsə, onda S_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya zəif yığılır.

Əd.: [1] Сираждинов С. Х., Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Таш., 1955; [2] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 72–89; [3] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 67–86; [4] Статулявичус В. А., «Литов. матем. сб.», 1969, т. 9, № 2, с. 345–62; [5] Статулявичус В. А., «Proc. 2-nd Jap. – USSR Symp. on Probab. Theory», 1973, v. 1, p. 433–43.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ təsadüfi çoxluqlar üçün **« центральная предельная теорема** для случайных множеств; **central limit theorem** for random sets **»** – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün.

MƏRKƏZİ LİMİT TEOREMİ təsadüfi determinantlar üçün **« центральная предельная теорема** для случайных детерминантов; **central limit theorem** for random determinants **»** – bax, *Təsadüfi determinant*.

MƏRKƏZİ MOMENT « центральный момент; central moment » – *təsadüfi kəmiyyətin* ədədi xarakteristikasıdır. X təsadüfi kəmiyyətinin $k = 1, 2, \dots$ tərtib mərkəzi momenti

$$\mathbf{M}\left|X-\mathbf{M}X\right|^k<\infty$$

şərtini ödəyən $\mu_k=\mathbf{M}(X-\mathbf{M}X)^k$ kəmiyyətinə deyilir. İkinci tərtib M. m. X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası $\mathbf{D}X$-dır. M. m.-in xassələri X-in uyğun *momentlərinin* xassələrinə analojidir, o cümlədən, M. m., yalnız və yalnız, uyğun momentin varlığı halında mövcuddur.

MƏRKƏZLƏNMƏ VƏ NORMALANMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının **« центрирование и нормирование** последовательностей случайных величин; **centering and norming** of sequences of a random variables **»** – ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan qaydadır: Y_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığından $Z_n=B_n^{-1}Y_n-A_n$ – təsadüf olmayan və cırlaşmayan xətti çevirmələrinin vasitəsilə elə Z_n təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının alınması məqsədilə tətbiq olunur ki, Z_n-lərin paylanmaları G_n-lər zəif nisbi kompakt çoxluq əmələ gətirsin (əgər Y_n ardıcıllığının paylanmaları bu xassəyə malik olmazlarsa). Bu qayda bir çox *limit teoremlərinin* isbatında hazırlıq məqsədilə istifadə olunur və aşağıdakı mülahizələrlə izah olunur.

Fərz olunur ki, limit approksimasiyasına *Levi – Proxorov metrikası* π-dən zəif olmayan hər hansı μ metrikası mənasında baxılır (bax, *Ehtimal metrikalarının müqayisəsi*), onda

$$\mu(G_n,G_0)\to 0\Rightarrow\pi(G_n,G_0),\quad n\to\infty$$

münasibəti doğrudur. Deməli, $\{G_n\}$ çoxluğunun zəif kompaktlığı G_n-in G_0-a μ – yığılması üçün zəruri şərtdir. M. və n. birölçülü təsadüfi kəmiyyətlərin çevrilməsi üçün istifadə olunduğu kimi, çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlərin çevrilməsi üçün də istifadə olunur. Sonuncu halda normalayıcı B_n^{-1} operatorları rolunda bu və ya digər cırlaşmayan matrislər seçilir, məs., baş diaqonal elementləri eyni b_n^{-1} olan matrislər (skalyar normalanma).

Həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər üçün A_n və B_n^2 sabitləri kimi $\mathbf{M}Y_n$ və $\mathbf{D}Y_n$ ədədi xarakteristikalarını seçmək olar, bu şərtlə ki, bunlar mövcud olsunlar. Ümumi halda, analitik nöqteyi – nəzərdən, A_n kimi Y_n təsadüfi kəmiyyətlərinin mərkəzini götürmək münasibdir. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının paylanmaları çoxluğunun xətti çevirmələr vasitəsilə zəif kompakt çoxluğunun alınmadığı çoxsaylı hallar vardır (bax, məs., *Darlinq teoremi*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, M. – Л., 1949; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., M., 1962; [3] Золотарев В. M., Современная теория суммирования независимых величин, M., 1986.

MƏRKƏZLƏNMİŞ KORRELYASİON FUNKSİYA « центрированная корреляционная функция; centered correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya*.

MƏRKƏZLƏNMİŞ QARŞILIQLI KORRELYASİYA FUNKSİYASI « центрированная взаимная корреляционная функция; centered cross correlation function of » – bax, *Qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası.*

MƏRKƏZLƏNMİŞ QARŞILIQLI KORRELYASİYA FUNKSİYASI təsadüfi proseslərin **« центрированная взаимная корреляционная функция** случайных процессов; **centered cross correlation function** of random process **»** – bax, *Qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası.*

MƏŞĞULLUQ PERİODU « занятности период; busy period » – *xidmət sistemi* cihazının (kanalının) məşğul vəziyyətdə olduğu bütün zaman intervalıdır. Birkanallı sistemlər halında M. p. sistemdə heç olmasa bir tələbin olduğu bütün zaman intervalı ilə üst-üstə düşür. M. p. ξ müddətinin paylanması *semi – Markov prosesləri* ilə təsvir olunan sistemlər halı üçün araşdırılmışdır. «Gözləməli» sistemdə orta xidmət müddəti τ olan λ intensivlikli ən sadə *giriş axını* halında $\lambda\tau<1$ olduqda

$$\mathbf{M}\xi=\tau/(1-\lambda\tau);$$

$\lambda\tau=1$ olduqda $\mathbf{M}\xi=\infty$, $\lambda\tau>1$ olduqda müsbət ehtimalla $\xi=\infty$ olur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., M., 1987.

MİKROKANONİK PAYLANMA « микроканоническое распределение; microcanonical distribution » – hissəciklərin sayı və onların enerjiləri cəmi qeyd olunduqda yaranan *Gibbs paylanmasıdır.*

MİQRASİYA şaxələnən prosesdə **« миграция** в ветвящемся процессе; **migration** in a branching process **»** – bax, *Şaxələnən proses miqrasiyalı*.

MİQYAS ÇEVİRMƏSİ « масштабное преобразование; scale transformation » – bax, *Renormalizasion qrup*.

MİQYAS PARAMETRİ « масштабный параметр; scale parameter » – $F_b(x)$ funksiyalar ailəsində b parametridir, $b\in B\subset\mathbb{R}$, $b>0$, $x\in X\subset\mathbb{R}^k$ və bu funksiyalar $F_b(x)=F_1(x/b)$ şərtini ixtiyari $b\in B$, $x\in X$ üçün ödəyirlər. Əgər $\mathbb{R}^k$-da verilən, paylanma funksiyası $F(x)$ olan paylanma, paylanma funksiyası $F_0(x)$ olan paylanma tipli olarsa, onda $F(x)=F_0((x-a)/b)$ bərabərliyi doğrudur. Burada $b>0$ M. p.-dir, $a\in\mathbb{R}^k$ *yerinidəyişmə parametridir.*

MİQYAS PARAMETRİ; statistik qiymət **« масштабный параметр;** оценка; estimator of **scale parameter »** – $\sigma>0$ parametri üçün müşahidələr nəticəsində $x_j=\sigma\varepsilon_j$, $j=1,\dots,n$ şəklində alınan ixtiyari *statistik qiymətdir*, ε_j – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Əgər ε_j kəmiyyətləri müsbət olarsa, onda σ parametrinə müsbət həqiqi ədədlərin multiplikativ $\mathbb{R}_+$ qrupunun elementi kimi baxmaq olar. Bununla əlaqədar, əksər hallarda, M. p.-nin ekvivariant statistik qiymətlərinə baxılır ki, bunlar arasında isə ən yaxşısı *Pitmən statistik qiymətidir*. $\mathbb{R}_+$ qrupunun həqiqi ədədlərin additiv qrupu $\mathbb{R}$-ə izomorf olduğuna əsasən, parametrin yerinidəyişməsi üçün statistik qiymətlərin alınmış bir çox nəticələri M. p.-nin statistik qiymətləri üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984.

MİNİMAKS HƏLL (QƏRAR) « минимаксное решение; minimax decision » – minimaks *həlledici funksiyalar* əsasında qəbul edilən həldir (qərardır). Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

MİNİMAKS KRİTERİ « минимаксный критерий; minimax test » – mühümlük ölçüsü (bütün mümkün olan alternativlərə görə) verilmiş bütün kriterilər arasında 2-ci növ səhv ehtimalının maksimal qiymətini minimallaşdıran statistik kriteridir.

M. k. bəzən maksimin kriteri də adlanır, çünki bu kriteri güc funksiyasının minimumunu maksimallaşdırır. M. k. statistik həllər nəzəriyyəsində minimaks həlledici funksiya ümumi anlayışının konkretləşməsidir (statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində).

X – paylanması $\mathbf{P}_\theta$ olan müşahidə olunan təsadüfi seçim olsun. θ – naməlum parametrdir, $\theta \in \Theta$. X üzrə alternativ $H_1 : \theta \in \Theta_1$ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Θ_0 və Θ_1, – Θ-nın kəsişməyən boş olmayan altçoxluqlarıdır. $\beta(\theta;\varphi) = \mathbf{M}_\theta \varphi(x)$, – $\varphi(\cdot)$ kriterisinin güc funksiyası olsun. Əgər

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta; \varphi) \le \alpha$$

və bütün belə $\{\varphi\}$ kriteriləri arasında

$$\inf_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta; \varphi) = \sup_{|\varphi|} \inf_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta; \varphi)$$

olarsa, $\varphi(\cdot)$ α hüdudlu minimaks kriteri adlanır.

M. k. üçün A. Vald tərəfindən (bax, [1]) alınmış ümumi nəticə – olduqca ümumi şərtlər daxilində M. k.-nin varlığı və onun ən əlverişsiz aprior paylanmalara nəzərən *Beyes kriterisi* olmasıdır.

M. k. meylsiz kriteridir.

Əd.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1979; [3] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

MİNİMAKS RİSK « минимаксный риск; minimax risk » – risk funksiyasının supremumunun bütün həlledici funksiyalar üzrə aşağı sərhədidir. Əgər minimaks həlledici funksiya vardırsa, onda M. r. minimaks həlledici funksiyanın risk funksiyasının supremumuna bərabərdir. Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

MİNİMAKS STATİSTİK QİYMƏT « минимаксная оценка; minimax estimator » – risk funksiyasının ən böyük qiymətini minimallaşdıran *statistik qiymətdir* (bax, *Minimaks yanaşma*). Əgər M. s. q. yeganədirsə, onda o, məqbul statistik qiymətdir.

Misal. n həcmli seçimli sınaqların binomial sxemində «müvəffəqiyyət» ehtimalı θ-nın M. s. q.-i kvadratik itki funksiyası $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ olduğu halda $(\nu + \sqrt{n}/2)(n + \sqrt{n})$-ə bərabərdir; ν – müvəffəqiyyət baş verən sınaqlar sayıdır; belə θ_n^* statistik qiyməti üçün

$$\sup_{0<\theta<1} \mathbf{M}_\theta L(\theta, \theta_n^*) \le \sup_{0<\theta<1} \mathbf{M}_\theta L(\theta, \hat{\theta}_n)$$

bərabərsizliyi θ parametrinin ixtiyari $\hat{\theta}_n$ statistik qiymətində ödənilir, ν/n standart tezlik statistik qiyməti, $L(\theta, d) = (\theta - d)^2/\theta(1-\theta)$ itki funksiyası olduğu halda, qiymətləndirmənin nisbi xətasını nəzərə alan M. s. q.-dir.

Bax, *Aprior informasiyadan istifadə*, *Asimptotik minimaks statistik qiymət*, *Statistik qiymətləndirmə.*

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика. М., 1984; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

MİNİMAKS STRATEGİYA statistik oyunlar nəzəriyyəsində **« минимаксная стратегия** в теории статистических игр; **minimax strategy** in the game theory **»** – maksimal itkiləri (naməlum parametrlər üzrə) minimallaşdıran statistika (*həlledici funksiya*) strategiyasıdır.

Bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*, *Statistik oyun.*

MİNİMAKS YANAŞMA « минимаксный подход; minimax approach » – statistik prosedurların optimallığının təyin edilməsi üçün mövcud yanaşmalardan biridir və bu yanaşmada həlledici δ funksiyası risk funksiyası $R(\theta, \delta)$-nın ən böyük qiyməti $\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$-nın minimallaşdırılması şərtinə əsasən seçilir.

Bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

MİNİMAKSLIQ(ğı) statistik prosedurun **« минимаксность** статистической процедуры; **minimax** property of a statistical procedure**»** – maksimal riski minimallaşdıran *statistik prosedurun* minimaks mənada optimallığını qəbul etməyə əsas verən, riyazi statistikada optimallıq üçün tətbiq edilən variantlardan biridir. *Həlledici funksiyalar* terminlərilə statistik prosedurun M. aşağıdakı kimi təyin olunur. Fərz olunur ki, X təsadüfi kəmiyyəti $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$ seçimi fəzasından qiymətlər alır, $\theta \in \Theta$ və $\Delta = \{\delta\}$, – X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları əsasında D həllər (qərarlar) fəzasından d həllini seçmək məqsədilə istifadə olunan həlledici funksiyalar çoxluğu, yəni $\delta(\cdot) : \mathscr{X} \to D$ olsun; bu halda $\Theta \times D$-də təyin olunmuş müəyyən bir $L(\theta, d)$ itki funksiyası verilir. Onda, əgər bütün $\delta \in \Delta$ üçün

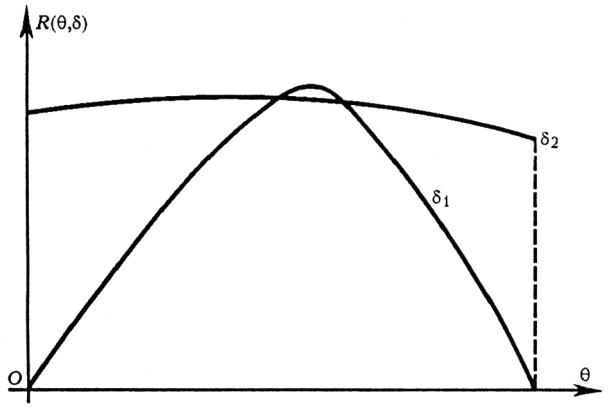
$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta^*(X)) \le \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X))$$

münasibəti ödənilərsə, $\delta^* \in \Delta$ statistik prosedurunа $L(\theta, d)$ itki funksiyasına nəzərən statistik qərar qəbulu məsələsində minimaks statistik prosedur deyilir, burada δ statistik prosedurunа (həlledici qaydaya) müvafiq olan risk funksiyasına

$$\mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X)) = R(\theta, \delta) = \int_{\mathscr{X}} L(\theta, \delta(x)) d\,\mathbf{P}_\theta(x)$$

minimaks risk funksiyası deyilir; müşahidə olunmuş x realizasiyasına və minimaks δ^* prosedurunа müvafiq $d^* = \delta^*(x)$ həlli isə minimaks həll adlanır.

$\sup_{\theta\in\Theta} \mathbf{M}_\theta\, L(\theta, \delta(X))$ kəmiyyəti $\delta \in \Delta$ prosedurunun tətbiqi nəticəsində gözlənilən itkiləri xarakterizə etdiyindən, δ^* statistik prosedurunun minimakslığı onu ifadə edir ki, əgər d həllinin D həllər fəzasından seçilməsi məsələsində δ^* proseduruna riayət olunarsa, onda ən böyük gözlənilən risk – $\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta^*)$ mümkün ola bilən qədər kiçik olacaqdır. Statistik prosedurun M. prinsipi həmişə səmərəli nəticələr vermir (bax, şəkil); bu halda baxmayaraq ki, $\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta_1) > \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta_2)$ münasibəti ödənilir, bununla belə δ_2 deyil, δ_1 proseduru əlverişlidir.



Statistik prosedurun M. θ parametri haqqında aprior informasiya olmadığı hallarda statistik qərarların qəbul edilməsi məsələlərində səmərəli hesab olunur.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

MİNİMAKSLIQ KRİTERİSİ « минимаксности критерий; minimax criterion » – bax, *Oyunu, iki şəxsin.*

MİNİMAL EKSSESSİV FUNKSİYA « минимальная эксцессивная функция; minimal excessive function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n.

MİNİMAL HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « минимальная решающая функция; minimal decision function » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

MİNİMAL KAFİ STATİSTİKA « минимальная достаточная статистика; minimal sufficient statistic », z ə r u r i k a f i s t a t i s t i k a, – elə $T(x)$ *statistikasıdır* ki, $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsi üçün *kafi statistikadır* və $\mathscr{P}$ ailəsi üçün ixtiyari kafi digər statistikanın ölçülən funksiyasıdır. M. k. s. sabit adlandırılan qiymətlərini elə x -lər çoxluğunda alır ki, bu çoxluqlarda ixtiyari kafi statistika sabitdir. Kafi statistika, yalnız və yalnız, o halda M. k. s.-dır ki, onun doğurduğu σ – cəbr m i n i m a l d ı r, yəni onun doğurduğu σ – cəbr ixtiyari kafi σ – cəbrin tərkibində olsun.

$\mathscr{P}$ – minimal kafi statistika (σ – cəbr) anlayışından da istifadə olunur. $\mathscr{B}$ kafi σ – cəbri (və uyğun kafi statistika) $\mathscr{P}$ – m i n i m a l k a f i σ – c ə b r yalnız o halda adlandırılır ki, $\mathscr{P}$ üçün kafi ixtiyari $\mathscr{B}$ σ – cəbrinin $\mathscr{B}$ tamamlanmasında $\mathscr{B}_0$ σ – cəbri olsun. Əgər $\mathscr{P}$ ailəsi σ – sonlu μ ölçüsü ilə dominarlanırsa, onda

$$\left\{ p(x,\theta) = \frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mu}(x),\ \theta \in \Theta \right\}$$

sıxlıq funksiyaları ailəsinin doğurduğu $\mathscr{B}_0$ σ – cəbri kafi və $\mathscr{P}$ – minimal kafi σ – cəbrdir. Bu hökm əsasında $\mathscr{P}$ – minimal σ – cəbrlərinin qurulmasının ümumi qaydası təyin olunur. Seçimi fəzanın ekvivalentlik siniflərinə bölgüsünə baxıldığı fərz olunur; bu bölgüdə x və x' nöqtələrinin eyni bir sinfə, yalnız və yalnız, o halda aid olduğu fərz olunur ki, $p(x,\theta)/p(x',\theta)$ nisbəti θ -dan asılı olmasın. Bu bölgünün doğurduğu σ – cəbr kafi və $\mathscr{P}$ – minimal σ – cəbr olur və M. k. s. bu ekvivalentlik siniflərində sabitdir.

M i s a l 1. Sıxlıq funksiyası

$$p(x,\theta) = C(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} Q_j(\theta)\, T_j(x)\right\}$$

düsturu ilə verilən eksponensial paylanmalar ailəsi üçün $T(x) = (T_1(x), \ldots, T_n(x))$ statistikası M. k. s.-dır.

M i s a l 2. $\mathscr{P}$ ailəsi üçün bəzi requlyarlıq şərtləri ödənildiyi halda $\hat{\theta}(x)$ maksimal doğruyaoxşarlıq statistikası yeganə olarsa, onda o, həm kafi statistika, həm də M. k. s.-dır.

Əd.: [1] Б а р р а Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] С о л е Ж.-Л., Основные структуры математической статистики, пер. с франц., М., 1972; [4] Ш м е т т е р е р Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976.

MİNİMAL KƏSİYİ, QRAFIN « минимальный разрез графа; minimal cut of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu.*

MİNİMAL METRİKA « минимальная метрика; minimal metric » – təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanması fəzasında elə sadə *ehtimali metrikadır* ki, o, qeyd olunmuş marginal paylanmalarlı bütün birgə paylanmalar çoxluğu üzrə digər bir metrikanın (*protominimal metrika* adlandırılan) qiymətlərinin aşağı sərhədi ilə üst-üstə düşür. Məs., ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri üçün *tam variasiya metrikası* –

$$\sigma(\xi,\eta) = \sup\left|\, \mathbf{P}\{\xi \in A\} - \mathbf{P}\{\eta \in A\}\right|;$$

indikator metrikası –

$$\tau(\xi,\eta) = \mathbf{P}\{\xi \neq \eta\}$$

üçün M. m.-dır,

$$\varkappa_1(\xi,\eta) = \int \left|\, \mathbf{P}\{\xi < x\} - \mathbf{P}\{\eta < x\}\right| dx$$

orta metrikası isə mürəkkəb $\mathbf{M}\left|\xi - \eta\right|$ metrikası üçün M. m.-dır. Hər hansı metrika üçün bərabərsizliklərdən M. m. üçün bərabərsizliklərə keçid bir sıra hallarda qeyri – trivial qiymətlər almağa imkan verir.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

MİNİMAL METRİKALAR METODU « минимальных метрик метод; minimal metric method » – *metrik məsafələr metodunun* üsullarından biri olub, *minimal metrikaların* və *protominimal metrikaların* uyğun cütlərinin istifadəsinə əsaslanan metoddur. M. m. m. ideyasının ən sadə variantı aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\hat{\mu}$, – $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ təsadüfi vektorlar fəzasında hər hansı sadə metrika, μ – bu metrikaya uyğun protominimal metrika olsun. Mürəkkəb metrikaları qiymətləndirmək bir çox hallarda sadə metrikaları qiymətləndirməkdən sadə olur. Əgər ν_k həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər fəzasında hər hansı ehtimal metrikaları, $\hat{\nu}_k$ bunlara uyğun minimal metrikalardırsa, $\psi(u_1, \dots, u_n)$ isə bütün dəyişənləri üzrə sağdan kəsilməz və azalmayan funksiyadırsa və

$$\mu(X, Y) \le \psi(\nu_1(X_1, Y_1), \dots, \nu_n(X_n, Y_n)) \qquad (*)$$

qiymətləndirməsi vardırsa, onda (*)-dan aşağıdakı bərabərsizliklə ifadə olunan qiymətləndirmə alınır:

$$\hat{\mu}(X, Y) \le \psi(\hat{\nu}_1(X_1, Y_1), \dots, \hat{\nu}_n(X_n, Y_n))$$

M i s a l. *Ki Fan metrikası* K üçün minimal metrika və $\nu(X, Y) = \mathbf{M}|X - Y|$ metrikası üçün minimal metrika, uyğun olaraq, π *Levi – Proxorov metrikası* və $\varkappa_1$ *orta metrikasıdır.* İxtiyari $\varepsilon > K(X,Y)$ üçün $\nu(X, Y) \ge \mathbf{M}|X - Y| I(|X - Y| > \varepsilon) > \varepsilon^2$ olduğundan, $\varepsilon \to K(X, Y)$ olduqda $K^2(X, Y) \le \nu(X, Y)$ bərabərsizliyi alınır.

Minimal metrikalara keçdikdə, ümumi halda, yaxşılaşması mümkün olmayan $\pi^2(X, Y) \le \varkappa_1(X, Y)$ bərabərsizliyi alınır.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 3, с. 416–54; [2] З о л о т а р е в В. М., Современная теория независимых случайных величин, М., 1986.

MİNİMAL MƏSAFƏ FUNKSİONALI / MM FUNKSİONAL « минимального расстояния функционал / МД функционал; minimal distance functional » – bax, *Robast statistik qiymət.*

MİNİMAL MƏSAFƏ STATİSTİK QİYMƏTİ « минимального расстояния оценка; minimum distance estimate » – bax, *Robast statistik qiymət*.

MİNİMAL TAM SİNİF(f i) k r i t e r i l ə r i n **« минимальный полный класс** к р и т е р и е в; **minimal complete class** o f t e s t s **»** – bax, *Statistik kriteri*; t a m s i n i f.

MİNİMAL TAM SİNİF(f i) s t r a t e g i y a l a r ı n **« минимальный полный класс** с т р а т е г и й; **minimal complete class** o f s t r a t e g i e s **»** – bax, *Oyunu, iki şəxsin.*

MİNİMAL ZƏNCİRİ, QRAFIN « минимальная цепь графа; minimal path of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu.*

MİNİMAL ZƏNCİRLƏR VƏ KƏSİKLƏR METODU « минимальных цепей и разрезов метод; minimal paths and cuts method » – şəbəkə strukturlu sistemlərin etibarlılıq göstəricilərinin yuxarı və aşağı sərhədlərinin alınması üçün istifadə olunan etibarlılığı qiymətləndirmə metodudur.

Sistem ikiqütblü $G(X)$ qrafı ilə təsvir olunur; $X = (x_1, \dots, x_n)$ qrafın bütün tillərinin altçoxluğudur. Qrafın m i n i m a l z ə n c i r i α (s a d ə z ə n c i r i) onun tillərinin elə altçoxluğuna deyilir ki, bu çoxluq giriş və çıxış təpələrinin əlaqəsini təmin etmiş olsun, lakin tillərdən ixtiyari birinin xaric olunması əlaqənin pozulmasına səbəb olur (qrafın minimal zəncirə daxil olmayan digər tillərinin xaric olunması şərtilə). Qrafın m i n i m a l (s a d ə) k ə s i y i onun tillərinin elə altçoxluğuna deyilir ki, onun qrafdan xaric olunması (digər tillərin qalması şərtilə) əlaqənin pozulmasına səbəb olur, lakin bu altçoxluğun ixtiyari bir tilinin daxil olunması qrafın giriş və çıxış təpələrinin əlaqəsini təmin edir.

Qiymətləndirmənin iki əsas sinfi inkişaf etdirilmişdir: minimal zəncirlər və minimal kəsiklərin tam çoxluğu vasitəsilə və tillikəsişməyən minimal zəncirlər və minimal kəsiklər çoxluğu vasitəsilə qiymətləndirmə.

Birinci üsulla $\mathbf{P}$ ehtimalı üçün qiymətləndirmə (bax, [1])

$$\prod_{1 \le k \le M} \left(1 - \prod_{i \in \beta_k} (1 - r_i)\right) \le \mathbf{P} \le 1 - \prod_{1 \le j \le N} \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} r_i\right)$$

münasibətİlə ifadə olunur, burada α_j – minimal zəncir; β_k – minimal kəsik; N – minimal zəncirlərin sayı və M, – G qrafında kəsiklərin sayı, r_i, – G qrafının i-ci tilinin varlığı ehtimalıdır.

İkinci üsulla $\mathbf{P}$ ehtimalı üçün qiymətləndirmə (bax, [2])

$$\max_{1 \le t \le T} \left[1 - \prod_{\alpha_j \in A_t} \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} r_i\right)\right] \le \mathbf{P} \le$$

$$\le \min_{1 \le s \le S} \prod_{\beta_k \in B_s} \left(1 - \prod_{i \in \beta_k} (1 - r_i)\right)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada A_t – tili – kəsişməyən zəncirlərin bəzi altçoxluqlarıdır, yəni əgər $\alpha_i \in A_t$ və $\alpha_j \in A_t$ olarsa, onda $\alpha_i \cap \alpha_j = \varnothing$; B_s – tili – kəsişməyən kəsiklərin bəzi altçoxluqlarıdır, yəni əgər $\beta_i \in B_s$ və $\beta_j \in B_s$ olarsa, onda $\beta_i \cap \beta_j = \varnothing$; T və S – uyğun olaraq, tili – kəsişməyən müxtəlif zəncirlər altçoxluqlarının və tili – kəsişməyən müxtəlif kəsiklər altçoxluqlarının sayıdır. Sonuncu qiymətləndirmə hesablama nöqteyi – nəzərindən daha konstruktivdir (bax, [3]). Digər tərəfdən, bu qiymətləndirmə təbii ümumiləşdirilmə üçün imkan verir ki (bax, [2], [3]), bu da ilkin qrafın bir sıra fraqmentlərindən bilavasitə istifadə edilməsi hesabına qiymətləndirmənin dəqiqliyinə xidmət edir.

Baxılan qiymətləndirmələrdən ikiqütblü qrafların digər parametrlərinin tapılmasında da istifadə etmək olar (bax, [4]).

Əd.: [1] Б а р л о у Р., П р о ш а н Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984; [2] Л и т в а к Е. И., У ш а к о в И. А., «Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика», 1984, № 3, с. 3–17; [3] У ш а к о в И. А., Л и т в а к Е. И., Обобщенные показатели при исследовании сложных систем, М., 1985; [4] У ш а к о в И. А., Л и т в а к Е. И., «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1977, № 1, с. 72–79.

MİNKOVSKİ BƏRABƏRSİZLİYİ « минковского неравенство; Minkowski's inequality » – ξ, η və $\xi + \eta$ təsadüfi kəmiyyətlərinin mütləq momentləri üçün, ixtiyari $p \ge 1$ qiymətində

$$\left(\mathbf{M}|\xi+\eta|^p\right)^{1/p} \le \left(\mathbf{M}|\xi|^p\right)^{1/p} + \left(\mathbf{M}|\eta|^p\right)^{1/p}$$

bərabərsizliyidir.

MİNKOVSKİ ƏMƏLLƏRİ « минковского операции; Minkowski operations » – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının altçoxluqlarının $\oplus$ toplama, $\ominus$ çıxma, $\lambda \in \mathbb{R}$ ədədinə vurma əməlləridir; bu əməllər uyğun olaraq aşağıdakı qaydalarla ifadə olunur:

$$A \oplus B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\},\quad A, B \in \mathbb{R}^n;$$

$$A \ominus B = (A^c \oplus B^c)^c,\quad A^c = \mathbb{R}^n \setminus A;$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

M. ə.-nin köməyilə təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinin bir çox konstruksiyaları təyin olunur. Məs., böyük ədədlər qanunları

$$\frac{1}{n}(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$$

ardıcıllıqlarının cırlaşmış təsadüfi çoxluğa yığılması teoremləridir (burada A_j – təsadüfi çoxluqlardır);

$A_j,\ j = 1, \ldots, n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan çoxluqlar olduqda

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$$

ardıcıllığının asimptotik paylanmasının tədqiqi – mərkəzi limit teoreminin əsas məzmununu təşkil edir (bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*).

A təsadüfi çoxluğunun ən çox yayılmış çevirmələri (bunların köməyilə yeni təsadüfi çoxluqlar qurulur) aşağıdakılardır:

$A \ominus (-1)B$, – B vasitəsilə A-nın *dilatasiyası* (lat. dilatatio – genişlənmə, dartılma);

$A \oplus (-1)B$, – B vasitəsilə A-nın *eroziyası*;

$(A \ominus (-1)B) \oplus B$, – B vasitəsilə A-nın *doldurulması* (rus. заполнение);

$(A \oplus (-1)B) \oplus B$, – B vasitəsilə A-nın *tamamlanması* (rus. пополнение).

Məs., qabarıq B-lər üçün λB-nin $(\lambda > 0)$ vasitəsilə A-nın doldurulması *qranulometriyanın* tipik misalıdır, yəni

$$\psi_\lambda(a) = (A \ominus (-\lambda)B) \oplus (\lambda B).$$

A təsadüfi çoxluğunun paylanmaları və onun müxtəlif çevirmələri arasında, bir qayda olaraq, sadə əlaqə mövcuddur, məs.,

$$T_{A \oplus B}(K) = T_A(K \ominus B),$$

burada A – qapalı təsadüfi çoxluq, B – determinik kompakt çoxluq, K – kompakt, T – *müşayiətedici funksionaldır.*

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

MİNKOVSKİ FƏZASI « минковского пространство; Minkowski space » – hər hansı $S \subset \mathbb{R}^n$ kürəsində kəsilməz funksiyaların $C(S)$ fəzasının vektor altfəzasıdır. K $\mathbb{R}^n$-də kompakt, $\alpha \in S$, (α, x) α, x vektorlarının skalyar hasili olduqda, M. f. $f_K(\alpha) = \sup_{x \in K}(\alpha, x)$ şəklində funksiyaların bütün mümkün fərqlərindən ibarətdir. K kompaktına f_K funksi-yasını qarşı qoyan inikasın köməyilə kompakt təsadüfi çoxluqlar ardıcıllıqlarının asimptotik xassələri haqqında məsələlər M. f.-nın təsadüfi elementləri haqqında analoji məsələlərə gətirir ki, bu da Banax fəzalarında paylanmaların və limit teoremlərinin məlum xassələrini istifadə etməyə imkan verir (bax, *Limit teoremləri təsadüfi çoxluqlar üçün*).

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973.

MİNKOVSKİ FUNKSİONALI « минковского функционал; Minkowski functional » – hamar çoxobrazlıların (məs., əyrinin uzunluğu, səthin sahəsi kimi) müxtəlif inteqral xarakteristikalarını ümumiləşdirən çoxluq funksiyasıdır. M. f.-dan təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsində istifadə təsadüfi həndəsi obyektə qarşı təbii həndəsi interpretasiyası olan həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər toplusunun qoyulmasına imkan verir.

$M(A, r)$, – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında A qabarıq kompaktının r – ətrafının həcmi olsun. A kompaktında M. f.-nın M_p qiyməti $M(A, r)$-in doğuran funksiyasının r qüvvət üstlərinə görə ayrılışında r^p-nin əmsalı kimi təyin olunur. C^2 – sərhədinə malik kompakt üçün üçölçülü halda, $M_0(A)$ əmsalı qabarıq A cisminin həcmidir, $M_1(A)$ bu cismin səthinin sahəsi, $M_2(A)$ onun inteqral orta əyriliyi, sonuncu sıfırdan fərqli $M_3(A)$ əmsalı isə A-dan, ümumiyyətlə, asılı deyildir: bu əmsal vahid radiuslu kürənin həcmidir.

Sabit vuruqlar dəqiqliyi ilə M. f. $M_p(A)$ A-nın inteqral en ölçüləri ilə üst-üstə düşür, yəni $\mathbb{R}^n$ altfəzasına A-nın p koölçülü ortoqonal proyeksiyalarının izotrop ortalanmış həcmlərilə üst-üstə düşür. M. f.-nın universallığı onun aşağıdakı xassəsilə ifadə olunur: bütün mümkün olan müsbət artan C – additiv və $\mathbb{R}^n$-də hərəkətlərə nəzərən invariant funksionallar konusu $\mathbb{R}^n$-də daxil olma əməlinə görə hissəvi nizamlanmış bütün qabarıq kompaktlar çoxluğunda M_p funksionalları ilə doğurulur.

M. f.-ları qabarıq kompaktların sonlu birləşmələri üçün də təyin olunur, bu halda M. f.-ları bu kompaktların topoloji invariantı – Eyler – Puankare xarakteristikası ilə sıx əlaqəli olur. Bunlar bir sıra inteqral ifadələrində, rekurrent münasibətlərdə və bərabərsizliklərdə də iştirak edir. M. f.-ları nəzəriyyəsi qarışıq həcmlər həndəsəsində ümumiləşdirilir.

Əd.: [1] Сантало Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983; [2] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [3] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 947–72; № 6, с. 1205–38; 1938, т. 3, № 1, с. 27–46; № 2, с. 227–51.

MİNKOVSKİ GÖZLƏNİLƏN ÖLÇÜSÜ « минковского ожидаемая мера; Minkowski expected measure » k tərtib – $\mathbb{R}^n$-də sanki yəqin qabarıq qapalı təsadüfi W_k^A çoxluğunun xarakteristikalarından biri olub,

$$f(\varphi) = \mathbf{M}\left(\int \varphi W_k^A\right)$$

şəklində, $\mathbb{R}^n$-dən olan kəsilməz φ funksiyalar çoxluğunda verilmiş, $\mathbb{R}^n$-də funksionaldır. W_k^A simvolu bütün φ-lər üçün

$$\int\limits_{A\oplus rB} \varphi(\Pi_A x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k \int \varphi(x)\, W_k^{(A)}(dx)$$

eyniliyini ödəyən ölçü, Π_A, – $\mathbb{R}^n$-in hər bir $x\in\mathbb{R}^n$ nöqtəsinə ona yaxın $y\in A$ nöqtəsini qarşı qoyan $\mathbb{R}^n$-dən $\mathbb{R}$-ə operator, $\oplus$ – Minkovski toplama simvolu (bax, *Minkovski əməlləri*), B, – $\mathbb{R}^n$-də vahid radiuslu kürədir. W_0^A ölçüsünün sıxlığı W_k^A çoxluğunun indikatoru ilə üst-üstə düşür, $k>0$ qiymətləri üçün W_k^A ölçüləri W_k^A çoxluğunun sərhədində topalanmışdır.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., M., 1978.

MİNLOS TEOREMİ « Минлоса теорема; Minlos theorem » – bax, *Sazonov topologiyası.*

MİZES BƏRABƏRSİZLİYİ « Мизеса неравенство; Mises' inequality » – diskret paylanmanın mütləq momentləri arasıda əlaqə təyin edən bərabərsizlikdir. X tam x_j qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyət, $\nu_k = \mathbf{M}\left|X-\mathbf{M}X\right|^k < \infty < \infty$ olsun, onda ixtiyari natural k ədədi üçün $2\nu_k \geq c\nu_{k-1}$ olur, burada $c=\min\limits_j(x_j - x_{j+1})$ (bax, [2], səh. 33). Əgər X təsadüfi kəmiyyəti x_1 və x_2 qiymətlərini p və $q=1-p$ ehtimalları ilə alarsa, onda bu halda $\nu_1 = 2pqc$ və $\nu_1 = c^2 pq$ olur və deməli M. b. bərabərliyə çevrilir.

Əd.: [1] Mises R., «Skand. aktuarietidskr.», 1939, t. 22, № 1, S. 32–36; [2] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, M., 1987.

MODA « мода; mode » – düzxətdə ehtimal paylanmasının ədədi xarakteristikasıdır. Əgər paylanma sıxlıq funksiyası olan mütləq kəsilməz paylanmadırsa, $p(x)$-in hər bir lokal maksimum nöqtəsi x_0 moda adlanır. $x_k = a+hk$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ nöqtələrində $p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}$ ehtimalları ilə təyin olunan şəbəkəvari paylanmanın modası elə x_m nöqtəsinə deyilir ki, $p_m > p_{m-1}$ və $p_m \geq p_{m+1}$ bərabərsizliyi ödənilsin.

Yeganə modaya malik paylanmalar – *unimodal paylanmalar* – ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada ən mühüm rol oynayan xarakteristikalardandır. Unimodal paylanmalar üçün M. müəyyən mənada ən böyük ehtimallı ədəddir (təsadüfi kəmiyyətin qiyməti).

MODAL – MEYLSİZ STATİSTİK QİYMƏT « модально несмещенная оценка; mode unbiased estimator » – modası qiymətləndirilən kəmiyyətlə üst-üstə düşən nöqtəvi *statistik qiymətdir.* $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi elementinin realizasiyaları üzrə θ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur. $\mathrm{mod}_\theta T(X)$, – θ parametri üçün statistik qiymət kimi qurulmuş T statistikasının modası olsun. Əgər bütün $\theta\in\Theta$ qiymətlərində $\mathrm{mod}_\theta T(X)=\theta$ olarsa, T statistik qiymətinə modal–meylsiz statistik qiymət deyilir.

Misal. $X=(X_1,\ldots,X_n)$ – komponentləri paylanmalarının sıxlıq funksiyaları

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta^{-1}, & 0<x<\theta, \quad \theta>0, \\ 0, & \text{əks halda} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan, eyni qanunla paylanan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi vektor olsun. Onda $X_{(n)} = \max\limits_{0\leq i\leq n} X_i$ kafi statistikası θ parametri üçün M. – m. s. q.-dir.

Qiymətləndirilən θ parametrinin yayınma ehtimalı $\mathbf{P}\{\left|T-\theta\right| > \varepsilon\}$-nın minimallaşdırılması tələb olunan statistik qiymətləndirmə məsələlərində M. – m. s. q.-dən istifadə müəyyən rola malik olur.

Əd.: [1] Wasan M. T., Parametric estimation, N. Y., 1970; [2] Воинов В. Г., Никулин М. С., Несмещенные оценки и их применения, M., 1989.

MODEL « модел; model » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

F – MODEL « F – модел; F – model » – bax, *Ümumiləşmiş reqression eksperiment.*

XY – MODELİ « XY – модель; XY – model » – bax, *Heyzenberq modeli.*

XYZ – MODELİ « XYZ – модель; XYZ – model » – bax, *Heyzenberq modeli.*

$P[\varphi]_2$ – MODELLƏRİ, KVANT MEYDAN NƏZƏRİYYƏSİNİN « $P[\varphi]_2$ – модели квантовой теории поля; $P[\varphi]_2$ – models of quantum field theory » – ikiölçülü $\mathscr{M}^2$ Minkovski fəzasında skalyar neytral bozon özüözünə təsiredən meydanın sadə modelləridir. Modelin sadə formal laqranjianı

$$L(\varphi(x),\ \varphi'_{x^{(0)}}(x),\ \varphi'_{x^{(1)}}(x)) =$$
$$= -(\varphi'_{x^{(0)}})^2 + (\varphi'_{x^{(1)}})^2 + m^2\varphi^2(x) + \lambda P(\varphi(x)) \qquad (*)$$

şəklində ifadə olunur, burada $x=(x^{(0)},x^{(1)})\in\mathscr{M}^2$, $\varphi(x)$ – meydan, $m^2>0$, $\lambda>0$ – konstantlar, $P(\cdot)$ – ikidən böyük cüt dərəcəli çoxhədlidir, böyük əmsalı 1-ə bərabərdir.

(*) şəklində ixtiyari laqranjian üzrə (olduqca kiçik λ ilə) $\mathscr{M}^2$ fəzasında kvant meydanı $\{\varphi(t), t\in S(\mathscr{M}^2)\}$ qurmaq olar. Bu meydan Evklid yanaşması adlandırılan yanaşmanın köməyilə qurulur: əvvəlcə $\mathbb{R}^2$-də $P[\varphi]_2$ – Evklid meydanı qurulur, sonra isə yaxşı işlənilmiş prosedurun köməyilə bu meydan «xəyali zamana davam olunur» (yəni $\mathscr{M}^2$ fəzasına). $P[\varphi]_2$ – Evklid meydanı isə ümumiləşmiş Markov meydanıdır; bu meydan isə kovariasion funksionalı olan Qauss ümumiləşmiş $\{X(\varphi), \varphi\in\mathbb{R}^2\}$ meydanının məhdud $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ oblastlarında Gibbs yenidənqurmalarının $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^2$ olduqda termodinamik limiti kimi konstruksiya olunur. $\langle X(\varphi_1)X(\varphi_2)\rangle = ((-\Delta+m^2)^{-1}\times$ $\times\varphi_1,\varphi_2)_{L_2(\mathbb{R}^2)}$, $\varphi_1,\varphi_2\in S(\mathbb{R}^2)$ [(*) laqranjianının kvadratik hissəsinə uyğun sərbəst Evklid meydanı]. Yenidənqurma

$$U_\Lambda(X) = \lambda\int\limits_\Lambda :P((X(x))):d^2x$$

əməliyyatı vasitəsilə həyata keçirilir; :: işarələməsi $P(X(x))$ çoxhədlisinin *Vik nizamlanmasını* ifadə edir.

Ədd.: [1] С а й м о н Б., Модель $P[\varphi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е А., Математический методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [3] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977.

MODELLƏŞDİRİLMƏSİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR VƏ FUNKSİYALARIN « моделирование случайных величин и функций; simulation of random variables and functions » – *statistik modelləşdirmə metodunun* (*Monte – Karlo metodunun*) realizasiyası üçün uyğun seçimi qiymətlərin imitasiyasıdır.

1. Təsadüfi kəmiyyətlərin modelləşdirilməsi, bir qayda olaraq, $(0,1)$-də müntəzəm paylanmış təsadüfi və ya psevdotəsadüfi α kəmiyyətinin asılı olmayan qiymətlərinin çevrilməsi yolu ilə, yəni

$$\xi = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad (1)$$

modelləyici düsturu ilə həyata keçirilir. α-nın seçimi qiymətləri ardıcıllığı, adətən, EHM-da nəzəri – ədədi alqoritmlər vasitəsilə alınır ki, bunlar arasında ən çox istifadə olunan çıxıqlar metodudur: bu halda $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1}5^{2p+1} (\mathrm{mod}\, 2^m)$, $\alpha_n = u_n 2^{-m}$ götürülür, burada m – EHM mantissasının dərəcələri sayı, $p = \max\{q : 5^{2q+1} < 2^m\}$. Belə ədədlər psevdotəsadüfi ədədlər adlanır. Çıxıqlar metodunun belə variantının periodunun uzunluğu 2^{m-2}-yə bərabərdir.

Paylanması $\mathbf{P}\{\xi = x_n\} = p_k$, $k = 0, 1, \dots$ olan ξ diskret təsadüfi kəmiyyətinin standart modelləşdirilməsi aşağıdakı kimidir: əgər α-nın seçilmiş qiyməti üçün

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k \le \alpha < \sum_{k=0}^{m} p_k$$

münasibəti ödənilərsə, $\xi = x_m$ fərz olunur.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin standart modelləşdirilmə metodu (başqa sözlə, tərs funksiya metodu) – $\xi = F^{-1}(\alpha)$ ifadəsindən istifadədən ibarətdir, burada F – paylanma sıxlığı verilmiş $f(x)$ olan paylanma funksiyasıdır.

Bəzən randomizasiya (başqa sözlə, superpozisiya metodu) səmərəli olur, bu metod $f(x) = \sum_k p_k f_k(x)$ ifadəsinə əsaslanır. Randomizasiyadan istifadə edərkən əvvəlcə paylanması $\mathbf{P}\{m = k\} = p_k$ olan nömrə seçilir, sonra sıxlığı $f_m(x)$ olan paylanmadan ξ-nin seçimi qiyməti alınır.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin modelləşdirilməsində digər ümumi üsul xaricetmə metodudur (başqa sözlə, seçmə metodudur); bu metodda hökm olunur ki, əgər (ξ, η) nöqtəsi $|G|$ sahəsinin $G = \{(x, y) : 0 \le y \le g(x)\}$ oblastında müntəzəm qanunla paylanmışdırsa, onda $f_\xi(x) = g(x)/|G|$. Xaricetmə metodunda $G_1 > G$ oblastı üzrə müntəzəm olaraq, (ξ_0, η) nöqtəsi seçilir və əgər $(\xi_0, \eta) \in G$ olarsa, $\xi = \xi_0$ qəbul edilir, əks halda, seçim təkrarlanır və s. (ξ_0, η) nöqtəsini $G_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le g_1(x)\}$ oblastı üzrə müntəzəm seçmək üçün ξ_0 kəmiyyətini paylanma sıxlığı $g_1(x)/|G|$ olan paylanmadan seçmək və $\eta = \alpha g_1(\xi_0)$ götürmək kifayətdir.

$g_1(x) \ge g(x)$ şərtini ödəyən $g_1(x)$ funksiyasını elə seçmək məqsədəuyğundur ki, ξ_0 təsadüfi kəmiyyətini standart metodla modelləşdirmək mümkün olsun. Məs., əgər $a \le \xi \le b$ və $g(x) = cf(x) \le R$ olarsa, onda $\xi_0 = a + (b-a)\alpha_1$ və $c = R\alpha_2$ olduğunu fərz etmək olar. Xaricetmə metodunda aparılan əməliyyatların orta sayı $|G_1|/|G|$ kəmiyyətinə mütənasibdir.

n kəmiyyəti, adətən, (1) modelləyici düsturunun dim. – ölçüsü adlandırılır. $\xi = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin tələb olunan paylanması $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vektorunun uyğun hiperkubda müntəzəm paylanmasının nəticəsidir, yəni istifadə olunan təsadüfi kəmiyyətlərin n – dim. – ölçülü müntəzəm paylanmaya malik olması nəticəsidir. Buna görə də, kiçik dim. – ölçülü modelləyici düsturlardan istifadə etmək məsləhət görülür. Standart tərs funksiya metodundan F^{-1} funksiyasının realizasiyasının çətinliyi baxımından, praktik olaraq, nadir hallarda istifadə olunur, xüsusilə də, məsələnin həlli prosesində dəyişən parametrlər olduğu halda. Bir sıra ehtimal paylanmaları üçün xüsusi modelləyici düsturlar aşağıda verilir (bax, [1]):

1) p parametrli həndəsi paylanma: $\xi = [\ln\alpha / \ln(1-p)]$, burada $[x]$, – x-in tam hissəsidir.

2) $1, \dots, n$ ədədlər çoxluğunda diskret müntəzəm paylanma: $\xi = [\alpha n] + 1$. Bu düsturdan ixtiyari diskret paylanmaların modelləşdirilməsinin ehtimallarının müntəzəm «laylaşdırılması» və mümkün uyğun qiymətlərin təkrarlanması yolu ilə yaxşılaşdırılması məqsədilə istifadə olunur (bax, [2]).

3) Standart normal paylanma $N(0,1)$:

$$\xi = (-2\ln\alpha_1)^{1/2}\cos(2\pi\alpha_2), \quad \eta = (-2\ln\alpha_1)^{1/2}\sin(2\pi\alpha_2).$$

ξ və η – asılı olmayan, $N(0,1)$ qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir.

4) $(0,1)$ intervalında p və tam $q = m$ parametrlərli beta – paylanma:

$$\xi = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\ln\alpha_k}{p+k-1}\right)$$

Bu düsturun randomizasiyası vasitəsilə ixtiyari parametrlərli beta – paylanmanı modelləşdirmək olur (bax, [1]).

5) υ parametrli qamma – paylanma:

$$\xi = -\ln\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\right) - \xi_\mu \ln\alpha_{m+1}$$

burada $m = [\nu]$, ξ_μ isə $p = \nu - m$, $q = 1 + m - \nu$ parametrlərli beta – paylanmaya tabe təsadüfi kəmiyyətdir.

II. Təsadüfi vektorların modelləşdirilməsi. Kəsilməz $\mathrm{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun modelləşdirilməsinin standart alqoritmi X-in komponentləri üçün qiymətlərin şərti paylanmalarla ifadə olunan

$$f_{\mathrm{X}} = f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2 \mid x_1) \dots f_n(x_n \mid x_1, \dots, x_{n-1})$$

münasibətindən seçilməsindən ibarətdir. Xaricetmə metodu və superpozisiya metodu dəyişilmədən çoxölçülü hala köçürülür, yalnız bu halda X və x -ə təsadüfi vektorlar kimi baxılmalıdır. Məs., dim. – ölçüsü çox da böyük olmayan $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ Qauss vektorunu $\mathrm{X} = A\mathrm{Y} + \mathbf{M}\mathrm{X}$ düsturu ilə modelləşdirmək olar, burada $\mathrm{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ – asılı olmayan standart – normal təsadüfi kəmiyyətlər toplusu, A – üçbucaq matrisdir və bu matrisin elementləri məlum rekurrent üsulla hesablanır (bax, [1]).

Birölçülü paylanmaları və mənfi olmayan kovariasiyaları ilə verilmiş xüsusi təsadüfi vektorların qurulması üçün «təkrarlama metodu» işlənilmişdir (bax, [3]); bu metoddan istifadə etmək üçün vektorun komponentləri çoxluğunun təsadüfi bölgüsü – qeyd olunmuş bölgü üçün eyni qiymətlərin asılı olmayan qruplara bölgüsü modelləşdirilir.

III. Təsadüfi funksiyaların modelləşdirilməsi. Əgər stasionar $\zeta(t)$ Qauss prosesinin spektral sıxlığı

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{m} b_k (i\lambda)^k \Bigg/ \sum_{k=0}^{n} a_k (i\lambda)^k \qquad (2)$$

iki çoxhədlinin nisbəti kimi verilmişdirsə, məxrəcdəki çoxhədlinin sıfırları isə yuxarı yarımmüstəvidə yerləşmişdirsə, onda $\zeta(t)$ prosesini $\Phi(t)$ təsadüfi funksiyası və onun ilk $(m-1)$ sayda ilk törəmələrinin xətti kombinasiyası şəklində qurmaq olar, yəni

$$\zeta(t) = b_0 \Phi^{(m-1)}(t) + \ldots + b_m \Phi(t)$$

burada $a_0 = 1$, a_k, b_k – həqiqi sabitlər, $\Phi(t)$ – sabit əmsallarlı

$$\Phi^{(n)}(t) + a_1 \Phi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n \Phi(t) = W(t) \qquad (3)$$

xətti stoxastik tənliyin həlli, $W(t)$ – bəyaz küy prosesidir (bax, [1]). Xüsusi şəkilli spektral sıxlıqlarlı təsadüfi meydanlar üçün analoji ifadələr almaq olur; məs., Qauss spektral sıxlıqlı təsadüfi meydan başlanğıc qiyməti kimi bəyaz küy götürülən istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həlli kimi alına bilinər (bax, [4]).

Diskret zaman anlarında stasionar proseslərin realizasiyalarının (zaman sıralarının) alınması üçün, adətən, (3) tənliyinin onun sonlufərqlər analoqu ilə təqribi əvəz olunmasından istifadə olunur. Kəsri – rasional spektral sıxlığı (2) ilə ifadə olunan zaman sıralarının dəqiq realizasiyasını avtoreqressiya və sürüşən orta qarışıq modelinin əsasında qurmaq olar (bax, [1]).

Qauss təsadüfi meydanlarının bir sıra modellərinə [5]-də baxılmışdır. Birölçülü paylanma funksiyası $F_\xi(t)$ və verilmiş qabarıq korrelyasion funksiyası $k(t) \geq 0$ olan $\xi(t; k)$ stasionar təsadüfi prosesinin xüsusi modeli məlumdur; bu model t uzunluqlu intervalda $k(t)$ ehtimallı sıfır nöqtələri olan Palm stasionar nöqtəvi $\{\tau_k\}$ axını əsasında qurulmuşdur. $\xi(t; k)$ prosesi aşağıdakı kimi modelləşdirilir: a) $(0, T)$ -də $\{\tau_k\}$ axını qurulur; b) hər bir (τ_{i-1}, τ_i) intervalı üçün $\xi(t) = \xi_i$ fərz olunur, burada $\{\xi_i\}$ – paylanma funksiyası $F_\xi(x)$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu modeli $\xi_m(t) = \sum_{i=1}^{(m)} \xi_i^{(m)}(t; k)$ düsturundan istifadə edərək yaxşılaşdırmaq olar [fərz olunur ki, hər bir natural m ədədi üçün $\xi = \xi_t^{(m)} + \ldots + \xi_m^{(m)}$ ifadəsi doğrudur, burada $\xi_i^{(m)}$ – asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir]. $\xi_m(t)$ prosesinin realizasiyaları $\xi(t; k)$ ilə müqayisədə kəsilməz funksiyalara yaxınlıq mənada nisbətən yaxşılaşdırılmış hesab olunur. $\xi_m(t)$ -lərə uyğun sonluölçülü paylanmaların uzlaşma şərtlərini ödəyən paylanmalara zəif yığılması və Kolmoqorov – Çentsov kriterisinə əsaslanan teorem də isbat olunmuşdur.

Əgər $|k''(t)| < c < \infty$ münasibəti $[0, T]$ -də ödənilərsə və $\xi \geq 0$ olarsa, onda $\xi_m(t)$ prosesləri (D metrikasına nəzərən) limit sonluölçülü paylanmaları ilə təyin olunan, korrelyasion funksiyası $k(t)$ və birölçülü paylanma funksiyası $F_\xi(x)$ olan prosesə zəif yığılırlar.

$\xi(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{k})$ bircins meydanları üçün analoji $\xi(t; k)$ modelləri müxtəlif koordinat oxları üzrə Palm axınlarının düz hasillərilə alınan təsadüfi şəbəkələr üzrə qurulur; izotrop meydanlar üçün olduqca təbii modellər $\xi(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{k})$ -nın realizasiyalarının təsadüfi fırlanması və cəmlənməsi vasitəsilə alınır (bax, [5]).

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Кнут Д. Я., Яо Э., «Кибернетич. сб.», 1983, № 19, с. 97–158; [3] Михайлов Г. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 873–79; [4] Марченко А. С., Огородников В. А., «Журн. Вычислит. матем. и матем. физики», 1984, т. 24, № 10, с. 1514–19; [5] Михайлов Г. А., «Журн. вычислит. матем. и матем. физики.», 1983, т. 23, № 3, с. 558–66.

MODELLƏYİCİ FORMULA « моделирующая формула; simulation formula » – bax, *Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

MODULYASİYA VƏ DEMODULYASİYA « модуляция и демодуляция; modulation and demodulation » – informasiya nəzəriyyəsinin fiziki rabitə *kanalı* ilə siqnalları ötürmə metodunu təsvir edən anlayışlarıdır.

Modulyasiya (M.) – ötürülən $a(t)$ siqnalının qiymətlərinə uyğun olaraq, $v(t, \lambda)$ periodik funksiyasının (daşıyıcı siqnal) bir və ya bir neçə parametrinin dəyişikliyidir. M. nəticəsində modulyasiyalanmış siqnal – $V(t) = v(t, Ba(t))$ siqnalı yaranır, burada B – hər hansı, ümumiyyətlə isə, qeyri – xətti operatordur.

Demodulyasiya (D) – rabitə kanalı ilə keçən modulyasiyalanmış siqnaldan $a(t)$ siqnalının ayrılmasıdır. M. nəticəsində ötürülən siqnal spektrinin yerinidəyişməsi baş verir və bununla da, rabitə kanalını daha da adekvat surətdə istifadə etmə imkanı yaranır və bu rabitə kanalı ilə siqnalların ötürülməsini minimal dəyişikliklərlə həyata keçirmək olur.

Daşıyıcı siqnal kimi, əksər hallarda, $\sqrt{2P}\cos[\omega_0 t + \varphi_0]$ harmonik rəqsi istifadə olunur. Bu halda modulyasiyalanmış siqnal $\sqrt{2p}\, A(t)\cos[\theta(t)]$ şəklində olur və aşağıdakı M.-lar mümkündür:

$$A(t) = 1 + m a(t), \quad \theta(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

– amplitud M.,

$$A(t) = 1, \quad \theta(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi a(t)$$

– faza M.,

$$A(t)=1,\quad \theta(t)=\omega_0 t+\varphi_0+\Delta\omega\int_0^t a(s)\,ds$$

– t e z l i k M..

Rabitə texnikasında d i s k r e t (r ə q ə m l i) M. geniş tətbiq olunur və bu növ M. rabitə kanalı ilə hər hansı əlifba simvollarının ardıcıllığının ötürülməsi məqsədilə istifadə olunur. Bu halda $\upsilon(t,\lambda)$ daşıyıcı siqnalının λ parametrinin dəyişiklikləri yalnız diskret kT, $k=0,1,\ldots$ anlarında baş verə bilər, λ parametri isə yalnız sonlu sayda müəyyən qiymətlər ala bilər. Diskret M.-nın ən sadə forması ikifazalı faza manipulyasiyasıdır ki, bunun köməyilə $d_i\in\{0,1\}$ olan ikilik d_i simvolları ötürülür. Modulyasiyalanmış siqnal bu halda aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$V(t)=\sqrt{2P}\,\sin\left[\omega_0 t+\sum_i d_i\,\theta_T(t+iT)\right],$$

$$\theta_T(t)=\begin{cases}\pi, & t\in[0,T],\\ 0, & t\notin[0,T].\end{cases}$$

D. məsələlərinin riyazi qoyuluşu, adətən, sadə olur. Məs., $n(t)$ additiv bəyaz küylü rabitə kanalından keçən ikizolaqlı amplitudlu M. siqnalının D.-sı üçün

$$x(s)=\sqrt{2P}\,a(s)\,\cos[\omega_0 s]+n(s),\quad s\in(-\infty,\infty)$$

təsadüfi prosesi üzrə müşahidələr əsasında $a(t)$ Qauss stasionar prosesinin statistik qiyməti $\hat a(t)$-ni qurmaq tələb olunur. Bu halda fərz olunur ki, optimal $\hat a(t)$ statistik qiyməti $\mathbf{M}\,[\hat a(t)-a(t)]^2$ kvadratik orta riskini minimallaşdırmalıdır. $a(\cdot)$ prosesinin spektral sıxlığı $G_a(\omega)$ və Qauss bəyaz küyünün spektral sıxlığı $N_0/2$ məlum hesab olunur və $|\omega|>\omega_0$ olduqda $G_a(\omega)=0$. Optimal statistik qiymət xəttidir və aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\hat a(t)=\sqrt{\frac{2}{P}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)\cos[\omega_0 s]\,x(s)\,ds,$$

burada

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\,\frac{N_0/2P}{G_a(\omega)+N_0/2P}\,d\omega.$$

Real rabitə kanallarında, bir qayda olaraq, additiv küylə yanaşı daşıyıcı harmonik rəqsin fluktuasiyaları da aşkar olunur. Buna görə də, D.-da bu fluktuasiyalara nəzarət kimi mühüm məsələ qarşıya çıxır. Ən sadə halda bu məsələ aşağıdakı şəkildə ifadə oluna bilinər:

$$x(s)=\sqrt{2P}\,\cos[\omega_0 s+\varphi(s)]+n(s),\quad s\in[0,t]$$

təsadüfi prosesi üzrə müşahidələrə görə $\mathbf{M}\,[\hat\varphi(t)-\varphi(t)]^2$ kvadratik ortasını minimallaşdıran $\hat\varphi(t)$ statistik qiymətini qurmaq tələb olunur, burada $\varphi(\cdot)$ – Qauss stasionar prosesi, $n(\cdot)$ – Qauss bəyaz küyüdür. Bu məsələnin həllini optimal qeyri – xətti filtrasiyanın Markov nəzəriyyəsi çərçivəsində almaq olur (bax, [4], [5]). Praktikada bu məsələnin həllinə geniş yayılmış yanaşmalardan biri faza sinxronizasiyası prinsipinə əsaslanır (bax, [8]). Bu prinsip rabitə texnikasında tezliyin faza avtoqurma sistemlərinin (rus. – системы фазовой автоподстройки частоты, qısaca – ФАПЧ) köməyilə reallaşır. ФАПЧ-ın riyazi nəzəriyyəsi D. statistik nəzəriyyəsinin əsas elementlərindən biridir.

Əd.: [1] К о т е л ь н и к о в В. А., Теория потенциальной помехоустойчивости, М. – Л., 1956; [2] С а к р и с о н Д., Лекции по аналоговой связи, пер. с англ., М., 1974; [3] В о з е н к р а ф т Д ж., Д ж е к о б с И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [4] С т р а т о н о в и ч Р. Л., Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., 1966; [5] Т и х о н о в В. И., К у л ь м а н Н. К., Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, М., 1975; [6] В и т е р б и Э. Д., Принципы когерентной связи, пер. с англ., М., 1970; [7] В а н Т р и с Г а р р и Л., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1–2, М., 1972–75; [8] Л и н д с е й В., Системы синхронизации в связи и управлении, пер. с англ., М., 1978.

MODULYASİYALANMIŞ SİQNAL « модулированный сигнал; modulated signal » – bax, *Modulyasiya və demodulyasiya.*

MOMENT « момент; moment » – ehtimal *paylanmasının* ədədi xarakteristikasıdır. ξ *təsadüfi kəmiyyətinin* k t ə r t i b m o m e n t i $\mathbf{m}_k$ ($k>0$ tam ədəddir) $\mathbf{M}\,\xi^k$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi kimi (əgər bu riyazi gözləmə vardırsa) təyin olunur. Əgər $F(x)$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdırsa, onda

$$\mathbf{m}_k=\mathbf{M}\xi^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\,dF(x)\qquad(1)$$

düsturu ilə; ξ diskret təsadüfi kəmiyyəti $x_1,x_2,\ldots$ mümkün qiymətləri və $p_i=\mathbf{P}\{\xi=x_i\}$, $i=1,2,\ldots$ ehtimalları toplusu ilə verilərsə,

$$\mathbf{m}_k=\mathbf{M}\xi^k=\sum_i x_i^k\,p_k\qquad(2)$$

düsturu ilə k tərtib M. təyin olunur. Ehtimal nəzəriyyəsində M.-in təyin olunmasında mexanikada mühüm rol oynayan uyğun anlayışla birbaşa analogiyadan istifadə olunur: (1) düsturu ilə kütlənin paylanması M.-i təyin olunur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin birinci tərtib M.-i (mexanikada statik M.) *riyazi gözləmədir*, yəni $\mathbf{m}=\mathbf{M}\xi$. $\mathbf{M}(\xi-a)^k$ kəmiyyəti ξ təsadüfi kəmiyyətinin a-ya n ə z ə r ə n k t ə r t i b m o m e n t i adlanır, $\boldsymbol{\mu}_k=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^k$ kəmiyyətinə ξ təsadüfi kəmiyyətinin k t ə r t i b m ə r k ə z i m o m e n t i deyilir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin ikinci tərtib mərkəzi momenti $\mathbf{D}\xi=\sigma^2=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2$ – *dispersiya* adlanır (mexanikada inersiya momenti). $\nu_k=\mathbf{M}|\xi|^k$, – k tərtib *mütləq moment* adlanır. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasının (bax, *Çoxölçülü paylanma*) M.-i analoji təyin olunur; $k_1+\ldots+k_n=k$ şərtini ödəyən ixtiyari $k_i\ge 0$ tam ədədləri üçün $\mathbf{M}(\xi_1^{k_1},\ldots,\xi_n^{k_n})$ riyazi gözləməsi – k t ə r t i b q a r ı ş ı q m o m e n t, $\mathbf{M}(\xi_1-\mathbf{M}\xi_1)^{k_1}\ldots(\xi_n-\mathbf{M}\xi_n)^{k_n}$, – k t ə r t i b

m ə r k ə z i q a r ı ş ı q m o m e n t adlanır. İkitərtib qarışıq moment – $\mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{M}\xi_2)$ – ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin *kovariasiyası* adlanır və bu kəmiyyət təsadüfi kəmiyyətlər arasında əsas asılılıq xarakteristikalarından biridir (bax, *Korrelyasiya*). Belə bir fakt doğrudur ki, ixtiyari ξ təsadüfi kəmiyyəti üçün $g(k) = \log \mathbf{M}\left|\xi\right|^k$ funksiyasının təyin olunduğu hər bir sonlu intervalda $g(k)$, k -ya görə qabarıq funksiyadır; $(\mathbf{M}\left|\xi\right|^k)^{1/k}$ k -ya görə azalmayan funksiyadır. M.-in bütün xassələri (o cümlədən, M.-lər üçün bərabərsizliklər) bu faktın nəticəsidir. $\mathbf{M}\xi^k$ və $\mathbf{M}(\xi - a)^k$ M.-ləri, yalnız və yalnız, $\mathbf{M}\left|\xi\right| < \infty$ olduğu halda mövcuddur. Əgər $\mathbf{M}\left|\xi\right|^{k_0}$ M.-i vardırsa, onda $k \le k_0$ şərtini ödəyən bütün k qiymətlərində bütün k tərtib M.-lər vardır. Əgər bütün $i = 1, \dots, n$ qiymətlərində $\mathbf{M}\left|\xi_i\right|^k < \infty$ olarsa, onda $k_1 + \dots + k_n \le k$ şərtini ödəyən bütün $k_i \ge 0$ qiymətlərində $\mathbf{M}\xi_1^{k_1}, \dots, \mathbf{M}\xi_n^{k_n}$ qarışıq M.-ləri mövcuddur. Bəzi hallarda M.-i təyin etmək üçün m o m e n t l ə r i n d o ğ u r a n f u n k s i y a s ı adlandırılan $\psi(t)$ funksiyasından istifadə olunur ki, bu funksiyanın ayrılışında paylanmanın momentləri əmsallar kimi götürülür: tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər üçün bu funksiya $\varphi(s)$ doğuran funksiyası ilə $\psi(t) = \varphi(e^t)$ münasibətilə bağlıdır. Əgər $\mathbf{M}\left|\xi\right|^k < \infty$ olarsa, onda ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası $f(t)$ k tərtib də daxil olmaqla k -dan kiçik, bütün tərtib kəsilməz törəmələrə malikdir, bu halda k tərtib M. $f(t)$ -nin t -yə görə ayrılışında $(it)^k k!$ -nın əmsalıdır, yəni:

$$\mathbf{M}\xi^k = (-i)^k \frac{d}{dt^k} f(t)\Big|_{t=0}.$$

Əgər xarakteristik funksiyanın $2k$ tərtib törəməsi sıfırda vardırsa, onda $\mathbf{M}\left|\xi\right|^{2k} < \infty$.

M. ilə semi – invariantlar arasında əlaqə haqqında «*Semi – invariant*» adlı məq.-yə bax.

Əgər paylanmanın momentləri məlum olarsa, onda təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən yayınma ehtimalları haqqında bəzi müddəaları bərabərsizliklər terminlərilə ifadə etmək olar; belə bərabərsizliklərdən ən çox məlum olanı

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

– *Çebışev bərabərsizliyi* və onun ümumiləşmələridir.

Ehtimal paylanmalarının onun momentlərinin ardıcıllığı ilə təyin olunması məsələsi m o m e n t l ə r p r o b l e m i adlanır. Bu məsələyə ilk dəfə, 1874-də P. L. Çebışev limit teoremlərinin tədqiqi ilə əlaqədar baxmışdır. Təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanmasının özünün $\alpha_k = \mathbf{M}\xi^k$ M.-ləri ilə birqiymətli təyin olunması üçün kafidir ki, məs.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{2k})^{-1/2k} = \infty$$

K a r l e m a n ş ə r t i ödənilsin. Analoji hökm təsadüfi vektorların M.-ləri üçün də doğrudur.

Limit teoremlərində M.-dən istifadə aşağıdakı fakta əsaslanır. F_n, $n = 1, 2, \dots$ – paylanma funksiyaları ardıcıllığı olsun; fərz olunur ki, bu paylanmaların uyğun bütün $\mathbf{m}_k(n)$ momentləri sonludur və hər bir tam $k \ge 1$ üçün $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{m}_k(n) \to \mathbf{m}_k$ münasibəti ödənilir; $\mathbf{m}_k$ -lar sonludurlar. Onda elə F_{n_i} altardıcıllığı vardır ki, bu ardıcıllıq F paylanma funksiyasına zəif yığılır, bu F_{n_i} paylanmalarının M.-ləri isə $\mathbf{m}_k$ -lardır. Əgər M.-lər F -i birqiymətli təyin edirsə, onda F_n altardıcıllığı F -ə zəif yığılır. Momentlər metodu adlandırılan metod bu fakta əsaslanmışdır və xüsusi halda, riyazi statistikada empirik paylanmanın nəzəri paylanmadan yayınmalarının öyrənilməsində və paylanma parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsində istifadə olunur (bax, *Empirik paylanma*).

MOMENT ÖLÇÜSÜ n ö q t ə v i p r o s e s i n **« моментная мера** т о ч е ч н о г о п р о ц е с с а; **moment measure** o f a p o i n t p r o c e s s **»** – elə ölçüdür ki, onun B Borel çoxluğunda qiyməti *nöqtəvi təsadüfi prosesin* B çoxluğundakı nöqtələr sayının (bu say tam bölünən ədəd olmalıdır) orta qiymətinə bərabərdir. Əgər Φ , – $(A, \mathfrak{A})$ faza fəzasında təyin olunmuş təsadüfi prosesdirsə, onda Φ nöqtəvi prosesinin M. ö. Λ $B \in \mathfrak{A}$ çoxluqlarında $\Lambda(B) = \mathbf{M}\Phi(B)$ münasibətilə təyin olunur.

$S = \{t_i\,,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, – $\mathbb{R}^1$ oxunda t_i nöqtələrinin təsadüfi ardıcıllığı olsun, $t_i < t_{i+1}$. Φ təsadüfi nöqtəvi prosesinə baxılır; B Borel çoxluğu üçün $\Phi(B)$ $t_i \in B$ nöqtələrinin sayına bərabərdir. Φ prosesinin M. ö. B çoxluğundakı t_i nöqtələrinin orta qiymətinə bərabərdir. $\mathbf{M}\Phi(B)^k$, $\mathbf{M}\Phi(B_1)^l \Phi(B_2)^m$ momentlərini hesablamaq üçün Φ nöqtəvi prosesinin faktorial M. ö.-lərindən istifadə olunur. $k = 2$, $l = m = 1$ olduqda $\Lambda_{(2)}$ ikinci faktorial M. ö.-ndən istifadə olunur və $\Lambda_{(2)}$ -ni təyin etmək üçün ilkin təsadüfi S ardıcıllığının $t_i \ne t_j$ şərtini ödəyən bütün t_i, t_j nöqtələrinin $(t_i,\ t_j)$ cütlərinə baxılır. $\mathbb{R}^2$ müstəvisində C Borel çoxluğu üçün $\Lambda_{(2)}(C)$ C -dən olan $t_i \ne t_j$ şərtini ödəyən $(t_i,\ t_j)$ nöqtələrinin tam bölünmə ədədlərinin saylarının $\Phi(\{t_i\})\Phi(\{t_j\})$ hasillərinin cəminin orta qiymətinə bərabərdir.

Əgər $S = \{t_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots\}$ bərpa prosesinə uyğundursa, onda $C \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ üçün

$$\Lambda_{(2)}(C) = \int \int_{C \cap (t_1 < t_2)} dH(t_2 - t_1)\, dH(t_1) +$$

$$+ \int \int_{C \cap (t_1 > t_2)} dH(t_1 - t_2)\, dH(t_2)\ ,$$

burada $H(t)$ – bərpa funksiyasıdır. Əgər B_1 , B_2 , – $\mathbb{R}^1$ -də kəsişməyən parçalardırsa, onda $\mathbf{M}\Phi(B_1)\Phi(B_2) = \Lambda_{(2)}(B_1 \times B_2)$, burada $B_1 \times B_2$ tərəfləri B_1 , B_2 olan düzbucaqlıdır. İkinci

faktorial moment $\mathbf{M}\Phi(B_1)[\Phi(B_1)-1] = \Lambda_{(2)}(B_1\times B_2)$ düsturu ilə ifadə olunur.

M. ö. təsadüfi proseslərin realizasiyalarla səddi aşmalarının araşdırılmasında istifadə olunur.

Bax, *Həndəsi proses*.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969, с. 341–78.

MOMENT SPEKTRAL SIXLIĞI « моментная спектральная плотность; moment spectral dencity » – bax, *Moment spektri.*

MOMENT SPEKTRİ « моментный спектр; moment spectrum », k tərtib m o m e n t s p e k t r a l s ı x l ı ğ ı, – $\mathbf{M}\zeta(t)=0$ şərtini ödəyən birölçülü stasionar $\zeta(t)$ prosesinin k tərtib momentinin Furye çevirməsidir. $k=2,3$ tərtiblərli M. s.-ləri uyğun semi – invariant spektrlərlə üst-üstə düşür (bax, *Spektral semi – invariant*, *Spektral sıxlıq*). Zaman sıralarının yüksək tərtib momentlərinin Furye – analizi [1]-də təklif olunmuşdur, lakin sonralar yüksək tərtib semi – invariantların Furye – analizi sürətlə inkişaf etmiş oldu.

Əd.: [1] B l a n c – L a p i e r r e A., F o r t e t R., Théorie des functions, aléatoires, P., 1953; [2] Х е н н а н Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

MOMENTLƏR FUNKSİYASI « моментов функция; moment function » h ə q i q i t ə s a d ü f i p r o s e s i n və ya $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ t ə s a d ü f i f u n k s i y a s ı n ı n

$$\mathbf{m}_{j_1,\dots,j_k}(t_1,\dots,t_k) = \mathbf{M}[\zeta(t_1)]^{j_1}[\zeta(t_2)]^{j_2}\dots[\zeta(t_k)]^{j_k},$$

$$j_\nu>0,\ \ \nu=1,\dots,k$$

bərabərliyi ilə təyin olunan, $t_1,\dots,t_k\in T$ arqumentlərinin funksiyasıdır. $q=j_1+\dots+j_k$ kəmiyyəti M. f.-nın t ə r t i b i adlanır. q tərtib M. f.-nın təyin olunması üçün $\zeta(t)$ funksiyasının bütün $t\in T$ qiymətlərində q tərtib $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^q$ sonlu momentinin varlığı fərz olunmalıdır. Bu halda $p\le q$ şərtini ödəyən bütün p tərtib M. f.-ları təyin olunmuşdur.

M. f.-nı

$$\mathbf{m}_{j_1,\dots,j_k}(t_1,\dots,t_k) =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_k^{j_k}\ d\mathbf{P}\{\zeta(t_1)<x_1,\dots,\zeta(t_k)<x_k\}$$

düsturu ilə tapmaq olar.

Əgər $(\zeta(t_1),\dots,\zeta(t_k))$ təsadüfi vektorunun xarakteristik funksiyası

$$\varphi(z_1,\dots,z_k;t_1,\dots,t_k)=\mathbf{M}\exp\left\{i\sum_{\nu=1}^{k}z_\nu\zeta(t_\nu)\right\}$$

məlum olarsa, onda tamqiymətli $j_1,\dots,j_k$ indekslərli M. f.

$$\mathbf{m}_{j_1,\dots,j_k}(t_1,\dots,t_k)=(-i)^q\frac{\partial^q\varphi}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_k^{j_k}}\Bigg|_{z_1=\dots=z_k=0}$$

düsturu ilə təyin olunur. Birinci tərtib M. f.

$$\mathbf{m}_1(t)=\mathbf{m}(t)=\mathbf{M}\zeta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,d\mathbf{P}\{\zeta(t)<x\}$$

– təsadüfi funksiyanın r i y a z i g ö z l ə m ə s i və ya o r t a q i y m ə t i adlanır; ikinci tərtib M. f.

$$\mathbf{m}_2(t_1,t_2)=\mathbf{M}\zeta(t_1)\zeta(t_2)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\ d\mathbf{P}\{\zeta(t_1)<x_1,\zeta(t_2)<x_2\}$$

əksər hallarda $\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının k o v a r i a s i o n f u n k s i y a s ı (və ya k o r r e l y a s i o n f u n k s i y a s ı) adlanır.

$\zeta(t)$ təsadüfi funksiyasının m ə r k ə z i m o m e n t l ə r f u n k s i y a l a r ı

$$\boldsymbol{\mu}_{j_1,\dots,j_k}(t_1,\dots,t_k)=$$

$$=\mathbf{M}\,[\zeta(t_1)-\mathbf{M}\zeta(t_1)]^{j_1}\dots[\zeta(t_k)-\mathbf{M}\zeta(t_k)]^{j_k},$$

$$j_\nu>0,\quad \nu=1,\dots,k$$

düsturu ilə ifadə olunur və bunlar mərkəzlənmiş $\zeta_1(t)=$ $=\zeta(t)-\mathbf{m}_1(t)$ təsadüfi funksiyasının (bu funksiyanın riyazi gözləməsi bütün $t\in T$ qiymətlərində sıfra bərabərdir) M. f.-larıdır. $q=j_1+\dots+j_k$ kəmiyyəti bu halda da m ə r k ə z i m o m e n t l ə r f u n k s i y a s ı n ı n t ə r t i b i adlanır.

İ k i n c i t ə r t i b m ə r k ə z i m o m e n t l ə r f u n k s i y a s ı –

$$\boldsymbol{\mu}_{12}(t_1,t_2)=B(t_1,t_2)=$$

$$=\mathbf{M}[\zeta(t_1)-\mathbf{M}\zeta(t_1)][\zeta(t_2)-\mathbf{M}\zeta(t_2)]$$

$\{\zeta(t),\ t\in T\}$ t ə s a d ü f i p r o s e s i n i n (və ya t ə s a d ü f i f u n k s i y a s ı n ı n) k o r r e l y a s i o n f u n k s i y a s ı adlanır.

Əgər $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ Qauss təsadüfi funksiyası olarsa, onda onun birinci və ikinci tərtib M. f. $\mathbf{m}_1(t)$ və $\mathbf{m}_2(t_1,t_2)$ $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ təsadüfi funksiyasının sonluölçülü paylanmalarını birqiymətli təyin edirlər və deməli, $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ təsadüfi funksiyasının özünü də tamamilə təyin etmiş olurlar. Ümumi halda, ilk iki M. f.-nın deyil, hətta ixtiyari sonlu sayda M. f.-ları haqqında bilgi təsadüfi funksiyanı tam mənada təsvir etmək üçün kifayət deyildir.

Əgər $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ dar mənada stasionar təsadüfi prosesdirsə və hər hansı $t\in T$ qiymətində $\mathbf{M}\left|\xi(t)\right|^q$ momenti sonludursa, onda $h+t_j\in T,\ j=1,\dots,k$ münasibətini ödəyən ixtiyari $h\in T$ üçün $\{\zeta(t),\ t\in T\}$ təsadüfi prosesinin M. f. üçün

$$\mathbf{m}_{j_1,\dots,j_k}(t_1,\dots,t_k)=\mathbf{m}_{j_1,\dots,j_k}(t_1+h,\dots,t_k+h)$$

bərabərliyi doğrudur.

q tərtib M. f. və q tərtib semi – invariant funksiyaları arasında Leonov – Şiryayevin sonlu, əlaqələr düsturu vardır (bax, [1]).

Əd.: [1] Л е о н о в В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М.,

1964; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

MOMENTLƏR METODU « моментов метод; moments method of » – *mərkəzi limit teoreminin* isbatı üçün P. L. Çebışevin təklif etdiyi metoddur (bax, [1]). A. A. Markov bu metodla [2]-də Lyapunov teoreminin (normal qanuna yığılma) hökmünü isbat etmişdir. Bu metodla isbat ideyası ondan ibarətdir ki, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin tam qüvvət üstlü momentlərinin müəyyən şərtlərlə hər hansı paylanma qanununun uyğun (limit) momentlərinə yığılması bu cəmlərin paylanmalarının həmin qanuna yığılmasını doğurur. M. m. qüvvət üstlü momentlər problemi ilə təbii əlaqə ilə bağlıdır.

Çebışev metodunu təkmilləşdirən A. A. Markov ilk dəfə təsadüfi kəmiyyətlərin «kəsilməsi» (rus. «урезание») anlayışını istifadə etmişdi ki, bu üsulla ixtiyari tərtib momentləri olan təsadüfi kəmiyyətlərlə iş görmək mümkün olur. Sonralar M. m. texniki cəhətdən çox çətin olduğundan xarakteristik funksiyalar metodu kimi geniş surətdə istifadə olunmadı.

Əd.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М. – Л., 1948, с. 229–39; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.

MOMENTLƏR METODU « моментов метод; moments method » riyazi statistikada – ehtimal paylanmaları parametrlərinin *statistik qiymətlərinin* qurulması üçün ümumi metodlardan biridir. M. m.-nun müəllifi K. Pirsondur (K. Pearson). M. m. proseduru belədir: qiymətləndiriləcək parametrlərin sayına bərabər miqdarda seçimi momentlər ümumi çoxluğun uyğun momentlərinə bərabər götürülür; alınan tənliklər sistemi parametrlərə görə həll olunur, alınan həllər tələb olunan statistik qiymətləri ifadə edir. M. m. ilə bağlı hesablamalar, adətən, olduqca sadədir. Olduqca ümumi requlyarlıq şərtlərində M. m. ilə təyin olunan statistik qiymətlər asimptotik meylsiz statistik qiymətlərdir və bunlar müvafiq normalaşmadan sonra asimptotik normal paylanma ilə paylanırlar (bax, [1]).

M. m.-nun çatışmayan cəhətləri: 1) M. m. statistik qiymətləri bütün statistik qiymətlər arasında asimptotik effektivlik mənasında ən yaxşı statistik qiymətlər deyildirlər; 2) M. m. statistik qiymətlərinin dəqiqliyini artırmaq mümkün deyildir. M. m.-nun korrekt adlandırılan variantı bu çatışmamazlıqları nisbətən aradan qaldırmağa imkan verir (bax, [2]). Statistik qiymətləri təyin etmək üçün seçimi momentlərin sayını bu metodun köməyilə qiymətləndiriləcək parametrlərin miqdarı ilə müqayisədə artırmaq mümkündür. Müəyyən momentlər problemi olan paylanmalar üçün götürüləcək seçimi momentlərin sayını artırdıqda M. m.-nun korrekt variantı *maksimal doğruyaoxşarlıq metodu* olur. M. m.-nun korrekt variantına xas üstünlüklərə malik olan, lakin «xətti strukturlu» M. m.-nun başqa bir fərqli modifikasiyası vardır. M. m.-nun korrekt və modifikasiya olunmuş variantlarının statistik qiymətləri də asimptotik meylsiz statistik qiymətlər olub, normalaşmadan sonra asimptotik normal paylanma ilə paylanır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Каган А. М., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, в. 2, с. 20–42.

MOMENTLƏR PROBLEMİ « моментов проблема; moments problem » – bax, *Moment.*

MOMENTLƏR PROBLEMİ qüvvət üstlü **« моментов проблема** степенная; **power moment problem »** – bax, *Qüvvətüstlü momentlər problemi.*

MONOTON ARTAN HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI « монотонно возрастающая последовательность событий; monotone increasing sequence of events » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$$

münasibətlərini ödəyən $\{A_n\}$ hadisələr ardıcıllığına deyilir; $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, Ω – stoxastik eksperimentin uyğun elementar hadisələr fəzasıdır. Monoton artan hadisələr ardıcıllığının limiti vardır və bu limit

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

düsturu ilə ifadə olunur.

M. a. h. a.-nın yuxarı və aşağı limitləri bərabərdir və

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

M. a. h. a. üçün

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A_* = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

münasibəti doğrudur.

Bax, *Təsadüfi hadisələr ardıcıllığının yuxarı limiti*, *Təsadüfi hadisələr ardıcıllığının aşağı limiti*, *Təsadüfi hadisələr ardıcıllığının limiti.*

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика., К., 1979.

MONOTON AZALAN HADİSƏLƏR ARDICILLIĞI « монотонно убывающая последовательность событий; monotone decreasing sequence of events » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$$

münasibətlərini ödəyən $\{A_n\}$ hadisələr ardıcıllığına deyilir; $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, Ω – stoxastik eksperimentin uyğun elementar hadisələr fəzasıdır. Monoton azalan hadisələr ardıcıllığının limiti vardır və bu limit

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

düsturu ilə ifadə olunur.

M. a. h. a.-nın yuxarı və aşağı limitləri bərabərdir və

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

M. a. h. a üçün

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A_* = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

münasibəti doğrudur.

Bax, *Təsadüfi hadisələr ardıcıllığının aşağı limiti*, *Təsadüfi hadisələr ardıcıllığının yuxarı limiti*, *Təsadüfi hadisələr ardıcıllığının limiti.*

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MONOTON ÇOXLUQLAR SİNFİ « монотонный класс множеств; monoton class of sets » – elə boş olmayan çoxluqlar sinfidir ki, bu sinifdən olan, ixtiyari daxil olma əməlinə görə monoton (artan və ya azalan) çoxluqlar ardıcıllığının limiti də bu sinifdəndir. Müxtəlif mülahizələr və isbatlar prosesində σ – cəbr və σ – halqalarla müqayisədə monoton siniflərlə iş

görmək ehtimal nəzəriyyəsi və ölçü nəzəriyyəsində mühüm tətbiqlərlə təsbit olunmuşdur.

Verilən çoxluqlar cəbrinin σ – cəbr olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir, verilən çoxluqlar cəbrinin doğurduğu σ – cəbr bu cəbrin doğurduğu monoton sinif ilə üst-üstə düşür (yəni bu cəbri özündə saxlayan, daxil olma əməlinə görə minimal sinif ilə).

Analoji olaraq, verilən çoxluqlar halqasının eyni zamanda həm də σ – halqa olması üçün onun monoton sinif olması zəruri və kafidir. Verilən halqanın doğurduğu çoxluqlar σ – halqası bu halqanın doğurduğu M. ç. s. ilə üst-üstə düşür. Xüsusi halda, əgər hər hansı M. ç. s. verilən çoxluqlar halqasını özündə saxlayırsa, onda bu sinif verilən halqanın doğurduğu çoxluqlar σ – halqasını da özündə saxlayır.

M. ç. s. anlayışı *çoxluqların normal sinfi* anlayışı ilə sıx bağlıdır, belə ki, çoxluqların normal sinfi onun elementlərinin azalan ardıcıllıqlarının kəsişmələrinə görə və onun elementlərinin dizyunkt ardıcıllıqlarının birləşmələrinə görə qapalı sinifdir. Normal siniflər üçün yuxarıda qeyd olunan mülahizələrə analoji mülahizələr vardır. Məs., normal sinif olan ixtiyari çoxluqlar halqası σ – cəbrdir; verilən çoxluqlar cəbrinin doğurduğu normal sinif bu halqanın doğurduğu σ – cəbr ilə üst-üstə düşür və s. Çoxluqların normal sinifləri də ölçü nəzəriyyəsi və ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərində tez-tez istifadə olunur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М.. 1977.

MONOTON DOĞRUYAOXŞARLIQ NİSBƏTİ « монотонное отношение правдоподобия; monotone likelihood ratio » – doğruyaoxşarlıq nisbətinin hər hansı statistikaya nəzərən monotonluğunu ifadə edən, *paylanmalar* ailəsinə xas olan xassədir. $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1\}$ – həqiqi θ parametrindən asılı, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən $p(x, \theta)$ sıxlıq funksiyalarına malik paylanmalar ailəsi olsun. Əgər ixtiyari θ və $\theta' > \theta$ qiymətləri üçün $\mathbf{P}_\theta$ və $\mathbf{P}_{\theta'}$ paylanmaları müxtəlif olarsa, elə $T(x)$ funksiyası varsa və $p(x, \theta')/p(x, \theta)$ doğruyaoxşarlıq nisbəti $T(x)$ funksiyasına nəzərən monoton olarsa, $\mathscr{P}$ ailəsi *monoton doğruyaoxşarlıq nisbətinə* malikdir, deyilir.

M. d. n.-nə malik ailələrin mühüm xassəsi – paylanması $\mathbf{P}_\theta \in \mathscr{P}$ olan X təsadüfi kəmiyyəti üzərində bir müşahidə nəticəsi x üzrə $H_0 : \theta \le \theta_0$ və $H_1 : \theta > \theta_0$ hipotezlərinin müqayisəsi məsələsində müntəzəm ən güclü kriterinin varlığı xassəsidir. Müəyyənlik üçün, doğruyaoxşarlıq nisbətinin $T(x)$ -in artan funksiyası olduğunu hesab edərək, isbat olunmuşdur ki, bu məsələdə müntəzəm ən güclü kriteri aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } T(x) < C, \\ \gamma, & \text{əgər } T(x) = C, \\ 1, & \text{əgər } T(x) > C \text{ olarsa,} \end{cases} \qquad (1)$$

burada mühümlük ölçüsü α -nın verilmiş qiymətində (1)-dəki C və γ sabitləri

$$\mathbf{M}_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha \qquad (2)$$

şərtindən təyin olunurlar. Bu kriterinin güc funksiyası $\beta(\theta) = \mathbf{M}_\theta \varphi(X)$, $\beta(\theta) < 1$ şərti ödənilən bütün θ nöqtələrində artır və ixtiyari $\theta < \theta_0$ qiymətlərində (1) kriterisi [[2] münasibətini ödəyən bütün kriterilər arasında] $1 - \beta(\theta)$ 1-ci növ səhv ehtimalı minimallaşdırır. Requlyarlıq üçün olduqca ümumi şərtlər ödənilərsə, bu nəticənin tərsi də doğrudur (bax, [9], [4]): əgər yuxarıda baxılan paylanmanın birölçülü parametri haqqında H_0 və H_1 hipotezlərinin müqayisəsi məsələsində müntəzəm ən güclü kriteri vardırsa, onda $\mathscr{P}$ ailəsi M. d. n. xassəsinə malikdir.

M. d. n.-nə malik paylanmalar ailəsinin qeyd olunan xassəsi yalnız birparametrli ailələr üçün müntəzəm ən güclü kriterilər qurmaq üçün deyil, digər aşağıda göstərilən hallarda da istifadə olunur. Məs., bunlar əngəlləyici parametrlərli məsələlərdə (hipotezlərin müqayisəsi haqqında ilkin məsələ şərti paylanmalara nəzərən məsələyə gətirildikdən sonra) ən güclü oxşar kriterilərin qurulması və ya müntəzəm ən güclü invariant kriterilərin qurulması üçün (maksimal invariantlara keçdikdən sonra) istifadə olunur.

Əgər yuxarıda təsvir edilmiş məsələ statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində iki $\{d_i : H_i$ hipotezi qəbul olunur, $i = 0, 1\}$ həlləri və itki funksiyası $l(\theta, d)$ olan məsələ kimi ifadə olunarsa, onda

$$(l(\theta, d_1) - (l, d_\theta))(\theta - \theta_0) \le 0$$

münasibəti ödənildikdə (1) şəklində kriterilər ailəsi (müxtəlif C və γ üçün) mahiyyətcə tam sinif əmələ gətirir və əgər $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasının daşıyıcısı θ -dan asılı olmazsa, bu sinif minimal sinif olacaqdır. Bu nəticə statistik həllər nəzəriyyəsi çərçivəsində ümumi nəticəyə görə xüsusi nəticədir: M. d. n. xassəli ailələr üçün (və ya daha ümumi bəzi monotonluq xassələrli) monoton prosedurlar mahiyyətcə tam sinif təşkil edir; bu nəticə müxtəlif statistik problemlər – qiymətləndirmə nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması, çoxsaylı hipotezlərin müqayisəsi üçün konkret ifadə olunur (bax, [3] – [8]).

M. d. n.-nin xassəsi $\mathscr{P}$ ailəsində olduqca güclü nizamlanma doğurur və paylanmalar ailəsinin stoxastik nizamlanmasının daha zəif xüsusi halıdır, yəni M. d. n. xassəli ailə $T(x) = x$ funksiyasına nəzərən stoxastik nizamlanmış ailədir; ümumi halda tərs müddəa doğru deyildir.

M. d. n. xassəli ailəyə aid misal paylanma sıxlığı

$$p(x, \theta) = c(\theta)\, h(x) \exp\{Q(\theta) T(x)\}$$

olan birparametrli eksponensial paylanmalar ailəsidir, burada $Q(\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ parametrinin ciddi monoton funksiyasıdır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [5] Ferguson T. S., Mathematical statistics: a decision theoretic approach, v. 1, N. Y., 1967; [6] Karlin S., Rubin H., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 272–99; [7] Brown L., Cohen A., Strawderman W., «Ann. Math. Statist.», 1976, v. 4, № 4, p. 712–22; [8] Rushendorf L., «Math. Operationsforsch. und Statist. Sec. Statist.», 1983, Bd 14, № 2, S. 243–50; [9] Pfanzagl J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1962, Bd 1, № 2, S. 109–15.

MONOTON İNVARİANT « монотонный инвариант; monotone invariant » – bax, *Statistik həlledici qaydalar kateqoriyası.*

MONOTON PAYLANMA « монотонное распределение; monotone distribution » – qiymətləri sonlu $\mathfrak{X}$ fəzasından olan elə X təsadüfi elementinin *paylanmasıdır* ki, onun üçün elə $x_0 \in \mathfrak{X}$ və *yaxınlıq ölçüsü* ρ vardır ki, $\rho(x, x_0) > \rho(y, x_0)$ münasibətindən ixtiyari $x, y \in \mathfrak{X}$ üçün $\mathbf{P}\{X = x\} < \mathbf{P}\{X = y\}$ münasibəti alınır. Əgər $\mathfrak{X}$ izotrop fəza olarsa (aşağıya bax), onda X üçün ρ-ya görə *orta kəmiyyət* $\mathbf{M}(X, \rho)$ X-in paylanmasının *modası* x_0 ilə üst-üstə düşür; hətta ixtiyari ciddi artan $f : [0, +\infty) \to$ $\to [0, +\infty)$, $f(0) = 0$ funksiyası üçün $\mathbf{M}(X, f(\rho)) = x_0$ olur. Əgər $\mathfrak{X}$ izotrop fəza olmazsa, onda $\mathbf{M}(X, \rho)$ kəmiyyəti x_0 ilə üst-üstə düşməyə bilər (bax, [1]). Əgər ixtiyari $x \in \mathfrak{X}$ üçün $\{\rho(x, y), y \in \mathfrak{X}\}$ ədədlər çoxluğu eyni bir çoxluq olarsa və əgər bu halda hər hansı $x \in \mathfrak{X}$ üçün $\rho(x, y) = t$ bərabərliyi yalnız k sayda $y \in \mathfrak{X}$ elementləri üçün ödənilərsə, onda ixtiyari başqa bir $z \in \mathfrak{X}$ üçün də $\rho(z, y) = t$ bərabərliyi, həmçinin yalnız k sayda $y \in \mathfrak{X}$ elementləri üçün və bütün mənfi olmayan t qiymətlərində ödənilərsə, $\mathfrak{X}$ fəzası *izotrop fəza* adlanır.

M. p. və izotrop fəza anlayışı qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin *statistikasında* geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] О р л о в А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

MONOTON STRUKTURU, SİSTEMİN « монотонная структура системы; monoton structure of a system » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

MONTE – KARLO METODU « Монте – Карло метод; Monte Carlo method », statistik sınaqlar metodu, – təsadüfi kəmiyyət və təsadüfi funksiyaların paylanma xarakteristikalarının hesablanılması məqsədilə onların *statistik modelləşdirilməsidir*. Metodun ən sadə proseduru böyük ədədlər qanununa əsaslanaraq, ξ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinin qiymətləndirilməsi üçün $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i$ orta qiymətindən istifadə etməkdir, burada ξ_i-lər ξ-nin modelləşdirilən asılı olmayan realizasiyalarıdır. Əgər $\mathbf{M}\xi^2 < \infty$ olarsa, onda mərkəzi limit teoreminin nəticəsi olaraq N-in olduqca böyük qiymətlərində

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i - \mathbf{M}\xi \right| < \frac{\gamma\sqrt{\mathbf{D}\xi}}{\sqrt{N}}$$

münasibəti vahidə yaxın ehtimalla ödənilir, burada γ – etibarlılıq üçün verilən şərtlərlə təyin olunan konstantdır. Digər limit teoremlərindən istifadə olunduqda M. – K. m. üçün digər prosedurlar qurmaq olur.

Təsadüfi kəmiyyətləri və funksiyaları modelləşdirdikdə ilkin olaraq təsadüfi bitlər toplularından istifadə olunur; təsadüfi bitlər – 0 və ya 1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Belə xassəli (təxminən) bitlər, EHM-da *təsadüfi kəmiyyətlər vergəci* (rus. датчик) vasitəsilə alınır. Sonra modelləşdirmə alqoritmləri istifadə olunur ki, bu alqoritmlərin keyfiyyəti mühüm əhəmiyyətə malikdir. Alqoritmlərdən elələrinə üstünlük verilir ki, paylanmanın modelləşdirilmə çətinliklərinin qiyməti bunlar üçün optimal qiymətə yaxın olsun. M. – K. m.-nun köməyilə elm və texnikanın müxtəlif sahələrində istifadə olunan mürəkkəb ehtimal modellərini tədqiq etmək mümkündür; bununla da, bu metodun mühüm olduğu aydın olur. M. – K. m. statistik fizika məsələlərinin həlli, hesablama riyaziyyatı (inteqralların hesablanması, tənliklərin həlli), xidmət sistemlərinin modelləşdirilməsi üçün geniş surətdə tətbiq olunur. M. – K. m.-nun inkişafında bu metodun xətti və qeyri – xətti köçürtmə məsələlərinin həlli üçün tətbiqinin mühüm əhəmiyyəti olmuşdur; bununla bağlı olaraq, onun effektivliyinin artırılması üçün müxtəlif üsullar yaranmışdır. M. – K. m.-ndan $\int f(x)\,\mu(dx)$ inteqralının μ ehtimal ölçüsünə görə hesablanması üçün bir vasitə kimi onun ən sadə prosedurunun yaxşılaşdırılmasının aşağıdakı qaydalarından istifadə oluna bilinər: 1) təsadüfi düyünlərli *kvadratur düsturlardan* istifadə; 2) əgər Radon – Nikodim törəməsi $d\mu/d\nu$ varsa, doğru fərz olunan

$$\int f(x)\,\mu(dx) = \int f(x)\,\frac{d\mu}{d\nu}(x)\,\nu(dx)$$

bərabərliyinə əsaslanan mühüm seçim metodu (ölçünün əvəz olunması); bu isə y_i-lər asılı olmayan və ν qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(y_i)\,\frac{d\mu}{d\nu}(y_i)$$

statistik qiymətinə gətirir, ν-nün uğurlu seçimi isə statistik qiymətin kiçik dispersiyalı olmasına təmin edir; 3) bəzi dəyişənlər üzrə analitik və ya klassik ədədi vasitələrin köməyilə inteqrallanmanın aparılmasına əsaslanan metodlar; 4) parametrdən asılı olan inteqralların hesablanılmasında asılı sınaqlardan istifadə. Qeyd olunan üsullar əksər hallarda EHM-da «fiktiv» modelin realizasiyasına (ilkin modeldən fərqlənən) gətirir və bunlara imitasion eksperimentin planlaşdırılma metodları kimi baxılır.

Əd.: [1] С о б о л ь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [2] Е р м а к о в С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] М а р ч и к Г. И. и др., Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [4] Е р м а к о в С. М., М и х а й л о в Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [5] Е р м а к о в С. М., Н е к р у т к и н В. В., С и п и н А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984.

M. – K. m. müxtəlif ekstremal məsələlərin həllinin randomlandırılmış alqoritmlərində geniş tətbiq olunur, məs., çoxsaylı dəyişənlər funksiyasının maksimum və ya minimumlarının axtarılmasında, ekstremal xassələrli kombinator obyektlər və ya həndəsi konfiqurasiyaların qurulmasında. M. – K. m.-nun belə tətbiqinə aid misallar modelləşdirilən soyuma modeli və genetik alqoritmlərdir.

Əd.: [6] A a r t s E., K o r s t J., Simulated annealing and Bolzmann machines (A stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing), Chichester, 1989; [7] F i s h m a n G. S., Monte Carlo: concepts, alqorithms and applications, B., 1996; [8] G o l d b e r g D. E., Genetic algorithms in search, optimization and machine learning, Addison – Wesley, 1989; [9] v a n L a a r h o v e n P. J. M., A a r t s E. H. L., Simulated annealing: theory and applications, Dordrecht – Boston, 1987; [10] W i n k l e r G., Image analysis, random fields and dynamic Monte Carlo methods (A mathematical introduction), B., 1995; [11] Эволюционные вычисления и генетические алгоритмы. Обозрение прикладной и промышленной математики, 1996, т. 3, в. 5; [12] Б а т и щ е в Д. И., Генетические алгоритмы решения экстремальных задач, Воронеж, 1995.

MONTE – KARLO METODU; alqoritmin zəmanətli dəqiqliyi « **Монте – Карло метод;** гарантируемая точность алгоритма; **Monte Carlo method;** quaranteed accuracy of an algorithm» – elə $\delta_{N,\eta}$ ədədidir ki, onun alqoritmin təsadüfi Δ xətasından böyük olacağı ehtimalı (modelləşdirilmiş sınaqlar sayı N-dən asılı olaraq) 1-ə yaxın olan hər hansı etibarlılıq hüdudu $(1-\eta)$-dan kiçik deyildir. Adətən, η-nı $0{,}01$ – $0{,}05$ arasında götürmək məsləhət görülür. M. – K. m. üçün $\mathbf{M}f(\omega) = \int f(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$ riyazi gözləməsinin asılı olmayan ω_i sınaqları üzrə $N^{-1}[f(\omega_1)+...+f(\omega_N)]$ orta qiymətinə yaxınlaşması haqqında əsas məsələdə xətanın kobud etibarlılıq statistik qiyməti $\delta_{N,\eta} \le (\mathbf{D}f/\eta N)^{1/2}$ şəklində ifadə olunan Çebışev bərabərsizliyindən alınır. N-in olduqca böyük qiymətlərində, η-nın isə çox da kiçik olmayan qiymətlərində mərkəzi limit teoreminə görə asimptotik dəqiq statistik qiymətdən, yəni $\delta_{N,\eta} \approx x_\eta(\mathbf{D}f/N)^{1/2}$ qiymətindən istifadə etmək olar. Adətən, $x_\eta = 3$ qiyməti götürülür; bu qiymət $\eta = 0{,}027$ qiymətinə uyğundur (üç siqma qaydası) və əvvəlcədən naməlum $\mathbf{D}f = \mathbf{M}f^2 - (\mathbf{M}f)^2$ dispersiyası isə eksperimental orta qiymətlərə yaxınlaşdırılır.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

MONTE – KARLO METODU; elliptik tənliklərin həlli « **Монте – Карло метод;** решение эллиптических уравнений; **Monte Carlo method;** solution of elliptic equations» – bax, *Elliptik tənlik*; Monte–Karlo metodu ilə həll.

MONTE – KARLO METODU; xətti tənliklərin həlli « **Монте – Карло метод;** решение линейных уравнений; **Monte Carlo method;** solution of linear equations » – bax, *Xətti tənlik*; Monte – Karlo metodu ilə həll.

MONTE – KARLO METODU; qeyri–xətti tənliklərin həlli « **Монте – Карло метод;** решение нелинейных уравнений; **Monte Carlo method;** solution of non–linear equations » – bax, *Qeyri – xətti tənlik*; Monte–Karlo metodu ilə həll.

MONTE – KARLO METODU; statistik paylanmanın naməlum sıxlığının qiyməti « **Монте – Карло метод;** оценка неизвестной плотности; **Monte Carlo method;** unknown density estimation » – ehtimal paylanmasının naməlum sıxlığını və ya təsadüfi nöqtələrin yerləşmə sıxlığını qiymətləndirmək üçün imitasion eksperiment nəticələrinin üzərində işlənilməsi və qurulması üçün alqoritmlər toplusudur. Əgər imitasion eksperimentin nəticələri də təsadüfi nöqtələr olarsa (məs., paylanma sıxlığının tapılması tələb olunan ədədi və ya vektor təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri), bunlar üzərində işlənilmə üçün adi statistik metodlar tətbiq olunur (bax, *Sıxlığı paylanmanın*; müşahidələr üzrə statistik qiymət). Tərtibinə görə elə spesifik alqoritmlər daha dəqiq olur ki (bax, [1]), bunlarda imitasiya olunan təsadüfi hadisə və ya proses elə modifikasiya olunur ki, axtarılan $p(y)$ sıxlığı üçün $p(x) = \mathbf{M}f(\omega; x)$ inteqral ifadəsi olsun, burada ω – modelləşdirilən təsadüfi hadisə və ya prosesin təsadüfi elementar nəticəsidir. Məs., D oblastında keçid sıxlığı $q(x,y)$ olan Markov ekssesləri nin (prosesin verilən andan növbəti ən yaxın bərpa anına qədər qalan müddət) $\{x_0 \to \zeta_1 \to ... \to \zeta_\nu\}$ modelində və mənbənin x_0 nöqtəsindən hasil olunan, D-dən çıxışında udulan hissəciklərin sıxlığını tam udulan ana qədər modelləşdirilmiş $\{x_0, \zeta_{1,j}, ..., \zeta_{\nu(j),j}\}$ trayektoriyaları üzrə qiymətləndirmək olur, məs., $\zeta_{k,j}$ nöqtələri üzrə histoqram quraraq. Lakin köçürtmə (rus. перенос) məsələlərinin *statistik modelləşdirmə* ilə həllində istifadə olunan

$$p^*(y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\nu_{ij}} q(\zeta_{k-1,j};\ y)$$

tipli statistik qiymətlər daha məqsədəuyğun hesab edilir (bax, *Toqquşmalar metodu*; qiymətləndirilmənin, bax, həm də [2], [3]).

Əd.: [1] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в кн.: Тр. VI Всесоюзн. совещания по теории вероятн. и математич. статистике, Вильнюс, 1962, с. 425–37; [2] Kalos M., «Nuclear Sci. and Eng.», 1963, v. 16, p. 111–17; [3] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

MONTE – KARLO METODU; zəruri işin həcmi « **Монте – Карло метод;** объем необходимой работы; **Monte Carlo method;** required amount of work » – verilən zəmanətli ε dəqiqliyi ilə məsələnin həlli üçün alqoritm və ya EHM işlərində zəruri olan addımların sayıdır. Nəzəri məsələlərdəki iş prosesində bir addım – ədədlər üzərində cəbri və ya məntiqi bir əməl, yaxud bitlər üzərində bir unar və ya binar əməl nəzərdə tutulur. Praktikada kompyuter taktlarının sayı əvəzinə sərf olunan maşın vaxtı ölçülür. Maşın vaxtı yalnız analitik metodun analitik realizasiyası keyfiyyətindən deyil, kompyuterin xassələrindən də asılıdır. M. – K. m. üçün əsas N sayda asılı olmayan $f(\omega_i)$ müşahidələrinin ədədi ortası üzrə $\mathbf{M}f = \int f(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$ riyazi gözləməsinin hesablanması məsələsində N_τ-ya bərabər olan zəruri işin həcmi $\tau\,\mathbf{D}f\,\varepsilon^{-2}$ kəmiyyətinə mütənasibdir, burada $\mathbf{D}f$ – dispersiya, τ, – $f(\omega)$-nın bir realizasiyasına sərf olunan işdir (hesablama müddəti), ε – M. – K. m.-unda alqoritmin tələb olunan zəmanətli dəqiqliyidir.

Əd.: [1] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в сб.: Методы программирования и решения задач на цифровых вычислительных машинах, Ногинск, 1959, с. 140–47; [2] Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (Монте – Карло) и его реализация на цифровых машинах, М., 1961.

MORQAN ƏDƏDLƏRİ « Моргана числа; Morgan numbers » – bax, *Kombinator ədədlər.*

MOZAİKA « мозаика; tessellation / mosaic » – bax, *Təsadüfi mozaika.*

MÖVSÜM DƏYİŞMƏLƏRİ « сезонные изменения; seasonal effect », mövsüm effekti – təsadüfi prosesdə periodik xarakterli sistematik komponent olduğu halda *təsadüfi prosesin* evolyusiyasının xüsusiyyətidir. Əksər hallarda

M. d. zaman sırası modelinə sırf təsadüfi $X(t)$ və təsadüfi olmayan periodik $g(t)$ komponentinin cəmi kimi daxil olunur:

$$Y(t) = g(t) + X(t).$$

Beləliklə, m ö v s ü m e f f e k t i faktiki olaraq periodik *trenddir.* Lakin ədəbiyyatda trend anlayışı və M. d. anlayışları bir qayda olaraq fərqləndirilir: trend, adətən, uzun müddət ərzində dayanıqlı sistematik dəyişmə və ya, başqa sözlə, aşağı tezlikli sistematik rəqs kimi anlaşılır, M. d. isə trendlə müqayisədə daha yüksək tezlikli sistematik rəqslərdir.

Bəzi hallarda, məs., zaman sırasının proqnoz məqsədilə analizi aparıldığı halda $g(t)$ funksiyasının statistik qiymətini qurmaq zəruri olur. Buna görə, adətən, *multiplikativ modelin* qurulması metodikasından istifadə olunur (bax, [1]). Digər hallarda, iqlim effektini qiymətləndirmədən, onu kənarlaşdırmaqla kifayətlənmək yetərli olur; bu məqsədlə *sürüşən ortalar metodundan* istifadə olunur (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Б о к с Д ж., Д ж е н к и н с Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [2] А н д е р с о н Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [3] К е н д э л М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

MÖVSÜM EFFEKTİ « сезонный эффект; seasonal effect » – bax, *Mövsüm dəyişmələri.*

MÖVSÜM MODELİ / HARRİSON MÖVSÜM MODELİ « сезонная модель Харрисона; Harrison seasonal model » – bax, *Harrison mövsüm modeli.*

MUAVR – LAPLAS TEOREMİ « Муавра – Лапласа теорема; de Moivre – Laplace theorem » – ehtimal nəzəriyyəsinin tarixən ilkin *limit teoremlərindən* biridir. S_n – müvəffəqiyyət ehtimalı p-yə bərabər, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, n sayda Bernulli sınaqlarında müvəffəqiyyətlər sayı olsun. Onda

$$\mathbf{P}\{S_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad 0 \le m \le n, \quad m \text{ , – tam ədəddir,}$$

ehtimalı üçün

$$\mathbf{P}\{S_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} e^{-x^2/2} (1 + \alpha_n) \qquad (*)$$

bərabərliyi doğrudur, burada $n \to \infty$ olduqda $x = (m - np)/\sqrt{npq}$ hər hansı intervala daxil olmaq şərtilə götürülən bütün m-lər üçün $\alpha_n \to 0$ müntəzəm olaraq sıfra yaxınlaşır.

Binomial paylanmanın müntəzəm normal approksimasiyalarından ən güclüsü aşağıdakı yaxınlaşma hesab edilir:

$$\mathbf{P}\{S_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} e^{-x^2/2}\left[1 + \frac{(q-p)(x^3 - 3x)}{6\sqrt{npq}}\right] + \Delta,$$

burada

$$|\Delta| < \frac{0{,}15 + 0{,}25|p-q|}{(npq)^{3/2}} + e^{-3/2\sqrt{npq}},$$

bu şərtlə ki, $npq \ge 25$.

A. Muavr teoremi ümumi şəkildə isbat etmişdir. Binomial paylanmanın normal paylanmaya yaxınlaşması haqqında əsas nəticələr [1]-in beşinci kitabında və «A Method of approximating the Sum of the Terms of the Binomial $(a+b)^n$ expended into a Series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of assent which is to be given to Experiments» (1733) əsərində şərh olunmuşdur. Bu əsərin latın originalı, K. Pirsonun [3]-də hesab etdiyinə görə 1733-də «Analitik etüdlər» nüsxələrinə (satılmamış) əlavələr kimi cildləndirilmişdir (bax, [1]) və buna görə də, yalnız bir neçə etüd nüsxələri mövcuddur. Müəllif tərcüməsində əlavənin ingilis variantı bir qədər gec – 1738-də «Şanslar doktrinası» əsərində şərh olunmuşdur (bax, [2]).

P. Laplas Muavr teoremini yenidən isbat etmişdir və aldığı nəticə onun [5] kitabı ilə olduqca məşhurlaşmışdır. M. – L. t.-nin isbatı tarixi daha ətraflı [3], [4], [9] əsərlərində və [8]-ə verilmiş komentarilərdə əks olunmuşdur. Qeyd etmək lazımdır ki, M. – L. t. müddəasına N. Bernulli [10]-da bilavasitə yaxınlaşmışdır. (*) ifadəsi, adətən, Lokal M. – L. t. kimi adlandırılır. Bundan fərqli olan M. – L. t.-nin nəticəsi kimi alınan i n t e q r a l M. – L. t. isə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\sum \mathbf{P}\{S_n = m : a < x < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\,(1 + \alpha_n).$$

M. – L. t.-nin lokal və inteqral limit teoremlərinə ayrılması, P. Laplas və A. Muavr tərəfindən edilməmişdir, bu ayrılma sonralar olunmuşdur (bax, [6]).

Əd.: [1] M o i v r e A. de, Miscellanea analytica seriebus et quadraturis, L, 1730; [2] M o i v r e A. de, Doctrine of chances, L., 1718, 2 ed., L., 1738; 3 ed., L., 1756; [3] P e a r s o n K., «Biometrika», 1924, v. 16, № 3–4, p. 402–04; [4] T o d h u n t e r J., History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace, Camb. – L., 1865; [5] L a p l a c e P. S., Theorie analytique des probabilités, P., 1812; [6] M i s e s R., «G. Ist. Ital. attuari», 1934, Anno V., № 4, p. 483–95; [7] U s p e n s k y J., Introduction to mathematical probability, N. Y. – L., 1937; [8] Б е р н у л л и Я., О законе больших чисел, пер. с лат., М., 1986; [9] Ш е й н и н О. Б., К истории предельных теорем Муавра – Лапласа, в кн.: История и методология естественных наук, в. 9, [М.], 1970, с. 199–211; [10] Ю ш к е в и ч А. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 2, с. 333–52.

MUD KRİTERİSİ « Муда критерий; Mood test » –

$$\sum_{i=1}^{m}\left[R_i - \frac{1}{2}(m+n+1)\right]^2$$

statistikasına əsaslanan kriteridir, burada R_i – ümumi variasion sırada X_i müşahidələrinin ranqıdır; bu variasion sıranın kəsilməz paylanma funksiyaları F və G olan uyğun asılı olmayan iki təkrar – $X_1, \dots, X_m$ və $Y_1, \dots, Y_n$ seçimləri üzrə qurulmuş olduğu fərz olunur. M. k. [2]-də daxil olunmuşdur və bircinslik hipotezi: $F = G$ hipotezinin alternativ – F və G mütləq kəsilməz paylanma funksiyalarıdır və yalnız miqyas parametrlərilə fərqlənirlər – hipotezinə qarşı yoxlanılması üçün kriteridir.

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] M o o d A. M., «Ann. Math. Statist.», 1954, v. 25, № 3, p. 514–22; [3] S u k h a t m e B. V., «Ann. Math. Statist.», 1957, v. 28, № 1, p. 188–94.

MULTİEKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « многоэкстремальных экспериментов планирование; design of multiextremal experiments » – multiekstremal funksiyaların (yəni bir neçə lokal ekstremuma malik funksiyaların) hər hansı F sinfindən olan naməlum $f: X \to \mathbb{R}^1$ funksiyasının hesablanılması üçün nöqtələrin seçilməsidir; bu həmin funksiyanın qlobal ekstremumunu (ümumiliyi pozmadan – maksimumunu) təqribi hesablamaq və maksimum alınan $x^* = \arg\max_{x \in X} f(x)$ nöqtəsini təyin etmək məqsədilə edilir. X fəzası kompakt metrik fəzadır, f funksiyası təsadüfi xəta ilə hesablana bilinər (yəni *reqressiya* funksiyası ola bilər).

Qoyulan məsələnin həllinə yanaşmaların təsnifi və təsviri mövcuddur (bax, [1] – [3]). $X \subset \mathbb{R}^1$; $X \subset \mathbb{R}^n$, n -in kiçik qiymətlərində M. e. p.-nın effektivliyi alqoritmləri (yəni qlobal optimizasiya alqoritmləri) vardır, burada n – kiçik ədəd, F – Lipşits şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğudur (məs., separabel funksiyalar sinfi). M. e. p.-nın mürəkkəb məsələlərinin həllində (məs., $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, F funksiyaların olduqca geniş sinfi olduqda) M. e. p.-nın ehtimal metodları daha geniş yayılmış metodlardır. Bu metodlar iki əsas sinfə ayrılır (bax, [1]): a) şaxələr və ehtimal sərhədləri metodları, b) nəsillər metodları. a) qrupunun metodları axtarış çoxluğu X -in X –də sonlu sayda $x_1, x_2, \ldots$ nöqtələrini təsadüfi qaydada (məs., müntəzəm) seçməklə, Z_i altçoxluqlarına bölgüsünə, yəni

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i$$

şəklində ifadə olunmasına və Z -də $\mathbf{P}(dx)$ paylanmalarına malik təkrar $\{x_1, \ldots, x_N\} = \Xi$ seçimləri üzrə $Z = Z_i$ üçün $M_Z = \sup_{x \in Z} f(x)$ kəmiyyətinin qiyməti haqqında statistik nəticələrin irəli sürülməsinə əsaslanır. $\eta_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ çevirməsindən sonra Ξ seçimi üzrə M_Z haqqında statistik nəticələrin irəli sürülməsi məsələsi paylanma funksiyası

$$F(t) = \int_{f(x) < t} \mathbf{P}(dx)$$

olan təsadüfi kəmiyyətin yuxarı sərhədi – $\operatorname{vrai\,sup}\eta$ kəmiyyətinin qiyməti haqqında $\{\eta_i\}$, $i = 1, \ldots, N$ seçimi üzrə statistik nəticələrin irəli sürülməsinə gətirilir (bax, *Təsadüfi kəmiyyət*; sərhədlərin qiymətləndirilməsi).

b) sinfinin metodları ehtimal ölçülərinin ardıcıl modelləşdirilməsindən ibarətdir; bu ölçülər əvvəlki hesablama nəticələrinin istifadə olunması əsasında qurulur və qlobal ekstremum nöqtələri ətrafında topalanmış ölçüyə yığılır.

Əd.: [1] Жиглявский А. А., Математическая теория глобального случайного поиска, Л., 1985; [2] Жилинскас А. Г., Глобальная оптимизация, Вильнюс, 1986; [3] Стронгин Р. Г., Численные методы в многоэкстремальных задачах, М., 1978.

MULTİKOLLİNEARLIQ « мультиколлинеарность; multicollinearity » – prediktor dəyişənlərinin verilənlər matrisi X -in tam ranqı olduğu [yəni $\operatorname{rank}(X) = \min(n, p)$, n, – X matrisinin sətirləri (müşahidələr) sayı, p – sütunlar (prediktor dəyişənləri) sayıdır], lakin matrisin sütunları «sanki» asılı olduğu halda vəziyyətin təsviri üçün *reqression analizdə* istifadə olunan anlayışdır. Onda normal tənliklər sisteminin $X^{\mathrm{T}}X$ matrisi cırlaşmış matrisə yaxın olur, onun bir və ya bir neçə məxsusi qiymətləri olduqca kiçik olur və reqressiya tənliyinin əmsallarının ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış statistik qiymətləri kiçik məxsusi qiymətlərə uyğun məxsusi vektorlar hesabına olduqca dayanıqsız olacaqdır. Məs., X matrisinin elementlərində çox da böyük olmayan xətalar (yuvarlaqlaşdırmada olan xətalar tipli) kəmiyyətin mühüm dəyişikliyinə və hətta reqressiya tənliyində əmsalların işarəsinin dəyişməsinə səbəb ola bilər. M.-ın müstəsna halı X matrisinin ranqının natamam olduğu haldır.

M.-ın dərəcəsini ölçən ən yaxşı ölçülərdən biri $X^{\mathrm{T}}X$ matrisinin şərtləşdirilmə ədədidir, yəni $\delta = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ – maksimal məxsusi qiymətin minimal məxsusi qiymətə nisbətidir.

Ən kiçik kvadratlar metodu statistik qiymətlərinə M.-ın olduqca pis təsirinin qarşısını almaq üçün yalvari reqressiya, baş komponentlərə reqressiya, addımlı reqressiya və s. yanaşmalardan istifadə olunur.

Əd.: [1] Себер Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

MULTİMODAL PAYLANMA « мультимодальное распределение; multimodal distribution », çoxzirvəli paylanma, – modalarının sayı iki və ya daha çox olan ehtimal *paylanmasıdır* və onun ehtimal sıxlığının iki və ya daha çox lokal maksimum nöqtəsi vardır. Arksinus paylanma M. p.-dır. M. p. tətbiqdə unimodal paylanmalarla müqayisədə az təsadüf olunur və adətən, bir neçə unimodal paylanmanın qarışığı kimi əmələ gəlir.

MULTİNOMİAL PAYLANMA « мультиномиальное распределение; multinomial distribution » – bax, *Polinomial / multinomial paylanma*.

MULTİPLİKATİV ERQODİK TEOREM « мультипликативная эргодическая теорема; multiplicative ergodic theorem » – erqodik *stasionar təsadüfi proseslərin* realizasiyaları boyunca götürülən təsadüfi matrislərin hasillərinin asimptotikası haqqında müddəadır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – nöqtələri sonsuz $\omega = \{\omega_n\}$ ardıcıllıqları olan ehtimal fəzası olsun, $n \in \mathbb{Z}$, burada bütün ω_n -lər hər hansı I çoxluğunun elementləri, T Ω -da ölçünü saxlayan erqodik yerinidəyişmə çevirməsidir, $A = A(\omega)$ $\mathbf{M}(\ln|A|)$ riyazi gözləməsi sonlu, qiymətləri $m \geq 1$ tərtib kvadrat matrislər fəzasından olan təsadüfi kəmiyyətdir. Onda

$$\Lambda(\omega) = \lim_{n \to \infty} ([A^{(n)}(\omega)] * [A^{(n)}(\omega)])^{1/2n}$$

limiti sanki yəqin vardır (bax, [1], [2]), burada $A^{(n)}(\omega) = A(\omega)A(T\omega) \ldots A(T^{n-1}\omega)$, $[\cdot]^*$ isə qoşma matrisdir. M. e. t.-in çoxsaylı tətbiqləri hamar dinamik sistemlər nəzəriyyəsi, təsadüfi əmsallarlı differensial operatorların spektral nəzəriyyəsi, təsadüfi mühitlərdə təsadüfi dolaşmalar nəzəriyyəsi ilə bağlıdır. Digər isbatlar [3], [4]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Оселедец В. И., «Тр. Моск. Матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 179–210; [2] Миллионщиков В. М., «Матем. сб.», 1969, т. 78, № 2, с. 179–202; [3] Raghunathan M., «Isr. J. Math.», 1979, v. 32, p. 356–62; [4] Захаревич М. И., «Вестн. Ленингр. ун-та », 1978, № 7, с. 28–34; [5] Krengel U., Ergodic theorems, B. – N. Y., 1985.

MULTİPLİKATİV FUNKSİONAL « мультипликативный функционал; multiplicative functional » – bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

MULTİPLİKATİV FUNKSİYA « мультипликативная функция; multiplicative function » – bax, *Arifmetik modelləşdirilmə*(si) təsadüfi proseslərin, *Ehtimali ədədlər nəzəriyyəsi*.

MULTİPLİKATİV MODEL « мультипликативная модель; multiplicative model » – *təsadüfi proseslərin* mövsüm dəyişmələrini təsvir edən modellərdən biridir. Z_t, $t = 0, \pm 1, \ldots$ təsadüfi ardıcıllığında S periodlu mövsüm effektinin olduğu fərz olunur. Z_t üçün M. m.

$$\varphi_p(B)\ \Phi_P(B^S)Z_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)\varepsilon_t \qquad (*)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $BZ_t = Z_{t-1}$, $B^S Z_t = Z_{t-S}$, p, q, P, Q – hər hansı natural ədədlərdir, $\varphi_p(B)$, $\theta_q(B)$, $\Phi_P(B^S)$, $\Theta_Q(B^S)$ – uyğun arqumentlərin p, q, P, Q qüvvət üstlü çoxhədlileridir, ε_t – orta qiyməti sıfra bərabər Qauss bəyaz küyüdür. Əgər t parametrinin butun dəyişmə oblastı S uzunluqlu mövsüm tsikllərinə bölünərsə, onda Z_t ardıcıllığını $\{X_{i,j}\}$ matrisi kimi ifadə etmək olar, $j = 1, \ldots, S$, $i = 0, \pm 1, \ldots$ bu halda t zaman anlarına $i = [t/S]$, $j = t - Si + 1$ indekslər cütləri uyğun olur. Onda (*) onu ifadə edir ki, hər bir qeyd olunmuş j üçün $X_{i,j}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ardıcıllığı matrisin j -ci sütununda *avtoreqressiv – sürüşən orta* (ARSO) *prosesidir*, yəni

$$\Phi_P(B^S)x_{ij} = \Theta_Q(B^S)\alpha_{ij}$$

prosesidir, burada $B^S X_{ij} = X_{i-1,j}$. Bu halda eyni zamanda «tsikl daxilində», yəni hər sətirdə α_{ij} qiymətləri də ARSO – prosesidir:

$$\varphi_p(B)\alpha_{ij} = \theta_q(B)\,\varepsilon_j .$$

Ədb.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов, пер. с англ., в. 1, М., 1974.

MULTİVARİANT NÖQTƏVİ PROSES « мультивариантный точечный процесс; multivariate point process » – «hadisələrin» baş vermə anları T_n -lər artan ardıcıllıq təşkil edən $(T_n, X_n)_{n\geq 1}$ *nişanlanmış nöqtəvi prosesidir.* M. n. p.-in sıçrayışları ölçüsü μ

$$\mu([0,\ t]\times\Gamma) = \sum_{n\geq 1} I_{[0,\ t]\times\Gamma}(T_n, X_n)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada Γ – «nişanlar» faza fəzasında ölçülən çoxluqdur. Martinqal nəzəriyyəsində fərz olunur ki, T_n – hər hansı $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ σ – cəbrlər axınına nəzərən Markov anlarıdır, X_n təsadüfi kəmiyyətləri $\mathscr{A}_{T_n}$ – ölçüləndirlər. M. n. p. üçün geniş fərziyyələrlə sıçrayışlar ölçüsünün kompensatoru prosesin paylanmasını birqiymətli təyin edən xarakteristikadır.

Ədb.: [1] Jacod J., «Z. Wahr. und verw Geb.», 1975, Bd 31, H. 3, S. 235–53.

MUR QRUPU « Мура группа; Moore group » – elə lokal kompakt qrupdur ki, onun bütün ayrılmayan ifadələri sonluölçülüdürlər.

MUSTAFA TEOREMİ « Мустафы теорема; Moustafa theorem » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi.*

MÜFƏSSƏL SİNİF « исчерпывающий класс; exhausting class » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası, $\mathscr{A} = \{A_t \in \mathscr{F},\ t \in \Lambda\}$ – asılı olmamazlıq xassəsinə malik sinif (yəni k -nın ixtiyari müxtəlif qiymətlərində $i_1, \ldots, i_k \in \Lambda$, $k \geq 2$ indeksləri üçün

$$\mathbf{P}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}) \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənilən) verilərsə, elementləri

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in\Lambda} A_{i_1}\right) = 1 \qquad (2)$$

şərtini ödəyən $\mathscr{A}$ sinfinə *müfəssəl sinif* deyilir.

Asılı olmamazlıq xassəsini ödəyən sinif müfəssəl sinif olmaya bilər (bax, [1], səh. 39–41).

Ədb.: [1] Стоянов Й., Контрпримеры в теории вероятностей, М., 1999.

MÜHÜM ELEMENT(i) sistemin **« существенный элемент** системы; **essential element** of system **»** – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

MÜHÜM PREDİKTORLARIN SEÇİLMƏSİ « существенных предикторов отбор; screening of significant predictors » – meteoroloji parametrlərin (potensial prediktorların) bütün çoxluğundan prediktanta, yəni havanın gözlənilən vəziyyətinin proqnozlanan xarakteristikasına olduqca mühüm dərəcədə təsir edən çox miqdarda olmayan kəmiyyətlərin seçilməsi prosedurudur.

M. p. s. *Hava statistik proqnozları* metodlarının inkişafı üçün vacibdir, belə ki, atmosferin müşahidə olunan xarakteristikalarının – prediktorlar kimi istifadə oluna bilinən xarakteristikalarının ümumi sayı olduqca (ölçülməz dərəcədə) çoxdur, müşahidələrdən alınan məlumatlar (verilənlər) isə həmişə kifayət qədər dəqiq olmur. Buna görə də, bütün potensial $X = \{x_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ prediktorlar çoxluğundan hər hansı $X' = \{x_i',\ i = 1, \ldots, p\}$ altçoxluğu seçilir ki, bu halda, adətən, $p << n$ olur və bu altçoxluq öngörmələrin tələb olunan dəqiqliyini təmin edir. Bu məsələnin həllində prediktorların «araşdırılması yolunun» optimal seçilməsi və informativlik kriterisinin ağlabatan seçimi mühüm rol oynayır. İnformativlik kriterisi kimi, adətən, proqnozların keyfiyyətlərinin bu və ya digər statistik qiymətləri istifadə olunur (bax, *Proqnozu havanın*; keyfiyyətin statistik qiymətləri). «Araşdırılma yolunun» seçilməsində vəziyyət daha çətin olur. n və p -nin böyük qiymətlərində prediktorların tam surətdə araşdırılması olduqca çətin hesablama prosedurudur. Bundan başqa, bu halda dayanıqlı nəticə almaq demək olar ki, mümkün olmur, belə ki, n və p -nin artması ilə əlaqədar (müşahidə verilənlərinin sınaq məqsədilə seçilməsi üçün məhdud sayda götürülməsi ilə əlaqədar) səhv əlaqələrin (yəni olduqca artırılmış) ehtimalı kəskin artır və bununla bağlı seçimi statistik qiymətlərin etibarlı intervalları genişlənir (bax, məs., [1], [2]). Araşdırılma prosedurunun ixtisar olunmasına «addımlı süzgəcləmə» vasitəsilə nail olunur, bu isə

belə bir fərziyyəyə əsaslanan alqoritmlə aparılır: q sayda predik-torlardan ibarət optimal çoxluq, $p > q$ olduqda, p – ölçülü optimal çoxluğun altçoxluğudur. Süzgəcləmə alqoritmləri ara-sında iki qrup fərqləndirilir: dəyişənlər əlavə etməklə süzgəc-ləmə («irəliyə süzgəcləmə») və dəyişənləri xaric etməklə süzgəcləmə («geriyə süzgəcləmə»). Lakin asılı olmayan seçimdə nəzarət olmadığı halda süzgəcləmə metodu da korrelyasiya əmsalının səhvən böyüdülməsinin təsirindən xilas olmağa imkan vermir.

Dəyişənlərin seçilməsinin bu metodları reqression və diskrimi-nant analizdə, obrazların aşkar olunması məsələlərində istifadə olunan metodlara analojidir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Журнал геофизики», 1933, т. 3, в. 1, с. 78–82 (Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 161–67); [2] Яглом А. М., в кн.: Тр. Всесоюзного научного метеорологического совещания, т. 2, Л., 1963, с. 221–34; [3] Груза Г. В., Ранькова Э. Я., Вероятностные метеоро-логические прогнозы, Л., 1983.

MÜHÜM SİNFİ, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin **« существенный класс состояний** цепи Маркова; **essential class / set of states** of a Markov chain**»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyət-lərin təsnifatı.

MÜHÜM VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin **« существенное состояние** цепи Маркова; **essential state** of a Markov chain**»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

MÜHÜMLÜK KRİTERİSİ « значимости критерий; significance test » – $\xi_1, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması haqqında irəli sürülmüş H_0 hipotezində bu təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyaları kimi interpretasiya olunan müşahi-dələr nəticələri $x_1, \dots, x_n$ -lərin uyğunluğunun yoxlanılması üçün tətbiq olunan *statistik hipotezlərin yoxlanılmasının* əsas metodlarından biridir. M. k. müşahidə olunmuş müəyyən $T = T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ statistikasının qiymətindən asılı olaraq H_0 hipotezini qəbul edir və ya qəbul etmir, bu isə qoyulan məsələnin mahiyyətindən asılı olur. M. k.-ni tətbiq etdikdə, ümumiyyətlə, H_0 hipotezi qəbul olunmadıqda qəbul olunan hər hansı alternativ H_1 hipotezinin olduğu fərz olunur, lakin əgər H_1 alternativ hipotezi verilirsə, onda statistik hipotezlərin yoxlanılmasının ümumi nəzə-riyyəsinə əsasən alternativ H_1 hipotezi kriteri gücünün maksimi-zasiyası prinsipinə uyğun olaraq T statistikasının seçilməsini tə-yin edir.

Adətən, M. k. aşağıdakı kimi tətbiq edilir. H_0 hipotezi əsasında kriterinin $T(\xi_1, \dots, \xi_n)$ statistikası onun paylanmasına görə və əvvəlcədən verilmiş mühümlük ölçüsü α, $0 < \alpha < 0{,}5$ üzrə seçilir, sonra kriterinin elə t_α kritik qiyməti təyin olunur ki, $\mathbf{P}\{T \geq t_\alpha \mid H_0\} \leq \alpha$ münasibəti ödənilsin. α hüdudlu M. k.-nə uyğun olaraq, əgər $T(x_1, \dots, x_n) \geq t_\alpha$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul edilmir. Əgər $T(x_1, \dots, x_n) < t_\alpha$ olarsa, onda H_0 hipotezinin müşahidələrin nəticələri $x_1, \dots, x_n$ ilə ziddiyyət yaratmadığı hesab olunur, lakin bu o vaxta qədər belə hesab olunur ki, müşa-hidəçinin aldığı yeni nəticələr onun digər qərar qəbul etməsinə səbəb olmasın.

M i s a l. Sayğac birinci saat ərzində Puasson prosesinin 150 impulsunu, ikinci saat ərzində isə 117 impulsunu qeydə almış-dırsa, hesab etmək olarmı ki, vahid zaman ərzində impulsların daxilolma intensivliyi sabitdir (H_0 hipotezi).

Əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda müşahidə olunmuş 150 və 117 qiymətlərini naməlum λ parametrli eyni Puasson qanunu ilə paylanmış asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun olaraq, aldığı qiymətlər kimi interpretasiya etmək olar. H_0 hipotezində $Y_1 = \sqrt{4\xi_1 + 1} - 2\sqrt{\lambda}$ və $Y_2 = \sqrt{4\xi_2 + 1} - 2\sqrt{\lambda}$ təsadüfi kəmiyyətləri asimptotik olaraq $(0, 1)$ parametrlərli normal qanuna tabe olduğundan,

$$\xi^2 = [Y_1 - Y_2]^2/2 = [\sqrt{4\xi_1 + 1} - \sqrt{4\xi_2 + 1}]^2/2$$

statistikası təqribi olaraq, sərbəstlik dərəcəsi sayı 1 olan χ^2 qanunu ilə paylanır, yəni

$$\mathbf{P}\{\chi_1^2 > x \mid H_0\} \approx \mathbf{P}\{\chi_1^2 > x\}.$$

χ^2 – paylanma cədvəlləri üzrə $\alpha = 0{,}05$ mühümlük ölçüsünə uyğun olan $\chi_1^2(0{,}05) = 3{,}841$ kritik qiyməti tapılır, yəni

$$\mathbf{P}\{\chi_1^2 \geq 3{,}841\} = 0{,}05$$

olur.

Daha sonra, müşahidə olunmuş $\xi_1 = 150$ və $\xi_2 = 117$ qiymətləri üzrə kriterinin statistikası ξ^2 -nın

$$\xi^2 = \frac{1}{2}[\sqrt{4 \cdot 150 + 1} - \sqrt{4 \cdot 117 + 1}]^2 = 4{,}087$$

qiyməti hesablanır. $\xi^2 = 4{,}087 > \chi_1^2(0{,}05) = 3{,}841$ olduğun-dan mühümlük ölçüsü $\alpha = 0{,}05$ olan χ^2 tipli M. k. üzrə intensivliyin sabitliyi haqqında H_0 hipotezi qəbul olunmur.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статис-тических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Смир-нов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [4] Девятов Б. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 1, с. 175–78; [5] Green-wood P. E., Nikulin M. S., A Guide to Chi-squard Testing, N. Y., 1996.

MÜHÜMLÜK ÖLÇÜSÜ « значимости уровень; significance level » – *statistik hipotezlərin yoxlanılması* məsələsinin standart qoyuluşunda kriterinin ölçüsünü yuxarıdan məhdudlaşdıran müsbət ədəddir (və ya, ekvivalent olaraq, 1-ci növ səhvin ehtimalıdır). M. ö. cədvəllərinin tərtibatında: $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}01$ və s. tipli standart qiymətlərdən biri götürülür. Müşahidələrin verilmiş həcmində M. ö.-nün azalması, kriterinin «həssaslığının» azalması hesabına 1-ci növ səhvin ehtimalının azalmasına səbəb olur (2-ci növ səhvin ehtimalının artmasına). Buna görə də, real məsələlərdə M. ö.-nün seçilməsi 1-ci və 2-ci növ səhvlərin praktiki cəhətdən təsirlərini nəzərə alan məzmunlu mülahizələrə əsaslanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MÜKƏMMƏL ÖLÇÜ « совершенная мера; perfect measure » – B. V. Qnedenko və A. N. Kolmoqorov tərəfindən [1]-də daxil olunmuş ölçüdür; «abstrakt ölçü nəzəriyyəsi və metrik fəzalarda ölçü nəzəriyyəsi ilə tam harmoniyanın alınması» məqsədilə daxil olunmuşdur. Bu anlayışın dəyərliliyinin digər cəhətləri nəzəriyyənin sonrakı inkişafında aydın olmuşdur: bir tərəfdən M. ö. sinfi olduqca genişdir, digər tərəfdən isə M. ö. çərçivəsində mümkün olan bir sıra xoşagəlməz texniki çətinliklər mümkün deyildir.

Ω çoxluğunda ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası və $f^{-1}(E) \subset \mathscr{A}$ münasibətini ödəyən ixtiyari $E \subset \mathbb{R}$ çoxluğu üçün

$$\mu(f^{-1}(E)) = \inf \{\mu(f^{-1}(G)) : G \supset E,\ G \in \mathfrak{G}\},$$

münasibətini ödəyən, Ω-nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathscr{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş sonlu μ ölçüsü m ü k ə m m ə l ö l ç ü adlanır, $\mathfrak{G}$, – $\mathbb{R}$-in açıq altçoxluqlarının sinfidir. μ-nün mükəmməl ölçü olması üçün kafidir ki, Ω-da ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası üçün elə $B \subset \mathbb{R}$ Borel çoxluğu olsun ki, $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(\Omega)$ bərabərliyi və zəruridir ki, Ω-da ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası üçün $f^{-1}(E) \in \mathscr{A}$ şərtini ödəyən ixtiyari $E \subset \mathbb{R}$ çoxluğu üçün elə $B \subset E$ Borel çoxluğu olsun ki, $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(B))$ bərabərliyi ödə-nilsin.

Hər bir diskret ölçü mükəmməl ölçüdür. Bütün açıq çoxluqları özündə saxlayan separabel metrik fəzanın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə verilmiş ölçü, yalnız və yalnız, ixtiyari ölçülən çoxluğun ölçüsü bu çoxluqdakı kompaktların ölçülərinin yuxarı sərhədi olduqda mükəmməl ölçüdür. Mükəmməl μ ölçüsü $\mathscr{A}$ σ – cəbrinin ixtiyari σ – altcəbrində məhdudlaşdırıldıqda da mükəmməl ölçüdür. Hər bir $S \in \mathscr{A}$ altçoxluğunda $\mu(S) > 0$ şərtini ödəyən μ M. ö. ilə doğurulmuş ölçü mükəmməl ölçüdür. $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasının digər ölçülən fəzaya inikasında μ M. ö.-nün obrazı da M. ö.-dür. Ölçü, yalnız və yalnız, o halda M. ö.-dür ki, onun tamamlayıcısı da M. ö. olsun. Ω çoxluğunun altçoxluqlarının σ – cəbri $\mathscr{A}$-nın ixtiyari σ – altcəbrində ixtiyari ölçünün M. ö. olması üçün, ixtiyari həqiqi ölçülən f funksiyası üçün $f(\Omega)$ çoxluğunun mütləq ölçülən olması (yəni bu çoxluğun $\mathbb{R}$-də ixtiyari Borel ölçüsünün tamamlayıcısının təyin olunma oblastından olması) zəruri və kafidir. Əgər $\Omega \subset \mathbb{R}$ və $\mathscr{A}$ Ω-nın Borel altçoxluqlarının σ – cəbridirsə, onda $\mathscr{A}$-da ixtiyari ölçü, yalnız və yalnız, o halda M. ö.-dür ki, Ω mütləq ölçülən çoxluq olsun.

M. ö.-lü hər hansı $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ elə fəza olarsa ki, $\mathscr{A}$ Ω-nın nöqtələrini ayıran, hesabi sayda onu təşkil edən $\{\mathscr{A}_i\}$-lərə malik olsun (yəni ixtiyari $x \neq y,\ x, y \in \Omega$ üçün elə $i : x \in \mathscr{A}_i,\ y \notin \mathscr{A}_i$ və ya $x \notin \mathscr{A}_i,\ y \in \mathscr{A}_i$ tapılar ki, i indeksli $\{\mathscr{A}_i\}$-lər Ω-nın nöqtələrini ayırsın və bunlar hesabi sayda olsun), onda bu fəza hər hansı $(L, \mathscr{L}, \lambda)$ fəzasına sanki izomorfdur $(L, \mathscr{L}, \lambda)$ fəzası sonlu parçada Lebeq ölçüsü və müsbət kütləli nöqtələrin hesabini aşmayan ardıcıllığı ilə təşkil olunmuşdur [$N \in \mathscr{A}$, $\mu(N) = 0$ olan elə çoxluq və L-də elə qarşılıqlı birqiymətli $\varphi : \Omega \setminus N$ vardır ki, φ və φ^{-1} ölçüləndirlər və $\lambda = \mu\varphi^{-1}$].

I – indekslərin ixtiyari çoxluğu olsun və hər bir $i \in I$ indeksinə M. ö.-yə malik $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ fəzası uyğun olsun; $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$, $\mathscr{T}$ isə $\{x \in \Omega : x_i \in A \in \mathscr{A}_i\}$ tipli çoxluqlar sinfinin doğurduğu cəbr olsun. Əgər $\mathscr{T}$-də elə sonlu – additiv μ' ölçüsü verilərsə ki, ixtiyari $i \in I$ və $A \in \mathscr{A}_i$ üçün $\mu'(\{x \in \Omega : x_i \in A\}) = \mu_i(A)$ bərabərliyi ödənilsin, onda: 1) μ' $\mathscr{T}$-də hesabi – additiv ölçüdür, 2) μ' ölçüsünün $\mathscr{T}$ cəbrinin doğurduğu $\mathscr{A}$ σ – cəbrinə davamı μ müntəzəm ölçüdür.

$\{\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}\}$ – mükəmməl $\mathbf{P}$ ölçülü fəza, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, – $\mathscr{A}$ σ – cəbrinin iki σ – altcəbri olsun; belə ki, $\mathscr{A}_1$ hesabi sayda doğuruculara malikdir. Onda $\mathscr{A}_1$-də $\mathscr{A}_2$ şərtinə nəzərən elə requlyar şərti ehtimal vardır ki, yəni $\Omega \times \mathscr{A}_1$-də elə $p(\cdot, \cdot)$ funksiyası vardır ki: 1) x qeyd olunduqda $p(x, \cdot)$ $\mathscr{A}_1$-də ehtimal ölçüsüdür; 2) E qeyd olunduqda $p(\cdot, E)$ $\mathscr{A}_2$-yə nəzərən ölçüləndir; 3) bütün $E \in \mathscr{A}_1$ və $F \in \mathscr{A}_2$ üçün $\int_F p(x, E)\,\mathbf{P}(dx) = \mathbf{P}(E \cap F)$ bərabərliyi doğrudur. Bundan başqa, $p(\cdot, \cdot)$ funksiyasını elə seçmək olar ki, $p(x, \cdot)$ ölçüləri müntəzəm ölçü olsunlar. $(\Omega, \mathscr{A})$, $(S, \mathscr{T})$ – iki ölçülən fəza olsun və $q(\cdot, \cdot)$, – $\Omega \times \mathscr{T}$ fəzasında keçid ehtimalı olsun, yəni $q(\cdot, E)$ $\mathscr{A}$-ya nəzərən ölçülən funksiyadır və ixtiyari $x \in \Omega$, $E \in \mathscr{T}$ üçün $q(x, \cdot)$ $\mathscr{T}$-da ehtimal ölçüsüdür. Əgər $q(x, \cdot)$ diskret olarsa, $\mathbf{P}$ isə $\mathscr{A}$-da mükəmməl ehtimal ölçüsü olarsa, onda $\int q(x, \cdot)\,\mathbf{P}(dx)$ M. ö.-dür.

M. ö.-lər kompakt ölçülərlə sıx bağlıdır. Əgər $K_i \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$ münasibəti hər hansı n üçün $\bigcap_{i=1}^{n} K_i = \varnothing$ hadisəsini doğurarsa, onda altçoxluqlar sinfi $\mathscr{K}$ k o m p a k t s i n i f adlanır. Əgər elə $\mathscr{K}$ kompakt sinfi varsa ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $E \in \mathscr{A}$ üçün $K \in \mathscr{K}$ və $E_1 \in \mathscr{A}$ çoxluqlarını elə seçmək mümkün olsun ki, $E_1 \subset K \subset E$ və $\mu(E \setminus E_1) < \varepsilon$ şərtləri ödənilsin, onda $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında sonlu μ ölçüsü k o m p a k t ö l ç ü adlanır. Hər bir kompakt ölçü M. ö.-dür. Ölçünün mükəmməl ölçü olması üçün zəruri və kafidir ki, bu ölçü hesabi sayda doğurucuları olan ixtiyari σ – altcəbrdə məhdudlaşdırıldıqda kompakt ölçü olsun.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] M a r c z e w s k i E., «Fundam. math.», 1953, v. 40, p. 113–24; [3] R y l l – N a r d z e w s k i C., «Fundam. math.», 1953, v. 40, p. 125–30; [4] С а з о н о в В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, с. 391–414; [5] R a m a c h a n d r a n D., Perfect measures, pt 1 – Basic theory, pt 2 – Spesial topics, Dehli, 1979.

MÜNTƏZƏM APPROKSİMASİYASI, SEMİMARTİNQALIN « равномерная аппроксимация семимартингала; uniform approximation of semimartingale » – bax, *Stoxastik differensial tənlik* Stratonoviç formasında; kükrəntilərə nəzərən dayanıqlılıq.

MÜNTƏZƏM ƏN GÜCLÜ KRİTERİ « равномерно наиболее мощный критерий; uniformly most powerfull test » – mürəkkəb H_1 alternativ hipotezinə qarşı H_0 mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması üçün mühümlük ölçüsü verilmiş statistik kriteridir; H_1 hipotezinin gücü H_1-ə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün nəzərdə tutulan, eyni mühümlük ölçüsünə malik ixtiyari statistik kriterinin gücündən kiçik deyildir.

$H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ mürəkkəb hipotezinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanıldığı fərz olunur; yoxlanılan H_0 hipotezi əslində doğru olduğuna baxmayaraq, statistik kriteriyə əsaslanaraq onu qəbul etmədikdə 1-ci növ səvhin ehtimalının yuxarı sərhədi α-nın, $0 < \alpha < 1$ verildiyi fərz olunur (α ədədi kriterinin mühümlük ölçüsü, kriterinin özü isə α hüdudlu kriteri adlanır). 1-ci növ səhv ehtimalı üzərinə qoyulan məhdudiyyət H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün nəzərdə tutulan bütün statistik kriterilər sinfinə qədər olur. Statistik kriterinin $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ güc funksiyası terminlərilə mühümlük ölçüsü α-nın qeyd olunması onu ifadə edir ki, $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} b(\theta) \le \alpha$ yuxarı sərhədi vardır. Əgər H_1 hipotezinə qarşı H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün nəzərdə tutulan α hüdudlu bütün statistik kriterilər sinfində elə vardırsa ki, onun güc funksiyası $\beta^*(\theta)$ $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \beta^*(\theta) = \alpha$, $\beta^*(\theta) \ge \beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ şərtini ödəyir, onda bu kriteri H_1-ə qarşı H_0-ın yoxlanılması üçün α hüdudlu müntəzəm ən güclü kriteri adlanır, burada $\beta(\theta)$ – qeyd olunan sinifdən ixtiyari başqa bir kriterinin güc funksiyasıdır. Əgər kriterilərin müqayisəsi kriterilərin gücü terminlərilə aparılırsa, M. ə. g. k. ən yaxşı kriteri sayılır. α ədədi bu kriterinin ölçüsü adlanır.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

MÜNTƏZƏM FAKTOR EKSPERİMENT « равномерный факторный эксперимент; uniform factorial experiment » – bax, *Faktor eksperiment.*

MÜNTƏZƏM İNTEQRALLANAN FUNKSİYA « равномерно интегрируемая функция; uniformly integrable function » – bax, *Müntəzəm inteqrallananlıq*.

MÜNTƏZƏM İNTEQRALLANANLIQ « равномерная интегрируемость; uniform integrability » – *təsadüfi kəmiyyətlər* ailəsinin aşağıdakı kimi təyin olunan xassəsidir. $\{X_t,\ t \in T\}$ – eyni $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi olsun.

Əgər

$$\lim_{c \to \infty} \int\limits_{|X_t| > c} |X_t| \, d\mathbf{P} = 0$$

olarsa, $\{X_t,\ t \in T\}$ müntəzəm inteqrallanan təsadüfi kəmiyyətlər ailəsi adlanır.

Müntəzəm inteqrallananlıq kriterisi. Fərz olunur ki, eyni ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı $\{X_n\}_{n \ge 1}$ X təsadüfi kəmiyyətinə sanki hər yerdə yığılır və $\mathbf{M}|X_n| < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Aşağıdakı üç şərt ekvivalentdir:

1) $\{X_n\}_{n \ge 1}$ ardıcıllığı müntəzəm inteqrallanandır;

2) $\mathbf{M}|X_n| < \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}|X_n - X| = 0$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}|X_n| = \mathbf{M}|X|$.

Bu müddəaların hər birindən aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M} X_n = \mathbf{M} X .$$

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

MÜNTƏZƏM KƏSİLMƏZ SEMİ – QRUP « равномерно непрерывная полугруппа; even-continuous semi-group » – bax, *Semi – qrup.*

MÜNTƏZƏM KVADRATİK METRİKA « равномерно квадратичная метрика; uniformly quadratic metric » – sadə *ehtimal metrikasıdır*, X, Y həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər olduqda

$$\rho_*^2(X, Y) =$$

$$= \sup_{r > 0} \frac{1}{2r} \int [\mathbf{P}\{|X - x| \le r/2\} - \mathbf{P}\{|Y - x| \le r/2\}]^2 \, dx$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. M. k. m. X, Y təsadüfi kəmiyyətlərinin xarakteristik funksiyaları f_X, f_Y terminlərilə aşkar şəkildə ifadə olunur:

$$\rho_*^2 = \sup_{r > 0} \frac{1}{2r} \int \left(\frac{\sin rt}{rt} \right)^2 |f_X(t) - f_Y(t)|^2 \, dx .$$

Bu xassə xüsusi bir cəhəti ifadə edir, belə ki, M. k. m. ρ *müntəzəm metrikasına* ekvivalentdir (o mənada ki, M. k. m.-da yığılma ρ müntəzəm metrikasında yığılmanı doğurur və əksinə). M. k. m. və ρ bir-birilə $\rho_*^2 \le 2\rho$ bərabərsizliyi ilə əlaqəlidirlər. Lakin sıfırdan fərqli və $\psi(\rho) \le \rho_*$ bərabərsizliyini ödəyən $\psi(\rho)$ funksiyası mövcud deyildir.

M. k. m. xətti invariantlıq xassəsinə malikdir: ixtiyari $a \in \mathbb{R}^1$, $b > 0$ və ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\rho_*(bX + a,\ bY + a) = \rho_*(X, Y) .$$

M. k. m.-nın tərifi sonluölçülü təsadüfi kəmiyyətlər fəzası halı üçün də təyin oluna bilinir.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

MÜNTƏZƏM METRİKA « равномерная метрика; uniform metric », Kolmoqorov metrikası, – *ehtimal metrikalarından* ən qədimi və ən çox istifadə olunanlardan biridir. Həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\rho(X, Y) = \sup_x \left| F_X(x) - F_Y(x) \right|$$

bərabərliyi ilə təyin olunan M. m.-nın unikal xassələrindən statistikada ilk dəfə uğurla A. N. Kolmoqorov istifadə etməsinə baxmayaraq, rus ədəbiyyatında da «Kolmoqorov metrikası» termini nadir hallarda istifadə olunur, burada F_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Bu xassələr aşağıdakılardır:

1) $\mathbb{R}^1$-də ixtiyari kəsilməz və ciddi monoton $G(x)$ funksiyası üçün $\rho(G(X),\ G(Y)) = \rho(X, Y)$;

2) $\mathbb{R}^1$-də bütün diskret paylanmaların çoxluğu $\mathbb{R}^1$-də bütün paylanmalar çoxluğunda sıxdır (müntəzəm yığılma mənasında).

Berri – Esseen bərabərsizliyi xarakteristik funksiyalar terminlərində M. m.-nın yuxarı sərhədini təyin edir.

Çoxölçülü X təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları $\mathbf{P}_X$ üçün M. m.-nın müxtəlif analoqları mövcuddur. Bunlar, adətən,

$$\rho(X, Y; \mathfrak{A}) = \sup \{ \left| \mathbf{P}_X(A) - \mathbf{P}_Y(A) \right| : A \in \mathfrak{A} \}$$

strukturlu olur, burada $\mathfrak{A}$ – Borel çoxluqlarının hər hansı bir sistemidir. İndiyə qədər ən çox istifadə olunan sistemlər bu və ya digər kürələr sistemi, bütün qabarıq çoxluqlar sistemi və Borel çoxluqları sistemi olmuşdur. Sonuncu halda *tam variasiya metrikası* alınır.

MÜNTƏZƏM OPTİMAL PLAN « равномерно оптимальный план; uniformly optimal design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

MÜNTƏZƏM OPTİMAL STRATEGİYA « равномерно оптимальная стратегия; uniformly optimal strategy / policy » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*; *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

MÜNTƏZƏM PAYLANMA « равномерное распределение; uniform distribution » – «bərabərimkanlı nəticələr» ideyasının kəsilməzlik halı üçün yaranan ehtimal *paylanmaları* sinfinin ümumi adıdır. Ehtimal nəzəriyyəsində M. p. normal paylanma kimi bəzi məsələlərdə dəqiq paylanma kimi, bəzilərində isə limit paylanması kimi alınır.

Ədəd oxunun $[a, b]$ parçasında M. p. (düzbucaqlı paylanma) – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

münasibətilə verilən kəsilməz ehtimal paylanmasıdır. M. p.-nın riyazi gözləməsi və dispersiyası, uyğun olaraq, $(b+a)/2$ və $(b-a)^2/12$ ədədlərinə bərabərdir. M. p.-nın paylanma funksiyası

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ (x-a)/(b-a), & a < x \le b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

münasibətilə, xarakteristik funksiyası isə

$$f(x) = \frac{1}{t(b-a)} (e^{itb} - e^{ita})$$

düsturu ilə ifadə olunur.

M. p. *Pirson paylanmaları* sistemində tip II-nin xüsusi halıdır.

$[0, 1]$ parçasında M. p.-ya malik təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı kimi qurmaq olar. $1/2$ ehtimalı ilə 0 və 1 qiymətlərini alan asılı olmayan $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığı və

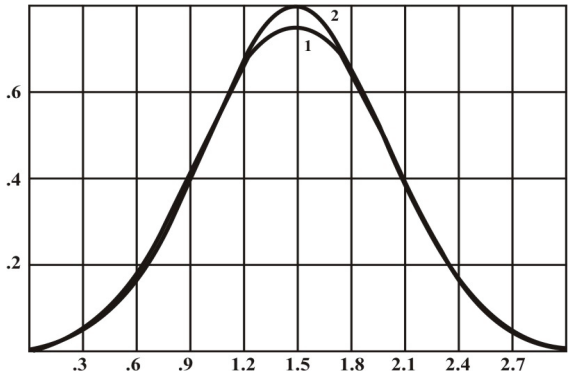
$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \, 2^{-n}$$

götürülür (X_n, – X-in ikilik ayrılışında rəqəmlərdir). X təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$ parçasında M. p. qanununa tabedir. Bu faktın mühüm statistik tətbiqləri vardır (bax, məs., *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər*). $[a, b]$-də M. p. anlayışı bu parçada nöqtənin təsadüfi seçilməsinin ixtiyari qaydada aparılması ilə əlaqədar yaranır.

Əgər X_1 və X_2 asılı olmayan, $[0, 1]$-də M. p. qanununa tabe təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi $X_1 + X_2$ təsadüfi kəmiyyəti $x \in [0, 2]$ üçün paylanmasının sıxlıq funksiyası $p_2(x) = 1 - |1 - x|$ olan $[0, 2]$ parçasında üçbucaq (Simpson) paylanmasına malikdir. $[0, 1]$-də M. p.-ya malik üç asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin cəminin paylanması sıxlıq funksiyası

$$p_3(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x < 1, \\ (x^2 - 3(x-1)^2)/2, & 1 \le x < 2, \\ (x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2)/2, & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

münasibətilə verilən $[0, 3]$ parçasında paylanmadır (bax, şəkil).



Paylanmanın sıxlıq funksiyalarının qrafikləri: (1) $p_3(x)$ – müntəzəm paylanmanın üçqat kompozisiyası; (2) riyazi gözləməsi $\alpha = 1{,}5$ və dispersiyası $\sigma^2 = 1/4$ olan normal paylanma.

Ümumi halda asılı olmayan, $[0, 1]$-də M. p. qanununa tabe $X_1, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $X_1 + \ldots + X_n$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k (x-k)_+^{n-1}\,, \quad 0 \le x \le n$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $z_+ = \begin{cases} r, & z > 0 \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$ $n/2$ riyazi gözləməsi və $\sqrt{n/12}$ kvadratik orta yayınması ilə normalanmış $X_1 + \ldots + X_n$ cəminin paylanması n-in artması ilə 0 və 1 parametrlərli normal paylanmaya sürətlə yaxınlaşır ($n = 3$ olduqda yaxınlaşma bir çox praktik məqsədlər üçün kafi sayılır).

Statistik tətbiqlərdə verilmiş $F(x)$ paylanma funksiyası olan təsadüfi kəmiyyətin qurulması aşağıdakı fakta əsaslanır. Y təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$-də müntəzəm qanunla paylanmışdır və $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməzdir və ciddi artandır. Onda $X = F^{-1}(Y)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x)$-dir; ümumi halda, X-in təyin olunmasında $F^{-1}(y)$ funksiyasını onun analoqu –

$$G(y) = \inf_x \{x : F(x) \le y \le F(x+0)\}$$

funksiyası ilə əvəz etmək lazımdır.

M. p. parçada limit paylanması kimi. Aşağıda $[0, 1]$ parçasında M. p.-nın limit paylanması kimi yaranmasına aid tipik misallar şərh olunur (bax, həmçinin *Puasson cəmləmə düsturu*).

1) $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – eyni kəsilməz paylanma funksiyası olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda bu təsadüfi kəmiyyətlərin modul 1 üzrə cəmi S_n-in paylanması, yəni başqa sözlə, S_n cəminin kəsri hissəsi $\{S_n\}$-in paylanması $[0, 1]$-də müntəzəm paylanmaya yığılır.

2) α və β parametrlərinin mütləq kəsilməz birgə paylanmaya malik olduqları fərz olunur; onda $t \to \infty$ olduqda $\{\alpha t + \beta\}$-nın paylanması $[0, 1]$-də müntəzəm paylanmaya yığılır.

3) M. p. natural n arqumentinin bəzi $g(n)$ funksiyalarının kəsri hissələrinin limit paylanması kimi təsadüf olunur. Məs., α irrasional olduqda $1 \le m \le n$ şərtilə təyin olunan m-lərin $0 \le a \le \{n\alpha\} \le b \le 1$ münasibəti ödənilən n-lərdən hissələri $n \to \infty$ olduqda $b - a$-ya yaxınlaşır.

$\mathbb{R}^k$-nın altçoxluqlarında M. p.. Düzbucaqlıda M. p.-ya aid misal *Byuffon məsələsində* artıq şərh olunmuşdur (bax, *Həndəsi ehtimallar*, *Stoxastik həndəsə*). $\mathbb{R}^k$ fəzasında hər hansı məhdud D çoxluğunda M. p. paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x_1, \ldots, x_n) = C \ne 0$ olan paylanma kimi təyin olunur, burada C, – D çoxluğunun k – ölçülü həcminə tərs kəmiyyətdir.

Səth üzərində də M. p.-lara baxılır. Məs., «təsadüfi istiqamət» (məs., $\mathbb{R}^3$-də) koordinat başlanğıcından vahid radiuslu kürə səthinin ixtiyari nöqtəsinə istiqamətlənən vektorla təyin olunur, bu nöqtənin müntəzəm qanunla paylanması nöqtənin fəzanın hər hansı bir hissəsinə düşdüyü səthin sahəsi bu hissənin sahəsinə mütənasib olması kimi anlaşılır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

MÜNTƏZƏM SONSUZ KİÇİLƏNLİK ŞƏRTİ « равномерной бесконечной малости условие; uniform infinitesimality condition » – bax, *Sonsuz kiçilənlik şərti.*

MÜNTƏZƏM SPEYSİNQ « равномерный спейсинг; uniform spasing » – bax, *Seçimi bloklar.*

MÜNTƏZƏM TUTARLI QİYMƏTLƏNDİRMƏ « равномерно состоятельное оценивание; uniformly consistent estimation » – bax, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə.*

MÜNTƏZƏM YIĞILMASI(sı) empirik paylanmaların **« равномерная сходимость** эмпирических распределений; **uniform convergence** of empirical distributions **»** – $n \to \infty$ olduqda

$$\sup_{A \in \mathscr{B}} \left| \mathbf{P}_n(A) - \mathbf{P}(A) \right| \to 0 \quad \text{sanki yəqin} \qquad (1)$$

tipli müddəadır, burada $\mathbf{P}_n$, – $\mathbf{P}$ paylanması ilə n – ölçülü seçimin əsasında qurulmuş empirik paylanma, $\mathscr{B}$ – ixtiyari ölçülən $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ fəzasının ölçülən altçoxluqlarının hər hansı altsinfidir. Ümumi halda (1)-dəki supremum təsadüfi kəmiyyət olmaya da bilər. Əgər $\mathscr{B}$ sonlu sayda altçoxluqlardan ibarət olarsa, onda $\mathscr{B}$ sinfi üzrə empirik paylanmaların M. y.-sı *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunundan* alınır.

Əgər

$$\mathscr{X} = \mathbb{R}, \quad \mathscr{B} = \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$$

olarsa, onda (1) münasibəti Qlivenko – Kantelli teoreminin müddəasını ifadə edir.

İxtiyari ölçülən $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ fəzalarında empirik paylanmaların M. y.-nı $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ sinfinin entropik xarakteristikaları vasitəsilə ifadə etmək rahat olur. $H_1(\varepsilon, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ – aşağıdakı şərtləri ödəyən $A_i \in \mathscr{A}$ altçoxluqlarının minimal sayının loqarifmi olsun: ixtiyari $B \in \mathscr{B}$ üçün elə A_{i_1}, A_{i_2} vardır ki, $A_{i_1} \subseteq B \subseteq A_{i_2}$, $\mathbf{P}\{A_{i_2} \setminus A_{i_1}\} \le \varepsilon$. Əgər bütün $\varepsilon > 0$ üçün $H_1(\varepsilon, \mathscr{B}, \mathbf{P}) < \infty$ olarsa, onda (1) münasibəti ödənilir (bax, [1]). $\mathbf{P}$ ixtiyari olduqda $H_1(\varepsilon, \mathscr{B}, \mathbf{P}) < \infty$ olan $\mathscr{B}$ siniflərinə k – ölçülü kürələr çoxluqları, koordinat müstəvilərinə paralel üzləri, k – ölçülü paralelepipedləri misal göstərmək olar.

Əgər $\mathscr{B}$ $\mathbb{R}^k$-nın bütün qapalı altçoxluqlarının sinfidirsə, $k \ge 2$, $\mathbf{P}$ – sıxlığı məhdud olan mütləq kəsilməz paylanmadırsa, onda $H_1(\varepsilon, \mathscr{B}, \mathbf{P}) < \infty$. Əgər $\mathbf{P}$ $\mathbb{R}^k$-da kürə üzərində kəsilməz paylanma olarsa, onda belə $\mathscr{B}$ üçün (1) ödənilir. Əgər $\mathbf{P}$ $\mathscr{X}$-də ixtiyari diskret paylanma olarsa, onda ixtiyari $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ üçün $H_1(\varepsilon, \mathscr{B}, \mathbf{P}) < \infty$ olur.

Ölçülənliyin müəyyən şərtlərində (1)-in ödənilməsi üçün

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \mathbf{M} \ln \Delta_{\mathscr{B}}(X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad (2)$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $\{X_i\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ($\mathbf{P}$ X_1-in paylanmasıdır), $\Delta_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, – $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap B$, $B \in \mathscr{B}$ tipli müxtəlif altçoxluqların sayıdır (bax, [2]). İxtiyari $\mathbf{P}$ üçün *Vapnik – Çervonenkis sinfi* $\mathscr{B}$ (2) münasibətini ödəyir (bax, [2], [3]).

Ədd.: [1] Dehardt J., «Ann Math. Statist.», 1971, v. 42, p. 2050–55; [2] Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 2, с. 264–79; [3] Dudley R. M., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1097, p. 1–142.

MÜNTƏZƏM YIĞILMA(sı) paylanmaların **« равномерная сходимость** распределений; **uniform convergence** of distributions **»** – F_n paylanma funksiyalarının F paylanma funksiyasına $n \to \infty$ olduqda

$$\rho(F_n, F) \to 0$$

münasibətilə təyin olunan *yığılmasıdır*, burada ρ *müntəzəm metrikadır*. ρ metrikasında yığılma *tam variasiya metrikasında* yığılma, bəzən, güclü yığılma adlandırılır. F kəsilməz olduğu halda M. y. *zəif yığılmaya* ekvivalentdir.

MÜRƏKKƏB HİPOTEZ « сложная гипотеза; composite hypothesis » – bax, *Statistik hipotez*, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

MÜRƏKKƏB MARKOV ZƏNCİRİ « сложная цепь Маркова; high-order (composite) Markov chain » – diskret zamanlı elə $\{\zeta(t)\}$ *təsadüfi prosesidir* ki, t anına qədərki bütün anlarda prosesin trayektoriyalarının qiymətlərinin məlum olması şərtinə nəzərən $\zeta(t)$ -nin şərti ehtimalı, $\zeta(t-1)$, $\zeta(t-2), \dots, \zeta(t-s)$ məlum qiymətlərində $\zeta(t)$ -nin şərti ehtimalı ilə üst-üstə düşür, burada s – qeyd olunmuş natural ədəddir. Məs., mətndə hərflərin bir-birini əvəz etməsi M. M. z. ilə yaxşı təsvir olunur, bu şərtlə ki, $s=1$ halı deyil, $s=2$, $s=3$ olsun. $s=1$ olduqda, M. M. z. adi *Markov zəncirinə* çevrilir. M. M. z.-nin Markov zəncirinə çevrilməsi faza fəzasının mürəkkəbləşdirilməsi hesabına olur: əgər $\zeta^*(t) = \{\zeta(t), \zeta(t+1), \dots, \zeta(t+s-1)\}$ götürülərsə, $\{\zeta^*(t)\}$ ardıcıllığı Markov zənciri əmələ gətirir.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) kodlama və dekodlamanın **« сложность** кодирования и декодирования; coding and decoding **complexity »** – *kodlama* və *dekodlamanı* reallaşdıran alqoritm və qurğuların mürəkkəbliyinin müxtəlif kəmiyyət xarakterizasiyalarının ümumi adıdır. Kodlama və dekodlamanın vahid universal ölçüsü mövcud deyildir, çünki, kodlama və dekodlama metodlarını praktik olaraq ən müxtəlif qaydalarla: universal və ya xüsusi EHM-da, funksional elementlərdən ibarət sxemlərdə və s. reallaşdırmaq olar. Praktik vəziyyətdən asılı olaraq mürəkkəblik ölçüsü kimi: əməliyyatların sayı, yaddaşın tələb olunan tutumu, işləmə müddəti, proqramın uzunluğu (universal EHM-da realizasiyada), elementar məntiqi elementlərin sayı, onlar arasındakı əlaqələrin sayı (xüsusi EHM-nın qurulmasında) kəmiyyətlərini götürmək olar. Kodlama və dekodlamaya xüsusi alqoritmlər sinfi kimi baxaraq ümumi alqoritmlər nəzəriyyəsi baxımından onların mürəkkəbliyini araşdırmaq olar.

Nəzəri cəhətdən n uzunluqlu blok kodlarının kodlama və dekodlaması M.-nin n -in böyük qiymətlərində asimptotikası daha maraqlıdır. Aydın olmuşdur ki, bu asimptotik nəticə istifadə olunan mürəkkəblik ölçüsündən asılı deyildir. İsbat olunmuşdur ki (bax, [2]), ötürmə sürəti sıfırdan fərqli, kodlama və dekodlama M. n -ə görə polinomial artan, səhvlərin xətti (n üzrə) sayını düzəltməyi təmin edən böyük n uzunluqlu ikilik xətti kodlar mövcuddur. [3]–də R. Qallagerin daxil etdiyi az sıxlıqlı kodlar $n \log n$ tərtib kodlama və dekodlama M.-də səhvlərin xətti sayını düzəltməyə imkan verir.

Ədd.: [1] Бассалыго Л. А., Зяблов В. В., Пинскер М. С., «Проблемы передачи информации», 1977, т. 13, № 3, с. 5–17; [2] Зяблов В. В., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, № 1, с. 5–13; [3] Галлагер Р., Коды с малой плотностью проверок на четность, пер. с англ., М., 1966.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) paylanmanın modelləşdirilməsinin; statistik qiymət **« сложность** моделирования распределения; оценка; **complexity** of non–uniform random number generation; evalution of **»** – $[0, 1]$-də müntəzəm paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətləri və ya psevdotəsadüfi ədədləri modelləşdirilən qanunla paylanan nöqtələrə çevirən alqoritmə sərf olunan zamanın (orta qiymətinin) və ya ritmin uzunluğunun qiymətidir (bax, *Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*, *Monte – Karlo metodu*; zəruri işin həcmi, *Planlaşdırılması*, *imitasion eksperimentin*). [1]-də paylanmanın modelləşdirilməsinin M. $[0, 1]$-də müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətin bitlərinin – verilən təsadüfi kəmiyyətin k sayda ilk bitlərinin hesablanması üçün zəruri bitlərin orta sayı kimi təyin olunur. [1] mənasında optimal alqoritm $(k+2)$-dən artıq bit istifadə etmir.

Ədd.: [1] Кунт Д., Яо Э., «Кибернетич. сб.» 1983, в. 19, с. 97–158.

MÜRƏKKƏBLİK(yi) sonlu obyektlərin **« сложность** конечных объектов; **algorithmic / Kolmogorov complexity of finite objects »** – bax, *Alqoritmik entropiya.*

MÜRƏKKƏBLİK(yi) sözün **« сложность** слова; **algorithmic / Kolmogorov complexity a word »** – bax, *Alqoritmik entropiya.*

MÜSBƏT MÜƏYYƏN FUNKSİYA « положительная / неотрицательная определенная функция; positive semi – definite / nonnegative definite function », müsbət müəyyən nüvə, – elə $k : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ (Λ – boş olmayan çoxluqdur) inikasıdır ki, hər bir natural k ədədi, ixtiyari $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_i \in \Lambda$ toplusu və $c_1, \dots, c_n$ kompleks ədədlərinin ixtiyari toplusu üçün

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} c_i \bar{c}_j k(\lambda_i, \lambda_j) \geq 0$$

bərabərsizliyi doğrudur. M. m. f. həmçinin müsbət tipli funksiya, müsbət tipli nüvə, qeyri–mənfi müəyyən funksiya, Hermit müsbət funksiyası kimi də adlandırılır.

Əgər $X(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ 2-ci tərtib təsadüfi funksiyadırsa, onda

$$k(s, t) = \mathbf{M}\, X(s)\overline{X(t)}, \quad s, t \in \Lambda, \qquad (*)$$

M. m. f.-dır. Tərsi də doğrudur: hər bir M. m. f. (*) şəklində ifadə olunur (*Aronşayn – Kolmoqorov teoremi*). M. m. f.-nın alınmasının digər metodu *Şenberq teoremi* ilə verilir (bax, *Mənfi müəyyən funksiya*).

Əgər Λ qrupdursa, $(s, t) \to \chi(s-t)$ münasibətini ödəyən ikidəyişənli funksiya yuxarıda verilən mənada M. m. f. olarsa, onda $\chi : \Lambda \to \mathbb{C}$ funksiyası M. m. f. adlanır.

M. m. f. harmonik analiz və ehtimal nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. Bu anlayışın müxtəlif ümumiləşmələri mövcuddur; məs., kompleks M. m. f.-lar əvəzinə müsbət müəyyən operatorqiymətli funksiyalara baxılır.

Əd.: [1] Л о э в M., Теория вероятностей, пер. с англ., 1962; [2] Х ь ю и т т Э., Р о с с К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, M., 1975; [3] Р а й к о в Д. А., «Тр. Матем. ин.-та АН СССР», 1945, т. 14, с. 1–86; [4] К р е й н M. Г., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, № 4, с. 64–98; 1950, т. 2, с. 10–59; [5] S t e w a r t J., «Rocky Mountain J. Math.», 1976, v. 6, № 3, p. 403–34; [6] S a s v a r i Z., Positive definite and definable functions, B., 1994.

MÜSBƏT MÜƏYYƏN NÜVƏ « положительно определенное ядро; positive definite kernel » – bax, *Müsbət müəyyən funksiya*.

MÜSBƏT VƏZİYYƏT « положительное состояние; positive state » – bax, *Markov zənciri*; v ə z i y y ə t l ə r i n t ə s n i f a t ı, *Markov prosesi* v ə z i y y ə t l ə r i ç o x l u ğ u h e s a b i.

MÜSBƏT VƏZİYYƏTLƏR SİNFİ M a r k o v z ə n c i r i n i n **« положительный класс состояний** ц е п и М а р к о в а; **class of positive states** o f a M a r k o v c h a i n **»** – bax, *Markov zənciri*; v ə z i y y ə t l ə r i n t ə s n i f a t ı.

MÜSTƏVİ – SIXLAŞMIŞ AİLƏ (s i) e h t i m a l ö l ç ü l ə r i n i n **« плоско концентрированное семейство** в е р о я т о с т н ы х м е р; **flatly concentrated family** o f p r o b a b i l i t y m e a s u r e s **»** – sonluölçülü altfəzaların kiçik ətraflarında müntəzəm sıxlaşmış, *Banax fəzasında ehtimal ölçülərinin* ailəsidir. Daha dəqiq: S^{ε}, – $S \subset B$ Banax fəzasının ε – ətrafı, $\mathscr{M}$, – B Banax fəzasında Radon ehtimal ölçülərinin ailəsi olduqda, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə sonluölçülü $S \subset B$ olarsa ki, $\inf\{\mu(S^{\varepsilon}) : \mu \in \mathscr{M}\} > 1 - \varepsilon$ şərti ödənilsin, onda $\mathscr{M}$ ehtimal ölçülərinin m ü s t ə v i – s ı x l a ş m ı ş a i l ə s i adlanır.

«M. – s. a.» anlayışı [1]-də A. Akosta tərəfindən daxil olunmuşdur. Bu anlayışın köməyilə metrik fəzada ehtimal ölçülərinin zəif nisbi kompaktlığının Proxorov kriterisini Banax fəzası halında tətbiqdə konkretləşdirmək mümkündür. Doğrudan da, B Banax fəzasında Radon ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathscr{M}$, yalnız və yalnız, o halda zəif nisbi kompaktdır ki, aşağıdakı iki şərt ödənilmiş olsun: (a) B-də ixtiyari kəsilməz xətti y funksionalı üçün ədəd oxunda ölçülər ailəsi $\{y^{-1} \circ \mu : \mu \in \mathscr{M}\}$ zəif nisbi kompaktdır; (b) $\mathscr{M}$ ailəsi M. s. a.-dir.

Əd.: [1] A c o s t a A. de, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 152, № 1, p. 273–98.

MÜŞAHİDƏ XƏTASI « наблюдения ошибка; observation error » – naməlum determinik a kəmiyyətinin ölçmə nəticəsi müəyyən ξ təsadüfi kəmiyyətinin (müşahidənin) realizasiyası kimi interpretasiya olunan eksperiment xətasıdır.

Hər hansı a kəmiyyətinin ölçülməsi üçün aparılan eksperiment nəticəsinin ξ təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunan realizasiyası kimi interpretasiya olunduğu fərz olunur. Onda $X = \xi - a$ təsadüfi kəmiyyəti ξ-nin m ü ş a h i d ə x ə t a s ı adlanır və bu halda $\xi = a + X$ naməlum ölçülən a kəmiyyəti və müşahidə xətası X-in cəminə bərabərdir. $b = \mathbf{M}X$ müşahidə xətası

X-in riyazi gözləməsi olsun. Əgər b sıfırdan fərqli olarsa, onda M. x. X-də s i s t e m a t i k x ə t a vardır, deyilir və bu xəta b-yə bərabərdir. $\delta = X - b$ fərqi eksperimentin t ə s a d ü f i x ə t a s ı adlanır və $\mathbf{M}\delta = 0$. Beləliklə, M. x. $X = b + \delta$ sistematik xəta b ilə təsadüfi xəta δ-nın cəminə bərabərdir və $\mathbf{M}\delta = 0$. ξ müşahidəsi $\xi = a + X = a + b + \delta$ cəminə bərabər olub, ölçülən a kəmiyyəti, müşahidə xətası X, sistematik xəta b və təsadüfi xəta δ terminlərilə ifadə olunur (bax, *Təsadüfi xəta*, *Sistematik xəta*).

MÜŞAHİDƏ OLUNAN ÖLÇÜ « наблюдаемый размер; attainded size / level » – bax, *Kritik hədd*.

MÜŞAHİDƏLƏNƏN « наблюдаемая; observable » – *qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir. Cəbri baxımdan M. ilkin anlayışdır: verilmiş sistemi təsvir edən C^* – cəbrinin özü-özünə qoşma hər bir elementi məhdud həqiqi M. sayılır (bax, *Cəbri, müşahidələnənlərin*). Kommutativ cəbrlər üçün M. anlayışı *təsadüfi kəmiyyət* anlayışına çevrilir.

Kvant mexanikasında həqiqi M. sistemin Hilbert fəzası H-da özü-özünə qoşma ixtiyari X operatoru ilə verilir. Həqiqi oxda yerləşən spektr nöqtələri X müşahidələnəninin ölçmələrdə alınan qiymətləri kimi interpretasiya olunur. İxtiyari statistik *vəziyyətdə* verilmiş M.-nin nəticəsi, ümumiyyətlə, təsadüfidir; sıxlıq operatoru S ilə təsvir olunan vəziyyətin bu nəticələrinin orta qiyməti $\mathbf{M}_S\{X\} = \operatorname{tr} SX$ bərabərliyi ilə təyin olunur. Kvant mexanikasında postulat kimi qəbul edilən bu mülahizələrdən ölçmə nəticəsində X üçün alınan M.-lərin ehtimal paylanması

$$\mu_S^X(B) = \operatorname{tr} S\mathbf{M}(B), \; B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ – həqiqi $\mathbb{R}$ ədəd oxunun Borel altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}(B); B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$, – X operatorunun spektral ölçüsüdür, odur ki,

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathbf{M}(dx). \qquad (*)$$

Özü-özünə qoşma operatorlar və spektral ölçülər arasında (*) uyğunluğu qarşılıqlı birqiymətli olduğundan kvant M.-i alternativ surətdə v a h i d i n H-da o r t o q o n a l a y r ı l ı ş ı kimi də təyin oluna bilər, yəni $\{\mathbf{M}(B); B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ orta proyektorlarının elə ailəsi kimi ki, ədəd oxunun ixtiyari ölçülən $\{B_i\}$ bölgüsü üçün $\sum \mathbf{M}(B_i) = \mathbf{I}$ bərabərliyi ödənilir, burada $\mathbf{I}$ – vahidi operatordur, sıra isə güclü operator topologiyasında yığılır.

$\mathbf{M}_S\{X\}$ o r t a q i y m ə t i n d ə n başqa M.-nin d i s p e r s i y a s ı da mühüm rol oynayır:

$$\mathbf{D}_S\{X\} = \int (x - \mathbf{M}_S\{X\})^2 \mu_S^X(dx) = \operatorname{tr} S(X - \mathbf{M}_S\{X\}\mathbf{I})^2$$

düsturu ilə təyin olunan dispersiya S vəziyyətində X üçün alınan M.-lərin qeyri – müəyyənlik ölçüsünü təyin edir.

$X_1, \ldots, X_n$ M.-lərinin uyğun operatorları kommutasiya olunan $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ spektral ölçülərinə malik olarsa, $X_1, \ldots, X_n$-lər u y u ş a n M. adlanır. Bu halda $\mathbf{M}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \mathbf{M}_1(B_1) \times \ldots \times \mathbf{M}_n(B_n)$ münasibəti $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$-də elə M birgə spektral ölçüsünü təyin edir ki,

$$X_j = \int \dots \int x_j \, \mathbf{M}(dx_1 \dots dx_n), \quad j = 1, \dots, n;$$

burada $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

M.-in birgə ölçmə nəticələri $X_1, \dots, X_n$-lərin birgə ehtimal paylanması bu halda

$$\mu_S^{X_1, \dots, X_n}(B) = \operatorname{tr} S\,\mathbf{M}(B)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur; $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Uyuşmayan M.-lərə kvant mexanikasında dəqiq birgə ölçmə aparılması mümkün olmayan əlavə M.-lər kimi baxılır (bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti*).

M.-ə şərh olunmuş tərzdə baxış kvant mexanikasının bir çox məsələlərini əhatə etməyə kifayət etməsinə baxmayaraq, böyük çətinliklərin yaranmasına səbəb olur; məs., bucağın növü və ya fazanın «tsiklik» M.-ini təyin etmək istədikdə bu çətinliklər yaranır. Bu çətinlikləri aradan qaldırmaq məqsədilə daha ümumi – kvant ölçmə anlayışından istifadə olunur və bu halda vahidin ayrılışı yalnız ortoqonal deyil, ixtiyari ayrılış ola bilər.

Əd.: [1] Нейман Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., M., 1964; [2] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, M., 1980.

MÜŞAHİDƏLƏRİN DAVAMOLUNMA ÇOXLUĞU « множество продолжения наблюдений; set of continuation of observations » – bax, *Ardıcıl analiz.*

MÜŞAHİDƏLƏRİN DAYANDIRILMA ÇOXLUĞU « множество прекращения наблюдений; set of stopping of observations » – bax, *Ardıcıl analiz.*

MÜŞAHİDƏLƏRİN YENİDƏN İŞLƏNİLMƏSİ « наблюдений обработка; processing of observations » – müşahidələrin nəticələrini kompaktlaşdırmaq və statistik analiz aparmaq üçün ən yararlı şəklə gətirmək məqsədilə nəticələrin müxtəlif çevirmələrini aparmaq üçün qaydalardır.

Müşahidələrin analizində riyazi statistikanın metodlarından o hallarda istifadə olunur ki, bu müşahidələr müəyyən təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyası kimi interpretasiya oluna bilinsin, yəni araşdırılan hadisə və ya prosesin ehtimali modelini qurmaq mümkün olsun. Bu mənada «müşahidə» termini «təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası» terminin sinonimidir. Bəzən «müşahidə» terminindən təsadüfi kəmiyyət üçün də istifadə olunur və bu halda müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyət deyilir. Bir qayda olaraq, statistik nəticələr müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyalarına görə bilavasitə alınmır, bu nəticələr realizasiyaların məqsədəuyğun surətdə seçilmiş funksiyalarına görə alınır; bu funksiyalar statistikalar adlanır. Riyazi statistikada «statistika» termini ənənəvi olaraq, müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlər üzərində ixtiyari çevirmələr üçün istifadə olunur. Hər bir konkret halda M. y. i. məsələsinin özünün tələb etdiyi şərtlər əsasında çevirmə seçilir, məs., hipotezlərin yoxlanılması məsələsi və ya statistik qiymətləndirmə məsələsi. Müşahidələrin kompaktifikasiyası kafi statistikalardan istifadə olunması hesabına (əgər belə statistikalar mövcuddursa) aparılır ki, nəticə etibarilə yenidən işlənilməsi tələb olunan müşahidələrin sayı bir çox hallarda lazımlı informasiyanın itkisi olmadan olduqca azalır.

İlkin müşahidələrin çevirməsinin və ya artıq kafi statistikalarla ifadə olunmuş çevirmənin seçimi məqsədəuyğun xassələrə malik olan statistika almaq məqsədilə aparılır və bu da riyazi statistikanın əsas məsələlərindən biridir.

Misal. $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir; X_i – parametrləri $\mu_x = \mathbf{M}X_i$, $\sigma_x^2 = \mathbf{D}X_i$ ($|\mu_x| < \infty$, $\sigma_x^2 > 0$) olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir, Y_j isə parametrləri $\mu_y = \mathbf{M}Y_j$ və $\sigma_y^2 = \mathbf{D}Y_j$ ($|\mu_y| < \infty$, $\sigma_y^2 > 0$) olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir. μ_x, σ_x^2, μ_y, σ_y^2 parametrlərinin naməlum olduğu fərz olunur. Bu misalda alınmış məlumatları sadələşdirmək məqsədilə $n + m$ sayda $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ müşahidələrindən 4 – ölçülü

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \ \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \ \sum_{j=1}^{m} Y_j, \ \sum_{j=1}^{m} Y_j^2 \right)$$

vektoru götürülür ki, statistika minimal kafi statistikadır. Əgər $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_m$ müşahidələrinin yenidən işlənilməsi məsələsi naməlum μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2 parametrlərinin nöqtəvi statistik qiymətlərinin qurulmasıdırsa, onda T kafi statistikası terminlərilə ifadə olunan

$$\overline{X}_n = \overline{X}_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S_x^2 = S_x^2(T) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1} \overline{X}_n^2,$$

$$\overline{Y}_m = \overline{Y}_m(T) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

$$S_y^2 = S_y^2(T) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} Y_j^2 - \frac{m}{m-1} \overline{Y}_m^2,$$

statistikaları uyğun olaraq, μ_x, σ_x^2, μ_y, σ_y^2 parametrləri üçün ən yaxşı (kvadratik riskin minimumu mənasında) *meylsiz statistik qiymətlərdir.* Daha sonra, məs., $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ hipotezinin doğru olub-olmadığını yoxlamaq tələb olunur. İsbat etmək olar ki, H_0 hipotezini yoxlamaq üçün ən yaxşı statistik kriteri $F = S_x^2 / S_y^2$ statistikasına əsaslanır. H_0 hipotezi doğru olduqda, $H_1 : \mu_x = \mu_y$ hipotezinin yoxlanılması məsələsinə baxılır; bu məsələnin həlli

$$t = \frac{\sqrt{mn(n+m-2)}}{n+m} \cdot \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{\sqrt{(n-1)\,S_x^2 + (m-1)S_y^2}}$$

statistikasından istifadə edilməklə həyata keçirilir.

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*, *Statistik qiymətləndirmə.*

Əd.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., M., 1960; [2] Воинов В. Г., Никулин М. С., Несмещенные оценки и их применения, M., 1989.

MÜŞAYİƏTEDİCİ FUNKSİONAL « сопровождающий функционал; associated functional » – *qapalı təsadüfi çoxluğun* paylanma xarakteristikalarından biridir. Əgər A topoloji S fəzasında qapalı təsadüfi çoxluqdursa, onda T_A M. f.-ı S-də hər bir K kompaktına $T_A(K) = \mathbf{P}\{A \cap K \neq \varnothing\}$ ədədini qarşı qoyur. M. f. təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsində təsadüfi kəmiyyətlər üçün paylanma funksiyasının oynadığı rolu

ifadə edir; o, S-in bütün altçoxluqlarının çoxluğuna *Şoke tutumu* qədər davam oluna bilinir. T_A-nın kompaktlarda verilməsi $\mathbf{P}\{A \in \mathfrak{P}\}$ şəklində ehtimalları tamamilə təyin edir, yəni A təsadüfi çoxluğunun paylanmasını təyin edir, burada $\mathfrak{P}$ – qapalı çoxluqlar fəzasında ixtiyari Borel ailəsidir. Bəzi statistik məsələlərdə (bax, *Statistika*(sı) təsadüfi çoxluqlar) M. f. haqqında tam informasiya olmur və yalnız təsadüfi çoxluğun *nöqtəvi paylanma qanunu* məlum olur.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., M., 1978.

MÜŞAYİƏTEDİCİ SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « сопровождающее безгранично делимое распределение; accompanying infinitely divisible distribution » – ixtiyari ehtimal paylanması F-ə

$$e(F * E_a) = e^{-1}\left[E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F * E_a)^{*k}}{k!} \right]$$

qaydası ilə uyğun götürülən ehtimal *paylanmasıdır*, burada E_a, – $a \in \mathbb{R}^1$ nöqtəsində cırlaşmış ehtimal paylanmasıdır. Ehtimal paylanmalarının kompozisiyası, $L_n = F_1 * \ldots * F_n * E_{A_n}$, $A_n \in \mathbb{R}^1$ üçün M. s. b. p.

$$R_n = e\left(\sum_{j=1}^{n} F_j * E_{a_{nj}} \right) = e(F_1 * E_{a_{n1}}) * \ldots * e(F_n * E_{a_{nn}})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsinə daxil olunmuş M. s. b. p.-nın daxil edilməsi səbəbi, onun elə əsas xassəsidir ki, a_{nj} sabitləri və A_n-i münasib seçdikdə $\{L_n\}, \{R_n\}$ çoxluqlarından birinin nisbi kompaktlığı digərinin nisbi kompaktlığını doğurur. M. s. b. p.-lar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremlərində istifadə olunan analitik aparatın mühüm hissəsidir (bax, [1]).

M. s. b. p. anlayışı $\mathbb{R}^1$-də paylanmalar halından Abel qrupları və semi – qruplarda bir çox hallar üçün təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984; [3] Parthasarathy K., Probability measure on metric spaces, N. Y., 1967.

MÜTLƏQ KƏSİLMƏZ PAYLANMA « абсолютно непрерывное распределение; absolutely continuous distribution » – paylanma sıxlığına malik ehtimal *paylanmasıdır*. $\mathbf{P}(A)$, – $\mathbb{R}^n$-də ehtimal paylanması, yəni $\mathbb{R}^n$-in Borel altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə təyin olunmuş ehtimal ölçüsü olsun. Lebeq ölçüsü sıfır olan ixtiyari E Borel çoxluğu üçün $\mathbf{P}(E) = 0$ olarsa, $\mathbf{P}(A)$ paylanması mütləq kəsilməz (Lebeq ölçüsünə nəzərən) paylanma adlanır. $\mathbf{P}(A)$ paylanmasının mütləq kəsilməzliyi

$$\mathbf{P}(A) = \int \ldots \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

bərabərliyini ödəyən mənfi olmayan inteqrallanan Borel funksiyası $-f(x_1, \ldots, x_n)$-in varlığı ilə eynigüclüdür. $f(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyası $\mathbf{P}(A)$ paylanmasının n – ölçülü sıxlıq funksiyası adlanır. M. k. p.-lar sinfinə ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqində mühüm yer tutan paylanmalar – normal paylanma, müntəzəm paylanma, Koşi paylanması, eksponensial paylanma və s. kimi paylanmalar aiddir.

Mütləq kəsilməzlik anlayışı daha ümumi şəkildə aşağıdakı kimi ifadə olunur: $(\Omega, \mathscr{F})$ – ölçülən fəza, $\mathbf{P}$ və μ – uyğun olaraq $(\Omega, \mathscr{F})$-də verilmiş ehtimal paylanması və σ – sonlu ölçü olsun. $\mu(A) = 0$ olduqda $\mathbf{P}(A) = 0$ olarsa, $\mathbf{P}$ paylanması μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz paylanma adlanır. M. k. p.-nın μ ölçüsünə nəzərən ehtimal sıxlığı f vardır (Radon – Nikodim teoremi):

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f\, d\mu .$$

Paylanmanın mütləq kəsilməzlik anlayışı paylanmalar ailəsinin dominarlıq anlayışı ilə sıx əlaqədardır: əgər $(\Omega, \mathscr{F})$-də elə σ – sonlu ν ölçüsü olarsa ki, $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülən fəzasında $\mathscr{P}$ ehtimal paylanmalar ailəsindən olan hər bir μ paylanması ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz olsun, onda $\mathscr{P}$ ehtimal paylanmalar ailəsi $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmalarının dominarlanan ailəsi adlanır. Paylanmalar ailəsinin dominarlanan olması fərziyyəsi riyazi statistikanın bəzi teoremlərində mühüm məna daşıyır.

Bax, *Mütləq kəsilməzliyi*, *ölçülərin* .

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

* **MÜTLƏQ KƏSİLMƏZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « абсолютно непрерывная случайная величина; absolute continuous random variable »**. Ω – elementar hadisələr fəzası, $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ bu fəzada təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət,

$$F(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

isə $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan mənfi olmayan $f(x)$ funksiyası varsa, $\xi(\omega)$ mütləq kəsilməz təsadüfi kəmiyyət adlanır; $f(x)$-ə $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası deyilir. (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqral Riman mənada, ümumi halda isə Lebeq mənada inteqral adlanır.

Bax, *Təsadüfi kəmiyyət*.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980.

MÜTLƏQ KƏSİLMƏZLİK « абсолютная непрерывность; absolute continuity » – inteqralın M. k.-yi qeyri – müəyyən inteqralın (Lebeq inteqralının) bir xassəsidir. f funksiyası $\mathscr{E}$ çoxluğunda μ – inteqrallanan olsun. μ – ölçülən $E \in \mathscr{E}$ altçoxluğunda f-in inteqralı μ ölçüsünə görə mütləq

kəsilməz çoxluq funksiyasıdır; yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ vardır ki, $\mu(E) < \delta$ şərtini ödəyən ixtiyari E çoxluğu üçün $\left| \int_E f\, d\mu \right| < \varepsilon$ münasibəti ödənilir. Ümumiyyətlə, çoxluğun sonlu additiv funksiyası μ-yə görə inteqral istər skalyar, istər vektor f və ya μ-lər üçün həmişə mütləq kəsilməz funksiyadır.

MÜTLƏQ KƏSİLMƏZLİYİ, ÖLÇÜLƏRİN « абсолютная непрерывность мер; absolute continuity of measures » – ümumi *ölçü* nəzəriyyəsinin ən mühüm anlayışlarından biridir. E – əsas bazis fəzası, S, – E-nin altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı σ – halqa, μ və λ isə dəyişkənişarəli, S-də təyin olunmuş iki ixtiyari ölçü (yəni yük) olsun. Əgər ixtiyari $A \in S$ üçün $|\lambda|(A) = 0$ olduqda $\mu(A) = 0$ olarsa, μ ölçüsü λ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdür, deyilir. ($|\lambda|$ – dəyişkənişarəli λ ölçüsünün tam variasiyasıdır). Mütləq kəsilməzlik anlayışı əksər hallarda adi ölçülər üçün və həm də μ dəyişkənişarəli ölçü, λ isə adi ölçü olduğu hallar üçün baxılır. μ ölçüsünün λ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü olduğu $\mu << \lambda$ simvolik yazılışı ilə ifadə olunur. Aşağıdakı münasibətlər bir-birilə ekvivalentdir:

1) $\mu << \lambda$;

2) $\mu^+ << \lambda$ və $\mu^- << \lambda$, burada μ^+ və μ^-, – μ yükünün uyğun olaraq yuxarı və aşağı variasiyalarıdır.

3) $|\mu| << |\lambda|$.

$\mu << \lambda$ və dəyişkənişarəli μ ölçüsü sonlu olsun. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $|\lambda|(A) < \delta$ şərtini ödəyən ixtiyari $A \in \mathbf{S}$ çoxluğu üçün $|\mu|(A) < \varepsilon$ münasibəti ödənilir. Qeyd olunan xassə «dəyişkənişarəli ölçülərin mütləq kəsilməzliyi» terminin yaranmasını müəyyən mənada aydınlaşdırır. S σ – halqasında verilmiş bütün ölçülər sinfi $M(E, S)$-də $\mu << \lambda$ münasibəti qayda münasibətidir, yəni refleksiv və tranzitiv münasibətdir. $\mu << \lambda$ və $\lambda << \mu$ münasibətlərini ödəyən μ və λ ekvivalent ölçülər adlanır. Ölçülərin ekvivalentliyi bəzən $\mu \equiv \lambda$ simvolu ilə işarə olunur. $\mu \equiv \lambda$ münasibəti $M(E, S)$ sinfində müəyyən ekvivalentlik münasibətini ifadə edir və deməli, bu münasibət $M(E, S)$ sinfinin boş olmayan, kəsişməyən, altsiniflərinə bölgüsünü təyin edir. Bu altsiniflər əksər hallarda, dəyişkənişarəli ölçülərin spektral tipləri adlanır.

$\mu << \lambda$ münasibəti $M(E, S)$ sinfində təbii olaraq ölçülərin bütün spektral tipləri çoxluğunda qayda münasibətini doğurur.

$(\mu_i,\ i \in J)$, – S σ – cəbrində təyin olunmuş σ – sonlu ölçülərdən ibarət ixtiyari hesabi ailə olsun. Onda bu S σ – cəbrində təyin olunmuş elə adi σ – sonlu λ ölçüsü hökmən vardır ki, bütün $(\mu_i)_{i \in I}$ ölçüləri λ-ya nəzərən mütləq kəsilməz ölçülərdir. Dəyişkənişarəli σ – sonlu ölçülərdən ibarət qeyri – hesabi $(\mu_i)_{i \in I}$ ailəsi üçün analoji hökm, ümumiyyətlə, doğru olmayacaqdır.

$(\mu_i)_{i \in I}$, – S σ – halqasında verilmiş ölçülərin ixtiyari ailəsi, λ, – σ – cəbrdə verilmiş hər hansı bir ölçü olsun. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün həmişə elə $\delta > 0$ ədədi tapılarsa ki, $|\lambda|(A) < \delta$ münasibətini ödəyən ixtiyari $A \in S$ çoxluğu və ixtiyari $i \in J$ indeksi üçün $|\mu_i|(A) < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda $(\mu_i)_{i \in I}$ ailəsi λ-ya nəzərən müntəzəm mütləq kəsilməz ailə adlanır (bax, [2], [3]; Vitali – Han – Saks teoremi). Bu teoremə görə, məs., belə nəticə alınır: əgər $(\mu_n)_{n \in N}$ S σ – cəbrində sonlu yüklərin elə ardıcıllığıdırsa ki, hər bir $A \in S$ çoxluğu üçün

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

limiti mövcuddur, onda çoxluqlar funksiyası μ S-də hesabi-additivdir (başqa sözlə, μ, – S-də yükdür).

Dəyişkənişarəli ölçülərin mütləq kəsilməzlik anlayışı ilə bağlı ən mühüm faktorlardan biri *Radon – Nikodim teoremidir*. Bu teoremin ümumiləşmələri, gücləndirilmiş variantları vardır. Ölçülərin M. k. anlayışı $\mu << \lambda$ λ verilmiş S σ – cəbrində adi ölçü, μ isə bu S σ – cəbrində təyin olunmuş vetor (vektorqiymətli) ölçü olduğu və öz qiymətlərini hər hansı topoloji vektor fəzada aldığı halda dolğun məna kəsb edir (bax, [3]).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ. М., 1953; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч.1, М., 1962.

* **MÜTLƏQ MOMENT « абсолютный момент; absolute moment »** – *təsadüfi kəmiyyətin* modulunun *momentinə* bərabər olan ədədi xarakteristikadır. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ bu fəzada verilmiş təsadüfi kəmiyyət olsun. Tam və mənfi olmayan qiymətlər alan r üçün $\mathbf{m}_r = \mathbf{M}|\xi|^r < \infty$ şərti ödənilərsə, $\mathbf{M}|\xi|^r$-ə ξ təsadüfi kəmiyyətinin r tərtibli mütləq momenti deyilir. $\mathbf{M}|\xi|$ başlanğıc mütləq moment, $\mathbf{M}|\xi - M\xi|$ mərkəzləşmiş mütləq moment adlanır. r – tərtib M. m. tam olmayan $r > 0$ qiymətləri üçün də təyin olunur. $0 < k < r$ olduqda $|x|^k \le |x|^r + 1$ bərabərsizliyi ödənildiyindən, r – tərtib M. m.-in varlığından $k < r$ şərtini ödəyən k – tərtib bütün M. m.-lərin varlığı alınır.

Təsadüfi kəmiyyətin r – tərtib momenti olmaya da bilər, M. m.-lər isə həmişə təyin olunur və M. m. sonsuzluq qiymətini də ala bilər. M. m.-lər üçün aşağıdakı xassələr ödənilir:

1. əgər $\mathbf{M}|\xi|^r < \infty$ olarsa, $k \le r$ qiymətlərində $\mathbf{M}|\xi|^r$ sonludur və $k \le r$ olduqda $\mathbf{M}|\xi|^k$ vardır və sonludur;
2. $\log \mathbf{M}|\xi|^r$, – r-in funksiyasıdır və qabarıq funksiyadır;
3. $[\mathbf{M}|\xi|^r]^{\frac{1}{r}}$ – r-in funksiyasıdır və azalmayan funksiyadır;
4. $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ olarsa, $\mathbf{M}|\xi_n| \xrightarrow{r} \mathbf{M}|\xi|^r$.

M. m. təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikası olub, müxtəlif qiymətləndirmə və bərabərsizliklərdə tez-tez təsadüf olunur (bax, məs., *Berri – Esseen bərabərsizliyi*, *Çebışev bərabərsizliyi*). Mütləq momentlər arasında aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

1. əgər $0 < s < t$ olarsa, $\left(\mathbf{M}\left|\xi\right|^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\mathbf{M}\left|\xi\right|^{t}\right)^{\frac{1}{t}}$ (*Lyapunov bərabərsizliyi*);

2. $\mathbf{M}\left|\xi\right| \le \left(\mathbf{M}\left|\xi\right|^{2}\right)^{1/2} \le \ldots \le \left(\mathbf{M}\left|\xi\right|^{n}\right)^{1/n}$;

3. $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduqda

$\mathbf{M}\left|\xi\right|^{p} < \infty$, $\mathbf{M}\left|\eta\right|^{q} < \infty$ olarsa, $\mathbf{M}\left|\xi\eta\right| < \infty$ və

$\mathbf{M}\left|\xi\eta\right| \le \left(\mathbf{M}\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbf{M}\left|\eta\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$ (*Hölder bərabərsizliyi*);

4. $\mathbf{M}\xi^{2} < \infty$, $\mathbf{M}\eta^{2} < \infty$ olarsa,

$\mathbf{M}\left|\xi\eta\right| < \infty$ və

$\left(\mathbf{M}\left|\xi\,\eta\right|\right)^{2} \le \mathbf{M}\,\xi^{2}\ \mathbf{M}\,\eta^{2}$ (*Koşi – Bunyakovski bərabərsizliyi*);

5. $\mathbf{M}\left|\xi\right|^{p} < \infty$, $\mathbf{M}\left|\eta\right|^{q} < \infty$, $1 \le p < \infty$ olarsa,

$\mathbf{M}\left|\xi+\eta\right|^{p} < \infty$ və

$\left(\mathbf{M}\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\mathbf{M}\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbf{M}\left|\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ (*Minkovski bərabərsizliyi*).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

MÜTLƏQ MOMENT r TƏRTİB « абсолютный момент r-го порядка; absolute moment of order r » – bax, *Mütləq moment.*

MÜTLƏQ PAYLANMA(sı) Markov zənciri və ya Markov prosesinin **« абсолютное распределение** цепи Маркова или марковского процесса; **absolute distribution** of a Markov chain or process **»** – zaman parametri t, $t \in T$ qeyd olunduqda $\zeta(t)$ təsadüfi vəziyyətinin şərtsiz *paylanması* $\mu(t)$ -dir:

$$\mu(t, S) = \mathbf{P}\{\zeta(t) \in S\},\ S \in \mathscr{B};$$

$(\mathscr{E}, \mathscr{B})$, – ζ prosesinin faza fəzasıdır. $t \ge t_0$ olduqda M. p.-nın varlığı üçün başlanğıc paylanması $\mu(t_0)$ verilməlidir; bu halda

$$\mu(t,\ S) = \int_{\mathscr{E}} \mu(t_0, dx)\, p(t_0, x; t, S) \qquad (*)$$

olur, burada $p(s, x; t, S)$ – zəncir və ya ζ prosesinin *keçid funksiyasıdır.* Zəncir və ya proses bircins olarsa, onda $p(s, x; s+t, S) = p(t, x, S)$ bərabərliyi doğrudur (burada $t_0 = 0$ fərz olunur) və bu halda (*) düsturu

$$\mu(t,\ S) = \int_{\mathscr{E}} \mu\,(0, dx)\ p(t, x, S),\ t \ge 0,\ S \in \mathscr{B}$$

şəklində ifadə olunur.

t -dən asılı olmayan mütləq paylanma *stasionar paylanma* adlanır.

MÜTLƏQ PSEVDOMOMENT « абсолютный псевдомомент; absolute pseudomoment » – bax, *Psevdomoment.*

MÜTLƏQ ŞKALA « абсолютная шкала; absolute scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi.*

MÜTLƏQ TEZLİK « абсолютная частота; absolute freqency » – bax, *Histoqram.*

NADARAYA – VATSON STATİSTİK QİYMƏTİ « Надарая – Ватсона оценка; Nadaraya – Watson estimator » – bax, *Qeyri – parametrik reqression analiz.*

NAT « нат; nat » – informasiya miqdarının tərifində natural loqarifmlər istifadə olunduqda, *informasiya miqdarının* natural vahididir («N.» ingiliscədən «natural digit»-in qısaldılmış şəklidir). Keçid düsturu

$$1N. = 1/\ln 2\ bit\ \approx 1{,}44\, bit$$

münasibətilə təyin olunur.

NATAMAM BLOK PLANI « неполный блочный план; incomplete block design » – bax, *Blok plan*, *Dispersion analiz.*

NATAMAM GİRİŞLİ XİDMƏT SİSTEMİ « неполнодоступная система обслуживания; partially available queueing system » – bax, *Xidmət sistemi* imitinalarlı.

NATAMAM LATIN KVADRATI « неполный / частичный латинский квадрат; partial Latin square » – bax, *Latın kvadratı.*

NATURAL ADDİTİV FUNKSİONAL « натуральный аддитивный функционал; natural additive functional » – bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

NATURAL PARAMETR « натуральный параметр; natural parameter » – bax, *Kanonik və natural parametrizasiya.*

NATURAL PARAMETRİZASİYA « натуральная параметризация; natural parametrization » – bax, *Kanonik və natural parametrizasiya.*

NATURAL PSEVDOMOMENT « натуральный псевдомомент; natural pseudomoment » – bax, *Psevdomoment.*

NATURAL VAHİD (i) informasiya miqdarının, nat « **натуральная единица** количества информации, нат; **nat** » – bax, *Entropiya*, *Bit.*

NAVYE – STOKS STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİYİ « Навье – Стокса стохастическое дифференциальное уравнение; Navier – Stokes stochastic differential equation » –

$$du(t,x) + (u(t,x), \nabla)\, u(t,x)dt = \\ = -\nabla p(t,x)dt + \upsilon\, \Delta u(t,x)dt + dw(t), \qquad (1)$$

$$(\nabla,\ u(t,x)) = 0 \qquad (2)$$

şəklində tənliklər sistemidir, burada $w(t)$ – hər hansı vektor semimartinqaldır, (1) tənliyi isə stoxastik differensial hesabı mənasında anlaşılır. $w(t)$ – qiymətləri L^2-dən olan Viner prosesi olduğu halda, (1) – (2) sistemi üçün ilk başlanğıc – sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi problemi araşdırılmışdır (bax, [3]).

Əd.: [1] Новиков Е. А., «Ж. эксп. и теор. физики», 1964, т. 47, № 5, с. 1919–26; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [3] Вишик М. И., Фурсиков А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980; [4] Viot M., Solution faibles d' équations aux dérivées partielles stochastiques non-linéaires, [P., 1976].

NAYKVİST TEZLİYİ « Найквиста частота; Nyquist frequency » – bax, *Diskretizasiya problemi.*

NELSON MEYDANI « Нельсона поле; Nelson field » – bax, *Markov təsadüfi meydanı.*

NEYMAN ERQODİK TEOREMİ « Неймана эргодическая теорема; von Neumann ergodic theorem » – tarixən ilk statistik *erqodik teoremdir*; [1]-də J. Neymann tərəfindən verilmişdir. $X_0, X_1, \ldots$ – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş geniş mənada stasionar təsadüfi ardıcıllıq; H_X, – $\sum_{i=1}^{m} a_i X_{k_i}$ ($1 \le m < \infty$, a_i – konstantlardır) şəklində təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunun qapayıcısı olan, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-də altfəza; U, – H_X-də $UX_i = X_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$, $J_X = \{\gamma : \gamma \in H_X,\ U\gamma = \gamma\}$ şərtlərilə təyin olunan izometrik xətti operator; $\hat{\mathbf{M}}(X_0 \mid J_X)$, – X_0 təsadüfi kəmiyyətinin J_X altfəzasına ortoqonal proyeksiyası olsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i - \hat{\mathbf{M}}(X_0 \mid J_X) \right|^2 = 0 .$$

Geniş mənada stasionar $X(t)$, $t \ge 0$ təsadüfi prosesləri üçün də analoji müddəa doğrudur, bu halda $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ cəmi əvəzinə $\frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt$ təsadüfi kəmiyyətlərinə $T \to \infty$ olduqda baxılır. Bu teorem sonradan qruplarda və semiqruplarda bircins təsadüfi meydanlara və Banax fəzalarında operatorların müxtəlif semi – qruplarına ümumiləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Neumann J. von, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1932, v. 18, p. 70–82.

NEYMAN $C(\alpha)$ – KRİTERİSİ « Неймана $C(\alpha)$ – критерий; Neyman $C(\alpha)$ – test » – bax, *Statistik kriteri* $C(\alpha)$.

NEYMAN METODU, ETİBARLI İNTERVALLARIN « Неймана метод доверительных интервалов; Neyman's method of confidence intervals » – ehtimal qanunlarının naməlum parametrlərinin müşahidələr nəticələri üzrə *interval statistik qiymətlərinin* alınması üçün *etibarlı qiymətləndirmə* metodlarından biridir. Yu. Neyman tərəfindən təklif olunmuş və inkişaf etdirilmişdir (bax, [1], [2]). Bu metodun mahiyyəti aşağıdakı mülahizələrlə ifadə olunur. $X_1, ..., X_n$ – çoxölçülü paylanma funksiyası $F(x, \theta)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ parametrindən asılı olan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. θ parametrinin nöqtəvi statistik qiyməti kimi paylanma funksiyası $G(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$ olan, $T = T(X_1, ..., X_n)$ statistikasından istifadə olunduğu fərz olunur. Onda $0{,}5 < P < 1$ intervalından olan ixtiyari P ədədi üçün θ dəyişəninə görə iki tənlikdən ibarət

$$G(T, \theta) = \begin{cases} P, \\ 1 - P \end{cases} \qquad (*)$$

sistemini təyin etmək olar. $F(x, \theta)$ funksiyasının praktikada təsadüf edilən, demək olar ki, bütün maraqlı hallarında ödənilən müəyyən requlyarlıq şərtlərində, (*) sisteminin elə $\underline{\theta} = \underline{\theta}(T)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(T)$, $\underline{\theta}, \overline{\theta} \in \Theta$ yeganə həlli vardır ki, $\mathbf{P}\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} | \theta\} \geq 2P - 1$.

$(\underline{\theta}, \overline{\theta}) \in \Theta$ çoxluğu naməlum θ parametri üçün $2P - 1$ ehtimallı etibarlı interval adlanır. $\underline{\theta}$ və $\overline{\theta}$ statistikaları uyğun olaraq, seçilmiş etibarlılıq əmsalı P-yə uyğun aşağı və yuxarı etibarlı sərhədlər adlanır. $p = \inf_{\theta \in \Theta} P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} | \theta\}$ ədədi $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ etibarlı intervalının etibarlıq əmsalı adlanır. Beləliklə, E. i. N. m. etibarlılıq əmsalı $p \geq 2P - 1$ olan interval statistik qiymətlərinin alınmasına gətirir.

E. i. N. m. Beyes metodundan və Fişer fidusial yanaşmasına əsaslanan metoddan olduqca fərqlənir. E. i. N. m.-da $F(x, \theta)$ paylanma funksiyasının naməlum θ parametri sabit kəmiyyət kimi anlaşılır, $(\underline{\theta}(T), \overline{\theta}(T))$ etibarlı intervalı isə eksperimentə qədər qurulur ki, bu zaman T statistikasının qiyməti də hesablanılır. Deməli, bu metoda əsasən, $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$ bərabərsizliklərinin eyni zamanda ödənilməsi ehtimalı $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ etibarlı intervalının θ parametrinin naməlum əsl qiymətini «daxilinə almasının» aprior ehtimalıdır. Aydındır ki, əgər θ təsadüfi kəmiyyət olarsa, əslinə qalarsa, Neyman etibarlılıq metodu öz qüvvəsində qalır, belə ki, E. i. N. m.-da interval statistik qiyməti eksperiment aparılana qədər qurulur, deməli, bu statistik qiymət parametrin aprior paylanmasından asılı deyildir. E. i. N. m. θ parametri haqqında aprior informasiyadan asılı olmaması xüsusiyyətinə görə əlverişli olub, Beyes və fidusial yanaşmalardan fərqlidir, Fişer metodu ilə müqayisədə isə məntiqi cəhətdən qüsursuzdur. E. i. N. m., ümumi halda, naməlum parametr üçün etibarlı intervalların tam bir sisteminə gətirir və bununla əlaqədar olaraq, meylsizlik, selektivlik və ya oxşarlıq və s. xassələrə malik optimal interval statistik qiymətinin qurulması məsələsi yaranır, bu məsələ isə öz həllini statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsi çərçivəsində tapır.

Əd.: [1] Neyman J., «Ann. Math. Stat.» , 1935, v. 6, p. 111–16; [2] Neyman J., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.», 1937, v. 236, p. 333–80; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, № 1, с. 187–92; [5] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

NEYMAN STRUKTURU « Неймана структура; Neyman structure » – kafi statistikadan asılı olmayan *statistika* ilə təyin olunan strukturdur. N. s. anlayışı Yu. Neyman tərəfindən (J. Neyman, bax, [1]) statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində *oxşar kriterilərin* qurulması məsələsilə əlaqədar daxil olunmuşdur və «N. s.» termini statistik kriterinin strukturuna görə o halda istifadə olunur ki, onun kritik funksiyası N. s.-na malik olsun. Seçimi $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi kəmiyyətinin seçimi qiymətləri üzrə (realizasiyaları üzrə) $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ mürəkkəb hipotezini yoxlamaq tələb olunur, belə ki, $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi üçün paylanması $\{\mathbf{P}_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}$ ailəsindən olan T kafi statistikasının varlığı fərz olunur. Bu halda H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün α səddli ixtiyari statistik kriteri N. s.-na malikdir, bu şərtlə ki, onun kritik fəzası φ

$$M\{\varphi(X) | T = t\} = \alpha \qquad (1)$$

bərabərliyini sanki yəqin $\mathbf{P}_\theta^T$, $\theta \in \Theta_0$ ölçüsünə görə ödəmiş olsun. Aydındır ki, əgər statistik kriterinin N. s. varsa, onda bu kriteri $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ ailəsinə nəzərən oxşar kriteridir, çünki bütün $\theta \in \Theta_0$ qiymətlərində

$$M_\theta\{\varphi(X)\} = M_\theta\{M\{\varphi(X) | T = t\}\} = \alpha.$$

(1) şərtinin ödənilməsi, H_0 mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması məsələsini mahiyyətcə T kafi statistikasının qeyd olunmuş hər bir t qiymətində, H_0 sadə hipotezinin yoxlanılmasına gətirir.

Misal. Parametrləri uyğun olaraq, naməlum λ_1 və λ_2 olan Puasson qanununa tabe, asılı olmayan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətləri araşdırılır və $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ hipotezi yoxlanılır. X_1 və X_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan, $T = X_1 + X_2$ statistikası $\lambda_1 + \lambda_2$ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır və X_1, X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin $\{T = t\}$ şərtinə nəzərən şərti paylanmaları uyğun olaraq t, $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ və t, $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ parametrlərli binomial paylanmalar olur, yəni

$$\mathbf{P}\{X_i = k \mid T = t\} =$$

$$= C_t^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{t-k}, \quad k = 0, 1, ..., t. \qquad (2)$$

H_0 hipotezi doğru olarsa, T statistikası naməlum ümumi $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ qiyməti üçün kafi statistikadır, (2)-dən isə aydındır ki,

əgər H_0 hipotezi doğrudursa, onda kafi statistikanın $T = t$ qeyd olunmuş qiymətində X_1 təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması t və $1/2$ parametrlərli binomial paylanmadır, yəni H_0 hipotezində

$$\mathbf{P}\{X_1 = k \mid T = t\} = C_t^k (1/2)^t, \quad k = 0, 1, \ldots, t.$$

Beləliklə, bu məsələdə H_0 mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması məsələsi sadə H_0 hipotezinin yoxlanılması məsələsinə gətirildi ki, bu halda X_1 təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması ($X_1 + X_2 = t$ qeyd olunduğu halda) t və $1/2$ parametrlərli binomial paylanmadır. H_0^t hipotezinin yoxlanılması üçün, məs., *işarələr kriterisindən* istifadə etmək olar.

N. s. anlayışı mürəkkəb statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində böyük əhəmiyyətə malikdir, belə ki, məhz N. s.-lu kriterilər arasında əksər hallarda ən *güclü kriteri* olur. E. Leman (E. Lehmann) və H. Şeffe (H. Scheffé) isbat etmişlər ki, $H_0 : \theta \in \Theta_0$ mürəkkəb hipotezinin yoxlanılması üçün statistik kriteri T kafi statistikasına nəzərən, yalnız və yalnız, o halda N. s.-lu olur ki, $\{\mathbf{P}_\theta^T,\ \theta \in \Theta_0\}$ T statistikası ilə doğurulmuş statistika məhdud tam ailə olsun. N. s. anlayışı əsasında oxşar kriterilərin qurulması üçün ümumi metodlar işlənilmişdir. Bax, *Tam ailəsi*, *paylanmaların*, *Oxşar kriteri.*

Əd.: [1] Н е й м а н Д ж., Текущие задачи математической статистики, пер. с англ., Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954, М., 1961; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Л и н н и к Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

NEYMAN – PİRSON LEMMASI « Неймана – Пирсона лемма; Neyman – Pearson lemma » – sadə H_1 alternativ hipotezinə qarşı sadə H_0 hipotezinin statistik yoxlanılması məsələsində *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinin* verilmiş *mühümlük ölçüsü* eyni olan bütün statistik kriterilər arasında *ən güclü kriteri* olduğunu hökm edən lemmadır.

N. – P. l. J. Neyman və E. Pirson tərəfindən [1]-də isbat olunmuşdur. N. – P. l. bəzən r i y a z i s t a t i s t i k a n ı n f u n d a m e n t a l l e m m a s ı kimi adlandırılır. Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

Əd.: [1] N e y m a n J., P e a r s o n E., «Phil. Trans. Roy. Soc. London», Ser. A, 1933, v. 231, p. 289–337; [2] Л е м а н Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

NEYMAN – ULAM SXEMİ « Неймана – Улама схема; Neumann – Ulam scheme » – bax, *Xətti tənlik*; M o n t e – K a r l o m e t o d u i l ə h ə l l.

NƏSİLLƏR METODU « поколений метод; method of generations » – bax, *Multiekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması.*

NƏZARƏT / KONTROL KARTI « контрольная карта; control chart » – bax, *Statistik nəzarət / keyfiyyətə statistik nəzarət.*

NƏZARƏT OLUNAN DƏYİŞƏNLƏR (i) r e q r e s s i o n e k s p e r i m e n t i n **« контролируемые переменные** р е г р е с с и о н н о г о э к с п е р и м е н т а; **controlled variables / factors in design** o f a r e g r e s s i o n e x p e r i m e n t **»** – *reqressiya* funksiyasının elə arqumentləridir ki, bunların qiymətləri dəqiqliklə məlumdur (*konflyuent analizin* əksinə olaraq).

NƏZARƏT / KONTROL PLANI « контроля план; inspection / control plan » – məmulatların nəzarət olunan $\mathfrak{D}$ partiyasından (obyektlər çoxluğundan) təsnifedici əlaməti, nəzarəti dayandırma qaydasını və qərar qəbuletməni, nəzarət üçün məmulatların (obyektlərin) seçilməsi üsulunu təyin edən qaydalar sistemidir. Qaytarmamaq şərtilə təsadüfi seçmə geniş istifadə olunur (bax, *Seçim*, *Seçimi metod*). Alternativ əlamət üzrə nəzarətdə məmulatlar qüsursuz və qüsurlu kimi təsniflənir. Keyfiyyət əlamətinə görə məmulatlar (obyektlər) m sayda $(m > 2)$ mümkün siniflərdən birinə aid edilir. Məmulatların təsnifi dolayı əlamətlər üzrə aparılarsa, onda səhv qərarlar da verilə bilinir. Məs., qüsurlu məmulat səhvən qüsursuz kimi hesab oluna bilinər. Kəmiyyət əlamətinə görə nəzarətdə nəzarət edilən məmulatların həqiqi qiymətlər alan parametrləri ölçülür.

B i r p i l l ə l i p l a n, yəni $\mathfrak{D}$ çoxluğunun alternativ əlamətə görə nəzarət planı qaytarmamaq şərtilə n həcmli seçimin həcminin (n -in) verilməsi ilə və qəbuletmə ədədi c ilə xarakterizə olunur. Əgər seçimdəki qüsurlu məmulatların sayı d q ə b u l e t m ə ə d ə d i c-dən böyük olmazsa, onda $\mathfrak{D}$ partiyası qəbul edilir, əgər $d > c$ olarsa, $\mathfrak{D}$ qəbul olunmur. Sonuncu halda məmulatın növündən asılı olaraq, partiyanın qüsurlu olması haqqında qərar – ya partiyanın seçimdə olmayan bütün məmulatlarının yoxlanılması və ya məhsulun növünün aşağı elan edilməsi kimi anlaşılır. Qəbul edilmiş dövlət standartlarında birpilləli planlarla yanaşı ikipilləli, çoxpilləli, ardıcıl planlardan da istifadə olunur.

İ k i p i l l ə l i p l a n d a birinci və ikinci seçimlərin həcmləri – n_1 və n_2, qəbuletmə ədədləri c_1 və c_2, qüsurlu məmulatlar sayı r_1 və r_2 verilir ($r_1 > c_1 + 1$, $r_2 = c_2 + 1$). Əgər birinci seçimdə qüsurlu məmulatların sayı $d_1 \le c_1$ şərtini ödəyərsə, onda $\mathfrak{D}$ qəbul edilir, əgər $d_1 \ge r_1$ olarsa, onda $\mathfrak{D}$ qəbul olunmur, qüsurlu hesab edilir. Əgər $c_1 < d_1 < r_1$ olarsa, ikinci seçim götürülür. Əgər d_2 ikinci seçimdə qüsurlu məmulatların sayıdırsa və $d_1 + d_2 \le c_2$ olarsa, onda $\mathfrak{D}$ qəbul olunur, əgər $d_1 + d_2 \ge r_2$ olarsa, $\mathfrak{D}$ qəbul edilmir.

N. p.-nın bir çox göstəricilərini onun *operativ xarakteristikası* əsasında hesablamaq olar.

Məmulatların kəsilməz axınının (partiyalarla birləşməyən) nəzarəti üçün N. p.-nın digər tiplərindən istifadə olunur.

Əd.: [1] Б е л я е в Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.

NƏZƏRİ – EHTİMALİ XASSƏ « теоретико – вероятностное свойство; theoretic – probability property » – yalnız və yalnız *paylanmalar* vasitəsilə ifadə olunan xassəyə deyilir. $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin N. – e. x.-ləri elə xassələrdir ki, bu xassələr onun paylanma funksiyası F_ξ ilə ifadə oluna bilinsin.

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, М., 1962.

NƏZƏRİ KORRELOQRAM « теоретическая коррелограмма; theoretical correlogram » – bax, *Korreloqram.*

NİSBİ BİKOMPAKT ÇOXLUQ « относительно бикомпактное множество; relatively bicompact set » – bax, *Bikompakt.*

NİSBİ EFFEKTİVLİK(yi) kriterinin **« относительная эффективность** критерия; **relative efficiency** of a test **»** – bax, *Asimptotik effektivlik*(yi) kriterinin.

NİSBİ ENTROPİYA « относительная энтропия; relative entropy », bir ehtimal paylanmasının digərinə nəzərən nisbi entropiyası – riyazi statistikada əsas informasiya miqdarlarından (*informasiya məsafələrindən*) biridir. N. e. ölçülən $(\Omega, \mathcal{A})$ fəzasının eyni bir $\mathcal{A}$ hadisələr cəbrində ixtiyari iki ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ üçün

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q}) = \int\limits_{\Omega} [\ln \mathbf{P}(d\omega) - \ln \mathbf{Q}(d\omega)]\, \mathbf{P}(d\omega)$$

inteqralı ilə təyin olunur, bu şərtlə ki, inteqral cəmlərində $0 \ln 0 = 0$ qeyri – müəyyənliyi açılmış olsun. N. e. həmişə mənfi deyildir, lakin o, sonsuz ola bilər. N. e. – Kullbak – Leybler – Sanov informasiya miqdarı (informasion yayınması, məsafəsi və s.) kimi də adlandırılır; ilk dəfə [1]-də baxılmışdır. N. e. təbii olaraq böyük yayınmalar nəzəriyyəsində yaranır (bax, [2]). Asılı olmayan sınaqlar sxemində N. e. additivlik xassəsinə malikdir, yəni əgər $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}''$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}' \otimes \mathbf{P}''$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' \otimes \mathbf{Q}''$ olarsa, onda

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q}) = \mathbf{I}(\mathbf{P}':\mathbf{Q}') + \mathbf{I}(\mathbf{P}'':\mathbf{Q}'')$$

bərabərliyi doğrudur.

Sadə $\mathbf{P}$ hipotezinin sadə $\mathbf{Q}$ alternativ hipotezinə qarşı yoxlanılması nəzəriyyəsində N. e. 1-ci növ səhv ehtimalının α_N -ə bərabər olduğu halda α_0 həddinin qeyd olunmuş qiymətində asılı olmayan müşahidələr sayı N -in artması ilə 2-ci növ səhvin ehtimalı β_N -in azalma asimptotikasını təyin edir, belə ki, $\ln \beta_N \sim -N\, \mathbf{I}(\mathbf{P}:\mathbf{Q})$. $\{\mathbf{P}_t,\ t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$ ehtimal paylanmalarının hamar ailəsi üçün asimptotik olaraq

$$2\mathbf{I}(\mathbf{P}_\theta : \mathbf{P}_{\theta+\Delta t}) \approx \sum_{i,j=1}^{k} \Delta t^i\, \Delta t^j\, \mathbf{I}_{ij}(\theta)$$

münasibəti ödənilir, burada $(\mathbf{I}_{i,j}(\theta))_{i,j=1}^{k}$ – ailənin $\mathbf{P}_\theta$ nöqtəsində Fişer informasiya matrisidir. Kanonik parametrizasiyalı eksponent ailələr nəzəriyyəsində N. e. xüsusi rol oynayır, bu halda o, Qauss *ən kiçik kvadratlar metodunda* Evklid məsafəsinin kvadratının yarısının qeyri – simmetrik analoqu kimi ifadə olunur; onun üçün Pifaqor teoreminin qeyri – simmetrik variantı doğrudur. Statistik nöqtəvi qiymətləndirmə məsələsində R nəticəsinə gəlindiyi halda universal itki funksiyası kimi $2\mathbf{I}(R:\mathbf{P}_0)$ miqdarından istifadə olunduqda $\theta \in \Theta$ parametrinin asimptotik effektiv statistik qiymətlərində uyğun risk asimptotik olaraq, $N^{-1} \dim \Theta$ kəmiyyətinə bərabərdir, burada N – istifadə olunmuş asılı olmayan müşahidələrin sayıdır.

$\mathbf{P}$ – təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanması, $Q = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$, – X_1 və X_2 kəmiyyətlərinin $\mathbf{P}_1$ və $\mathbf{P}_2$ marginal paylanmalarının hasili olarsa, N. e. bir təsadüfi kəmiyyətdə digərinə nəzərən olan *informasiya miqdarı* olur, informasiya ötürmə nəzəriyyəsində istifadə olunan, təsadüfi kəmiyyətlər arasında ehtimali məsafədir; $\mathbf{P}_1$ və $\mathbf{P}_2$ uyğun olaraq X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin marginal paylanmalarıdır.

Bax, *Kullbak – Leybler informasiya kəmiyyəti.*

Əd.: [1] Kullback S., Leibler R. A., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, p. 79–86; [2] Санов И. Н., «Матем. сб.», 1957, т. 42, в. 1, с. 11–44; [3] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

NİSBİ KOMPAKT ÇOXLUQ « относительно компактное множество; relatively compact set » – bax, *Kompakt.*

NİSBİ KOMPAKTLIQ(ğı) ölçülər ailəsinin **« относительная компактность** семейства мер; **relative compactness** of a family of measures **»** – bax, *Kompaktlıq*(ğı) ölçülər ailəsinin.

NİSBİ TEZLİK « относительная частота; frequency ratio » – bax, *Histoqram*, *Tezlik*(yi) təsadüfi hadisənin.

NİŞAN « метка; score » – bax, *Ranq korrelyasiyası*.

NİŞANLANMIŞ NÖQTƏVİ PROSES « маркированный точечный процесс; marked point process » – (t_n, k_n) *təsadüfi ardıcıllığıdır*, burada $t_n \in \mathbb{R}$ – hadisənin anı, $k_n \in K$ – «nişan»-dır, yəni baxılan hadisə haqqında əlavə əlamətdir (K nişanlar fəzası adlanan ölçülən fəzadır, $n \in \mathbb{Z}$).

Fərz olunur ki, bütün n -lər üçün $t_n \le t_{n+1}$ və $t_n(\tau) + \tau$ τ anından sonra n -ci hadisənin baş verdiyi andır, $k_n(\tau)$ bu hadisənin nişanıdır. Əgər $(t_n(\tau),\ k_n(\tau))$ ardıcıllığının paylanması τ -dan asılı olmazsa, N. n. p. stasionar N. n. p. adlanır. *Nöqtəvi proseslərə* xas olan bütün xassələr stasionar N. n. p.-lər üçün də ödənilir (parametrin varlığı, intensivliyin, Palm – Xinçin funksiyalarının varlığı). Əgər (t_n) nöqtəvi prosesi ordinardırsa, N. n. p. (t_n, k_n) – ordinar N. n. p. adlanır. $z_n \in \mathbb{R}^+$, $k_n \in K$ olduqda (z_n, k_n) (stasionar) ardıcıllığı speysinq adlanır. Stasionar ordinar N. n. p.-lər və speysinqlər arasında aşağıdakı kimi interpretasiya olunan qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaranır. Əgər τ anında N. n. p.-in hadisəsi baş verirsə, onda $t_n(\tau) = z_1 + \ldots + z_n$, $k_n(\tau) = k_n$ olur, bu halda (z_n, k_n) speysinqdir. N. n. p.-lər nəzəriyyəsi kütləvi xidmət sistemlərinin, o cümlədən, mürəkkəb strukturlu (prioritetli, çoxfazalı), ixtiyari stasionar giriş ardıcıllıqları ilə idarəolunan sistemlərin xarakteristikaları arasında erqodik münasibətləri əsaslandırmağa imkan yaratmışdır.

Əd.: [1] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984.

NİŞANLAR FƏZASI « меток пространство; mark score » – bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*.

NOMİNAL ƏLAMƏT « номинальный признак; nominal criterion » – bax, *Çoxölçülü statistik analiz.*

NOMİNAL ŞKALA « номинальная шкала; nominal scale » – bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi.*

NOMOQRAM « номограмма; nomogram » – funksional asılılığı həndəsi təsvir etmək üçün çertyojdur. N. hesablama aparmaq məqsədlərində, asılılığı araşdırmaq üçün istifadə olunur. N. vasitəsilə ekstremal xassələri, nəticə dəyişəninə dəyişənlərin

təsirini, həllərin varlığı oblastını araşdırmaq olar. N.-ın müxtəlif tipləri məlumdur (düzəldilmiş nöqtələrdən ibarət, bir-birindən bərabər uzaqlıq olan nöqtələrdən ibarət, pərgar, barisentrik və s. N.-lar). Hər bir tip ona müvafiq asılılığı – kanonik formanı təsvir edir. Əsasını kanonik formalar təşkil edən, verilən asılılıqların approksimasiyası yolu ilə alınan (məs., çoxgirişli cədvəllərlə) təqribi N.-lar da tətbiq olunur. N.-in qurulması metodları işlənilmişdir (bax, [1], [2]).

Bəzi statistik asılılıqlar üçün dəqiq və təqribi N.-lar qurulmuşdur. Məs., stoxastik tələb halında ehtiyatları idarə etmə modeli – dörd dəyişənli tənlik üçün düzəldilmiş nöqtələrdən ibarət təqribi N. (bax, [3]); Puasson paylanmasının parametrinin interval statistik qiymətini təyin etmək üçün üç dəyişən parametrli iki tənliklər sisteminin dəqiq barisentrik N.-ı (bax, [4]). N. ehtimal nəzəriyyəsində və riyazi statistikada tətbiq olunur ([5]-də biblioqrafiyaya bax).

Əd.: [1] Хованский Г. С., Основы номографии, М., 1976; [2] Хованский Г. С., Номография сегодня, М., 1987 (Новое в жизни, науке, технике. Математика. Кибернетика, № 12); [3] Козлова Е. Г., Подлевских Л. В., Синько В. И., Применение номограмм в управлении запасами на машиностроительном предприятии, М., 1981; [4] Степанова Н. В., Номографический метод определения доверительной оценки параметра распределения Пуассона. Приложение «Надежность и контроль качества», 1986, № 5, с. 3–5; [5] Степанова Н. В., Обзор номограмм, применяемых в теории вероятностей и математической статистике. Межвузовский семинар «Современные проблемы номографии» 24–30 мая 1981 г. (Программа и тезисы докладов), М., 1981, с. 42–44.

NORMA(sı) təsadüfi elementin **« норма** случайного элемента; **norm** of a random element **»**, $X(\omega)$ təsadüfi elementinin N.-sı $-\omega\to|X(\omega)|$ inikasıdır, burada $X(\omega)$-nın qiymətləri $|\cdot|$ norması təyin olunmuş B normalanmış fəzasındandır. N.-nın ölçülən olması üçün $S_R=\{x\in B:|x|<R\}$ kürələrinin $X^{-1}(S_R)$, $R\geq 0$ proobrazlarının ölçülən olması zəruri və kafidir.

NORMAL APPROKSİMASİYA « нормальная аппроксимация; normal approximation » – *normal paylanmaya* malik təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının approksimasiyasıdır.

Misal. X_n, $n=1,\ 2,\ ...$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\mathbf{M}X_n=0$,

$$B_n=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}X_j^2>0,\ S_n=B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

olsun. Onda mərkəzi limit teoreminə əsasən, $n\to\infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{S_n<x\}\to\mathbf{\Phi}(x),$$

burada $\mathbf{\Phi}(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. Əgər $\mathbf{M}\left|X_n\right|^3<\infty$ olarsa, onda

$$\left|\,\mathbf{P}\{S_n<x\}-\mathbf{\Phi}(x)\,\right|<CL_n$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $L_n=B^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}\left|X_j\right|^3$, C – mütləq sabitdir. N. a. S_n üçün böyük xətaya səbəb olarsa, onda normal paylanmaya əsaslanan asimptotik ayrılışa baxmaq lazımdır (bax, *Paylanma funksiyası*; asimptotik düstur, *Asimptotik normal çevirmə*).

N. a.-ya digər misal ikiölçülü normal paylanmalı seçimdə seçimi korrelyasiya əmsalı r üçün aşağıdakı şəkildə ifadə olunan *Fişer z – çevirməsidir.*

$$z=\frac{1}{2}\ \ln\frac{1-r}{1+r}.$$

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

NORMAL CAZİBƏ OBLASTI dayanıqlı G qanununun **« нормального притяжения область** устойчивого закона G; **domain of normal attraction** of a stable law **»** – elə F paylanma funksiyalarının çoxluğudur ki, α, – G qanununun xarakteristik göstəricisi, n^*, – n – qat kompozisiya simvolu olduqda, $n\to\infty$ olarsa, hər hansı seçilmiş $a>0$ və bütün x-lər və mərkəzləyici A_n ardıcıllığı üçün

$$F^{n*}(an^{1/\alpha}x+A_n)\to G(x)$$

münasibəti doğrudur. N. c. o. G qanununun *cazibə oblastının* bir hissəsidir. Hər bir dayanıqlı qanun özünün N. c. o.-ndandır və bu halda $a=1$.

$F(x)$ paylanma funksiyasının $0<\alpha<2$ şərtini ödəyən α göstəricisi və $B_n=an^{1/\alpha}$ ardıcıllığı ilə dayanıqlı G qanununun N. c. o.-na aid olması üçün

$$F(x)=(C_1a^{\alpha}+o(1))\,|x|^{-\alpha},\ x\to-\infty$$

və

$$F(x)=1-(C_2a^{\alpha}+o(1))x^{-\alpha},\ x\to\infty$$

münasibətlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $C_1\geq 0$, $C_2\geq 0$, $C_1+C_2>0$.

$F(x)$ paylanma funksiyasının normal paylanmanın N. c. o.-na aid olması üçün $F(x)$-in dispersiyasının sonlu olması zəruri və kafidir.

Operator dayanıqlı paylanmanın N. c. o. haqqında bax, *Cazibə oblastı* operator dayanıqlı paylanmanın.

Əd.: bax, *Cazibə oblastı* məqaləsinə.

NORMAL CAZİBƏ ZONASI « нормального притяжения зона; zona of normal attraction » – bax, *Normal yığılma zonası.*

NORMAL FƏZA « нормальное пространство; normal space » – elə topoloji fəzadır ki, onun kəsişməyən hər bir qapalı çoxluqlar cütü açıq çoxluqlarla ayrılır. F_1 və F_2 – topoloji $(\mathscr{X},\ \mathfrak{S})$ fəzasında qapalı çoxluqlar və $F_1\cap F_2=\varnothing$ olsun. Əgər $(\mathscr{X},\ \mathfrak{S})$ normal fəzadırsa, onda elə $U_1\cap U_2=\varnothing$ və $U_2\in\mathfrak{S}$ açıq çoxluqları vardır ki, $F_i\subseteq U_i$ və $U_1\cap U_2=\varnothing$. Bu tərif adi topoloji fəzalar üçün doğru olduğu kimi σ – topoloji fəzalar üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

NORMAL KEÇİD FUNKSİYASI « нормальная переходная функция; normal transition function » – bax, *Keçid funksiyası*, Markov prosesi üçün.

NORMAL MARKOV PROSESİ « нормальный марковский процесс; normal Markov process » – bax, *Sıfır – vahid qanunu* Markov prosesləri üçün, *Qırılma anı.*

NORMAL PAYLANMA « нормальное распределение; normal distribution » – ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm *ehtimal paylanmalarından* biridir. K. Pirsona (K. Pearson) məxsus «N. p.» termini təsadüfi *kəmiyyətlərin* ehtimal paylanmaları üçün istifadə olduğu kimi, bir neçə təsadüfi kəmiyyətlərin, yəni sonluölçülü təsadüfi vektorların çoxölçülü birgə paylanmaları, *təsadüfi elementlər* və *təsadüfi proseslərin* ehtimal paylanmaları üçün də tətbiq olunur. N. p. əvvəllər *Qauss qanunu*, *Qauss – Laplas paylanması*, Qauss paylanması kimi adlandırılmışdı. N. p.-nın ümumi tərifi birölçülü halda aşağıdakı kimi verilir.

Paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x;\, a,\, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},\ x \in (-\infty,\, +\infty),\ \sigma > 0 \quad (1)$$

olan ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması normal paylanma adlanır (şəkil 1).

(1) ifadəsilə verilən N. p.-lar ailəsi a və $\sigma > 0$ parametrlərindən asılıdır. Bu halda a və σ parametrli normal qanuna tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $F(x;\, a,\, \sigma)$

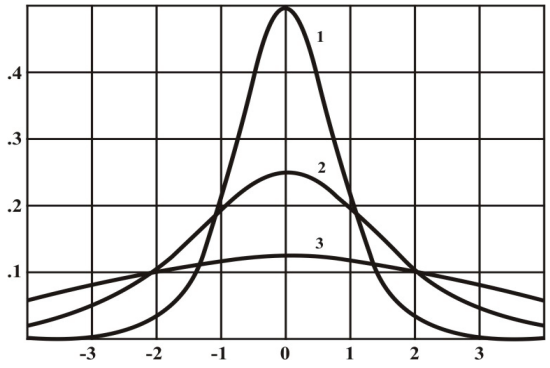
$$F(x;\, a,\, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}\, du\,, \quad x \in (-\infty,\, +\infty)$$

düsturu ilə təyin olunur. $a = 0$, $\sigma = 1$ olduqda, normal paylanma *standart normal paylanma* adlanır. Bu halda

$$F(x;\, a,\, \sigma) = \mathbf{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

olur. Ümumi halda (2) düsturu ilə verilən N. p.-nın paylanma funksiyası $F(x;\, a,\, \sigma) = \mathbf{\Phi}\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$ düsturu ilə təyin olunur. $\mathbf{\Phi}(t)$ funksiyası və onun bəzi törəmələri üçün geniş cədvəllər tərtib olunmuşdur (bax, [1], [2]).

$p(x;\, a,\, \sigma)$ funksiyasının qrafiki *Qauss əyrisi* adlanır.



Şəkil. 1. $a = 0$ və 1) $\sigma = 0{,}5$; 2) $\sigma = 1$; 3) $\sigma = 2$ hallarında birölçülü paylanmanın sıxlıq funksiyaları.

$p(x;\, a,\, \sigma)$ funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur;

2) x -in bütün qiymətlərində müsbətdir, yəni Qauss əyrisi absis oxundan yuxarıdadır;

3) $\lim\limits_{|x| \to \infty} p(x;\, a,\, \sigma) = 0$, yəni absis oxu Qauss əyrisinin üfiqi asimptotudur;

4) (1) düsturundan

$$p'(x;\, a,\, \sigma) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

olduğu aydındır.

Əgər $x < a$ olarsa, $p'(x;\, a,\, \sigma) > 0$;

$x = a$ olarsa, $p'(x;\, a,\, \sigma) = 0$;

$x > a$ olarsa, $p'(x;\, a,\, \sigma) < 0$

olur. Deməli, $x = a$ qiymətində $p(x;\, a,\, \sigma)$ funksiyası $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ -yə bərabər maksimal qiymətini alır.

5) $$p''(x;\, a,\, \sigma) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[\, 1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \,\right]$$

olduğundan, aydındır ki, $x = a \pm \sigma$ qiymətlərində $p''(\,\cdot\,)$ sıfra bərabərdir. Qauss əyrisi bu nöqtələrdən keçərkən öz işarəsini dəyişir (bu nöqtələrdə funksiyanın qiyməti $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ -yə bərabərdir). Beləliklə, $\left(a - \sigma,\, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ və $\left(a + \sigma,\, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ Qauss əyrisinin əyilmə nöqtələridir.

6) $x - a$ fərqi $p(x;\, a,\, \sigma)$-nin analitik ifadəsində ((1) düsturu) kvadratı ilə verildiyindən Qauss əyrisi $x = a$ düzxəttinə görə simmetrikdir;

7) σ sabit qalıb, a parametri dəyişdikdə, Qauss əyrisinin forması dəyişmir, o, yalnız absis oxu boyunca sürüşür: əgər a artarsa, əyri sağa, a azalarsa, əyri «paralel» olaraq sola sürüşür.

8) σ parametri artdıqda Qauss əyrisinin ordinatı kiçilir və əyri absis oxuna doğru sıxılır, σ azaldıqca əyri «hündürləşərək» ordinat oxu istiqamətində yuxarıya doğru «dartılır» (bax, şəkil 1).

ξ $(a,\, \sigma)$ parametrlərli normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olduqda $|\xi - a| > k\sigma$ bərabərsizliyinin ehtimalı

$$\mathbf{P}\{\,|\,\xi - a\,| > \sigma k\} = 1 - \mathbf{\Phi}(k) + \mathbf{\Phi}(-k)$$

k -nın artması ilə sürətlə azalır (bax, cədvəl).

k	Ehtimal	k	Ehtimal
1	0,31731	3	$0{,}26998 \cdot 10^{-2}$
2	$0{,}45500 \cdot 10^{-1}$	4	$0{,}63342 \cdot 10^{-4}$

Bu baxımdan $k = 3$ qiymətinə uyğun halda, tətbiqi məsələlərdə $\mathbf{P}\{|\,\xi - a\,| > 3\sigma\}$ ehtimalı cədvəldən göründüyü kimi kiçik ədəddir.

Əgər $\mathbf{P}\{\,|\,\xi - \mathbf{M}\xi\,| \le 3\sigma\} = 0{,}9973$ olarsa, ixtiyari ξ təsadüfi kəmiyyətinin normal qanunla paylanmış olduğunu fərz etmək olar, bu şərt «*üç siqma*» *qaydası* adlanır.

N. p.-ya bir çox tətbiqi məsələlərdə təsadüf olunur. N. p.-nın nadir rola malik olduğunu ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremləri* nəzəri olaraq əsaslandırır (bax, *Laplas teoremi*, *Lyapunov teoremi*). Təsadüfi kəmiyyət çoxlu sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi kimi ifadə olunursa və toplanan təsadüfi kəmiyyətlərdən maksimalı cəm – təsadüfi kəmiyyətilə müqayisədə kiçik olarsa, onda cəm – təsadüfi kəmiyyətinin paylanması normal paylanmaya yaxınlaşır (bax, *Mərkəzi limit teoremi*).

N. p.-ya bəzi məsələlərin dəqiq həlli kimi də təsadüf olunur (təsadüfi hadisə və proseslərin qəbul edilmiş riyazi modeli çərçivəsində). Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin əsas modellərindən biri Braun hərəkəti prosesi buna misaldır. Dəqiq N. p.-nın yaranmasına klassik misallar K. Qaussa (C. Gauss, müşahidələr xətalarının paylanma qanunu) və C. Maksvelə (J. Maxwell, molekulların sürətlərinin paylanma qanunu) məxsusdur (bax, *Asılı olmamazlıq*, *Xarakterizasion teoremlər*).

İxtiyari qeyd olunmuş $t \in \mathbb{R}^n$ qiymətində (t, X) skalyar hasili ya N. p.-ya malik olarsa və ya sabit olarsa (dispersiyası sıfra bərabər olan N. p. halı), onda $\mathbb{R}^n$-də verilmiş $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun paylanması və ya $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması **çoxölçülü normal paylanma** adlanır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin çoxölçülü normal paylanmasının xarakteristik funksiyası

$$\varphi(t) = \exp\left\{ i\,\mathbf{M}(t, X) - \frac{1}{2} Q(t) \right\}, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$\mathbf{M}(t, X) = t_1 \mathbf{M} X_1 + t_2 \mathbf{M} X_2 + \dots + t_n \mathbf{M} X_n$$

– xətti forma,

$$Q(t) = \mathbf{M}(t, X - \mathbf{M}X)^2 = \sum_{k,l=1}^{n} \sigma_{kl}\, t_k\, t_l$$

– mənfi olmayan müəyyən kvadratik forma, $\| \sigma_{kl} \|$, – X vektorunun kovariasion matrisidir.

Müsbət – müəyyənlik halına uyğun N. p.-nın sıxlıq funksiyası (bax, şəkil 2)

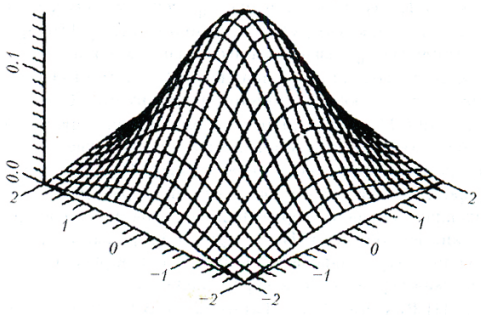
$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= C \exp\{-Q^{-1}(x_1 - a_1,\ x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada Q^{-1}, – Q-yə tərs kvadratik norma, $a_1, a_2, \dots, a_n$ parametrləri isə uyğun olaraq $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri, C sabiti isə

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \| \sigma_{kl} \|}}$$

düsturu ilə verilir. N. p.-nı təyin edən parametrlərin ümumi sayı $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$-ə bərabər olub, n artdıqca sürətlə artır ($n = 1$ olduqda, o, 2-yə, $n = 5$ olduqda 20-yə, $n = 10$ olduqda 65-ə bərabərdir).



Şəkil 2. İkiölçülü normal paylanmanın sıxlıq funksiyaları; $a_1 = a_2 = 0$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$, $\sigma_{12} = 0$.

Çoxölçülü N. p. *çoxölçülü statistik analizin* əsas modelidir. Bu paylanma təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində də istifadə olunur (N. p. sonsuzölçülü fəzalarda baxıldığı hallarda; bax, *Təsadüfi element*, *Viner ölçüsü*, *Viner prosesi*, *Qauss prosesi*).

N. p.-nın əsas xassələrindən aşağıdakılarını da qeyd etmək zəruridir. N. p.-ya malik asılı olmayan ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəminin paylanması N. p.-dır; Əksinə, əgər $\xi = \xi_1 + \xi_2$ N. p.-ya malikdirsə və ξ_1, ξ_2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda ξ_1 və ξ_2-nin paylanmaları N. p.-dır (**Kramer teoremi**); əgər ξ-nin paylanması N. p.-ya «yaxın» paylanmadırsa, onda ξ_1 və ξ_2-nin paylanmaları da N. p.-ya «yaxın» paylanmadır. Mühüm paylanmalardan *loqarifmik normal paylanma*, *qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma*, *Styudent paylanması*, *Uişart paylanması*, *Fişer z – paylanması*, *Hotteliinq* T^2 *paylanma*, *Xi – kvadrat paylanma* N. p. ilə əlaqəlidirlər.

Müşahidələrin nəticələri əsasında N. p. parametrlərinin qiymətləndirilməsi ilə bağlı məsələlər haqqında *Meylsiz statistik qiymət* məqaləsinə bax. Normal paylanma olub-olmaması hipotezinin yoxlanılması məsələsi ilə bağlı *Riyazi statistika*; **qeyri-parametrik metodlar** məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и её нормированных производных, М., 1960; [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [5] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [6] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

NORMAL SİNFİ, ÇOXLUQLARIN « нормальный класс множеств; normal class of sets » – bax, *Monoton çoxluqlar sinfi.*

NORMAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ « нормальных уравнений система; system of normal equations » – $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{\Phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} y$ sistemidir və bu münasibət aşağıdakı faktı ifadə edir: $\mathbf{\Phi\theta}$ reqressiya funksiyasının ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış $\mathbf{\Phi}\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ öngörül statistik qiyməti

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^N, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p,$$

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \operatorname{cov}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{W}^{-1}$$

xətti *reqression eksperimentinin* ölçmələr vektoru y-in reqression eksperiment matrisi $\mathbf{\Phi}$-in sütunlarını örtən altfəzaya ortoqonal proyeksiyasıdır ($\|x\|^2 = x^{\mathrm{T}} W x$ metrikasında). Əgər $\mathbf{\Phi}$ matrisinin ranqı p-yə bərabərdirsə, onda ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış statistik qiymət $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{y}$ birqiymətli təyin olunur, əks halda meylsiz statistik qiymətləri olan $l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}$ xətti funksiyalarının statistik qiymətləri $l^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ birqiymətli təyin olunur, burada $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – N. t. s.-nin ixtiyari həllidir.

NORMAL TƏSADÜFİ ELEMENT « нормальный случайный элемент; normal random element » – bax, *Təsadüfi element.*

NORMAL TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « нормальная случайная величина; normal random variable » – bax, *Qauss təsadüfi kəmiyyəti.*

NORMAL TİPLİ PROSES « нормального типа процесс; normal type process » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

NORMAL YIĞILMA ZONASI « нормальной сходимости зона; zone of normal convergence », normal cazibə zonası – elə $0 \le x \le \psi(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ intervallarının ardıcıllığıdır ki, bunlar üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\frac{\mathbf{P}\{\mathrm{Z}_n \ge x\}}{1 - \mathbf{\Phi}(x)} \to 1, \quad \frac{\mathbf{P}\{\mathrm{Z}_n < -x\}}{\mathbf{\Phi}(-x)} \to 1 \qquad (*)$$

münasibətləri x üzrə müntəzəm ödənilir; burada $Z_n = (X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$ – asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış $X_1, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin normalanmış cəmləridir, $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 = 1$ və $\mathbf{\Phi}$ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır. $\psi(x)$-in N. y. z.-nda kəsilməz və $x \to \infty$ olduqda qeyri – məhdud artan funksiya olduğu fərz olunur. N. y. z. [1]-də daxil olunmuş və öyrənilmişdir (bax, [2]). Bu anlayış daha ümumi strukturlu Z_n təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığı üçün də təyin olunmuşdur, məs., müxtəlif paylanmalara malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri halında (bax, [3] və *Böyük yayınmalar ehtimalları*).

N. y. z.-na ikitərəfli variantda olduğu kimi birtərəfli variant üçün də baxıla bilinir (bax, məs., [5] – böyük yayınmalar haqqında Kramer teoreminin birtərəfli versiyası halı).

Mərkəzi limit teoremindən aydındır ki, baxılan halda N. y. z. vardır. Müəyyən artım tərtibi ilə verilən $\psi(x)$ funksiyalarının (*) münasibətini ödəməsi üçün $t \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}\{|X_1| > t\}$ ehtimalı üzərinə əlavə şərtin qoyulması tələb olunur. Belə ki, $\psi(x)$-in $\psi(x) = \sqrt{q \log x}$, $q > 0$ şəklində seçilməsi üçün $t \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|X_1| > t\} = o(t^{-2-q}(\log t)^{(1+q)/2})$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Bu tip N. y. z. tədrici yayınmalar zonası adlanır (bax, [4]). *Kramer teoreminə* əsasən (*) münasibəti yalnız artım tərtibi $o(x^{1/6})$-nı aşmayan $\psi(x)$ funksiyaları üçün ödənilə bilər.

Əd.: [1] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 2, с. 145–63; в. 4, с. 377–91; 1962, т. 7, в. 2, с. 121–34; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Ластников А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 340–57; [5] Золотарев В. М., «Лит. матем. сб.», 1965, т. 5, № 2, с. 233–50.

NORMALANMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının **« нормирование** последовательности случайных величин; **norming** of sequences of random variables**»** – bax, *Mərkəzləşmə və normalanma*(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının.

NORMALANMIŞ ADAMAR MATRİSİ « нормализованная матрица Адамара; normalized Hadamard matrix » – bax, *Adamar matrisi.*

NORMALANMIŞ BUL CƏBRİ « нормированная булева алгебра; normalized Boolean algebra » – bax, *Təsadüfi hadisə.*

***NORMALANMIŞ KORRELYASİON FUNKSİYA « нормированная корреляционная функция; normalized correlation function »** – bax, *Korrelyasion funksiya.*

NORMALANMIŞ QARŞILIQLI KORRELYASİYA FUNKSİYASI təsadüfi proseslərin **« нормированная взаимная корреляционная функция** случайных процессов; **normalized cross correlation function** of random processes**»** – bax, *Qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası.*

NORMALANMIŞ LATIN DÜZBUCAQLISI « нормализованный латинский прямоугольник; normalized Latin rectangle » – bax, *Latın düzbucaqlısı.*

NORMALANMIŞ ÖLÇÜ « нормированная мера; normed measure » – bax, *Ölçü.*

NORMALANMIŞ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « нормированная случайная величина; standardized random variable » – ξ təsadüfi kəmiyyəti ilə $\xi^* = (\xi - \mathbf{M}\xi)/\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ xətti çevirməsi ilə əlaqəli ξ^* *təsadüfi kəmiyyətidir* (fərz olunur ki, $\mathbf{M}\xi$ və $\mathbf{D}\xi$ sonludurlar). N. t. k.-in riyazi gözləməsi həmişə sıfra, dispersiyası 1-ə bərabərdir, $\mathbf{M}\xi^* = 0$, $\mathbf{D}\xi^* = 1$. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti (a, σ) parametrlərli normal qanunla paylanmışdırsa, onda N. t. k.-ə keçdikdə $\xi^* = (\xi - a)/\sigma$ təsadüfi kəmiyyətinin vasitəsilə, ixtiyari $\{x_1 \le \xi \le x_2\}$ hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı kimi sadə şəkildə ifadə olunur:

$$\mathbf{P}\{x_1 \le \xi \le x_2\} = \mathbf{\Phi}((x_2 - a)/\sigma) - \mathbf{\Phi}((x_1 - a)/\sigma);$$

bu düsturun sağ tərəfindəki $\mathbf{\Phi}(x)$ Laplas funksiyası üçün, yəni

$$\mathbf{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2}\, du$$

üçün cədvəl tərtib olunmuşdur.

NÖQTƏVİ PAYLANMA QANUNU təsadüfi çoxluğun «**точечный закон распределения** случайного множества; **space law of the distribution** of random set» – S topoloji fəzasında təsadüfi qapalı çoxluğun müşayiətedici funksionalının S-in bütün sonlu altçoxluqlarının çoxluğuna daralmasıdır. Bax, *Təsadüfi çoxluq.*

NÖQTƏVİ PROSES «**точечный процесс; point process**» – $\mathbb{R}^1$-də $\{t_i,\ g_i\}$, $\ldots < t_0 < 0 \le t_1 < t_2 < \ldots$, $g_i = 1,\ 2,\ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığına uyğun *təsadüfi prosesdir*. t_i kəmiyyətləri təsadüfi N. p.-in nöqtələri, g_i isə t_i nöqtələrinin təkrarlanma sayıdır. N. p. kütləvi xidmət nəzəriyyəsində xidmətolunma üçün daxil olan sifarişlərin anları ilə, biologiyada əsəb tellərinin impuls anları ilə yaranır. Təkrarlıq sayı g_i kütləvi xidmət sisteminə eyni zamanda daxil olan sifarişlər qrupunun ölçüsünə bərabərdir (bax, [1]).

N. p.-ə $t > 0$ olduqda $t_i \in (0,\ t]$ nöqtələrinin təkrarlıq sayları g_i-lərin cəmi və ya $t \le 0$ olduqda $t_i \in (t,\ 0]$ nöqtələrinin təkrarlıq sayları g_i-lərin cəminə bərabər olan $N(t)$ sayıcı təsadüfi prosesini qarşı qoymaq olar. $N(t)$ prosesi $\mathbb{R}^1$-də N. p.-i birqiymətli təyin edir. İxtiyari $u < v$ ədədləri üçün $N(v) - N(u)$ kəmiyyəti $t_i \in (u,\ v]$ nöqtələrinin təkrarlıq sayları g_i-lərin cəminə bərabərdir. Bəzən N. p.-ə t-nin yalnız mənfiolmayan qiymətləri üçün baxılması məqsədəuyğundur. $\mathbf{M}\,N(t) = \Lambda(t)$ riyazi gözləməsi N. p.-in aparıcı funksiyası adlanır. $\Lambda(t)$-nin artımları N. p.-in moment ölçüsünü birqiymətli təyin edir. Aparıcı funksiyanın törəməsi varsa, o, N. p.-in intensivliyi adlanır. Əgər $N(t)$ stasionar artımlarlı proses olarsa, nöqtəvi proses stasionar N. p. adlanır. Stasionar N. p. üçün $\Lambda(t) = \lambda t$ olur. Əgər N. p.-in bütün sıçrayışları $\Delta N(t_i) = N(t_{i+1}) - N(t_i) = g_i = 1$ şərtini ödəyərsə, N. p. sadə N. p. adlanır.

$\{t_{ni},\ g_{ni}\}$, $i = 1, \ldots, k_n$ N. p.-nin sayıcı prosesi $N_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} N_i(t)$ olan seriyası $\{t_{ni},\ g_{ni}\}$, $i = 1, \ldots, k_n$ N. p.-nin superpozisiyası adlanır. Əgər ixtiyari t üçün

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le k_n} \mathbf{P}_{ni}\{N_{ni}(t) \ne 0\} = 0$$

olarsa, N. p.-in seriyaları ardıcıllığı sonsuz kiçilən adlanır, burada $\mathbf{P}_{ni}$, – $\{t_{ni},\ g_{ni}\}$ N. p.-nin hadisələr çoxluğunda ehtimal paylanmasıdır.

Əgər N. p.-in seriyaları ardıcıllığı sonsuz kiçiləndirsə, onda $N_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} N_{ni}(t)$ sayıcı prosesinin aparıcı funksiyası $\Lambda(t)$ olan Puasson prosesinə zəif yığılması üçün ixtiyari $u < v$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}_{ni}\{N_{ni}(v) - N_{ni}(u) = 1\} = \Lambda(v) - \Lambda(u),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{P}_{ni}\{N_{ni}(u) \ge 2\} = 0$$

şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir (bax, [2]).

$0 < c < 1$, c ehtimalı ilə asılı olmayan seyrəklənmə əməli ondan ibarətdir ki, $\{t_i,\ g_i\}$ N. p.-nin hər bir t_i nöqtəsi C^{g_i} ehtimalı ilə xaric olunur, təkrarlıq sayı l_i olan, $1 \le l_i \le g_i$, t_i nöqtəsi $C_{k_i}^{g_i}(1-c)^{l_i} C_{g_i - l_i}$ ehtimalı ilə, digər nöqtələrin seyrəklənmə nəticələrindən asılı olmayaraq xaric olunmur. Seyrəklənmiş N. p.-ə $N_c(t)$ sayıcı prosesi uyğundur. Əgər $\lim_{|S|\to\infty} N(S)/|S| = L$ münasibəti ehtimala görə ödənilərsə, onda $c \uparrow 1$ olduqda $N_c(t/(1-c))$ prosesi intensivliyinin qiyməti təsadüfi λ olan Puasson prosesinə zəif yığılır (bax, [3], [4]) və $\mathbf{P}\{\lambda \le x\} = \mathbf{P}\{L \le x\}$.

Qarşılıqlı asılı olmayan $\{\xi_i\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı sadə N. p.-in t_i nöqtələrinin asılı olmayan $t_i' = t_i + \xi_i$ yerinidəyişmələrini təyin edir. Asılı olmayan yerinidəyişmələr nəticəsində N. p.-in Puasson prosesinə zəif yığılması üçün şərtlər alınmışdır (bax, [5]).

$\{t_i,\ g_i\}$, $\ldots, < t_0 < 0 \le t_1 < t_2 < \ldots$ N. p.-nə $\{t_i',\ g_i\}$, $\ldots, < t_0' < t_1' < t_2' < \ldots$ N. p.-ni qarşı qoymaq olar, burada $t_i' = t_i - t_1$, $t_1' = 0$. $\{t_i',\ g_i\}$ N. p. $\{t_i,\ g_i\}$ N. p. üçün sinxron N. p. adlanır. $\mathbf{P}$ ehtimallar paylanmasının $\{t_i,\ g_i\}$ stasionar N. p. təyin etdiyi fərz olunur. $\mathbf{P}$ paylanmasına uyğun olan $\{t_i',\ g_i\}$ sinxron N. p.-nin ehtimal paylanması $\mathbf{P}^0$ Palm paylanması adlanır. $\mathbf{P}$ və $\mathbf{P}^0$ paylanmaları arasında uyğunluğun xüsusi halı sadə N. p.-lər üçün, bütün g_i-lərin $g_i = 1$ olduğu halında, aşağıdakı Palm – Xinçin tənlikləridir:

$$\mathbf{P}\{N(t) \ge k\} = \lambda \int_0^t \mathbf{P}^0\{N^{-1}(u) = k-1\}\,du,$$

burada $N(t)$ və $N'(t)$ – uyğun olaraq $\{t_i, 1\}$ N. p.-nə və $\{t_i',\ 1\}$ sinxron N. p.-inə uyğun sayıcı proseslərdir (bax, [6], [7]).

$N(t)$, $t \ge 0$ sayıcı prosesinə $\mathcal{A}_t = \sigma(N(s), s \le t)$ σ – cəbrlər axınına nəzərən submartinqal kimi baxmaq olar. Sadə N. p.-lərin tədqiqində martinqallar nəzəriyyəsindən istifadə olunur (bax, [8]). Əsas anlayışlardan biri N. p.-in *kompensatoru* anlayışıdır. Tətbiq üçün özü-özünə ehtizazlanan N. p.-lər sinfi mühüm əhəmiyyətə malik olub, martinqallar nəzəriyyəsi ilə sıx əlaqədardır (bax, [9], [10]).

Borel çoxluqlarının σ – cəbri $\mathfrak{A}$ və məhdud Borel çoxluqlarının sinfi $\mathfrak{A}_0$ olan tam separabel metrik A fəzasında verilmiş N. p.-lərin ümumi nəzəriyyəsi N. p. anlayışına tamqiymətli lokal məhdud təsadüfi ölçü kimi yanaşmaya əsaslanır.

M – tamqiymətli lokal məhdud $\varphi(\cdot)$ ölçülərinin çoxluğu olsun; $\varphi(b) < \infty$, $B \in \mathfrak{A}_0$, $\varphi(B) = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. M çoxluğunda

$\{\varphi(\cdot):\varphi(B)=k\}$, $k=0,1,\dots$, $B\in\mathfrak{A}_0$ altçoxluqlarının doğurduğu $\mathfrak{M}$ σ – cəbri verilir. Vəziyyətlərinin faza fəzası $(A,\mathfrak{A}_0)$ olan $\mathbf{\Phi}$ N. p. $(M,\mathfrak{M})$ ölçülən fəzasında $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsünün verilməsi ilə təyin olunur.

$\delta_a(\cdot)$, – $a\in A$ nöqtəsində topalanmış vahidi ölçü, yəni $a\in B$ olduqda $\delta_a(B)=1$, $a\notin B$ olduqda isə $\delta_a(B)=0$ şərtlərilə təyin olunan ölçü olsun. Faza fəzası $(A,\mathfrak{A}_0)$ olan $\mathbf{\Phi}$ N. p.-nin realizasiyası

$$\mathbf{\Phi}(\cdot)=\sum_{a\in S_{\mathbf{\Phi}}}\mathbf{\Phi}(\{a\})\,\delta_a(\cdot)$$

bərabərliyilə ifadə olunur, burada $S_{\mathbf{\Phi}}=\{a:\mathbf{\Phi}(\{a\})>0\}$, – $\mathbf{\Phi}$ N. p.-nin nöqtələri çoxluğu, $\mathbf{\Phi}(\{a\})$ kəmiyyəti isə $a\in A$ nöqtəsinin təkrarlıq sayıdır.

$\mathbb{R}^1$-də $\{t_i,\,g_i\}$ N. p. üçün daxil edilmiş bir çox anlayışlar $(A,\mathfrak{A})$ faza fəzasında $\mathbf{\Phi}$ N. p. üçün ümumiləşdirilir (bax, *Kempbel ölçüsü*, *Kempbel teoremi*, *Moment ölçüsü* nöqtəvi prosesin, *Nişanlanmış nöqtəvi proses*, *Ordinar nöqtəvi proses*, *Sadə nöqtəvi proses*, *Sonsuz bölünən nöqtəvi proses*).

N. p.-lər nəzəriyyəsinin nəticələri müxtəlif məsələlərdə tətbiq olunur (bax, [11]), təsadüfi proseslərin realizasiyalarının səviyyələrinin kəsilmələrinin tətbiqində (bax, [12]), biologiyada populyasiyanın analizində istifadə olunur (bax, [13]).

Əd.: [1] Handbuch der Bedienungs theorie, Bd 1, B., 1983; [2] Григелионис Б. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 189–94; [3] Беляев Ю. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 175–84; [4] Nawrotzki K., «Math. Nachr.», 1962, Bd 24, S. 201–17; [5] Керстан Й., Маттес К., Безгранично делимое точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [6] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [7] Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1985; [8] Liptser R. S., Shiryaev A. N., Statistics of random processes. II Applications, N. Y. – [a. o.], 1978; [9] Snyder D. L., Random point processes , N. Y. – [a. o.], 1975; [10] Cox D. R., Isham V., Point processes, L. – N. Y., 1980; [11] Stochastic point processes, ed. By P. A. W. Lewis, N. Y. – [a. o.], 1972; [12] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [13] Diggle P. J., Statistical analysis of spatial point patterns, N. Y. – [a. o.], 1983; [14] Karr A. F., Point processes and their statistical inference, N. Y. – [a. o.], 1986.

NÖQTƏVİ PROSES; aparıcı funksiya **« точечный процесс;** ведущая функция; leading function of a **point process »** – bax, *Nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES; asılı olmayan seyrəklənmə **« точечный процесс;** независимое прореживание; independent thinning of a **point process »** – bax, *Nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES; asılı olmayan yerinidəyişmə **« независимый сдвиг точечного процесса; independent shift of a point process »** – bax, *Nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES ən sadə **« точечный процесс** простейший; simplest **point process »** – bax, *Puasson nöqtəvi prosesi.*

NÖQTƏVİ PROSES; intensivlik **« точечный процесс;** интенсивность; intensity of a **point process »** – bax, *Nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES keçmişi məhdud təsirli **« точечный процесс** с ограниченным последействием; recurrent **point process »** – $\dots<t_{-1}<t_0<0\le t_1<t_2<\dots$, münasibətini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərin $\{t_i\}$ ardıcıllığı ilə verilən və bu ardıcıllığın bütün $s_i=t_{i+1}-t_i$ intervalları qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan *nöqtəvi prosesdir.* Keçmişi məhdud təsirli N. p. bərpa prosesləri ilə sıx əlaqəlidir (bax, *Bərpa nəzəriyyəsi*).

$$F(x)=\mathbf{P}\{s_i\le x\},\ i\ne 0,\ m=\int_0^\infty x\,dF(x)$$

olsun.

$$\mathbf{P}\{-t_0>u,\,t_1>v\}=\frac{1}{m}\int_{u+v}^{\infty}[1-F(x)]\,dx$$

olarsa, keçmişi məhdud təsirli N. p. stasionar proses olur.

Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində keçmişi məhdud təsirli N. p.-lərə kütləvi xidmət sisteminə daxil olan tələblərin giriş axını modeli kimi baxılır.

NÖQTƏVİ PROSES(i) Koks **« точечный процесс** Кокса; Cox **point process »** – bax, *Koks nöqtəvi prosesi.*

NÖQTƏVİ PROSES; kompensator **« точечный процесс;** компенсатор; compensator of a **point process »** – bax, *Kompensator*(u) nöqtəvi prosesin.

NÖQTƏVİ PROSES qrupda **« точечный процесс** на группе; **point process** on a group **»** – lokal kompakt topoloji qrupda *nöqtəvi prosesdir.* Soldan və ya sağdan qrup əməlinə nəzərən invariant N. p.-lərə baxılır. Əgər qrupda N. p. sonlu intensivliyə malik olarsa və sol – (sağ –) invariant olarsa, onda onun sağ moment ölçüsü sol – (sağ –) invariant Haar ölçüsüdür. Qruplarda N. p.-lər nəzəriyyəsinin spesifik anlayışı Palm paylanmalarıdır; bu paylanmalar aşağıdakı kimi təyin olunur. Qrupda solinvariant sonlu intensivlikli N. p.-in realizasiyalarının $\{y_i\}$ çoxluğundan olan hər bir y elementinə müvafiq nişan – $\{y^{-1}y_i\}_i$ sol «gətirilmiş» realizasiyası qarşı qoyulur. Alınan nişanlanmış N. p.-in sağ moment ölçüsü Λ zəruri olaraq faktorlanır (bax, *Həndəsi proses*): $\Lambda=H+\lambda P_0$, burada λ – N. p.-in intensivliyi, H – qrupun sol Haar ölçüsüdür. «Tipik gətirilmiş realizasiyanın» paylanması $\mathbf{P}_0$ sol Palm paylanması adlanır. Sağinvariant N. p.-in sağ Palm paylanması sağ «gətirilmiş» $\{y_iy^{-1}\}_i$ realizasiyası vasitəsilə analoji təyin olunur. Bir qədər kobud deyimdə, Palm paylanması qrup vahidinin realizasiyaya aid olması şərtinə nəzərən N. p.-in şərti paylanmasıdır.

N. p.-ləri $\mathbb{R}^n$-də araşdırdıqda affin qruplarda N. p.-lər meydana gəlir. Aşağıda iki misal verilir.

1) ω – müstəvidə Puasson N. p.-nin təsadüfi realizasiyası, X, – ω-dan «sahə və şeyp» üzrə seyrəldilmiş nöqtələr üçlüyünün sonlu intensivlik prosesi olsun (bax, *Həndəsi proses*, misal 1). S sahəsinin üçbucaq əmələ gətirən x nöqtələrinin hər bir

nizamlanmış üçlüyünə yeganə affin çevirməsi uyğundur və bu çevirmə x-i qeyd olunmuş nöqtələr üçlüyünə çevirir, bu nöqtələr isə həmin sahənin üçbucağını əmələ gətirir. X prosesi müstəvinin affin çevirmələrinin sahəsini olduğu kimi saxlayan qrupda biinvariant N. p. doğurur.

2) Müstəvidə Puasson düzxətlər prosesinin realizasiyalarının hər bir düzxəttində asılı olmayan Puasson nöqtələr prosesinə baxılır. Hər bir «düzxətt və nöqtə» cütünə müstəvinin Evklid hərəkəti uyğundur. Müstəvidə alınmış nöqtəvi proses müstəvinin Evklid hərəkətləri qrupunda biinvariant N. p. doğurur. Uyğun Palm paylanması Palm düzxətlər prosesinin paylanmasının təyin olunması üçün əsas olur. Şəbəkəvari qruplarda N. p.-lərin öyrənilməsi Zigel məsələsinə gətirir.

Əd.: [1] Mecke J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1967, Bd 9, S. 36–58.

NÖQTƏVİ PROSES; moment ölçüsü **« точечный процесс;** моментная мера; moment measure of a **point process »** – bax, *Moment ölçüsü nöqtəvi prosesin.*

NÖQTƏVİ PROSES multivariant **« точечный процесс** мультивариантный; multivariant **point process »** – bax, *Multivariant nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES nişanlanmış **« точечный процесс** маркированный; marked **point process »** – bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES ordinar **« точечный процесс** ординарный; ordinary **point process »** – bax, *Ordinar nöqtəvi proses*.

NÖQTƏVİ PROSES(i) Puasson **« точечный процесс** пуассоновский; Poisson **point process »** – bax, *Puasson nöqtəvi prosesi.*

NÖQTƏVİ PROSES sadə **« точечный процесс** простой; simple **point process »** – bax, *Sadə nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES sonsuz bölünən **« точечный процесс** безгранично делимый; infinitely divisible **point process »** – bax, *Sonsuz bölünən nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ PROSES stasionar **« точечный процесс** стационарный; stationary **point process »** – bax, *Nöqtəvi proses.*

NÖQTƏVİ STATİSTİK QİYMƏT « точечная оценка; point estimator » – 1) qiymətləndirilən parametrin və ya parametrik funksiyanın fəzasının ayrı-ayrı nöqtələri həll kimi qəbul edilən *statistik qiymətdir*. «N. s. q.» termini əsas etibarilə, yalnız N. s. q.-i *interval statistik qiymətinə* qarşı qoyduqda istifadə olunur. Məs., seçimi orta $\bar{x}$ normal paylanmanın orta qiymətinin N. s. q.-idir, lakin $(\bar{x} - t_p s/\sqrt{n},\ \bar{x} + t_p s/\sqrt{n})$ onun interval statistik qiymətidir (etibarlı interval).

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Леман Э., Теория точечного оценивания, пер. с англ., М., 1991.

2) hər hansı təsadüfi hadisə və ya proses üzərində aparılan bir və ya bir neçə asılı olmayan müşahidələrin nəticələrinin müşahidəçiyə məlum olmayan ehtimal paylanması $\mathbf{P}\{\cdot\}$-nin *statistik qiymətidir.* Müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bütün elementar nəticələri ω-ların ölçülən fəzası $(\Omega, \mathscr{A})$-nın məlum olduğu fərz olunur, $\mathbf{P}$-ni $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında bütün ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$-nın nöqtəsi kimi qiymətləndirmək tələb olunur. Naməlum $\mathbf{P}$ paylanmasının hər hansı xarakteristikalarının statistik qiymətlərindən N. s. q. bu cəhəti ilə fərqlənir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi əhəmiyyəti əksərən onunla təyin olunur ki, o, hər hansı təsadüfi hadisə və ya prosesin riyazi modeli üzrə onun müşahidə olunan tezlik xarakteristikalarını daha çox və ya daha az dəqiqliklə və daha çox və ya daha az etibarlılıqla öncədən verə bilir. Statistik qiymətləndirmə məsələləri qeyd olunan mənada ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərinə tərs məsələdir.

Statistik həllər nəzəriyyəsinin tələb etdiyi kimi N. s. q. məsələsinin qoyuluşuna $L(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)$ itki funksiyası daxildir, bu funksiya müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin paylanması $\mathbf{P}$ verildiyi hallarda $\mathbf{P}^*$ həllinin qəbul edilməsindən alınan itkiləri xarakterizə edir. Xüsusi halda, $\mathbf{P}^*$ həllinin xətasını $\mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$ çoxluğunda hər hansı bir metrikada ölçmək olar (bax, [3]), məs., $|\mathbf{P}^* - \mathbf{P}|$ variasiyası üzrə məsafə ilə.

Riyazi statistikada, adətən, üç tip ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzalarına baxılır: 1) $\mathscr{A}$ – sonlu cəbr olduqda, bu halda Ω – dizyunkt $\mathscr{A}$ – atomların sonlu birləşməsidir; 2) Ω – dizyunkt $\mathscr{A}$ – atomların hesabi birləşməsi olduqda; 3) $(\Omega, \mathscr{A})$ – Lebeq ölçülən fəza olduqda, yəni $(E, \mathscr{L})$ fəzasının qarşılıqlı birqiymətli və qarşılıqlı ölçülən obrazı olduqda, burada $\mathscr{L}$, – $E \subset R$ vahid uzunluqlu parçanın bütün mütləq Lebeq altçoxluqlarının σ – cəbridir. Asılı olmayan müşahidələr sayı N-in artması ilə N. s. q. məsələsinin ağlabatan qoyuluşları qeyd olunan hər bir tip üçün bir-birindən fərqlənir.

Riyazi statistikanın bir çox qeyri – trivial tərs məsələləri kimi 3) tipli çoxluqlar üçün N. s. q. məsələsi korrekt deyildir (o cümlədən, variasiya üzrə məsafənin xətasının ölçülməsində). Məsələnin korrektliyi üçün müşahidə olunan $\mathbf{P}$ haqqında əlavə, kəmiyyətcə aprior informasiya tələb olunur (bax, [4]). Riyazi statistikada bu qəbildən məhdudiyyətlərin zəruriliyi onun inkişafının ilkin mərhələlərindən intuitiv aydın idi.

N. s. q. məsələsinin korrekt olduğu təbii geniş altçoxluqlar aşağıdakı şərtlə seçilir: müşahidə olunan $\mathbf{P}$ ölçüsü məlum $\mathbf{P}_0$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir. Onda $\mathbf{P}$-ni təyin etmək üçün histoqram qurmaq lazımdır (bax, [5], [6]). Lakin belə altçoxluqlar olduqca geniş olur. Bunlarda 2) tipli çoxluqlarda olduğu kimi $\mathbf{P}$-yə görə müntəzəm dəqiq və etibarlı statistik qiymətlər yoxdur. Ağlabatan, daha dar sinifləri informasion diametrlər (rus. поперечник) terminlərilə ayırd etmək olur (bax, [3]); $\mathbf{P}^*$-nu qurmaq üçün onun sıxlıq funksiyasının loqarifminin funksiyaların xətti aqreqatı ilə yaxınlaşmasından istifadə edilir.

Riyazi statistikanın klassik obyekti hamar, parametrikləndirilmiş $\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ ailələridir, θ – ədədi və ya vektor parametrdir. Belə altçoxluqlar üçün N. s. q. məsələsi paylanmanın parametrlərinin qiymətləndirilməsinə gətirilir, belə ki, belə ailələr üçün bütün $\mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$ çoxluğundan deyil, yalnız ailənin özündən qiymətlər alan $\mathbf{P}^*$ statistik qiymətləri ilə kifayətlənmək olar (bax, [3]).

Əgər universal itki funksiyası $L(\mathbf{P}, \mathbf{P}^*)$ kimi Kullbak – Leylber – Sanovun

$$I[\mathbf{P}^* : \mathbf{P}] = \int_\Omega [\ln\{d\omega\} - \ln \mathbf{P}^*\{d\omega\}]\, \mathbf{P}\{d\omega\} \qquad (1)$$

ikiqat $I[\mathbf{P}^*:\mathbf{P}]$ informasiyası götürülərsə, onda baxılan məsələdə

$$\lim_{N\to\infty} N \inf_{\Pi(N)} \sup_{\theta} \mathscr{R}_{\Pi(N)}(\mathbf{P}_\theta) = \dim\theta \qquad (2)$$

olur, burada $\mathscr{R}$ riski N müşahidələri üzrə həlledici $\prod(N)$ qaydasından istifadə edildikdə

$$\mathscr{R}_{\Pi(N)}(\mathbf{P}_\theta) = \int\limits_{cap\,(\Omega,\mathscr{A})} \int\limits_{\Omega} \dots \int\limits_{\Omega} 2I[\mathbf{P}:\mathbf{P}_\theta] \times$$

$$\times\, \Pi(\omega_1, \dots, \omega_N;\ d[\mathbf{P}^*]\,)\, \mathbf{P}_\theta\{d\omega_1\} \dots \mathbf{P}_\theta\{d\omega_N\}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, $d[\mathbf{P}^*\{\cdot\}]$ üzrə inteqral təsadüfi ölçülər nəzəriyyəsi mənasında anlaşılır (bax, [7], [3]). (2) münasibəti parametrin optimal qiymətləndirilməsinin bütün nəzəriyyəsinin yığcam ifadəsini müəyyən edir.

Universal itki funksiyalarının təbii sinfi (bax, [3]) statistik həllər qaydası kateqoriyasına nəzərən monoton invariant, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$-nün bütün birləşmələrində $L(\mathbf{P}\,\mathrm{III}, \mathbf{Q}\,\mathrm{III}) \le L(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ şərti ödənilən və məna kəsb edən III həlledici qaydasının $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ funksiyalarının sinfidir. Məs., (1) funksiyası və variasiyası üzrə məsafə bu sinfə aiddirlər. Qeyd etmək lazımdır ki, monoton metrika üçün

$$p(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \ge \frac{1}{8}\,\rho\,(R_{1/2}, R_{1/4})\cdot\left|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\right|$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada R_θ, – $R_\theta(\varepsilon_1) = \theta$, $R_\theta(\varepsilon_2) = 1-\theta$ kimi iki nəticəsi olan ehtimal paylanmasıdır. Analoji olaraq, əgər L – ixtiyari $\mathbf{P}$ üçün $L(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = 0$ şərtini ödəyən monoton itki funksiyasıdırsa və $\mathbf{P} \ne \mathbf{Q} \Rightarrow L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) > 0$ olarsa, onda $0 \le z \le 2$ qiymətlərində elə monoton ciddi müsbət $g(z)$ funksiyası vardır ki, $L(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \ge g(|\mathbf{P}-\mathbf{Q}|)$ bərabərsizliyi doğrudur, burada $g(\cdot)$, – $1 \le x, y \le 1$ kvadratında $L(R_x, R_y)$ funksiyasının qiymətləri ilə təyin olunur. Ona görə də, N. s. q. məsələsinin korrektliyi haqqında yuxarıda qeyd olunanlar bu həlledici qaydanın xətasının ölçülməsi üçün göstərilən qaydalarda da öz qüvvəsində qalır (bax, [8]).

Əgər xəta hər hansı zəif metrikada qiymətləndirilirsə, N. s. q. məsələsi korrekt olur, məs., C və L_2-də paylanma funksiyaları arasında məsafə ilə, yaxud daha ümumi halda Levi – Proxorov metrikasında [bu fakt Qlivenko teoremi (bax, [9]) və onun ümumiləşmələrindən alınır]. Bu qayda universal deyildir, belə ki, o, $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasının təsvirindən asılıdır. Bundan başqa, zəif metrikada paylanmaların yaxınlığından ixtiyari məhdud ölçülən funksiyaya görə bunların orta qiymətlərinin yaxınlığı haqqında mülahizə yürütmək olmur.

[3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [4] Ченцов Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 1, с. 15–31; [5] Abou – Jaoude S., «Ann. Inst. H. Poincaré», Sec. B., 1976, t. 12, p. 213–31; [6] Надараяя Э. А., «Сообщ. АН Груз. ССР», 1976, т. 82, № 2, с. 277–80; [7] Прохоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 1, с. 53–55; [8] Ченцов Н. Н., «Дополнение 1 к кн.: Дерой Л., Дьерфи Л., Непараметрическое оценивание плотности», L_1 –подход, пер. с англ., М., 1988; [9] Гливенко В. И., «Giozn Ist. Ital. degli Attuari», 1933, t. 4, № 1, p. 1–10.

NÖQTƏVİ TƏSADÜFİ MEYDAN « точечное случайное поле; random point field » – $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında *ehtimal ölçüsüdür*, burada Ω – ixtiyari məhdud V altçoxluğu ilə $N_V(\omega)$-nın sonlu kəsişməsi olan, hər hansı metrik fəzada bütün hesabi ω altçoxluqlarının çoxluğudur, $\mathscr{A}$, – Ω fəzasının N_V təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu altçoxluqlarının σ – cəbridir.

Bax, *Nöqtəvi təsadüfi proses.*

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

NÖQTƏVİ TƏSADÜFİ PROSES qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli « **точечный случайный процесс** с присоединенными случайными величинами; **point random process** with adjoint random variables » – elə $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ kəsilən təsadüfi prosesidir ki, onun kəsilmə nöqtələri t_n-lər düzxətt üzərində nöqtəvi təsadüfi proses əmələ gətirir (yəni $\{t_n,\ n = \dots, -1,\ 0,\ 1, \dots\}$ – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərin monoton artan ardıcıllığıdır), $t_{n-1} < t \le t_n$ intervallarında isə $\zeta(t)$ prosesi sabit ζ_n qiymətlərini alır və bunlar eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır ki, onların orta qiyməti m və dispersiyası σ^2-nın verildikləri fərz olunur. Xüsusi halda, $t_n = nT_0 + \theta$, T_0 – qeyd olunmuş ədəd, θ, – T_0 uzunluqlu intervalda müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa, qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli N. t. p. riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = \mathbf{m}$ və (mərkəzlənmiş) korrelyasion funksiyası

$$b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{m}][\zeta(t) - \mathbf{m}] = \max\{\sigma^2(1-|\tau|/T),\ 0\}$$

olan stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesidir; əgər $t_n = n\,T_0$ olarsa (t_n nöqtələr ardıcıllığı təsadüfi ardıcıllıq deyildir), onda $\zeta(t)$ T_0 periodlu periodik korrelyar (və periodik paylanmış) təsadüfi prosesdir. $\{t_n\}$ ədəd oxunda λ intensivlikli bircins Puasson nöqtəvi proses (yəni ən sadə axın) olduğu halda, qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlər Kubo – Anderson prosesi və ya qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli Puasson nöqtəvi prosesi adlanır; bu halda $\zeta(t)$ zaman üzrə bircins kəsilən Markov prosesi, həmçinin orta qiyməti $\mathbf{m}$-ə bərabər, korrelyasion funksiyası $b(\tau) = \sigma^2\exp(-\lambda|\tau|)$ olan stasionar təsadüfi proses olur. Kubo – Anderson təsadüfi prosesinin ümumiləşməsi kenquru tipli təsadüfi proseslərdir və bu proseslər üçün $\{\zeta_n\}$ və $\{t_n\}$ təsadüfi ardıcıllıqları artıq bir-birindən asılı olmur.

n-in bütün qiymətlərində $t_n - t_{n-1} = T_0 = \mathrm{const}$ və ζ_n-nın eyni ehtimalla $+a$ və $-a$ qiymətlər aldığı fərz olunduğu halda qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli N. t. p.-ə [1], [2]-də N. Viner və [3], [4]-də S. Rays tərəfindən baxılmışdır; qoşulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli N. t. p.-in ümumi tərifini 1950-də U. Qrenander (U. Grenander; bax, [5]) vermişdir. Kuba – Anderson proseslər [6], [7]-də daxil olunmuşdur; bu işlər optik spektroskopiyanın statistik məsələlərinə həsr edilmiş və sonradan fiziki araşdırmalarda dəfələrlə istifadə olunmuşdur (bax, məs., [8], [9]).

Əd.: [1] Wiener N., «Acta math.», 1930, t. 55, № 2–3, p. 117–258; [2] Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, пер. с англ., М., 1963, гл. IV; [3] Rice S. O., «Bell System Techn.

J.», 1944, v. 23, № 3, p. 282–332; 1945, v. 24, № 1, p. 46–156; [4] Райс С., в сб.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, пер. с англ., М., 1953, с. 88–238; [5] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [6] Anderson P. W., «J. Phys. Soc. Japan», 1954, v. 9, № 3, p. 316–39; [7] Kubo R., «J. Phys. Soc. Japan», 1954, v. 9, № 6, p. 935–44; [8] Brissand A., Frisch U., «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, № 5, p. 524–34; [9] Шапиро В. Е., Логинов В. М., Динамические системи при случайных воздействиях, Новосиб., 1983.

NÖVBƏ « очередь; queue » – *xidmət sistemləri nəzəriyyəsinin* əsas anlayışlarından biridir. N. hər hansı bir əməliyyatın başlanmasını və ya sona çatmasını gözləyən tələblər toplusudur. Növbələrin təşkilinə növbə kəmiyyətinə qoyulan mümkün məhdudiyyətlər, N.-dən tələblərin seçilməsi qaydası (daxil olduğu qayda ilə, inversion qaydada, təsadüfi qaydada), baxılan növbə üçün kanala girişlilik, prioritet qaydalar daxildir. Kanallar və ya onların qrupları və s. üçün N.-lər ümumi N. və ayrılan N.-yə bölünür. N. tiplərinin əksər müxtəlifliyi kibernetik sistemlərin xidmətində meydana gəlir.

Əd.: [1] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979.

NÖVBƏ; uzunluğu « очередь; длина; length of queue » – bax, *Növbə*; uzunluq kəmiyyəti.

NÖVBƏ; uzunluq kəmiyyəti « очередь; величина; length of queue », növbə uzunluğu, xidmət sistemi nəzəriyyəsində – t anında sistemdəki tələblərin sayı $\upsilon(t)$ ədədidir. Növbə kəmiyyəti xidmət gözləyən tələblərin sayı və məşğul kanallar sayının cəminə bərabərdir. Ən sadə giriş axınlı və xidmət müddəti eksponensial qanuna tabe xidmət sistemlərində N. kəmiyyəti doğum və ölüm prosesidir. Daha mürəkkəb sistemlərdə N. kəmiyyətlərinin öyrənilməsində *semi – Markov proseslərinin* metodları tətbiq olunur. Prioritetli xidmət sistemləri nəzəriyyəsində çoxölçülü $\upsilon_i(t)$ prosesi araşdırılır, $\nu_i(t)$ i-ci prioritetli sinifdə t anındakı tələblərin sayıdır.

NÖVBƏLƏR NƏZƏRİYYƏSİ « очередей теория; queueing theory » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi.*

NÜVƏ « ядро; kernel » – bax, *Rey rezolventi*, *Nüvə statistik qiyməti.*

NÜVƏ(si) potensialların « ядро потенциалов; potential kernel » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zəncirləri üçün.

α – NÜVƏ(si) potensialların « α – ядро потенциалов; potential α – kernel » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zəncirləri üçün.

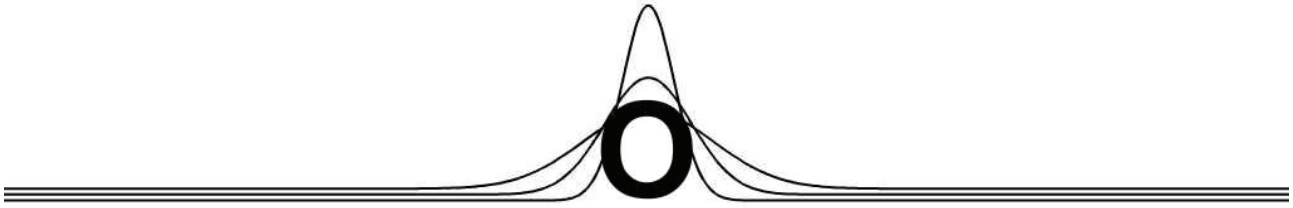
NÜVƏ STATİSTİK QİYMƏTİ « ядерная оценка; kernel estimator » – bax, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə.*

NÜVƏ STATİSTİK QİYMƏTİ sıxlığın « ядерная оценка плотности; kernel density estimator » ümumi təbiətli (kəsilməz və ya diskret) $\mathfrak{X}$ fəzasında –

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{\rho(x, X_i)}{h_n} \right), \quad x \in \mathfrak{X}$$

statistikasıdır (bax, [1]), burada $X_1, X_2, ..., X_n$ – qiymətləri $\mathfrak{X}$-dən olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlərdir; $\rho : \mathfrak{X}^2 \to [0; +\infty)$ funksiyası $\mathfrak{X}$-də *yaxınlıq ölçüsüdür* və $K : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ funksiyası bəzi requlyarlıq şərtlərini ödəyir, bu funksiya nüvə adlanır, h_n – müsbət ədədlər ardıcıllığı olub, $h_n \to 0$, $nh_n \to \infty$ şərtlərini ödəyir. $f_n(x)$ statistikasının xassələri $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^1$ halında sıxlığın klassik N. s. q.-nin xassələrinə analojidir (bax, [2]). Sıxlığın N. s. q. $\mathfrak{X}$-də hər hansı υ ölçüsü üzrə X_1 təsadüfi elementinin sıxlığının qiymətləndirilməsində, reqressiyanın, modanın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində, diskriminant analizdə və qeyri – ədədi təbiətli obyektlər *statistikasında* istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., в кн.: Прикладная статистика, М., 1983, с. 12–40; [2] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез, Пермь, 1995, с. 68–75.



OXŞAR KRİTERİ « подобный критерий; similar test » – ilkin hipotezi təşkil edən bütün paylanmalar üçün güc funksiyası sabit olan mürəkkəb hipotezləri müqayisə məsələsində *statistik kriteridir.* «O. k.» anlayışı Yu. Neyman və E. Pirson tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1], [2]). x – ixtiyari X seçimi üzərində müşahidənin nəticəsi, $\mathbf{P}_{\omega}$, – x-in naməlum $\omega \in \Omega$ parametrindən asılı paylanması olsun. x üzrə $H_1 : \omega \in \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$ alternativ hipotezinə qarşı mürəkkəb ilkin $H_0 : \omega \in \Omega_0$ hipotezi yoxlanılır (Ω_0 çoxluğunun elementlərinin sayı birdən çoxdur, $\Omega_0 \subset \Omega$). Əgər $\beta(\omega \mid \varphi) = \mathbf{M}_{\omega}\varphi(X) = \alpha$ bərabərliyi bütün $\omega \in \Omega_0$ üçün ödənilərsə, $\varphi(x)$ α səviyyəli oxşar kriteri adlanır. Statistik məsələlərdə əksər hallarda mürəkkəb hipotezləri müqayisə məsələlərində yalnız O. k.-yə baxılmaqla kifayətlənilir, lakin nəzərə alınmalıdır ki, ümumi halda konkret məsələlərdə qeyri – oxşar kriterinin də varlığı mümkündür və belə hallarda bu kriteri üçün bütün $\omega \in \Omega_0$ elementləri üzrə $\beta(\omega \mid \varphi) \le \alpha$ olur və bu kriterinin gücü ən güclü O. k. ilə müqayisədə müntəzəm böyük güc olur (bax, [3]). Əgər O. k. randomlaşmayandırsa, onda onun kritik oblastı oxşar oblastdır.

O. k. anlayışı bəzən, bütün $\omega \in \Omega_0$ elementləri üçün $\beta(\omega \mid \varphi) \le \alpha$ bərabərsizliyi və bütün $\omega \in \Omega_1$ üçün $\beta(\omega \mid \varphi) \ge$ $\ge \alpha$ bərabərsizliyi ödənilən α səviyyəli meylsiz φ kriterilərinin baxılması ilə də yaranır. Əgər Ω_0 və Ω_1 çoxluqları ümumi Γ sərhədinə malikdirsə və $\beta(\omega \mid \varphi)$ Γ-də kəsilməzdirsə, onda $\omega \in \Gamma$ olduqda $\beta(\omega \mid \varphi) \equiv \alpha$ olur və φ kriterisi Γ sərhədində oxşar kriteridir.

O. k.-lər həmişə mövcuddur [məs., $\varphi(x) \equiv \alpha$ trivial kriterisi] və problem qeyri – trivial O. k.-lərin qurulması və bunlar arasında optimallarının tapılmasından ibarətdir. Ən tam nəticələr əngəlləyici parametrlərli eksponensial paylanmalar ailəsinin birölçülü parametri haqqında hipotezi yoxlama məsələlərində alınmışdır (bax, [4]). $\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ paylanmalar ailəsinin $(k+1)$ – ölçülü parametrdən asılı olduğu və $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^1$, $\theta \in \Theta \in \mathbb{R}^k$ olduğu fərz olunur və bu paylanmalar ailəsi σ – sonlu υ ölçüsünə nəzərən

$$\frac{d\mathbf{P}_{\xi,\theta}}{d\upsilon} = c(\xi, \theta)\, h(x) \exp\{\xi U(x) + \sum_j \theta_j T_j(x)\} \qquad (*)$$

sıxlıq funksiyası ilə təyin olunur. ξ parametrinə görə ilkin hipotez $H_0 : \xi = \xi_0$ yoxlanılır və $H_1' : \xi' > \xi_0$ birtərəfli alternativ hipotez (və ya $H_1'' : \xi \ne \xi_0$ ikitərəfli hipotez), θ əngəlləyici parametrdir. $T(x) = (T_1(x), ..., T_k(x))$ statistikası θ əngəlləyici parametri üçün kafi statistikadır və $T(x) = t$ qeyd olunmuş qiymətində $\mathbf{P}_{\xi}^{U|T}(\cdot \mid t)$ şərti paylanması θ-dan asılı olmur. Buna görə də, hər bir t qiymətində $U(x)$-ə əsaslanan α səviyyəli $\varphi(x \mid t)$ şərti kriterisini qurmaq olar (H_1' alternativ hipotezində müntəzəm ən güclü kriteri və ya H_1'' alternativ hipotezində müntəzəm ən güclü meylsiz kriteri). İlkin məsələdə şərtsiz kriteri kimi baxılan $\psi(x) = \varphi(x \mid T(x))$ kriterisi müntəzəm ən güclü O. k.-dir və ya uyğun olaraq, müntəzəm ən güclü meylsiz O. k.-dir.

Ümumi halda ixtiyari tip $\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ ailəsi halında, əgər ilkin hipotezin şərtlərində ($\{\mathbf{P}_{\xi_0,\theta};\ \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsi üçün) θ əngəlləyici parametri üçün $T(x)$ kafi statistikası mövcuddursa, bəzən analoji yanaşmadan istifadə etmək olur. Onda hər bir $T(x) = t$ qiymətində bu və ya digər optimallıq xassələrli α səviyyəli şərti kriteri qurmaq mümkündür [məs., əgər şərti paylanmalar ailəsi $\mathbf{P}_{\xi_0}^{U|T}(\cdot \mid t)$ *doğruyaoxşarlıq nisbətinin monotonluq* xassəsinə malik olarsa] və şərtsiz kriteri kimi baxılan bu kriteri lokal optimal xassələri eyni olan O. k. olacaqdır.

Yuxarıda şərh olunmuş misallarda $\psi(x)$ şərtsiz kriteriləri bütün $\theta \in \Theta$ və $T(x)$ kafi statistikasının bütün t qiymətlərində $\mathbf{M}_{\xi_0,\theta}(\psi(X) \mid T(X) = t) \equiv \alpha$ xassəsinə malikdirlər, yəni bu kriterilər T kafi statistikasına nəzərən *Neyman strukturuna* malikdirlər. Aydındır ki, Neyman strukturuna malik bütün kriterilər O. k.-lərdir; Leman – Şeffe teoremi ilə ifadə olunan əks nəticə də doğrudur; bütün O. k.-lərin $\mathbf{P}_{\xi_0,\theta}$ ailəsi üçün $T(x)$ kafi statistikasına nəzərən Neyman strukturuna malik olması üçün bu kafi statistikanın $\mathbf{P}_{\xi_0,\theta}^{T}$ paylanmasının məhdud tam olması zəruri və kafidir [(*) eksponensial paylanmalar ailəsi üçün məhdud tamlıq xassəsi ona ekvivalentdir ki, Θ çoxluğu boş deyildir]. Neyman strukturundan istifadə O. k.-nin qurulması üçün klassik metoddur.

Ümumi halda hipotezləri müqayisə məsələlərində yalnız trivial O. k.-lər mövcuddur və O. k.-lər nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafı paylanması $\mathbf{P}_{\omega}$ olan təsadüfi kəmiyyətlər üzərində n sayda asılı olmayan müşahidələrin nəticələri toplusu $x^{(n)} = (x_1, ..., x_n)$ olan x müşahidəsi ilə əlaqədar asimptotik məsələlərin araşdırılması ilə bağlıdır və $n \to \infty$ olduqda kriterilərin $\{\varphi_n(x^{(n)}),$ $n = 1, 2, ...\}$ ardıcıllığının asimptotikası öyrənilir. Əgər bütün $\omega \in \Omega_0$ üçün $\lim\limits_{n \to \infty} \int \varphi_n(x^{(n)})\, d\mathbf{P}_{\omega}^{(n)} \equiv \alpha$ olarsa, onda $\{\varphi_n\}$ α səviyyəli asimptotik oxşar kriterilər ardıcıllığı adlanır, burada $\mathbf{P}_{\omega}^{(n)} = \mathbf{P}_{\omega} \times ... \times \mathbf{P}_{\omega}$ (n dəfə). Belə kriterilər ardıcıllığı (bu və ya digər mənada) asimptotik oxşar

kriterilər ardıcıllığı qurulması mümkün ola bilən məsələlərin geniş sinfində mövcuddur.

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, v. 20A., pt 1, p. 175–240; pt 2, p. 263–94; [2] Neyman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289– 337; [3] Lehmann E. L., Stein C., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, № 4, p. 495–516; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [5] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [6] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [7] Шеттерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [8] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [9] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники, Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56.

OXŞAR OBLAST « подобная область; similar region », $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}\}$ ehtimal ölçüləri ailəsinə nəzərən α səviyyəli *oxşar oblast* – bütün $\mathbf{P}\in\mathscr{P}$ *ehtimal ölçüləri* üçün $\mathbf{P}$ – ehtimalları α -ya bərabər olan, seçimi fəzanın oblastıdır. Statistik tətbiqi məsələlərdə O. o., $\mathscr{P}$ ilkin hipotezi təşkil edən paylanmalar çoxluğu qəbul olunduqda, mürəkkəb hipotezləri müqayisə məsələsində randomlanmayan oxşar kriterinin kritik oblastı kimi anlaşılır. «O. o.» termini Yu. Neyman və E. Pirson tərəfindən daxil olunmuşdur (bax, [1], [2]) və «bütün seçimi fəzaya oxşar oblast» ifadəsinin qısa şəklidir; bu da onunla bağlıdır ki, seçimi fəza trivial şəkildə, $\alpha=1$ halında O. o.-dır. O. o. ilə bağlı əsas problemlərdən biri onların varlığı və qurulmasıdır. $\mathscr{P}$ sonlu çoxluq olduğu halda A. A. Lyapunov O. o.-ın varlığını isbat etmişdir (bax, [3]); bu nəticələrin sonrakı ümumiləşməsi və genişləndirilməsi Yu. V. Linnik və onun şagirdlərinin əsərlərində şərh olunmuşdur. $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}_\theta, \theta\in\Theta\}$ parametrik paylanmalar ailəsinə görə O. o. qurulması metodu ən geniş yayılmış metodlardandır və bu metod θ parametri üçün T kafi statistikasından istifadəyə əsaslanır. Seçimi oblastın hər bir $\{T=t\}$ kəsiyində A_t oblastı qurulur və bu oblastın $T=t$ şərtində şərti ehtimalı (bu ehtimal θ-dan asılı deyildir) α -ya bərabərdir. Əgər müxtəlif t -lər üçün bütün A_t oblastlarını birbirilə «ölçülənlikli calaşdırmaq» mümkün olarsa, onda alınan oblast α səviyyəli O. o. olur. Beləliklə, qurulmuş O. o. $\mathscr{P}$ ailəsinə nəzərən Neyman strukturlu oblast olur; əgər T məhdud tam kafi statistika olarsa, onda bütün O. o. Neyman strukturlu oblastlardır. Bəzən bütün $\mathbf{P}\in\mathscr{P}$ paylanmaları $\left|\mathbf{P}(A)-\alpha\right|\le\varepsilon$ şərtini ödəyərsə, onda « ε – təqribi A oxşar oblastı» araşdırılır.

Əd.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, v. 20A, pt 1, p. 175–240; pt 2, p. 263–94; [2] Neyman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289–337; [3] Ляпунов А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 6, с. 456–78; [4] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [5] Бернштейн А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56.

OXŞAR STATİSTİKA « подобная статистика; ancillary statistic » – paylanması baxılan paylanmalar ailəsinin bütün elementləri üçün eyni olan *statistikadır.* Əgər $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}_\theta, \theta\in\Theta\}$ ölçülən $(\mathscr{X}, \mathfrak{A})$ fəzasında paylanmalar ailəsidirsə, T statistikası isə $(\mathscr{X}, \mathfrak{A})$ fəzasını digər $(\mathscr{T}, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikas etdirirsə, $B\in\mathfrak{B}$ üçün $\mathbf{P}_\theta(B)=\text{const}$, $\theta\in\Theta$ olarsa, onda T $\mathscr{P}$ -yə nəzərən oxşar statistikadır. O. s.-dan axtarılan paylanmanın $\mathscr{P}$ ailəsindən olması haqqında hipotezin (mürəkkəb) oxşar kriterilərinin qurulması üçün istifadə olunur. O. s. sıfrın meylsiz statistik qiymətlərinin, yəni $\theta\in\Theta$, $\mathbf{M}_\theta\chi\equiv 0$ xassəli $\chi(T)$ statistikasının qurulmasında da istifadə olunur, bu terminlərdə parametrik funksiyanın meylsiz statistik qiymətinin optimallıq şərti ifadə olunur.

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

OXŞARLIQ NƏZƏRİYYƏSİ « подобия теория; similarity theory » – bax, *Monin – Obuxov oxşarlıq nəzəriyyəsi.*

OQAVA KONSTRUKSİYASI « Огавы конструкция; Ogawa construction » – bax, *Genişləndirilmiş stoxastik inteqral.*

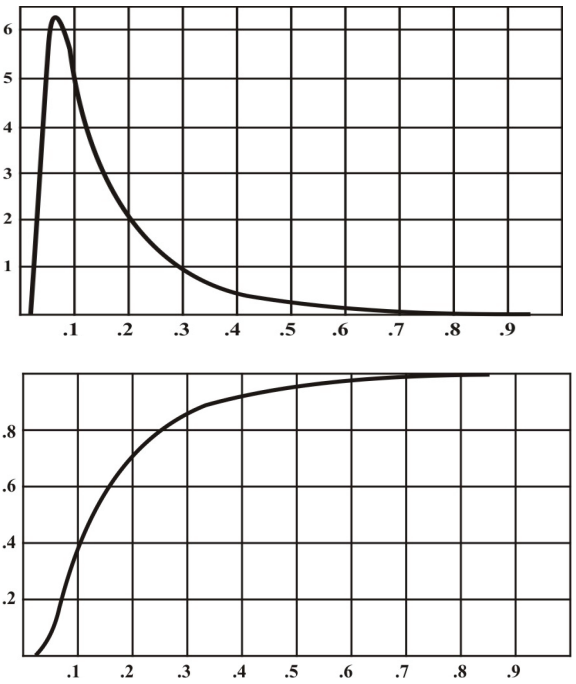
OMEQA – KVADRAT PAYLANMA, ω^2 – paylanma **« омега – квадрат распределение; ω^2 – distribution »** –

$$\omega^2=\int_0^1 Z^2(t)\,dt$$

təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal *paylanmasıdır*, burada $Z(t)$ – şərti Viner prosesidir. Xarakteristik funksiyası

$$f(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2it}{\pi^2k^2}\right)^{1/2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. O. – k. p.-ya riyazi statistikada aşağıdakı halda təsadüf olunur. $X_1,\ldots,X_n$, – $[0,1]$ parçasında müntəzəm paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F_n(\cdot)$ isə bu təsadüfi kəmiyyətlər üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası olsun.



Omeqa – kvadrat paylanmanın 1) paylanmasının sıxlıq funksiyasının və 2) paylanma funksiyasının qrafikləri.

Bu halda $Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ prosesi şərti Viner prosesinə zəif yığılır, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\int_0^1 Z_n^2(t)\,dt < \lambda\right\} = \mathbf{P}\{\omega^2 < \lambda\} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{(2^k-1)\pi}^{2^k\pi}\frac{e^{-t^2\lambda/2}}{\sqrt{-t\sin t}}dt,\ \lambda > 0$$

münasibəti alınır.

Bax, *Kramer – Mizes kriterisi*.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., «Матем. сб.», М., 1937, т. 2, с. 973–93; [2] Anderson T., Darling D., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, p. 193–212.

OPERATİV HAZIROLMA ƏMSALI « оперативной готовности коэффициент; availability index » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri*, *sistemin*.

OPERATİV XARAKTERİSTİKA(sı) alternativ əlamətə görə nəzarət planının **« оперативная характеристика** плана контроля по альтернативному признаку; **operating characteristic** of a sampling inspection plan on alternative atribute **»** – qüsurlu məmulatlar sayı D-nin funksiyası (və ya $q = D/N$ hissələri) kimi baxılan, N sayda məmulatdan nəzarət edilən **þ** partiyasının qəbul-olunma ehtimalıdır, $D = 0, 1, ..., N$. Birpilləli nəzarət planı üçün (bax, *Nəzarət / kontrol planı*) təsadüfi seçimin həcmi n, qəbulolunma ədədi c olduqda O. x.

$$\mathbf{P}\{D\} = \sum_{d=0}^{c} h_{N,D}^{n,d}$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $h_{N,D}^{n,d}$ – hiperhəndəsi paylanma ehtimallarıdır. Qüsurlu məmulatlar üçün $D_1 < D_2$ şərtini ödəyən verilmiş iki D_1 və D_2 qiymətlərinə uyğun olaraq, **þ** partiyasının səhvən qüsurlu olduğu ehtimalı $\alpha = 1 - \mathbf{P}\{D_1\}$ və **þ**-nin səhvən qəbul edilməsi ehtimalı isə $\beta = \mathbf{P}\{D_2\}$ götürülür. $D_{0,5}$ ədədinə (bu halda $\mathbf{P}\{D_{0,5}\} = 0,5$ və $0,5$ yaxın bir ədəd olur) partiyanın qüsurlu hissəsi $q_{0,5} = D_{0,5}/N$ kəmiyyəti uyğun olur, bu halda $q_{0,5}$ qüsurlu məmulatların əhəmiyyətsiz hissəsi adlanır.

OPERATİV XARAKTERİSTİKA(sı) kriterinin **« оперативная характеристика** критерия; **operating characteristic** of a test **»** – statistik kriterinin güc funksiyasının (2-ci növ səhvin) 1-ə qədər tamamlanmasıdır. O. x. ənənəvi olaraq ardıcıl analizdə istifadə olunur.

OPERATOR DAYANIQLI PAYLANMA « операторно устойчивое распределение; operator stable distribution » – sonlu $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında elə ehtimal *paylanmasıdır* ki, bu paylanma

$$Y_n = A_n(S_n - a) \qquad (1)$$

təsadüfi vektorlarının paylanmaları ardıcıllıqlarının zəif limitidir, burada $S_n = X_1 + ... + X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi vektorların cəmi, $a_n \in \mathbb{R}^d$, A_n, – $\mathbb{R}^d$-də xətti operatorlardır.

Əgər A, – $\mathbb{R}^d$-də xətti operator, μ isə $\mathbb{R}^d$-də ehtimal ölçüsüdürsə, onda A_μ ilə $\mathbb{R}^d$-də elə ehtimal ölçüsü işarə olunur ki, bu ölçü $A\mu(E) = \mu(A^{-1}(E))$ şərtini ödəsin. δ_x ilə $x \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsində cırlaşan paylanma işarə olunur. $\mathbb{R}^d$ fəzasında μ ehtimal paylanması $(d-1)$ – dim. – ölçülü heç bir hipermüstəvidə topalanmamışdırsa, μ tam ehtimal paylanması adlanır. O. d. p. olan hər bir paylanma $\mathbb{R}^d$-də tam ehtimal paylanmasıdır və ya münasib yerinidəyişmədən sonra $\mathbb{R}^d$ fəzasının hər hansı altfəzasında tam ehtimal paylanması olur (bax, [1]). Buna görə də, ümumiliyi pozmadan, yalnız O. d. p.-lara baxmaq olar.

İxtiyari O. d. p. $\mathbb{R}^d$-də sonsuz bölünən paylanmadır. Əgər f μ O. d. p.-nın xarakteristik funksiyasıdırsa, onda ixtiyari $t > 0$ üçün f^t funksiyası da hər hansı μ^t ehtimal paylanmasının xarakteristik funksiyasıdır. $\mathbb{R}^d$-də ehtimal paylanmalarının toplusu $\{\mu^t,\ t > 0\}$ $*$ kompozisiya əməlinə görə ölçülərin kəsilməz birparametrik semi – qrupunu əmələ gətirir, yəni ixtiyari $t, s > 0$ qiymətlərində $\mu^t * \mu^s = \mu^{t+s}$ və $t \to 0$ olduqda $\mu^t \to \delta$ zəif yığılması ödənilir.

Tam sonsuz bölünən ehtimal paylanması μ, yalnız və yalnız, o halda O. d. p.-dır ki, cırlaşmayan $t^B = \exp(B \cdot \ln t)$ xətti operatorlarının $\mathbb{R}^d$-də birparametrik qrupu və

$$\mu^t = t^B(\mu) * \delta_{x_t} \qquad (2)$$

şərtini ödəyən $x_t \in \mathbb{R}^d$ vektorları mövcud olsun. B operatoru O. d. p. μ-nün eksponenti adlanır. B operatorunun spektri $\operatorname{Re} z \geq 1/2$ yarımmüstəvisində yerləşir və onun $\operatorname{Re} z = 1/2$ düzxəttində yerləşən bütün məxsusi qiymətləri sadə məxsusi qiymətlərdir. μ_1 və μ_2 ehtimal ölçüləri uyğun olaraq, $R_1 \cap R_2 = \{0\}$, $R_1 \oplus R_2 = \mathbb{R}^d$ şərtlərini ödəyən R_1 və R_2 altfəzalarında topalanmış olduğu halda μ O. d. p. $\mu = \mu_1 * \mu_2$ ayrılışı şəklində ifadə oluna bilinir. μ_1 paylanması R_1-də tam Qauss ölçüsü, μ_2 Qauss komponentinə malik olmayan, R_2-də tam sonsuz bölünən paylanmadır. R_1 və R_2 B – invariant altfəzalardır (və deməli, ixtiyari $t > 0$ üçün t^B – invariantdırlar). Bu iki altfəza B operatoru ilə birqiymətli təyin olunur. Əgər B_1 və B_2, B operatorunun R_1 və R_2 altfəzalarına uyğun məhdudiyyətləridirsə, onda B_1 operatorunun spektri $\operatorname{Re} z = 1/2$ düzxətti, B_2 operatorunun spektri isə $\operatorname{Re} z > 1/2$ yarımmüstəvisində yerləşir (bax, [2]).

İxtiyari sonsuz bölünən paylanma üçün olduğu kimi O. d. p. μ-nün xarakteristik funksiyası f-i də (a, C, M) üçlüyü ilə *Levi – Xinçin kanonik ifadəsi* şəklində göstərmək olur, burada

$a \in \mathbb{R}^d$, C – müsbət müəyyən, $\mathbb{R}^d$-də özü-özünə qoşma xətti operator (kovariasion operator), M, – $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ fəzasında σ – sonlu ölçüdür (Levi spektral ölçüsü). μ^t ölçüsünə uyğun üçlük $(t \cdot a,\ t \cdot C,\ t \cdot M)$ kimi yazılır, (2) münasibətindən isə $t^B C(t^B)^* = t \cdot C,\ t^B M = t \cdot M$ münasibətləri alınır. O. d. p. μ-nün spektral ölçüsü M-ə xətti t^B operatorlarının birparametrik qrupu uyğundur və bu ölçü aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$M(E) = \int_{L_B} \int_0^\infty \mathbf{I}_E(t^B x)\, t^{-2}\, dt\, K_B(dx),$$

burada $\mathbf{I}_E$, – E çoxluğunun indikatorudur, $L_B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1$ və $\|t^B x\| > 1$ bütün $t > 1$ üçün$\}$, $K_B(F) = M(\{t^B x : x \in F,\ t \geq 1\})$.

μ O. d. p.-sının strukturu və xassələrinin təsvirində simmetriyalar qrupu (və ya invariantlıq qrupu) $S(\mu) = \{A \in GL(d) : A\mu * \delta_a = \mu$ hər hansı $a \in \mathbb{R}^d$ üçün$\}$ mühüm rol oynayır, burada $GL(d)$, – $\mathbb{R}^d$-də bütün cırlaşmayan xətti operatorlar qrupudur. Məs., μ, yalnız və yalnız, o halda tam paylanmadır ki, $S(\mu)$ qrupu kompakt olsun. Əgər $E(\mu)$ O. d. p. μ-nün bütün eksponentləri çoxluğu olarsa, onda $E(\mu) = B + TS(\mu)$ münasibəti doğrudur, burada B – hər hansı qeyd olunmuş eksponentdir, $TS(\mu)$, – $S(\mu)$ qrupunun toxunan fəzasıdır, yəni $n \to \infty$ olduqda $(A_n - \mathbf{I})/c_n$ ardıcıllıqlarının bütün limit nöqtələrinin çoxluğudur, $A_n \to \mathbf{I}$, $c_n \to 0$, $A_n \in S(\mu)$, $c_n \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{I}$ – vahidi operatordur. O. d. p. μ-nün bütün eksponentləri arasında $S(\mu)$ qrupunun ixtiyari elementi ilə kommutativ olan elementlər vardır. Bundan başqa, əgər $E_C(\mu)$ – bütün belə kommutasiyalayıcı eksponentlər çoxluğu, $CS(\mu)$, – $S(\mu)$ qrupunun mərkəzidirsə, onda $E_C(\mu) = B + TCS(\mu)$ olur. Bir çox hallarda kommutasiyalayıcı eksponentlər xüsusilə sadə şəkildə olur (bax, [3]).

G, – $GL(d)$ qrupunun hər hansı altqrupu olsun; əgər ixtiyari $A_1, A_2 \in G$ üçün elə $A_3 \in G$ və $a \in \mathbb{R}^d$ varsa ki, $A_1\mu * A_2\mu = A_3\mu * \delta_a$ münasibəti ödənilsin, μ ehtimal paylanması G – d a y a n ı q l ı p a y l a n m a adlanır (bax, [1]). Vahiddən fərqli G altqrupları üçün hər bir G – dayanıqlı paylanma – operator dayanıqlı və ya semidayanıqlı paylanma olacaqdır (aşağıya bax). Əgər G öz strukturuna görə olduqca zəngin qrupdursa, onda G – dayanıqlı paylanması bu və ya digər əlavə xassələrə də malik ola bilər. Məsələn, $G = GL(d)$ üçün μ – normal paylanmadır (bax, [4]).

Sonsuz bölünən μ paylanması $(n_{k+1}/n_k) \to q$, $k \to \infty$, $1 \leq q < \infty$ şərtini ödəyən n_k indekslərli (1) şəklində olan Y_{n_k} təsadüfi vektorlarının hər hansı altardıcıllığının zəif limiti kimi alınarsa, onda μ – o p e r a t o r s e m i d a y a n ı q l ı p a y l a n m a adlanır. Operator semidayanıqlı paylanma hər hansı $\{t^B,\ t > 0\}$ qrupu üçün (2) münasibətini ödəyir, lakin bu münasibət bütün $t > 0$ qiymətləri üçün deyil, yalnız $t_0 > 0$, $k \geq 1$ şərtlərini ödəyən $t = k t_0$ üçün doğru olur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] S c h m i d t K., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1975, Bd 33, S. 19–31; [2] S h a r p e M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 136, p. 51–56; [3] H u d s o n W. N., J u r e k Z. J., V e e h J. A., «Ann. Probab.», 1986, v. 14, № 3, p. 1014–23, [4] P a r t h a s a r a t h y K. R., «Sankhya», 1973, v. 35, Ser. A, p. 35–38; [5] К р у г л о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 723–32; [6] J a j t e R., «Studia Math.», 1977, v. 61, p. 29–39; [7] J u r e k Z. J., M a s o n J. D., Operator-limit distributions in probability theory, N. Y., 1993.

OPERATOR METODU « операторный метод; operator method » – funksional fəzalarda operatorlar nəzəriyyəsinə əsaslanan analitik metoddur. Məs., $(X, \mathscr{A})$ ölçülən fəza olarsa, $p(x, A)$, $x \in X$, $A \in \mathscr{A}$ Markov keçid funksiyasına $\mathscr{A}$-ya nəzərən ölçülən məhdud funksiyaların $B(X, \mathscr{A})$ fəzasında P xətti operatoru uyğundur və bu operator

$$Pg(x) = \int_X g(y)\, p(x, dy), \quad g \in B(X, \mathscr{A})$$

düsturu ilə təyin olunur (bax, [1], [2]). X_j keçid ehtimalı $p(\cdot, \cdot)$ olan bircins Markov zənciri olarsa, $\sum_{j=1}^n f(X_j)$ cəminin xarakteristik funksiyası operator terminlərilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$P(\theta)g(x) = \int_X e^{i\theta f(y)}\, g(y)\, p(x, dy).$$

$P(\theta)$ operatorunun spektri kükrəntilər nəzəriyyəsi vasitəsilə araşdırılır (bax, [1]). Kəsilməz zamanlı Markov proseslərinə xətti operatorların semi – qruplar nəzəriyyəsi tətbiq olunur. O. m. asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün limit teoremlərinin isbatında da istifadə olunur (bax, [4], [5]).

Əd.: [1] Н а г а е в С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, № 4, с. 389–416; [2] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ, т. 2, М., 1984; [5] Л а м п е р т и Д ж., Вероятность, пер. с англ., М., 1973.

OPERATOR ÖLÇÜ « операторная мера; operator measure », o p e r a t o r q i y m ə t l i ö l ç ü – bax, *Vektor ölçü.*

OPERATOR STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK « операторное стохастическое дифференциальное уравнение; operator stochastic differential equation » – hər hansı H' Hilbert fəzasında $\zeta(t)$ diffuzion tənliyini təsvir edən

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))dt + A(t, \zeta(t))d\boldsymbol{w}(t), \quad t_0 \leq t \leq \tau \qquad (1)$$

şəklində *stoxastik differensial tənlikdir.* Burada $\boldsymbol{w}(t)$ – ən sadə vektor diffuzion proses (Viner prosesi) olub, H Hilbert fəzası ilə kanonik əlaqəlidir, $a(t, x)$ – aparı əmsalı və $A(t, x)$ – diffuziya əmsalıdır və bunlar $[t_0, \tau] \times H'$ fəzasında təyin

olunmuş, uyğun olaraq H' fəzasından və H -dan H'-ə təsir edən Hilbert – Şmidt operatorlarının $\mathscr{H}(H, H')$ fəzasından qiymətlər alan funksiyalardır.

$A(t, x) \equiv 0$ olduqda (1) tənliyi H' Hilbert fəzasında $\frac{d\zeta}{dt} = a(t, \zeta)$ adi differensial tənliyinə çevrilir. (1) tənliyi, tərifə görə, aşağıdakı İto stoxastik inteqral tənliyinə ekvivalentdir:

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, \zeta(s))ds + \int_{t_0}^{t} A(s, \zeta(s))\, d\boldsymbol{w}(s), \qquad t_0 \le t \le \tau. \tag{2}$$

Bu tənlikdə sonuncu inteqral vektor Viner prosesi $\boldsymbol{w}(t)$ üzrə operator stoxastik inteqraldır.

$\boldsymbol{w}(t)$ prosesini

$$\boldsymbol{w}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j \boldsymbol{w}_j(t) \tag{3}$$

sırasının cəmi kimi təyin etmək olar, burada $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, – H -da ortobazis, $\{\boldsymbol{w}_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ – eyni Ω ehtimal fəzasında təyin olunmuş, cüt-cüt asılı olmayan skalyar Viner prosesləri ardıcıllığıdır və $\mathbf{M}\boldsymbol{w}_j(t) = 0,\ \mathbf{M}\boldsymbol{w}_j(t)\boldsymbol{w}_k(s) = \delta_{jk}\min(t; s)$.

(3) sırası kvadratik orta mənada $H_- \supset H$ Hilbert fəzası normasında yığılır, H fəzası H_- fəzasına Hilbert – Şmidt operatoru ilə daxil olunmuşdur: $\sum_{j=1}^{\infty} \left\| e_j \right\|_{H_-}^2 < \infty$. Lakin $A \in \mathscr{H}(H, H')$ olduqda $A\boldsymbol{w}(t)$ prosesi H' fəzasındandır (sanki yəqin). $\boldsymbol{w}(t)$ prosesi ilə əsas ehtimal fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbrlər axını $\mathscr{A}_t$ və bu axına nəzərən təsadüfi funksiyanın *qeyri – antisipativliyi* adi qaydada əlaqələndirilir. Qiymətləri H'-dan olan $\int_{t_0}^{t} A(s, \omega)\, d\boldsymbol{w}(s)$ şəklində stoxastik inteqrallar qeyri – antisipativ operator təsadüfi $A(s, \omega) \in \mathscr{H}(H, H')$ funksiyaları üçün (sanki yəqin) təyin olunurlar və onlar aşağıdakı münasibətlərə tabedirlər:

$$\mathbf{M}\int_{t_0}^{t} A(s)d\boldsymbol{w}(s) = 0;$$

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} A_1(s)d\boldsymbol{w}(s),\ \int_{t_0}^{t} A_2(s)d\boldsymbol{w}(s) \right)_{H'} = \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A_2^*(s)\, A_1(s)\, ds\,.$$

Əgər $\zeta(t) \in H'$ prosesi

$$\zeta(t) = \zeta(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \omega)\, ds + \int_{t_0}^{t} A(s, \omega)\, d\boldsymbol{w}(s)$$

şəklində ifadə olunarsa, tərifə görə onun stoxastik differensialı var və bu differensial

$$d\zeta(t) = a(t, \omega)dt + A(t, \omega)\, d\boldsymbol{w}(t)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $a(t, \omega) \in H'$, $A(t, \omega) \in \mathscr{H}(H, H')$ – qeyri – antisipativ funksiyalardır.

$u(x)$, – $G \subset H'$ oblastında təyin olunmuş, qiymətləri H'' Hilbert fəzasından olan funksiya olsun. Əgər bu funksiyanın G -də kəsilməz törəmələri vardırsa, yəni

$$u(x + h) - u(x) = u'(x)h + \frac{1}{2}u''(x)(h, h) + o(\|h\|^2),$$

$u'(x) \in L_1(H', H'')$, $u''(x) \in L_2(H', H'')$ olarsa, onda $u(x)$ funksiyası $C_2(G, H'')$ sinfinə aid olunur, burada $L_j(H', H'')$, – H'-dən H'' fəzasına təsir edən j – xətti məhdud operatorlar fəzasıdır.

Stoxastik differensiallar üçün İto düsturu doğrudur: əgər $d\zeta(t) = a(t, \omega)dt + A(t, \omega)d\boldsymbol{w}(t)$ və $Y = f(\zeta)$, $f \in C_2(H', H'')$ olarsa, onda

$$dY = (f'(\zeta(t))\, a(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr} f''(\zeta(t)(A(t)\cdot, A(t)\cdot))dt + f'(\zeta(t))\, A(t)\, d\boldsymbol{w}(t)$$

düsturu doğrudur, burada

$$\operatorname{tr} f''(\zeta)(A\cdot, A\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} f''(\zeta)(Ae_j, Ae_j),$$

$\{e_j\}$, – H -da ortobazisdir.

(1) O. s. d. t.-nin h ə l l i (güclü həll) elə qeyri – antisipativ $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinə deyilir ki, onun stoxastik differensialı tənliyin sağ tərəfində onun əvəz olunması ilə alınır, yəni (1)-in həlli elə prosesdir ki, onun (2) tənliyində əvəz olunması nəticəsində bu tənlik eyniliyə çevrilir (sanki yəqin).

Başlanğıc qiyməti $\mathscr{A}_t$ – ölçülən ζ_0 olan (1) O. s. d. t.-nin Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyini təmin edən klassik şərtlər $(t, x) \in [t_0, \tau] \times H'$ dəyişənlərinin toplusu üzrə $a(t, x)$, $A(t, x)$ əmsallarının kəsilməzliyi və

$$\left.\begin{aligned} \left\| a(t, x_2) - a(t, x_1) \right\|_{H'} &\le \alpha \left\| x_2 - x_1 \right\|_{H'} \\ \left\| A(t, x_2) - A(t, x_1) \right\|_{\mathscr{H}(H,H')} &\le \alpha \left\| x_2 - x_1 \right\|_{H'} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Lipşits şərtləridir.

Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminin bu şərtlərlə isbatı

$$\left\| \zeta \right\|^2 = \sup_t \mathbf{M} \left\| \zeta(t) \right\|_{H'}^2$$

norması ilə təsadüfi funksiyalar fəzasında daraldıcı inikasların klassik metodu ilə həyata keçirilir.

Xüsusi törəmələrli stoxastik differensial tənliklərə tətbiqlərlə bağlı olaraq, aparı əmsalının $a(t, x) = a_0(t)x + a_1(t, x)$ şəklində qeyri – məhdud operator olduğu halında daha ümumi vəziyyət alınır, burada $a_0(t)$ – təyin olunma oblastı $\mathscr{D}$ həmişə sıx olan, H'-də qeyri – məhdud operatordur, bu operator H'-də

$$\frac{dU(t,s)}{dt} = a_0(t)\ U(t,s), \quad U(s,s) = I,$$
$$U(t,\ s) = U(t,\theta)\ U(\theta,s), \quad s \le \theta \le t$$

$U(t,s)$ operatorlarının evolyusion ailəsini doğurur.

Bu halda (1) tənliyi üçün Koşi məsələsi

$$\zeta(t) = U(t,t_0)\zeta_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)\ a_1(s,\zeta(s))ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} U(t,s)\ A(s,\zeta(s))\ d\boldsymbol{w}(s)$$

inteqral tənliyinə ekvivalentdir.

Sonuncu tənlik də yuxarıdakı metodlarla araşdırılır, bu şərtlə ki, onun əmsalları $t > s$ olduqda (4) tipli şərtləri ödəməlidir və $t = s$ olduqda inteqrallananlıq xüsusiyyətlərinə malik olmalıdır.

Təsvir edilən şərtlərdə (1) tənliyinin həlli $\zeta(t)$ H' faza fəzasında Markov təsadüfi prosesidir və onun keçid ehtimalları $P(s,t;x,A) = \mathbf{P}\{\zeta_{s,x}(t) \in \mathscr{A}\}$ düsturu ilə təyin olunurlar, burada $\zeta_{s,x}$, – (1) tənliyinin $\zeta(s) = x$ başlanğıc şərtində həllidir.

$\zeta(t)$ prosesinə H' faza fəzasında kəsilməz məhdud funksiyaların $C(H')$ fəzasında $V(s,t)$ xətti operatorlarının evolyusion ailəsi qarşı qoyulur:

$$V(s,t)f(x) = \mathbf{M}\, f(\zeta_{s,x}(t)) = \int_{H'} f(y)\mathbf{P}(s,t;x,dy),\ s < t\ .$$

Bu ailənin doğuran operatoru

$$\mathfrak{A}(t) = \frac{d}{ds} V(s,t)\Big|_{s=t}$$

2-ci tərtib elliptik differensial operatordur, yəni

$$\mathfrak{A}(t)f(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, f''(x)\,(A(t,x)\cdot,\ A(t,x)\cdot) + (a(t,x),\ f'(x))_{H'}.$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)u = 0$$

parabolik tipli differensial tənlik $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün Kolmoqorov tərs tənliyi adlanır. Bu tənlik üçün Koşi məsələsinin $u(\tau,x) = f(x) \in C_2(H',\mathbb{R})$ başlanğıc şərti ilə, funksional törəmələr və hamar əmsallarla həlli $u(t,x) = V(t,\tau)f(x),\ \ t \le \tau$ düsturu ilə təyin olunur və bu həll $C_2(H',\mathbb{R})$ sinfindən olur.

H' faza fəzasında Borel ölçüləri fəzasında qoşma evolyusion ailə və ölçülər fəzasında bu ailə ilə bağlı differensial tənlik – Kolmoqorov düz tənliyi analoji təyin olunur.

Stoxastik tənliklərin araşdırılması metodları təsadüfi qeyri – antisipativ əmsallarlı (1) tipli O. s. d. t. üçün də təyin olunur. Məsələn, $dY(t) = b(t,\omega)\,Y(t)\,dt + B(t,\omega)Y(t)\,d\boldsymbol{w}(t)$ şəklində xətti tənliyə belə metodları tətbiq etmək olur, burada $b(t,\omega)$, $B(t,\omega)$ – təsadüfi xətti operatorlardır və H'' fəzasından uyğun olaraq H'' və $\mathscr{H}(H,H'')$ fəzalarına təsir göstərirlər. Belə tənlik H'' fəzasında təsadüfi xətti evolyusion ailə təyin edir:

$$S(t,\tau): Y(t) \mapsto Y(\tau)\,,$$
$$S(t,\tau) = S(t,\theta)\ S(\theta,\tau), \quad t \le \theta \le \tau \ \ (\text{sanki yəqin}).$$

Fərz olunur ki,

$$b(t,\omega) = b(t,\zeta(t,\omega)); \quad B(t,\omega) = B(t,\zeta(t,\omega))$$

əmsalları $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin təsadüfi olmayan funksiyalarıdır. Onda $S(t,\tau)$ operatorlarının ailəsi $\zeta(t)$ prosesinin operator multiplikativ funksionalı adlanır.

$$V(t,s)f(x) = \mathbf{M}\, S^*(s,t)\, f(\zeta_{s,x}(t)) \qquad (5)$$

düsturu qiymətləri H''-dən olan H'-də məhdud funksiyaların fəzası $\mathscr{M}(H,H')$-də evolyusion ailə təyin edir. Bu ailənin doğuran operatorunu İto düsturunun vasitəsilə hesabladıqda Kolmoqorov tənliklərinin vektor variantı alınır.

Məs., $B = 0$ olduqda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)\,u + b(t,x)\,u = 0$$

Koşi məsələsinin həlli üçün

$$u(t,x) = \overset{\curvearrowright}{M}\exp\int_t^\tau b^*(s,\zeta(s))ds \cdot f(\zeta_{t,x}(\tau));\ t \le \tau$$

ifadəsi alınır və bu düstur skalyar halda $(H'' = \mathbb{R})$ Feynman – Kas düsturu adlanır. (5) tipli düsturla bağlı mülahizələr, skalyar halda, aparı əmsalları müxtəlif olan stoxastik tənliklərə müvafiq trayektoriyalar fəzasında ölçülərin mütləq kəsilməzliyi haqqında teoremlərə gətirir.

Əd.: [1] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [2] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1979, с. 71–146.

OPERATORQİYMƏTLİ ÖLÇÜ « операторно – значная мера; operator – valued measure », operator ölçü – bax, *Vektor ölçü.*

OPSİONAL ÇOXLUQ « опциональное множество; optional set » – bax, *Martinqal.*

OPSİONAL PROSES « опциональный процесс; optional process » – bax, *Tamamilə ölçülən proses*, *Martinqal.*

OPSİONAL PROYEKSİYASI, PROSESİN « опциональная проекция процесса; optional projection of process » – bax, *Tamamilə ölçülən proyeksiyası*, *prosesin.*

OPTİMAL AN « оптимальный момент; optimal stopping time » – bax, *Optimal dayanma*(sı) təsadüfi prosesin.

OPTİMAL BEYES HƏLLİ / π – OPTİMAL HƏLL « оптимальное Бейесовское решение / π – оптимальное решение; optimal Bayesian decision / π – optimal decision » – bax, *Ardıcıl analiz.*

OPTİMAL DAYANMA « оптимальная остановка; optimal stopping » – bax, *Ardıcıl analiz.*

OPTİMAL DAYANMA(sı) təsadüfi prosesin **« оптимальная остановка** случайного процесса; **optimal stopping** of a random process **»** – optimal τ^* anları üçün əgər

$$\mathbf{M}\, g(X_{\tau^*}) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}\, g(X_\tau)$$

mövcuddursa və ya ε – optimal τ_ε anları üçün

$$\mathbf{M}\, g(X_{\tau_\varepsilon}) > \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}\, g(X_\tau) - \varepsilon$$

münasibəti ödənilərsə, $S = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M} g(X_\tau)$ dəyərinin (qiymətinin) axtarılması məsələsidir. Məsələnin belə (ən sadə) şəkildə ifadə olunmasında $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisinin, hər hansı $X = (X_t, \mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ təsadüfi prosesinin və $\mathfrak{M} = \{\tau\}$ Markov anları ailəsinin, yəni qiymətləri $[0, \infty]$-dan olan, hər bir $t \geq 0$ qiymətində $\{\tau \leq t\} \in F_t$ şərtini ödəyən τ təsadüfi kəmiyyətləri ailəsinin verildiyi fərz olunur.

Mahiyyətcə eynigüclü iki – «marginal» və «Markov» yanaşmaları vardır. «Marginal» yanaşmada X prosesi olduqca ixtiyari ola bilər, «Markov» yanaşmasında X-in vəziyyətlər fəzası olduqca ümumi olan Markov prosesi olduğu fərz olunur. Birinci halda S qiymətinin xarakterizasiyası üçün supermartinqal tip anlayışlardan istifadə olunur. İkinci halda uyğun xarakterizasiya ekssessiv funksiyalar anlayışını istifadə edir. Faza fəzası (E, B) olan, diskret zamanlı $X = (X_{in}, \mathscr{A}_n, \mathbf{P}_x), \quad n = 0, 1, ...$ bircins Markov proseslərinin O. d. nəzəriyyəsinin tipik nəticəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur. $s(x) = \sup_\tau \mathbf{M}_x g(x_\tau)$ olsun. Onda belə məlum olur ki, $s(x)$, – $g(x)$ funksiyasının ən kiçik ekssessiv majorantıdır, yəni $g(x) \leq f(x)$, $\mathbf{M}_x f(x_1) \leq f(x)$ şərtlərini ödəyən $f = f(x)$ funksiyalarından ən kiçiyidir. Bu halda $s(x)$, – $s(x) = \max\{g(x), \mathbf{M}_x f(x_1)\}$ Bellman – Vald tənliyini ödəyir və $\tau_\varepsilon = \inf\{n \geq 0, s(x_n) \leq g(x_n) + \varepsilon\}$ anı ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün ε – optimal andır və bu bütün $x \in E$ üçün $\mathbf{M}_x g(x_\varepsilon) \geq s(x) - \varepsilon$ mənasında anlaşılır.

Dayanmanın optimal qaydalarının ümumi nəzəriyyəsi həm diskret, həm də kəsilməz zaman hallarında [1] – [4]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И., Теория оптимальных правил остоновки, пер. с англ., М., 1977; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976; [3] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977.

ε – OPTİMAL DAYANMA ANI « ε – оптимальный момент остановки; ε – optimal stopping time » – bax, *Ardıcıl analiz.*

OPTİMAL EHTİYATDA SAXLAMA « оптимальное резервирование; optimal redundancy » – bütün istifadə olunan resurslara (dəyər, çəki, əşyanın ölçüləri və s. nəzərdə tutulur) məhdudiyyətlər qoyulduğu halda əlavə (ehtiyatda olan) elementlərdən istifadə olunması hesabına sistemin struktur etibarlılığını artırmaq üçün üsuldur. O. e. s.-nın riyazi məsələsi qeyri – xətti tamqiymətli proqramlama məsələsidir. Bir neçə məhdudiyyət olduğu halda, O. e. s. məsələsi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\max_X \{ R(X) : C_j(X) \leq C_j^0, \quad j = 1, ..., N \},$$

burada $X = (x_1, ..., x_n)$ – sistemdəki n tip ehtiyat elementlər çoxluğu, $R(X)$ – sistemin etibarlılığını xarakterizə edən verilmiş funksionaldır, bu şərtlə ki, sistemdə i tipli x_i elementlərindən ehtiyat vardır, $i = 1, ..., n$, $C_j(X)$ – sistemdə X ehtiyatının olması ilə bağlı olan j tipli məsrəflər funksionalı, N – resurs məhdudiyyətlərinin tiplərinin sayı, C_j^0, – j tipli mümkün olan resurs məsrəfləridir. Adətən, O. e. s. məsələsi bir məhdudiyyətedici faktor halı üçün qoyulur. Bu halda təbii olaraq, O. e. s. məsələsinə tərs məsələ qoyulur:

$$\min_X \{C(X) : R(X) \geq R^0\},$$

burada R^0 – sistemin etibarlılıq göstəricisinə görə verilmiş məhdudiyyətdir.

Ənənəvi O. e. s. məsələsində, ehtiyat elementləri ilə hər biri özünəməxsus tip təmin olunan qarşılıqlı asılı olmayan altsistemlərdən ibarət sistemə baxılır. Bu halda imtinasız işləmə ehtimalı və ya hazırolma əmsalı kimi göstəricilər üçün

$$R(X) = \prod_{1\leq i\leq n} R_i(x_i)$$

ifadəsini yazmaq olar, burada R_i – özündə x_i ehtiyat elementləri olan i-ci altsistemin uyğun etibarlılıq göstəricisidir. Məhdudiyyətlər, bir qayda olaraq,

$$C(X) = \sum_{1\leq i\leq n} c_i x_i$$

kimi götürülür, burada c_i, – i tipli bir elementin dəyəridir.

Məsələnin belə ənənəvi qoyuluşunda onun dəqiq həllini dinamik proqramlama və ya onun modifikasiyası vasitəsilə almaq mümkündür. Bu halda dominar vektorlar ardıcıllığı adlanan elə $X^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ ardıcıllığı qurulur ki, $R(X^k) < R(X^{k+1})$ olsun və ixtiyari X^k üçün bütün mümkün həllər çoxluğunda elə X^* vektoru yoxdur ki, bu vektor üçün

$$R(X^*) > R(X^k), \quad C(X^*) \leq C(X^k)$$

şərtləri eyni zamanda ödənilsin.

O. e. s. məsələsi üçün dominar vektorların tam ardıcıllığının altardıcıllığını koordinatlar üzrə ən sürətli enmənin köməyilə qurmaq olar. Həllərin qaneedici statistik qiymətlərini ümumiləşmiş Laqranj vuruqlar metodu ilə almaq olur (bax, [3]).

Məqsəddaşıyıcı $R(X)$ funksionalı multiplikativ xarakterli olmadıqda (məs., $R(X)$ imtinaya qədər orta işləmə müddəti olarsa), O. e. s. məsələsinin həlli olduqca mürəkkəbləşir. Bu halda məsələnin həlli üçün ya təqribi metod (bax, [3]) və ya statistik realizasiyaların nəticələri əsasında optimizasiyadan istifadə metodu tövsiyyə olunur.

Əd.: [1] Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984;

[2] Вопросы математической теории надежности, M., 1983; [3] Надежность технических систем. Справочник, M., 1985.

OPTİMAL HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « оптимальная решающая функция; optimal decision function » – bax, *Optimallıq*(ğ ı) statistik prosedurun.

OPTİMAL İNTERPOLYASİYA meteorologiyada **« оптимальная интерполяция** в метеорологии; **optimal interpolation** in meteorology **»** – n nöqtədə müşahidələr üzrə meteoroloji elementin ixtiyari «sıfır» nöqtəsinə xətti interpolyasiyasıdır:

$$\widetilde{f}_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i ,$$

O. i. – xətanın kvadratının orta qiyməti:

$$\mathbf{M}\Delta_0^2 = \mathbf{M}\left[f_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{f}_i \right]^2$$

kəmiyyətinin minimumunu təmin edir, burada f_0 və $\hat{f}$ – uyğun olaraq, seçilmiş «sıfır» nöqtəsində f-in əsl və interpolyasiya olunmuş qiymətləridir, $\hat{f}_i$, – f-in i nöqtəsində müşahidə olunmuş qiymətidir, $\hat{f}_i$, f-in bu nöqtədəki qiymətindən təsadüfi $\delta_i = \hat{f}_i - f$ $(c\mathbf{M}\delta_i = 0)$ xətası ilə fərqlənir, p_i – çəki əmsallarıdır.

Adətən, O. i.-da meteoroloji f_i elementinin mütləq qiymətləri əvəzinə onun anomaliyalarına, yəni onun uyğun orta qiyməti $\mathbf{M}f_i$-dən yayınması – $f_i' = f_i - \mathbf{M}f_i$ kəmiyyətinə baxılır. Bu şərt daxilində $\mathbf{M}\Delta_0^2$ xəta kvadratının orta qiymətinin minimumunu təmin edən optimal p_i^0 çəkiləri

$$\sum_{j=1}^{n} p_i^0 (\mu_{ij} + \gamma_{ij} + \gamma_{ji} + \alpha_{ij}) = \mu_{0i} + \gamma_{0i}, \quad i = 1, ..., n, \qquad (1)$$

şəklində n sayda xətti tənliklər sisteminin həlli kimi tapılır, burada $\mu_{ij} = \mathbf{M}(f_i' f_j')$, $\gamma_{ij} = \mathbf{M}(f_i' \delta_j)$ və $\alpha_{ij} = \mathbf{M}(\delta_i \delta_j)$.

Minimal xəta – $(\mathbf{M}\Delta_0^2)_{\min} = \min\limits_{p_i} \mathbf{M}\Delta_0^2$ aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$(\mathbf{M}\Delta_0^2)_{\min} = \mu_{00} - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 (\mu_{0i} + \gamma_{0i}) .$$

Praktiki məsələlərin həllində hesablamaları olduqca sadələşdirən bəzi hipotezlər qəbul etmək olar. Məs., bir çox hallarda hesab etmək olar ki, anomaliyalar meydanı f' bircins və izotropdur, müşahidə xətaları δ_i-lər bütün nöqtələr üçün dəyişməz olan σ_δ^2 dispersiyasına malikdirlər və nə öz aralarında, nə də ki, ölçülən meteoroloji elementin qiymətləri ilə korrelyar deyildirlər. Bu halda (1) tənliyi və (2) düsturu uyğun olaraq aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\sum_{j=1}^{n} p_i^0 r_{ff}(l_{ij}) + \eta^2 p_i^0 = r_{ff}(l_{0i}) , \; i = 1, ..., n$$

və

$$(\mathbf{M}\Delta_0^2)_{\min} = \sigma_f^2 \left[1 - \sum_{j=1}^{n} p_i^0 \, r_{ff}(l_{0i}) \right],$$

burada $r_{ff}(l_{ij})$ – meteoroloji f elementinin meydanının normalanmış korrelyasion funksiyasıdır və bu funksiya yalnız baxılan nöqtələr arasındakı l_{ij} məsafəsindən asılıdır, σ_f^2 – meydanın bütün nöqtələri üçün eyni olan, f elementinin dispersiyasıdır, η^2 – müşahidə xətasının ölçüsü olub, σ_δ^2-nın σ_f^2-na nisbəti kimi təyin olunur.

O. i.-nın dəqiqliyini qiymətləndirmək üçün bəzən $\mathbf{M}\Delta_0^2$ mütləq kəmiyyəti əvəzinə $\varepsilon_0^2 = \mathbf{M}\Delta_0^2 / \sigma_f^2$ nisbi göstəricisindən istifadə olunur, bu kəmiyyət η^2 ilə analoji interpolyasiya xətasının ölçüsü adlandırılır.

O. i. prosedurunun ümumiləşməsi meteoroloji meydanların optimal uzlaşma prosedurudur; bu prosedur meteoroloji f elementi haqqında yalnız f üzərində müşahidə nəticələri əsasında informasiyanın alınmasından ibarət olmayıb, eyni zamanda digər meteoroloji elementlər haqqında məlumatlardan da istifadə edir. Uzlaşma proseduru hətta o hallarda da aparılır ki, bir meteoelementin müxtəlif müşahidələr sistemi ilə alınmış meydanları alınır və ya meydanın biri faktiki müşahidələrdən, digəri proqnozun nəticəsindən ibarət olur.

O. i. ilə analoji olaraq meteoroloji meydanların optimal uzlaşma proseduru f meteoelementinin «sıfır» nöqtəsində təqribi qiymətinin f üzərində $i = 1, ..., m$ nöqtələrində m sayda müşahidə nəticələrinin və hər hansı digər φ meteoelementi üzərində ilk $k = 1, ..., n$ nöqtələrində üst-üstə düşən müşahidə nəticələrinin (qismən və ya tamamilə) xətti kombinasiyası kimi axtarılmasına gətirilir. Bu halda uzlaşma düsturu aşağıdakı şəkildə olur:

$$\widetilde{f}_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i \hat{f}_i + \sum_{k=1}^{n} q_k \hat{\varphi}_k ,$$

burada çəki elementləri p_i, q_k

$$\mathbf{M}\Delta_0^2 = \mathbf{M}\left[f_0 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \hat{f}_i + \sum_{k=1}^{n} q_k \hat{\varphi}_k \right) \right]^2$$

kəmiyyətinin minimizasiyası şərtindən tapılır.

O. i.-da olduğu kimi meteoroloji meydanların optimal uzlaşma proseduru, adətən, $f_i' = f_i - \mathbf{M}f_i$ və $\varphi_k' = \varphi_k - \mathbf{M}\varphi_k$ normalarından yayınma meydanlarına nəzərən realizə olunur. Fərz olunarsa ki, bu meydanlar bircins və izotropdur, müşahidələrin təsadüfi xətalarının $\sigma_{\delta_{fi}}^2 = \mathbf{M}[\hat{f}_i - f_i]^2 = \sigma_{\delta_f}^2$ və $\sigma_{\delta_{\varphi k}}^2 = \mathbf{M}[\hat{\varphi}_k - \varphi_k]^2 = \sigma_{\delta_\varphi}^2$ dispersiyaları nöqtədən nöqtəyə keçdikdə dəyişməzdirlər, həmçinin δ_f və δ_φ xətaları müxtəlif nöqtələrdə öz aralarında və ölçülən meteoroloji f və φ elementləri ilə qeyri – korrelyardırlar, optimal çəki əmsalları p_i^0 və q_k^0 aşağıdakı $m + n$ sayda xətti tənliklər sistemindən tapılır:

$$\sum_{j=1}^{m} p_i^0 r_{ff}(l_{ij}) + \lambda \sum_{k=1}^{n} q_k^0 r_{f\varphi}(l_{ik}) + \eta^2 p_i^0 = r_{ff}(l_{0i}),$$
$$i = 1, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 r_{f\varphi}(l_{ik}) + \lambda \sum_{\upsilon=1}^{n} q_\upsilon^0 r_{\varphi\varphi}(l_{k\upsilon}) + \lambda \xi^2 q_k^0 = r_{\varphi\varphi}(l_{0k}),$$
$$k = 1, ..., n.$$

Burada $r_{ff}(l_{ij})$ və $r_{\varphi\varphi}(l_{k\upsilon})$ – uyğun nöqtələr arasında məsafədən asılı olan, f və φ meteoroloji elementlər meydanlarının normalanmış korrelyasion funksiyalarıdır, $r_{f\varphi}(l_{ik}) = \mathbf{M}(f_i' \varphi_k') / \sigma_f \sigma_\varphi$ – bu meydanların normalanmış qarşılıqlı korrelyasion funksiyalarıdır və bunlar yalnız i-ci və k-cı nöqtələr arasında məsafədən asılıdırlar, $\eta^2 = \sigma_{\delta_f}^2 / \sigma_f^2$, $\xi^2 = \sigma_{\delta_\varphi}^2 / \sigma_\varphi^2$, $\lambda = \sigma_\varphi / \sigma_f$.

Meteoroloji meydanların optimal uzlaşma xətasının ölçüsü

$$\varepsilon_0^2 = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i^0 r_{ff}(l_{0i}) - \lambda \sum_{k=1}^{n} q_k^0 r_{\varphi\varphi}(l_{0k})$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

Meteorologiyada O. i. ideyası A. N. Kolmoqorovun [6] və N. Vinerin [8] işlərilə başlanmışdır (bax, həm də [7]). Hal-hazırda O. i. və meteoroloji meydanların optimal uzlaşması obyektiv analizin avtomatlaşdırılmış hesablama prosedurunun əsasını təşkil edir; bu prosedur ədədi proqnozdan əvvəl aparılır və hər hansı requlyar şəbəkənin qovşaqlarında meteoroloji element meydanının ayrı-ayrı nöqtələrdəki verilənlər üzrə təqribi qiymətlərinin bərpası məqsədini və ya onun izoxətlər ailəsi şəklində təsvir edilmə məqsədini güdür (bax, [1], [9]). O. i.-nın meteorologiyada digər tətbiqləri müşahidə şəbəkəsinin rasional planlaşdırılması, meteoroloji müşahidələrin nəticələrinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi, meteoroloji meydanların orta qiymətlərinin təyin olunması kimi məsələlərin həlli ilə əlaqədardır (bax, məs., [1], [3], [4], [5]). Peyk meteoinformasiyasının öyrənilməsində effektiv sxemlərin işlənilməsi sahəsində O. i. metodları geniş surətdə yayılmışdır (dördölçülü analiz, bax, [2], [10]).

Əd.: [1] Гандин Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963; [2] Гандин Л. С., Четырехмерный анализ метеорологических полей, Л., 1976; [3] Гандин Л. С., Каган Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976; [4] Дроздов О. А., Шепелевский А. А., «Тр. научно-исследовательских учреждений Главного управления Гидрометеослужбы», 1946, сер. 1, в. 13, с. 65–115; [5] Каган Р. Л., Осреднение метеорологических полей, Л., 1979; [6] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, № 1, с. 3–14 (Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 255–63); [7] Яглом А. М., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 5, с. 3–168; [8] Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949; [9] Panofsky H. A., «J. Meteorol.», 1949, v. 6, № 6, p. 386–92; [10] Miyakoda K., Talagrand O., «Tellus», 1971, v. 23, № 4–5, p. 310–17.

OPTİMAL KRİTERİ « оптимальный критерий; optimal test » – konkret anlamda dəqiqləşdirilən, hər hansı mənada «ən yaxşı» gücə malik *statistik kriteridir*. Məs., *müntəzəm ən güclü kriteri* və ya hər hansı aprior paylanmaya uyğun Beyes kriterisi və b. belə kriterilərdir. Bax, *Optimallıq*(ğ ı) statistik prosedurun.

OPTİMAL STRATEGİYA « оптимальная стратегия; optimal strategy / policy » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*; *İdarəolunan diffuzion proses*; *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

ε – OPTİMAL STRATEGİYA « ε – оптимальная стратегия; ε – optimal strategy / policy » – bax, *İdarəolunan diffuzion proses*; *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

OPTİMALLIĞIN YOXLANILMASI, PLANIN « оптимальности плана проверка; checking of the optimality of a design » – reqression eksperimentin informasion matrisi $m(\xi)$-nin $m(\xi^*)$-da differensiallanan qabarıq Φ funksiyası üzrə kriterisinə görə ξ^* planının optimallığının yoxlanılmasıdır. Bu şəkildə P. o. y., ekvivalentlik teoreminə əsasən,

$$\max_{x \in X} \psi_T(x) = \operatorname{tr} T m(\xi^*)$$

şərtinin yoxlanılmasına gətirilir, burada $\psi(t) = f^{\mathrm{T}}(x) T f(x)$, $T = \Phi(m(\xi^*))$, – $\Phi(m)$ funksiyasının qradiyent matrisi, $f(x)$ – prediktorlar vektorudur (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*).

OPTİMALLIQ(ğ ı) statistik prosedurun **« оптимальность** статистической процедуры; **optimality** of a statistical procedure**»** – statistik prosedurun effektivliyini xarakterizə edən hər hansı funksionala ekstremum təmin edən (baxılan prosedurlar sinfində) *statistik prosedurun* xassəsidir. Statistik prosedurun effektivliyi bu prosedur əsasında edilən statistik nəticələrin doğruluğu nöqteyi – nəzərindən statistik prosedurun keyfiyyətini təyin etməyə və bu prosedurla təyin olunan statistik eksperimentin aparılmasına sərf olunan məsrəfləri təyin etməyə xidmət edən anlayışdır. Statistik prosedurun O. anlayışı o qədər də dəqiq təyin olunmadığına baxmayaraq, bu anlayış konkret tərifl ərdə (məs., minimaks mənada optimallıq, orta mənada optimallıq) ciddi riyazi məna alır.

Adətən, statistik həllər nəzəriyyəsində prosedurun effektivlik ölçüsü kimi onun tam riski anlaşılır. Statistik eksperiment əvvəlcədən təyin olunduğu və statistik prosedur həlledici funksiya ilə eyniləşdirildiyi halda, statistik prosedurun O. uyğun həlledici funksiyanın optimallığı kimi anlaşılır.

K – həlledici funksiyaların baxılan sinfi olsun. Əgər K-da elə müntəzəm yaxşı δ^* həlledici funksiyası varsa ki, bu funksiya $\delta \in K$ üzrə $R(\theta, \delta)$ risk funksiyasının minimumunu Θ parametrik fəzasının bütün $\theta \in \Theta$ nöqtələrində eyni zamanda təmin etsin, onda bu həlledici funksiya K sinfində optimal həlledici funksiya adlanır. Ya baxılan sinif qeyd olunduqda qısalıq üçün və ya bu sinif bütün həlledici funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşdüyü halda və ya bəzən «optimal həlledici funksiya» termini həlledici funksiyaların baxılan sinfinə aid olmadan belə istifadə olunur. Lakin riyazi statistikanın bir çox məsələlərində müntəzəm yaxşı həlledici funksiyalar yalnız həlledici funksiyaların olduqca dar sinfində olur və buna görə də, optimallıq üçün daha zəif kriterilərdən istifadə olunur; bu zaman optimal həlledici funksiyanı təyin edərkən, bu optimallığın hansı mənada anlaşıldığı göstərilir. Belə yanaşmada həlledici funksiyanın effektivlik ölçüsü (adətən, onun riski) $R(\theta, \delta)$ risk funksiyasının funksionalı $\Phi(\delta)$ kimi təyin olunur və bu funksional isə araşdırılan obyekti xarakterizə edən $\theta \in \Theta$ parametrinin naməlum qiyməti haqqında qərar qəbul etmək üçün həlledici funksiyadan istifadə edən statistikin məruz qaldığı orta itkini ifadə edir.

Misal 1. $\Phi_1(\delta) = R(\theta_0, \delta)$ olsun, burada θ_0, – θ parametrinin qeyd olunmuş qiymətidir (yəni Φ_1 – Vald riskidir). Φ_1 funksionalının minimumunu təmin edən (verilən K sinfində)

$\delta^* \in K$ həlledici funksiyası θ_0 nöqtəsində optimal həlledici funksiya adlanır. Bununla yanaşı, bu həlledici funksiya θ_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında yerləşən bütün θ-lar üçün eyni zamanda $\delta \in K$ üzrə $R(\theta, \delta)$ risk funksiyasının minimumunu təmin edərsə, onda belə həlledici funksiya θ_0 nöqtəsində lokal optimal həlledici funksiya adlanır.

Misal 2. $\Phi_2(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$. Belə funksional minimaks mənada O. anlayışına uyğundur. $\Phi_2(\delta)$ funksionalının minimumunu təmin edən δ^* həlledici funksiyası minimaks mənada optimal həlledici funksiya adlanır [$\Phi_2(\delta^*)$ kəmiyyəti minimaks riskə bərabərdir].

Misal 3. $\Phi_3(\delta) = \int_{\Theta} R(\theta, \delta)\, G(d\theta)$, burada $G(\cdot)$, – Θ-da verilmiş hər hansı ölçüdür. Bu funksionala orta mənada (çəki funksiyası G olan) O. anlayışı uyğundur, $\Phi_3(\delta)$ funksionalının minimunu təmin edən δ^* həlledici funksiyası orta mənada optimal həlledici funksiya adlanır. Əgər G ölçüsü kimi θ parametrinin aprior paylanması kimi baxılan ehtimal ölçüsü götürülərsə (bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə), onda bu δ^* həlledici funksiyası optimal Beyes (və ya sadəcə Beyes) həlledici funksiyası adlanır və $\Phi_3(\delta^*)$ kəmiyyəti bu halda Beyes riskinə bərabərdir.

Əgər optimal həlledici funksiyanın tərifindəki həlledici funksiyalar sinfi K həlledici funksiyaların hər hansı xassəsi ilə təyin olunarsa (məs., meylsiz həlledici funksiyalar sinfi), bəzən optimal həlledici funksiyanın adına müvafiq dəqiqləşdirilmə daxil olunur (məs., optimal meylsiz həlledici funksiya, optimal invariant həlledici funksiya).

Statistik eksperiment əvvəlcədən təyin olunmadığı halda həlledici funksiyanın O. anlayışı, adətən, verilən prosedurla təyin olunan statistik eksperimentin aparılmasına sərf olunan məsrəflərin minimallaşdırılması ilə əlaqələndirilir, bu şərtlə ki, verilmiş məhdudiyyətlər son qərarların keyfiyyətində nəzərə alınsın. Məs., ardıcıl analizdə iki sadə hipotezin yoxlanılması məsələsində həlledici funksiyanın O. orta müşahidə müddətini (dayanma anına qədər) minimallaşdırır, orta müşahidə müddəti verilən prosedurun köməyilə bu hipotezlərin müqayisəsi üçün tələb olunur və bu hipotezlərin ehtimalları birinci növ və ikinci növ səhv ehtimalları olub, verilmiş qiymətləri aşmamalıdırlar. θ parametrinin interval qiymətləndirilməsində (müşahidələrin ardıcıl sxemində) elə optimal statistik prosedur vermək olar ki, bu prosedur verilən etibarlı ehtimalla θ parametrini daxilinə alan verilən uzunluqlu etibarlı intervalın qurulması üçün zəruri olan orta müşahidələr sayını minimallaşdırsın.

Konkret statistik məsələlərdə O.-ın digər təriflərinə də təsadüf olunur.

Riyazi statistikanın asimptotik məsələlərində seçimin həcmi n və ya müşahidə müddətinin, adətən, qeyri – məhdud olaraq artdığı hallarda, statistik prosedurun effektivlik ölçüsü kimi sonlu n və ya T üçün hesablanmış uyğun xarakteristikaların limit qiymətləri ($n \to \infty$ və ya $T \to \infty$ olduqda) götürülür və təbii olaraq, eyni adlı statistik prosedurun asimptotik O. anlayışı daxil olunur (məs., minimaks mənada asimptotik optimal prosedur). Adətən, optimal statistik prosedurların alınması çətin məsələ sayılır, lakin, bununla belə, bu məsələlərdə asimptotik yanaşma ilə asimptotik optimal prosedurlar almaq mümkün olur. Bir çox konkret məsələlərdə adi tətbiq edilən prosedurların bu və ya digər mənada asimptotik O.-nı isbat etmək olur (məs., *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi* asimptotik minimaks, asimptotik Beyes kriterisidir), bununla belə, n və T sonlu olduğu bir çox hallarda bu prosedurlar heç bir O. xassələrinə malik olmur (məs., qiymətləndirmə nəzəriyyəsində *maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti*).

Riyazi statistikanın konkret bölmələrində statistik prosedurların digər effektivlik ölçüləri və bunlarla bağlı optimal prosedurlar anlayışlarına da təsadüf edilir.

OPTİMALLIQ PRİNSİPİ stoxastik **« оптимальности принцип** стохастический; stochastic **optimality principle »** – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma.*

OPTİMALLIQ TƏNLİYİ « оптимальности уравнение; optimality equation » – bax, *Stoxastik dinamik proqramlaşdırma*, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

ORDİNAL DƏYİŞƏN « порядковая переменная; ordinal variable » – bax, *Prediktant*.

ORDİNAL ƏLAMƏT « ординальный признак; ordinal criterion » – bax, *Çoxölçülü statistik analiz*.

ORDİNAL YANAŞMA « ординалистский подход; ordinal approach » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi*.

ORDİNAR MODEL(i) **« ординарная модель; ordinary model »** süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılmasının – ölçmələrin (kanalların) elə şərti paylanmasıdır ki, planların ən böyük asimptotik sürəti xətaların ixtiyari kiçik ehtimalları ilə kanalın giriş və çıxışı arasında Şennon informasiyasının maksimal qiymətinə bərabərdir. Əgər z çıxışı $[x(\lambda_1) + x(\lambda_2) + x(\lambda_3)] \times (\mathrm{mod}\, 2) + x(\lambda_4)$, $x(\cdot) = 0$ və ya 1 olarsa, onda model ordinar deyildir. Şərti entropiya terminlərində ordinarlığın kafi şərtləri verilmişdir. Əgər, məs., kanal simmetrik olarsa, yəni çıxış paylanması girişlərin nömrələrini dəyişdikdə dəyişmirsə, onda kanal bircinsdir.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983, гл. 15; [2] Малютов М. Б., Матеев П. С., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 1, с. 109–27.

ORDİNAR NÖQTƏVİ PROSES « ординарный точечный процесс; ordinary point process » – elə təsadüfi *nöqtəvi* Φ *prosesidir* ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün bu prosesin vəziyyətlərinin faza fəzasının elə $\mathfrak{Z}_\varepsilon = \{Z_{\alpha\varepsilon}\}$ bölgüsü tapılar ki,

$$\sum_{\alpha} \mathbf{P}\{\Phi(Z_{\alpha\varepsilon}) > 1\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənsin. O. n. p. *sadə nöqtəvi prosesdir.* Əgər düzxətdə stasionar təsadüfi nöqtəvi Φ prosesi üçün $h \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\Phi((t, t+h]) > 1\} = o(h)$$

münasibəti ödənilərsə, Φ prosesi O. n. p.-dir.

ORDİNARLIĞI, AXININ « ординарность потока; simlicity of a flow » – *giriş axının* elə xassəsidir ki, axın hadisələrinin anları t_n-lər 1 ehtimalla müxtəlifdirlər. Giriş axını stasionar olduğu (bax, *Stasionarlığı, axının*) halda A. o. onun aşağıdakı xassələrindən alınır: qeyd olunmuş Δ uzunluqlu

zaman intervalında axında birdən çox hadisə baş verməsi ehtimalı, $\Delta \to 0$ olduqda, $o(\Delta)$ -ya bərabərdir. Giriş axınları nəzəriyyəsinin elementar şərhində A. o.-nın tərifi kimi elə bu xassə götürülür. Ani intensivlik və ani parametrin eynilik kimi üst-üstə düşməsi A. o.-na səbəb olur (bax, *Qeyri – stasionar axın*).

Əd.: [1] Франкен П. и др., Очереди и точечные процессы, пер. с англ., К., 1984.

OREY TEOREMİ « Орея теорема; Orey theorem » – S. Oreyin Harris qayıdışlı Markov zəncirləri üçün *erqodik teoremidir.* Bax, *Markov zənciri.*

ORNŞTEYN METRİKASI « Орнштейна метрика; Ornstein metric », $\bar{d}$ – metrika, – vəziyyətləri sayı sonlu və diskret zamanlı dar mənada *stasionar* $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *təsadüfi prosesləri* çoxluğunda (daha dəqiq, belə proseslərin sonsuzölçülü paylanmaları çoxluğunda) metrikadır; D. Ornşteyn tərəfindən daxil edilmişdir (bax, [1], [2]). Bu metrika $\bar{d}(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d_n(\mu_n, \nu_n)$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada μ_n, ν_n – uyğun olaraq, $(X_1, ..., X_n)$ və $(Y_1, ..., Y_n)$ təsadüfi vektorlarının paylanmalarıdır, d_n – Kantoroviç mənada bu paylanmalar arasında məsafə olub (bax, [3], [4]), n uzunluqlu ardıcıllıqlar fəzasında Hemminq normalanmış metrikasına uyğundur. Dar mənada stasionar təsadüfi ardıcıllıqlar çoxluğunu, ölçü saxlanılmaqla qarşılıqlı birqiymətli olaraq eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığına sanki yəqin yenidən kodlaşdırmaq mümkün olduğundan, belə çoxluq O. m.-da qapalıdır (bax, [2]). Bu metrika terminlərində yenidən kodlaşdırılması mümkün olan ayrıca götürülmüş stasionar təsadüfi ardıcıllığının qapalılığı üçün zəruri və kafi şərtlər ifadə etmək mümkündür (bax, [2]). Vəziyyətləri çoxluğu ixtiyari olan təsadüfi proseslər halı üçün O. m.-nın ümumiləşmələri mövcuddur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] Орнстейн Д., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 3, с.125–36; [2] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [3] Канторович Л. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 37, № 7–8, с. 227–29; [4] Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш., «Докл. АН СССР», 1957, т. 115, № 6, с. 1058–61; [5] Gray R., Neuhoff D., Shields P., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 2, p. 315–28; [6] Schwarz G., «J. Math. Analysis and Appl.», 1980, v. 76, № 1, p. 146–58.

ORNŞTEYN – ULENBEK PROSESİ « Орнштейна – Уленбека процесс; Ornstein – Uhlenbeck process » – riyazi gözləməsi sıfra bərabər, korrelyasion funksiyası eksponensial «sönən» və aşağıdakı kimi ifadə olunan

$$\mathbf{M}V(t)V(t+\tau) = B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \ \alpha > 0$$

$V(t)$ – Qauss *stasionar təsadüfi prosesidir*. O. – U.p.

$$m\,dV(t) + \beta V(t)dt = d\,w(t) \qquad (*)$$

şəklində stoxastik tənliyin (Lanjeven tənliyi) stasionar həlli kimi də təyin oluna bilinər, burada $w(t)$ – Viner prosesidir (odur ki, $dw(t)/dt$ – bəyaz küy ümumiləşmiş təsadüfi prosesdir), m və β – müsbət sabitlərdir və $\beta/m = \alpha$.

(*) tənliyi sərbəst hissəciyin birölçülü Braun hərəkətini təqribən təsvir edir, bu zaman $V(t)$ – hissəciyin sürəti kimi interpretasiya olunur, m onun kütləsi, $\beta V(t)$ – sürətə münasib olan «özlü sürtünmə» qüvvəsidir. Radiusu a -ya bərabər sferik hissəcik üçün β əmsalı hidrodinamik Stoks düsturuna əsasən $6\pi\eta a$ -ya bərabərdir, η – özlülük əmsalıdır. $w'(t)$ bəyaz küyü istilik hərəkətində olan mühit molekullarının xaotik zərbələrinin yaratdığı və Braun hərəkətinə əsas səbəb olan «təsadüfi qüvvədir». A. Eynşteyn (A. Einstein) və M. Smoluxovski (M. Smoluchowski) tərəfindən 1905 – 06-cı illərdə inkişaf etdirilmiş Braun hərəkətinin ilkin nəzəriyyəsində hissəciyin inersiyası nəzərə alınmırdı, yəni hesab olunurdu ki, $m = 0$; belə olan halda (*) tənliyi o nəticəyə gətirirdi ki, Braun hissəciyinin koordinatı

$$X(t) = \int_0^t V(t')\,dt'$$

$\beta^{-1}w(t)$ -yə bərabərdir, yəni Viner prosesidir. Beləliklə, Viner prosesi Braun hərəkətinin Eynşteyn – Smoluxovski modelini təsvir edir (bu hərəkətin digər Braun hərəkəti prosesi adı buna görədir); bu proses differensiallanan olduğundan Eynşteyn – Smoluxovski nəzəriyyəsində Braun hərəkəti edən hissəciyin sonlu sürəti yoxdur. (*) tənliyinə istinadlanan Braun hərəkətinin dəqiqləşdirilmiş nəzəriyyəsində $m \neq 0$ şərti 1930-da L. Ornşteyn və Q. Ulenbek tərəfindən təklif olunmuşdur (bax, [1], [2]); sonradan, 1934-də S. N. Bernşteyn (bax, [3]) və A. N. Kolmoqorov tərəfindən bu nəzəriyyə [1]-dəki metodlardan fərqli metodlar istifadə edilərək irəli sürülmüşdür. Ornşteyn – Ulenbek nəzəriyyəsində Braun hissəsiyinin sürəti $V(t)$ sonludur, lakin onun təcili sonsuzdur (çünki, O. – U. p. differensiallanmayandır); təcilin sonlu olması üçün nəzəriyyə dəqiqləşdirilməlidir və bu zaman ideallaşdırılmış $w'(t)$ bəyaz küyü ilə təsadüfi qüvvə arasında fərq nəzərə alınmalıdır.

(*) tənliyinin harmonik ossilyatorunu birölçülü Braun hərəkətinin təsviri üçün istifadə etmək olar, lakin bu zaman onun kütləsi nəzərə alınmamalı və $V(t)$ -nin ossilyatorun koordinatı olduğu, $-m\dfrac{dV}{dt}$ -nin özlü sürtünmə qüvvəsi olduğu, $-\beta V$ -nin ossilyatoru saxlayan requlyar möhkəmlik qüvvəsi $w'(t)$ -nin isə molekulyar nöqtələrin əmələ gətirdiyi təsadüfi qüvvə olduğu fərz olunmalıdır. Beləliklə, O. – U. p. sərbəst hissəciyin Braun hərəkətinin Eynşteyn – Smoluxovski modelinə yaxın, Braun hərəkəti edən harmonik ossilyatorun koordinatının pulsasiyalar modelini də ifadə edir.

O. – U. p. diffuzion tipli zaman üzrə bircins Markov prosesidir və əksinə, eyni zamanda stasionar təsadüfi proses, Qauss prosesi və Markov prosesi olan $V(t)$ prosesi O. – U. p.-dir. O. – U. p.-ni Markov prosesi kimi onun keçid ehtimal sıxlığı $p(t, x, y)$ ilə xarakterizə etmək məqsədəuyğun olur; $p(t, x, y)$ funksiyası

$$p(t, x, y) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})^2]} \exp\left\{-\frac{(y - xe^{-\alpha t})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})}\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur və o,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \frac{\partial (y\,p)}{\partial y} + \alpha\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

şəklində uyğun Fokker – Plank tənliyinin (yəni Kolmoqorov düz tənliyinin) fundamental həllidir.

O. – U. p.-nin bir çox xassələrini (onun Markov xassəliliyi də daxil olmaqla) Viner prosesinin məlum xassələrindən almaq olur, bu halda

$$w_0(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sigma} V\left(\frac{\ln t}{2\alpha}\right)$$

prosesinin standart Viner prosesi olduğundan istifadə olunur (bax, [5]). Buradan alınır ki, O. – U. p.-nin realizasiyaları kəsilməzdirlər və sanki yəqin heç yerdə differensiallanmayandırlar və sanki yəqin

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|V(t)-V(0)|}{(4\alpha\sigma^2 t \ln\ln\frac{1}{t})^{1/2}} = 1$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|V(t)|}{(2\sigma^2 \ln t)^{1/2}} = 1$$

münasibətlərini ödəyirlər. Bax, *Lanjeven tənliyi*.

Əd.: [1] Uhlenbeck G. E., Ornstein I. S., «Phys. Rev.», 1930, v. 36, № 3, p. 823–41; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Бернштейн С. Н., «Докл. АН СССР», 1934, т. 1, № 1, с. 1–9; № 7, с. 361–65; [4] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 168–70; [5] Doob J. L., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 351–69.

ORTA ƏLAQƏ ALQORİTMİ « средней связи алгоритм; average linkage algorithm » – *təsnifatın iyerarx prosedurlarının* elə xüsusi halıdır ki, burada iki sinif arasında yaxınlıq ölçüsü bu siniflərə aid olan obyektlərdən təşkil olunmuş bütün mümkün cütlər üçün yaxınlıq ölçülərinin ədədi ortası kimi təyin olunur (cütlərdəki obyektlər müxtəlif siniflərdən olmalıdırlar).

ORTA FAYDALILIQ « средняя полезность; mean utility » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

ORTA GƏLİR KRİTERİSİ « среднего дохода критерий; average reward criterion » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

ORTA İŞLƏNİLMƏ MÜDDƏTİ « средняя наработка; mean operating time » – bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin.*

ORTA KƏMİYYƏT « средняя величина; mean value » – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər *statistikasında* aşağıdakı kimi təyin olunan anlayışdır (bax, [1]). Ümumi təbiətli $\mathfrak{X}$ fəzasında qiymətlər alan X təsadüfi elementi üçün $\rho : \mathfrak{X}^2 \to [0, 1]$ yaxınlıq ölçüsünə nəzərən O. k.

$$\mathbf{M}(X, \rho) = \arg\min_{y\in\mathfrak{X}} \mathbf{M}\,\rho(X, y)$$

düsturu ilə təyin olunur və burada riyazi gözləmə X təsadüfi elementinə uyğun ehtimal ölçüsü üzrə götürülür. $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathfrak{X}$ seçimi üçün yaxınlıq ölçüsü ρ-ya nəzərən O. k.

$$\mathbf{M}_n(\rho) = \arg\min_{y\in\mathfrak{X}} \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i, y)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Böyük ədədlər qanunlarının analoqları bu halda aşağıdakı kimi ifadə olunur: bəzi requlyarlıq şərtlərində seçimi orta $\mathbf{M}_n(\rho)$ n artdıqda nəzəri orta $\mathbf{M}(X, \rho)$-ya yığılır (bax, [2]). $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^1$ olduqda $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathbb{R}^1$ seçimi üçün orta kəmiyyət elə $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiya

$$\min_{1\le i\le n} X_1 \le f(X_1, X_2, ..., X_n) \le \max_{1\le i\le n} X_n$$

münasibətini ödəsin (bax, *Ölçmələr nəzəriyyəsi*, *Kemeni mediani*, *Kolmoqorov orta kəmiyyətləri*).

Əd.: [1] Орлов А. И., в кн.: Вопросы кибернетики, М., 1979, в. 58, с. 17–33; [2] Орлов А. И., в кн.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях, М., 1982, с. 4–12.

k – ORTA KƏMİYYƏTLƏR METODU « k – средних метод; k – means method » – k sayda $(k << n)$ verilən siniflər üzərində n sayda müşahidələrin araşdırılan ardıcıl təsnifetmə prosedurlarından ən ümumisi və ən tədqiq olunmuş birisidir (bax, [1]). k – O. k. m.-nun işləmə sxemi k sayda etalon nöqtənin bunlara qarşı qoyulan çəkilərin uyğun hesablanılması ilə ardıcıl hesablanılmasından ibarətdir. Etalon nöqtələr və çəkilərin hesablanılması başa çatdıqdan sonra müşahidələr k qrupa bölünür. Bu halda j-ci etalon nöqtəsi ən yaxın nöqtə olan (hər hansı metrika mənasında) müşahidələr j-ci qrupa aid olunur, $j = 1, ..., k$.

Əd.: [1] Mac Queen J., в кн.: Proceed Fifth. Berk. Symp. Math. Stat. and Probab., v. 1, Berk. – Los Ang., 1967, p. 281–97.

ORTA KƏMİYYƏTLƏR VEKTORU « средних вектор; vector of means » – çoxölçülü $X = (X_1, ..., X_p)^{\mathsf{T}}$ təsadüfi kəmiyyətinin komponentlərinin qruplaşma mərkəzinin xarakteristikasıdır. O. k. v., nəzəri olaraq, riyazi gözləmələr vektoru $\mathbf{M}X = (\mathbf{M}X_1, ..., \mathbf{M}X_p)^{\mathsf{T}}$ kimi təyin olunur. n həcmli seçim üzrə p – ölçülü $X_1, ..., X_n$ müşahidələrinin O. k. v.-nun statistik qiyməti hər bir komponenti bu komponentin müşahidə olunan qiymətlərinin (x_i-lərin) seçimi ortası olan vektordur (ədədi ortasıdır), yəni

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$$

statistikasıdır.

Əd.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., 1963.

ORTA QİYMƏT « среднее; оценка; estimator of mean », orta statistik qiymət, – ümumi çoxluğun uyğun riyazi gözləməsinin *statistik qiymətidir.* $x_1, ..., x_n$ – riyazi gözləməsi θ və dispersiyası σ^2 olan paylanmadan n həcmli seçim olarsa, seçimi orta

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

düsturu ilə ifadə olunur, $\bar{x}$, – θ parametrinin minimal dispersiyalı xətti statistik qiymətidir.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

ORTA QİYMƏT(i) μ ehtimal ölçüsünün **« среднее** вероятностной меры μ; **mean / barycenter** of a probability measure**»**, barimərkəz – B fəzasının özünə eyniliklə X inikasının, bu və ya digər

mənada, $\int X\,d\mu$ inteqralıdır, burada μ, – B fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbrdə təyin olunmuş ölçüdür.

Misal. B – separabel Banax fəzası, μ, – B fəzasında elə Borel ehtimal ölçüsü olsun ki, $\int\limits_B |x|\,\mu(dx) < \infty$ şərtini ödəsin. Onda μ ölçüsünün O. q. – $\int\limits_B x\,\mu(dx)$ Boxner inteqralıdır.

ORTA QİYMƏT(i) təsadüfi çoxluğun **« среднее значение** случайного множества X ; **mean value** of a random set **»** realizasiyaları A fəzasında olan X təsadüfi çoxluğunun orta qiyməti –

$$M\rho(X, B) = \inf_{K \subseteq A} M\rho(X, K)$$

xassələrini ödəyən $B \in A$ çoxluğudur, burada ρ, – $A \times A$ fəzasından olan, həqiqiqiymətlərli hər hansı funksiyadır (bir qayda olaraq, metrika, psevdometrika, simmetrika və b.). X təsadüfi çoxluğunun $X_1, \dots, X_n$ realizasiyaları üzrə qurulmuş, ρ metrikasına nəzərən empirik O. q.

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(X_k, B) = \inf_{K \subseteq A} \sum_{k=1}^{n} \rho(X_k, K)$$

xassəsini ödəyən $K \subseteq A$ çoxluğuna deyilir.

Təsadüfi çoxluqlar statistikasında təsadüfi çoxluğun O. q.-nin rolu böyük ədədlər qanununun doğru olması ilə (ödənilməsi ilə) təyin olunur (bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün, *Statistika*(sı) qeyri– ədədi təbiətli obyektlərin).

ORTA QİYMƏT(i) **/ RİYAZİ GÖZLƏMƏ**(si) təsadüfi elementin **« среднее значение / математическое ожидание** случайного элемента; **mean / expectation value** of a random element **»** – bax, *Riyazi gözləmə*(si) təsadüfi elementin.

ORTA QİYMƏT(i) **/ RİYAZİ GÖZLƏMƏ**(si) təsadüfi funksiyanın **« среднее значение / математическое ожидание** случайной функции; **mean / expectation value** of a random function **»** – bax, *Momentlər funksiyası.*

ORTA QİYMƏT(i) **/ RİYAZİ GÖZLƏMƏ**(si) təsadüfi kəmiyyətin **« среднее значение / математическое ожидание** случайной величины; **mean / expectation value** of a random variable **»** – bax, *Riyazi gözləmə.*

ORTA METRİKA « средняя метрика; mean metric » – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunda

$$\varkappa_1(X, Y) = \int |F_X(x) - F_Y(x)|\,dx$$

düsturu ilə təyin olunan sadə *ehtimal metrikasıdır*; burada F_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Əgər $F_X^{-1}(t) = \sup\{u : F_X(u) \le t\}$ funksiyası F_X-ə tərs funksiyadırsa, onda

$$\varkappa_1(X, Y) = \int\limits_0^1 |F_X^{-1}(t) - F_Y^{-1}(t)|\,dt\,.$$

O. m.-nın təbii ümumiləşməsi q çəkili orta metrikadır, yəni

$$\mu(X, Y) = \int |F_X(x) - F_Y(x)|\,q(x)\,dx$$

düsturu ilə təyin olunan metrikadır, burada q, – $\mathbb{R}^1$-in ixtiyari sonlu intervalında inteqrallanan hər hansı mənfi olmayan funksiyadır. Ən çox istifadə olunan və maraqlı hal $q > 0$ şərtinin sanki hər yerdə ödənildiyi haldır.

$$Q(x) = \int\limits_0^x q(u)\,du, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

olsun; $\mu, \varkappa_1$ və Levi – Proxorov metrikası π, –

$$\mu(X, Y) = \varkappa_1(Q(X), Q(Y)), \quad \pi^2(X, Y) \le \varkappa_1(X, Y)$$

münasibəti ilə əlaqəlidirlər.

O. m. mürəkkəb $\mathbf{M}|X - Y|$ metrikasına nəzərən *minimal metrikadır.* O. m. təsadüfi kəmiyyətlərin cəm və maksimumu əməllərinin hər birinə nəzərən $T_c x = cx$, $x \in \mathbb{R}^1$, $c > 0$ çevirmələr sistemi ilə birlikdə birinci tərtib *ideal metrikadır.* $q(x) = s|x|^{s-1}$, $s \ge 1$ olduqda, μ metrikası s tərtib *fərq psevdomomenti* ilə üst-üstə düşür. O. m. üçün *Berri – Esseen* bərabərsizliklərinin analoqu vardır (bax, [1], [2]). O. m. və çəkili O. m.-nın çoxölçülü analoqları məlumdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Esseen C.-G., «Trans. Roy. Inst. Techn.», 1958, № 121, p. 1–31; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, M., 1986; [3] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 284–94.

ORTA MODULYAR REQRESSİYA « средняя модульная регрессия; mean modular regression » – bax, *Xətti reqressiya.*

ORTA MÜDDƏT(i) qayıdışın **« среднее время возвращения; mean recurrence time »**, orta qayıdış müddəti – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı, *Markov zənciri*; orta qayıdış müddəti.

ORTA MÜDDƏT udulmaya qədər **« среднее время** до поглощения; **expected absorbtion time »** – bax, *Markov zənciri* vəziyyətləri sayı sonlu.

ORTA MÜTLƏQ YAYINMA(sı) seçimin **« среднее абсолютное отклонение** выборки; **mean absolute deviation »** – bax, *Səpələnmə*(si) seçimin.

ORTA NİSBİ YAYINMA(sı) seçimin **« среднее относительное отклонение** выборки; **sample coefficient of variation »** – bax, *Səpələnmə*(si) seçimin.

ORTA RİSK « средний риск; average risk » – bax, *Statistik həllərin ümumi nəzəriyyəsi*, *Meteoroloji itkilər funksiyası*.

ORTA YAŞAMA MÜDDƏTİ « среднее время жизни; mean life time » – bax, *Sığortalamanın riyazi nəzəriyyəsi.*

ORTA YIĞILMA çəkili **« средняя сходимость** с весом; **mean convergence** with weigt **»** – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərin *paylanmalarının* çəkili orta metrika ilə doğurulmuş (bax, *Orta metrika*) yığılma topologiyasıdır:

$$\mu(X, Y) = \int \left| F_X(x) - F_Y(x) \right| q(x)\, dx$$

– çəkili orta metrikadır, burada $F(x)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası, q , – $\mathbb{R}^{-1}$-in ixtiyari sonlu intervalında inteqrallanan, mənfi olmayan funksiyadır. q sanki hər yerdə müsbət funksiya olduğu halda, q çəkili O. y. zəif yığılmadan zəif deyildir. Doğrudan da,

$$\mu(X, Y) \geq \pi^2(Q(X), Q(Y))$$

bərabərsizliyindən bu aydın olur, burada π – Levi – Proxorov metrikasıdır və

$$Q(x) = \int_0^x q(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

$\mathbb{R}^1$-də paylanmaların hər hansı $\mathfrak{A}$ çoxluğunun μ – *kompaktlıq kriterisi*

$$\sup\left\{ \int_{|x|>N} \left| Q(x) \right| dF(x) : F \in \mathfrak{A} \right\} \to 0, \; n \to \infty$$

şərtinin ödənilməsindən ibarətdir.

ORTALANMA(sı) oyunun **« усреднение** игры; **randomization** of a game**»** – *randomizasiya* deməkdir.

ORTALANMA PRİNSİPİ təsadüfi əmsallarlı differensial operatorlar üçün **« усреднения принцип** для дифференциальных операторов со случайными коэффициентами; **averaging / homogenization principle** for differential operators with random coefficients**»** – sürətlə ossilyarlaşan təsadüfi əmsallarlı operatorların daha sadə quruluşlu operatorlara yaxınlaşması haqqında teoremlərin yığcam adıdır.

$f(x, t, \omega)$ təsadüfi meydanı üzərinə təbii şərtlər qoyulduğu halda ($x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, ω – elementar nəticədir)

$$dx^\varepsilon / dt \; = f(x^\varepsilon, \; t/\varepsilon \, , \omega),$$

tənliyinin həlli $\varepsilon \to 0$ olduqda, eyni başlanğıc şərtlərilə sağ tərəfi təsadüfi olmayan «ortalanmış» $\bar{f}(x)$ olan tənliyinin həlli ilə yaxınlaşır (◦ fluktuasiyaların sistematik şərti və təsviri [1]-də verilmişdir).

İxtiyari tərtib xətti parabolik (bax, [2]) və elliptik (bax, [3]) operatorların ortalanması G – yığılma anlayışından istifadə edilərək araşdırılmışdır (əgər $A_\varepsilon^{-1} f$ ixtiyari f üçün $A_0^{-1} f$ -ə zəif yığılarsa, A_ε koersitiv operatoru A_0 -a G – yığılır). Fərz olunur ki, məs.,

$$\mathscr{L}_\varepsilon u(x) \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x/\varepsilon, \omega) \, D_x^\beta u(x)), \quad (*)$$

burada $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$, $D_x^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} ... (\partial/\partial x_d)^{\alpha_d}$ və fərz olunur ki, ölçülən təsadüfi meydanların bütün realizasiyaları $a_{\alpha\beta}(y, \omega)$ bütün fəzada məhduddurlar və elliptiklik şərtini ödəyirlər: ixtiyari $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ funksiyası üçün

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D_y^\alpha v, \; D_y^\beta v) \geq c \sum_{|\alpha| = m} (D_y^\alpha v, D_y^\alpha v)$$

bərabərsizliyi doğrudur; $c > 0$, $(\cdot \, , \cdot)$ – $L^2(\mathbb{R}^d)$-də skalyar hasildir. Əgər əmsallar meydanı bircins və erqodik olarsa, onda sabit və təsadüfi olmayan $\hat{a}_{\alpha\beta}$ əmsallarlı, (*) şəklində elə $\mathscr{L}_0$ operatoru vardır ki, ixtiyari məhdud Q oblastı və məqbul sağ tərəf üçün $\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon = f$ tənliyinin $\overset{0}{H}_m(Q)$ Sobolev fəzasından olan həlli $\varepsilon \to 0$ olduqda 1 ehtimalla $\overset{0}{H}_m(Q)$-də $\mathscr{L}_0 u_0 = f$ tənliyinin həllinə zəif yığılır (bax, [3]). Ortalanmış operatorun əmsalları

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \left\langle a_{\alpha\beta} + \sum_{|\gamma| = m} a_{\alpha\gamma} D^\gamma N_\beta \right\rangle, \quad |\alpha|, |\beta| \leq m$$

bərabərliyi ilə verilir, burada N_β , –

$$\sum_{|\alpha| - |\gamma| = m} (-1)^m D_y^\alpha (a_{\alpha\gamma}(y, \omega) D_y^\gamma N_\beta(y)) =$$

$$= - \sum_{|\alpha| = m} (-1)^m D_y^\alpha \, a_{\alpha\beta}(y, \omega), \quad |\beta| \leq m$$

köməkçi tənliklərinin münasib ümumiləşmiş həlləridir, $\langle A \rangle$ isə bircins A meydanının fəzavi orta qiymətidir.

Oxşar nəticələr parabolik operatorlar üçün də məlumdur (bax, [2]).

2-ci tərtib operatorlar üçün ortalanmanı doğuran operatoru $\mathscr{L}_\varepsilon$ olan (təsadüfi mikro – qeyri – bircins mühitdə diffuziyalı) diffuzion proseslərin paylanmalarının «ortalanmış» diffuziyaların paylanmalarına zəif yığılması kimi interpretasiya etmək olar. Ortalanma və təsadüfi mühitlərdə təsadüfi dolaşmaların xassələri arasında əlaqələr haqqında, bax, [4].

Ortalanma haqqında teoremlər qeyri – divergent formada operatorlar üçün də məlumdur (bax, [4], [5]-də xülasəyə). Məs., doğuran operatoru

$$\mathscr{L}_\varepsilon \equiv \sum_{i, j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x, \omega) \, \partial^2 / \partial x_i \, \partial x_j, \quad a_{ij}^\varepsilon(x, \omega) = a_{ij}(x/\varepsilon, \omega)$$

olan diffuziyanın paylanması $a_{ij} = a_{ji}$ əmsallarının meydanı bircins olduğu halda, təbii məhdudiyyətlərlə əmsalları $\hat{a}_{ij} = \langle a_{ij} p \rangle / \langle p \rangle$ olan diffuziyanın paylanmasına yığılır; p , – $\mathscr{L}_1$-in invariant sıxlığıdır.

Ortalanmış əmsalların hesablanması üçün aşkar düsturlar $d = 1$ halında və bəzi $d > 1$ xüsusi halları üçün məlumdur (bax, [2]). Bunlar üçün statistik qiymətlər vardır (bax, [2], [3], [6]).

Bax, *Limit teoremləri* stoxastik differensial tənliklər üçün.

Əd.: [1] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных

возмущений, M., 1979, с. 424; [2] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 1, с. 11–58; [3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан, «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, № 5, с. 65–133; [4] Козлов С. М., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, № 2, с. 61–120; [5] Сиражудинов М. М., «Дифференциальные уравнения», 1983, т. 19, № 11, с. 1949–56; [6] Козлов С. М., «Успехи матем. наук», 1989, т. 44, в. 2, с. 79–120.

ORTALANMIŞ ENERGETİK SPEKTR « осредненный энергетический спектр; averaged energy spectrum » – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq.*

ORTALANMIŞ GÜC SPEKTRİ « осредненный спектр мощности; averaged power spectrum » – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq.*

ORTALANMIŞ KORRELYASİON FUNKSİYA « осредненная корреляционная функция; averaged correlation function » – diskret zamanlı (tamqiymətli) və ya kəsilməz zamanlı, korrelyasion funksiyası $B(t,s)=\mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$ kəsilməz, təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin tamqiymətli və ya ixtiyari həqiqi τ arqumentinin funksiyası $B_{av}(\tau)$-dur, $\tau\geq 0$ olduqda

$$B_{av}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-\tau}B(t+\tau,t)$$

və ya

$$B_{av}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}B(t+\tau,t)\,dt$$

bərabərliyi ilə, $\tau<0$ olduqda isə $B_{av}(\tau)=\overline{B_{av}(-\tau)}$ bərabərliyi ilə verilir. O. k. f.-ya malik proseslər sinfi [1] və [2]-də daxil olunmuşdur, sonradan [3] – [8]-də bu tipli proseslərə baxılmışdır. Bu sinif ortalanmış spektrli təsadüfi proseslər sinfi adlanır, bütün stasionar proseslər bu sinifdəndir [bunlar üçün $B_{av}(\tau)$ adi korrelyasion $B(\tau)$ funksiyası ilə üst-üstə düşür], qeyri – stasionar təsadüfi proseslərin bəzi kateqoriyaları da bu sinfə daxildirlər (bax, *Təsadüfi proses* ortalanmış spektrli, burada belə proseslərin təklif edilmiş digər adları da verilmişdir).

Əgər τ parametrindən asılı $\zeta_{\tau}^{*}(t)=\zeta(t+\tau)\overline{\zeta(t)}$ təsadüfi prosesi qeyri – stasionar təsadüfi proseslər üçün *böyük ədədlər qanununa* tabe olarsa, $B_{av}(\tau)$ funksiyasının

$$B_{T}^{*}(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-\tau}x(t+\tau)\,\overline{x(t)}$$

və ya

$$B_{T}^{*}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T-\tau}x(t+\tau)\,\overline{x(t)}\,dt$$

statistik qiyməti tutarlı statistik qiymətdir (bax, [5], [6]), [burada $x(t)$ – ortalanmış spektrə malik təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyasıdır]. Əgər O. k. f. $B_{av}(\tau)$ vardırsa, onda o, τ-nun kəsilməz mənfi olmayan müəyyən funksiyasıdır; buna görə də, Boxner teoreminə əsasən (və ya τ diskret olduğu halda, Herhlots teoreminə əsasən), bu funksiya məhdud, azalmayan

$F_{av}(\lambda)$ funksiyasına görə Furye – Stiltyes inteqralı şəklində göstərilə bilinər, bu funksiya $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *ortalanmış spektral funksiyası* adlanır ($F_{av}(\lambda)$ mütləq kəsilməz funksiya olduqda, $f_{av}(\lambda)$ mənfi olmayan *ortalanmış spektral sıxlığın* qeyri – müəyyən inteqralı şəklində).

Əd.: [1] Бунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, M., 1951; [2] Blanc-Lapierr A., Fortet R., Théorie des fonctions alèatoires, P., 1953; [3] Fortet R., «L'onde électrique», 1954, t. 34, № 329/330, p. 683–87; [4] Харкевич А. А., «Радиотехника», 1957, т. 12, в. 5, с. 5–11; [5] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [6] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [7] Kampe de Feriet J., Frenkiel F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [8] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, livre 2, p. 87–103.

ORTALANMIŞ SPEKTRAL FUNKSİYA « осредненная спектральная функция; averaged spectral function » – ortalanmış spektrə malik $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *ortalanmış korrelyasion funksiyası* $B_{av}(\tau)$-nun

$$B_{av}(\tau)=\int_{\Lambda}e^{i\tau\lambda}\,dF_{av}(\lambda)$$

Furye – Stiltyes inteqralı şəklində ifadəsində məhdud monoton azalmayan, λ arqumentinin funksiyası $F_{av}(\lambda)$-dır [$\zeta(t)$ – diskret zamanlı təsadüfi proses olduqda $\lambda\in[-\pi,\pi)$, kəsilməz zamanlı təsadüfi proses olduqda $\lambda\in(-\infty,\infty)$], burada $\Lambda\in[-\pi,\pi)$ və ya $(-\infty,\infty)$.

O. s. f. [1]-də Yu. A. Rozanov tərəfindən daxil olunmuşdur, burada o, bunu sadəcə $\zeta(t)$ prosesinin spektri [prosesin özü $\zeta(t)$-ni isə spektrə malik proses] adlandırmışdır. Sonradan bu funksiya [2]-də qeyri – stasionar $\zeta(t)$ prosesinin inteqrallanmış spektri, [3] – [4]-də Forte – Xarkeviç – Rozanov spektri, [5]-də $\zeta(t)$ prosesinin əlavəolunmuş (və ya assosiasiyalanmış) spektri kimi adlandırılmışdır.

O. s. f. $F_{av}(\lambda)$-nın tutarlı statistik qiyməti geniş şərtlərlə $\zeta(t)$ prosesinin periodoqramı $I_{T}(\lambda')$-dən $-\pi$-dən (və ya $-\infty$-dan) λ-ya qədər inteqral olacaqdır (bax, məs., [6]).

Əd.: [1] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [2] Kampe de Feriet J., Frenkiel F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [3] Драган Я. П., Структура и представление моделей стохастических сигналов, Киев, 1980; [4] Драган Я. П., Яворский И. Н., Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы, Киев, 1982; [5] Chang D. K., Rao M. M., в кн.: Real and stochastic analysis, N. Y., 1986, p. 7–118; [6] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, p. 87–103.

ORTALANMIŞ SPEKTRAL SIXLIQ « осредненная спектральная плотность; averaged spectral density », ortalanmış energetik spektr, ortalanmış güc spektri, – ortalanmış spektrə malik və Furye çevirməsi olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *ortalanmış korrelyasion funksiyası* $B_{av}(\tau)$-nın Furye çevirməsi olan [yəni elə prosesin ki, $B_{av}(\tau)$, $|\tau|\to\infty$ olduqda sıfra olduqca sürətlə yaxınlaşır], mənfi olmayan $f_{av}(\lambda)$ funksiyasıdır (burada diskret zamanlı

proseslər üçün $-\pi \le \lambda < \pi$, kəsilməz zamanlı proseslər üçün $-\infty < \lambda < \infty$ olur). Əgər $F_{av}(\lambda)$ $\zeta(t)$ prosesinin *ortalanmış spektral funksiyasıdırsa*, onda $f_{av}(\lambda) = F'_{av}(\lambda)$ olur.

O. s. s. anlayışı [1], [3]-də (bax, həm də [4] – [8]) daxil olunmuş və baxılmışdır. Mühəndislər üçün nəzərdə tutulan ədəbiyyatda (məs., [4], [5]) O. s. s. əksər hallarda qeyri – stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral sıxlığı adlandırılır (və ya qısaca – spektri).

Stasionar təsadüfi proseslərin spektral sıxlıqları haqqında bir çox nəticələr ortalanmış spektrə malik $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinin O. s. s.-ı üçün də ifadə oluna bilinir. Məs., zaman üzrə xətti invariant $\mathscr{L}$ sisteminin girişinə O. s. s.-ı $f_{av}(\lambda)$ olan belə $\zeta(t)$ prosesini daxil etdikdə, bu sistemin çıxışındakı proses də ortalanmış spektrə malik olur və onun O. s. s. $\left|\mathscr{H}(\lambda)\right|^2 f_{av}(\lambda)$ -ya bərabər olur, burada $\mathscr{H}(\lambda)$, – $\mathscr{L}$ sisteminin ötürücü funksiyasıdır. Stasionar proseslərin spektral $f(\lambda)$ sıxlıqlarının qeyri – parametrik qiymətləndirilməsinin demək olar ki, bütün nəzəriyyəsi $f_{av}(\lambda)$ O. s. s.-nın qiymətləndirilməsində tətbiq oluna bilinir, lakin bu zaman stasionar prosesin korrelyasion funksiyasının statistik qiyməti əvəzinə $B_{av}(\tau)$ funksiyasının statistik qiyməti kimi $B_T^*(\tau)$ -nu götürmək (bax, *Ortalanmış korrelyasion funksiya*), stasionar prosesin periodoqramı $\mathbf{I}_T(\lambda)$ -nı isə ortalanmış spektrə malik qeyri – stasionar $\zeta(t)$ prosesinin periodoqramı ilə əvəz etmək lazımdır.

Əd.: [1] Бунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., 1951; [2] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Théorie des fonctions aléatoires, P., 1953; [3] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [4] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [5] Kampe de Feriet J., Frenkiel F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p.1–21; [6] Parzen E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, livre 2, p. 87–103; [7] Rao M. M., в кн.: Developments in statistics, v. 1, N. Y., 1978, p. 171–225; [8] Chang D. K., Rao M. M., в кн.: Real and stochastic analysis, N. Y., 1986, p. 2–118.

ORTALANMIŞ YAYINMA « срединное отклонение; semi – interquartile range » – bax, *Ehtimal olunan yayınma*.

ORTAÖLÇÜLÜ ÇOXLUQ « среднемерное множество; average measure set / medium – measured set » – təsadüfi çoxluğun *orta qiymətinin* aşağıdakı kimi təyin olunan analoqudur. K – sonlu çoxluq, $\mathscr{M}$ – onun bütün altçoxluqlarının çoxluğu, μ, – $\mathscr{M}$ cəbrində birnöqtəvi çoxluqlarda müsbət qiymətlər alan ölçü, X – sonlu, qiymətləri $\mathscr{M}$ -dən olan təsadüfi çoxluq, $\varphi(x) = \mathbf{P}\{x \in X\}$ olsun. Əgər bütün $B \in \mathscr{M}$ çoxluqları üçün $\mu(A)$ -ya bərabər ölçü ilə

$$\mathbf{M}\mu(A \Delta X) \le \mathbf{M}\mu(B \Delta x)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, A çoxluğu X -ə nəzərən ekstremal çoxluq adlanır, burada Δ – çoxluqların simmetrik fərqi işarəsidir. $h \in [0, 1]$ və

$$V(h) = \{A \mid A \in \mathscr{M},\ \inf_{x \in A} \varphi(x) \ge h,\ \sup_{x \in K \setminus A} \varphi(x) \le h\}$$

olsun.

O. ç.-lar sinfi $S(x)$ ekstremal çoxluqlar siniflərindən elə $V(h)$ sinfinə deyilir ki, bu sinfə daxil olan çoxluqların ölçüləri $\lambda = \mathbf{M}\mu(X)$ ədədinə daha yaxındır. Başqa sözlə, $S(X) = V(h^*)$, burada $h^* = (H + h)/2$,

$$H = \sup\{t \mid t \in [0, 1],\ \upsilon(t) \ge \lambda\},$$
$$h = \inf\{t \mid t \in [0, 1],\ \upsilon(t) \le \lambda\},$$
$$\upsilon(t) = \mu\{x \mid x \in K,\ \varphi(x) \ge t\}.$$

O. ç.-lar sinfi anlayışı sonluölçülü ixtiyari separabel fəzanın təsadüfi ölçülən altçoxluğu üçün də korrekt olaraq təyin oluna bilinər.

Əd.: [1] Воробьев О. Ю., Среднемерное моделирование, М., 1984.

ORTOQONAL AYRILIŞ(ı) təsadüfi prosesin **« ортогональное разложение** случайного процесса; **orthogonal expansion** of a random process **»** – bax, *Karunen – Loev ayrılışı.*

ORTOQONAL BLOKLAR « ортогональные блоки; orthogonal blocks » – D eksperimentinin faktor planının kəsişməyən elə $D_0, ..., D_{s-1}$ altçoxluqlarıdır ki, planın hər bir nöqtəsi D_i, $i = 0, 1, ..., s-1$ altçoxluqlarından yalnız birinə daxildir və aşağıdakı ortoqonallıq şərti ödənilir: F – blok faktoru, yəni D_i, $i = 0, 1, ..., s-1$ altçoxluğunun sınaqları üçün i qiymətini alan faktor olsun və X – parametrlərinə görə xətti verilmiş model üçün D planının əmsallar matrisi olsun. Daha sonra fərz olunur ki, X matrisindən F blok faktoruna uyğun sütunlar silinmiş, alınan matris isə X' ilə işarə olunmuşdur. Onda $D_0, ..., D_{s-1}$ bloklarının ortoqonallıq şərti – F faktorunun ixtiyari baş effekt vektorunun X' matrisinin ixtiyari sütununa ortoqonal olmasıdır. Blokların ortoqonallığı blok effektlərinin digər parametrlərin və ya parametrik funksiyaların statistik qiymətlərinə təsirin olmamasına imkan yaradır, belə ki, bu ortoqonallıq araşdırılan faktorların effektlərinin statistik qiymətlərinin blok effektlərindən qeyri – korrelyarlığını doğurur.

Əd.: [1] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976.

ORTOQONAL CƏDVƏL « ортогональная таблица; orthogonal table » – bax, *Faktor eksperiment.*

ORTOQONAL FIRLANMA(sı) faktor oxlarının **« ортогональное вращение** факторных осей; **orthogonal rotation** of factorial axes **»** – bax, *Faktorial oxların fırlanması.*

ORTOQONAL FUNKSİYALAR empirik **« ортогональные функции** эмпирические; empirical **orthogonal functions »** – bax, *Empirik ortoqonal funksiyalar*.

ORTOQONAL KUBLAR « ортогональные кубы; orthogonal cubes » – eyni bir $s \times s \times s$ ölçülü, üçölçülü elə $K_1, ..., K_n$ matrisləridir ki, bu matrislərin simvolları uyğun olaraq, $S_1, ..., S_n$ çoxluqlarındandır və simvolların ixtiyari nizamlanmış cütü (a, b), $a \in S_p$, $b \in S_p$ üçün ixtiyari $K_p = \left\| a_{ijk} \right\|$,

$K_q = \left\| b_{ijk} \right\|$ matrislərində $a_{ijk} = a$, $b_{ijk} = b$ şərtlərini ödəyən (i, j, k) indekslər üçlüklərinin sayı p və q-nün verilmiş qiymətlərində sabitdir.

O. k.-lar eksperimentin planlaşdırılmasında *ortoqonal kvadratlara* analoji istifadə olunur. Əsas maraq doğuran ortoqonal *Latın kublarıdır.* Belə ortoqonal latın kubları cütü yunan–latın kubu, ikidən çox saylı belə ortoqonal latın kubları çoxluğu hiperyunan–latın kubu adlanır. Birinci tərtib $s \times s \times s$ ölçülü ortoqonal latın kublarının maksimal sayı $s^2 + s + 2$-ni aşmır, belə ki, s sadə ədədin qüvvət üstü olarsa, onda bu say $s^2 + s + 2$-yə bərabər olur. 2-ci tərtib ortoqonal latın kubları cütü mövcud deyildir, lakin cüt-cüt ortoqonal olan bir neçə 1-ci tərtib latın kubları və 2-ci tərtib bir latın kubundan ibarət latın kubları çoxluğu mövcuddur.

Əd.: [1] Марков Е. В., Лисенков А. Н., Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента, М., 1979; [2] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976; [3] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

ORTOQONAL KVADRATLAR « ортогональные квадраты; orthogonal squares » – eyni, $s > 1$ ölçülü n sayda kvadratlardır, yəni s sayda müxtəlif simvollardan təşkil olunmuş s tərtib elə kvadrat matrislərdir ki, bunlardan ixtiyari ikisi üçün ($A = \left\| a_{ij} \right\|$ və $B = \left\| b_{ij} \right\|$), hər bir nizamlanmış simvollar cütü (a, b) üçün yalnız yeganə elə (i, j) indekslər cütü vardır ki, $a_{ij} = a$, $b_{ij} = b$. Ortoqonallığın bu şərti ilə verilən *Latın kvadratları* – ortoqonal Latın kvadratları xüsusi maraq kəsb edən latın kvadratlarındandır. Ortoqonal latın kvadratları cütü yunan–latın kvadratı, ikidən çox sayda ortoqonal latın kvadratları çoxluğu hiperyunan–latın kvadratı adlanır. Əgər λ_s, – s ölçülü ortoqonal latın kvadratlarının maksimal sayıdırsa, onda $\lambda_s \le s - 1, \quad \lambda_s \ge \min_i (p_i^{h_i} - 1)$ bərabərsizlikləri doğrudur, burada $s = \prod_{i=1}^{r} p_i^{h_i}$, – s ədədinin kanonik ayrılışıdır, bu zaman p_i – sadə, h_i isə natural ədədlərdir, $i = 1, ..., r$. Əgər s sadə ədədin tam qüvvət üstüdürsə, onda $\lambda_s = s - 1$.

Ortoqonal latın kvadratlarının varlığı və s-in verilmiş qiymətində onların qurulması sadə məsələlər deyildir. Məs., 1782-də L. Eyler (L. Euler) fərz etmişdir ki, $s = 4k + 2$, $k = 1, 2, ...$ qiymətlərinin heç biri üçün ortoqonal latın kvadratları yoxdur. Yalnız 1959-da (bax, [1]) bu fərziyyənin doğru olmadığı aşkar edildi, belə ki, $s = 2$ və $s = 6$ qiymətlərindən başqa bütün s-lər üçün ortoqonal latın kvadratlarının varlığı isbat olundu.

n sayda O. k.-dan ibarət hər bir topluya $(n + 2)$ – faktor eksperimentinin planı uyğun olur və bu faktorların hamısı s səviyyəlidir, ölçmələrin ümumi sayı s^2-na bərabərdir. Əgər (i, j) ölçməsində birinci faktor i-ci səviyyədə qeyd olunarsa, ikinci faktor j-ci səviyyədə qeyd olunarsa, $(k + 2)$-ci faktor, $k = 1, ..., n$ isə k-cı kvadratın (i, j)-ci yerində olan simvolla təyin olunarsa, qeyd olunan uyğunluq alınır.

Əd.: [1] Parker E. T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1959, v. 45, p. 859–62; [2] Бродский В. З., Введение в факторное планирование эксперимента, М., 1976; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970.

ORTOQONAL LATIN DÜZBUCAQLILARI « ортогональные латинские прямоугольники; orthogonal Latin restangles » – bax, *Latın düzbucaqlısı.*

ORTOQONAL LATIN KVADRATLARI « ортогональные латинские квадраты; orthogonal Latin squares » – bax, *Latın kvadratı*, *Ortoqonal kvadratlar*.

ORTOQONAL PLANLAŞDIRILMA « ортогональное планирование; orthogonal design » – bax, *Adamar matrisi.*

ORTOQONAL REQRESSİYA « ортогональная регрессия; orthogonal regression » – eksperimentin planında prediktorları ortoqonal olan *reqression eksperimentdir.* O. r. üçün ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin komponentləri məhz ölçmə vektorları və prediktorların normalanmış skalyar hasilləridir; bunlar prediktorlar çoxluğu genişləndirildikdə dəyişmirlər; informasion matris diaqonal matrisdir. Ölçmələr normal paylanma qanununa tabe olduğu halda bəzi, asılı olmayan $\hat{\theta}$ komponentlərinin mühümlüyünü yoxlamaq sadə olur.

Bax, *Xətti reqressiya*.

ORTOQONAL TƏSADÜFİ MATRİS « ортогональная случайная матрица; orthogonal random matrix » – n – tərtib elə H_n *təsadüfi matrisidir* ki, onun transponirə olunmuş H_n^{T} matrisi H_n^{-1} tərs matrisi ilə üst-üstə düşür. H_n matrisinin məxsusi qiymətləri: n cüt olduqda $\exp(\pm i\lambda_k)$, $k = 1, ..., n/2$ və n tək olduqda isə $\exp(\pm i\lambda_k)$, $k = 1, ..., (n-1)/2$ və 1-ə bərabər olur, burada λ_k – həqiqi ədədlərdir, $0 \le \lambda_k < 2\pi$. Qoşma olmayan məxsusi qiymətlərə uyğun məxsusi u_k vektorları ortoqonaldırlar.

O. t. m. H_n-in məxsusi qiymətləri aşağıdakı kimi nizamlanır: $\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, ..., e^{i\lambda_{n/2}}, e^{-i\lambda_{n/2}}, \ 2\pi > \lambda_1 \ge ... \ge \lambda_{n/2} \ge 0\}$, n cüt olduqda məxsusi qiymətlərdən bəzilərinin ± 1-ə bərabər olduğu hal da mümkündür, onda nizamlama aşağıdakı kimi olur: $\{e^{i\lambda_1}, \ e^{-i\lambda_1}, ..., \ e^{i\lambda_{(n-2)/2}}, \ e^{-i\lambda_{(n-2)/2}}, \ +1, \ -1, \ 2\pi > \lambda_1 \ge ... \ge \lambda_{(n-2)/2} \ge 0\}$; n tək olduğu halda məxsusi qiymətlər aşağıdakı kimi nizamlanır: $\{e^{i\lambda_1}, e^{-i\lambda_1}, ..., e^{i\lambda_{(n-1)/2}}, e^{-i\lambda_{(n-1)/2}}, \xi, \ 2\pi > \lambda_1 \ge ... \ge \lambda_{(n-1)/2} \ge 0\}$ sonuncu məxsusi ξ qiyməti hər hansı $+1$ və ya -1 qiymətlərini alan təsadüfi kəmiyyətdir.

H_n O. t. m. 1 ehtimalla n cüt olduğu halda, yəni n, $q = (n-2)/2$ qiymətində

$$H_n = U_n \times$$

$$\times \operatorname{diag}\left\{ \begin{Vmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{Vmatrix}, ..., \begin{Vmatrix} \cos\lambda_q & \sin\lambda_q \\ -\sin\lambda_q & \cos\lambda_q \end{Vmatrix}, +1, -1 \right\} U_n^{\mathrm{T}},$$

n tək olduqda, $s = (n-1)/2$

$$H_n = U_n \times$$
$$\times \operatorname{diag}\left\{ \left\| \begin{matrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} \cos\lambda_s & \sin\lambda_s \\ -\sin\lambda_s & \cos\lambda_s \end{matrix} \right\|, \xi \right\} U_n^{\mathrm{T}}$$

şəklində ifadə olunur, burada U_n – vektor sütunları $\operatorname{Re} u_k$, $\operatorname{Im} u_k$ olan ortoqonal matrisdir.

Əgər n cüt olarsa və O. t. m. H_n-in $+1$ və -1-ə bərabər məxsusi qiymətləri yoxdursa, onda fərz olunur ki, $u_{1s} = c_s$, $s = 2, 4, \ldots, n$; əgər n cüt olarsa və H_n matrisinin $+1$ və -1-ə bərabər məxsusi qiymətləri vardırsa, onda fərz olunur ki, $u_{1s} = c_s$, $s = 2, 4, \ldots, n-2$, $u_{1,n-1} \geq 0$, $u_{1n} \geq 0$, burada u_{lm}, – U_n matrisinin elementləridir. Əgər n tək olarsa, onda fərz olunur ki, $u_{1s} = c_s$, $s = 2, 4, \ldots, n-1$, $u_{1n} \geq 0$.

Fərz olunur ki, G, – n – ölçülü ortoqonal həqiqi matrislər qrupu, μ – bu qrupda normalanmış Haar ölçüsü, $\mathscr{B}$, – G qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri, n – tək ədəddir. Əgər H_n O. t. m. μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirsə, onda ixtiyari $L \in \mathscr{B}$ çoxluğu və həqiqi α_j, β_j, $j = 1, \ldots, (n-1)/2$, $0 \leq \alpha_j \beta_j < 2\pi$ ədədləri üçün

$$\mathbf{P}\{U_n \in L, \alpha_j \leq \lambda_j < \beta_j, j = 1, \ldots, (n-1)/2, \xi = \pm 1\}$$

ehtimalını hesablamaq mümkündür (bax, [1]).

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–106; [2] Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

OSSİLYAR TƏSADÜFİ PROSES « осциллирующий случайный процесс; oscillatory random process » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin, *Evolyusionar spektral ifadə.*

OYUN statistik **« игра** статистическая; **statistical game »** – bax, *Statistik oyun*.

OYUNU, İKİ ŞƏXSİN « игра двух лиц; two – person game » – ixtilaf şəraitində iki tərəfin qarşılıqlı hərəkətlərində optimal qərarların qəbuledilməsinin riyazi modelidir. İxtilaf şəraitində oyunçu adlandırılan tərəflərin hər birinin hərəkətləri (strategiyaları) çoxluğunun və bu hərəkətlərin nəticələri çoxluğunun verildiyi fərz olunur. Formal olaraq İ. ş. o.-nu (D, Θ, w) üçlüyü kimi təyin etmək olar, burada D, – I oyunçunun strategiyaları – d-lərin çoxluğu, Θ, – II oyunçunun strategiyaları – θ-ların çoxluğu, $w = w(d, \theta)$ – I oyunçu d strategiyasını, II oyunçunun isə θ strategiyasını seçdikdə, I oyunçunun itkisini təyin edən, $D \times \Theta$ fəzasında təyin olunmuş funksiyadır. Lakin cəmi sıfra bərabər olan ən çox öyrənilmiş oyunlar üçün II oyunçunun itki funksiyası $\overline{w}(d, \theta) = -w(d, \theta)$ da verilir, odur ki, I oyunçunun itkisi məhz II oyunçunun uduşu olur, oyunçuların maraqları bir-birinə əksdir və burada heç bir razılığa gəlmə şərti nəzərdə tutulmur. Riyazi statistikaya tətbiqi məsələlərdə II oyunçu kimi «təbiət» götürülür və bu halda onun itki funksiyası $\overline{w}(d, \theta)$-nı ixtiyari surətdə, məsələn, cəmi sıfır olan oyunlara baxılmaqla kifayətlənərək vermək mümkündür. Aşağıda məhz belə oyunlara baxılır.

İ. ş. o. nəzəriyyəsinin əsas məsələsi I oyunçu üçün optimal strategiyanın seçilməsindən ibarətdir. Bu məqsədlə strategiyalar çoxluğu nizamlanmalıdır. I oyunçunun optimal strategiyalarının seçilməsi üçün aşağıdakı yanaşmalar qəbul olunmuşdur: altsiniflərdə müntəzəm optimal strategiyaların axtarılması; Beyes strategiyalarının qurulması; minimaks strategiyaların qurulması; bütün yaxşılaşmayan strategiyalar küllüsünün təyin olunması (strategiyaların tam sinfi adlanan).

1. *Altsiniflərdə müntəzəm optimal strategiyalar.*

Əgər $\delta_1 \in D$ və $\delta_2 \in D$ strategiyaları üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$w(\delta_1, \theta) \leq w(\delta_2, \theta) \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə və heç olmasa elə bir $\theta_1 \in \Theta$ qiyməti varsa ki, $w(\delta_1, \theta_1) < w(\delta_2, \theta_1)$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda δ_1 strategiyası δ_2 strategiyasından yaxşıdır, deyilir. Əgər yalnız (1) şərti ödənilərsə, onda δ_1 strategiyası δ_2 strategiyasından pis deyildir, deyilir. Bütün $\delta \in D_0$, $\theta \in \Theta$ üçün

$$w(\delta_0, \theta) \leq w(\delta, \theta)$$

şərtini ödəyən δ_0 strategiyasına $D_0 \subset D$ altsinfində müntəzəm optimal strategiya deyilir.

Bütün D sinfində müntəzəm optimal strategiyalar real məsələlərdə demək olar ki, mövcud olmur, lakin kifayət qədər dar altsiniflərdə onlar ola bilər. Riyazi statistika məsələlərində, əksər hallarda, baxılan strategiyalar sinfini elə daraltmaq (simmetriya, prosedurun təbiiliyi, hesablamaların sadəliyi baxımından) mümkün olur ki, bu daraltmadan sonra «qalan» strategiyalar sinfində müntəzəm optimal strategiya olur. Bununla da, optimal strategiyanın seçilməsi problemi həll olunur. Belə yanaşmada eyni zamanda strategiyalar sinfinin daraldılması nəticəsində olduqca yaxşı nəticənin alınması mümkünlüyünün itməməsi məsələsinin araşdırılması da zəruridir. Statistik oyunlar çərçivəsində belə yanaşmaya misallar meylsiz statistik qiymətlərin altsinfində parametrin ən yaxşı (effektiv) statistik qiymətləri və bütün invariant və ya meylsiz kriterilərin altsiniflərində müntəzəm ən güclü kriterilərdir.

2. *Beyes kriterileri.* Bu strategiyalar o hallarda yaranır ki, II oyunçu öz strategiyasını təsadüfi surətdə Θ-dan hər hansı bir paylanma ilə (məlum, ya naməlum) seçir. Bu yanaşmada D və Θ strategiyalar sinifləri ölçülən fəza strukturlu olur, yəni Θ və D-də altçoxluqlardan təşkil olunmuş təbii $\mathscr{F}_\Theta$ və $\mathscr{F}_D$ σ – cəbrləri təyin olunur.

$(D, \mathscr{F}_D)$ fəzasında π paylanması və $(\Theta, \mathscr{F}_\Theta)$ fəzasında Q paylanması uyğun olaraq, I və II oyunçunun qarışıq və ya randomlanmış strategiyaları adlanır. Q (əksər hallarda) aprior paylanma adlanır. π və Q paylanmaları verildikdə $(D \times \Theta, \mathscr{F}_{D\times\Theta}, \pi \times Q)$ ehtimal fəzası doğurulur, burada $\mathscr{F}_{D\times\Theta}$, – $\mathscr{F}_D$ və $\mathscr{F}_\Theta$ σ – cəbrlərindən olan çoxluqların düz hasilinin doğurduğu σ – cəbrdir; $\mathscr{F}_D$ və $\mathscr{F}_\Theta$ σ – cəbrləri elə seçilir ki, onlar aşağıdakı şərtləri ödəsinlər: a) $\mathscr{F}_D$ və $\mathscr{F}_\Theta$ uyğun olaraq $\{\delta\}$ və $\{\theta\}$ birnöqtəli çoxluqlarını özündə saxlayır, b) itki funksiyası $w(\delta, \theta)$ $\mathscr{F}_{D\times\Theta}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndir.

I və II oyunçunun bütün qarışıq strategiyalarının çoxluqlarına [yəni $(D, \mathscr{F}_D)$ fəzasında bütün paylanmalar çoxluğu $\widetilde{D}$ və $(\Theta, \mathscr{F}_\Theta)$ fəzasında bütün paylanmalar çoxluğu $\widetilde{\Theta}$] xalis $\delta \in D$ və $\theta \in \Theta$ strategiyalarını bu nöqtələrdə topalanmış paylanmalarla eyniləşdirərək, D və Θ çoxluqlarının genişlənməsi kimi baxmaq olar. π, $\mathbf{Q}$ qarışıq strategiyalarını istifadə etdikdə $\widetilde{w}$ itkiləri

$$\widetilde{w}(\pi, \mathbf{Q}) = \mathbf{M}_{\pi \times \mathbf{Q}}\, w(\delta, \theta) = \int w(u, t)\, \pi(du)\, \mathbf{Q}(dt) \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Beləliklə, ilkin oyunla yanaşı itki funksiyası (2) bərabərliyi ilə verilən $(\widetilde{D}, \widetilde{\Theta}, \widetilde{w})$ oyununa da baxmaq olar ki, bu da (D, Θ, w) oyununun o r t a l a n m a s ı və r a n d o m i z a s i y a s ı adlanır.

Cırlaşmış paylanmaların xalis strategiyalarla eyniləşdirilməsi haqqında qəbul edilmiş razılaşmaya uyğun olaraq $\widetilde{w}(\delta, \theta) = w(\delta, \theta)$ olur. (D, Θ, w) oyununun randomlanması strategiyaları çoxluğu ilkin oyunla müqayisədə daha geniş olan oyuna keçmək kimi anlaşılır, bu halda ilkin oyun «daxiledilmiş» oyundur və ilkin oyun hər iki oyunçunun xalis strategiyalarına baxıldıqda alınır. (D, Θ, w) və $(\widetilde{D}, \widetilde{\Theta}, \widetilde{w})$ oyunlarında strategiyaların nizamlanması məsələləri sıx bağlıdırlar.

$\widetilde{w}(\pi_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) = \inf\limits_{\pi} \widetilde{w}(\pi, \mathbf{Q})$ şərtini ödəyən $\pi = \pi_{\mathbf{Q}}$ strategiyası aprior $\mathbf{Q}$ paylanmasına uyğun B e y e s s t r a t e g i y a s ı adlanır, yəni Beyes strategiyası ortalanmış oyunda verilmiş $\mathbf{Q}$ üçün ən yaxşı π strategiyasıdır. $\widetilde{w}(\delta_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) = \inf\limits_{\pi} \widetilde{w}(\pi, \mathbf{Q})$ şərtini ödəyən $\delta_{\mathbf{Q}} \in D$ strategiyası x a l i s B e y e s s t r a t e g i y a s ı adlanır. Əgər verilmiş Q üçün qarışıq Beyes strategiyası $\pi_{\mathbf{Q}}$ varsa, onda elə xalis Beyes strategiyası $\delta_{\mathbf{Q}}$ vardır ki, $\widetilde{w}(\delta_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}) = \widetilde{w}(\pi_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ olur. Beləliklə, əgər $\inf\limits_{\pi} \widetilde{w}(\pi, \mathbf{Q})$ alınırsa, onda bu infimum xalis strategiyalarda da alınır.

Beyes strategiyalarının praktik olaraq istifadə edilməsi olduqca incə məsələdir. Əgər aprior paylanma hər hansı real fiziki mexanizmlə şərtləşdirilmişsə, bu yanaşmadan istifadə etmək mübahisə doğurmur. Bununla yanaşı, Beyes yanaşması əksərən o hallarda da özünü doğruldur ki, o, bəzi, ola bilər ki, hətta subyektiv və həmişə olduqca tam ola bilməyən, lakin bunların nəzərə alınmaması mümkün olmayan təsəvvürlərin olması ilə əlaqələndirilsin. Bundan başqa, Beyes yanaşması minimaks strategiyaların axtarılmasında ümumi bir vasitə kimi olduqca əhəmiyyətlidir.

3. ***Minimaks strategiyalar.*** Əgər θ-ya görə aprior informasiya yoxdursa, onda strategiyaları nizamladıqda II oyunçunun ən «əlverişsiz» strategiyasına istiqamətlənmək olar. Əgər δ strategiyası seçilərsə, onda maksimal itkilər $\sup\limits_{\theta} w(\delta, \theta) \equiv w(\delta, \uparrow)$ olur. Bu kəmiyyət $w(\delta, \mathbf{Q})$-nün qiymətləri kimi yalnız δ-dan asılı olur və δ-nı nizamlamağa imkan verir.

Əgər

$$w(\overline{\delta}, \uparrow) = \inf_{\delta} w(\delta, \uparrow) \equiv w^*$$

olarsa, $\overline{\delta}$ strategiyası m i n i m a k s s t r a t e g i y a adlanır. «Minimaks» termini

$$w(\overline{\delta}, \uparrow) = \min_{\delta} \max_{\theta} w(x, \theta)$$

münasibətinin sağ tərəfindəki əməllərin adlarının birləşməsindən yaranmışdır. İxtiyari θ üçün

$$w(\overline{\delta}, \theta) \le w(\overline{\delta}, \uparrow) = w^*$$

olduğundan $\overline{\delta}$ minimaks strategiyası onunla xarakterizə olunur ki, bu strategiya I oyunçunun itkiləri ölçüsünün w^*-dan böyük olmamasını təmin edir.

$$w^* = \inf_{\delta} w(\delta, \uparrow), \quad (w(\delta, \uparrow) = \sup_{\theta} w(\delta, \theta)),$$

$$w_* = \sup_{\theta} w(\downarrow, \theta), \ (w(\downarrow, \theta) = \inf_{\delta} w(\delta, \theta))$$

qiymətləri uyğun olaraq, o y u n u n y u x a r ı və a ş a ğ ı q i y m ə t i (dəyəri) adlanır. Əgər $w^* = w_*$ olarsa, onda o y u n u n q i y m ə t i (dəyəri) vardır, deyilir və o, w^* və w_*-nun ümumi qiymətinə bərabərdir (bax, [2]).

II oyunçu birinciyə analoji hərəkət edərək və eyni minimaks mülahizələrə əsaslanaraq öz $\overline{\theta}$ strategiyasını seçərək, w_*-dan kiçik olmayan uduşu həmişə təmin edə bilər. Deməli, əgər oyunun qiyməti vardırsa, minimaks $\overline{\delta}$ strategiyasını seçən oyunçu özü üçün yaxşılaşmayan nəticəni təmin edir, yəni əgər II oyunçu $\overline{\theta}$-nı seçərsə, onda heç bir digər strategiya $w_* = w^*$ qiymətindən kiçik olan itkiləri verməyəcəkdir.

Əgər $\overline{\delta}$ və $\overline{\theta}$ minimaks strategiyaları varsa, onda $\overline{w}(\overline{\delta}, \overline{\theta}) = w^* = w_*$ olur. Ümumi halda $w^* \ge w_*$ bərabərsizliyi həmişə ödənilir.

Əgər $w^* > w_*$ olarsa, minimaks $\overline{\delta}$ strategiyasını qarışıq strategiyalar daxil etməklə yaxşılaşdırmaq mümkündür. Qarışıq strategiyaların əsas təyinatlarından biri bundan ibarətdir.

$\overline{\pi}$ və $\overline{\mathbf{Q}}$ – ortalanmış oyun üçün minimaks strategiyalar (əgər varsa) və

$$\widetilde{w}^* = \inf_{\pi} \sup_{\mathbf{Q}} \widetilde{w}(\pi, \mathbf{Q}),$$

$$\widetilde{w}_* = \sup_{\mathbf{Q}} \inf_{\pi} \widetilde{w}(\pi, \mathbf{Q})$$

olsun. Onda $w^* \ge \widetilde{w}^* \ge \widetilde{w}_* \ge w_*$ bərabərsizlikləri həmişə doğrudur.

Oyunlar nəzəriyyəsinin m i n i m a k s l ı q h a q q ı n d a t e o r e m adlanan ilk fundamental teoreminə görə, olduqca geniş fərziyyələrlə ortalanmış oyunlar $\widetilde{w}^* = \widetilde{w}_*$ dəyərinə malikdirlər və bunlar üçün minimaks strategiyalar vardır (riyazi statistikada bu hökm «*statistik oyun*» məqaləsində əks olunmuşdur).

Beyes və minimaks strategiyalar anlayışları bir-birilə bağlı anlayışlardır. Əgər:

1) $\widetilde{w}(\overline{\pi}, \theta) = C = \text{const}$, $\theta \in \Theta_0$ olarsa,

2) $\widetilde{w}(\overline{\pi}, \theta) \le C$ bərabərsizliyi bütün θ-lar üçün ödənilərsə, $\overline{\pi}$ strategiyası $\Theta_0 \subset \Theta$ çoxluğunda d ü z ə l d i c i (rus. у р а в н и в а ю щ а я) s t r a t e g i y a adlanır.

Fərz olunur ki, $\overline{\mathbf{Q}}$ aprior paylanması və ona uyğun Beyes strategiyası $\pi_{\overline{\mathbf{Q}}}$ vardır; $\pi_{\overline{\mathbf{Q}}}$, – $\overline{\mathbf{Q}}$ paylanmasının daşıyıcısı $N_{\overline{\mathbf{Q}}}$-də

düzəldici strategiyadır. Onda $\pi = \pi_{\overline{\mathbf{Q}}}$ minimaks strategiyadır. Əgər $N_{\overline{\mathbf{Q}}} = \Theta$ olarsa, onda düzəldici $\overline{\pi}$ strategiyası II oyunçunun oyununu onun özündən asılı olmayan oyun edir. $\pi_{\overline{\mathbf{Q}}}$ Beyes minimaks strategiyasını müəyyən edən $\overline{\mathbf{Q}}$ paylanmasının gözəl bir xassəsi vardır: əgər Beyes itkiləri $\widetilde{w}(\pi_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ bu paylanma üçün maksimal olarsa, o, ən əlverişsiz paylanmadır.

Əgər

$$\widetilde{w}(\pi_{\overline{\mathbf{Q}}}, \overline{\mathbf{Q}}) = \sup_{\mathbf{Q}} \overline{w}(\pi_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}),$$

və ya başqa sözlə,

$$\widetilde{w}(\downarrow, \overline{\mathbf{Q}}) = \sup_{\mathbf{Q}} \overline{w}(\downarrow, \mathbf{Q})$$

münasibətləri ödənilərsə, $\overline{\mathbf{Q}}$ ən əlverişsiz (rus. наименее благоприятное или наихудшее) paylanma adlanır.

Fərz olunur ki, $(\widetilde{D}, \widetilde{\theta}, \widetilde{w})$ oyununun qiyməti (dəyəri) vardır və hər iki oyunçunun minimaks strategiyaları $\overline{\pi}$ və $\overline{\mathbf{Q}}$ -dir.

Onda $\overline{\mathbf{Q}}$ ən əlverişsiz paylanmadır, $\overline{\pi}$ və $\overline{\mathbf{Q}}$ -yə uyğun $\overline{\pi} = \pi_{\overline{\mathbf{Q}}}$ bərabərliyini ödəyən Beyes strategiyasıdır. Yuxarıdakı mülahizələrlə sıx bağlı minimaksлıq kriterisi aşağıdakı kimi ifadə olunur: $(\widetilde{D}, \widetilde{\theta}, \widetilde{w})$ oyunu dəyərə və minimaks strategiyalara malikdir; onda aşağıdakı üç şərt ekvivalentdir: 1) $\overline{\pi}$ – minimaks strategiyadır, 2) $\overline{\pi}$ – Beyes və düzəldici strategiyadır, 3) $\overline{\pi}$ – Beyes strategiyasıdır və o, ən əlverişsiz $\overline{Q}$ paylanmasına uyğun strategiyadır: $\overline{\pi} = \pi_{\overline{Q}}$.

4. *Strategiyaların tam sinfi.* Əgər yuxarıda şərh olunmuş yanaşmalara görə strategiyanı birqiymətli seçmək mümkün olmursa, məsələnin həlli strategiyaların tam sinfinin təsviri ilə məhdudlanır. Əgər ixtiyari $\pi \notin D^c$ üçün π -dən yaxşı $\pi_0 \in D^c$ strategiyası vardırsa, $D^c \subset \widetilde{D}$ strategiyaların tam sinfi adlanır. Əgər D_0^c strategiyaların tam sinfi olarsa, onun heç bir altsinfi isə tam sinif olmazsa, onda D^c minimal tam sinif adlanır. Başqa sözlə, minimal tam sinif yalnız yaxşılaşmayan strategiyalardan ibarətdir.

D -dən olduqca kiçik olan minimal tam sinif və ya tam sinfin qurulmasının əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, bu $(\widetilde{D}, \widetilde{\theta}, \widetilde{w})$ oyununu daha sadə strukturlu $(D^c, \widetilde{\theta}, \widetilde{w})$ oyununa çevirməyə imkan yaradır. Geniş fərziyyələrlə bütün Beyes strategiyaları sinfi $\{\pi_{\mathbf{Q}}\}$, $\mathbf{Q} \in \widetilde{\Theta}$ strategiyaların tam sinfidir (oyunlar nəzəriyyəsinin ikinci fundamental teoremi; bax, *Statistik oyun*).

Əd.: [1] Мак – Кинси Д ж., Введение в теорию игр, пер. с англ., М., 1960; [2] Боровков А. А., Математическая статистика (Дополнительные главы), М., 1984.

ÖLÇMƏ / ÖLÇÜLMƏ « измерение; measurement » – bax, *Kvant nəzəriyyəsi*, *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*.

*__ÖLÇMƏ XƏTASI « измерения ошибка; metering error »__ – bax, *Sistematik xəta.*

ÖLÇMƏ ŞKALASI « измерений шкала; measurement scale » – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasının hissəsi kimi *ölçmə nəzəriyyəsində* əsas anlayışdır. A – münasibətlər (reallığı təsvir edən) verilmiş empirik sistem, B – münasibətlər verilmiş ədədi sistem, f, – A-dan B-yə homomorfizm olsun. [1], [2]-yə müvafiq olaraq $\langle A, B, f\rangle$ üçlüyü *şkala* adlanır.

Praktiki cəhətdən mühüm hallarda şkalanın məqbul $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ çevirmələrinin elə $\Phi = \Phi(A, B) = \{\varphi\}$ qrupu vardır ki, A-dan B-yə bütün homomorfizmlər çoxluğu $\{f\}$ $\langle \varphi \circ f_0 : \varphi \in \Phi\rangle$ şəklində olur, burada f_0, – $\{f\}$-in ixtiyari qeyd olunmuş elementidir. Şkalanın məqbul çevirməsi $\varphi \in \Phi$ $\langle A, B, f\rangle$ şkalasını ona ekvivalent (məzmunca) $\langle A, B, \varphi \circ f\rangle$ şkalasına çevirir. Ekvivalent şkalalar sinfi ölçmə şkalasının tipi adlanır. Tip Φ qrupu ilə təyin olunur, buna görə də, bəzən Φ-in məqbul çevirmələri qrupu anlayışı ölçmə nəzəriyyəsində, xüsusilə də, onun tətbiqi bölmələrində ilkin anlayış kimi götürülür.

Ö. ş.-nın təsnifatı Φ-in məqbul çevirmələri qruplarının köməyilə aparılır. *Nominal şkala* (adlar şkalası) üçün $\Phi = \Phi_1$ olur, burada Φ_1, – $\mathbb{R}$-in özünə bütün qarşılıqlı birqiymətli inikasları qrupudur. Qaydalı şkala üçün $\Phi = \Phi_2$, burada Φ_2, – $\mathbb{R}$-in özünə bütün ciddi artan çevirmələr qrupudur. İntervallar şkalası üçün $\Phi = \Phi_3 = \{\varphi(x) = ax + b,\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ Nisbət şkalası üçün $\Phi = \Phi_4 = \{\varphi(x) = ax,\ a > 0\}$. Fərqlər şkalası üçün $\Phi = \Phi_5 = \{\varphi(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$. Mütləq şkala üçün $\Phi = \Phi_6 = \{\varphi(x) = x\}$. Digər tip şkalalardan da istifadə olunur.

Konkret kəmiyyətin Ö. ş. uyğun tətbiq oblastının mülahizələrindən təyin olunur və həll olunan məsələdən asılı olur. Məs., temperaturu qaydalı şkalada (temperaturun artması-azalması), intervallar şkalasında (Selsiy, Reomyur, Farenqeyt şkalalarında) və nisbətlər şkalasında (Kelvin şkalasında mütləq sıfırdan hesablanan temperaturlar) ölçmək olar.

Əd.: [1] Суппес П., Зинес Дж., в кн., Психологические измерения, пер. с англ., 1967, с. 9–110; [2] Фанцагль И., Теория измерений, пер. с англ., М., 1976; [3] Орлов А. И., Устойчивость в социально экономических моделях, М., 1979.

ÖLÇMƏ ŞKALASI təsnifat **« измерений шкала** классификация; **measurement scale** classification **»** – bax, *Ölçmə şkalası.*

ÖLÇMƏLƏR NƏZƏRİYYƏSİ « измерений теория; measurement theory » – statistik verilənlər ölçülən şkalalardan asılı olraq statistik nəticələrin araşdırılmasına həsr olunmuş, qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasının bölməsidir. Ö. n.-nin əsas problemləri təmsil etmə, yeganəlik və adekvatlıq problemləridir (bax, [1] – [3]).

Təmsiletmə problemi. Empirik sistem A münasibətləri ilə verilir. B münasibətləri ilə elə ədədi sistem varmı ki, A-nı bu sistemə homomorf inikas etmək mümkün olsun?

Yeganəlik problemi. Empirik sistemin ədədi sistemə bütün homomorf inikaslarının çoxluğu $\{f\}$-i təsvir etmək. Ən mühüm praktiki hallarda şkalanın mümkün olan $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ çevirmələrinin elə $\Phi = \{\varphi\}$ qrupu vardır ki, $\{f\} = \{\varphi \circ f_0;\ \varphi \in \Phi\}$; burada f_0, – A-dan B-yə homomorfizmlərdən biridir (bax, *Ölçmə şkalası*). Əgər $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ verilənləri şkalada mümkün olan çevirmələr qrupu Φ ilə ölçülmüşdürsə, onda $\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))$ $\mathbf{x}$-in daşıdığı informasiyanı daşıyır. Buna görə də, $\mathfrak{A}(\mathbf{x})$ nəticəsinin adekvatlığı üçün zəruridir ki, ixtiyari $\varphi \in \Phi$ və $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ üçün $\mathfrak{A}(\mathbf{x}) = \mathfrak{A}(\varphi(\mathbf{x}))$ bərabərliyi ödənilsin, yəni $\mathfrak{A}(\mathbf{x})$-in ixtiyari $\varphi \in \Phi$-ə görə invariantlığı zəruridir.

Adekvatlığın düz problemi. Mümkün olan çevirmələr qrupu Φ ilə şkalada $\mathfrak{A}(\mathbf{x})$ statistik nəticəsinin hansı qaydaları adekvatdır?

Adekvatlığın tərs problemi. $\mathfrak{A}(\mathbf{x})$ statistik nəticəsinin qaydası verilir. Hansı şkalalarda (yəni hansı Φ-lər üçün) bu qayda adekvatdır?

İnvariantlıq şərti məqbul statistikanın ifadəsində ciddi məhdudiyyətlərə səbəb olur. $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ və $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ topluların orta qiymətlərinin müqayisəsinin invariantlığı buna misaldır. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{y})$ bərabərsizliyinin, yalnız və yalnız, $f(\varphi(\mathbf{x})) < f(\varphi(\mathbf{y}))$ bərabərsizliyi ödənildiyi halda ödənildiyi fərz olunur; burada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – hər hansı orta qiymət və $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, – $\mathbb{R}^n$-in ixtiyari nöqtələridir. Əgər bu şərt bütün φ-lər, $\varphi \in \Phi_2$ üçün ödənilərsə, f isə arqumentlərindən simmetrik asılı və kəsilməz funksiyadırsa, onda elə i nömrəsi vardır ki, $f(\mathbf{x})$ i-ci qaydalı statistikası ilə eyniliklə üst-üstə düşür (bax, [3]). Əgər f Kolmoqorov mənada ortadırsa və baxılan şərt bütün φ-lər, $\varphi \in \Phi_3$ üçün ödənilərsə, onda f ədədi ortadır; əgər bütün φ-lər, $\varphi \in \Phi_4$ üçün bu şərt ödənilərsə, onda f qüvvətüstlü orta və ya həndəsi ortadır (təbii requlyarlq şərtlərində; bax, [4]).

Statistik nəticələrin korrektliyinin zəruri şərti real statistik verilənlərin ölçmə şkalalarına nəzərən onların adekvatlığıdır.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Суппес П., Зинес Дж., в кн.: Психологические измерения, пер. с англ., М., 1967, с. 9–110; [3] Фанцагль И., Теория измерений, пер. с англ., М., 1976; [4] Орлов А. И., «Матем. заметки», 1981, т. 30, № 4, с. 561–68.

ÖLÇÜ « мера; measure » – parçanın uzunluğu, müstəvi fiqurunun sahəsi və cismin həcmi anlayışlarının daha ümumi təbiətə malik çoxluqlar üçün ümumiləşmədir. Ən ümumi şəkildə Ö. hesabi – additiv çoxluq funksiyasıdır. Lakin nəzəri planda olduğu kimi təbiətdə də ədədi ölçülər (yəni ədədi qiymətlər alan Ö.) daha mühüm rol oynayır. Belə Ö.-lərin təyin olunma oblastları, adətən, müxtəlif semi – halqalar, halqalar və çoxluqların σ – halqalarıdır.

S – əsas bazis fəzası X-in hissələrinin hər hansı boş olmayan sistemi olsun. Əgər aşağıdakı münasibətlər ödənilərsə, S sistemi (X–də) çoxluqların semi – halqasıdır, deyilir:

1) $Y \in S \,\&\, Z \in S \Rightarrow Y \cap Z \in S$;

2) $Y \subset Z$ münasibətini ödəyən $Y \in S$ və $Z \in S$ elementlərinin ixtiyari cütü üçün S-in elementlərinin sonlu dizyunkt $(Y_j)_{1 \le j \le m}$ ailəsi həmişə tapılır və bu ailənin elementlərinin birləşməsi Z ilə üst-üstə düşür və bu ailə üçün $Y_1 = Y$ olur $(m \ge 2)$.

Boş çoxluq X fəzasında S-in çoxluqlarının ixtiyari semi – halqasına daxildir. Bununla yanaşı $X \in S$ olarsa, onda S, – X-də çoxluqlar semi–cəbri adlanır.

Əsas bazis fəzası X-in hissələrinin aşağıdakı xassələri ödəyən ixtiyari boş olmayan sistemi S-ə X-də çoxluqlar halqası deyilir.

1) $Y \in S \,\&\, Z \in S \Rightarrow Y \bigcup Z \in S$;

2) $Y \in S \,\&\, Z \in S \Rightarrow Y \setminus Z \in S$.

Çoxluqların verilən semi – halqasını özündə saxlayan, daxilolma əməlinə görə ən kiçik çoxluqlar halqası bütün $\bigcup_{1 \le j \le m} Y_j$ birləşmələrinin sinfi ilə üst-üstə düşür, burada $(Y_j)_{1 \le j \le m}$ – verilən semi – halqanın elementlərinin ixtiyari sonlu dizyunkt ailəsidir. Əgər X-də S çoxluqlar halqası $X \in S$ şərtini də ödəyərsə, S, – X fəzasında çoxluqlar cəbri adlanır.

Çoxluqlar halqası öz elementlərinin bütün mümkün olan hesabi birləşmələrinə görə qapalı olarsa, bu halqa çoxluqlar σ – halqası adlanır.

S, – X-də ixtiyari çoxluqlar semi – halqası, μ, – S-də təyin olunmuş, genişlənmiş həqiqi $\overline{\mathbb{R}}$ oxundan qiymətlər alan hər hansı funksiya olsun. Əgər:

1) $\mu(Y) \ge 0$, $Y \in S$,

2) μ – hesabi – additiv funksiya,

3) $\mu(\varnothing) = 0$

olarsa, μ funksiyası (ədədi, müsbət) ölçüdür, deyilir. İxtiyari $Y \in S$ üçün $\mu(Y)$-in qiyməti Y çoxluğunun μ – ölçüsü adlanır (və ya kontekstdən aydın olarsa ki, μ-dən söhbət gedir, sadəcə, Y çoxluğunun ölçüsü). Əgər $\mu(Y) < +\infty$ olarsa, Y sonlu ölçülü çoxluqdur, deyilir. Əgər Y sonlu ölçülü çoxluqların hesabi ailəsinin birləşməsi kimi ifadə olunarsa, $Y \subset X$ çoxluğu σ – sonlu ölçülü çoxluq adlanır. Əgər əsas bazis fəzası X σ – sonlu ölçülü çoxluqdursa, μ ölçüsü σ – sonlu ölçü adlanır.

Əgər ixtiyari $Y \in S$ üçün $\mu(Y) < +\infty$ olarsa ($X \in S$ olduğu halda bu şərt $\mu(X) < +\infty$ şərti ilə eynigüclüdür), μ ölçüsü sonlu ölçü adlanır. Əgər $X \in S$ və $\mu(X) = 1$ olarsa, μ normalanmış ölçü (və ya ehtimal ölçüsü) adlanır.

μ – əsas bazis fəzası X-in hissələrinin hər hansı semi – halqası S-də ölçü olsun; $H(S)$, – X fəzasının bütün elə hissələrinin sinfi olsun ki, bunlardan hər birini S semi – halqasının elementlərinin hesabi ailəsi ilə örtmək mümkün olsun. İxtiyari $Z \in H(S)$ üçün fərz olunur ki,

$$\mu^*(Z) = \inf\left\{ \sum_{i \in I} \mu(Y_i) : (Y_i)_{i \in I} \right\}$$

S-in elementləri ilə Z çoxluğunun hesabi örtüyüdür.

Bununla da, $H(S)$ sinfində μ^* funksiyası təyin olunur və μ^* – ilkin μ ölçüsü ilə assosiativ xarici ölçü adlanır.

Əgər ixtiyari $Z \in H(S)$ çoxluğu üçün

$$\mu^*(z) = \mu^*(Z \cap Y) + \mu^*(Z \setminus Y)$$

bərabərliyi ödənilərsə, $Y \in H(S)$ çoxluğu μ^* – ölçülən çoxluq adlanır.

Bütün mümkün μ^* – ölçülən çoxluqların çoxluğu S^* özündə ilkin S semi – halqasını saxlayan σ – halqadır. μ^* funksiyalarının S^* σ – halqasına daralması μ ölçüsünün davamı olan tam ölçüdür (Karateodori teoremi). Məs., ilkin μ ölçüsü verilmiş S semi – halqasının doğurduğu σ – cəbrə həmişə davam oluna bilinir. Əgər ilkin μ ölçüsü σ – sonlu olarsa, onda belə davamolunma yeganədir (bax, *Davamolunması, ölçülərin*).

Ümumiliyi pozmadan, yalnız çoxluqlar σ – halqalarında təyin olunmuş ölçülərə baxmaq olar. Adətən, (X, S, μ) şəklində nizamlanmış üçlüyə baxılır, burada X – əsas bazis fəzası, S, – X fəzasının altçoxluqlarının hər hansı σ – halqası, μ, – S σ – halqasında təyin olunmuş hər hansı ölçüdür. Bu şəkilli ixtiyari üçlük ölçülü fəza adlandırılır. X – əsas bazis fəzası, S, – X-in hissələrinin hər hansı σ – halqası olarsa, (X, S) şəklində ixtiyari cütlük ölçülən fəza adlanır. Əgər (X, S, μ) ölçülü fəzadırsa, onda (S, μ) cütlüyü əsas bazis çoxluğu X-də tamamilə müəyyən növ strukturdur (Ö. strukturu). Beləliklə, Ö. nəzəriyyəsini ümumi cəhətdə göstərilən növ strukturları öyrənən riyazi nəzəriyyə kimi səciyyələndirmək olar. Lakin praktikada əksərən elə strukturlara təsadüf olunur ki, Ö. strukturu digər növ strukturlarla sıx qarşılıqlı əlaqəli olur. Məs., əgər əsas bazis çoxluğu X-də hər hansı topologiya verilmişsə, S σ – halqası isə bu topologiya ilə hər hansı bir şəkildə əlaqəlidirsə, onda S σ – halqasında verilən μ ölçüsünün topoloji xassələri haqqında mülahizə aparmağın mənası vardır. Belə situasiyaya tipik misal S-in X topoloji

fəzasının Borel σ – cəbri olduğu halıdır. Bu halda S-də verilən μ ölçüsü Borel ölçüsü adlanır. Belə Ö.-nün xassələri X-in fəzasının özünün topoloji xassələrindən olduqca asılıdır. Ö. strukturunun digər növ strukturlarla (məhz cəbri strukturla) qarşılıqlı təsirinə tipik misal – əsas bazis çoxluğu X özünün çevirmələrinin hər hansı qrupu (və ya hətta semi – qrupu) ilə verildiyi və bu çevirmələrə nəzərən μ ölçüsünün müəyyən mənada dayanıqlı olduğu halıdır. Bu halda μ ölçüsünün kvaziinvariantlıq və ya onun verilmiş çevirmələrə nəzərən invariantlıq kimi cəbri xassələri haqqında mülahizə aparmaq olar (bax, *Ölçülü fəza*). Elə situasiyalara da təsadüf edilir ki, əsas bazis çoxluğu X eyni zamanda ölçü, topologiya və cəbri struktur kimi üç bir-birilə sıx əlaqəli strukturla verilir, məs., X fəzası lokal kompakt topoloji qrup, μ bu qrupda köçürmələrə nəzərən invariant, X-də Borel Haar ölçüsü olduğu hal.

Ölçülü ümumi fəzalar üçün təbii surətdə morfizm (homomorfizm) anlayışı daxil olunur, ümumi ölçülən fəzalar üçün isə ölçülən inikas anlayışı uyğun olaraq daxil olunur (bax, *Ölçülü fəza*). Bu ilkin anlayışların köməyilə inisial və final struktur terminlərində, adi sxem üzrə *ölçülərin hasili*, Ö.-nün inikasda obrazı, Ö.-nün inikasa nəzərən proobrazı kimi anlayışlar da daxil olunur. Ümumi ölçü nəzəriyyəsinin əsas məsələləri məhz bu anlayışlar ətrafında cəmləşir, əsas diqqət homomorfizm və ya ölçülən inikaslarda müəyyən mənada qorunub saxlanılan xassələrin öyrənilməsinə yetirilir (məs., ixtiyari ehtimal ölçüsünün homomorf obrazı, aydındır ki, ehtimal ölçüsüdür, lakin σ – sonlu ölçünün homomorf obrazı, ümumiyyətlə, σ – sonlu ölçü olmur).

Abstrakt Ö. nəzəriyyəsinin qurulması üçün ilkin modellər adi $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında Jordan ölçüsü və Lebeq ölçüsü kimi klassik riyazi obyektlər olmuşdur. Jordan ölçüsü tarix etibarilə Lebeq ölçüsündən əvvəl təyin olunmuş və Evklid həndəsəsi və klassik riyazi analiz çərçivəsində təbii olaraq formalaşmışdır. Jordan ölçüsünü təyin etmək üçün, bir qayda olaraq, $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında sadə həndəsi fiqurlar sinfi bu fəzada bütün mümkün çoxüzlülər sinfi əsas götürülür ($\mathbb{R}^n$-də qapalı n – ölçülü simpleksləri sonlu ailəsinin birləşməsi kimi ifadə olunan, $\mathbb{R}^n$ fəzasının ixtiyari altçoxluğu çoxüzlü adlanır; məs., boş çoxluq $\mathbb{R}^n$-də çoxüzlüdür). $\mathbb{R}^n$-də ixtiyari çoxüzlünün həcmi adi qaydada təyin olunur. Əgər ixtiyari həqiqi $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $Z \subset Y \subset Z'$, $\upsilon(Z') - \upsilon(Z) < \varepsilon$ münasibətlərini ödəyən $Z \subset \mathbb{R}^n$, $Z' \subset \mathbb{R}^n$ çoxüzlüləri tapılarsa, $Y \subset \mathbb{R}^n$ çoxluğu Jordan mənada ölçülən çoxluq adlanır, υ bütün çoxüzlülər sinfində verilmiş, $\mathbb{R}^n$ fəzasında standart həcm funksiyasıdır. $\mathbb{R}^n$ fəzasının Jordan mənada ölçülən bütün mümkün altçoxluqlarının çoxluğu çoxluqlar halqasıdır. υ funksiyası bu halqaya

$$\overline{\upsilon}(Y) = \sup\{\upsilon(Z) : Z \subset Y \text{ və } Z, -\mathbb{R}^n\text{-də çoxüzlüdür}\}$$

düsturu ilə davam olunur, burada Y, – $\mathbb{R}^n$-də Jordan mənada ölçülən ixtiyari altçoxluqdur. Belə alınan $\overline{\upsilon}$ funksiyası $\mathbb{R}^n$ fəzasında Jordan ölçüsü (Jordan həcmi) adlanır. Jordan həcmi sonlu – additiv çoxluq funksiyası olub, $\mathbb{R}^n$ fəzasının izometrik çevirmələrinə nəzərən invariantdır. Lakin E. Borel (E. Borel) qeyd etmişdir ki, Jordan həcmi eyni zamanda həm də hesabi – additiv çoxluq funksiyasıdır. Buna əsaslanaraq sonradan Lebeq ölçüsünün tərifi verilmişdir; Lebeq ölçüsünü – Jordan ölçüsünün davamı və çoxluqlar σ – halqasında verilən, $\mathbb{R}^n$ fəzasında ən kiçik (daxilolma əməlinə görə) tam ölçü kimi xarakterizə etmək olar. Lebeq ölçüsü də $\mathbb{R}^n$ fəzasında izometrik çevirmələrə nəzərən invariant ölçüdür. Lebeq ölçüsünün təyin olunma oblastına daxil olan çoxluqlar Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar adlanır. $\mathbb{R}^n$ fəzasının ixtiyari Borel altçoxluğu Lebeq mənada ölçüləndir, lakin Lebeq mənada ölçülən elə çoxluqlar vardır ki, onlar Borel çoxluqları deyildir (hətta Jordan mənada ölçülən çoxluqlar da mövcuddur ki, onlar Borel çoxluqları deyildir). Lebeq mənada ölçülən çoxluqlar çoxluğu $\mathbb{R}^n$ fəzasının bütün altçoxluqları sinfini tamamilə əhatə etmir. $\mathbb{R}^n$ fəzasının Lebeq mənada ölçülməyən altçoxluqlarının varlığı müxtəlif metodlarla müəyyən olunmuşdu. Bütün bu metodlar, əsasən, seçim aksiomuna əsaslanmışdı. Bu da təsadüfi olmamışdı. İsbat olunmuşdu ki [R. Sollovey, (R. Sollovay), 1970], seçim aksiomunun qeyri – hesabi formalarından istifadə etmədən $\mathbb{R}^n$ fəzasında Lebeq mənada ölçülməyən çoxluqların varlığını müəyyən etmək mümkün deyildir. $\mathbb{R}^n$ fəzasında onun izometrik çevirmələrinə nəzərən invariant və həm də Lebeq ölçüsünün ciddi davamı olan Ö. qurmaq mümkündür (bax, [8]).

Sonsuzölçülü vektor topoloji fəzada Lebeq ölçüsünə analoq ölçünün varlığı məsələsinin hətta sonsuzölçülü separabel Hilbert fəzasında həlli yoxdur (bax, [5]). Daha dəqiq, aşağıdakı müddəa doğrudur: Əgər E sonsuzölçülü separabel Banax fəzası və G, – E-dən olan kompaktların hesabi ailəsinin birləşməsində olmayan və E-nin additiv qrupunun altqrupu olarsa, onda E fəzasının Borel σ – cəbrində sıfır olmayan, G-dən paralel köçürmələrə nəzərən kvaziinvariant σ – sonlu Ö. təyin etmək olmaz. $G = E$ olduqda bu müddəa bilavasitə o faktdan alınır ki, E fəzasında qapalı, vahid radiuslu kürə (həmçinin, ixtiyari qabarıq cisim) E fəzasınıın hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbrdə verilən, sıfır olmayan σ – sonlu E kvazi – invariant ölçüyə nəzərən ölçülən deyildir. Əgər E qeyri – separabel Banax fəzası olarsa, G E-nin additiv qrupunun hər yerdə sıx altqrupudursa, onda E-də bütün mümkün olan kürələrin doğurduğu σ – cəbrdə sıfır olmayan, G –dən paralel köçürmələrə nəzərən kvaziinvariant ölçü təyin etmək mümkün deyildir. Digər tərəfdən, əgər E sonsuzölçülü separabel Hilbert fəzasıdırsa, onda E-də bəzi hər yerdə sıx vektor altfəzalarına nəzərən invariant (və deməli, həm də kvazi – invariant), sıfır olmayan σ – sonlu Borel ölçüləri vardır. Ö.-nün Borel çoxluğu olmadığı fərz olunan halda, seçim aksiomunun qeyri – hesabi formalarının köməyilə sonsuzölçülü separabel Hilbert fəzası E-də həqiqi ədəd oxu $\mathbb{R}$-də adi Lebeq ölçüsünə izomorf və E fəzasının bütün paralel köçürmələrinə nəzərən invariant Ö. qurmaq olar (bax, [9]).

Abstrakt ölçü nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyekti (X, S, μ) şəklində üçlükdür, yəni ölçülü ümumi fəzadır. Belə fəzalar arasında ehtimal fəzası xüsusilə seçilir və bu elə (X, S, μ) şəkilli üçlükdür ki, burada $X \in S$ və $\mu(X) = 1$. Ehtimal fəzaları ehtimal nəzəriyyəsinin əsas tədqiqat obyektidir. Abstrakt ölçü nəzəriyyəsinin mühüm suallarından biri aşağıdakıdır: S σ – halqası nə dərəcədə geniş olmalıdır ki, onda X fəzasının bütün birelementi çoxluqlarında sıfır qiymətləri alan ehtimal ölçüsü vermək mümkün olsun? Məsələn, bu şərt daxilində S σ – halqası X fəzasının bütün altçoxluqlarının çoxluğu ilə üst-üstə düşə bilərmi? Bəzi nəzəri – çoxluq hipotezlərin doğruluğu fərz olunarsa (X bazis fəzasının gücünü hər hansı dərəcədə məhdudlaşdıran),

onda isbat etmək olur ki, S σ – halqası X fəzasının bütün altçoxluqlarının çoxluğundan həmişə fərqlidir (bu halda, həm də deyilir ki, X fəzasının gücü geniş mənada ölçülən deyildir).

Kontinium hipotezinin ödənildiyi fərz olunarsa, onda $[0,1]$ parçasının hissələrindən elə doğurulmuş hesabi – additiv σ – cəbr qurmaq olar ki, bu σ – cəbrdə $[0,1]$ parçasının birnöqtəli altçoxluqlarında sıfır qiymətlərini alan ehtimal ölçüsü təyin etmək mümkün deyildir (bax, [9]).

Topoloji (ayrılan) fəzalarda baxılan Ö.-lər üçün ən mühüm anlayış ölçünün **regulyarlıq** (bu və ya digər mənada) anlayışıdır. X – topoloji fəza, μ, – X fəzasının hissələrinin hər hansı sinfində verilmiş (bu sinif $\mathrm{dom}(\mu)$ kimi işarə olunur) ədədi müsbət funksiya olsun. Əgər ixtiyari $Y \in \mathrm{dom}(\mu)$ çoxluğu üçün

$$\mu(Y) = \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathrm{dom}(\mu),\ Z \subset Y \text{ və } Z \text{ } X\text{-də qapalı çoxluqdur}\}$$

bərabərliyi doğru olarsa, μ funksiyası **daxilən regulyardır**, deyilir. Əgər ixtiyari $Y \in \mathrm{dom}(\mu)$ çoxluğu üçün

$$\mu(Y) = \inf\{\mu(Z) : Z \in \mathrm{dom}(\mu),\ Y \subset Z \text{ və } Z \text{ } X\text{-də açıq çoxluqdur}\}$$

bərabərliyi doğru olarsa, μ funksiyası **xaricən regulyardır**, deyilir. Əgər μ funksiyası eyni zamanda həm daxilən, həm xaricən requlyar çoxluq funksiyası olarsa, μ **requlyar funksiyadır**, deyilir.

μ – topoloji X fəzasının hissələrinin hər hansı cəbrində təyin olunmuş, ixtiyari sonlu müsbət additiv funksiya olsun. Onda:

1) μ daxilən requlyardır,
2) μ xaricən requlyardır,
3) μ requlyardır

münasibətləri öz aralarında ekvivalentdirlər. Aşağıdakı **Aleksandrov teoremi** doğrudur: kompakt topoloji fəzanın hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı cəbrdə verilmiş ixtiyari sonlu müsbət additiv requlyar funksiya hesabi – additiv funksiyadır (yəni bu cəbrdə ölçüdür).

Əgər hər bir $Y \in \mathrm{dom}(\mu)$ çoxluğu üçün

$$\mu(Y) = \sup\{\mu(Z) : Z \in \mathrm{dom}(\mu),\ Z \subset Y \text{ və } Z \text{ } X\text{-də qapalı çoxluqdur}\}$$

bərabərliyi ödənilərsə, topoloji X fəzasının altçoxluqlarının hər hansı sinfində təyin olunmuş, ədədi müsbət μ funksiyası **daxilən kompakt requlyar funksiya** adlanır. Topoloji X fəzasında Borel μ ölçüsü daxilən kompakt requlyar və lokal sonlu olarsa, o, **Randon ölçüsü** adlanır [lokal sonluluq – X -in ixtiyari x nöqtəsinin elə açıq $U(x)$ ətrafı vardır ki, $\mu(U(x)) < +\infty$ – kimi anlaşılır]. X – ixtiyari lokal kompakt topoloji qrup olsun. Onda X qrupunun Borel σ – cəbrində yeganə (sabit əmsal dəqiqliyi ilə) sıfır olmayan, bu qrupun bütün (sol) köçürmələrinə nəzərən invariant Radon ölçüsü μ təyin etmək olar. Belə μ ölçüsü X topoloji qrupunun **Haar (sol) ölçüsü** adlanır. Əksinə, əgər X topoloji qrupunun Borel σ – cəbrində bu qrupun bütün (sol) köçürmələrinə nəzərən invariant, heç olmasa bircə sıfır olmayan Radon ölçüsü varsa, onda X lokal kompakt topoloji qrupdur (A. Veyl, A. Weil). Evklid fəzası $\mathbb{R}^n$ -də klassik Lebeq ölçüsünə $\mathbb{R}^n$ fəzasının vahid ölçülü kubunda 1 qiymətini alan $\mathbb{R}^n$ -də belə Haar ölçüsünün tamamlanması kimi baxmaq olar.

Ayrılan topoloji fəzada hər bir sonlu (uyğun olaraq lokal sonlu) Borel ölçüsü daxilən kompakt requlyar ölçü olarsa, bu fəza **Radon** (uyğun olaraq **güclü Radon**) **fəzası** adlanır. Lindelef xassəsinə malik Radon topoloji fəzası həmişə güclü Radon fəzasıdır (**Lindelef xassəsi**: topoloji fəzanın ixtiyari açıq örtüyündən hesabi altörtük ayırmaq olar). Güclü Radon fəzalarına mühüm misallar Suslin fəzalarıdır, yəni elə metriklənən topoloji fəzalardır ki, bunlar polski topoloji fəzalarının kəsilməz obrazlarıdır. Məsələn, hər bir polski fəzası güclü Radon fəzasıdır (S. Ulam). Əgər X gücü geniş mənada ölçülməyən ixtiyari metrik fəzadırsa, onda X fəzasında hər bir σ – sonlu Borel ölçüsü μ üçün separabel daşıyıcı vardır, yəni elə separabel qapalı $F \subset X$ çoxluğu vardır ki, $\mu(X \setminus F) = 0$. Əgər qeyd olunan X fəzası tam fəza olarsa, onda o, Radon fəzası olacaqdır (X metrik fəzasının gücü üzərinə heç bir məhdudiyyət qoymadan, yalnız onu hökm etmək olar ki, X -də ixtiyari sonlu Borel ölçüsü requlyar ölçüdür). Randon topoloji fəzaları bir sıra digər, olduqca yaxşı xüsusiyyətlərə malikdir və bunlardan biri onların universal ölçülənliyidir (bax, [1]). Radon fəzası olmayan kompakt topoloji fəzaya misal: ω_1 -i (ω_1 birinci qeyri – hesabi ordinaldır) aşmayan, adi qaydalı topologiya ilə verilmiş bütün ordinal ədədlər çoxluğudur.

Müsbət ədədi qiymətlər alan Ö.-lərdən başqa, tez-tez dəyişkənişarəli ədədi ölçülərə (*yüklərə*), həm də kompleks ədədlər meydanında qiymətlər alan ölçülərə də baxılır. Daha ümumi hallarda topoloji vektor fəzalarda qiymətlər alan Ö.-lərə də baxılır. (X, S) – ölçülən fəza, S – bazis çoxluğu X -in hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr, E – topoloji fəza olsun. Əgər ixtiyari kəsilməz xətti $g : E \to \mathbb{R}$ funksionalı üçün çoxluq funksiyası $g \circ \mu : Y \to g(\mu(Y))$, $Y \in S$ – sonlu tam variasiyalı ədədi dəyişkənişarəli ölçü olarsa, $\mu : S \to E$ inikası **vektor ölçüdür**, deyilir. μ vektor ölçüsünün hesabi – additivliyini tətbiqi nöqteyi – nəzərdən mühüm olan bir çox hallar üçün isbat etmək olur. Məs., əgər E Banax fəzasıdırsa, onda μ E -dən qiymətlər alan, hesabi – additiv çoxluq funksiyasıdır.

Ölçü nəzəriyyəsinin sonsuzölçülü vektor fəzaları ilə bağlı bölməsində **ölçülən vektor fəza** (yəni vektor strukturu ölçülən fəza strukturu ilə uzlaşan əsas bazis fəzası) və *silindrik σ – cəbr* anlayışı xüsusi rol oynayır. Bu bölməyə vektorqiymətli inikasların müxtəlif inteqrallama nəzəriyyələri (Pettis zəif inteqrallaması, Boxner güclü inteqrallaması və s.) aiddir.

Müasir ölçü nəzəriyyəsinin böyük bir bölməsini müxtəlif təsvir teoremləri təşkil edir: lokal kompakt topoloji fəzalarda kəsilməz xətti funksionalların dəyişkənişarəli ölçülər üzrə inteqrallar vasitəsilə təsviri haqqında Riss teoremi, qabarıq metriklənən kompaktın ekstremal nöqtələri çoxluğunda topalanmış ehtimal ölçülərinə nəzərən qeyd olunan kompakt nöqtələrinin ağırlıq mərkəzləri (barimərkəzlər) olması haqqında Şoke teoremi tipli nəticələr, abstrakt cəbri strukturlarda (məs., Bul halqalarında) verilən ölçülər və adi ölçülən fəzalarda verilən ölçülər arasında metrik izomorfizmlər haqqında nəticələr və s.

Ö. nəzəriyyəsinin digər böyük bir bölməsi X bazis çoxluğunun hissələrindən təşkil olunmuş eyni bir S σ – halqasında təyin olunmuş ölçülərin müxtəlif siniflərinə bu və ya digər topologiyaların daxilolunması və ölçülərin müxtəlif yığılma növlərinin

araşdırılması ilə bağlıdır. Burada mühüm anlayış Borel ölçülərinin zəif (dar) yığılma anlayışıdır və əsas nəticələrdən biri *Proxorov teoremidir* ki, bu teoremdə tamamilə requlyar topoloji X fəzasında (yəni Tixonov fəzasında) verilən Radon ehtimalları ölçüləri ailəsinin nisbi kompaktlığını (zəif topologiyada) təyin edən kriteri müəyyən olunur.

Müasir ölçü nəzəriyyəsinin daha da xüsusi suallarından – Ö.-nün strukturu ilə topoloji fəzalarda Ber xassəsi arasında əlaqələr haqqında sualları (bax, [10]), ehtimal nəzəriyyəsində (xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsində), ümumi topologiyada və analizdə çoxsaylı tətbiqi olan ölçülən selektorlar haqqında müxtəlif nəticələri qeyd etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsində istifadə olunan digər ölçülər haqqında bax, *Təsadüfi ölçü* məqaləsinə [Viner təsadüfi Ö.-sü, Qauss Ö.-sü, Markov Ö.-sü, asılı olmayan qiymətlərli Ö., ortoqonal qiymətlərli Ö., Puasson Ö.-sü, requlyar (səpələnmə, diffuz) Ö., struktur Ö., sayıcı Ö., empirik təsadüfi Ö.,].

Tamamlanması, *ölçünün*; *Davamolunması*, *ölçülərin*; *Proyektiv sistemləri*, *ölçülərin*; *Ekvivalent ölçülər*; *Elementar ölçü* məqalələrinə də bax.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [5] Скороход А. В., Интегрирование в гильбертовом пространстве, М., 1975; [6] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [7] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч.1, М., 1962; [8] Харазишвили А. В., Инвариантные продолжения меры Лебева, Тб., 1983; [9] Харазишвили А. В., Топологические аспекты теории меры, К., 1984; [10] Окстоби Дж., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974.

ÖLÇÜ asılı olmayan qiymətlərli « **мера** с независимыми значениями; **measure** with independent values » – bax, *Təsadüfi ölçü*.

ÖLÇÜ(sü) birölçülü diffuziyanın « **мера** одномерной диффузии; **measure** of one-dimensional diffusion » – bax, *Birölçülü diffuziya*.

ÖLÇÜ; daşıyıcı « **мера;** носитель; **measure** support of » – bax, *Daşıyıcı*(sı) ölçünün.

ÖLÇÜ(sü) kriterinin « **размер** критерия; **size** of a test » – ilkin hipotezə müvafiq, paylanmalar ailəsi üzrə 1-ci növ səhv ehtimalının yuxarı sərhədidir. Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

ÖLÇÜ; məqbul yerinidəyişmə « **мера;** допустимый сдвиг; admissible shift of a **measure** » – bax, *Məqbul yerinidəyişmə*(si) ölçünün.

ÖLÇÜ ortoqonal qiymətlərli « **мера** с ортогональными значениями; **measure** with ortogonal values » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

ÖLÇÜ təsadüfi « **мера** случайная; random **measure** » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

ÖLÇÜ; variasiya « **мера;** вариация; variation of a **measure** » – bax, *Variasiya*(sı) ölçünün.

σ – ÖLÇÜ « σ – мера; σ – measure » – bax, *Ölçü*.

ÖLÇÜLƏN AXIN « измеримый поток; measurable flow » – ölçülü $(X, \mathscr{A}, \mu)$ fəzasının *avtomorfizmlərinin* $\{T^t,\ t\in\mathbb{R}\}$ *ailəsidir*, aşağıdakı şərti ödəyən *axındır*:

$\mathscr{B}$, – $\mathbb{R}$ -də Borel σ – cəbri olarsa, ixtiyari $f: X\to\mathbb{R}$ ölçülən funksiyası üçün $f_1(x,\ t) = (T^t x)$ bərabərliyi ilə təyin olunan $f_1: (X\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ funksiyası $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndir. Hər bir Ö. a. *kəsilməz axındır*. $(X, \mathscr{A}, \mu)$ Lebeq fəzası olduqda, ixtiyari kəsilməz $\{T^t,\ t\in\mathbb{R}\}$ axınından T^t-ni hər bir t üçün sıfır ölçülü çoxluqda əvəz edərək, Ö. a. almaq olur (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Вершик А. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 1, с. 127–36; [2] Maruyama G., «J. Math. Soc. Japan», 1966, v. 18, № 3, p. 303–30.

ÖLÇÜLƏN BÖLGÜ « измеримое разбиение; measurable partition » – $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının elə C_α, $\alpha\in A$ (A hesabi olmaya da bilər) çoxluqlarına $\mathscr{D}$ bölgüsüdür ki, bu çoxluqlardan hər birini bu çoxluqda $\mathbf{P}_\alpha$ ehtimal ölçüsü (C_α-da şərti ölçü) verməklə $\mathbf{P}$ – sanki ehtimal fəzasına çevirmək olar, bu şərtlə ki,

$$\mathbf{P}(B) = \int_\Omega \mathbf{P}_\alpha\ (B\bigcap C_\alpha(\omega))\ \mathbf{P}(d\omega)$$

tam ehtimal düsturu ödənilsin, burada $B\in\mathscr{A}$, $C_\alpha(\omega)$ C_α çoxluqlarından eləsidir ki, $\omega\in\Omega$ nöqtəsi ona daxildir. Sonlu və ya hesabi $\mathscr{D}$ bölgüsünün ölçülənliyi C_α çoxluqlarından hər birinin ölçülənliyi ilə ekvivalentdir. İki Ö. b. o halda ekvivalent adlanır ki, onlar fəzanın sıfır ölçülü, lazım bilinən çoxluğu xaric olunduqdan sonra üst-üstə düşsün. Lebeq fəzaları olan ölçülü fəzalarda ekvivalent Ö. b. sinifləri və ölçülən çoxluqların σ – cəbrlərinin tam σ – altcəbrləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Lebeq fəzasının Ö. b. nəzəriyyəsi [1]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107-50.

ÖLÇÜLƏN ÇOXLUQ « измеримое множество; measurable set » – bax, *Ölçü.*

C – ÖLÇÜLƏN ÇOXLUQ « C – измеримое множество; C – measurable set » – bax, *Tutum*.

ÖLÇÜLƏN FƏZA « измеримое пространство; measurable space » – bax, *Ölçülü fəza*, *Ölçü.*

ÖLÇÜLƏN FUNKSİYA « измеримая функция; measurable function » – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında (və ya bu fəzanın Lebeq ölçülü hər hansı altçoxluğunda) təyin olunmuş elə ədədi f funksiyasıdır ki, ixtiyari həqiqi t ədədi üçün $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x) < t\}$ Lebeq ölçülü çoxluqdur. Lebeq mənada ölçülən bütün çoxluqların sinfi olduqca genişdir. Bundan başqa, Lebeq mənada ölçülməyən funksiyanın varlığının isbatı yalnız belə funksiyanın seçilməsi aksiomunun olduqca güclü formalarından istifadə edilməklə mümkündür. Lebeq mənada ölçülən bütün funksiyalar sinfinin mühüm xassələrindən biri bu sinfin təbii cəbri əməllərə və hesabi limit keçidlərinə görə qapalı sinif olması xassəsidir.

Abstrakt ölçü nəzəriyyəsinin inkişafı ilə əlaqədar olaraq Ö. f. anlayışı müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir. E – əsas bazis fəza, S, – E-də hər hansı çoxluqlar σ – halqası, f, –

E –də verilmiş ədədi funksiya olsun. Əgər hər bir həqiqi t ədədi üçün $\{x\in E: f(x)\neq 0 \,\&\, f(x)<t\}$ çoxluğu S σ halqasından olarsa, f ölçülən funksiyadır, deyilir. S çoxluqlar σ – cəbri olduğu halda, f funksiyasının ölçülənliyinin tərifi ixtiyari həqiqi t ədədi üçün $\{x\in E: f(x)<t\}$ çoxluğunun bu S σ – cəbrinə aid olması tələbilə ifadə olunan tərifə çevrilir.

(E_1, S_1) və (E_2, S_2) – iki ixtiyari ölçülən fəza, f, – E_1 bazis fəzasının E_2 bazis fəzasına hər hansı inikası olsun. Əgər ixtiyari Y çoxluğu üçün $Y\in S_2 \Rightarrow f^{-1}(Y)\in S_1$ implikasiyası ödənilərsə, f (S_1 və S_2-yə) ölçülən inikasdır, deyilir. Bütün ölçülən fəzalar sinfi bu fəzalar arasındakı bütün mümkün ölçülən inikaslar sinfi ilə birlikdə ümumi ölçü nəzəriyyəsi və onun tətbiqində əsas tədqiqat obyektini təşkil edir.

Ö. f. anlayışının xüsusi halı əsas ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət anlayışıdır; ölçülən inikas anlayışının mühüm xüsusi halı bir topoloji fəzanın digərinə Borel inikası anlayışıdır. Ölçülən fəzada təyin olunmuş və topoloji vektor fəzada qiymətlər alan inikaslar üçün zəif (skalyar) ölçülənlik anlayışı çox faydalıdır (bax, [3]).

Ölçü ilə verilmiş qeyd olunmuş fəzada verilən Ö. f.-lara aid çoxsaylı fakt və müddəalar arasında Yeqorov teoremi, Ö. f.-lar ardıcıllığı üçün sanki yəqin yığılma və müntəzəm yığılma arasında dərin əlaqəni müəyyənləşdirən teorem, həmçinin Ö. f.-nın strukturunu onun nisbi kəsilməzliyi nöqteyi – nəzərindən və bu funksiyanın ölçülü hər hansı topoloji fəzada verildiyi halında aydınlaşdıran C – xassə haqqında Luzin teoremi xüsusilə seçilir (bax, [1] – [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 6 изд., М., 1989; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

σ – ÖLÇÜLƏN FUNKSİYA «σ – измеримая функция; σ – measurable function » – σ topoloji fəzada təyin olunmuş və bu fəzanın Borel σ – cəbrinə nəzərən ölçülən, ədədi funksiyadır. E – əsas bazis çoxluq, U – bu çoxluğun altçoxluqlarının hər hansı sistemi olsun, əgər

1) $\varnothing\in U$ və $E\in U$;

2) U-nun ixtiyari iki çoxluğunun kəsişməsi də U sisteminə daxil olarsa;

3) U-nun çoxluqlarının hər bir hesabi ailəsinin birləşməsi də U sisteminə daxil olarsa, (E, U) cütünə σ– topoloji fəza (və ya Aleksandrov fəzası [1]) deyilir.

Bu halda U sisteminin özü verilmiş σ – topoloji E fəzasının bütün açıq çoxluqlarının sistemi adlanır. Məs., hər bir adi topoloji fəza σ – topoloji fəzadır. Lakin tərs müddəa, ümumiyyətlə, doğru deyildir. Həqiqi ədəd oxu $\mathbb{R}$ hesabi bazaya malik olduğundan $\mathbb{R}$-ə eyni zamanda həm topoloji, həm də σ – topoloji fəza kimi baxmaq olar. $f: E\to\mathbb{R}$ funksiyası, yalnız və yalnız, o halda σ – ölçülən funksiyadır ki, ixtiyari $t\in\mathbb{R}$ ədədi üçün $\{x\in E: f(x)<t\}$ çoxluğu E fəzasının Borel σ – cəbrinə daxil olsun (yəni U sistemini də özündə saxlayan daxilolma əməlinə görə minimal σ – cəbrə). Əgər ixtiyari t üçün f funksiyası daha güclü

$$(t\in\mathbb{R})\Rightarrow\{x\in E: f(x)<t\}\in U \,\&\, \{x\in E: f(x)>t\}\in U$$

xassəsinə malik olarsa, onda f funksiyası σ – kəsilməz funksiya adlanır. Hər hansı σ – topoloji fəzanın digərinə σ – ölçülən inikası və σ – kəsilməz inikası ümumi anlayışları analoji surətdə daxil olunur.

Əgər hər bir $X\in U$ çoxluğu üçün elə $f: E\to\mathbb{R}$ σ – kəsilməz funksiyası varsa ki, $X=\{x\in E: f(x)\neq 0\}$ olsun, onda σ – topoloji E fəzası tamamilə normal fəza adlanır. E tamamilə normal σ – topoloji fəza olarsa, E-də təyin olunmuş ixtiyari σ – Ö. f. bu fəzanın Ber σ – cəbrinə nəzərən ölçülən funksiyasıdır (yəni E-də bütün σ – kəsilməz ədədi funksiyalar sinfinin doğurduğu σ – cəbrə nəzərən), belə ki, baxılan halda Borel və Ber σ – cəbrləri üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–629; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ÖLÇÜLƏN İNİKAS « измеримое отображение; measurable mapping » – bax, *Ölçülən funksiya*, *Ölçülü fəza.*

ÖLÇÜLƏN QRUP « измеримая группа; measurable group » – özünün altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbri ilə verilən elə qrupdur ki, bu qrupa nəzərən bütün qrup əməlləri ölçüləndirlər. Daha dəqiq, T – Abel qrupu, $\mathscr{B}$ – onun altçoxluqlarının hər hansı σ – cəbri olsun; əgər $T\times T$-dən T-yə və T-dən T-yə $(t_1, t_2)\to t_1+t_2$ və $t_1\to -t_1$ inikasları uyğun olaraq, $(\mathscr{B}, \mathscr{B}\times\mathscr{B})$ və $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$ σ – cəbrlər cütlərinə nəzərən ölçülən olarlarsa, $(T, \mathscr{B})$ cütünə ölçülən qrup deyilir. Borel σ – cəbri ilə verilən metriklənə bilinən separabel topoloji qrup Ö. q.-dur. Əgər T Hausdorf topoloji qrupudursa və bu qrupun gücü kontinium gücü ciddi aşarsa, onda T özünün Borel σ – cəbri ilə Ö. q. deyildir. Əgər $(T, \mathscr{B})$ Ö. q.-dursa, onda T-nin iki təsadüfi elementinin nöqtəbənöqtə cəmi də təsadüfi elementdir.

ÖLÇÜLƏN PARALELEPİPED « измеримый параллелепипед; measurable parallelepiped » – bax, *Hasil*(i) ölçülərin.

ÖLÇÜLƏN SEÇMƏ « измеримый выбор; measurable selection » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

ÖLÇÜLƏN SEMİ – AXIN « измеримый полупоток; measurable semiflow » – bax, *Semi – axın.*

ÖLÇÜLƏN VEKTOR FƏZA « измеримое векторное пространство; measurable vector space » – elə vektor fəzası və onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr cütlüyüdür ki, vektor fəzasının əməlləri bu σ – cəbrə nəzərən ölçüləndir. T – vektor fəzası (həqiqi ədədlərin meydanı $\mathbb{R}$ üzərində), $\mathscr{B}$ – onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr olsun; $(T, \mathscr{B})$ cəm əməlinə görə *ölçülən qrup* və $\mathbb{R}\times T$ fəzasından T fəzasına $(\alpha, t)\to\alpha t$ inikası $(\mathscr{B}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{B})$ cütünə nəzərən ölçülən olarsa, $(T, \mathscr{B})$ cütü *ölçülən vektor fəza* adlanır. Borel σ – cəbri ilə verilən separabel metriklənən topoloji fəza (xüsusi halda, separabel normalanmış fəza) Ö. v. f.-dır. Silindrik σ – cəbri ilə verilən ixtiyari lokal qabarıq fəza

Ö. v. f.-dır. Əgər $(T, \mathscr{B})$ gücü kontinium gücünü aşan normalanmış fəzadırsa, onda T Borel σ – cəbri ilə Ö. v. f. deyildir. Əgər $(T, \mathscr{B})$ Ö. v. f.-dırsa, onda T -nin ixtiyari iki təsadüfi elementinin nöqtəbənöqtə cəmi də təsadüfi elementdir.

Bax, *Ölçü.*

ÖLÇÜLƏNLİK Boxnerə görə **« измеримость по Бохнеру; Bochner measurability »** – bax, *Güclü ölçülən inikas*.

ÖLÇÜLƏNLİK Lebeqə görə **« измеримость по Лебегу; Lebesgue measurability »** – bax, *Ölçü*, *Ölçülən funksiya*.

ÖLÇÜLƏNLİK Luzinə görə **« измеримость по Лузину; Lusin measurability »** – *Radon ölçülü* topoloji fəzada təyin olunmuş inikas üçün ölçülənlik anlayışıdır. Əgər Ω Hausdorf topoloji fəzası, μ Ω -da Radon ehtimal ölçüsü, T topoloji fəza olarsa və əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $K_\varepsilon \subset \Omega$ kompakt altçoxluğu tapılarsa ki, $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ və f -in daralması K_ε -də kəsilməz olsun, onda $f : \Omega \to T$ inikası Luzinə görə μ – ölçülən inikas adlanır. Əgər $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}(\Omega)$ Borel σ – cəbrinin μ -yə nəzərən tamamlanması olarsa, onda $f : \Omega \to T$ inikası Luzinə görə, yalnız və yalnız, o halda μ – ölçülən inikasdır ki, hər bir Borel çoxluğu $B \subset T$ üçün $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ şərti ödənilmiş olsun.

Əd.: [1] Schwartz L., Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, L., 1973.

ÖLÇÜLƏRİN QOVUŞMASI « сращение мер; splicing of measures » – ölçü nəzəriyyəsinin anlayışı olub, σ – cəbrlərin «sanki asılı olmamazlığı» xassəsilə bağlı yaranmışdır. $\mathscr{A}$ və $\mathscr{B}$, – Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş iki σ – cəbr, $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, – $\mathscr{A}$ və $\mathscr{B}$ -ni özündə saxlayan minimal σ – cəbr olsun. Əgər bütün $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ üçün

$$\eta(A \cap B) = \mu(A)\,\nu(B)$$

bərabərliyi ödənilərsə, $(\Omega, \mathscr{A} \cup \mathscr{B})$ fəzasında η ehtimal ölçüsünə $(\Omega, \mathscr{A})$ -da μ və $(\Omega, \mathscr{B})$ -də ν ölçülərinin qovuşması deyilir. μ və ν ölçülərinin qovuşması üçün zəruri və kafidir ki, əgər $A_n \in \mathscr{A}$, $B_n \in \mathscr{B}$, $n = 1, 2, \ldots$ və $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \Omega$ olarsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,\nu(B_n) \geq 1$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

Əd.: [1] Marczewski E., «Fund. math.», 1951, t. 38, p. 217–29; [2] Ramachandran D., Perfect measures, I-II, New Delhi, 1979, (ISI Lecture Notes, 5,7); [3] Storock D., «Colloq. Math.», 1976, v. 35, p. 7–13; [4] Kallanpur G., Ramachandran D., «Ann. Probab.», 1983, v. 11, p. 819–22.

ÖLÇÜLMƏYƏN ÇOXLUQ « неизмеримое множество; nonmeasurable set » – baxılan *ölçünün* təyin olunma oblastına daxil olmayan çoxluqdur. Məs., vahid uzunluqlu $(0, 1)$ intervalının bütün rasional nöqtələrinin çoxluğu həqiqi oxda verilən klassik Jordan ölçüsünə nəzərən ölçülməyən çoxluqdur. «Ö. ç.» termini riyaziyyatda, tarixən, 1905-də isbat olunmuş Vitali teoremi ilə bağlı olaraq təsdiq olunmuşdur. Bu teoremdə hökm olunur ki, ciddi müsbət ölçülü, Lebeq mənada ixtiyari ölçülən çoxluğun Lebeq mənada ölçülməyən kontinual altçoxluğu vardır. Vitali teoreminin isbatı Evklid fəzasının paralel köçürmələrə nəzərən Lebeq ölçüsünün invariantlıq xassəsinə əsaslandırılmışdır (bax, [2]). Sonralar Lebeq mənada Ö. ç.-ların varlığına gətirən digər konstruksiyaların təklif olunmasına baxmayaraq, bunlar arasında Vitali konstruksiyasından asılı olmayanları yalnız F. Bernşteyn (F. Berstein, 1908) və S. Ulamın (S. Ulam, 1930) təklif etdikləri metodlardır. Bütün bu metodlarda əsas etibarilə seçim aksiomunun qeyri – hesabi formaları istifadə olunmuşdur və bunlar Ö. ç.-un təbiəti haqqında riyaziyyatçıların uzun müddətli müzakirələrinə səbəb olmuşdur. 1970-də R. Sollovey (R. Sollovay) isbat edə bilmişdir ki, seçim aksiomunun qeyri – hesabi formasından istifadə etmədən Lebeq mənada Ö. ç.-ların varlığını müəyyənləşdirmək qeyri – mümkündür.

Yuxarıda qeyd olunmuş klassik Vitali teoreminin müxtəlif ümumiləşmələri məlumdur. Məs., X – əsas bazis çoxluq, G , – X -də sərbəst təsirli qeyri – hesabi altqrupa malik olan X çoxluqlarının hər hansı çevirmələr qrupu olsun. Onda X çoxluğunun hissələrindən təşkil olunmuş ixtiyari G – invariant σ – halqada verilən ixtiyari σ – sonlu G – kvaziinvariant μ ölçüsü aşağıdakı xassəyə malikdir: $\mu(Y) > 0$ şərtini ödəyən, ixtiyari μ – ölçülən Y çoxluğunun elə $Y' \subset Y$ altçoxluğu var ki, bu çoxluq μ ölçüsünə nəzərən ölçülməyəndir (bax, [4]).

İnvariant və kvaziinvariant ölçülər üçün müxtəlif mütləq Ö. ç.-lar anlayışları vardır (bax, [3], [4]). Sonsuzölçülü fəzalarda bu və ya digər konkret ölçülərə nəzərən Ö. ç.-lara aid misallar, sonluölçülü çoxluqlarla müqayisədə, olduqca sadə şəkildə qurulur. Mütləq Ö. ç.-un qurulmasında da analoji vəziyyət müşahidə olunur.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [3] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., 1966; [4] Харазишвили А. Б., Инвариантные продолжения меры Лебега, Тб., 1983.

ÖLÇÜLÜ FƏZA « пространство с мерой; measure space » – (X, S, μ) şəkilli nizamlanmış üçlükdür, burada X – əsas bazis çoxluq, S – bu çoxluğun hissələrinin hər hansı σ – halqası və μ , – S -in σ – halqasında verilmiş ölçüdür. (S, μ) cütü əsas bazis çoxluğu X -də müəyyən növ strukturdur. (X, S) cütü, adətən, ölçülən fəza adlandırılır. Burada əksər hallarda tələb olunur ki, S -in σ – halqasının bütün elementlərinin birləşməsi X çoxluğu ilə üst-üstə düşsün. (X, S, μ) və (X', S', μ') – ölçüləri uyğun olaraq μ və μ' olan iki fəza olsun.

1) ixtiyari Y üçün $Y \in S' \Rightarrow f^{-1}(Y) \in S$;

2) ixtiyari Y üçün $Y \in S' \Rightarrow \mu(f^{-1}(Y)) = \mu'(Y)$

şərtlərini ödəyən $f : X \to X'$ inikasına (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına morfizmi (homomorfizmi) deyilir. Əgər $f : X \to X'$ inikası üçün yalnız 1) xassəsi ödənilirsə, onda bu inikasa ölçülən (X, S) fəzasının ölçülən (X', S') fəzasına ölçülən inikası deyilir. Əgər (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına homomorfizmi f ixtiyari Y üçün əlavə

$$Y \in S' \Leftrightarrow f^{-1}(Y) \in S$$

münasibətini də ödəyərsə, bu inikas (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına güclü homomorfizmi adlanır. Bu halda deyilir ki, μ' ölçüsü μ ölçüsünün f inikasında obrazıdır. Əgər heç olmasa bir biyektiv güclü $f: X \to X'$ homomorfizmi varsa, ölçülü (X, S, μ) və (X', S', μ') fəzaları izomorf fəzalar adlanır. Məhz belə güclü homomorfizm (X, S, μ) fəzasının (X', S', μ') fəzasına izomorfizmi adlanır.

G – əsas bazis çoxluğu X-in hər hansı çevirmələr qrupu olsun. Əgər $Y \in S$ və $g \in G$ münasibətlərindən $g(Y) \in S$ münasibəti alınarsa, S-in σ – halqası G qrupuna nəzərən invariantdır, deyilir (G – invariant σ – halqa). Əgər ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu və ixtiyari $g \in G$ çevirməsi üçün $\mu(Y) = 0$ münasibəti $\mu(g(Y)) = 0$ münasibətinə ekvivalent olarsa, S-in G – invariant σ – halqasında verilən μ ölçüsü G – kvaziinvariant ölçü adlanır. Əgər ixtiyari $Y \in S$ çoxluğu və ixtiyari $g \in G$ çevirməsi üçün $\mu(g(Y)) = \mu(Y)$ olarsa, S-in G – invariant σ – halqasında verilən μ ölçüsü G – invariant ölçüdür, deyilir.

(X, G, S, μ) nizamlanmış dördlüyü, μ ölçüsü G çevirmələr qrupuna nəzərən kvaziinvariant (uyğun olaraq, invariant) olarsa, kvaziinvariant ölçülü (uyğun olaraq, invariant ölçülü) fəza adlanır. Hər iki halda (G, S, μ) üçlüyü əsas bazis çoxluğu X-də müəyyən növ strukturdur. G qrupu trivial (yeganə vahidi elementə gətirilən) olduğu halda, (X, G, S, μ) fəzasını (X, S, μ) fəzası ilə eyniləşdirmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsində ölçülü fəzalara tipik misallar müxtəlif ehtimal fəzalarıdır, yəni elə (X, S, μ) fəzalarıdır ki, bu fəzalarda S σ – cəbrdir və $\mu(X) = 1$. Bu hallarda deyilir ki, X elementar hadisələr cəbri, S – hadisələr σ – cəbri, μ isə S-in hadisələr σ – cəbrində ehtimal ölçüsüdür (və ya sadəcə ehtimaldır).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теории случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

dim. – ÖLÇÜLÜK / DİMENSİONLUQ « размерность; dimensionality » – örtüklər vasitəsilə təyin olunmuş X kompaktının dim. – ölçüsü $\dim X$ elə ən kiçik n ədədinə deyilir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün X kompaktı $\leq \varepsilon$ diametrli qapalı çoxluqlardan ibarət, $n+1$-ə bölünən örtüyə malikdir. Bu tərifin məzmununu dəyişməyərək, burada «qapalı çoxluqlar» terminini açıq çoxluqlar termini ilə əvəz etmək olar.

Əd.: [1] MƏ, t. 4, səh. 822, səh. 819.

dim. – ÖLÇÜNÜN AZALDILMASI « понижение размерности; reduction of dimensionality » – bax, *Reduksiyası verilənlərin (əlamətlərin)*.

ÖLƏZİLƏNMƏSİ Markov prosesinin **« убивание** марковского процесса; **killing** of a Markov process **»** – verilmiş Markov prosesinin hər hansı *altprosesə* keçməsidir.

ÖNGÖRÜL ÇOXLUQ « предсказуемое множество; predictable set » – bax, *Martinqal*.

***ÖNGÖRÜL DAYANMA ANI « предсказуемый момент остановки; predictable stopping moment »** – bax, *Dayanma anı* axına görə.

ÖNGÖRÜL XARAKTERİSTİKA(sı) martinqalın **« предсказуемая характеристика** мартингала; **predictable characteristic** of a martingale **»** – bax, *Martinqal*.

ÖNGÖRÜL KVADRATİK VARİASİYA(sı) martinqalın **« предсказуемая квадратическая вариация** мартингала; **predictable quadratic variation** of a martingale **»** – bax, *Martinqal*; kvadratik xarakteristika.

ÖNGÖRÜL MARKOV ANI « предсказуемый марковский момент; predictable stopping time » – tam σ – cəbrlər axını sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axını ilə verilərsə, tam ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-də təyin olunmuş elə *Markov momenti* τ-dur ki, Markov momentlərinin azalmayan $(\tau_n)_{n \geq 1}$ ardıcıllığı vardır və bu momentlər $\{\omega : \tau(\omega) > 0\}$ çoxluğunda $\tau_n < \tau$ və bütün $\omega \in \Omega$ üçün $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = \tau$ şərtlərini ödəyirlər.

$(\tau_n)_{n \geq 1}$ ardıcıllığı belə təyin olunduqda, bu ardıcıllıq τ anını öncədən xəbər verən ardıcıllıq adlanır. Öngörül dayanma anları vasitəsilə $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ σ – cəbrlərinin soldan kvazikəsilməz axını anlayışı da daxil olunur. İxtiyari Ö. M. a. τ üçün $\mathcal{A}_{\tau-} = \mathcal{A}_\tau$ şərtini ödəyən axın belə adlanır.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

ÖNGÖRÜL PROSES « предсказуемый процесс; predictable process » – bax, *Martinqal*.

ÖNGÖRÜL PROYEKSİYASI, PROSESİN « предсказуемая проекция процесса; predictable projection of a process », tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axını ilə verilən $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tam ehtimal fəzasında verilmiş, həqiqi $\zeta(t)$ prosesinin öngörül proyeksiyası – tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ axınına nəzərən elə ${}^p\zeta(t)$ öngörül prosesidir ki, ixtiyari öngörül Markov anı τ üçün

$$\mathbf{M}\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}} = \mathbf{M}\,{}^p\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}}$$

bərabərliyi ödənilir.

Məhdud (və ya mənfi olmayan) prosesin Ö. p. vardır və o, birqiymətli təyin olunur. Bu halda ixtiyari öngörül Markov anı τ üçün

$$ {}^p\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}} = \mathbf{M}\{\zeta(\tau)\mathbf{I}_{\{\tau < +\infty\}} \mathcal{A}_{\tau-}\}\,.$$

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

ÖNGÖRÜL TƏSADÜFİ PROSES « предсказуемый случайный процесс; predictable stochastic process » – öngörül çoxluqların σ – cəbrinə nəzərən ölçülənlik xassəsinə malik olan *təsadüfi prosesdir.* Bu proses belə təyin olunur. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası və $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ – tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz axını olsun. $0 \leq s < t$, $A \in A_s$ olduqda $(s, t] \times A$ tipli və $A \in A_0$ olduqda $\{0\} \times A$ tipli bütün çoxluqları özündə saxlayan $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbrinə öngörül çoxluqlar σ – cəbri deyilir və bu σ – cəbr $\mathcal{P}$ kimi işarə olunur. $\mathcal{P}$ σ – cəbri tamamilə ölçülən çoxluqlar σ – cəbrinin tərkibindədir və: 1) $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbrinə nəzərən uzlaşmış və kəsilməz (və ya yalnız soldan kəsilməz) bütün proseslər ölçülən olduqda $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ilə üst-üstə düşür; 2) $[[\sigma; \tau[[$ şəklində stoxastik inteqralların doğurduğu, $\mathbb{R}_+ \times \Omega$-nın altçoxluqlarının minimal σ – cəbri ilə üst-üstə düşür, burada σ, τ – ixtiyari *öngörül Markov anlarıdır.* Əgər $\zeta(\cdot, \cdot)$ $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P})$ ölçülən fəzasını $(\zeta(t))_{t\geq 0}$ təsadüfi prosesinin faza fəzası $(M, \mathcal{S})$-ə inikas etdirən ölçülən inikas olarsa, $(\zeta(t))_{t\geq 0}$ öngörül təsadüfi proses adlanır.

Əd.: [1] Делларшери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

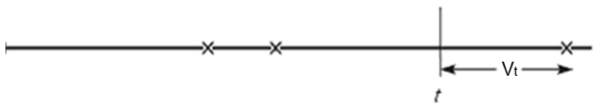
ÖRTÜM EHTİMALI / ETİBARLI EHTİMAL « вероятность накрытия; covering probability » – bax, *Etibarlı interval*, *Etibarlı qiymətləndirmə*.

ÖTÜM / EKSSES ANI « перескока момент; first passage time / hitting time » – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

ÖTÜM / EKSSES KƏMİYYƏTİ « перескока величина; value of overjump » – bax, *Semi – Markov prosesi*, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

ÖTÜM MÜDDƏTİ / EKSSES « ексцесс / перескок / прямое время возвращения; excess / overchoot » $\gamma(t)$ – verilmiş t anından sonra $\zeta(t)$ semi – Markov prosesinin ən yaxın bərpa anına qədər qalan müddətdir (bax, şəkil), yəni

$$\gamma(t) = \inf_s \{s > t : \zeta(s) \neq \zeta(t)\} - t,$$



(şəkil)

burada $\times$ – bərpa anıdır

Ö. m. semi – Markov prosesi ilə birlikdə $(\zeta(t), \gamma;\ t \geq 0)$ xəttivari Markov prosesi əmələ gətirir.

Xüsusi halda, $G(t) = \mathbf{P}\{\theta_k \leq t\}$ paylanma funksiyası və sonlu $\mathbf{M}\theta_k = m$ riyazi gözləməsi ilə təyin olunan

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$$

bərpa prosesi üçün paylanma funksiyası

$$G^*(t) = \int_0^t (1 - G(s))\,ds/m$$

olan γ^* stasionar Ö. m. vardır və γ^*, – $\gamma(t) = \tau_{\nu(t)+1} - t$ üçün limit Ö. m.-dir, burada $\nu(t) = \max_n \{n : \tau_n \leq t\}$.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967.

ÖTÜRMƏ ƏMSALI « передачи коэффициент; transfer coefficient » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu.*

ÖTÜRÜCÜ FUNKSİYA « передаточная функция; transfer function », $\mathcal{L}$ xətti sisteminin (və ya xətti filtrin) Ö. f. – aşağıdakı şərtlə təyin olunan dairəvi ω tezlikli $H(\omega)$ kompleks funksiyasıdır; sistemin girişinə ötürülən $e^{i\omega t}$ funksiyası $\mathcal{L}$ sistemi ilə $\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = H(\omega)e^{i\omega t}$ funksiyasına çevrilir. Ö. f.-nın mütləq qiyməti $A(\omega) = |H(\omega)|$ $\mathcal{L}$ sisteminin güclənmə əmsalı (və ya amplitud – tezlik xarakteristikası) adlanır, $\Psi(\omega) = \arg H(\omega)$ isə [$H(\omega) = A(\omega)e^{i\Psi(\omega)}$ olduqda] sistemin faza yerinidəyişməsi [və ya sadəcə faza, ya da faza – tezlik xarakteristikası] adlanır. Əgər $x(t)$ funksiyası sistemin girişində Furye inteqralı (və ya Furye – Stiltyes inteqralı) şəklində ifadə oluna bilinərsə, onda $\mathcal{L}$ sistemi ilə $x(t)$ funksiyasını bu fərziyyəyə əsaslanaraq,

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, x(t-u)\,du$$

funksiyası şəklində göstərmək olar, burada $h(u)$ Ö. f. ilə

$$h(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u}\, H(\omega)\,d\omega$$

münasibətilə bağlı, $\mathcal{L}$ sisteminin adi və ya ümumiləşmiş impuls – keçid funksiyasıdır, yəni $H(\omega)$ funksiyasının Furye çevirməsidir.

Bax, *Xətti filtr*.

ÖTÜRÜCÜLÜK QABİLİYYƏTİ, KANALIN « пропускная способность канала; channel capacity » – informasiyanın rabitə *kanalı* ilə ötürülməsinin nəzəri-informasion imkanlar ölçüsüdür. K. ö. q. rabitə kanallarının əsas xassələrindən biridir, informasiya nəzəriyyəsinin əsas teoremi (*Şennon teoremi*) doğru olduğu halda maksimal məqbul ötürmə sürəti ilə (bax, *İnformasiya ötürmə sürəti*) üst-üstə düşən və bu halda məlumatların verilən dəqiqliklə bərpası mümkündür.

Əgər Y və $\widetilde{Y}$ rabitə kanalı (Q, V) ilə bağlı təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda K. ö. q. $C = \sup \mathbf{I}(Y; \widetilde{Y})$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\mathbf{I}(Y; \widetilde{Y})$, – $\widetilde{Y}$-də Y üzrə informasiya miqdarıdır, yuxarı sərhəd isə (Q, V) kanalı ilə bağlı bütün $(Y, \widetilde{Y})$ təsadüfi kəmiyyətlər cütü üzrə götürülür. Kanalın giriş və çıxışındakı $Y = \{Y(t), -\infty < t < \infty\}$ və $\widetilde{Y} = \{\widetilde{Y}(t), -\infty < t < \infty\}$ siqnalları kəsilməz və ya diskret zamanlı təsadüfi proseslər olduğu halda, K. ö. q. vahid zaman ərzindəki orta K. ö. q. və ya ötürülən siqnalın bir simvolu üçün orta K. ö. q. kimi anlaşılır, odur ki,

$$C = \lim_{T-t\to\infty} (T-t)^{-1} \sup \mathbf{I}(Y_t^T; \widetilde{Y}_t^T) \qquad (*)$$

olduğu fərz olunur, əgər (*)-nun sağ tərəfindəki limit vardırsa; burada yuxarı sərhəd

$$Y_t^T = \{ Y(s), t < s \le T \}, \quad \widetilde{Y}_t^T = \{ \widetilde{Y}(s), \ t < s \le T \}$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin bütün cütləri üzrə götürülür və bu təsadüfi kəmiyyətlərin verilmiş kanalın uyğun parçası ilə bağlı olduğu nəzərdə tutulur. (*) limitinin varlığı kanalların kifayət qədər geniş bir sinfi üçün isbat olunmuşdur, məs., keçid ehtimalları sıfırdan fərqli və sonlu yaddaşlı bircins kanallar üçün. Bundan başqa, bir çox hallarda (məs., sonlu yaddaşlı kanallar üçün) (*) ifadəsində sup və lim işarələrinin yerini dəyişmək olar ki, bu halda K. ö. q. verilmiş kanal üzrə informasiyanın maksimal mümkün ötürülmə sürəti kimi interpretasiya olunur. K. ö. q. aşkar olaraq bir sıra xüsusi hallarda hesablanılır; məs., yaddaşsız simmetrik kanallar və Qauss kanalları bu qəbildəndir.

K. ö. q.-nin tərifi kimi, bəzən məlumatları verilən dəqiqliklə bərpa etməyə imkan verə biləcək informasiyanın maksimal məqbul ötürülməsi sürəti qəbul olunur.

Çoxkomponentli kanallar halında K. ö. q. kimi, adətən, çoxölçülü fəzada elə bir oblast anlaşılır ki (bu oblast kanalın ötürücülük qabiliyyəti oblastı adlanır), bu oblast məlumatları verilən dəqiqliklə bərpa etməyə imkan verə biləcək ötürülmə mümkün olan sürətlər toplusunu təsvir edir. Çoxötürücü kanalların yalnız bəzi növləri üçün K. ö. q. oblastının sadə təsviri məlumdur, ümumi halda isə K. ö. q. oblastının sadə xarakterizasiyası məlum deyildir.

İnformasiya ötürmə nəzəriyyəsində bəzən sıfır xətalı K. ö. q.-a da baxılır; K. ö. q. bu halda məlumatların bərpasının dəqiqliklə şərtləri ötürülən və bərpaolunan məlumatların tamamilə üst-üstə düşməsindən ibarətdir. Yaddaşsız diskret kanallar üçün sıfır xətalı K. ö. q.-nin tapılması məsələsi çətin və həllolunmaz kombinator məsələdir.

Əd.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер., с англ., М., 1967; [4] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [5] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М.,1960; [6] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [7] Чисар И., Кернер Я., Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, пер. с англ., М., 1985.

ÖYRƏDİCİ SEÇİM « обучающая выборка; training sample » – diskriminant analizdə və obrazların məsələlərində elə *seçimdir* ki, bu seçimin bütün elementlərinin məlum alternativ siniflərdən eyni birinə aid olması və bu sinfin nömrəsi də məlumdur. Adətən, Ö. s.-in miqdarı bölünə bilən siniflərin sayı ilə üst-üstə düşür, lakin ola bilər ki, Ö. s.-lər bütün siniflər üçün olmasın. Reqressiya məsələlərində reqressiya tənliyinin parametrləri Ö. s.-lə bu seçimlə qiymətləndirilir.

ÖZÜ-ÖZÜNƏ AYRILAN PAYLANMA « самораз-ложимое распределение; self-decomposable distribution » – a_n və b_n sabitləri ilə normalanmış $\xi_{nk} = \xi_k / b_n$, $n \ge 1$, $k = \overline{1, n}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər dəfə artan $\xi_{n1} + ... + \xi_{nn} - a_n$ cəmləri üçün mümkün ola bilən limit qanunları sinfi – $\mathscr{L}$ sinfinə (Levi sinfinə) məxsus paylanmadır. Fərz olunur ki, ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətləri *sonsuz kiçilənlik şərtinə* tabedir (bax, *Sonsuz kiçilənlik şərti*).

Paylanma funksiyası $F(x)$, yalnız və yalnız, $F(x) = F(\lambda x) * F_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\lambda > 1$ funksional tənliyini ödəyərsə, onda $\mathscr{L}$ sinfindəndir, burada $F_\lambda(x)$ – hər hansı paylanma funksiyasıdır.

Sonsuz bölünən paylanmalar sinfinin altsinfi $\mathscr{L}$ *Levi kanonik ifadəsinin* spektral H funksiyasının xüsusi bir xassəyə malik olması ilə seçilir: $H'(x)$ hesabi saydan çox olmayan nöqtələr istisna edilməklə bütün $x \ne 0$ nöqtələrində təyin olunmuşdur və $xH'(x)$ funksiyası $x < 0$, $x > 0$ yarımoxlarında artmayan funksiyadır. Ö. - ö. p.-lar mütləq kəsilməz və təkzirvəli paylanmalardır (bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин., М. – Л., 1949; [2] Золотарев В. М., «Литов. матем. сб.», т. 3, № 1, с. 123–40, 1963; [3] Yamazato M., «Ann Probab.», 1978, v. 6, № 4, p. 523–31.

τ – PAÇKA « τ – пачка; τ – pack / τ – batch » – bax, *Təsadüfi proses*; k ə s i l m ə l ə r.

PALM AXINI « Пальма поток; Palm flow » – məhdud keçmişitəsirsiz stasionar ordinar *giriş axınıdır* (bax, *Ordinarlığı*, *axının*; *Stasionarlığı*, *axının*). P. a. – rekurrent axındır, bu axın üçün ixtiyari t_0 anından bu andan sonra ilk axın hadisəsinin baş verdiyi ana qədər keçən müddətin paylanma funksiyası $F_0(t)$ ilə ardıcıl baş verən hadisələr arasında zaman intervallarının paylanma funksiyası $F(t)$ bir-birilə

$$F_0(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t [1 - F(x)]\, dt$$

münasibəti ilə bağlıdırlar, burada $\tau < \infty$ – ardıcıl axın hadisələrinin baş verdiyi anlar arasında interval uzunluğunun riyazi gözləməsidir. t uzunluqlu intervalda P. a. hadisələrinin sayının orta qiyməti t/τ -ya bərabərdir. P. a.-nın tərifini A. Ya. Xinçin [2]-də vermişdir; P. a. tipli axınlar ilk dəfə K. Palm tərəfindən [1]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] P a l m C., «Ericsson Technics», 1943, v. 44, № 1, p. 1–189; [2] X i n ç i n A. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, M., 1963.

PALM DÜSTURLARI « Пальма формулы; Palm formulas » – ordinar stasionar axın üçün düsturlardır (bax, *Ordinarlığı*, *axının*; *Stasionarlığı*, *axının*), axın parametri λ sonlu olduqda, bu düsturlar Palm funksiyaları $\varphi_k(t),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ və t müddəti ərzində k tələbin daxil olması ehtimalları $P_k(t)$ arasındakı əlaqəni müəyyən edir. P. d. d i f f e r e n s i a l formada

$$v_k'(t) = -\lambda\, \varphi_k(t), \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

burada $v_k(t) = \sum_{i=0}^{k} P_i(t)$,

inteqral formasında isə

$$P_0(t) = 1 - \lambda \int_0^t \varphi_0(z)\, dz,$$

$$P_k(t) = \lambda \int_0^t [\varphi_{k-1}(z) - \varphi_k(z)]\, dz,\ k = 1,\ 2, \ldots$$

münasibətlərilə ifadə olunur.

P. d. $k = 0$ halında [1]-də K. Palm tərəfindən, $k \geq 1$ halında isə [2]-də A. Ya. Xinçin tərəfindən çıxarılmışdır.

Əd.: [1] P a l m C., «Ericsson Technics», 1943, v. 44, № 1, p. 1–189; [2] X i n ç i n A. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, M., 1963.

PALM FUNKSİYALARI « Пальма функции; Palm functions » – sonlu parametrli ixtiyari stasionar axın üçün (bax, *Stasionarlığı*, *axının*) birqiymətli təyin olunmuş

$$\varphi_k(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{h_k(\tau,\ t)}{\omega(\tau)}, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

şəklində funksiyalardır, burada $h_k(\tau,\ t)$ – : 1) τ intervalı ərzində daxil olan tələblər sayının birdən az olmaması, 2) bilavasitə τ -dan sonrakı t intervalında daxil olan tələblərin sayının k -ya bərabər olmasının ehtimalıdır; $\omega(\tau)$ – 1) hadisəsinin ehtimalıdır.

P. f.-nın tərifini A. Ya. Xinçin vermişdir və K. Palm (C. Palm) tərəfindən daxil olunmuş $\varphi_0(t)$ funksiyası anlayışını müəyyən mənada genişləndirmiş və dəqiqləşdirmişdir. P. f. stasionar axınların tədqiqində əlverişli aparatdır. Xüsusilə də, *Palm axını* $\varphi_0(t)$ funksiyasının verilməsi ilə tamamilə təyin olunur. Bax, *Palm düsturları* və bu məqalədəki əd.-ta.

PALM PAYLANMASI « Пальма распределение; Palm distribution » – bax, *Nöqtəvi proses*, *Nöqtəvi proses* q r u p d a.

PALM – XİNÇİN TEOREMİ « Пальма – Хинчина теорема; Palm – Khinchin theorem » – kiçik intensivlikli stasionar ordinar axınlar cəminin ən sadə axınla yaxınlaşma mümkünlüyünü əsaslandıran *limit teoremidir* (bax, *Ordinarlığı*, *axının*; *Stasionarlığı*, *axının*). P. – X. t.-ində hökm olunur ki: $x_{nr}(t)$ uyğun λ_{nr} parametrlərli asılı olmayan stasionar ordinar axınlarının sonlu cəmləri olan

$$x_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} x_{nr}(t)$$

proseslər ardıcıllığının λ parametrli *Puasson prosesinə* yığılması üçün hər bir qeyd olunmuş t qiymətində

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr} \int_0^t \varphi_{nr}(0, u)\, du = \Lambda t,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{k_n} \lambda_{nr} \int_0^t \varphi_{nr}(1, u)\, du = 0$$

münasibətlərinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $\varphi_{nr}(k,\ t)$, $k = 0,\ 1,$ – $x_{nr}(t)$ axını üçün *Palm funksiyaları* $\varphi_k(t)$ -lərdir.

P. – X. t. A. Ya. Xinçin tərəfindən [2]-də isbat olunmuşdur. K. Palm [3]-də bu teoremi ilk dəfə isbat etməyə səy göstərmişdir.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о в а л е н к о И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., M., 1987; [2] X и н ч и н А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, M., 1963; [3] P a l m C., «Ericsson Technics», 1943, v. 44, № 1, p. 1–189.

PALM – XİNÇİN TƏNLİKLƏRİ « Пальма – Хинчина уравнения; Palm – Khinchin equations » – bax, *Nöqtəvi proses*.

PARABOLİK İNTERPOLYASİYA « параболическая интерполяция; parabolic interpolation » – *reqression analizin* elə modelidir ki, reqressiya funksiyalarının hamısı çoxhədlilərdir. $\mathrm{X} = (X_1, \dots, X_m)$ və $\mathrm{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ – təsadüfi vektorlar olsun və Y -in X üzrə reqressiya tənliyinin

$$\mathbf{M}\{Y_i \mid X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m\} = \sum_{j=1}^{m} a_j(t_i)\, x_j, \quad i = 1, \dots, n$$

şəklində olduğunu fərz etmək üçün əsas olduğu nəzərdə tutulur, burada $a_1(t), \dots, a_m(t)$ – hər hansı t parametrindən asılı verilmiş reqressiya funksiyalarıdır. Əgər $a_1(t), \dots, a_m(t)$ çoxhədlilərdirsə, onda deyilir ki, P. i. vardır.

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., Наименьших квадратов метод, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 3, М., 1982; [2] П р о х о р о в А. В., Регрессионный анализ, в кн.: Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984.

PARABOLİK REQRESSİYA « параболическая регрессия; parabolic regression », p o l i n o m i a l r e q r e s s i y a – elə reqressiya modelidir ki, bu modeldə bütün reqressiya funksiyaları çoxhədlilərdir. Daha dəqiq, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^{\mathrm{T}}$ və $\mathrm{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^{\mathrm{T}}$, – $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ və $\mathrm{y} = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$ qiymətlərini alan təsadüfi vektorlar olsun və fərz olunur ki,

$$\mathbf{M}\{\mathrm{Y} \mid \mathrm{X}\} = f(\mathrm{X}) = (f_1(\mathrm{X}), \dots, f_n(\mathrm{X}))^{\mathrm{T}}$$

vardır (yəni $\mathbf{M}\{Y_1 \mid \mathrm{X}\} = f_1(\mathrm{X}), \dots, \mathbf{M}\{Y_n \mid \mathrm{X}\} = f_n(\mathrm{X})$ riyazi gözləmələri vardır). Əgər $\mathbf{M}\{\mathrm{Y} \mid \mathrm{X}\} = f(\mathrm{X})$ vektorunun komponentləri məhz X vektorunun komponentlərinin çoxhədliləridirsə, onda reqressiya p a r a b o l i k r e q r e s s i y a adlanır. Məs., ən sadə halda, Y və X adi təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, P. r. tənliyi $y = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X} + \dots + \beta_p \mathrm{X}^p$ şəklində olur, burada $\beta_0, \dots, \beta_p$ – reqressiya əmsallarıdır. P. r.-nın xüsusi halı x ə t t i r e q r e s s i y a d ı r. X vektoruna yeni komponentlər əlavə etməklə P. r.-nı həmişə xətti reqressiya modelinə gətirmək mümkündür.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] С е б е р Д ж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

PARAMETRİK MODEL; s p e k t r a l s ı x l ı ğ ı n i d e n t i f i k a s i y a s ı **« параметрическая модель;** и д е н т и ф и к а ц и я с п е к т р а л ь н о й п л о т н о с т и; **parametric model** s p e c t r a l d e n s i t y i d e n t i f i c a t i o n **»** – verilən zaman sırasına uyğun *spektral sıxlıq* modelinin təyin olunması üçün aşağıdakı dörd mərhələdən ibarət prosedurdur: parametrik modelin tərtibinin seçilməsi və x_t, $t = 1, \dots, n$ müşahidələrinin məlum verilənləri üzrə bu modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi, spektral sıxlığın statistik qiymətinin hesablanması və bu statistik qiymət üçün etibarlı intervalların qurulması modeli kimi əksər hallarda spektral sıxlığı

$$f_{pq}(\lambda) = \frac{2\sigma_a^2 \left| 1 - \sum_{j=1}^{q} \theta_j e^{-i2\pi\lambda_j} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j e^{-i2\pi\lambda_j} \right|^2}, \quad 0 \le \lambda \le 1/2 \qquad (*)$$

tipli uyğun *qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta prosesi* (ARSO – proses) istifadə olunur, burada σ_a^2, – (p, q) tərtib ARSO modelinə uyğun yeniləşdirici ardıcıllığın (bəyaz küyün) dispersiyası, φ_j, θ_j – uyğun olaraq avtoreqressiya və sürüşən orta əmsallarıdır, λ – ölçüsüz tsiklik tezlikdir. Lakin, bəzən, daha ümumi – avtoreqressiv – inteqrallanan sürüşən orta proses (ARİSO – proses) modelindən də istifadə olunur, bu halda (*) spektral sıxlığı ilkin x_t sırasının d tərtibli bir sıra fərqlərinə uyğun olur (d – hər hansı müsbət ədəddir). Modelin tərtibinin seçilməsi p və q -nün və ya p, d, q kəmiyyətlərinin optimal qiymətlərinin seçilməsinə gətirilir (bax, *Parametrik model*; t ə r t i b i n s e ç i l m ə s i). φ_j, θ_j və σ_a^2 parametrləri, adətən, ən kiçik kvadratlar metodu və ya maksimal doğruyaoxşarlıq metodlarının variantlarından biri əsasında qiymətləndirilir. (*)-da naməlum parametrlərin əsl qiymətləri əvəzinə onların statistik qiymətlərini yazdıqda, $f_{pq}(\lambda)$ spektral sıxlığı üçün $\hat{f}_{pq}(\lambda)$ statistik qiymətini almaq olur.

$q \neq 0$ olduqda $\hat{f}_{pq}(\lambda)$ statistik qiymətinin paylanması məlum deyildir, buna görə də, bu statistik qiymət üçün etibarlı intervalın qurulması məsələsi hələ də həll olunmamışdır. $q = 0$, n və p -nin böyük qiymətlərində $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ statistik qiyməti asimptotik olaraq normal qanunla paylanır, meylsiz statistik qiymətdir və dispersiyası $(2/\nu) f_{p0}^2(\lambda)$ -ya bərabərdir, burada $\nu = n/p$ (bax, məs., [1], [2]). Buna görə də, $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ üçün etibarlı interval birinci yaxınlaşmada spektral sıxlığın qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin qurulduğu kimi qurulur (bax, məs., [3]). $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ üçün dəqiq etibarlı sərhədlər (*)-nun sağ tərəfində məxrəcin statistik qiyməti üçün etibarlı sərhədlərin dəqiq qiymətləri üzrə hesablanır (bax, [4] – [6]). Spektral sıxlığın çox şiş maksimumları olduğu halda $\hat{f}_{p0}(\lambda)$ statistik qiyməti üçün etibarlı intervalın eni sonsuz ola bilər.

Çoxölçülü zaman sırasının spektral sıxlığının parametrik statistik qiymətlərinin ehtimal paylanmaları məlum deyildir, lakin hesab etməyə əsas vardır ki, koherentlik funksiyalarının və tezlik xarakteristikalarının parametrik qiymətləndirilmə dəqiqliyi uyğun qeyri – parametrik statistik qiymətlərin dəqiqliyindən az deyildir (bax, [7] – [9]).

Əd.: [1] U l r y c h T., B i s h o p T., «Rev. Geophys. Space Phys.», 1975, v. 13, № 1, p. 183–200; [2] Я г л о м А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [3] Б е н д а т Д ж., П и р с о л А., Измерение и анализ случайных процессов, пер. с англ., М., 1974; [4] K o s l o v J., J o n e s R., «J. Time Series Analysis», 1985, v. 6, № 3, p. 141–51; [5] T o m a s e k L., «J. Time Series Analysis», 1987, v. 8, № 4, p. 469–77; [6] B u r s h t e i n D., W e i n s t e i n E., «IEEE Trans. on Acoustics», «Speech and

Signal Processing», 1987, v. 35, № 4, p. 504–10; 1988; v. 36, № 5, p. 826; [7] Akaike H., «Ann. Inst. Statist. Math.», 1969, v. 21, № 1, p. 225–46; [8] Privalsky V., Protsenko I., Fogel G., «Proc. First World Congress of the Bernoulli Soc.», v. 2, Utrecht, 1987, p. 651–54; [9] Привальский В. Е., «Водные ресурсы», 1989, № 4, с. 14–25.

PARAMETRİK MODEL; tərtibin seçilməsi **« параметрическая модель;** выбор порядка; order determination for a **parametric model »** – ARİSO (p, d, q) parametrik modelinin x_t, $t = 1, \dots, n$ zaman sırasına uyğunlaşdırılmasında p, d, q parametrlərinin təyin edilməsidir; bu halda fərz olunur ki, baxılan sıra avtoreqressiv–inteqrallanan sürüşən orta prosesinin (ARİSO – proses; rus. АРПСС – процесс – авторегрессии-проинтегрированного скользящего среднего процесс) realizasiyalarıdır və bu proses $(1-B)^d \varphi(B)(x_t - \mathbf{M}x_t) = \theta(B)a_t$ şəklində tənliklə təsvir olunur, burada a_t – orta qiymətləri sıfra bərabər və dispersiyaları isə σ_a^2 olan asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ – avtoreqressiya operatoru, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ – sürüşən orta operatoru, $Bx_1 = x_{t-1}$, $\mathbf{M}x_t$, – x_t sırasının orta qiymətidir, p, d, q – ARİSO – prosesin tərtibini (və ya tipini) təyin edən tam ədədlərdir və bunlar, adətən, müşahidələrin nəticələri üzrə təyin olunur (bax, ARİSO – *proses*).

P. m.-də tərtibin seçilməsi üçün iki yanaşma vardır: cərimə funksiyasına malik kriterilərin köməyilə – modelin tərtibi üçün seçiləcək qiyməti cərimə funksiyasının minimumu təyin edir, ikinci yanaşma diaqnostik yoxlama metodlarına əsaslanır (*Diaqnostik yoxlama* Boks və Cenkinsə görə).

Bu və ya digər kriterial funksiyaya istinad edən yanaşma, x_t-nin avtoreqressiya prosesi olduğunu fərz edən sadə AR – modellərinin tərtibinin seçilməsi üçün daha çox istifadə olunur.

Proqnozun son qərar xətasının Akaike kriterisi –

$$\mathrm{FPE}(p) = \frac{n+p+1}{n-p-1}\,\sigma_a^2(p)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\sigma_a^2(p)$ – *Yul – Uoker tənliklərinin* həllindən və ya digər üsulla alınan, $\mathrm{AP}(p)$ modeli üçün σ_a^2 dispersiyasının statistik qiymətidir (bax, *Boks – Cenkins metodu*). Əgər bu sıra mərkəzlənmirsə, onda kəsrin surətindəki və məxrəcindəki 1, Parzen CAT kriterisində olduğu kimi götürülməməlidir (bax, aşağı). Kriteri x_t ardıcıllığının biraddımlı xətti ekstrapolyasiyası xətasının kvadratının orta qiymətinin minimizasiyasına əsaslanır. FPE kəmiyyəti asimptotik olaraq spektral sıxlığın inteqral nisbi kvadratik orta qiymətləndirmə xətası ilə xətti bağlıdır. Kriteri avtoreqressiya tərtibini asimptotik olaraq yüksəldir, lakin n-in kiçik qiymətlərində və mürəkkəb spektrdə tərtibin kiçilməsi ehtimalının çox olmamasına baxmayaraq, tərtibin kiçilməsi mümkündür.

FPE kriterilərindən biri də Şibata kriterisidir (bax, [2], burada ikiölçülü və üçölçülü sıralar üçün bir sıra kriterilərə baxılmışdır):

$$S_n(p) = (N+2p)\,\hat{\sigma}_p^2, \quad p = 1, \dots, P,$$

burada

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=p}^{n=1} (x_{t+1} - \hat{\varphi}_1 x_t - \dots - \hat{\varphi}_p x_{t-p+1}),$$

$N = n - P$, $\hat{\varphi}_j$ – avtoreqression əmsalların statistik qiymətləridir. $S_n(p)$-nin ifadəsində N-i n ilə əvəz etmək olar.

Ümumiləşmiş Şibata kriterisi (bax, [3]) aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathrm{FPE}_\alpha(p) = n\hat{\sigma}_p^2 + \alpha p \tilde{\sigma}_P^2$$

və ya

$$\mathrm{GFPE}_\alpha(p) = n\hat{\sigma}_p^2 + \tilde{\sigma}_P^2 \sum_{j=1}^{P} \alpha_j,$$

burada $\tilde{\sigma}_P = [n/(n-P)]\hat{\sigma}_p^2$. α və α_i-nin qiymətləri xüsusi yolla seçilir.

Parzen avtoreqression ötürücü funksiya kriterisi (bax, [4]) –

$$\mathrm{CAT}(p) = \sum_{j=0}^{p} \frac{n-j-1}{n}\,\sigma_a^{-2}(j) - \frac{n-p-1}{n}\,\sigma_a^{-2}(p)$$

tutarlı kriteri deyildir, tərtibin statistik qiymətinin paylanması naməlumdur. Kriteri inteqral nisbi kvadratik orta xətanın minimizasiya şərtlərindən alınmışdır.

p və q tərtiblərinin seçilməsi üçün də kriterilər qrupu istifadə edilir; bu kriterilər aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathrm{AIC}_\alpha(p, q) = \ln\sigma_a^2(p, q) + \alpha(p+q)/n,$$

burada α n-dən asılı ola bilər (bax, [2]). Bu qrupa AIC Akaike kriterisi ($\alpha = 2$), BIC Şvarts–Rissanen kriterisi ($\alpha = \ln n$) və Hennan–Kuinn Φ kriterisi ($\alpha = c\ln\ln n$, $c > 2$) daxildir. Ümumi halda, bu kriterilərdən heç biri tutarlı kriteri deyildir, lakin $d = 0$ olduqda $\Phi(p, 0)$ və $\mathrm{BIC}(p, 0)$ tutarlı kriterilərdir və $d \neq 0$ olduqda isə zəif tutarlı kriterilərdir (bax, [5]).

Qeyd olunan kriterilər bir sıra münasibətlərlə bir-birilə əlaqədirlər (bax, [2], [4]):

$$\mathrm{FPE}(p) = S_n(p) + o(n^{-1}),$$
$$\ln \mathrm{FPE}(p) = \mathrm{AIC}(p, 0) + 2/n + o(n^{-2}),$$
$$\mathrm{CAT}(p) \leq \exp\{-\mathrm{AIC}(p, 0)\},$$
$$\hat{p}(\mathrm{BIC}) \leq \hat{p}(\mathrm{AIC}), \quad n \geq 8,$$
$$\hat{p}(\mathrm{BIC}) \leq \hat{p}(\overline{\Phi}),$$
$$\hat{p}(\overline{\Phi}) \leq \hat{p}(\mathrm{AIC}), \quad n \geq 16,$$

burada $\hat{p}(\cdot)$ – uyğun kriterinin $(p+q)$ cəm tərtibinin statistik qiymətidir. $(p+q) > n/10$ şərti ödənilən model məsləhət bilinmir. $p \neq 0$, $q \neq 0$ və xüsusilə də, z kompleks müstəvisində $\varphi(z) = 0$ tənliyinin vahid radiuslu dairəyə yaxın köklərinin olduğu halında səhv model seçilməsindən ehtiyatlanmaq lazımdır (bax, məs., [6]); belə hallarda Boks və Cenkins diaqnostik yoxlamasına müraciət etmək məsləhətdir. ARİSO (p, q)

P. m.-nin tərtibinin seçilməsi üçün AIC_α tip kriterilərin zamandan asılı dispersiya halında istifadəsinə [7]-də baxılmışdır. $\alpha \to \infty$, $n \to \infty$ olduqda $\alpha/n \to 0$ olarsa, tərtibin statistik qiyməti tutarlı statistik qiymət olur. Bu kriterilər, həmçinin, avtoreqression əmsalların hamısının sıfırdan fərqli olmadığı natamam $p < P$ tərtib $\mathrm{AP}(p)$ avtoreqressiya prosesinin (AP – proses) P. m.-nin tərtibinin seçilməsi üçün də tətbiq oluna bilər (bax, [8]).

$q \neq 0$ olduqda P. m.-in tərtibinin seçilməsi problemi olduqca mürəkkəbləşir və ümumi halda, xüsusilə də, çoxölçülü halda tərtibin seçilməsini [o cümlədən, fərq operatoru $(1-B)^d$ -nin], maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə parametrlərin qiymətləndirilməsini və diaqnostik yoxlamanı daxilinə alan iterativ proseduraa müraciət etmək məqsədəuyğundur (bax, [9]).

Sürüşən orta prosesi (SO – prosesi) halında P. m.-in tərtibinin seçilməsi üçün aşağıdakı qayda təklif olunmuşdur (bax, [10]): hər bir $q = 1, \dots, Q$ qiyməti üçün $\mathrm{AP}(p)$, $p \geq Q$ modelinə uyğun $f_{p,0}(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiyməti (bax, *Parametrik model*; spektral sıxlığın identifikasiyası) və $ri_p(k) = Ri_p(k) \big/ Ri_p(0)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm p$ tərs korrelyasion funksiyası qurulur, burada $Ri_p(k)$, – $f^{-1}_{p,0}(\lambda)$ funksiyasının tərs Furye çevirməsidir.

$$\mathrm{FPER}_\alpha(q) = \sigma_p^2(q)(1 + \alpha q/n),\ \alpha > 1$$

kriterisini minimallaşdıran model seçilir, burada

$$\sigma_p^2(q) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} I^{(n)}(\lambda_j) \left| \sum_{k=0}^{q} \beta_{pq}(k)\, e^{-i2\pi\lambda_j k} \right|^{-2},$$

$$I^{(n)}(\lambda_j) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} x_t\, e^{-i2\pi\lambda_j t} \right|^2,$$

$\beta_{p,q}(j)$ isə

$$\sum_{j=0}^{q} \beta_{pq}(j)\, ri_p(k-j) = 0, \quad k = 1, \dots, q$$

tənliklər sisteminin həllidir.

$\alpha = \ln n$ olduqda $n = 50$, 100 və 200 qiymətlərində SO(2) halında ən yaxşı nəticələr alınır. Bu yanaşma halında SO – prosesi modeli sırasına uyğunlaşdırma zəruri deyildir, belə ki, bu böyük hesablama xərcləri ilə bağlıdır, identifikasiya olunmuş proses isə hökmən ilk vəziyyətinə qayıdan proses olacaqdır.

P. m.-in tərtibinin seçilməsi və onun parametrlərinin (xüsusən də, bucaq metodu və ümumiləşmiş seçimi korrelyasiyanın; bax, [11], [12]) əvvəlcədən qiymətləndirilməsində kriterilər qrupu, $k = p + q + 1$ olduqda $r(k)$ korrelyasion funksiyasının statistik qiyməti ilə $\mathrm{ARSO}(p, q)$ modeli: $y_{pq} = r(p+q+1) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j\, r(p+q+1-j)$ modelinin uyğun nəzəri qiyməti arasındakı fərqin sıfra bərabər olması hipotezinin yoxlanılmasına əsaslanır, burada φ_j – avtoreqression əmsallardır.

Ən kiçik kanonik korrelyasiya metodu (bax, [12]) fərq operatorunun seçilməsinə, (P, Q) -nün maksimal tərtibinin seçilməsinə və avtoreqression əmsalların tutarlı statistik qiymətlərini almağa imkan verir.

$p \neq 0$, $q \neq 0$ halında P. m.-in tərtibini qəti surətdə seçmək üçün Boks və Cenkins diaqnostik yoxlamasına da müxtəlif modelləri yoxlamaqla müraciət etmək məsləhət görülür.

Əd.: [1] Akaike H., «Ann. Inst. Statist. Math.», 1971, v. 23, № 2, p. 163–80; [2] Lutkepohl H., «J. Time Series Analysis», 1985, v. 6, № 1, p. 35–52; [3] Shibata R., «Biometrika», 1984, v. 71, № 1, p. 43–49; [4] Parzen E., в кн.: Multivariate Analysis IV, Amst., 1977, p. 283–95; [5] Tsay R., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 4, p. 1425–33; [6] Привальский В. Е., Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры), 1985; [7] Tjostheim D., Paulsen J., «J. Time Series Analysis», 1982, v. 3, № 4, p. 265–82; [8] Haggan V., Oyetunji O., «J. Time Series Analysis», 1984, v. 5, № 2, p. 103–13; [9] Tiao G., Box G., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1981, v. 76, № 376, p. 802–16; [10] Bhansali R., «J. Time Series Analysis», 1983, v. 4, № 3, p. 137–61; [11] Glasbey C., «Technometrics», 1982, v. 24, № 3, p. 223–28; [12] Tsay R., Tiao C., «Biometrika», 1985, v. 72, № 2, p. 299–315.

* **PARAMETRİK ÖLÇÜSÜ, AXININ « параметрическая мера потока; parametric measure of flow »** – bax, *Təsadüfi axın.*

PARAMETRİK SPEKTRAL STATİSTİK QİYMƏT « параметрическая спектральная оценка; parametric spectral estimator » – hər hansı qeyd olunumuş $f(\lambda)$ parametrik modelinə uyğun [yəni $f(\lambda)$ funksiyasının sonlu sayda parametrlərlə təyin olunan müəyyən spektral sıxlıqlar ailəsinə aid olması hipotezində] stasionar təsadufi prosesin *spektral sıxlığı* $f(\lambda)$ -nın statistik qiymətidir. P. s. s. q. tapılarkən proses üzərində aparılan müşahidənin verilənləri yalnız modelin naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur, yəni spektral sıxlığın qiymətləndirilməsi statistik məsələsinə gətirilir. Diskret zamanlı $\zeta(t)$ prosesləri halında praktikada ən geniş surətdə istifadə olunan P. s. s. q. maksimal entropiyanın elə spektral statistik qiymətidir ki, bu statistik qiymət üçün fərz olunur ki, $[f(\lambda)]^{-1}$ funksiyası müəyyən triqonometrik çoxhədlinin kvadratıdır və bu çoxhədlinin tərtibi, adətən, əvvəlcədən müşahidələrin verilənlərinə görə qiymətləndirilir. Diskret zamanlı proseslərin P. s. s. q.-nin daha ümumi sinfi, tətbiqi məsələlərdə nisbətən tez-tez tətbiq olunan ARSO – statistik qiymətləri (*avtoreqressiv – sürüşən orta* statistik qiymətləri) sinfidir, bu da o fərziyyəyə əsaslanır ki, araşdırılan stasionar proses *qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta proseslərindəndir* (ARSO – proseslərindən), odur ki, $f(\lambda)$ iki triqonometrik çoxhədlinin modullarının kvadratlarının nisbətidir. $f(\lambda)$ spektral sıxlığının optimal ARSO – statistik qiymətlərinin tapılması məsələsi təbii olaraq iki hissəyə ayrılır: – əvvəlcə müşahidələrin verilənləri $f(\lambda)$ -nın ifadəsində surət və məxrəcdəki çoxhədlilərin tərtibləri p və q -nün münasib qiymətlərinin seçilməsində istifadə olunur (bax, *Parametrik model*; tərtibin seçilməsi), sonra isə bu çoxhədlilərin əmsalları qiymətləndirilir, lakin bu zaman fərz olunur ki, bunların tərtibləri məlumdur.

Əd.: [1] Non-linear methods of spectral analysis, 2 ed., B. – [a. o.], 1983; [2] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51; [3] Методы спектрального оценивания, «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1982, т. 70, № 9.

***PARÇALANMA METODU « расщепления метод; method of splitting »** – bax, *Boyskaut bıçağı metodu.*

PARÇALAYICI AN « расщепляющий момент; splitting time » – aşağıdakı əsas xassəyə malik olan təsadüfi τ anlarının müxtəlif siniflərinin işarə olunmasında istifadə olunan termindir: hər hansı verilmiş ζ_t, $t \geq 0$ təsadüfi prosesinin «gələcəyi» τ anından sonra, prosesin τ anındakı «indiki» vəziyyəti məlum olduğu halda, onun τ anına qədərki «keçmişindən» asılı deyildir (bax, *Markov xassəsi*). Prosesin «indiki» vəziyyəti, adətən, τ və ζ_τ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrlə təsvir olunur; lakin digər təsvirlər (təriflər) də vardır (məs., bu σ cəbr τ -nun infinitezimal ətrafında prosesin nə cür cərəyan etməsi haqqında əlavə informasiya ilə də tamamlana bilər). Əgər ζ_t, $t \geq 0$ ciddi Markov prosesi olarsa, onda bu prosesə uyğun P. a.-lar sinfi Markov anları sinfini öz daxilinə alır və ümumiyyətlə, bu sinifdən (sonuncudan) genişdir. Məs., birölçülü Viner prosesinin $[0, 1]$ -də minimum qiymətini aldığı an Markov anı deyil, məhz parçalayıcı andır.

[1]-də ilk dəfə baxılmış P. a. hərtərəfli öyrənilmək üçün obyekt olmuşdur (bax, [2]). Bunların bəzi analoqları təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində tətbiq olunmağa başlanmışdır (bax, [3]).

Əd.: [1] J a c o b s e n M., «Z. Wahr. und verw. Geb. », 1974, Bd 30, H. 1, S. 27–44; [2] G e t o o r R. K., S h a r p e M. J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 55, H. 3, S. 313–304; [3] Евстигнеев И. В., Овсеевич А. Н., Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, в. 2, с. 433–38.

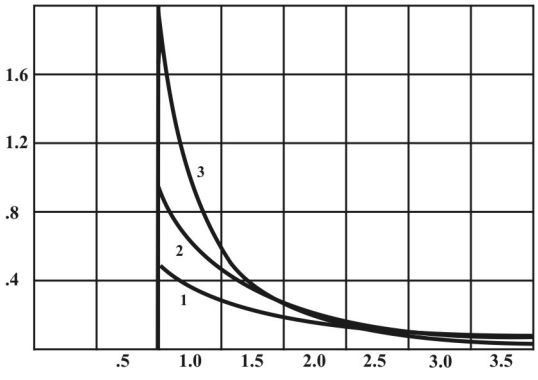
PARETO PAYLANMASI « Парето распределение; Pareto distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x) = (\alpha/x_0)(x_0/x)^{\alpha+1}$$

olan, (x_0, ∞) -da topalanmış kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır* (bax, şəkil), burada $x_0 > 0$ və $\alpha > 0$ parametrlərdir. Paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - (x_0/x)^{\alpha}, \quad x \in (x_0, \infty)$$

düsturu ilə təyin olunur.



Pareto paylanmasının sıxlıq funksiyası: $x_0 = 1$ və (1) $\alpha = 0{,}5$; (2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha = 2$.

Bu «kəsilmiş» anlamda P. p. $\mu = 1$ halı üçün paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$\frac{1}{B(\mu, \alpha)} \frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^{\mu+\alpha}}, \quad \mu; \alpha > 0, \quad 0 < x < \infty$$

olan 2-ci növ *beta – paylanmalar* ailəsində asılı olmayan bir paylanma kimi seçilir. İxtiyari qeyd olunmuş x_0 qiymətində P. p. $x = x_0/y$ çevirməsi vasitəsilə 1-ci növ *beta – paylanmasına* gətirilir. *Pirson paylanmaları* sistemində P. p. VI və XI tip paylanmalara aiddir. P. p.-nın riyazi gözləməsi $\alpha > 1$ olduqda sonludur və $\alpha x_0/(\alpha - 1)$ -ə bərabərdir; $\alpha > 2$ olduqda dispersiya sonludur və $\alpha x_0^2/(\alpha - 1)(\alpha - 2)$ -yə, median isə $2^{1/\alpha} x_0$ -a bərabərdir.

P. p. iqtisadi statistikanın müxtəlif məsələlərində V. Paretonun (W. Pareto, 1987) gəlirlərin paylanması məsələləri ilə bağlı işlərindən başlanmaqla yayılmışdır. Hesab olunurdu ki, P. p. müəyyən həddi aşan gəlirlərin paylanmasını olduqca yaxşı təsvir edir, bu isə o hal üçün anlaşılır ki, bu paylanmanın kəsik paylanmasının tərtibi $x \to \infty$ olduqda $1/x^{\alpha}$ olsun.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

PARETO PLANLAR ÇOXLUĞU « Парето множество планов; Pareto set of designes » – *reqression eksperiment* üçün $\{\Phi_\alpha\}$ sistemi üzrə optimallıq kriterilərinin elə planlar çoxluğudur ki, bunlar üçün $\{\Phi_\alpha\}$ – dominar kriterilər yoxdur. Əgər bütün α -lar üçün $\Phi_\alpha(\xi) \leq \Phi_\alpha(\xi')$ olarsa, bərabərsizlik eynilik deyilsə, $\xi\{\Phi_\alpha\}$ planı ξ' planı üçün d o m i n a r d ı r, deyilir.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983.

PARZEN KORRELYASİON PƏNCƏRƏSİ « Парзена корреляционное окно; Parzen lag window » – bax, *Korrelyasion pəncərə.*

PARZEN KRİTERİSİ a v t o r e q r e s s i v ö t ü r ü c ü f u n k s i y a n ı n **« Парзена критерий** а в т о р е г р е с с и о н н о й п е р е д а т о ч н о й ф у н к ц и и; **Parzen criterion** o f a u t o r e g r e s s i v t r a n s f e r f u n c t i o n; CAT **»** – bax, *Parametrik model*; t ə r t i b i n s e ç i l m ə s i.

PARZEN STATİSTİK QİYMƏTİ « Парзена оценка; Parzen estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; q e y r i – p a r a m e t r i k s t a t i s t i k q i y m ə t.

PASKAL PAYLANMASI « Паскаля распределение; Pascal distribution » – tamqiymətli $k = 0, 1, \ldots$ qiymətlərini

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = C_{r+k-1}^{r-1} p^r (1-p)^k,$$

ehtimalları ilə alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal paylanmasıdır; $0 < p < 1$, $r > 0$ – tam ədəddir. P. p. *mənfi binomial paylanmadır.*

PASSİV EKSPERİMENT « пассивный эксперимент; passive experiment » – əvvəlcədən nəzərdə tutulmayan elə ölçmələr toplusudur ki, bu ölçmələr, adətən, analizi çətinləşdirir və alınacaq informasiyanın azlığı ilə səciyyəvidir (bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin*).

PATNAYK ÇEVİRMƏSİ « Патнайка преобразование; Patnaik transformation » – mərkəzi olmayan χ^2 və F – paylanmalarının uyğun mərkəzi paylanmalarla approksimasiyasıdır. $\chi_n^2(a)$ – mərkəzi olmayan və sərbəstlik dərəcəsi sayı

n -ə bərabər χ^2 paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyət olsun; a qeyri – mərkəzilik parametridir və $\chi_n^2 = \chi_n^2(0)$.

Əgər $k = (n+a)^2/(n+2a)$ olarsa, onda

$$\chi_n^2(a) \approx [(n+2a)/(n+a)]\chi_k^2$$

təqribi bərabərliyi doğrudur və bu təqribi bərabərlik sağ və sol tərəflərin riyazi gözləmə və dispersiyalarının bərabərliyi mənasında anlaşılır. Onda $a \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\chi_n^2(a) < x\} = \mathbf{P}\{\chi_k^2 < x\} + O(a^{-1/2}),$$

$a \to 0$ olduqda isə

$$\mathbf{P}\{\chi_n^2(a) < x\} = \mathbf{P}\{\chi_k^2 < x\} + O(a^2).$$

Əgər $\chi_n^2(a)$ və χ_m^2 asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və

$$F_{n,m}(a) = ((\chi_n^2(a)/n)/(\chi_m^2/m))$$

olarsa, onda

$$F_{n,m}(a) \approx [(n+a)/n]F_{k,m}(0).$$

Əd.: [1] P a t n a i k P. B., «Biometrika», 1949, v. 36, p. 202–32.

PAYERLS ŞƏRTİ « Пайерлса условие; Peierls condition » – bax, *Piroqov – Sinay teoremi.*

PAYERLS TƏNLİYİ « Пайерлса уравнение; Peierls equation » – stasionar xətti $Af = g$ *kinetik köçürtmə tənliyindən* keçirilən hissəciklərin trayektoriyalarının kəsilməzlik hissələri üzrə inteqrallama yolu ilə alınan inteqral tənlikdir. $A = D + \Lambda - K$, – A operatorunun köçürtmə tənliyində kəsilməz hərəkətin differensial operatoru D -yə, köçürtmə prosesinin stoxastik differensial təsvirini verən $\lambda(x)$ mühiti ilə hissəciklərin toqquşma tezliyinə hasilinin zərbə operatoru Λ -ya və nüvəsi $\mathcal{K}(x', x)$ olan sıçrayışın inteqral operatoru K -ya ayrılışı olsun (bax, [4]). Əgər $\mathfrak{G}(x', x)$ funksiyası $D + \Lambda$ operatorunun Qrin funksiyasıdırsa, yəni

$$[(D+\Lambda)^{-1}h](x) = \int h(x')\,\mathfrak{G}(x', x)\,dx'$$

olarsa, onda $h = Kf$ sıxlığı üçün P. t. (ümumiləşmiş) $B = K(D+\Lambda)^{-1}$ inteqral operatoru ilə

$$\mathcal{B}(x', x) = \int \mathfrak{G}(x', x)\,\mathcal{K}(y, x)\,dy$$

nüvəsi ilə $h = B(h+g)$ şəklində yazılır. Bu zaman $f = (D+\Lambda)^{-1}(h+y)$. $0 < t < \tau$, – $x(t)$ köçürtməsinin trayektoriyasının, ümumiyyətlə, təsadüfi olan kəsilməzlik intervalı olsun. P. t. $x(+0)$ və $x(\tau+0)$ vəziyyətlərini əlaqələndirir. $\mathcal{K}(y, x)$ nüvəsi $x \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ nöqtəsinin bəzi əyrixətli koordinatları yalnız $\xi^1, \ldots, \xi^k$ hissəsindən asılı olduqda $h(x) = h(\xi^1, \ldots, \xi^k)$ üçün P. t.-nə keçid məsələsinin dim. – ölçüsünü azaldır. P. t. ilk dəfə [1]-də bircins mühitdə və izotrop səpələnmədə v sürətilə bərabərsürətli köçürtmə halında alınmışdır; yalnız fəza koordinatları r -dən asılı $\mathcal{B}$ nüvəsi

$$|r'-r|^{-2}\exp\left(-\frac{\lambda}{v}|r'-r|\right)$$

kəmiyyətinə mütənasibdir.

P. t.-ndə operatorun daha yaxşı ayrılışına və qeyri – stasionar köçürtmə konstruksiyaya ümumiləşməsinə də baxmaq olar.

Əd.: [1] P e i r l s R., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1939, v. 35, p. 610–15; [2] Д э в и с о н P., Теория переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1960; [3] В л а д и м и р о в В. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 61, с. 1–158; [4] Ф р о л о в А. С., Ч е н ц о в Н. Н., в кн.: Метод Монте – Карло в проблеме излучений, М., 1967, с. 25–52.

PAYLANMA « распределение; distribution » – ehtimal ölçüsüdür; bax, *Paylanma*(s ı) e h t i m a l ı n.

PAYLANMA, b i r c i n s f ə z a d a e h t i m a l p a y l a n m a s ı **« распределение** в е р о я т н о с т е й н а о д н о р о д н о м п р о с т р а н с т в е; **probability distribution** o n a h o m o g e n e o u s s p a c e **»** – topoloji M fəzasında *ehtimal ölçüsüdür*; bu fəzada kəsilməz və tranzitiv hər hansı topoloji G qrupunun təsir etdiyi fərz olunur.

Əgər H hər hansı qeyd olunmuş $x_0 \in M$ nöqtəsinin stabilizatorudursa, yəni $H = \{g \in G : gx_0 = x_0\}$ olarsa, onda M fəzası qapalı H altqrupu üzrə G qrupunun sol birləşik siniflərinin fəzası G/H -a izomorfdur. Burada yalnız o hala baxılacaqdır ki, G Li qrupudur, H onun kompakt altqrupudur; onda $M \approx G/H$ bircins fəzası təbii olaraq analitik çoxobrazlının strukturuna malik olur. M fəzasında Borel ehtimal ölçülərinin çoxluğu $\mathcal{M}^1(M)$ -dən hər bir ölçüyə H qrupunun sağ təsirinə nəzərən invariant və G qrupunda bütün Borel ehtimal ölçülərinin $\mathcal{M}^1(G/H)$ çoxluğundan olan ehtimal ölçüsünü qarşılıqlı birqiymətli olaraq qarşı qoymaq olar. $\mathcal{M}^1(M)$ -dən M -də (və ya, ekvivalent olaraq, G -də) H qrupunun sol təsirinə nəzərən invariant olan M -dəki bütün ehtimal ölçülərinin $\mathcal{M}_0^1(M)$ altsinfini ayırmaq olur. İxtiyari $x \in M$ nöqtəsi və ixtiyari $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ üçün $\mu_x(E) = \mu(g^{-1}E)$ qaydası üzrə μ_x ölçüsü təyin etmək olar, g , – x_0 nöqtəsini x -ə keçirən, G qrupunun elementidir. μ ölçüsünün sol invariantlığı xassəsinə görə μ_x ölçüsü g elementinin konkret seçilməsindən asılı olmur. İki μ və $\nu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ ölçüləri üçün

$$\mu * \nu(E) = \int_M \nu_x(E)\,\mu(dx)$$

qaydası üzrə $\mu * \nu$ kompozisiyasını təyin etmək olar, $E \subset M$. Bu qayda ilə təyin olunmuş $\mu * \nu$ ölçüsü yenə də $\mathcal{M}_0^1(M)$ -in elementi olacaqdır. Kompozisiya əməlinə nəzərən $\mathcal{M}_0^1(M)$ çoxluğu δ_{x_0} vahidli və zəif yığılma topologiyalı topoloji semi – qrup olacaqdır (bax, [1]).

Burada, artıq G -nin sonlu mərkəzli, qeyri – kompakt əlaqəli semisadə Li qrupu olduğu fərz olunur, $H = K$ G -nin maksimal

kompakt altqrupudur. Əgər $g \in G$, $k \in K$ üçün $\varphi(gk) = \varphi(kg) = \varphi(g)$ olarsa, G qrupunda φ funksiyası K – *sferik* (və ya sadəcə *sferik*) *funksiya* adlanır. Beləliklə, φ faktiki olaraq M -də təyin olunmuşdur. Əgər ω_k K qrupunda normalanmış Haar ölçüsü və $\varphi(e) = 1$ olduqda

$$\int_K \varphi(xky)\,\omega_K(dk) = \varphi(x)\varphi(y)$$

bərabərliyi ödənilərsə, sferik φ funksiyası elementar sferik funksiya adlanır. $\{\varphi_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ müsbət müəyyən, elementar sferik funksiyaların çoxluğu olsun (ətraflı, bax, [2]). Hər bir belə funksiya $\varphi_\lambda(e) = 1$, $\varphi_\lambda(g^{-1}) = \overline{\varphi_\lambda(g)}$, $|\varphi_\lambda(g)| \le 1$ xassələrinə malikdir. $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ ölçüsünün Furye çevirməsi

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_M \varphi_\lambda(x)\mu(dx),\quad \lambda \in \Lambda$$

inteqralına deyilir. $\hat{\mu}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda$ funksiyası $\mathbb{R}^d$ -də adi xarakteristik funksiyanın bütün xassələrini ödəyir. Doğrudan da:

1) $\widehat{\mu^* \nu}(\lambda) = \hat{\mu}(\lambda)\hat{\nu}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda$; 2) əgər $\hat{\mu}(\lambda) = \hat{\nu}(\lambda),\ \lambda \in \Lambda$ olarsa, onda $\mu = \nu$; 3) μ_n μ -yə zəif yığılır (μ_n, $n \ge 1$) və $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$, yalnız və yalnız, $\hat{\mu}_n(\lambda) \to \hat{\mu}(\lambda),\ n \to \infty$, $\lambda \in \Lambda$ münasibəti ödənildikdə doğrudur.

$\mathcal{M}_0^1(M)$ çoxluğundan ölçülər üçün kompozisiya əməli təyin olunduğundan, sonsuz bölünən paylanma anlayışı qrupda verildiyinə analoji adi qayda ilə təyin olunur (bax, *Sonsuz bölünən paylanma* qrupda). Əgər $\mu \in \mathcal{M}_0^1$ sonsuz bölünən ölçüdürsə, onda bütün $\lambda \in \Lambda$ üçün $\hat{\mu}(\lambda) \ne 0$. $\mathcal{M}_0^1(M)$ -dən olan bütün sonsuz bölünən paylanmaların çoxluğu zəif qapalıdır. Sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyası üçün *Levi – Xinçin kanonik ifadəsinin* tam analoqu vardır. Əgər $\mu \in \mathcal{M}_0^1(M)$ sonsuz bölünəndirsə, onda onun xarakteristik funksiyası aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\hat{\mu}(\lambda) = \exp\{\, p_D(\lambda) - \int_{|x|>0} [1 - \varphi_\lambda(x)]\, L(dx)\},$$

$p_D(\lambda)$, – M -də hər hansı 2-ci tərtib elliptik differensial operator, həm də K altqrupunun təsirinə nəzərən invariant olan və konstantları sıfra çevirən D operatorunun məxsusi funksiyası φ_λ -nın uyğun məxsusi qiymətidir, L , – M -də sferik ölçüdür:

$$\int_M |x|^2\,(1 + |x|^2)^{-1} L\,(dx) < \infty,$$

$|x|$, – M -də x_0 -dan x -ə qədər məsafə – G -də Karton – Killinq formasının köməyilə doğurulmuş ölçüdür.

Bax, *Hiperqrup*.

Əd.: [1] Hunt G. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 81, № 2, p. 264–93; [2] Gangolli R., «Acta math.», 1964, t. 111, p. 213–46.

PAYLANMA(sı) ehtimalın « **распределение вероятностей / вероятностное распределение; probability distribution** » – ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın əsas anlayışlarından biridir. Müasir yanaşmada araşdırılan stoxastik eksperimentin riyazi modeli kimi uyğun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası götürülür; Ω – elementar hadisələr fəzası, $\mathcal{A}$, – Ω -nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathbf{P}$, – $\mathcal{A}$ -da təyin olunmuş $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ şərtini ödəyən ölçüdür (*ehtimal ölçüsü*). $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasında ixtiyari belə ölçü ehtimal paylanması adlanır (bax, [1]). Bu tərifin A. N. Kolmoqorov aksiomatikasının əsası olmasına baxmayaraq (1933), ehtimal nəzəriyyəsinin sonrakı inkişafında olduqca ümumi olduğundan, bəzi «patoloji» halları istisna etmək məqsədilə daha məhdud digər təriflə əvəz olunmuşdur; yeni tərif ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}$ -nin «tam ölçü» olması tələbi ilə verilir (bax, [2]). Funksional fəzalarda ehtimal P.-ından, adətən, onun üçün müəyyən requlyarlıq xassəsinin ödənilməsi tələb olunur; bu xassə separabellik kimi və digər formalarda da ifadə oluna bilər (bax, *Separabel proses* və [4]).

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın konkret məsələlərində təsadüf olunan ehtimal P.-ları o qədər də çox deyildir. Belə paylanmalar çoxdan məlum olub, əsas ehtimal sxemləri ilə əlaqədardır (bax, [5]). Bu paylanmalar ya təsadüfi kəmiyyətin aldığı ayrı-ayrı qiymətlərinin ehtimalları ilə (bax, *Diskret paylanma*) və ya paylanmanın sıxlıq funksiyaları (bax, *Kəsilməz paylanma*) ilə təyin olunur.

Zəruri olduqda bunlar üçün cədvəllər tərtib olunmuşdur (bax, [6]).

Bu əsas ehtimal P.-larından bəziləri təkrarlanan asılı olmayan sınaqlarla əlaqədardır (bax, *Binomial paylanma*, *Həndəsi paylanma*, *Polinomial paylanma*), bəziləri isə bu ehtimal sxeminə uyğun sınaqlar sayını sonsuz olaraq artırdıqda limit yaxınlaşmaları ilə alınmış ehtimal P.-larıdır (bax, *Normal paylanma*, *Puasson paylanma*, *Arksinus paylanması*). Lakin bu limit paylanmaları dəqiq paylanmalar kimi, məs., təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində (bax, *Viner prosesi*, *Puasson prosesi*), bəzi xarakterizasion teoremlərdəki tənliklərin həlləri kimi də (bax, *Normal paylanma*, *Üstlü paylanma*) yaranır.

Müntəzəm paylanma, adətən, eksperimentin nəticələrinin bərabərimkanlılığının riyazi ifadəsi kimi qəbul edilərək, limit yaxınlaşması kimi də alınır. Yuxarıda qeyd olunan əsas ehtimal P.-larından baxılan təsadüfi kəmiyyətlərin funksional çevirmələri vasitəsilə digər ehtimal P.-ları alınır. Məs., riyazi statistikada normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdən *xi – kvadrat paylanma*, *qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanma*, *Styudent paylanması*, *Fişer F – paylanması* kimi paylanmalar alınmışdır.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın asimptotik metodlarının inkişafı ilə əlaqədar mühüm P. sinifləri yaranmışdır (bax, *Limit teoremləri*, *Dayanıqlı paylanma*, *Sonsuz bölünən paylanma*, *Omeqa – kvadrat paylanma*, *ω^2 – paylanma*).

Nəzəri və tətbiqi nöqteyi – nəzərdən paylanmaların yaxınlığı anlayışı mühüm əhəmiyyətə malikdir. $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəzasında bütün ehtimal P.-larının çoxluğu müxtəlif üsullarla topoloji fəzaya çevrilə bilər. Bu zaman ehtimal P.-larının zəif yığılması əsas rol oynayır (bax, *Yığılma*(sı) paylanmaların). Birölçülü və sonluölçülü hallarda ehtimal P.-larının yığılmasını öyrənmək üçün əsas vasitə kimi *xarakteristik funksiyalar* aparatı tətbiq edilir. Bir çox hallarda ehtimal P.-nı *ehtimal sıxlığı* və ya *paylanma funksiyası* vasitəsilə tam mənada təyin etmək əvəzinə onu təsadüfi kəmiyyyətin bəzi ədədi xarakteristikalarının verilməsi ilə təyin etmək olur. Bunlardan, ən çox istifadə olunanlar – *riyazi gözləmə* (orta qiymət), *dispersiya*, *moda*, *median*, birölçülü halda moment kimi ədədi xarakteristikalardır. Çoxölçülü paylanmaların

ədədi xarakteristikaları ilə *Korrelyasiya*, *Reqressiya* məqalələrində tanış olmaq olar.

Ehtimal P.-nın statistik analoqu *Empirik paylanmadır*. Empirik P. və bu paylanmanın xarakteristikalarından nəzəri P. və onun xarakteristikaları haqqında təxmini təsəvvür üçün istifadə olunur (bax, *Statistik qiymət*). Empirik P. ilə hipotetik P.-nın uzlaşma dərəcəsini ölçmək məqsədilə mövcud üsullarla tanış olmaq üçün *Statistik yoxlanılması hipotezlərin* məqaləsinə bax.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теория вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.–Л,. 1949; [3] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Limit distributions for sums of independent random variables, Camb. (Mass.), 1954; [4] Прохоров Ю. В., в кн.: Proc. fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, v. 2, Berk. – Los Ang., 1961, p. 403–19; [5] Феллер В., Введение теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [6] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [7] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей., 6 изд., М., 1988; [8] Крамер Г., Математические методы статистики., пер. с англ., 2 изд., М, 1975; [9] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., Мир, 1969; [10] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, 1979.

PAYLANMA(sı) empirik kovariasion matrisin məxsusi ədədlərinin və məxsusi vektorlarının « **распределение** собственных чисел и собственных векторов эмпирической ковариационной матрицы; **distribution** of eigenvalues and eigenvectors of empirical covariance matrix» – $N(a, \Xi)$ normal qanunu ilə paylanmış, m – ölçülü təsadüfi vektor üzərində aparılan asılı olmayan x_i, $i = 1, \dots, n$, $n > m$ müşahidələri üzrə alınmış empirik kovariasion

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \hat{x})(x_k - \hat{x})^{\mathsf{T}}, \qquad \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

matrisinin məxsusi ədədləri $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ və bunlara uyğun $\theta_1, \dots, \theta_m$, θ_{1i} məxsusi vektorlarının birgə *paylanma funksiyasıdır*. Bu birgə paylanma funksiyaları ortoqonal m tərtib U matrislər qrupunda verilmiş şərti Haar ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər və bu şərtlə ki, $U_{1i} > 0$, $i = 1, \dots, m$ və $y_1 > \dots > y_n > 0$ çoxluğunda verilən Lebeq ölçülərinin sıxlığı

$$\gamma_m \prod_{i=1}^{m} y_i^{(n-m-2)/2} \exp\left(-\operatorname{tr} \sum_{m}^{(n-1)/2} U_m Y U_m^{\mathsf{T}}/2\right) \prod_{i<j} (y_i - y_j)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\gamma_m = \pi^{m/2} 2^{-(n-1)m/2} \det \sum_{m}^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{m} \left(\Gamma\left(\frac{m+1-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)\right)^{-1}.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

PAYLANMA kvazisimmetrik « **распределение** квазисимметричное; quasi-symmetric **distribution** » – bax, *Kvazisimmetrik paylanma.*

PAYLANMA(sı) təsadüfi çoxluğun « **распределение** случайного множества; **distribution** of a random set» – bax, *Müşayiətedici funksional.*

PAYLANMA(sı) təsadüfi kəmiyyətin « **распределение** случайной величины; **distribution** of random variable», $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\xi = \xi(\omega)$ *təsadüfi kəmiyyətinin paylanması* və ya *ehtimal paylanması* – $\mathbb{R}$-də $\mathscr{B}$ σ – meydanında təyin olunmuş mənfi olmayan

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbb{B}) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbb{B}\}, \quad \mathbb{B} \in \mathscr{B}$$

çoxluq funksiyasıdır. $\mathscr{B}$, – $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^1 : a < x \leq b\}$ tipli bütün mümkün ola bilən intervallarından təşkil olunmuş ədədi çoxluqlar (Borel çoxluqları) sinfidir, $\mathscr{B}$, – σ – cəbrdir. ξ sonlu olduğundan $\mathbb{R}^{-1}$-in ξ proobrazı Ω olduğundan, yəni $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, digər tərəfdən Borel çoxluqlarının birləşməsinin proobrazı bu çoxluqların proobrazlarının birləşməsinə bərabər olduğundan, yəni $\xi^{-1}\left(\bigcup_i \mathbb{B}_i\right) = \bigcup_i \xi^{-1}(\mathbb{B}_i)$, $\mathbb{B}_i \in \mathscr{B}$ olduğundan,

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbb{R}^1) = 1, \quad \mathbf{P}_\xi\left(\bigcup_i \mathbb{B}_i\right) = \sum_i \mathbf{P}_\xi \mathbb{B}_i .$$

Deməli, $\mathbf{P}_\xi$ $\mathscr{B}$-də təyin olunmuş ehtimaldır. Beləliklə, ξ təsadüfi kəmiyyəti qiymətlər aldığı fəzada *yeni* – $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\xi)$ ehtimal fəzasını doğurur. Bu fəzaya bəzən ξ təsadüfi kəmiyyətinin *seçimi ehtimal fəzası* da deyilir.

$g(x)$ $\mathbb{R}$-də sonlu Borel funksiyası olarsa, ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\mathbf{P}_\xi$ bütün $g(\xi)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmalarını təyin edir.

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

***PAYLANMA**(sı) təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyasının « **распределение** функции от случайных величин; **distribution** of function of random variables» – $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi funksiyasının (təsadüfi kəmiyyətinin) *paylanmasıdır*. $X_1, \dots, X_n$, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş, qiymətləri $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ faza fəzalarından olan təsadüfi kəmiyyətlər, g $\mathscr{A}_i$ σ – cəbrlərinin hasilinə nəzərən ölçülən funksiyadır; əgər g funksiyası Ψ fəzasından qiymətlər alırsa və $\mathscr{A}_\Psi$ bu fəzanın altçoxluqlarının hər hansı σ – cəbridirsə, onda $A \in \mathscr{A}_\Psi$ olduqda $\{(x_1, \dots, x_n) : g(x_1, \dots, x_n) \in A\}$ çoxluğu $\mathscr{A}_1 \times \dots \times \mathscr{A}_n$ σ – cəbrinə daxildir. Bu şərtlərlə Y qiymətləri $(\Psi, \mathscr{A}_\Psi)$-dən olan, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təsadüfi kəmiyyətdir.

$Y = g(X)$ yalnız X təsadüfi kəmiyyətinin funksiyası, $g(u)$ monoton və kəsilməz funksiya olarsa, Y təsadüfi kəmiyyətinin P. funksiyası $F_Y(x) = \mathbf{P}\{Y < x\}$, X təsadüfi kəmiyyətinin

P. funksiyası $F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$ ilə aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$F_Y(x) = \mathbf{P}\{g(Y) < x\} = F_X(g^{-1}(x)).$$

Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin P. funksiyası $F_X(x)$ kəsilməz monoton funksiya olarsa, onda $Y = F_X(x)$ təsadüfi kəmiyyəti $(0,1)$ parçasında müntəzəm qanunla paylanır. Əgər X $(0,1)$-də müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa və monoton kəsilməz P. funksiyası verilmiş $F_Y(x)$ olan, Y təsadüfi kəmiyyətini qurmaq tələb olunarsa, onda $Y = F_Y^{-1}(x)$ götürmək kifayətdir.

PAYLANMA(sı) təsadüfi qapalı çoxluğun **« распределение** случайного замкнутого множества; **distribution** of a random closed set **»** – bax, *Təsadüfi çoxluq.*

PAYLANMA(sı) təsadüfi matrisin **« распределение** случайной матрицы; **distribution** of a random matrix **»** – bax, *Təsadüfi matris.*

B – PAYLANMA « B – распределение; B – distribution » – bax, *Beta – paylanma.*

F – PAYLANMA « F – распределение; F – distribution » – bax, *Fişer F – paylanması.*

Γ – PAYLANMA « Γ – распределение; Γ – distribution » – bax, *Qamma – paylanma.*

χ – PAYLANMA « χ – распределение; χ – distribution » – bax, *Xi – paylanma.*

χ^2 – PAYLANMA « χ^2 – распределение; χ^2 – distribution » – bax, *Xi – kvadrat paylanma.*

ω^2 – PAYLANMA « ω^2 – распределение; ω^2 – distribution » – bax, *Omeqa – kvadrat paylanma.*

t – PAYLANMA « t – распределение; t – distribution » – bax, *Styudent paylanması.*

T^2 – PAYLANMA « T^2 – распределение; T^2 – distribution » – bax, *Hotellinq T^2 – paylanması.*

U – PAYLANMA « U – распределение; U – distribution » – bax, *Uilks paylanması.*

W – PAYLANMA «W – распределение; W – distribution » – bax, *Uişart paylanması.*

z – PAYLANMA « z – распределение; z – distribution » – bax, *Fişer z – paylanması.*

PAYLANMA FUNKSİYASI; asimptotik düsturlar **« распределения функция;** асимптотические формулы; asymptotic formulae for a **distribution function »** – təsadüfi kəmiyyətin *paylanma funksiyasının* (paylanma sıxlığının) kiçik parametrin qüvvət üstləri üzrə asimptotik ayrılışlarıdır və bu ayrılışlarda baş hədlər uyğun limit qanununun paylanma funksiyasıdır (sıxlıq funksiyasıdır). $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, $\mathbf{M}\left|\xi_1^2\right| < \infty$ şərtini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdir, ξ_1-in xarakteristik funksiyası $f(t)$ mütləq kəsilməz olsun. Onda

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbf{M}\xi_1)/(\sqrt{n}\sigma)$$

normalanmış cəminin paylanmasının sıxlığı p_n üçün $n \to \infty$ olduqda x üzrə müntəzəm

$$p_n(x) = \varphi(x) + \varphi(x)\sum_{k=3}^{r} n^{-(1/2)k+1} P_k(x) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

düsturu ilə ifadə olunan ayrılış doğrudur. Əgər, hətta

$$\lim_{|t|\to\infty} \left|f(t)\right| < 1$$

şərti də ödənilərsə, onda S_n kəmiyyətinin P. f. $F_n(x)$ üçün $n \to \infty$ olduqda x üzrə müntəzəm

$$F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x)\sum_{k=3}^{r} n^{-(1/2)k+1} Q_k(x) + o(n^{-(1/2)r+1})$$

ayrılışı doğrudur, burada $m = \mathbf{M}\xi_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1$, $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası, $P_k(x)$ və $Q_k(x)$, – $\mu_1, \ldots, \mu_k$ -dan asılı çoxhədlilər,

$$\mu_l = \mathbf{M}(\xi_1 - m)^l, \quad \varphi(x)\,P_k(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x)\,Q_k(x).$$

Məs.,

$$Q_3(x) = \frac{\mu^3}{6\sigma^3}(1 - x^2),$$

$$Q_4(x) = \frac{(\mu_4 - 3\sigma^4)}{24\sigma^4}(3x - x^3) +$$

$$+ \frac{\mu_3^2}{72\sigma^6}(-x^5 + 10x^3 - 15x).$$

Asimptotik Pirson paylanmaları üçün [2]-də asimptotik düsturlar qurulmuşdur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [2] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129 – 55; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

PAYLANMA FUNKSİYASI təsadüfi kəmiyyətin **« распределения функция** случайной величины; **distribution function** of a random variable/cumulativ **distribution function, d. f., c. d. f. »**, ξ təsadüfi kəmiyyətinin, – ixtiyari həqiqi $x \in (-\infty, \infty)$ qiymətində $\xi < x$ bərabərsizliyinin ehtimalına bərabər qiymət alan, x dəyişəninin funksiyasıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\xi = \xi(\omega)$ bu fəzada təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət olsun.

$$\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

ehtimalına $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin P. f. deyilir və bu ehtimal $F(x)$ kimi işarə olunur.

Hər bir P. f. $F(x)$ aşağıdakı əsas xassələrə malikdir:

1) $F(x)$ monoton azalmayan funksiyadır: $x_1 < x_2$ olduqda $F(x_1) \le F(x_2)$;

2) $F(x)$ hər bir x qiymətində soldan kəsilməzdir;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

[bəzən P. f. $\xi \le x$ bərabərsizliyinin ehtimalı kimi də təyin olunur, bu halda 2) xassəsi sağdan kəsilməzlik kimi ifadə olunur].

Riyazi analizdə 1) – 3) xassələrini ödəyən ixtiyari funksiya P. f. adlandırılır. P. f. ilə $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun Borel altçoxluqlarının $\mathscr{B}$ σ – cəbrində təyin olunmuş ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}_F$ arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Bu uyğunluq aşağıdakı düsturla ifadə olunur: ixtiyari $[a, b)$ intervalı üçün

$$\mathbf{P}_F([a, b)) = F(b) - F(a).$$

1) – 3) xassələrini ödəyən hər bir F funksiyası hər hansı ξ təsadüfi kəmiyyətinin P. f.-dır [məs., $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}, \mathbf{P}_F)$ ehtimal fəzasında verilmiş $\xi(x) = x$ təsadüfi kəmiyyətinin].

Hər bir P. f. birqiymətli olaraq,

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + a_3 F_3(x)$$

cəmi şəklində ifadə oluna bilər (məs., Lebeq ayrılışı haqqında, bax, [1]), burada a_1, a_2, a_3 – cəmləri 1-ə bərabər mənfi olmayan ədədlər, F_1, F_2, F_3 elə funksiyalardır ki, $F_1(x)$ mütləq kəsilməzdir, yəni

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)dz,$$

$F_2(x)$ – «pilləvari funksiyadır», yəni

$$F_2(x) = \sum_{x_k < x} p_k,$$

x_k, – $F(x)$ funksiyasının sıçrayış nöqtələri, $p_k > 0$ bu sıçrayışların ölçüləridir, $F_3(x)$ isə «sinqulyar» komponentdir (törəməsi sanki hər yerdə sıfra bərabər kəsilməz funksiyadır).

M i s a l. X_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, – 1 və 0 qiymətlərini $0 < p_k \le 1/2$ və $q_k = 1 - p_k$ ehtimalları ilə alan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sonsuz ardıcıllığı,

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$$

olsun. Onda

1) əgər bütün k qiymətlərində $p_k = q_k = 1/2$ olarsa, onda X $[0, 1)$-də müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir, yəni X-in P. f. mütləq kəsilməz funksiyadır ($0 \le x \le 1$ olduqda $p(x) = 1$);

2) əgər $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$ olarsa, X-in P. f. «pilləvaridir» (onun sıçrayışları $[0, 1)$ parçasının bütün ikilik – rasional nöqtələrində baş verir);

3) əgər $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$, $k \to \infty$ olduqda $p_k \to 0$ olarsa, onda X-in P. f. sinqulyar funksiyadır.

Bu misal P. Levinin (P. Lévy) bir teoreminin illüstrasiyasıdır; bu teoremdə isbat olunur ki, diskret P. f.-larının sonsuz kompozisiyasının limiti P. f.-nın yuxarıdakı ayrılışındakı komponentlərdən yalnız birinə bərabərdir.

Ədəd oxunda $\mathbf{P}$ və $\mathbf{Q}$ paylanmaları arasında «məsafə» əksər hallarda, bunların uyğun P. f.-ları F_1 və F_2 terminlərində təyin olunur, məs., fərz edərək ki,

$$\rho_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sup_x \left| F_1(x) - F_2(x) \right|$$

və ya

$$\rho_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \operatorname{var}(F_1(x) - F_2(x))$$

(bax, *Yığılma*(s ı) p a y l a n m a l a r ı n, *Levi metrikası*, *Xarakteristik funksiya*).

Ən çox istifadə olunan ehtimal paylanmalarının (məs., normal, binomial, Puasson paylanmalarının) P. f.-ları üçün cədvəllər tərtib olunmuşdur.

Asılı olmayan müşahidələr üzrə P. f. F haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün F-in empirik P. f.-dan bu və ya başqa cür ölçülmüş yayınmasından istifadə olunur (bax, *Kolmoqorov kriterisi*, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*, *Kramer – Mizes kriterisi*).

P. f. anlayışı təbii olaraq çoxölçülü hal üçün də təyin olunur, lakin çoxölçülü P. f.-ları birölçülü P. f.-ları ilə müqayisədə az tətbiq olunur.

P. f.-nın təqribi ifadəsi haqqında *Qram – Şarliye sırası*, *Edcvort – Kramer ayrılışı*, *Limit teoremləri* məqalələrinə bax.

Ədd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1979; [2] К р а м е р Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [3] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [5] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

PAYLANMA İNDEKSİ « распределения индекс; index of a distribution » – bax, *İndeks*(i) t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t i n; p a y l a n m a n ı n.

PAYLANMA QANUNU « распределения закон; distribution law » – kontekstdən asılı olaraq *ehtimal paylanması* (məs., hər hansı təsadüfi kəmiyyətin) və ya uyğun *paylanma funksiyası* və ya *ehtimal sıxlığı* kimi anlaşılan münasib təsvir terminidir.

PAYLANMA SIXLIĞI; a s i m p t o t i k d ü s t u r **« распределения плотность;** а с и м п т о т и ч е с к а я ф о р м у л а; a s y m p t o t i c f o r m u l a e f o r a **distribution density »** – bax, *Paylanma funksiyası*; a s i m p t o t i k d ü s t u r l a r.

* **PAYLANMA SIXLIĞI** ç o x ö l ç ü l ü **« плотность распределения** м н о г о м е р н а я; **density** o f t h e m u l t i v a r i a t e **distribution »** – bax, *Çoxölçülü paylanma*, *Sıxlıq*, *ehtimal sıxlığı.*

* **PAYLANMALAR** e y n i t i p l i **« распределения** о д н о т и п н ы е; **distribution** o f t h e s a m e t y p e **»** – bax, *Paylanmalar tipi.*

* **PAYLANMALAR SEMİ – QRUPU « распределений полугруппа; semi – group of distribution »** –

$$Q_{s+t} = Q_s * Q_t, \quad s, t > 0 \qquad (*)$$

münasibətini ödəyən Q_t birparametrik ehtimal paylanmaları ailəsinə deyilir. Hər bir sonsuz bölünən paylanma belə semi – qrupun elementi Q_t kimi götürülə bilinər ($t > 0$ ixtiyaridir).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

PAYLANMALAR TİPİ « распределений тип; distribution type » – biri digərindən hər hansı bir xətti çevirmə vasitəsilə alınan, təsadüfi kəmiyyətlərin *ehtimal paylanmaları* toplusudur. Birölçülü halda P. t.-nin tərifi belədir: əgər elə sabit A və $B > 0$ varsa ki, ξ_2 və $B\xi_1 + A$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları eynidir, onda ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanmaları eynitipli paylanmalar adlanır. Bu halda ξ_2 və ξ_1-in uyğun paylanma funksiyaları aşağıdakı münasibətlə bir-birilə ifadə olunur:

$$F_2(x) = F_1((x - A)/B) = F_1(bx + a),$$

burada $b = 1/B$, $a = -A/B$.

Beləliklə, paylanma funksiyaları çoxluğu cüt-cüt kəsişməyən tiplərə bölünür. Məs., bütün normal paylanmalar bir tip, bütün müntəzəm paylanmalar digər bir tip təşkil edir. Tip anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremlərində* geniş istifadə olunur. n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri S_n-lərin paylanması $n \to \infty$ olduqda limit paylanmasına (məs., normal paylanmaya) o vaxt yığılır ki, S_n-lər xətti «normalanmış» təsadüfi kəmiyyətlər kimi ifadə olunsun (yəni $(S_n - a_n)/b_n$ kəmiyyətlərinin limit paylanması), bu halda a_n və $b_n > 0$ müəyyən sabitlərdir və $n \to \infty$ olduqda $b_n \to \infty$. Bu halda əgər hər hansı ξ_n təsadüfi kəmiyyətləri üçün $(\xi_n - a_n)/b_n$ və $(\xi_n - a'_n)/b'_n$ kəmiyyətlərinin paylanmaları cırlaşmayan limit paylanmalarına yığılarsa, onda bu sonuncu paylanmalar hökmən eynitiplidirlər. Buna görə də, tiplərin yığılması tərifini aşağıdakı kimi vermək olar (A. Ya. Xinçin, 1938).

$T(F)$, – F paylanma funksiyasının aid olduğu tip olsun (aşağıdakı şərhdə cırlaşan paylanmalar tipinə baxılmır). Əgər $F_n \in T_n$ paylanma funksiyaları ardıcıllığı F, $F \in T$ paylanma funksiyasına yığılarsa (zəif yığılarsa), onda T_n tiplər ardıcıllığı T tipinə yığılır, deyilir. Belə surətdə topologiya təyin olunmuş tiplər çoxluğu Hausdorf qeyri – requlyar fəzadır və deməli, bu çoxluqda metrika təyin olunmur (V. Döblin, W. Doeblin, 1939).

S_n – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri, F_n – uyğun paylanma funksiyaları olsun. Onda $T(F_n)$-lər üçün limit tipləri sinfi bütün dayanıqlı tiplər sinfi ilə üstüstə düşür, yəni elə tiplər sinfilə ki, $F_1 \in T$ və $F_2 \in T$ olduqda F_1 və F_2-nin kompozisiyası $F_1 * F_2 \in T$ münasibətini ödəyir (başqa sözlə, eyni T tipli paylanmaya malik, asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyət cəminin paylanması da T tipli paylanmadır; bax, *Dayanıqlı paylanma*).

P. t. anlayışı çoxölçülü hal üçün də təyin olunur. Lakin bu birqiymətli olmur. Matrislərin tam qrupunun hər hansı altqrupu G-ni seçərək, P. t.-nin müvafiq anlayışını almaq olur. Əgər elə $g \in G$ çevirməsi varsa ki, ξ_2 və $g\xi_1$ eyni bir paylanmaya malik olsunlar, onda qiymətləri $\mathbb{R}^n$-dən olan ξ_1 və ξ_2 vektorları G – eynitip vektorlar adlanır. P. t.-nin G – dayanıqlılığı anlayışını da müvafiq surətdə daxil etmək olar. Matrislərin tam qrupu halında yalnız normal paylanmalar dayanıqlı paylanmalardır (Q. N. Sakoviç, 1960).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949.

PAYLANMALARIN KOMPOZİSİYASI « распределений композиция; composition of distributions » – bax, *Kompozisiya*.

PAYLANMALARIN KONVOLYUSİYASI « распределений свертка; convolition of distributions » – bax, *Kompozisiya*.

PAYLANMALARIN QARIŞIĞI « распределений смесь; mixture of distributions » –

$$\mathbf{P}(A) = \int \mathbf{P}_u(A)\, \nu(du) \qquad (*)$$

şəklində $\mathbb{R}^1$-də ehtimal *paylanmasıdır*, burada ν və $\mathbf{P}_u$, – $\mathbb{R}^1$-də hər hansı paylanmalardır və $\mathbf{P}_u(A)$ ixtiyari Borel çoxluğu A üçün ölçülən funksiyadır. $\mathbf{P}$-yə uyğun sıxlıq funksiyası və xarakteristik funksiya analoji ifadə olunur (bax, [1], [2]). Əgər υ diskret ölçü olarsa, P. q. diskret adlanır. (*) tərifi, $\mathbf{P}_u$ ölçüləri və u parametrinin qiymətləri verilən ümumi şəkilli fəzalar üçün də ümumiləşdirilir. P. q. təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənilməsi modellərində (bax, *Köçürtmə teoremi*) və randomizasiya modellərində meydana çıxır.

Əd.: [1] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [2] Robbins H., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, p. 360–69.

PAYLANMALARIN YIĞILMASI « распределений сходимость; convergence of distributions » – bax, *Yığılma*(sı) paylanmaların.

PAYLANMANIN ATOMU « распределения атом; atom of distribution » – bax, *Atomik komponenti*, *paylanma funksiyasının.*

PAYLANMANIN QALIĞI « распределения хвост; tail of a distribution » – bax, *Qalığı*, *paylanmanın*.

PAYLANMANIN MƏRKƏZİ « распределения центр; centre of distribution » – bax, *Mərkəz*(i) təsadüfi kəmiyyətin.

PAYLANMANIN SƏPƏLƏNMƏSİ « распределения разброс; dispersion of a distribution » – bax, *Səpələnmə*(si) təsadüfi kəmiyyətin.

PAYLANMIŞ GECİKMƏLƏR MODELİ « распределенных запаздываний модель; distributed lags model », paylanmış laqlar metodu, –

$$Z(n) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j)\, y(n - j) + x(n) \qquad (*)$$

zaman sıralarını əlaqələndirən, xüsusilə də, iqtisadiyyatda geniş yayılmış elə xətti modeldir ki, $b(j)$ əmsalları müəyyən sürətlə «sıfra yığılır», $x(n)$ demək olar ki, $y(n)$-dən asılı olmayan stasionar ardıcıllıqdır. $x(n)$, adətən, qalıq proses, $y(n)$

reqressor ardıcıllıq (müşahidə olunmayan), $Z(n)$ müşahidə olunan ardıcıllıq adlanır. Çox vaxt fərz olunur ki, $\mathbf{M}\{y(m)\,x(n)\} \equiv 0$. (*) modelinin parametrlərinin statistik qiymətlərinin qurulması haqqında bax, [1], [2].

Əd.: [1] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., M., 1974; [2] Time series in the frequence domain, Amst. – [a. o.], 1983.

PERİODİK KORRELYAR TƏSADÜFİ PROSES « периодически коррелированный случайный процесс; periodically correlated random process », periodik qeyri–stasionar (geniş mənada) təsadüfi proses, tsiklli stasionar (geniş mənada) təsadüfi proses, – birinci və ikinci momentləri sonlu və verilmiş T_0 periodu na mütənasib zaman ərzində t oxu üzrə yerinidəyişməyə görə invariant *təsadüfi prosesdir* (t kəsilməz və ya diskret zamandır və t yalnız tam qiymətlər alarsa, T_0 tam-qiymətlidir). Əgər $\zeta(t)$ P. k. t. p. olarsa, onda $\mathbf{M}\zeta(t) = \mathbf{m}(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)} = \mathbf{B}(t, s)$ məhdud funksiyalardır və $\mathbf{m}(t + T_0) = \mathbf{m}(t)$, $\mathbf{B}(t + T_0, s + T_0) = \mathbf{B}(t, s)$ münasibətlərini ödəyirlər. P. k. t. p.-lər nəzəriyyəsində $\mathbf{B}(t, s)$ funksiyası əvəzinə t-yə görə periodik $\mathscr{B}(t, \tau) = \mathbf{B}(t + \tau, t)$ funksiyasından istifadə etmək olar.

P. k. t. p. meteorologiya və okeanologiyada mühüm rol oynayır (bax, [1], [8]), burada təbiət hadisələrinin birgünlük (həm də birillik) gedişatının bilgisi, əksər hallarda müşahidə olunan zaman sıralarında aydın nəzərən çarpan periodun yaranmasına gətirir. Birillik periodluluq, əksər hallarda, iqtisadi və bioloji təbiətli zaman sıralarında yaranır. Radiofizikada giriş siqnalları P. k. t. p.-lə yaxşı təsvir olunan parametrləri dəyişən parametrlərli sistemlərə və

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(t - nT_0)\,\zeta_n$$

şəklində modulyar impulslu P. k. t. p.-ə baxılır, burada $\Gamma(t)$ – verilmiş (determinə olunmuş) funksiya, $\{\zeta_n\}$ – amplitudun nizamlanmamış variasiyalarını və (və ya) impulsların formalarını təsvir edən stasionar təsadüfi ardıcıllıqdır (ümumiyyətlə, çoxölçülü) (bax, [2], [3], [9]). P. k. t. p. həm də amplitud – modulyar $\zeta(t) = A(t)P(t)$ şəklində periodik rəqsdir, burada $A(t)$ – stasionar təsadüfi proses, $P(t)$ – verilmiş periodik funksiyadır. Bir çox digər tətbiqdə təsadüf olunan təsadüfi proseslərin tipləri də P. k. t. p.-lərdir.

P. k. t. p. $\zeta(t)$-nin $\mathbf{M}\zeta(t) = \mathbf{m}(t)$ orta qiymətləri sinfi T_0 periodlu bütün periodik funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür; $\mathbf{m}(t) = 0$ olduğunu da hesab etmək olar, lakin bu hal üçün ilkin P. k. t. p.-i əvəzinə $\zeta(t) - \mathbf{m}(t)$ prosesinə baxılmalıdır. Diskret t zamanlı P. k. t. p. həmişə harmoniklənən təsadüfi prosesdir, yəni $\mathbf{B}(t, s)$ funksiyası

$$\mathbf{B}(t, s) = \int\int_{\Lambda} e^{i(\lambda t - \omega s)} d^2 F(\lambda, \omega) \qquad (*)$$

şəklində ifadə olunur (bax, [4]), burada Λ, – $\{-\pi \le \lambda, \omega \le \pi\}$ kvadratı, $F(\lambda, \omega)$ – məhdud variasiyalı funksiyadır.

Korrelyasion funksiyası olan $\zeta(t)$ prosesinin P. k. t. p. olması, yalnız və yalnız, $d^2F(\lambda, \omega) = F(d\lambda, d\omega)$ spektral ölçüsünün tamamilə Λ kvadratı daxilində, $2T + 1$ sayda $\lambda - \omega = 2\pi k/T$ düzxətt parçalarında topalandığı halda mümkündür; $k = -T_0$, $-T_0 + 1, ..., T_0$. Kəsilməz zamanlı P. k. t. p., ümumiyyətlə, harmoniklənən olmaya da bilər (bax, [5]); belə proseslərin $\mathbf{B}(t, s)$ korrelyasion funksiyaları sinfini təyin edən ümumi şərt tapılmışdır (bax, [5], [10]). Lakin geniş requlyarlıq şərtlərində [məs., əgər ikinci tərtib kəsilməz $\partial^2\mathbf{B}(t, s)/\partial t^2$ törəməsi vardırsa və t-nin funksiyası kimi $\mathscr{B}(t, \tau)$ Furye sırası ilə ifadə olunarsa] P. k. t. p. $\zeta(t)$ harmoniklənən proses hesab oluna bilər, yəni (*) düsturunu istifadə etmək olar; lakin bu halda Λ artıq bütün $-\infty < \lambda, \omega < \infty$ müstəvisi olur. Bu halda (*) korrelyasion funksiyasına malik $\zeta(t)$ prosesi, yalnız və yalnız, o halda P. k. t. p. olar ki, $d^2F(\lambda, \omega) = F(d\lambda, d\omega)$ ölçüsü tamamilə $\lambda - \omega = 2\pi k/T$, $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ ailəsində topalanmış olsun, odur ki, burada $\mathbf{B}(t, s)$ funksiyası

$$\mathbf{B}(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s/T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF_k(\lambda)$$

şəklində ifadə olunur, burada $F_0(\lambda)$ – məhdud monoton azalmayan funksiyadır, $F_k(\lambda)$, $k \neq 0$ isə elə məhdud variasiyalı kompleks funksiyalardır ki,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\,dF_k(\lambda)\,| < \infty.$$

Praktiki mühüm halda, $\mathscr{B}(t, \tau)$ funksiyası $|\tau|$-nun artması ilə sürətlə azaldığı halda (məs., bütün t-lər üçün əgər $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{B}(t, \tau)|\,d\tau < \infty$ olarsa), bütün $F_k(\lambda)$ funksiyaları mütləq kəsilməzdirlər, odur ki,

$$\mathbf{B}(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k s/T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f_k(\lambda)\,d\lambda,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(\lambda)|\,d\lambda < \infty$$

və P. k. t. p. həqiqi olduğu halda $f_k(\lambda)$ funksiyaları

$$f_0(\lambda) \ge 0,\ f_0(-\lambda) = f(\lambda),$$

$$f_k(\lambda) = \overline{f_{-k}(\lambda)} = f_{-k}(\lambda - 2\pi k/T_0)$$

şərtlərini ödəyirlər.

$F_k(\lambda)$ və $f_k(\lambda)$ funksiyaları bəzən uyğun olaraq P. k. t. p. $\zeta(t)$-nin k-cı spektral funksiyası və k-cı spektral sıxlıq funksiyası (və ya k-cı spektral komponenti) adlandırılır; bu halda $F_0(\lambda)$ və $f_0(\lambda)$ funksiyaları $\zeta(t)$-nin ortalanmış spektral sıxlıq funksiyası ilə üst-üstə düşür.

P. k. t. p.-in konkret modellərində $f_k(\lambda)$ funksiyasının tapılmasına aid misallar, məs., [2]-də verilmişdir (bax, §59). $\mathbf{B}(t, s)$ və $f_k(\lambda)$ funksiyalarının qiymətlərini, adətən, P. k. t. p. $\zeta(t)$ -nin uzun müddətli bir müşahidəsi nəticəsindəki realizasiyasına görə nisbətən dəqiqliklə qiymətləndirmək olur (bax, [6], [7]).

Əd.: [1] Драган Я. П., Яворский И. Н., Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы, К., 1982; [2] Рытов С. М., Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, М., 1976; [3] Френкс Л., Теория сигналов, пер. с англ., М., 1974; [4] Гладышев Е. Г., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 5, с. 1026–29; [5] Гладышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с.184–89; [6] Яворский И. Н., в сб.: Отбор и передача информации, в. 67, К., 1983, с. 22–28; [7] Драган Я. П., Мезенцев В. П., Яворский И. Н., в сб.: Отбор и передача информации, в. 69, К., 1984, с. 29–35; [8] Monin A. S., в кн.: Proceedings of the symposium on time series analysis, 1962, N. Y. – L., 1963, p. 144–51; [9] Gardner W. A., Franks L. E., «IEEE Trans. on Inform. Theory», 1975, v. 21, № 1, p. 4–14; [10] Hurd H. L., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 834–38.

PERİODİK MARKOV ZƏNCİRİ « периодическая цепь Маркова; cyclic / periodic Markov chain » – bax, *Tsiklik Markov zənciri.*

PERİODİK PAYLANMIŞ TƏSADÜFİ PROSES « периодически распределенный случайный процесс; periodically distributed random process », periodik qeyri–stasionar (dar mənada) təsadüfi proses, tsiklli stasionar (dar mənada) təsadüfi proses, – bütün ehtimal paylanmaları verilmiş T_0 periodu na mütənasib zaman ərzində t -nin qiymətləri oxunun yerinidəyişmələrinə nəzərən invariant olan $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir.* Beləliklə, əgər $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ $\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyadırsa, onda P. p. t. p. halında ixtiyari tam qiymətli k üçün

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1 + kT_0, \dots, t_n + kT_0}(x_1, \dots, x_n)$$

bərabərliyi doğrudur. P. p. t. p. anlayışı dar mənada anlaşılır. Bu anlayışa uyğun geniş mənada anlayış *periodik korrelyar təsadüfi proses anlayışıdır.*

Praktikada təsadüf olunan periodik korrelyar təsadüfi proseslər demək olar ki, həmişə həm də P. p. t. p.-lərdir; lakin, adətən, yalnız P. p. t. p.-in korrelyasion nəzəriyyəsinin periodik korrelyar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi ilə üst-üstə düşən halları araşdırılır.

PERİODİK VƏZİYYƏT (i) Markov zəncirinin **« периодическое состояние** цепи Маркова; **periodic state** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

PERİODOQRAM « периодограмма; periodogram » – $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ stasionar təsadüfi prosesinin N həcmli $\zeta(1), \dots, \zeta(N)$ seçimi üzrə

$$\mathbf{I}_N(\lambda) = (2\pi N)^{-1} \left| d_N^{(\zeta)}(\lambda) \right|^2$$

düsturu ilə təyin olunan $\mathbf{I}_N(\lambda)$ funksiyasıdır; burada N – tam müsbət ədəddir, $-\infty < \lambda < \infty$,

$$d_N^{(\zeta)}(\lambda) = \sum_{t=1}^{N} \exp\{-it\lambda\}\, \zeta(t).$$

P. periodu 2π -yə bərabər λ -ya görə periodik funksiyadır. Orta qiyməti $c = \mathbf{M}\zeta(t)$ -yə bərabər $\zeta(t)$ stasionar prosesinin differensiallanan spektral sıxlığı $f(\lambda)$, $\lambda \not\equiv (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ olduqda π -nin vasitəsilə qiymətləndirilə bilinir:

$$\mathbf{M}\mathbf{I}_N(\lambda) = f(\lambda) + (2\pi N)^{-1} \frac{\sin^2 N\lambda/2}{\sin^2 \lambda/2} c^2 + O(N^{-1}).$$

$\mathbf{D}\mathbf{I}_N(\lambda) \sim f^2(\lambda)$ olduğundan P. $f(\lambda)$ -nın tutarlı statistik qiyməti deyildir (bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət). Spektral sıxlığın tutarlı statistik qiymətlərini müxtəlif tezlikli P.-ların asimptotik qeyri – korrelyarlığından istifadə edən bəzi sonrakı quruluşları əsasında almaq olur: məs., $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $|\lambda_1 - \lambda_2| = 2\pi k/N$, $0 < k < N$, $\mathrm{cov}\{\mathbf{I}_N(\lambda_1), \mathbf{I}_N(\lambda_2)\} = O(N^{-1})$, odur ki, λ -ya yaxın tezliklər üzrə $\mathbf{I}_N(\lambda)$ -nın orta qiymətinin təyin edilməsi asimptotik olaraq tutarlı statistik qiymətə gətirir. n – ölçülü $\zeta(t) = \{\zeta_k(t)\}$, $k = 1, \dots, n$ təsadüfi prosesi halında P.-ın matrisi (kross–periodoqram) $\mathbf{I}_N(\lambda)$ özünün

$$\mathbf{I}_N^{(i,j)}(\lambda) = (2\pi N)^{-1}\, d_N^{(x_i)}(\lambda)\, d_N^{(x_j)}(\lambda)$$

elementləri ilə təyin olunur və birölçülü halda olduğu kimi, çoxölçülü təsadüfi proseslərin müxtəlif xarakteristikalarının statistik qiymətlərinin qurulmasının əsasını təşkil edir. Bəzən ikinci tərtib periodoqram da adlandırılan $\mathbf{I}_N(\lambda)$ ilə yanaşı m -ci tərtib P.-a da baxılır:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

olduqda

$$\mathbf{I}_N^{(k_1, \dots, k_m)}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (2\pi)^{1-m} N^{-1} \prod_{j=1}^{m} d_n^{\xi_{k_j}} x^{k_j} \lambda_j$$

m -ci tərtib P.-ından m -ci tərtib spektral sıxlığın statistik qiymətinin qurulması üçün istifadə olunur (bax, *Spektral semi – invariant*).

Əksər hallarda

$$\left| \sum_{t=1}^{N} \exp\{-it\lambda\}\, a(t)\, \zeta(t) \right|^2$$

ifadəsilə təyin olunan və hamarlanmış qiymətlərli sıraya uyğun olan modifikasiya olunmuş P. anlayışından istifadə olunur, burada $a(t)$ – spektral xarakteristikası

$$\varphi_N(\lambda) = \sum_{t=1}^{N} a(t)\, e^{-it\lambda}$$

olan hər hansı zaman pəncərəsidir. Olduqca geniş şərtlərlə modifikasiya olunmuş P.-ın riyazi gözləməsi

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_N(\alpha - \lambda)|^2 f(\alpha)\, d\alpha$$

ifadəsinə bərabərdir, burada $f(\alpha)$ – riyazi gözləməsi sıfra bərabər ($\mathbf{M}\zeta(t)=0$) $\zeta(t)$ prosesinin spektral sıxlığıdır.

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

PERİODOQRAM STATİSTİKASI spektral sıxlığın **« периодограмная статистика** спектральной плотности; **periodogram / Grenander – Rozenblatt statistic »** – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

PERİODU, YAŞAMA MÜDDƏTİNİN « период жизни; life period » – bax, *Şaxələnən proses* immiqrasiyalı.

PERKOLYASİYA « перколяция; percolation » – sızma, axmadır (bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi*).

PERKOLYASİYA NƏZƏRİYYƏSİ « перколяции теория; percolation theory », sızma nəzəriyyəsi, axma nəzəriyyəsi, – $\mathbb{Z}^d$-də (diskret modellər) və ya $\mathbb{R}^d$-də (kəsilməz modellər), bircins *təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsidir, $d \geq 2$. Bu çoxluqların qlobal topoloji xassələri, ilk növbədə əlaqəli komponentlərin strukturu öyrənilir. Daha mürəkkəb requlyar qraflar və fəzalara ümumiləşmələr mümkündür. P. n. bir sıra problemlərində statistik mexanikaya yaxındır və bir sıra anlayışlar (faza keçidi, kritik indeks və s.) və metodlar (məs., Payerls kontur metodu) buradan götürülmüşdür. Nəzəriyyənin ən maraqlı effekti – S təsadüfi çoxluğunun ehtimal paylanmasını təyin edən ρ parametri üzrə perkolyasion faza keçididir. Bu keçid S təsadüfi çoxluğunun keyfiyyətcə topoloji yenidən qurulmasından ibarətdir: $\rho < \rho_{\text{сч}}$ olduqda S-in bütün əlaqəli komponentləri sanki yəqin kompaktdırlar, $\rho > \rho_{\text{сч}}$ olduqda isə sanki yəqin sonsuz əlaqəli komponent üzə çıxır (sonsuzluğa sızma və ya perkolyasiya baş verir).

Perkolyasiyanın ən sadə «baza» modelləri [1]-də təklif olunmuşdur. Bunlar $d \geq 2$ olduqda $\mathbb{Z}^d$-nin şəbəkələrində əlaqələr və qovşaqlar modelləridir. Düyünlər modelində hər bir $x \in \mathbb{Z}^d$ nöqtəsi digərlərindən asılı olmayaraq p ehtimalı ilə qeyd olunur (yəni S-ə daxil olunur), əlaqələr şəbəkəsində analoji mülahizə şəbəkənin tillərinə aiddir. Əlaqəlilik qonşuluq münasibəti ilə verilir. $w(x) \subset S$ – qeyd olunmuş $x \in \mathbb{Z}^d$ təpə nöqtəsini özündə saxlayan əlaqə komponenti (kluster), $|w(x)|$ – klasterdəki təpələrin sayı olsun. $m_1(p) = \mathbf{M}|w(x)|$ (klasterin orta həcmi) və $\theta(p) = \mathbf{P}\{|w(x)| = \infty\}$ (sonsuz klassterin sıxlığı) funksiyaları – termodinamik funksiyaların təbii analoqlarıdır. [1]-də isbat olunmuşdur ki, elə $p_1(d)$ və $p_2(d)$, $0 < p_1(d) < p_2(d) < 1$ vardır ki, $p < p_1(d)$ olduqda $\theta(p) \equiv 0$ və $p > p_2(d)$ olduqda $\theta(p) > 0$ olur və bununla da faza keçidinin varlığı faktı müəyyən olunur. Perkolyasiya səddi $p_{\text{сч}}$ müxtəlif cür təyin olunur:

$$p_H = \sup\{p : \theta(p) = 0\};\ p_T = \sup\{p : m_1(p) < \infty\}.$$

Müxtəlif təriflərin üst-üstə düşməsi, o cümlədən, $p_H = p_T$ bərabərliyi ilk dəfə ikiölçülü mozaik şəbəkələr halında göstərilmişdir (bax, [2]). Burada da əvvəllər «fiziki ciddilik səviyyəsində» alınmış, bir sıra ikiölçülü modellər üçün $p_{\text{сч}}$-in dəqiq qiymətləri təsdiqlənmişdir; məs., göstərilmişdir ki, kvadrat şəbəkədə əlaqələr məsələsində $p_{\text{сч}} = 1/2$. [3]-də $p_H = p_T$ bərabərliyi ümumi bircins qraflar üçün isbat olunmuşdur və ixtiyari ölçülü şəbəkələr halında $p < p_{\text{сч}}$ olduqda $|z| < c(p)$ dairəsində $F(\exp\{z|w|\})$ doğuran funksiyasının analitik olduğu müəyyən olunmuşdur.

P. n.-nin növbəti mühüm məsələsi $p > p_{\text{сч}}$ olduqda sonsuz klasterlərin strukturuna aiddir. [4]-də, ixtiyari $d \geq 2$ dim. – ölçü halında, $p > p_{\text{сч}}$ olduqda sonsuz klasterin yeganəliyi göstərilmiş və bu halda $\theta(p)$ funksiyasının kəsilməzliyi isbat olunmuşdur.

P. n.-də kritik indekslər $p \to p_{\text{сч}}$ olduqda S çoxluğunun müxtəlif xarakteristikalarının asimptotikasının təsviri məqsədilə daxil olunur. Fərz olunur ki,

$$\theta(p) \sim C_1(p - p_{\text{сч}})^{\beta},\quad \beta > 0,\quad p \downarrow p_{\text{сч}},$$

$$m_1(p) \sim C_2(p_{\text{сч}} - p)^{-\gamma},\quad \gamma > 0,\quad p \uparrow p_{\text{сч}}.$$

[2]-də ikiölçülü mozaik şəbəkələr üçün $p \to p_{\text{сч}}$ olduqda $\theta(p)$ və $m_1(p)$ üçün yuxarı və aşağıdan qüvvət üstlü qiymətlər isbat olunmuşdur. [5]-də bu şəbəkələr üçün isbat olunmuşdur ki, $p \to p_{\text{сч}}$ olduqda $\theta(p)$ və $m_1(p)$ üçün qüvvət üstlü asimptotikaların varlığından W klasterinin digər bir sıra təbii xarakteristikaları üçün analoji asimptotikaların varlığı alınır. Bu zaman uyğun qüvvət üstləri (kritik indekslər) β və γ vasitəsilə rasional, oxşarlıq hipotezi adlanan hipotezə uyğun olaraq ifadə olunur.

Yuxarıda qeyd olunan əsas nəticələr kəsilməz Puasson modellərinin geniş sinfi üçün də doğrudur. Bunlardan ən sadəsində – $\mathbb{R}^d$-də kürələr modelində, $d \geq 2$, S çoxluğu – mərkəzləri intensivliyi λ-ya bərabər Puasson nöqtələr ansamblı əmələ gətirən (Evklid əlaqəliliyi), R qeyd olunmuş radiuslu kürələrin birləşməsidir. S-in perkolyasiya məsələsi ölçüsüz koordinasiya ədədi $B = C_d(2R)^d$ terminlərində həll olunur, burada C_d, – $\mathbb{R}^d$-də vahid radiuslu kürənin həcmidir. Elə $B_{\text{сч}}$ konstantı vardır ki, $B \leq B_{\text{сч}}$ olduqda S-in bütün əlaqəli komponentləri sanki yəqin kompaktdırlar, $B > B_{\text{сч}}$ olduqda yalnız bir sonsuz kompakt üzə çıxır. $B < B_{\text{сч}}$ olduqda qeyd olunmuş $x_0 \in \mathbb{R}^d$ nöqtəsini özündə saxlayan S-in əlaqəli komponentinin həcminin sonlu eksponensial momenti vardır (bax, [3]).

Kəsilməz perkolyasion məsələlərin daha ümumi qoyuluşları kəsilməz bircins təsadüfi $X(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ meydanlarının sədləri çoxluğunun öyrənilməsi ilə bağlıdır. $h = h_{\text{сч}}$ kəmiyyəti perkolyasiya səddi adlanır, $h > h_{\text{сч}}$ olduqda $A_h^+ = \{x : X(x) \geq h\}$ çoxluğu kompakt əlaqə komponentlərinə ayrılır, $h < h_{\text{сч}}$ olduqda isə, A_h^+-da (heç olmazsa bir) sonsuz komponent vardır. $h_{\text{сч}}$ perkolyasiyasının sonlu səddinin varlığı meydanların geniş sinfi üçün isbat olunmuşdur, $h_{\text{сч}} = \infty$ olduğu halda məzmunlu misallar vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Broadbent S., Hammersley J., Percolation processes, «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1957, v. 53, p. 629–45; [2] Кестен Х., Теория просачивания для математиков, пер. с англ., М., 1986; [3] Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 24, М., 1986, с. 53–110; [4] Aizenman M., Kesten H., Newman C., «Comment. Math. Phys.», 1987, v. 111, № 4, p. 505–31; [5] Kesten H., «Comment. Math. Phys.», 1989, v. 107, № 1, p. 109–56.

PERKOLYASİYA / SIZMA PROSESİ « перколяции (просачивания, протекания) процесс; percolation process » – sonsuz G qrafının tilləri və ya zirvələri üzrə abstrakt mayenin yayılmasının riyazi modelidir. Məs., tillər üzrə P. p.-ndə G -nin hər bir tili digərlərindən asılı olmayaraq p ehtimalı ilə ötürücüdür. G qrafının U zirvəsinin komponenti U ilə ötürücü yolla, yəni ötürücü tillər ardıcıllığı ilə əlaqələnmiş bütün V zirvələrinin çoxluğu adlanır. G -də sonsuz komponentin varlığı sızmanın olması kimi interpretasiya olunur. P. p. ilə bağlı məsələlərdən biri kritik ehtimal adlanan elə $p(G)$ ədədinin tapılmasından ibarətdir ki, $p < p(G)$ olduqda G -də sanki yəqin sonsuz komponent yoxdur, $p > p(G)$ olduqda isə sonsuz komponent müsbət ehtimalla vardır. Məs., kvadrat şəbəkənin tilləri üzrə P. p.-ndə $p(G) = 1/2$. P. p. elektrik dövrələri nəzəriyyəsində də tətbiq olunur.

Əd.: [1] Кестен Х., Теория просачивания для математиков, пер. с англ., М., 1986.

PERRON KÖKÜ « перронов корень; principal root » – bax, *Kritikaltı şaxələnən proses*, *Kritiküstü şaxələnən proses.*

PERSENTİL « перцентиль; persentile » – *kvantilin* xüsusi halıdır; $p = m/100$ tərtib K_p kvantilidir, burada $m = 1, \ldots, 99$. P. paylanma funksiyasının növü haqqında (yeganəlik halında) olduqca yaxşı təsəvvür verir. P. bəzən prosentil və ya sentil də adlandırılır.

PETTİS İNTEQRALI « Петтиса интеграл; Pettis integral » – Lebeq inteqralının Banax fəzasında qiymətlər alan funksiyalara ümumiləşmələrindən biridir. $(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ – ölçülü fəza, $\mathscr{B}$, – Ω -nın altcoxluqlarının σ – cəbri, μ , – $\mathscr{B}$ -də sonlu ölçü olsun. X , – Ω -dan $\mathscr{E}$ -yə zəif ölçülən inikas olsun; əgər bütün $x^* \in \mathscr{E}^*$ üçün elə $x_A \in \mathscr{E}$ elementi varsa ki,

$$x^*(x_A) = \int_A x^*(X)\, d\mu$$

bərabərliyi ödənilsin, onda X funksiyası $A \in \mathscr{B}$ çoxluğunda Pettis mənada inteqral adlanır. Əgər $\mathscr{E}$ refleksiv fəzadırsa, onda X -in Pettis mənada inteqrallanan olması üçün bütün $x^* \in \mathscr{E}^*$ üçün $x^*(X)$ -in inteqrallanan olması zəruri və kafidir. P. i.-nın əsas xassəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər T $\mathscr{E}$ fəzasından Banax fəzası F -ə məhdud xətti operatordursa və əgər X $\mathscr{E}$ – qiymətli Pettis mənada inteqrallanan funksiyadırsa, onda TX Pettis mənada inteqrallanandır və

$$\int_A TX\, d\mu = T(x_A).$$

Əd.: [1] Pettis B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1938, v. 44, № 2, p. 277–304; [2] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962.

PETTİS TEOREMİ « Петтиса теорема; Pettis theorem » – bax, *Güclü ölçülən inikas.*

PİLLƏ ANI « лестничный момент; ladder time / index / epoch » – $\mathbb{R}$ -də *təsadüfi dolaşmanın* öz əvvəlki evolyusiyasında rekord qiymət aldığı momentdir. $\{S_n\}$, $S_0 = 0$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğurduğu təsadüfi dolaşma olsun, k -cı P. a. $S_n > S_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ bərabərsizliklərinin k -cı dəfə ödənildiyi an kimi təyin olunur. k -cı P. a.-da S_n trayektoriyasının qiymətini $X_1 + \ldots + X_k$ cəmi kimi ifadə etmək olar ki, X_i asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və X_i -lər birinci P. a.-nda dolaşmanın qiymətinin paylandığı və ya, başqa sözlə, $S_1, S_2, \ldots$ ardıcıllığında ilk müsbət cəmin paylandığı qanunla paylanmışlar.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

PİLLƏ ANI BİRİNCİ (k -cı) « лестничный момент первый (k -ый); first (k -th) ladder time » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏ ANI PAYLANMASI « распределение лестничного момента; distribution of ladder moment » – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏ BOYU « лестничная высота; ladder point / height » – bax, *Eksses*(i) dolaşmanın.

***PİLLƏ BOYU BİRİNCİ (k -cı) « лестничная высота первая (k -ая); first (k - th) ladder heigt »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

***PİLLƏ BOYU PAYLANMASI BİRİNCİ « распределение первой лестничной высоты; distribution of first ladder heigt »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏ CÜTÜ « лестничная пара; ladder pair » – bax, *Eksses*(i) dolaşmanın.

***PİLLƏ İNDEKSİ BİRİNCİ (k -cı) « лестничный индекс первый (k -ый); first (k - th) ladder index »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

***PİLLƏ NÖQTƏSİ, BİRİNCİ (k -cı) CİDDİ ÜST « лестничная точка первая (k -ая) верхняя строгая; first (k -th) strong upper ladder point »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

***PİLLƏ NÖQTƏSİ, BİRİNCİ (k -cı) ÜST « лестничная точка первая (k -ая) верхняя; first (k -th) upper ladder point »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

PİLLƏVARİ MARKOV PROSESİ « ступенчатый марковский процесс; step / jump Markov process » – bax, *Sıçrayışvari Markov prosesi.*

***PİLLƏVARİ TƏSADÜFİ PROSES « ступенчатый случайный процесс; step – wise random process »** – $0 < s < t$ şərtini ödəyən ixtiyari s və t qiymətlərində $\zeta(t) - \zeta(s)$ artımları yalnız mənfi olmayan tam qiymətlər alan

$\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinə* deyilir. $\zeta(0)=0$ olması prosesin yalnız $t=0$ anında başlanması kimi anlaşılır. Prosesin t anındakı qiyməti $\zeta(t)$ 0 və t arasındakı zaman ərzində baş verən bəzi hadisələrin sayı kimi interpretasiya oluna bilinər. Məs., telefon stansiyasına daxil olan abonent çağırışlarının sayı, radioelektron cihazın sıradan çıxması sayı və s. belə hadisələrdəndir. Qeyd etmək lazımdır ki, P. t. p. yalnız ayrı-ayrı nöqtələrdə birdən-birə bir neçə vahid dəyişə bilər; bu hal, xidmət olunma üçün eyni zamanda bir neçə tələb daxil olmasına uyğun olur.

$\zeta_{nr}(t),\ r=\overline{1,k_n}$ bir-birilə asılı olmayan pilləvari proseslər, $\zeta_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\zeta_{nr}(t)$ olsun. Aydındır ki, $\zeta_n(t)$ də P. t. p.-dir.

Əgər $\zeta_n(t_1),\ \zeta_n(t_2),\ \dots,\ \zeta_n(t_k)$ vektorlarının paylanma funksiyaları n, $t_1,\dots,t_k$ qiymətlərinin ixtiyari seçimində hər bir kəsilməzlik nöqtəsində

$$\zeta(t_1),\ \zeta(t_2),\dots,\zeta(t_n)$$

vektorunun paylanma funksiyasının qiymətinə yığılarsa, $\{\zeta_n(t)\}$ təsadüfi proseslər ardıcıllığı $\zeta(t)$ prosesinə *zəif yığılır*, deyilir.

Əgər $\zeta(t)$ prosesi: 1) kəsişməyən intervallarda asılı olmayan artımlarlı proses olarsa; 2) bütün $s<t$ qiymətləri və ixtiyari mənfi olmayan tam k -lar üçün $\zeta(t)-\zeta(s)$ artımları

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)-\zeta(s)=k\}=\frac{[\mathbf{\Lambda}(t)-\mathbf{\Lambda}(s)]^k}{k!}\ e^{-[\mathbf{\Lambda}(t)-\mathbf{\Lambda}(s)]^k}$$

qanunu ilə paylanarsa, $\zeta(t)$ prosesinə $\mathbf{\Lambda}(t)$ *aparıcı funksiyalı* Puasson prosesi deyilir. Aparıcı funksiya $\mathbf{\Lambda}(t)$ mənfi olmayan, soldan kəsilməz, hər bir t qiymətində sonlu və $t\le 0$ olduqda $\mathbf{\Lambda}(t)=0$ şərtini ödəyən funksiyadır. Ən sadə axın üçün $\Lambda(t)=\lambda t$ (bax, *Puasson prosesi*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, изд., 5-ое, М., 1969.

PİLLƏVARİ TƏSADÜFİ PROSES « ступенчатый случайный процесс; step random process » – bax, *Sıçrayışvari təsadüfi proses*.

PİLLƏVARİ TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı **« ступенчатый случайный процесс** с независимыми приращениями; **step / jump random process** with independent increments **»** – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

PİROQOV – SİNAY TEOREMİ « Пирогова – Синая теорема; Pirogov – Sinai theorem » – temperaturun kiçik qiymətlərində *Gibbs təsadüfi meydanlarının* qurulması mümkünlüyü haqqında ümumi nəticədir. $U=\{U_A(x_A),\ A\in\mathbb{Z}^d\}$ – Gibbs meydanının translyasion invariant finit potensialı, $x^1,\dots,x^n$ – bu meydanın əsas konfiqurasiyalarının sonlu toplusu olsun (bax, *Əsas vəziyyət*); bu konfiqurasiyalar periodik olub, ümumi $d\in\mathbb{Z}^d$ periodu malikdirlər. Əgər bütün $l^i=(k_1l^1,\dots,k_dl^d)$, $k_i\in\mathbb{Z}^d$, $l^i>0$ üçün $x_t=x_{t+l}$ olarsa, $x=(x_t,\ t\in\mathbb{Z}^d)$ konfiqurasiyası $l=(l^1,\dots,l^d)$ periodlu periodik konfiqurasiya adlanır. Fərz olunr ki, aşağıdakı Payerls şərti (və ya Hertsik – Piroqov – Sinay şərti) ödənilir: x – əsas konfiqurasiyalar olan $x^{j^0},\ j^0=1,\dots,n$ konfiqurasiyalarından biridir. Bu konfiqurasiyanın sərhədi ∂x elə bütün $t=(t_1,\dots,t_d)\in\mathbb{Z}^d$ nöqtələrinin toplusuna deyilir ki, x -in

$$W_t=\{s=(s_1,\dots,s_d):\ t_i\le s_i<t_i+l^i,\ i=1,\dots,d\}$$

paralelepipedinə daralması əsas $x^j,\ j=1,\dots,n$ konfiqurasiyalarının heç birinin bu paralelepipedə daralması ilə üst-üstə düşmür. Onda Payerls şərti elə $\rho>0$ sabitinin varlığından ibarətdir ki, bütün x -lər üçün

$$\sum_{A\subset\mathbb{Z}^d}(U_A(x_A)-U_A(x_A^j))\ge\rho\left|\partial x\right|,$$

burada x_A və x_A^j, – x və x^j konfiqurasiyalarının A -ya daralmasıdır, $\left|\partial x\right|$, – ∂x sərhədindəki nöqtələrin sayıdır. Fərz olunur ki,

$$U_\mu=U+\mu_1U_1+\dots+\mu_{n-1}U_{n-1},$$
$$\mu=(\mu_1,\dots,\mu_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$$

potensiallarının ailəsi verilmişdir, $U_1,\dots,U_{n-1}$ – hər hansı translyasion invariant potensiallardır və

$$h_\mu^j=\lim_{|\mathbf{\Lambda}|\to\infty}\frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|}\sum_{A\subset\mathbf{\Lambda}}U_{A\mu}(x_t^j,\ t\in A)$$

– U_μ potensialları üçün hesablanmış əsas konfiqurasiya x^j -nin orta enerjisidir. Və fərz olunur ki, bu elə ailədir ki, $\hat h_\mu^j=h_\mu^j-\min_i h_\mu^i,\ i=1,\dots,n$ olduqda $\mu\to(\hat h_\mu^1,\dots,\hat h_\mu^n)\in\mathbb{R}^n$ inikası parametrlər fəzasını n – ölçülü müsbət oktantın bütün sərhədinə köçürür. Bu şərt «ümumi vəziyyətli» potensiallar ailəsi üçün ödənilir. P. – S. t. (bax, [1] – [3]) öz dəqiqləşməsi ilə (bax, [4]) hökm edir ki, elə β_0 konstantları, $\varepsilon_0>0$ vardır ki, bütün $\beta\ge\beta_0$ üçün μ parametrlərinin fəzasında n – ölçülü müsbət o^n oktantının sərhədinin sıfır nöqtəsinin ətrafının homeomorfizmi $\mathcal{T}_\beta$ mövcuddur və əgər $x\in\partial o^n$ sərhəd nöqtəsinin q sayda sıfır koordinatları vardırsa, onda U_μ potensialı üçün $\mu=\mathcal{T}_\beta(x)$ olduğu halda yalnız q sayda müxtəlif requlyar periodik vəziyyətlər vardır və bu vəziyyətlər β tərs temperaturuna malikdirlər.

U potensialı bəzi simmetriyalara malik olduğu halda, potensialları U_μ olan Gibbs vəziyyətləri də analoji simmetriyaya malikdirlər. Belə vəziyyətlər üçün P. – S. t.-nin nəticəsi əvvəlcədən də məlum idi (bax, [5], [6]). P. – S. t.-nin daha ümumi vəziyyətlərə ümumiləşmələri də məlumdur (bax, [7], [9]).

Əd.: [1] Пирогов С. А., Синай Я. Г., «Функц. анализ и его прилож.», 1974, т. 8, № 1, с. 25–31; [2] Пирогов С. А., Синай Я. Г., «Теоретич. и математич. физика», 1975, т. 25, № 3,

с. 358–69; [3] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [4] Zahradnik M., «Comm. Math. Phys.», 1984, v. 93, p. 559–81; [5] Герцик В. М., Добрушин Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1974, т. 8, № 3, с. 12–25; [6] Герцик В. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, с. 448–62; [7] Динабург Е. И., Синай Я. Г., «Тр. конф. по матем. физике», Дубна, 1984; [8] Imbrie J. Z., «Comm. Math. Phys.», 1981, v. 82, p. 261–304; [9] Dobrushin R. L., Zahradnik M., Mathematical problems of statistical mechanics and dynamics, Dordrecht – Boston, 1986, p. 1–123.

PİRSON ÇEVİRMƏSİ « Пирсона преобразование; Pearson transformation » – sərbəstlik dərəcəsi sayı n -ə bərabər, qeyri – mərkəzilik parametri λ $(\lambda > 0)$ olan, *qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanmasına* tabe $\chi_n^2(\lambda)$ təsadüfi kəmiyyətinin

$$T = \frac{n+2\lambda}{n+3\lambda}\left(\chi_n^2(\lambda) + \frac{\lambda^2}{n+3\lambda}\right)$$

düsturu ilə ifadə olunan $T = T(\chi_n^2(\lambda))$ çevirməsidir. T statistikasının riyazi gözləməsi $\mathbf{M}T = \frac{(n+2\lambda)^3}{(n+3\lambda)^2}$, dispersiyası $\mathbf{D}T$ və üçüncü mərkəzi momenti $\mathbf{M}(T - \mathbf{M}T)^3$ bir-birilə $1:2:8$ nisbətilə ifadə olunurlar; sərbəstlik dərəcəsi f -ə bərabər χ^2 paylanmasına tabe ixtiyari $\chi_f^2 = \chi_f^2(0)$ təsadüfi kəmiyyətinin uyğun momentləri də bu nisbətlə ifadə olunurlar. Bunu nəzərə alaraq, $\mathbf{M}\chi_f^2 = f$ olduğuna da əsaslanaraq, E. Pirson [1]-də $\chi_n^2(\lambda)$ təsadüfi kəmiyyətinin qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanmasını sərbəstlik dərəcəsi sayı $f = \mathbf{M}T = \frac{(n+2\lambda)^3}{(n+3\lambda)^2}$ olan mərkəzi χ^2 – paylanmasının köməyilə approksimasiya etməyi təklif etmişdir.

Sərbəstlik dərəcəsi sayı kəsr olan χ^2 – paylanmanın cədvəlləri tərtib olunmuşdur (bax, [2]).

Əd.: [1] Pearson E. S., «Biometrika», 1959, v. 46, p. 364; [2] Мардиа К., Земроч П., Таблицы F – распределений и распределений связанных с ними, пер. с англ., М., 1984; [3] Greenwood P. E., Nikulin M. S., A Guide to chi-squared testing, N.Y., 1996.

PİRSON ƏYRİLƏRİ « Пирсона кривые; Pearson curves » – *Pirson paylanmalarının* qrafiklərinin adıdır.

PİRSON PAYLANMALARI « Пирсона распределения; Pearson distributions » – paylanmalarının sıxlıq funksiyaları $p(x)$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\, p \qquad (*)$$

differensial tənliyini ödəyən, kəsilməz ehtimal *paylanmaları* ailəsinin adıdır. K. Pirson (K. Pearson, 1894) tərəfindən daxil olunmuşdur. $p(x)$ -in x -dən asılılığı qrafikləri *Pirson əyriləri* adlanır. (*) tənliyinin həlləri olan paylanmalar məhz *hiperhəndəsi paylanmanın* limit formasıdır. $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$ tənliyinin xarakterindən asılı olaraq, P. p. təsnif olunur.

P. p. ailəsi 12 tip və normal paylanmadan ibarətdir. Riyazi statistikanın bir çox mühüm paylanmaları (*) tənliyinin həllərinin bir şəkildən başqa şəklə dəyişdirilməsi vasitəsilə alına bilinir.

P. p. tiplərinin sistematik təsviri U. Elderton (W. Elderton, 1938) tərəfindən verilmişdir. Tiplər üzrə bu təsnifat sadələşdirilmiş halda aşağıdakı kimidir.

I tip:

$$p(x) = k(1 + x/a_1)^{m_1}(1 - x/a_2)^{m_2}, \quad -a_1 \le x \le a_2, \quad m_1,\ m_2 \ge -1,$$

xüsusi halı – 1-ci növ *beta – paylanmadır.*

II tip:

$$p(x) = k(1 - x^2/a^2)^m, \quad -a \le x \le a,\ m \ge -1$$

(**I** tipin P. p. variantı); xüsusi halı – *müntəzəm paylanmadır.*

III tip:

$$p(x) = k(1 + x/a)^{\mu a} e^{-\mu x}, \ -a \le x < \infty,\ \mu > 0,\ a > 0;$$

xüsusi halı – *qamma – paylanma* və *xi – kvadrat paylanmadır.*

IV tip:

$$p(x) = k(1 + x^2/a^2)^{-m}\, e^{-\mu \operatorname{arctg}(x/a)}, \quad -\infty \le x \le \infty, \quad \mu > 0,\ a > 0.$$

V tip:

$$p(x) = k x^{-q} e^{-\alpha/x}, \ 0 \le x < \infty, \ \alpha > 0, \ q > 1$$

(**III** tipə çevirmələrlə gətirilə bilinir).

VI tip:

$$p(x) = k x^{-q_2}(x - a)^{q_1}, \ a \le x < \infty, \ q_1 > q_2 - 1;$$

xüsusi halı – 1-ci növ *beta – paylanma*, *Pareto paylanması*, *Fişer F – paylanmasıdır.*

VII tip:

$$p(x) = k(1 + x^2/a^2)^{-m}, \ -\infty < x < \infty, \ m > 1/2;$$

xüsusi halı – *Styudent paylanmasıdır.*

VIII tip:

$$p(x) = k(1 + x/a)^{-m}, \ -a \le x < 0, \ 0 \le m \le 1.$$

IX tip:

$$p(x) = k(1 + x/a)^m, \ -a \le x \le 0, \ m > -1.$$

X tip:

$$p(x) = k e^{-(x-m)/\sigma}, \ m \le x < \infty, \ \sigma > 0;$$

məhz *üstlü paylanmadır.*

XI tip:

$$p(x) = k x^{-m}, \ b \le x < \infty, \ m > 0;$$

xüsusi halı – *Pareto paylanmasıdır*

XII tip:

$$p(x) = \left(\frac{1 + x/a_1}{1 - x/a_2}\right)^m, \ -a_1 \le x \le a_2, \ |m| > 1$$

(**I** tipin variantı).

I, **III**, **VI**, **VII** tiplər tətbiqdə olduqca mühüm yer tutur. P. p. hər biri özünün ilk dörd tərtib momentləri ($k = 1, 2, 3, 4$)

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\, dx$$

ilə, onların sonlu olduqları halda birqiymətli təyin olunur. Bu xassə empirik *paylanmaların* təqribi təsviri üçün istifadə olunur.

P. p.-nın hər hansı empirik paylanmaya gətirilməsi aşağıdakı qaydada aparılır: müşahidələrin asılı olmayan nəticələri üzrə ilk dörd seçimi moment hesablanılır, sonra uyğun olan P. p.-nın tipi təyin olunur və axtarılan P. p.-nın naməlum parametrlərinin qiymətləri tapılır. Ümumi halda, momentlər metodu P. p.-nın statistik qiymətlərinin alınması üçün effektiv metod deyildir. P. p. vasitəsilə asimptotik çevirmələr üzrə paylanmaların daha dəqiq approksimasiyası L. N. Bolşevin işlərində (1963) alınmışdır.

Əd.: [1] E l d e r t o n W., Frequency curves and correlation, 4 ed., Camb., 1953; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129–55.

PİRSON RANQ KORRELYASİYA ƏMSALI « Пирсона коэффициент ранговой корреляции; Pearson rank correlation coefficient » – bax, *Ranq korrelyasiyası.*

PİRSON TEOREMİ « Пирсона теорема; Pearson theorem » – bax, *Xi – kvadrat kriteri.*

PİSARENKO SPEKTRAL STATİSTİK QİYMƏTİ « Писаренко спектральная оценка; Pisarenko spectral estimator », h a r m o n i k a y r ı l ı ş m e t o d u, – diskret zamanlı, kompleks stasionar ζ_n, $n = 0, 1, \dots, N-1$ prosesinin *spektral ölçüsü* $dF_s(\omega)$ -nın statistik qiymətidir, bu statistik qiymət onunla əsaslandırılır ki, prosesin sonlu sayda qeyri – korrelyar harmoniklər və bəyaz küydən ibarət olduğu fərz olunur, yəni

$$dF_s(\omega)/d\omega = \frac{m_0}{2\pi} + \sum_{1 \le k \le s} \rho_k\, \delta(\omega - \omega_k), \qquad (*)$$

$$-\pi < \omega_k \le \pi, \quad m_0 > 0.$$

Bu statistik qiymət geofiziki praktikaya V. F. Pisarenko tərəfindən [1]-də siqnalların zirvə tezliklərinin gizli periodikliyini və lokalizasiyasını aşkar etmək üçün daxil olunmuşdur.

P. s. s. q. aşağıdakı Karateodori – Sege nəticəsinə əsaslanır (bax, [2]): ixtiyari R_k, $|k| \le p$ korrelyasion funksiyası spektral ölçüsü (*) şəklində olan korrelyasion funksiyalar sinfində bütün tam qiymətli ədəd oxuna həmişə davam oluna bilinər. Əgər $s \le p$ olarsa, ölçü yeganədir; bu halda m_0, – $R_p = \| R(k-l) \|$, k, $l = 0, \dots, p$ matrisinin minimal məxsusi qiymətidir, $s = \operatorname{rank}(R_p - m_0 I)$, $\omega_k = \arg z_k$; burada z_k, – $\alpha_0 z^s + \alpha_1 z^{s-1} + \dots + \alpha_s$ çoxhədlisinin kökləridir, bu çoxhədlinin əmsalları $(\alpha_0, \dots, \alpha_s)^{\mathsf{T}} = \alpha$ məxsusi qiyməti m_0 olan R_s matrisinin məxsusi vektoruna müvafiqdir. Modelin digər parametrləri

$$\sum_{1 \le k \le s} \rho_k \exp(i\omega_k t) = R(t) - m_0 \delta_t^0, \quad t = 0, \dots, s-1$$

spektral ifadəsindən təyin olunurlar. p artdıqca $dF_s(\omega)$ ölçüləri, $s(p) \le p$, $R(t)$ korrelyasion funksiyasının spektral ölçüsünə zəif yığılırlar. Empirik P. s. s. q. qeyd olunan yolla R_p -nin $\hat{R}_p$ tutarlı statistik qiyməti ilə əvəz edilməsilə qurulur, bu statistik qiymət isə Töplits xassəsini (O. Toeplitz, 1910, bax, [2]) və müsbət müəyyənlik xassəsini saxlayır. s modelinin tərtibi p -nin birinci qiyməti kimi təyin olunur, bundan sonra $\hat{m}_0$ statistik qiyməti azacıq dəyişir. Çox vaxt, asimptotik ekvivalent qeyri – Töplits R_s statistik qiymətindən istifadə olunur, bu statistik qiymət aşağıdakı şəkildədir:

$$N^{-1} \sum_n X_n X_n^*, \; X_n = (\zeta_{n+s}, \dots, \zeta_n)^{\mathsf{T}}.$$

Bu halda P. s. s. q. o r t o q o n a l r e q r e s s i y a metodu ilə sıx əlaqədardır: α vektorunun statistik qiyməti L müstəvisini təyin edir, C^{s+1}-də $X^* \alpha = 0$, bu statistik qiymət X_n nöqtələrinin L-ə qədər məsafələrinin kvadratları cəmini minimallaşdırır.

Əgər ζ_n (*) modelinə müvafiqdirsə və s ədədi məlumdursa, Pisarenko metodu $N \to \infty$ olduqda $\{\omega_k\}$ zirvə tezliklərinin $\sqrt{N}$ – tutarlı statistik qiymətlərinə gətirir; ω_k tezliklərinin statistik qiymətlərinin standart yayınmaları σ_k -lar bütün tezliklərin həndəsəsindən olduqca asılıdırlar (bax, [3]):

$$\sigma_k \propto N^{-1/2} m_0 \Big/ |A_k|^2 \prod_{\rho \ne k} \left| e^{i\omega_k} - e^{i\omega_\rho} \right|^{-1},$$

burada $\sqrt{m_0}/|A_k|$, – ω_k tezliyində küy (siqnal) nisbəti, $\propto$ simvolu isə mütənasiblik işarəsidir. Analoji vəziyyətdə ən kiçik kvadratlar metodu $\sigma_k \propto N^{-3/2} \sqrt{m_0}/|A_k|$ kəmiyyətlərinə gətirir. P. s. s. q.-nin effektivliyinin artması üçün $\{\zeta_n\}$ -in əvvəlcədən darzolaqlı filtrasiyalanması zəruridir.

Pisarenko metodu yalnız $\sqrt[6]{N}\,|\omega_1 - \omega_2| >> 1$ olduğu halda ω_1, ω_2 yaxın tezliklərini ayırd edir. Başqa sözlə, qeyd olunan şərtlərdə $\hat{\omega}_i - \omega_i = o_p(|\omega_1 - \omega_2|)$ (bax, [3]). Bununla belə, zirvə harmoniklərinin fazalarının başlanğıc fərqlərini itirən metodlar üçün ayırdetmə qabiliyyəti $N^{7/6}|\omega_1 - \omega_2| >> 1$ münasibəti ilə təyin olunur (bax, [4]).

Əd.: [1] P i s a r e n k o V. F., «Geophys. J. Roy. Astr. Soc.», 1973, v. 33, p. 347–66; [2] Г р е н а н д е р У., С е г е Г., Теплицевы формы и их приложения, пер. с англ., М., 1961; [3] М о л ч а н Г., Н ь ю м а н У., в кн.: Теория и алгоритмы интерпретации геофизический данных, в. 22, М., 1989, с. 179–93; [4] М о л ч а н Г., в кн.: Теория и алгоритмы интерпретации геофизический данных, в. 22, М., 1989, с. 160–79; [5] К е й С. М., М а р п л С. Л., «Тр ин.-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5–51.

PİTMƏN STATİSTİK QİYMƏTİ « Питмена оценка; Pitman estimator » – kvadratik itki funksiyası halında minimal riskə malik həqiqi yerinidəyişmələr qrupuna nəzərən yerinidəyişmə parametrinin ekvivalent *statistik qiymətidir.* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun komponentləri

$X_1, \dots, X_n$ – asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış, paylanmasının sıxlıq funksiyası $\{f(x-\theta),\ |x|<\infty,\ \theta\in\Theta\in(-\infty,\ +\infty)\}$ ailəsindən olan və ixtiyari $\theta\in\Theta$ üçün

$$\mathbf{M}_\theta X_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x-\theta)\,dx < \infty$$

şərtilə verilən təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $G=\{g: gX_i = X_i + g,\ |g|<\infty\}$, $G=\{g\}$ isə X_i $(i=1,\dots,n)$ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları fəzası $\mathbb{R}^1=(-\infty,+\infty)$-da təsir edən həqiqi yerinidəyişmələr qrupu olsun. Bu halda, əgər $\hat\theta=\hat\theta(X)$ kimi ekvivariant statistik qiymət götürülərsə, onda θ parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsi $L(\theta,\hat\theta)=(\theta-\hat\theta)^2$ kvadratik itki funksiyasına nəzərən invariant məsələ olacaqdır. E. Pitmən [1]-də göstərmişdir ki, kvadratik itki funksiyası halında minimal riskə malik olan, G qrupuna nəzərən yerinidəyişmə parametri θ-nın ekvivariant statistik qiyməti $\hat\theta(X)$ –

$$\hat\theta(X) = X_{(n1)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\prod_{i=2}^{n} f(x+Y_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\prod_{i=2}^{n} f(x+Y_i)\,dx}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $Y_i = X_{(ni)} - X_{(n1)}$, $X_{(ni)}$, $-X$ müşahidələr vektoru üzrə qurulmuş i-ci qaydalı statistikadır. P. s. q. meylsiz statistik qiymətdir və əgər θ parametrinin bütün ekvivariant statistik qiymətləri sonlu risk funksiyalarına malikdirlərsə, onda bu statistik qiymət kvadratik itki funksiyası halında θ yerinidəyişmə parametrinin bütün statistik qiymətləri sinfində minimaks qiymətdir (bax, [2]).

M i s a l 1. Əgər X_i, $i=1,\dots,n$ təsadüfi kəmiyyətləri yerinidəyişmə parametri naməlum θ olan üstlü qanunla paylanmışlarsa, yəni

$$f(x-\theta) = e^{-(x-\theta)},\quad x\ge\theta$$

olarsa, onda θ üçün $\hat\theta(X)$ P. s. q. $\hat\theta(X)=X_{(ni)}-1/n$ düsturu ilə ifadə olunur və onun dispersiyası $1/n^2$-na bərabərdir.

M i s a l 2. Əgər

$$f(x-\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\theta)^2/2},\quad |x|<\infty$$

olarsa, yəni X_i, $i=1,\dots,n$ – naməlum θ riyazi gözləməli $N(\theta,1)$ normal qanununa tabe olarsa, onda $\overline{X}=(X_1+\dots+X_n)/n$ arifmetik ortası P. s. q.-dir.

Əd.: [1] P i t m a n E., «Biometrika», 1939, v. 30, p. 391–421; [2] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] К а г а н А. М., К л е б а н о в Л. Б., Ф и н т у ш а л С. М., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1974, т. 43, с. 30–39; [5] В о и н о в В. Г., Н и к у л и н М. С., Несмещенные оценки и их приложения, М., 1989.

PLAN « план; design » – bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin.*

Φ – PLAN «Φ – план; Φ – design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLAN MATRİSİ « плана матрица; design matrix » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu.*

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN « планирование эксперимента; design of experiment » – təsadüfi xətalara məruz qalan ölçmələri rasional idarəetməni öyrənən riyazi statistika bölməsidir. Eksperimentlər üçün sərf olunan xərclər eyni olduqda E. p.-ndan istifadə olunduqda, ölçmələrin analizi və onun interpretasiyası olduqca sadələşir, nəticələrin dəqiqliyi və etibarlılığı olduqca artır. İstifadə olunan statistik modellər mürəkkəbləşdikcə ölçmələrin müqayisəli informativliyinin öyrənilməsi məzmunlu məsələ olur. Bu tip ilkin tədqiqlərə genetikada qarışıq modellərin *dispersion analizinin* tətbiqi üzrə R. Fişerin işlərini və səda (təsir) dispersiyasının intervalı üzrə maksimumu minimallaşdıran polinomial reqressiya planları haqqında K. Smitin işlərini aid etmək olar (bax, [3], [5]). Aqrobioloji proqramlar çərçivəsində aparılmış blok, faktor və randomlanmış planlaşdırmanın R. Fişerə aid araşdırmaları E. p. nəzəriyyəsinin inkişafında əhəmiyyətli impuls oldu (bax, [4]). Məs., R. Fişer eksperimentdə alınan informasiya haqqında anlayış daxil etmişdir və müəyyən etmişdir ki, faktorları növbə ilə dəyişdikdə (o zamanlar eksperimental rəhbərlikdə tövsiyyə olunan) onun təklif etdiyi tam faktor planla müqayisədə (bax, aşağı, misal 2), k – faktor xətti modelin əsas effektlərinin k dəfə pis olan dispersiyasından alınır, bundan başqa tam faktor plan faktorların qarşılıqlı təsirini effektiv qiymətləndirməyə də imkan verir.

Daha sonra aşkar olundu ki, orta qiymətin qiymətləndirilməsində (dispersiya naməlum olduqda) və ya sadə hipotezlərin diskriminasiyasının ən sadə məsələlərində seçimilə təyin olunan təsadüfi anda ölçmələrin dayandırılması (bax, *Ardıcıl analiz*) qeyd olunmuş anda ölçmələrin başa çatmasından daha effektivdir. Qeyd olunan bu tədqiqlər *statistik həllər nəzəriyyəsinin* zəminində 20-ci əsrin 2-ci yarısında formalaşmış, aşağıda ümumi halda baxılan E. p.-nın riyazi əsası olmuşdur (bu zaman E. p.-nın bir çox tətbiqi aspektləri kənarda qalır; bax, [2]).

$x\in X$ idarəetməsi qeyd olunduğu halda y ölçməsinin paylanması $\mathbf{P}_\theta^x(\cdot)$ olsun. $(x_1,\dots,x_N)=\xi$ ardıcıllığı p l a n adlanır. Bu plana $y_1^N=(y_1,\dots,y_N)$ ardıcıllığının ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathbf{P}_\theta^\xi(\cdot)$ uyğundur. Alınmış informasiya nəticəsində qiyməti Λ çoxluğundan olan naməlum $\theta\in\Theta$ parametri haqqında $\delta(y_1^N)$ qərarı qəbul olunur. $\Theta\times\Lambda$-də i t k i f u n k s i y a s ı $\omega(\theta,\lambda)$ verilir. $R_\theta^\xi=\mathbf{M}_\theta^\xi\,\omega(\theta,\delta(y_1^N))$ orta itkiləri (ξ,δ) s t r a t e g i y a s ı n ı n r i s k i adlanır. Riski minimallaşdıran (və ya riskin hər hansı funksionalını) minimallaşdıran strategiya o p t i m a l s t r a t e g i y a adlanır.

M i s a l 1. a) Əgər $i\ne j$, $\Theta_i\cap\Theta_j=\varnothing$, $\Theta=\bigcup_{i=1}^{m}\Theta_i$, $\Lambda=\{1,\dots,m\}$, $\omega_0(\theta,\lambda)$, – $\{\theta\notin\Theta_\lambda\}$ hadisəsinin indikatoru, $\omega(\cdot,\cdot)=\omega_0(\cdot,\cdot)+cN$ olarsa, onda strategiyanın riski hipotezlərin diskriminasiya xətasının ehtimalı və ölçmələrin orta sayının $c>0$ ədədinə hasilinin cəminə bərabərdir.

b) Əgər $\Theta=\Lambda=\mathbb{R}^m$ və $\omega(\theta,\lambda)=(\theta-\lambda)(\theta-\lambda)^{\mathsf T}$ olarsa, onda k v a d r a t i k r i s k l i qiymətləndirmə məsələsi alınır.

E. p. statik və ardıcıl planlaşdırmaya ayrılır. Əgər N və x_n, $n = 1, ..., N$ ölçmə başlayana qədər qeyd olunmuş sabitlər olarsa, ξ statik plan adlanır. Asılı olmayan ölçmələrin statistik planı üçün $\mathbf{P}_\theta^\xi(\cdot) = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}_\theta^{x_i}(\cdot)$ bərabərliyi ödənilir.

Eksperimentin ardıcıl planlaşdırılması aşağıdakı kimi təyin olunur. Hər bir y_n ölçməsindən sonra müşahidələrin sona çatdırılması haqqında qərar qəbul etmək olar, bu halda y_1^n-in əsasında θ parametri haqqında qərar qəbul edilir. Əgər ölçmələri davam etdirmək qərara alınarsa, onda $x_{n+1}(y_1^n)$ təyin edilir. Müşahidələr sona çatana qədər bu proses davam olunur.

E. p.-ında mühüm obyekt *reqression eksperimentlərdir*; bu eksperimentlərdə

$$y_i = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (1)$$

kəmiyyətlərini ölçərək reqressiya funksiyası [*səda* (*təsir*) *funksiyası*] $\eta(\cdot, \cdot)$ öyrənilir.

$\mathbf{P}_\theta^x$ ölçüsünü vermək əvəzinə, ε_i xətaları üzərinə bunların ilk iki tərtib momentləri terminlərində, tətbiqdə asan yoxlanılan şərtlər qoyulur və bununla da, nəzəriyyə müəyyən mənada qeyri – parametrik olur. $\eta(x, \theta) = \theta^{\mathrm{T}}\varphi(x)$, $\theta \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{M}\varepsilon_1^n = 0$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) = \sigma^2 W^{-1}$ şərtlərini ödəyən xətti reqression eksperimentlərin statik planı ən sadə statik plandır. Bu halda risk əvəzinə θ üçün ən yaxşı xətti meylsiz $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin kovariasiyalar matrisi $\sigma^2(\Phi^{\mathrm{T}} W \Phi)^{-1}$-in funksiyası götürülür, burada $\Phi^{\mathrm{T}} = \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_N))$ [bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*, burada $\eta(\cdot, \cdot)$ hipotezlərinin yoxlanılması təsvir olunmuşdur; həm də [1], [6] fəsil].

Bir qədər sonralar qeyri – parametrik məsələlərdə – $\eta(\cdot, \cdot)$-nın informasiya həcmi məlum olan sonsuz ölçülü kompakt (tutarlı statistik qiymət üçün) $\mathscr{F}$ sinfindən olduğu məlum olan məsələlərdə E. p. öyrənilməyə başlandı.

E. p. metodları əməllər fəzası X-dən asılıdırlar. Adətən, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ və optimal plan axtarışı $\mathbb{R}^n$-də optimizasiyaya (ola bilər ki, iterasion) gətirilir. Tətbiqi məsələlərin əksəriyyəti sonsuz ölçülü (adətən, Banax) X fəzasına gətirir (bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin riyazi fizikanın tərs məsələləri üçün*, həmçinin [1], [7], [9]-cu fəsillər). Digər hal $x(i)$ faktorunun i səviyyələri çoxluğu X_i olduqda diskret əməllər fəzası $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ halıdır.

Misal 2. İkigözlü tərəzidə üç ağır əşyanın θ_1, θ_2, θ_3 çəkilərini aşağıdakı hallarda təyin etmək tələb olunur: əgər m-ci eksperimentin nəticəsi tərəzinin ikinci və birinci gözlərindəki yüklərin çəkilərinin fərqi ilə dispersiyası σ^2 və orta qiyməti sıfra bərabər təsadüfi ε_m xətasının cəmi olarsa; əgər i-ci yük k-cı gözdə olarsa, $x_m(i) = (-1)^k$, $\operatorname{cov}\varepsilon_i^N = \sigma^2 I$, $y_m = \sum_{i=1}^{3} x_m(i)\,\theta_i + \varepsilon_m$ və əgər i-ci yük m-ci eksperimentdə çəkilməmişdirsə, $x_m(i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$). Hər bir əşyanı ayrı-ayrılıqda n dəfə çəkərək ($N = 3n$) onun çəkisi üçün dispersiyası σ^2/n-ə bərabər ən yaxşı xətti meylsiz

$$\hat{\theta}_i = n^{-1} \sum_{m=1}^{3n} y_m x_m(i)$$

statistik qiymətlərini almaq olur. $N = 8r$ olduqda eyni dəqiqlik yüklərin bütün 8 müxtəlif kombinasiyalarının hər birinin r dəfə çəkilməsindən sonra da alınır; bu kombinasiyaların hər birində hər bir yük ya tərəzinin bir gözündə, ya da digər gözündə olur və bu halda ən yaxşı meylsiz statistik qiymət –

$$\hat{\theta}_i = N^{-1} \sum_{m=1}^{N} y_m x_m(i), \qquad i = 1, 2, 3$$

düsturu ilə ifadə olunur. R. Fişer belə planı tam faktor plan adlandırmışdır. Bu plan həndəsi olaraq $K = \{x : \max|x_i| = 1\}$ üçölçülü kubunun təpələrində yerləşir və faktorların qarşılıqlı təsirini də təsvir edən daha ümumi

$$y_m = \sum_{i=1}^{3} x_m(i)\,\theta_i + \sum_{i<j} x_m(i)\,x_m(j)\,\theta_{ij} + \theta_{123}\,x_m(1)\,x_m(2)\,x_m(3) + \varepsilon_m$$

modelinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətini almağa imkan verir; bütün θ_i, θ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) və θ_{123} parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətləri qeyri – korrelyardırlar və dispersiyaları σ^2/N-ə bərabərdir. $N = 4$ olduqda K-nın düzgün tetraedr əmələ gətirən dörd təpəsi kəsri faktor plan təşkil edir, bu plan üçün θ_1, θ_2, θ_3 parametrlərinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlər qeyri – korrelyardırlar və dispersiyaları $\sigma^2/4$-ə bərabərdir (bax, *Faktor eksperiment*, *Blok plan*).

Xüsusilə də, faktor planların xüsusi halına – itki funksiyası yalnız bir faktorun qiymətinin dəqiqliyindən asılı olduğu hala baxılır. Eksperimentin faktor planlaşdırılması üçün səciyyəvi cəhət onun bir çox məsələlərinin statistik deyil, kombinator terminlərdə qoyuluşudur. Burada toplanılmış nəticələrin statistik anlaşılması E. p.-nın aktiv inkişafda olan oblastıdır.

Reqression eksperimentlərin çərçivəsində iki mühüm bölmə qeyd olunmalıdır: itki funksiyası reqressiya funksiyasının ekstremumunun tapılmasının dəqiqliyini nəzərə alınan *ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması* (bax, [1] fəsil 14) və $\eta(\cdot, \cdot) \in \mathscr{F}$ modelinin seçilməsinə eksperimentin robast planlaşdırılması (bax, *Robastlıq*). İkinci istiqamətin araşdırmalarının əksəriyyəti seçilmiş $\eta(\cdot, \cdot)$ statistik qiymətinin kvadratik riskini nəzərə alır, bu statistik qiymət, adətən, xətti

$$B(\xi) = \sup_{\eta \in \mathscr{F}} \int (\eta(x) - \mathbf{M}\hat{\eta}(x))^2 \nu(dx)$$

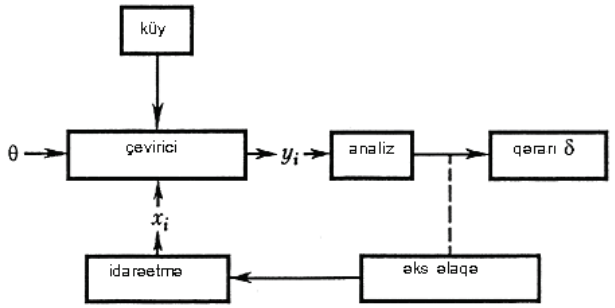
meyli və

$$D\xi = \mathbf{M} \int (\mathbf{M}\hat{\eta}(x) - \hat{\eta}(x))^2 \nu(dx)$$

təsadüfi xətasının cəmindən ibarət olur, burada ν – hər hansı ölçüdür. Bu bölmədə əsas diqqət $B(\xi)$ meylini minimallaşdıran

planların qurulmasına verilir, bu isə təsadüfi funksiyalar nəzəriyyəsinin bölməsi olduğundan ξ planının daşıyıcısı üzərinə müəyyən şərtlər qoyur. Belə planlar arasında standart metodlarla (reqression eksperimentləri planlaşdırılması üçün) düyünlər və ölçmələrin bölünənliyi (çəkilər) seçilir ki, bunlar $D\xi$-nin müəyyən bir funksiyasını minimallaşdırmış olsun (bax, [1] fəs. 6).

E. p.-nın strukturu və əlaqələrinin aydın olması üçün aşağıdakı nəzəri–informasion sxem faydalıdır:



«Təbiət məlumatı» θ «çeviriçi» blokda paylanması $\mathbf{P}_\theta^{x_i}$ olan y_i ölçməsində x_i idarəetməsinin iştirakı ilə kodlaşdırılır. $y_1, \dots, y_N$ ölçmələrinin analizi eksperimentlərin ardıcıl planlaşdırılmasında, növbəti y_{n+1} ölçməsinin idarəolunmasında və s. N anına qədər θ parametri haqqında δ qərarının qəbul olunmasında istifadə olunur. E. p. sxemlərinin və informasiya nəzəriyyəsindəki analogiya E. p. nəzəriyyəsində informasiya nəzəriyyəsi ideyaları və aparatının məhsuldarlığı ilə izah olunur. Bu əlaqə çox sayda hipotezin yoxlanılmasında daha aydın görünür (bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*). Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılmasını çoxgirişli kanal üzrə məlumatların ötürülməsi nəzəriyyəsinin bir qolu kimi hesab etmək olar (bax, [1], fəs. 15).

Strategiyanın riski R verildikdə ölçmələrin ən kiçik orta qiyməti $\overline{N}_\theta = \mathbf{M}_\theta^\xi N$ kəmiyyətini təyin etmək üçün informasiya nəzəriyyəsinin üsullarından biri, ölçmələr əlavə olunduqda additivdən çox olmayaraq artan informasiya miqdarı $\mathscr{I}$-nun təyin olunmasından ibarətdir. R riski və $\max \mathscr{I} = I_1$ bir ölçülmədə verildikdə $\min \mathscr{I} = I(R)$ kəmiyyətini qiymətləndirən R riski ixtiyari s strategiyası üçün

$$\overline{N}_0 \geq I(R)/I_1$$

şəklində statistik qiymət almaq olur. Əgər (2) bərabərsizliyini bərabərliyə çevirən (heç olmazsa $R \to \infty$ olduqda asimptotik olaraq), riski R olan strategiyanın varlığını isbat etmək olarsa, onda (2) qiymətləndirməsinin dəqiqliyi və qeyd olunan mənada s-in optimallığı aydındır (bax, *Ardıcıl planlaşdırılması*, *eksperimentlərin*, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*, [1], fəs. 15-də misallar)

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983; [2] Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, M., 1965; [3] Fisher R. A., «Trans. Roy. Soc. Edinb.», 1918–19, v. 52, p. 399–433; [4] Fisher R. A., Design of experiments, Edinb. – L., 1935; [5] Smith K., «Biometrika», 1918, v. 12, p. 1–85.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN ardıcıl **« планирование эксперимента** последовательное; sequential **design of experiments »** – bax, *Ardıcıl planlaşdırılması*, *eksperimentlərin*.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN hipotezlərin yoxlanılması üçün **« планирование эксперимента** для проверки гипотез; **design of experiment** for hypotheses testing **»** – bax, *Diskriminəedici eksperimentlərin planlaşdırılması.*

PLANLAŞDIRILMASI, EKSPERİMENTİN riyazi fizikanın tərs məsələləri üçün **« планирование эксперимента** для обратных задач математической физики; **design of experiment** for inverse problems of mathematical physics **»** – eksperimentin informativliyini artırmaq məqsədilə fiziki xarakteristikaların ölçmələrini aparmaq üçün şərtlərin seçilməsidir. Ölçmə üçün tipik tərs məsələ əksər hallarda, təbii şəkildə münasib olan F funksional fəzasında *reqression eksperiment* kimi ölçülən obyektin vəziyyətinə müəyyən $f \in F$ elementini qarşı qoymaq yolu ilə ifadə olunur. Eksperiment

$$y_t = x_t(f) + \varepsilon_t, \quad t \in T \tag{1}$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətlərini müşahidə etməkdən ibarətdir, burada t – müşahidəni nömrələyici indeks, $x_t(f)$, – $f \in F$ elementinin xətti funksionalı, yəni F^* funksionallarının qoşma fəzasının elementi, $\{\varepsilon_t\}$ – cüt-cüt qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər, $\mathbf{M}\varepsilon_t = 0$, $\mathbf{M}\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 > 0$.

Konkret məsələlərdə $f \in F$ elementləri riyazi fizikanın bu və ya digər tənliyinin (düz məsələsinin) həlləri ola bilər. $\{x_t\}$ funksionalları mümkün məqbul funksionalların hər hansı $X \subset F^*$ çoxluğundan seçilir (təsir fəzası adlandırılan) ki, bu çoxluq bilavasitə ya fiziki eksperimentin şərtlərilə verilir, ya da ki, uyğun qoşma tənliyin həlləri çoxluğu olur (bax, [1]). (1) eksperimentinin məqsədi f vəziyyətini qiymətləndirməkdən və ya statistikaların (yəni qeyd olunmuş hər hansı statistikalar sinfindən olan müşahidəolunan $\{y_t : t \in T\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin funksiyalarının) köməyilə hər hansı $\theta(f)$ – vəziyyət funksiyasının qiymətləndirilməsindən ibarətdir. Bir qayda olaraq verilən sinifdən müəyyən mənada ən yaxşı sayılan statistikalardan istifadə olunur. Bu zaman naməlum f vəziyyəti haqqında bu və ya digər aprior informasiyanın olması əksər hallarda zəruri olur, əks halda ən yaxşı statistik qiymətin riski məhdud olmaya bilər (bax, [2]). Tərs məsələlərdə *aprior informasiyanın nəzərə alınması* üsulları, prinsip etibarilə, *reqression analizdə* qəbul olunmuş, standart üsullara analojidir.

(1) eksperimentinin optimizasiya kriteriləri, bir qayda olaraq, aprior informasiya verildiyi halda $\{x_t, \sigma_t^2, t \in T\}$ toplusu ilə birqiymətli təyin olunan ən yaxşı statistik qiymətlərin dəqiqlik xarakteristikalarıdır. Müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətlər ailəsinin requlyarlığının təmin olunması üçün (bax, [2]) $\{\sigma_t^2\}$ dispersiyalar toplusunun, adətən, $\sum_t \sigma_t^{-2} = \text{const}$ şərtinə tabe olduğunu nəzərə alaraq, həm də reqression analizdə təkrarlanan müşahidələrin tərs dispersiyalarının additivliyinə görə, (1) eksperimentinin təsvirində dispersiyalar müşahidələrin çəkiləri

$w_t = \sigma_t^{-2}$, $\sum_t w_t = \text{const}$ ilə əvəz olunur. Bundan sonra, (1) eksperimentinin planı, yəni $\zeta = \{x_t, w_t\}$ toplusu təsir fəzası X-də diskret ölçü, w_t çəkisini $x_t \in X$, $t \in T$ elementinə aid edən ölçü olur.

E. p. məsələsi, yəni məqbul planlar çoxluğundan ξ^* optimal planının seçilmiş optimizasiya kriterisinə uyğun olaraq seçilməsi, əgər təsir fəzası X qoşma F^* fəzasında məhdud olarsa, qeyri – trivial məsələ olur.

Fərz olunur ki,

$$f = \sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i \qquad (2)$$

xətti parametrizasiya məsələsinə baxılır, burada $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^{\mathrm{T}}$ – naməlum parametrlər vektoru, $e_i \in F$, $i = 1, \dots, p$ – məlum olan bazis elementləridir. β parametrlərinin qiymətləndirilməsi nöqteyi – nəzərindən (1) – (2) eksperimenti ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlər kimi ən kiçik kvadratlar statistik qiymətlərli xətti reqression eksperimentə ekvivalentdir. (1) – (2) eksperimentinin informasion matrisi $M(\zeta)$-nın elementləri

$$M_{ik}(\zeta) = \sum_{t \in T} w_t x_t(e_i) x_t(e_k), \quad i, k = 1, \dots, p$$

düsturu ilə təyin olunur.

Eksperimentin planlaşdırılması məsələsi (1) – (2) hər bir $x \in F^*$ funksionalına bu funksionalın $z = (x(e_1), \dots, x(e_k))^{\mathrm{T}}$ bazis elementlərində qiymətlər vektorunu qarşı qoyan kəsilməz xətti $\varphi : F^* \to \mathbb{R}^p$ inikası ilə aşağıdakı uyğun xətti reqression eksperimentin planlaşdırılması məsələsinə gətirilir (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*):

$$y_t = \beta' z_t + \varepsilon_t, \; z_t = \varphi(x_t), \; t \in T,$$

bu eksperimentin təsir zonası $Z = \varphi(x) \subset \mathbb{R}^p$ çoxluğudur. Əgər X fəzası F^*-da məhdud və qapalı olarsa, onda Z kompaktdır və elə ζ_z^* optimal planı vardır ki, o, Z fəzasının sərhədində sonlu sayda $z_1^*, \dots, z_N^*$ nöqtələrində topalanmışdır. Optimal planın z_j^*, $j = 1, \dots, N$ nöqtələrinə uyğun x_j^* funksionallarının bərpası problemi F^* fəzasında

$$x_j^*(e_i) = z_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, N \qquad (3)$$

tənliklər sisteminin həllindən ibarətdir. D – optimal plan üçün ($\det M(\zeta^*) = \sup_{\zeta} \det M(\zeta)$) (3) sistemi

$$x_j^*(f_j) = \sup_{x \in X} x(f_j), \quad j = 1, \dots, N \qquad (4)$$

xətti ekstremal məsələlər toplusuna ekvivalentdir, burada $f_j \in F$ elementi z_j^* nöqtəsi ilə

$$f_j = \sum_{i,k} (M^{*-1})_{ik} z_{ji}^* e_k$$

düsturu ilə birqiymətli təyin olunur, $M^* = M(\zeta_Z^*)$, – D – optimal planın informasion matrisidir (bax, [3]). ζ_Z^* planından $\{z_j^*\}$ nöqtələrinə $\{x_j^*\}$ funksionallarına uyğun çəkilər qarşı qoyaraq, funksionallar fəzası F^*-da X təsir oblastı üçün D – optimal ζ^* planını almaq olur.

Qoşma funksionallar fəzalarının müxtəlif cütlərinin seçilməsi fizikanın müxtəlif oblastlarında real ölçmə məsələlərinə uyğun E. p. məsələlərinin geniş sinfinin alınmasına səbəb olur.

Kəsilməz reqressiya funksiyasını müşahidə etdikdə hesablanıb ayrılan nöqtələrin optimal seçiminin klassik halına (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*) F fəzası kimi $f(s)$ funksiyalarının fəzası $C(s)$-i seçmək uyğun olur və bu funksiyalar S kompaktında kəsilməzdir, $X \subset C(S)^*$ çoxluğu kimi isə $x_{s_0}(f) = f(s_0)$, $s_0 \in S$ şəklində funksionallar çoxluğu götürülür. $F = F^* = L^2(S)$ halı da araşdırılmışdır (bax, [4]). Baxılan hallarda funksionalların bərpası çətinlik törətmir.

Additiv fiziki kəmiyyətlərin (məs., müxtəlif mənbələrdən şüalanma axınlarının) paylanmaları üzrə tərs məsələlər üçün F fəzası kimi S-də qeyd olunmuş λ ölçüsünə, daha yaxşısı Lebeq ölçüsünə nəzərən araşdırılan paylanmaların sıxlıqlarını özündə saxlayan $L^1(S, \lambda)$ fəzasını götürmək məqsədəuyğundur. Təsir fəzası $X \subset L^2(S)^* = L_\infty(S)$ kimi bu halda,

$$x(f) = \int a(s) f(s) \, d\lambda(s), \quad 0 \le a(s) \le 1 (\mathrm{mod}\, \lambda)$$

şəklində funksionallardan ibarət vahid radiuslu kürənin müsbət hissəsinə baxmaq təbiidir. Onda (4) ekstremumu sıxlığı

$$f_j(s) = \sum_{i,k} (M^{*-1})_{ik} z_{ji}^* e_k(s)$$

düsturu ilə ifadə olunan paylanmanın Jordan – Han ayrılışının müsbət olduğu çoxluğun indikatoru $a_j^*(s)$-də alınır, burada $\{e_k(s)\}$ – bazis sıxlıqlarıdır. Bu tip məsələlər olduqca ətraflı araşdırılmışdır (bax, [3]), distansion zondlama sistemlərinin spektral kanallarının optimal seçimində bunların tətbiqləri də öyrənilmişdir (bax, [5]).

Əd.: [1] М а р ч у к Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [3] К о з л о в В. П., в кн.: Математические методы планирования эксперимента, Новосиб., 1981, с. 74–101; [4] М а л ю т о в М. Б., в кн.: Планирование оптимальных экспериментов, в. 48, М., 1975, с. 164–66; [5] К о з л о в В. П., Т и м о ф е е в Ю. М., «Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана.», т. 15, № 12, с. 1253–61.

PLANLAŞDIRILMASI, EKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN « планирование экстремальных экспериментов; design of extremal experiments » – bax, *Ektremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANLAŞDIRILMASI, İMİTASİON EKSPERİMENTİN « планирование имитационного эксперимента; design of simulation experiment » – imitasion eksperiment vasitəsilə öyrənilən təsadüfi hadisə və ya prosesin modelinin (parametrlərinin) xüsusi olaraq seçilməsidir. Bu model

elə seçilməlidir ki, aparılan imitasiya üçün hesablama və ya sərf olunan işin minimal olmasını təmin etmiş olsun. İ. e. p.-nda statistik eksperimentin planlaşdırılması üçün işlənilmiş metodlar və paylanmaların dəyişilməsilə əlaqədar uyğun statistik çəkilərin daxil olunması mümkünlüyünə əsaslanan xüsusi metodlardan (mühüm seçim metodu) istifadə olunur. Bax, *Monte – Karlo metodu*; zəruri işin həcmi.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Мелас В. Б., Математический эксперимент с моделями сложных систем, СПб., 1993; [2] Математическая теория эксперимента, М., 1983.

PLANLAŞDIRILMASI, MULTİEKSTREMAL EKSPERİMENTLƏRİN « планирование многоэкстремальных экспериментов; design of multiextremal experiments » – bax, *Multiekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANLAŞDIRILMASI, SÜZGƏCLƏYİCİ EKSPERİMENTLƏRİN « планирование отсеивающих экспериментов; design of screening experiments » – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması*.

PLANŞEREL EYNİLİYİ « Планшереля тождество; Plancherel identity » – bax, *Sıxlıq*, *ehtimal sıxlığı.*

POLİNOMİAL BİRCİNS XAOS « полиномиальный однородный хаос; polynomial homogeneous chaos » – bax, *Bircins xaos.*

POLİNOMİAL / MULTİNOMİAL ƏMSAL « полиномиальный коэффициент; multinomial coefficient » – bax, *Binomial əmsal.*

POLİNOMİAL / MULTİNOMİAL PAYLANMA « полиномиальное распределение; multinomial distribution » – $n_1 + \dots + n_k = n$ şərtini ödəyən, tam mənfi olmayan $n_1, \dots, n_k$ qiymətlərini uyğun olaraq, $p_1, \dots, p_k$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$ ehtimalları ilə alan $X_1, \dots, X_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal *paylanmasıdır* və

$$\mathbf{P}\{X_1 = n_1, \dots, X_k = n_k\} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}\, p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}. \qquad (*)$$

P. p. komponentləri $X_1 + \dots + X_k = n$ şərtini ödəyən $(X_1, \dots, X_k)$ təsadüfi vektorunun çoxölçülü diskret paylanmasıdır [bu paylanma mahiyyətcə $(k-1)$ – ölçülü paylanmadır, belə ki, $\mathbb{R}^k$ fəzasında o, cırlaşmış paylanmadır]. P. p. təbii olaraq, *binomial paylanmanın* ümumiləşməsidir və $k = 2$ olduqda bu sonuncu ilə üst-üstə düşür. «P. p.» adı onunla izah olunur ki, (*) ehtimalı $(p_1 + \dots + p_k)^n$ çoxhədlisinin (polinomunun) ayrılışının ümumi həddidir. P. p. aşağıdakı ehtimal sxemində alınır. n sayda təkrarlanan asılı olmayan sınaqlarda bir-birini inkar edən A_i, $i = 1, \dots, k$ hadisələrindən biri A_i-nin baş verməsi sayı X_i olsun (yəni A_i-lər tam qrup əmələ gətirən hadisələrdir). $p_i = \mathbf{P}(A_i)$ hər bir sınaqda A_i hadisəsinin baş vermə ehtimalı olarsa, (*) ehtimalı n sınaqda $A_1, \dots, A_k$ hadisələrinin uyğun olaraq, $n_1, \dots, n_k$ dəfə baş verməsi hadisəsinin ehtimalıdır. X_i təsadüfi kəmiyyətlərindən hər biri riyazi gözləməsi $n p_i$, dispersiyası $n p_i(1 - p_i)$-yə bərabər binomial paylanma ilə paylanır.

$(X_1, \dots, X_k)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsi $(n p_1, \dots, n p_k)$, kovariasion matrisi $B = \| b_{ij} \|$ olur, burada

$$b_{ij} = \begin{cases} n p_i(1 - p_i), & i = j, \\ -n p_i p_j, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, k$$

(B matrisinin ranqı $(k-1)$-ə bərabərdir, çünki, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$). P. p.-nın xarakteristik funksiyası $f(t_1, \dots, t_n) = (p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^n$ düsturu ilə ifadə olunur. $n \to \infty$ olduqda $(y_1, \dots, y_k)$ vektorunun paylanması normalanmış $y_i = (X_i - n p_i) \Big/ \sqrt{n p_i (1 - p_i)}$ komponentlərilə hər hansı çoxölçülü normal paylanmaya yaxınlaşır, $\sum_{i=1}^{k} (1 - p_i) y_i^2$ cəminin paylanması isə (bu cəmdən riyazi statistikada χ^2 kriterisinin qurulmasında istifadə olunur) sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$-ə bərabər χ^2 – paylanmasına yaxınlaşır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

POLİNOMİAL REQRESSİYA « полиномиальная регрессия; polynomial regression » – bax, *Parabolik reqressiya*.

POLİNOMİAL / MULTİNOMİAL SXEM « полиномиальная схема; multinomial scheme » – elə asılı olmayan sınaqlar sxemidir ki, hər bir sınaqda (təkrarlana bilinən) k sayda bir-birilə uyuşmayan $A_1, A_2, \dots, A_k$ nəticələrindən yalnız biri baş verə bilər və bu nəticələrin ehtimalları $p_i = \mathbf{P}(A_i)$ sınağın nömrəsindən asılı deyildir. Əgər n P. s.-də sınaqların sayı olarsa, onda A_i, $i = 1, \dots, k$ nəticələrinin baş verməsi tezliyi X_i polinomial paylanma ilə paylanır və bu paylanma qanunu aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\mathbf{P}\{X_i = n_i,\ i = 1, \dots, k\} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k},$$

burada n_i – tam ədədlərdir və $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$,

$$p_j \geq 0, \quad \sum_j p_j = 1.$$

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982.

POLİNOMİAL YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN « полиномиальное размещение частиц; multinomial allocation of particles » – hissəciklərin oyuqlarda bir-birindən asılı olmadan yerləşməsinin ehtimali sxemidir və bu sxemdə qeyd olunmuş hissəciyin i-ci oyuğa düşməsi ehtimalı bütün hissəciklər üçün eynidir. p_i – hissəciyin i-ci oyuğa düşməsi ehtimalı olsun, $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Hissəcik-

lərin P. y.-nin xüsusi halı $p_i = 1/N$ olduğu hal hissəciklərin bərabər ehtimallı yerləşməsi adlanır. Hissəciklərin P. y. ilə: yalnız r sayda hissəciklər olan oyuqlar sayı $\mu_r = \mu_r(n, p_1, \dots, p_N)$; k sayda oyuqdan hər birində ən azı m sayda hissəcik olmaqla yerləşmədə hissəciklərin minimal sayı $\nu_m(k)$ kimi təsadüfi kəmiyyətləri təyin etmək olar.

μ_r təsadüfi kəmiyyətlərinin momentləri üçün sadə düsturlar vardır, məs.,

$$\mathbf{M}\,\mu_r = \sum_{k=1}^{N} C_n^r \; p_k^r \,(1 - p_k)^{n-r}$$

Bərabərehtimallı yerləşmə sxemində μ_0 kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq,

$$\mathbf{M}\,\mu_0 = N(1 - 1/N)^n,$$
$$\mathbf{D}\,\mu_0 = N(N+1)(1 - 2/N)^n + \mathbf{M}\,\mu_0 - (\mathbf{M}\,\mu_0)^2$$

düsturları ilə təyin olunur və bu kəmiyyətlər *boş qutular kriterisində* istifadə olunurlar.

μ_r kəmiyyətləri üçün $n, N \to \infty$ və $n, N, p_1, \dots, p_N$ parametrləri arasında müəyyən münasibətlər olduqda limit paylanmaları normal və ya Puasson paylanmaları olur. Məs., bərabərehtimallı sxemdə $n, N \to \infty$ olduqda μ_0 kəmiyyəti $(\mathbf{M}\,\mu_0, \sqrt{\mathbf{D}\,\mu_0})$ parametrlərli normal qanunla asimptotik olaraq paylanır, bu şərtlə ki, $\mathbf{M}\,\mu_0 \to \infty$, $\mathbf{D}\,\mu_0 \to \infty$ olsun; əgər $\mathbf{M}\,\mu_0 \to \lambda$ və $\mathbf{D}\,\mu_0 \to \lambda$ münasibətləri $n, N \to \infty$ olduqda ödənilərsə, μ_0 təsadüfi kəmiyyəti limitdə λ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır; $\mu_0 - (N - n)$ kəmiyyəti, $n, N \to \infty$ olduqda $\mathbf{M}\,\mu_0 \to \infty$, $\mathbf{D}\,\mu_0 \to \lambda$ olarsa, limitdə λ parametrli Puasson qanunu ilə paylanır.

$\nu_m(k)$-nın limit paylanmalarının araşdırılması μ_r-in limit paylanmalarının araşdırılmasına gətirilir, məs., $\mathbf{P}\{\nu_1(k) < n\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) \le N - k\}$. $\mu_r(n, p_1, \dots, p_N)$ üçün limit paylanmaları normal və Puasson paylanmasından fərqli paylanmalar ola bilər. Məs., $\mu_0(n, p_1, \dots, p_N)$ üçün Puasson və binomial paylanmaların kompozisiyası olan limit paylanması alınmışdır (bax, [2]).

μ_r üçün limit paylanmaları $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ kəmiyyətlərinə əsaslanan müxtəlif statistik kriterilərin güclərinin təqribi statistik qiymətləri üçün istifadə olunur, məs., boş qutular kriterisinin gücünün statistik qiyməti üçün. Hissəciklərin P. y. sxemi hissəciklərin bir neçə tip olduğu sxem üçün və p_i, $i = 1, \dots, N$ ehtimalları hissəciyin nömrəsindən asılı olduğu sxem üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [3] və [4]).

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976; [2] Чистяков В. П., «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 1, с. 9–16; [3] Попова Т. Ю., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 542–48; [4] Болотников Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 534–42.

POLİSPEKTR « полиспектр; polyspectrum » – bax, *Spektral semi – invariant.*

POLİSPEKTRAL FUNKSİYA « полиспектральная функция; polyspectral function » – bax, *Spektral semi – invariant.*

POLİSPEKTRAL SIXLIQ « полиспектральная плотность; polyspectral density » – bax, *Spektral semi – invariant.*

POLLAÇEK – SPİTSER EYNİLİYİ « Поллачека – Спитцера тождество; Pollaczek – Spitzer identity » – bax, *Faktorizasion eyniliklər.*

POLSKİ FƏZASI « польское пространство; Polish space » – tam separabel metrik fəzadır və ya belə fəzaya homeomorf, topoloji fəzadır. Doğurulmuş topologiyalı tam separabel metrik fəzaların açıq altçoxluqları (və ya bundan əlavə, G_δ – altçoxluqlar) belə fəzalardandır və bunlar bütün P. f.-larının sinfini tamamilə əhatə edir.

Əd.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Исползование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975.

POLYAR ÇOXLUQ « полярное множество; polar set » – elə bir çoxluqdur ki, *Markov prosesinin* heç bir vəziyyətindən bu çoxluğa keçid yoxdur. Daha dəqiq, $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \ge 0$ bircins qırılan Markov prosesi $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında verilmiş olsun, $A \subset \mathscr{E}$ sanki Borel çoxluğu (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) elə çoxluq olsun ki, onun üçün $t = 0$ anından sonra *ilk çatım anı* ixtiyari $x \in \mathscr{E}$ üçün ξ anı ilə ($\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin) üst-üstə düşür; onda A polyar çoxluq adlanır; belə A çoxluğunun ixtiyari altçoxluğu da belə adlanır. Hər bir P. ç. avtomatik olaraq semi – polyar və *zərif çoxluqdur.*

Markov prosesi üçün P. ç. anlayışının proobrazı klassik potensial nəzəriyyəsinin eyniadlı anlayışı ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – [a. o.], 1984.

POLYAR KORRELYASİON FUNKSİYA « полярная корреляционная функция; polar / signed correlation function », işarəvi korrelyasion funksiya stasionar təsadüfi $\zeta(t)$ prosesinin – $\zeta_s(t) = \operatorname{sgn}\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin

$$B^{(s)}(\tau) = \mathbf{M}\,\operatorname{sgn}\zeta(t+\tau)\,\operatorname{sgn}\zeta(t)$$

ifadəsilə təyin olunan *korrelyasion funksiyasıdır*, burada $\operatorname{sgn} x$, $x \ge 0$ olduqda $\operatorname{sgn} x = 1$, $x < 0$ olduqda $\operatorname{sgn} x = -1$ münasibətlərilə təyin olunur.

İki stasionar və stasionar əlaqəli $\zeta(t)$ və $\zeta^*(t)$ təsadüfi proseslərinin qarşılıqlı P. k. f. analoji olaraq, $\zeta_s(t) = \operatorname{sgn}\zeta(t)$ və $\zeta_s^*(t) = \operatorname{sgn}\zeta^*(t)$ təsadüfi proseslərinin

$$B^{(s)}_{\zeta\zeta^*}(\tau) = \mathbf{M}\,\operatorname{sgn}\zeta(t+\tau)\,\operatorname{sgn}\zeta^*(t)$$

qarşılıqlı P. k. f.-na deyilir. $\zeta_s(t)$ yalnız 1 və ya -1 qiymətlərini aldığından, $B^{(s)}(\tau)$ və $B^{(s)}_{\zeta\zeta^*}(\tau)$ P. k. f.-nın təqribi qiymətləndirilməsində t üzrə $\zeta_s(t+\tau)\,\zeta_s(t)$ və $\zeta_s(t+\tau)\zeta_s^*(t)$ hasillərinin orta qiymətlərini hesablamaq sadə və asan olur. Digər tərəfdən, əgər $\zeta(t)$ orta qiyməti sıfra bərabər Qauss prosesi [və ya ikiölçülü $\zeta(t) = \{\zeta(t), \zeta^*(t)\}$ prosesi],

$$\mathbf{M}\zeta(t+\tau)\zeta(t) = B(\tau),$$

$$\mathbf{M}\,\zeta(t+\tau)\,\zeta^*(t) = B_{\zeta\zeta^*}(\tau)$$

olarsa, $\mathbf{M}\zeta = \mathbf{M}\zeta^* = 0$, $\mathbf{M}\zeta\zeta^* / [\mathbf{M}\zeta^2\,\mathbf{M}\zeta^{*2}]^{1/2} = \rho$ və $\mathbf{M}\,\operatorname{sgn}\zeta\,\operatorname{sgn}\zeta^* = 2\pi^{-1}\arcsin\rho$ şərtlərilə verilən normal paylanmaya malik ikiölçülü $(\zeta,\ \zeta^*)$ təsadüfi vektoru üçün

$$B^{(s)}(\tau) = 2\pi^{-1}\arcsin[\rho(\tau)],$$

$$B^{(s)}_{\zeta\zeta^*}(\tau) = 2\pi^{-1}\arcsin[\rho_{\zeta\zeta^*}(\tau)]$$

olur; burada $\rho(\tau) = B(\tau)/B(0)$ və $\rho_{\zeta\zeta^*}(\tau) = B_{\zeta\zeta^*}(\tau) \Big/ [\mathbf{M}\zeta^2(t)\,\mathbf{M}\zeta^{*2}(t)]^{1/2}$, – $\zeta(t)$ və $\zeta(t) = \{\zeta(t),\ \zeta^*(t)\}$ proseslərinin normalanmış korrelyasion funksiyalarıdır. $B^{(s)}(\tau)$ və $B^{(s)}_{\zeta\zeta^*}(\tau)$ P. k. f.-larından $\rho(\tau)$ və $\rho_{\zeta\zeta^*}(\tau)$-nın təqribi qiymətlərini təyin etmək məqsədilə istifadə etmək olar. P. k. f.-nın təqribi qiymətlərinə əsasən normalanmış korrelyasion funksiyaların qiymətlərini qiymətləndirmə metodları korrelyasion analizin polyar (və ya işarəvi) metodları adlanır (bax, [1] – [10]). Əgər $\zeta(t)$ [və ya $\{\zeta(t),\ \zeta^*(t)\}$] orta qiyməti naməlum $0 \le t \le T$ müddətində müşahidə olunan Qauss stasionar prosesidirsə, onda korrelyasion funksiyanın polyar qiymətləndirmə metodunu $\zeta(t) - \overline{\zeta}_T$ [və ya $\zeta^*(t) - \overline{\zeta}^*_T$] prosesinə tətbiq etmək olar; burada $\overline{\zeta}_T$ və $\overline{\zeta}^*(t)$ kəmiyyətləri $0 \le t \le T$ zaman intervalı üzrə $\zeta(t)$ və $\zeta^*(t)$-nin orta qiymətləridir. Polyar metod və onun bəzi modifikasiyalarından bir çox qeyri – Qauss təsadüfi proseslərinin normalanmış korrelyasion funksiyalarının təqribi qiymətlərini almaq məqsədilə istifadə olunur.

Əd.: [1] Kedem B., Binary time series, N. Y. – Basel, 1980; [2] Гершман С. Г., Фейнберг Е. Л., «Акуст. ж.» 1955, т. 1, № 4, с. 326–38; [3] Mc Neil D. R., «J. Roy. Satist. Soc. Ser. B», 1967, v. 29, № 1, p. 180–95; [4] Балл Г. А., Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов, М., 1968; [5] Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н., Автоматические цифровые корреляторы, М., 1971; [6] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [7] Жовинский В. Н., Арховский В. Ф., Корреляционные устройства, М., 1974; [8] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [9] Корн Г., Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах, пер. с англ., М., 1968; [10] Отнес Р., Эноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [11] Veltman B. P. T., Kwakernaak H., «Regelungstechnik», 1961, Bd 9, S. 337–64; [12] Veltman B. P. T., van den Bos A., в кн: Automatic and remote control. Proceeding of 2-nd Congress of the International federation of automatic control (IFAC), v. 1, L. – Munich, 1964, p. 620–27; [13] Berndt H., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1968, v. 14, № 6, p. 796–801.

POLYAR METODU, KORRELYASİON ANALİZİN « полярный метод корреляционного анализа; polarity coincidence method of correlation analysis » – bax, *Polyar korrelyasion funksiya.*

POPULYASİON GENETİKANIN EHTİMAL PAYLANMALARI « популяционной генетики распределения вероятностей; probability distribution of population genetics » – populyasiyaların genetik tərkibinin genetik quruluşunu və dinamikasını öyrənmək məqsədilə istifadə olunan ehtimal *paylanmalarıdır*.

Klassik genetikanın əsas konsepsiyası – gen – G. Mendel (G. Mendel) tərəfindən («konstant əlamət» adı ilə) müşahidə olunan varislik statistikasını izah etmək məqsədilə daxil olunmuşdur. Noxud bitkiləri ilə təcrübələrdə G. Mendel, məsələn, sarı (s.) və yaşıl (y.) rəngli noxudları calaşdırırdı. Birinci nəslin bütün varisləri sarı rəngli olmuşdu, lakin onların sonradan bir-birilə calaşmasından əlamətin parçalanması – s.:y. ≈ 3:1 nisbətilə yeni nəsil yaranırdı. İlkin sarı noxudlar bir-birilə calaşdıqda parçalanmırdılar, yaşıllar isə heç vaxt parçalanmırdılar (təmiz xətlər). G. Mendel fərz edirdi ki, iki qohum – A, a geni (alleal) mövcuddur və hər bir bitki ya Aa (*heteroziqot*) cütünün, ya AA və ya da aa (*homoziqotlar*) cütlərinin daşıyıcısıdır. Heç olmasa bir A-nın olması sarı rəngi verir, A-nın olmaması yaşıl rəngi verir (A – dominant allel, a – pessessiv allel adlanır). Valideynlər calaşdıqda varisə onların iki genindən biri $1/2$ ehtimalı ilə verilir. Müşahidə olunan mənzərə kommutativ cəbrə uyğun olur ki, burada vurma cədvəli aşağıdakı prinsiplə qurulur:

$$AA \times AA = AA,\ AA \times aa = Aa,$$

$$AA \times Aa = AA/2 + Aa/2,\ aa \times aa = aa,$$

$$aa \times Aa = aa/2 + Aa/2,$$

$$Aa \times Aa = AA/4 + aa/4 + Aa/2.$$

Araşdırmalarda statistik qanunauyğunluqlar bir-birilə çarpazlaşması mümkün olan orqanizmlərin olduqca böyük çoxluqlarında (təbii ki, eyni bioloji növ orqanizmlər nəzərdə tutulur) aşkar olunur. Belə çoxluqlar populyasiyalar adlanır. Populyasiyada çarpazlaşmanın müxtəlif sistemləri mümkündür. Bunlardan ən sadəsi panmiksiyadır, bu sistem tərəf – müqabillərin statistik asılı olmamazlığı ilə xarakterizə olunur. Panmiksiyadan tipik yayınmalar: inbridinq (qohumların üstünlüyü), assortiv çarpazlaşma (bu və ya digər fərdi əlamətlərə üstünlük) kimi yayınmalardır. Aşağıda əgər əksi söylənilməsə, fərz olunur ki, populyasiya panmiks və sonsuz populyasiyadır. Əgər populyasiyada hər hansı əlamət (fenotip) A, a allel genlər cütü ilə nəzarət olunursa və hər hansı nəsildə AA, aa, Aa genotipləri uyğun olaraq, x_1, x_2, x_3 ehtimalları ilə ifadə olunurlarsa, onda sonrakı nəsildə bu genotiplərin ehtimalları uyğun olaraq, $x'_1 = p^2$, $x'_2 = q^2$, $x'_3 = 2pq$ olacaqdır (burada $p = x_1 + x_3/2$, $q = x_2 + x_3/2$) və bu ehtimallar valideyn nəslində genlərin ehtimallarıdır (Hardi – Vaynberq qanunu). Genlərin qorunma qanunu: $p' = p$, $q' = q$ – qanununa əsasən, (p^2, q^2, $2pq$) paylanması sonrakı nəsillərdə dəyişməz qalır (stasionarlıq prinsipi). Fərz olunur ki, genlər məhv olmur və yaranmır, bir-birinə mutasiyalanmır və verilən əlamətə görə seçmə baş vermir. $p = x_1 + ax_3$, $q = x_2 + bx_3$ və α, β, γ, a, b parametrləri mənfi olmayan və $a + b = 1$, $\alpha + a\gamma = \beta + b\gamma = 1/2$ münasibətləri ilə təyin olunduqda,

$$x'_1 = p^2 + 2\alpha pq,\ x'_2 = q^2 + 2\beta pq,\ x'_3 = 2\gamma pq \qquad (1)$$

– stasionarlıq prinsipi doğru olan paylanma ailələrinə Hardi – Vaynberq qanunu tətbiq olunur.

(1) düsturları üçün genetik model vardır. Panmiksiyada bəzi pozulmalar da bu modellərə gətirir. Məs., $a = b = 1/2$, $\alpha = \beta = 1/2\,f$, $\gamma = 1 - f$ olduqda, əmsalı f-ə bərabər inbridinq üçün Rayt düsturları alınır.

Təbii seçmə, mutasiya və tədqiqat, populyasion genetikanı darvinizmlə birləşdirən klassik sintetik nəzəriyyəyə əsasən, evolyusiyanın əsas faktorlarıdır.

AA, aa, Aa genotipləri arasında selektiv fərqlər uyğunlaşma əmsalları λ_1, λ_2, λ_3 ilə xarakterizə olunurlar. Seçmə formal olaraq Beyes proseduru kimi təsvir olunur ki, burada «hipotezlər» varislərin genotiplərinə uyğundur. Bu hipotezlərin aprior ehtimalları p^2, q^2, $2pq$, aposterior ehtimalları isə

$$x_1' = \lambda_1 p^2/W\,,\ x_2' = \lambda_2 q^2/W\,,\ x_3' = 2\lambda_3 pq/W$$

bərabərlikləri ilə verilir, burada $W = \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + 2\lambda_3 pq$ – populyasiyanın orta uyğunlaşma kəmiyyətidir. Sonrakı nəsildə genlərin ehtimalları aşağıdakı Fişer tənlikləri ilə təsvir olunur:

$$p' = p(\lambda_1 p + \lambda_3 q)/W\,,\quad q' = q(\lambda_3 p + \lambda_2 q)/W \qquad (2)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ – selektiv neytral hal istisna olunduğu halda və $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ olduğu fərz olunduqda üç bərabərçəkili ($p' = p$, $q' = q$) paylanma alınır: $(0,1)$, $(1,0)$ – homoziqot və (p^*, q^*):

$$p^* = (\lambda_2 - \lambda_3)/(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)\,;$$

$$q^* = (\lambda_1 - \lambda_3)/(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)$$

– heteroziqot və ya polimorf paylanma, bu paylanma heteroziqotun hər iki homoziqotdan yaxşı uyğunlaşdığı, yəni $\lambda_3 > \max(\lambda_1, \lambda_2)$ (heterozis) şərtində və ya daha pis, yəni $\lambda_3 < \max(\lambda_1, \lambda_2)$ (dizrupsiya) şərtində mövcuddur. (p^*, q^*) bərabərçəkili polimorfizmi heterozis halında (və yalnız bu halda) (2) dinamik sistemi üçün dayanıqlıdır və onun trayektoriyaları [(2)-nin inikasının iterasiyaları] (p^*, q^*) polimorfizminə yığılır (stabilləşdirici seçim), bu şərtlə ki, əvvəldə $p > 0$, $q > 0$ olsun. Dizrupsiya halında hər bir trayektoriya [(p^*, q^*) bərabərçəkililiyindən fərqli] əvvəlki paylanmaya yaxın, homoziqot paylanmalardan birinə yığılır. Başqa hallarda daha çox uyğunlaşmış homoziqot paylanmaya yığılma olur (istiqamətlənmiş seçim, nəticəsi – allelin fiksasiyasıdır).

Seçim prosesində populyasiyanın orta uyğunlaşması artır (Fişer fundamental teoremi).

Əgər A geni a-da τ ehtimalı ilə mutasiya edirsə, tərs mutasiya isə hər bir nəsildə σ ehtimalı ilə baş verərsə və τ, σ olduqca kiçikdirlərsə (adətən, $\sigma << \tau << 1$), onda populyasiyada genotiplərin paylanması bərabərçəkili paylanmaya yaxınlaşır. Məs., $\sigma = 0$, $0 < \tau << 1$ və $\lambda_1 = \lambda_3 > \lambda$ olduqda (dominarlanma uyğunlaşmış A allelindən yaxşıdır) limitdə ressessiv allel ehtimalı $q^* \approx \sqrt{\tau(1-s)^{-1}}$ olan polimorfizm yaranır, burada $s = \lambda_2 \lambda_1^{-1}$ (Holdeyn düsturu).

Genetikanın inkişafı prosesində genin fenomonoloji konsepsiyası real məzmunla tədricən dolğunlaşdı. Müasir təsəvvürlərə əsasən, gen – punktuasion surətdə ayrılan və buna görə də, funksional ayrılan nuklein turşusunun xətti molekulunun bir sahəsidir DNK və RNK). Genin olması müəyyən zülalın (orqanizmə biokimyəvi reaksiyaların bu və ya digər zəncirini kataliz edən fermentin) sintezini təyin edir; bu isə orqanizmdəki əlamətlər çoxluğunun (tam fenotip) xarici mühitin qeyd olunmuş şərtlərində onun genlərinin toplusu (tam genotip) ilə təyin olunmaya xidmət edir. Tam genotip orqanizmin hər bir somatik (qeyri – cinsi) hüceyrəsinin nüvəsində ifadə olunur, bu zaman genlər xromosomlarda lokallaşır. Xromosomları formal olaraq, düzxətt parçaları kimi təsəvvür etmək olar ki, bu parçalar lokuslara – hissələrə bölünür ki, bunların hər biri qohum (allel) genlərin (bunların sayı ikidən çox ola bilər) ailəsindən biri ilə dolur. Verilən bioloji növ üçün morfoloji müxtəlif (qeyri – homoloji) xromosomların müəyyən haploid toplusu vardır. Homoloji xromosomlarda lokuslar müvafiq surətdə eyniləşdirilir, bundan sonra allel genlər bir lokusa aid hesab olunurlar. Ən sadə halda hər bir somatik hüceyrə (ziqot) diploid hüceyrə olur, yəni xromosomların iki haploid toplusunu özündə saxlayır, amma bu zaman cinsi hüceyrələr (qametlər) haploid hüceyrələrdir. Bu təbiidir, belə ki, bunlar ziqotlardan elə bölünmə yolu (meyoza) ilə alınır ki, bu halda iki homoloji xromosom digərlərindən asılı olmadan qiz qametlər üzrə ayrılırlar.

Bir xromosomda lokallaşmış genlər ilişikli genlər (rus. сцепленные) adlanır. Meyozda krossinqover baş verdikdə, yəni identik yerlərdə homoloji xromosomların parçalanması və sonra uyğun sahələrlə əvəzolunmu baş verdikdə ilişiklik pozula bilər. Məs., əgər bir xromosomda A, B genləri bir-birilə ilişiklidirlərsə, bu xromosoma homoloji xromosomda isə onların alleləri a, b ilişiklidirlərsə, onda verilən lokuslar arasında krossinqover baş verdikdə yeni bağlılıq, yəni Ab, aB yaranır, yəni rekombinasiya baş verir. Bu sadə krossinqoverdir. i yerdə eyni zamanda parçalanma baş verdikdə i–qat krossinqover baş vermişdir, deyilir. Əgər iki verilən lokuslar arasında i – qat krossinqover ehtimalı r_i-yə bərabərdirsə, onda rekombinasiya ehtimalı $r = \sum_{k=0}^{\infty} r_{2k+1}$ düsturu ilə təyin olunur. Əgər $r_0 \geq r_1 \geq r_2 \geq \ldots$ (r_0 heç bir krossinqoverin baş verməməsi ehtimalıdır), onda $r \leq 1/2$. Lokuslar arasında genetik məsafə $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} i r_i$ riyazi gözləməsi ilə ölçülür. Puasson paylanması üçün $r = (1 - e^{-2\lambda})/2$ (Holdeyn düsturu). $r = \operatorname{th} 2\lambda/2$ – Kosambi düsturu eksperimental verilənlərlə daha yaxşı uzlaşır. Bu düsturlardan genlərin xromosomlarda yerləşməsi təsvir olunan genetik kartların qurulmasında istifadə olunur.

Allel genlərdə təyin olunan əlamət sadə əlamət adlanır. Məs., noxudun rəngləri sadə diallel əlamətdir; I – IV qan qrupları sadə üçallel əlamətdir; rezus – faktor sadə səkkizallel əlamətdir. Poliallel situasiyada Hardi – Vaynberq qanunu $x_{ii}' = p_i^2$, $x_{ik}' = 2p_i p_k$, $i < k$ şəklində olur, burada p_i, – A_i geninin ehtimalıdır, x_{ik}, x_{ik}' – uyğun olaraq valideynlərin və nəsillərin $A_i A_k$ genotiplərinin ehtimallarıdır, $i \leq k$; $p_i = x_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{k \neq i} x_{ik}$,

$x_{ki} = x_{ik}$. Stasionarlıq prinsipi Hardi – Vaynberq qanunu üçün ödənildiyi kimi, hər hansı böyük həcmli paylanmalar ailəsi üçün də ödənilir. Bütün poliallel stasionar paylanmalar təsvir və genetik interpretasiya olunmuşlar. Bunlardan Bernşteynin kadril qanununu: $x_1' = p_1 q_1$, $x_2' = p_1 q_2$, $x_3' = p_2 q_1$, $x_4' = p_2 q_2$ bərabərliklərilə verilən qanunu qeyd etmək olar, burada $p_1 = x_1 + x_2$, $p_2 = x_3 + x_4$, $q_1 = x_1 + x_3$, $q_2 = x_2 + x_4$. Bu qanunun təbii interpretasiyası belədir: iki kişi geni A_1, A_2 və iki qadın geni B_1, B_2 vardır, hər bir ziqotun genotipi iki müxtəlif cinsli genlər ibarətdir.

Fişer tənlikləri – m sayda $A_1, \ldots, A_m$ allelləri olduğu halda – gen ehtimalları üçün

$$p_i' = p_i W_i / W, \quad 1 \le i \le m \qquad (3)$$

münasibətilə verilir, burada $W_i = \sum_k \lambda_{ik} p_k$, λ_{ik}, – $A_i A_k = A_k A_i$ genotipinin uyğunlaşma əmsalı, $W = \sum_i p_i W_i = \sum_{i,k} \lambda_{ik} p_i p_k$ – populyasiyanın orta uyğunlaşma kəmiyyətidir (W_i – bu altmövzuda A_i allelinin orta uyğunlaşma kəmiyyətidir). $p_i \ge 0$, $1 \le i \le m$, $\sum_i p_i = 1$ simpleksində bərabərçəkili ehtimalların çoxluğu E simpleksin bəzi müstəvilərlə kəsişmələrinin birləşməsidir. Bu çoxluq simpleksin bütün təpələrini özündə saxlayır (homoziqot paylanmaları). Əgər E sonlu çoxluq olarsa, onda $|E| \le 2^m - 1$ olur. Buna görə $\Lambda = \|\lambda_{ik}\|_{i,k=1}^m$ matrisində bütün baş minorların sıfırdan fərqli olması kafi şərtdir. Əgər bütün $p_i^* > 0$ olarsa, bərabərçəkili $(\rho_i^*)_1^m$ paylanması tam polimorfizm adlanır. Λ_i, $1 \le i \le m$, – Λ-dan i-ci sütunun vahidlərlə əvəz olunmasından alınan matris olsun. Əgər $\det \Lambda \ne 0$ olarsa,

$$p_i^* = \det \Lambda_i \Big/ \sum_k \det \Lambda_k, \quad 1 \le i \le m$$

düsturları ilə ifadə olunan paylanmalar, həqiqətən də, bərabərçəkili tam polimorfizmi, yalnız və yalnız, o halda təyin edirlər ki,

$$\operatorname{sign}(\det \Lambda_i) = \operatorname{sign}(\det \Lambda), \quad 1 \le i \le m \qquad (4)$$

münasibəti ödənilsin.

(3) inikası üçün

$$W' \ge W + \frac{3}{4\mu} \sigma^2$$

bərabərliyi ödənilir, burada $\mu = \max_{i,k} \lambda_{ik}$, σ^2 – allellərin orta uyğunlaşma kəmiyyətinin dispersiyasıdır, yəni

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m p_i (W_i - W)^2,$$

$W' > W$ bərabərsizliyi bərabərçəkili olmayan paylanmalar üçün ödənilir (fundamental teorem). (3) dinamik sisteminin hər bir trayektoriyası hər hansı bərabərçəkili paylanmaya ümumi halda $O(n^{-1/2})$ qiyməti ilə (n – nəsillərin sayıdır) və bəzi əlavə fərziyyələrlə eksponensial olaraq sürətlə yığılır. Əgər (4) şərti ödənilərsə, $\det \Lambda \ne 0$ və W kvadratik forması müsbət $\nu_t = 1$ indeksinə malikdirsə, onda simpleksin daxilindən başlayan bütün trayektoriyalar bərabərçəkili tam polimorfizmə eksponensial olaraq sürətlə yığılırlar.

Polilokus halda (yəni mürəkkəb əlamətlər üçün) yuxarıda təsvir olunan mexanizmlərə rekombinasiyalar əlavə olunur. $L = \{1, \ldots, l\}$ lokuslar çoxluğunda krossinqoverlərin statistikası ilişgilik paylanması ilə, yəni L çoxluğunun bütün mümkün ola bilən $U|V$ bölgülərinin çoxluğunda $r(U|V)$ ehtimal paylanması ilə formalaşır. Cüt-cüt asılı olmayan lokuslar halında bütün $U|V$ üçün $r(U|V) = (1/2)^{|L|-1}$ olur. Aşağıda fərz olunur ki, hər bir i, j lokuslar cütü üçün onları bir-birindən ayıran elə $U|V$ bölgüsü vardır ki, $r(U|V) > 0$ (sərt iliş-gilik lokuslarının yoxluğu).

Fərz olunur ki, i-ci lokusun alleli $a_1^i, \ldots, a_{m_i}^i$ ($m_i \ge 2$) ilə işarə olunmuşdur. Onda $m_1 \ldots m_l$, $g = \prod_{1 \le i \le l} a_{j_i}^i$, $1 \le j_i \le m$ qametləri vardır. Bütün qametlər çoxluğu üzərinə

$$\Delta(\Gamma) = \left\{ G \,|\, \sum_{g \in \Gamma} p(g)\, g(p(g) \ge 0,\ g \in \Gamma),\ \sum_{g \in \Gamma} p(g) = 1 \right\}$$

formal qabarıq kombinasiyaların simpleksi çəkilir, yəni Γ-də bütün ehtimal paylanmalarının çoxluğu $\Delta(\Gamma)$. Hər bir g qameti və hər bir $U|V$ bölgüsü üçün $g_U = \prod_{i \in U} a_{j_i}^i$, $g_V = \prod_{i \in V} q_{j_i}^i$ sub – qametləri təyin olunmuşdur. $g \mapsto g_U$, $g \mapsto g_V$ inikasları $\Delta(\Gamma)$-yə xəttiliyə görə davam olunurlar. Bu teoremlərlə rekombinasion proses

$$G' = r(L) G + \sum_{U|V \ne L} r(U|V)\, G_U \cdot G_V$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada $L \equiv L|\varnothing$.

Bərabərçəkili paylanmalar lokusların statistik asılı olmamazlıqları ilə (onların fiziki ilişkili olduğuna baxmayaraq), yəni

$$p(g) = \prod_{i=1}^m p(a_{j_i}^i),\ g \in \Gamma$$

münasibətlərilə xarakterizə olunurlar (a_j^i allelinin ehtimalı onu özündə saxlayan bütün qametlərin ehtimallarının cəmi kimi təyin olunur). Rekombinasion prosesin hər bir trayektoriyası uyğun bərabərçəkili vəziyyətə yığılır. Bu vəziyyət ilkin gen ehtimalları ilə təyin olunur, belə ki, bu ehtimallar prosesin gedişində dəyişməz qalır. Rekombinasion prosesdə paylanmanın entropiyası ciddi artır (H – teorem). Prosesin yığılma sürəti eksponensialdır.

Polilokus sisteminə seçim əməli uyğunlaşma əmsalları $\lambda(g, h) = \lambda(h, g)$, $g, h \in \Gamma$ ilə təyin olunur. g qametinin orta uyğunlaşma kəmiyyəti

$$W_g(p) = \sum_h \lambda(g, h)\, p(h)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bütün populyasiyanın orta uyğunlaşma kəmiyyəti:

$$W(p) = \sum_p p(g) W_g(p) = \sum_{g,h} \lambda(g, h)\, p(g)\, p(h),$$

dinamik tənliyin orta uyğunlaşma kəmiyyəti:

$$p'(g) = \frac{1}{W(p)} \left\{ p(g)\, W_g(p) + \sum_{U|V \neq L} r(U|V)\, D_{U|V;g}(p) \right\} \quad (5)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada

$$D_{U|V;g}(p) =$$
$$= \sum_h \{ \lambda(g_U h_V, h_U g_V)\, p(g_U h_V)\, p(h_U g_V) -$$
$$- \lambda(g, h)\, p(g)\, p(h) \}.$$

Əgər uyğunlaşma əmsalları

$$\lambda(k, g_U h_V) + \lambda(k, h_U g_V) = \lambda(k, g) + \lambda(k, h) \quad (6)$$

tənliyini ödəyərlərsə, onda fundamental teorem doğrudur. $W(p') \geq W(p)$ bərabərsizliyi doğrudur və bu bərabərsizlikdə bərabərlik yalnız (5)-ə daxil olan $p \mapsto p(g) \times$ $\times W_g(p) / W(p)$ Fişer çevirməsinə nəzərən bərabərçəkili paylanmalar üçün ödənilir. (6) tənliyini additiv seçim ödəyir: $\lambda(g, h) = \sum_i \lambda_i(g_i, h_i)$, burada g_i, h_i, – g, h qametlərində i-ci lokusun genləridir. Bu (6) tənliyinin rekombinasion invariantlıq tələbinə tabe, yəni $\lambda(g_U h_V, h_U g_V) = \lambda(g, h)$ şərtini ödəyən həllərinin ümumi şəklidir. Additiv seçimdə bütün trayektoriyalar fundamental teorem və H – teoremə əsasən Fişer bərabərçəkili paylanmalarının çoxluğunda yığılırlar.

Olduqca çox sayda asılı olmayan lokusların additiv əməli uyğunlaşma əmsalının normal paylanmasının formalaşmasına (limitdə) gətirir. Bu kəmiyyət əlamətinə misaldır (digər misallar: boy, çəki).

Yuxarıda fərz olunmuşdur ki, baxılan genlər cinsi differensiasiya ilə ilişgili deyildirlər (autosomdurlar). Həqiqətən də, ziqotdakı xromosomlar arasında iki cinsi xromosom vardır, məhz dişi – iki X – xromosomu və erkəklərdə X – xromosomu Y – xromosomu ilə kombinasiyada. Cinsi lokuslarda rekombinasion prosesin dinamikası autosom haldakı kimi olur, keyfiyyətcə seçim əməli yalnız bircə diallel X – lokus üçün araşdırılmışdır.

Real populyasiyalar sonlu və çox da böyük olmurlar. Bunların evolyusiyasını öyrəndikdə gen tezliklərinin təsadüfi fluktuasiyalarını (gen dreyfini) nəzərə almaq, yəni təsadüfi proseslər nəzəriyyəsini istifadə etmək zəruridir. Autosom lokusun ən sadə iki A, a alleli modelində fərz olunur ki: 1) populyasiya haploid populyasiyadır: onun obyektlərinin sayı bütün nəsillərdə N-ə bərabərdir; 2) hər bir individin genofondu sonsuzdur və bu genofond tərkibində ehtimalları verilmiş nəsildəki allellərin sayına mütənasib olan allelləri saxlayır. Onda növbəti nəsildə a geninin k ekzemplyar olması ehtimalı əvvəlki nəsildə onların j sayda olduğu şərtilə

$$p_{kj} = C_N^k (j/N)^k (1 - j/N)^{N-k},\ 0 \leq k,\ j \leq N$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bu Markov zənciridir və onun yalnız iki uducu: $k = 0$ və $k = N$ vəziyyətləri vardır. Bu halda j ilkin vəziyyəti məlum olduqda, $k = 0$ və $k = N$ vəziyyətləri üçün populyasiya limit ehtimalları $1 - j/N$ və j/N ilə homozitliyə (daha dəqiq homogenliyə) yaxınlaşır. Yığılma sürəti eksponensialdır və $\| p_{kj} \|_{k,j=1}^{N-1}$ matrisinin spektral radiusu ilə təyin olunur. Bu radius $1 - 1/N$-ə bərabərdir; ümumiyyətlə isə, bu matrisin spektri $\lambda_{N,k} = N^{-k} A_N^k$, $2 \leq k \leq N$ Feller düsturu ilə təyin olunur. $N \to \infty$ olduqda limit diffuzion modeldə j/N diskret təsadüfi kəmiyyəti qiymətləri $[0, 1]$-dən olan kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlə əvəz olunur və alınmış bu model ehtimal sıxlığı $\varphi(x, t)$ üçün Kolmoqorov (Fokker – Plank) tənliyi ilə təsvir olunur:

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ x(1-x)\, \varphi(x,t) \} \quad (7)$$

(zaman vahidi – bir nəslin orta yaşama müddətidir – doğumundan reproduksiyaya qədər). (7)-dən $\varphi(x, t; y)$ sıxlıq funksiyası üçün ilkin paylanmanın $\delta(x - y)$ olduğu halında Kimura düsturu adlandırılan aşağıdakı düstur alınır:

$$\varphi(x, t; y) = y(1-y) \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(2m+1) \times$$

$$\times F(1-m, m+2, 2, y) F(1-m, m+2, 2, x) \exp(-m(m+1)t/2N)$$

burada F – hiperhəndəsi funksiyadır.

Gen dreyfi sonlu populyasiyalarda bərabərçəkili ehtimalların təsadüfi variasiyalarına gətirir. a allelinin bərabərçəkili ehtimalının paylanma sıxlığı üçün ümumi Rayt düsturu aşağıdakı şəkildədir.

$$\theta(q) = \frac{C}{q(1-q)} \exp\left(2N \int \frac{\Delta q}{q(1-q)}\, dq \right),\ C = \text{const}, \quad (8)$$

burada Δq – sistematik meyl ehtimalıdır (seçim əməli, mutasiya və s. nəticəsində yaranan), N – haploid populyasiyasında obyektlərin sayıdır. Məs., yalnız seçim aparılmışdırsa, onda

$$\Delta q = \frac{q(1-q)}{2W} \frac{dW}{dq}$$

olur və (8)-dən

$$\theta(q) = CW^N / q(1-q)$$

düsturu alınır. $[0, 1]$ parçasında θ funksiyasının inteqrallanmadığı – (8) düsturunun $q_k = k/N$, $1 \leq k \leq N - 1$ ehtimallarlı faktiki diskret paylanmanın $N \to \infty$ olduqda kontinual approksimasiyası olduğu səbəbindəndir. $q = 0;\ 1$ kənar qiymətləri istisnadır, belə ki, burada heterogen vəziyyətlər üçün şərti paylanmalara baxılır.

Xalis mutasiya posesi üçün $\Delta q = \tau(1-q) - \sigma q$ və

$$\theta(q) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)}\ q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}$$

olur, burada $\alpha = 2N\tau$, $\beta = 2N\sigma$, $B(\alpha, \beta)$ – beta – funksiyadır.

Mutasiya və seçimin birlikdə təsiri halında hesab etmək olar ki, bu faktorların sistematik təsirləri toplanır və uyğun olaraq,

$$\theta(q) = CW^N q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}$$

olur (dağılma effekti homogenliyə yaxınlaşmanın qarşısını alan mutasion proseslə aradan qaldırılır).

20-ci əsrin 60-cı illərində M. Kimura tərəfindən irəli sürülmüş evolyusiyanın neytralist nəzəriyyəsi (molekulyar səviyyədə) gen dreyfinin təyinedici roluna əsaslanmışdır, nəticədə populyasiyada çoxsaylı selektiv neytral mutasiyaların fiksasiyası baş verir: bir dəfə yaranmış selektiv neytral mutant allel bütün populyasiya üzrə $1/N$ ehtimalı ilə yayılır. Əgər bu allel vəhşi allel üzərində selektiv üstünlüyə malik olarsa, onda onun fiksasiya ehtimalı $1/N$ -dən böyük olur. M. Kimuranın təklif etdiyi bu növ modellərdən birində fiksasiya ehtimalı aşağıdakı şəkildədir:

$$\frac{1}{N}\left\{\int_0^1 \exp\left(-B_1 x + B_2 x(1-x)\right) dx\right\}^{-1},$$

burada $B_1 = 2N\beta_1$, $B_2 = 2N\beta_2$ kostantlardır, β_1, β_2 seçimin intensivliyindən asılıdırlar.

Yeganə bir mutantın talei *şaxələnən proseslər* nəzəriyyəsi metodları ilə öyrənilə bilinər. Məs., klassik *Qalton – Vatson prosesini* sonsuz haploid populyasiyasında mutantların yayılma prosesi kimi interpretasiya etmək olar. Əgər $\{p_k\}_0^\infty$ mutant individin varisləri sayının paylanması, $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ bu paylanmanın doğuran funksiyası olarsa, onda n -ci nəsildə varislər sayının paylanması $P(z)$ -in n -ci iterasiyası $P_n(z) = P(P_{n-1}(z))$ düsturu ilə təyin olunur. Əgər varislər sayının riyazi gözləməsi $\bar{k} = P'(1) \le 1$ olarsa, onda mutant əyrisi öləziyir, yəni şaxələnən proses cırlaşır. Əgər $\bar{k} > 1$ olarsa, onda cırlaşma ehtimalı $\zeta = P(\zeta)$ tənliyinin $(0,1)$ -dən olan yeganə kökünə bərabərdir. ζ_n, – n -ci nəsildən gec olmayaraq cırlaşma ehtimalı $\zeta_n = P(\zeta_{n-1})$, $\zeta_0 = 0$ iterasiyalar ilə təyin olunur və bu ehtimallar ζ -ya yığılırlar ($\bar{k} < 1$ olduqda eksponensial, $\bar{k} = 1$ olduqda isə üstlü sürətlə). Çox da böyük olmayan selektiv üstünlüyə malik mutant üçün varislər sayının paylanması $\bar{k} > 1$ parametrli Puasson paylanması ilə yaxşı approksimasiya olunur; bu halda $\zeta = \exp(\bar{k}(\zeta - 1))$.

Əd.: [1] К и м у р а М., Молекулярная эволюция: теория нейтральности, пер. с англ., М., 1985; [2] Л и Ч., Введение в популяционную генетику; [3] Л ю б и ч Ю. И., Математические структуры в популяционной генетике, К., 1983; [4] М о р а н П., Статистические процессы эволюционной теории, пер. с англ., М., 1973.

POTENSİAL « потенциал; potential » – bax, *Markov semi – qrupu*, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zənciri üçün.

α – POTENSİAL «α – потенциал; α – potential » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

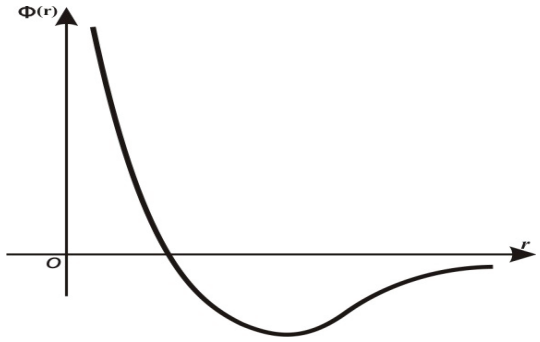
POTENSİAL(ı) Gibbs meydanının « **потенциал** гиббсовского поля; Gibbsian field **potential** » – *Gibbs paylanmasını* və *Gibbs təsadüfi meydanının* keçid ehtimallarını vermək üçün istifadə olunan parametrlər toplusudur. Bu zaman fərz olunarsa ki, meydanın qiymətlərinin ölçülən fəzası (X, D) və hesabi T çoxluğu (əksər hallarda $T = \mathbb{Z}^d$, – d – ölçülü tamqiymətli şəbəkədir) verilmişdir, bu halda şəbəkəvari sistemin P.-ı x_A -nın $(x_A \in X^{(A)})$ ölçülən həqiqiqiymətli funksiyalarının $U = \{U_A(x_A),\ A \subset T,\ |A| < \infty\}$ sistemi kimi təyin olunur. Bəzən $U_A(x_A)$ P.-nın ∞ qiyməti alması da mümkün sayılır. Adətən, baxılan P.-lar sinfinin üzərinə qoyulan tələb P.-ın hər hansı Banax fəzasına mənsub olmasından ibarət olur. Məs., $T = \mathbb{Z}^d$ olduqda, $\|U\| = \sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A:\, t \in A} \sup_{x_A} |U_A(x_A)|$ norması və ya $\alpha > 0$ olduqda $\|U\|_\alpha = \sup_{t \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A:\, t \in A} e^{\alpha |A|} \sup_{x_A} |U_A(x_A)|$ norması daxil olunur, burada $|A|$, – A çoxluğunun gücüdür. Bir çox hallarda $\mathbb{Z}^d$ -də yerinidəyişmələr qrupuna nəzərən P.-ın invariant olması tələbi də daxil olunur. Əgər $\operatorname{diam} A > r$ olduqda $U_A \equiv 0$ olarsa, P. qarşılıqlıtəsir radiusu $r < \infty$ olan finit potensialı adlanır.

Verilən P.-a uyğun Gibbs təsadüfi meydanları sinfini DLR – *şərti* ilə fərqləndirmək qəbul edilmişdir. Bu halda P.-ın statistik mexanikaya tətbiqi çərçivəsində P. potensial enerji fiziki mənasını daşıyır. Kvant meydan nəzəriyyəsində P. sistemin loqranjianıdır.

Bir çox hallarda U P.-nın doğurduğu, həqiqi $\beta > 0$ parametrindən asılı $U_\beta = \{\beta U_A,\ A \subset T\}$ P.-lar ailəsinə baxılır. Statistik mexanikaya tətbiqlərdə β parametri temperatura tərs kəmiyyətdir. Əgər X fəzası sonlu olarsa və bu fəzada elə $\theta \in X$ xüsusi elementi seçilərsə ki, hər hansı $t \in A$ qiymətində əgər $x_A = (x_t, t \in A)$ və $x_t = 0$ olarsa, $U_A(x_A) = 0$ olsun, onda mühüm P.-lar ailəsi yaranır. $\mu_x,\ x \in X \setminus \{\theta\}$ həqiqi parametrlər olarsa, burada təbii olaraq $U_{\{t\}}(x) = -\mu_x$ götürərək, yeni əmələ gəlmiş U_μ P.-lar ailəsinə baxılmalıdır, bu ailə isə $\mu = (\mu_x, x \in X \setminus \{\theta\})$ vektor parametrindən asılıdır. Fiziki interpretasiyada bu şəbəkəvari qaza uyğundur, $x_t = \theta$ hadisəsi isə t nöqtəsində hissəciyin olmaması kimi interpretasiya olunur. μ_x -in qiyməti x tipli hissəciyin kimyəvi potensialı adlanır.

Nöqtəvi Gibbs meydanına $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında baxdıqda P. – bütün sonlu $A \subset \mathbb{R}^d$ altçoxluqlarında təyin olunmuş $U = \{U(A)\}$ ölçülən funksiyası kimi təyin olunur. Bu halda, yenə də $U_\beta = \{\beta U(A)\}$ və U_μ şəklində P.-lar ailəsinə baxılır ki, burada əgər $|A| \ge 2$ olarsa, $U_\mu = U(A)$, $|A| = 1$ olduqda isə $U_\mu(A) = -\mu$; bu P.-lar β tərs temperaturundan və kimyəvi μ (skalyar) potensialından asılı olur. Bəzən cüt P.-dan istifadə

olunur, yəni $U(A)$ potensialı elə olur ki, $|A| \neq 2$ olduqda $U(A) = 0$ olur. Bu P.-ın eyni zamanda translyasion invariant və izotrop olduğu fərz olunarsa, onda bu P. $r \in (0, \infty)$ funksiyası olan elə $\Phi(r)$ funksiyası ilə verilir ki, $U(\{t_1, t_2\}) = \Phi(|t_1 - t_2|)$. Bu hala misal $\Phi(r) = k_1 r^{-12} - k_2 r^{-6}$, $k_1, k_2 > 0$ şəklində Lenard–Conson potensialıdır ki, bu P.-dan biratomlu qazların model təsvirində istifadə olunur ($d = 3$). Şəkildə belə P.-ın qrafiki təsvir olunmuşdur və o, P.-ın qarşılıqlı təsirinin tipik cəhətlərini əks etdirir. Əyrinin azalmaqda olan hissəsi kiçik məsafələrdə hissəciklərin itələnməsinə, artmaqda olan hissəsi isə böyük məsafələrdə cazibəyə uyğundur.



İtələmə qüvvəsi $r \to 0$ olduqda ∞-a, cazibə qüvvəsi $r \to \infty$ olduqda 0-a yaxınlaşır.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 201–29; 1970, т. 15, в. 3, с. 469–97; [2] Добрушин Р. Л., «Функц. анализ и ее прилож», 1968, т. 2, № 4, с. 31–43; [3] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [4] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [5] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [6] Preston Ch., Random fields, B. – [a. o.], 1976; [7] Ruelle D., Thermodynamic formalism, Reading (Mass.), 1978.

POTENSİAL martinqallar nəzəriyyəsində **« потенциал** в теории мартингалов; **potential** in martingale theory **»** – $t \to \infty$ olduqda $\mathbf{M} X_t \to 0$ (həm də sanki yəqin $X_t \to 0$) şərtini ödəyən, mənfi olmayan $(X_t)_{t \geq 0}$ *supermartinqalıdır*. $(A_t)_{t \geq 0}$, – $\mathbf{M} A_\infty < \infty$ şərtini ödəyən artan proses, $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ – ilkin ehtimal fəzasında σ – cəbrlərin azalmayan ailəsi olsun. $Z_t = \mathbf{M}[A_\infty - A_t | \mathcal{A}_t]$ olan $(Z_t)_{t \geq 0}$ prosesi A prosesinin doğurduğu potensial (uyğun olaraq, $Z_t = \mathbf{M}[A_\infty - A_{-t} | \mathcal{A}_t]$ olan $(Z_t)_{t \geq 0}$ A prosesinin doğurduğu sol potensial) adlanır. Hər bir P. üçün onu doğuran yeganə artan öngörül proses vardır (bax, *Dub – Meyer ayrılışı*). Martinqallar nəzəriyyəsi və harmonik funksiyalar nəzəriyyəsi arasında müəyyən bir analogiya mövcuddur. Belə ki, supermartinqallara superharmonik funksiyalar, martinqallara harmonik funksiyalar uyğun olur (məs., əgər f Laplas operatoruna cavab verən harmonik funksiya, $(w_t)_{t \geq 0}$ Viner prosesidirsə, onda $(f(w_t))_{t \geq 0}$ martinqaldır), potensiallara müsbət ölçülər üçün Qrin potensialları uyğundur (bax, *Riss ayrılışı*).

Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilites et potentiel. Theorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80.

POTENSİAL ƏNGƏLƏDAYANIQLILIQ « потенциальная помехоустойчивость; potential noise immunity » – rabitə *kanalı* ilə küylərlə ötürülən məlumatın qəbulunda minimal mümkün ola bilən təhriflərdir. Məs., asılı olmayan additiv $n(t)$ bəyaz küyü olan kanal üzrə $a(t)$ məlumatı ötürüldükdə, qəbul olunmuş siqnal $r(t) = S(t, a(t)) + n(t)$, $t \in [0, T]$ şəklində olur, burada $S(t, a)$, – t və a arqumentlərinin məlum funksiyasıdır. Qəbuledicinin P. ə.-nın tapılması $r(s)$, $s \in [0, T]$ müşahidələri üzrə $a(t)$ üçün ən yaxşı statistik qiymət $\hat{a}(t)$-nin riskinin hesablanmasına ekvivalentdir. İtki funksiyasının seçilməsi ötürülmənin konkret şərtlərindən olduqca asılı ola bilər. Hər hansı sonlu çoxluğun elementləri olan məlumatların ötürülməsində statistik qiymətin riski, bir qayda olaraq, xətanın maksimal və ya orta ehtimalı ilə ölçülür. Digər hallarda, məs., $a(t)$ məlumatı stasionar proses olduğu halda risk, adətən, kvadratik itki funksiyası halında hesablanılır.

Əd.: [1] Котельников В. А., Теория потенциальной помехоустойчивости, М. – Л., 1956.

POTENSİAL FUNKSİYASI « потенциальная функция; potential function » – əlamət fəzası $\mathbb{R}^n$-də nöqtələrlə verilən obyektlər arasında oxşarlığı ölçmək üçün, təsnifat məsələlərində istifadə olunan funksiyadır. P. f. iki nöqtənin müsbət funksiyası $K(x, z)$-dir və bu iki nöqtə arasındakı məsafə $\rho(x, z)$ sonsuzluğa yaxınlaşdıqda, o, sıfra yaxınlaşır.

Təsnif metodu P. f.-dan istifadəyə əsaslanır və metod potensial funksiyalar metodu adlandırılmışdır. Bu metodun məğzi aşağıdakı fiziki analogiyaya əsaslanır. x_k-nın seçimi obrazları ilə ifadə olunan iki A və B siniflərini ayırmaq tələb olunur. Əgər seçimi obrazlar enerji mənbələri kimi təsəvvür olunarsa, onda x_k nöqtələrinin ixtiyari birində potensial maksimal qiymətinə çatır və sonra x_k-dan aralı ixtiyari nöqtəyə keçiddə azalır. Bu analogiyaya əsaslanaraq, P. f. $K(x, x_k)$-nı təsvir edən ekvipotensial konturların varlığını qəbul etmək olar. Hesab etmək olar ki, A sinfinə daxil olan seçimi obrazların əmələ gətirdiyi klaster zirvələrində A sinfinə aid olan x_k seçimi obrazları yerləşən «dağ yaylası» əmələ gətirir. B sinfinin seçimi obrazları üçün analoji mülahizələr aparmaq olar. Bu iki «yayla» «dərə (vadi)» ilə elə bölünür ki, burada potensial sıfra yaxındır. Bu intuitiv səbəblərə əsaslanan həlledici qayda aşağıdakı kimidir. Əgər

$$\sum_{x_k \in A} K(x, x_k) > \sum_{x_k \in B} K(x, x_k)$$

olarsa, $x \in A$ hipotezi, əks halda $x \in B$ hipotezi qəbul olunur.

Əd.: [1] Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, М., 1970.

POTENSİAL NƏZƏRİYYƏSİ Markov prosesi üçün **« потенциала теория** для марковского процесса; **potential theory** for a Markov process **»** – klassik potensial nəzəriyyəsinin və onun kəsilməz zamanlı Markov prosesləri nəzəriyyəsinin çərçivəsində inkişaf etmiş müasir variantının ehtimali analoqudur (müqayisə et, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov zənciri üçün). Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və potensial nəzəriyyəsinin kəsişməsi

ilə bağlı məsələlərin sistematik müzakirəsi C. Dubun [1]-dəki məqaləsi ilə təməli qoyularaq, bu sahədə bir seriya işlərlə başlanmışdır və qeyd olunan məqalə Braun hərəkəti və onun fəza – zaman analoqu ilə əlaqədar bir sıra problemlərə həsr olunmuşdur (bax, [2]). C. Hant [3]-də Markov proseslərinin geniş bir ailəsini seçib ayırmışdır; bu proseslər sonradan *Hant prosesləri* adlandırılmışdır və bunların hər biri *ekssessiv funksiyalar* sinfi ilə bağlıdır ki, bunlar özünü bir çox cəhətlərinə görə superharmonik funksiyalara oxşar surətdə aparır. Məhz buna görə də, ümumi ehtimal P. n.-ni yaratmaq mümkün olmuşdur. Bu nəzəriyyə əsasında maksimumun tam prinsipilə əlaqəli analitik nəzəriyyənin anlayış və problemləri kompleksinə yeni anlam verilmişdir (bax, aşağı).

[3]-də istifadə olunan texniki vasitələr arasında bu və ya digər çoxluqlara ilk çatım anlarının açıq çoxluqlar və kompaktlara çatım anları ilə approksimasiyası haqqında teoremlər mühüm yer tutur. K. Şi (C. Shih, 1970) bu teoremlərin münasib əvəzləmələrini tapdıqdan sonra, C. Hantın bir çox nəticələrini Markov proseslərinin olduqca daha geniş siniflərinə keçirmək mümkün olmuşdur (bax, [9]). Digər tərəfdən, nəzəriyyənin yeni mühüm aspektlərini inkişaf etdirmək mümkün olmuşdur (bax, [5], [7], [15], [16]), bir sıra hallarda isə ümumi təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində faydalı analoqları tapmaq müyəssər olunmuşdur. P. n. bununla hiss olunacaq tərzdə udmuşdur, belə ki, ehtimali yanaşma bu nəzəriyyənin əsas atributlarından çoxuna yeni nöqteyi – nəzərə səbəb olaraq, nəzəri – potensial xarakterli yeni konsepsiyaların yenidən işlənilməsinə gətirmişdir (bax, [4]).

P. n.-nin müxtəlif istiqamətləri arasında ekssessiv funksiyalar və ölçülər nəzəriyyəsinə, sərhəd nəzəriyyəsi məsələlərindən Dirixle məsələsi və Martin sərhədi kimi məsələlərə, tutum enerji və bəzi digər anlayışların ehtimali izahına, nəhayət, bu və ya digər Markov proseslərinin potensial nüvəsinin təsvirinə həsr olunmuş istiqamətləri qeyd etmək olar. Markov prosesləri nəzəriyyəsi ilə Dirixle klassik inteqralı nəzəriyyəsini əlaqələndirən Dirixle formaları nəzəriyyəsini də bu istiqamətə aid etmək olar (bax, *Markov prosesi* Dirixle forması). Ehtimali P. n. ilə Markov proseslərinin additiv funksionallar nəzəriyyəsinin bir sıra aspektləri qovuşur (bax, *Markov prosesi*; additiv funksional). Qeyri – bircins Markov prosesləri ilə uzlaşan P. n. üzrə tədqiqatlar vardır (bax, [12]).

Ekssessiv funksiyalar. Müzakirə olunan nəzəriyyədə ekssessiv funksiya anlayışı mərkəzi yer tutur. E – hər hansı metriklənə bilinən kompaktda Borel çoxluğu, $\mathscr{B}(\mathscr{B}^*)$ – onun Borel altçoxluqlarının çoxluğu (uyğun olaraq, universal ölçülən altçoxluqların, yəni $\mathscr{B}$-də hər bir sonlu ölçü üzrə $\mathscr{B}$-nin tamamlayıcısına daxil olan) olsun. $(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında keçid funksiyası $p(t, x, dy)$ olan, qırılan sağ $X = (X_t, \zeta, A_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ Markov prosesi qeyd oluna bilər. Əgər $f: E \to [0, \infty]$ funksiyası universal ölçülən və bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $e^{-\alpha t}\mathbf{P}_t f \leq f$ və $\lim\limits_{t \downarrow 0} \mathbf{P}_t f = f$ şərtlərini ödəyərsə, $\alpha \geq 0$, f funksiyası X prosesi üçün α – ekssessiv funksiya adlanır, burada

$$\mathbf{P}_t f(\cdot) = \int_E f(y)\, p(t, \cdot, dy)$$

[$\alpha = 0$ olduqda, «α – ekssessiv funksiya», «α – potensial» əvəzinə «ekssessiv funksiya», «potensial» terminləri istifadə olunur (bax, aşağı)]. α – ekssessiv funksiyalar çoxluğu S_α ilə işarə olunur.

Misallar. 1) Ekssessiv funksiyaya mühüm misallardan biri $\Gamma \in \mathscr{B}$ çoxluğunun bərabərçəkili potensialı $\pi_\Gamma(x)$, $x \in E$ ilə, ya da, nadir olmayan hallarda, daha ümumi çoxluğun $t = 0$ anından sonra Γ çoxluğuna haçansa çatım ehtimalı $\mathbf{P}_x$ – ehtimalına bərabər götürülən bərabər potensialla alındığı haldır.

2) İxtiyari $\Gamma \in \mathscr{B}^*$ çoxluğu üçün

$$r_\alpha(\cdot, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, \cdot, \Gamma)\, dt$$

Funksiyası α – ekssessiv funksiyadır, $r_0(x, \Gamma)$, $x \in E$, $X_0 = x$ olduqda prosesin Γ çoxluğunda olduğu müddətin orta qiyməti ilə üst-üstə düşür. $r_\alpha(x, \Gamma)$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathscr{B}^*$ funksiyası potensialların α – nüvəsi və ya Qrin α – ölçüsü adlanır. Hər bir B^* – ölçülən $g \geq 0$ funksiyasının α – potensialı –

$$R_\alpha g(\cdot) = \int_E g(y) r_\alpha(\cdot, dy)$$

S_α-ya daxildir. Bu faktı ümumiləşdirərək, qeyd etmək olar ki, X-in ixtiyari $A = A(t) \geq 0$ additiv funksionalının α – potensialı $\mathbf{M}_x \int_0^\zeta e^{-\alpha t} dA_t$ də α – ekssessiv funksiyadır.

3) Elə hallar olur ki, ixtiyari $x \in E$ üçün $r_\alpha(x, \cdot)$ ölçüsü $\mathscr{B}$-də hər hansı σ – sonlu m ölçüsünə nəzərən elə $\rho_\alpha(x, \cdot)$ sıxlığına malik olur ki: a) $\rho_\alpha(\cdot, \cdot)$ funksiyası $\mathscr{B}^* \times \mathscr{B}^*$ fəzasına nəzərən ölçülən olur, b) bütün $y \in E$ üçün $\rho_\alpha(\cdot, y) \in S_\alpha$ və c) ixtiyari $x \in E$ qiymətində $(E, \mathscr{B})$-də hər hansı sağ Markov prosesi $\hat{X}$ üçün $\rho_\alpha(x, \cdot)$ α – ekssessiv funksiyadır (bu şərt haqqında *Dual Markov prosesi* məqaləsinə bax). Onda $\rho_\alpha(\cdot, \cdot)$ funksiyası Qrin α – funksiyası adlanır. Bu halda $\mathscr{B}$-də verilmiş ixtiyari σ – sonlu μ ölçüsünün α – potensialı –

$$R_\alpha \mu(\cdot) = \int_E \rho_\alpha(\cdot, y)\, \mu(dy)$$

S_α-ya daxildir.

4) Yuxarıda daxil olunmuş anlayışların yaxşı məlum olan proobrazları vardır. Məs., əgər X standart n – ölçülü Braun hərəkəti olarsa ($n \geq 3$) və bu proses E-nin hər hansı n – ölçülü oblastından ilk çıxış anında qırılan proses olarsa, onda ekssessiv funksiyalar sinfi $f \equiv \infty$ funksiyası ilə tamamlanmış, E-də superharmonik funksiyalar sinfinə identik olur və E-də sanki yəqin sonlu ölçü potensialları məhz adi Qrin potensialları olur (bax, [2]).

Ekssessiv funksiyalar (yalnız qısalıq üçün $\alpha = 0$ halı götürülür) bir çox faydalı xüsusiyyətlərə malikdirlər, bunlardan əksəriyyəti ilk dəfə [3]-də Hant prosesi halı üçün isbat olunmuşdur (bax, [5] – [7]), sonradan bu xassələr sağ Markov prosesləri üçün də isbat edilmişdir (bax, [9]). Belə ki, a) iki ekssessiv funksiyanın minimumu ekssessiv funksiyadır, b) S_0 sinfi özünün

elementlərinin azalmayan ardıcıllıqları üzrə limitə keçidə nəzərən qapalı sinifdir, c) əgər bütün $x \in E$ üçün $t \to \infty$ olduqda $p(t, x, E) \to 0$ olarsa, onda hər bir $f \in S_0$ funksiyası bəzi mənfi olmayan funksiyaların potensiallarının azalmayan ardıcıllığının limiti kimi ifadə olunur. Ekssessiv funksiyanın tərifindəki $\mathscr{B}^*$ – ölçülənlik xassəsinin faydalı dəqiqləşməsini almaq olur: ixtiyari $f \in S_0$ funksiyası sanki Borel funksiyası, yəni prosesin ixtiyari ilkin paylanması verilərsə və f_1 və f_2 Borel funksiyalarının münasib seçildiyi halında $f_1 \le f \le f_2$ olur və $0 \le t \le \zeta$ olduqda $f_1(X_t) \equiv f_2(X_t)$ münasibəti sanki yəqin ödənilir.

X prosesinin trayektoriyaları boyunca ekssessiv funksiyaların özlərini aparmalarında ümumi cəhətlər aşağıdakı kimi təsvir olunur. Prosesin başlanğıc paylanması ixtiyari və $f \in S_0$ olarsa, $\zeta \le t < \infty$ olduqda, 0 qiymətilə tamamlanmış $f(X_t)$ təsadüfi funksiyası hər hansı σ – cəbrlər axınına nəzərən sağdan kəsilməz (sanki yəqin) supermartinqaldır. Buradan, xüsusi halda, verilmiş prosesin doğurduğu və H. Kartan (H. Cartan, bax, [2]) incə topologiyasının analoqu olan incə və ya təbii $\mathscr{T}$ topologiyasında ixtiyari ekssessiv funksiyaların kəsilməzliyi alınır. Bu halda $A \subset E$ çoxluğu $\mathscr{T}$ topologiyasına o halda və hər dəfə elə aid olunur ki, hər bir $x \in A$-ya elə $\Gamma \in \mathscr{B}$ qarşı qoymaq mümkün olsun ki, $x \in \Gamma \subset A$ və $\tau_{E \setminus \Gamma} > 0$ münasibətləri $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilsin; burada

$$\tau_{E \setminus \Gamma} = \inf \{ t > 0 : X_t \in E \setminus \Gamma \}$$

– Γ-dən ilk çıxış anı və $E \setminus \Gamma$ çoxluğuna başlanğıc anından sonra ilk çatım anıdır (burada $\inf \varnothing = \zeta$).

S_0 konusunun strukturunun öyrənilməsi istiqamətində mühüm səylər göstərilmişdir, məsələn, S_0-ın elementlərinin onun kənar elementləri üzrə inteqral ayrılışlarının varlığı və yeganəliyinin müəyyənləşdirilməsi istiqamətində (əgər $f_1, f_2 \in S_0$ üçün $f_1 + f_2 = f$ münasibəti yalnız $f_i = c_i f$ halında $c_i,\ i = 1,2$ sabitlər olduqda ödənilərsə, f – ekssessiv funksiyası kənar və ya minimal ekssessiv funksiya adlanır). Oxşar problematika bir tərəfdən Martin sərhədləri nəzəriyyəsinə, digər tərəfdən qabarıq konuslar nəzəriyyəsinə qovuşur. Ən tamamlanmış nəticələr [8]-də şərh olunmuşdur.

α – ekssessiv funksiyalarla yanaşı α – ekssessiv ölçülərdən ($\alpha \ge 0$) də çox istifadə olunur. α – ekssessiv ölçülər adı $\mathscr{B}$-də və $\mathscr{B}^*$-da verilən ixtiyari σ – sonlu μ ölçüsünə də aid edilir, lakin bu o halda edilir ki, əgər $t \ge 0$ olduqda $e^{-\alpha t} \mu \mathbf{P}_t \le \mu$ və $t \downarrow 0$ olduqda $\mu \mathbf{P}_t \to \mu$ münasibətləri ödənilsin, burada

$$\mu \mathbf{P}_t(\cdot) = \int_E p(t, x, \cdot)\, \mu(dx)$$

($\alpha = 0$ olduqda terminologiya ekssessiv funksiyalar halındakı kimi sadələşir). $\alpha > 0$ və $x \in E$ qeyd olunduqda, $r_\alpha(x, \cdot)$ Qrin α – ölçüləri α – ekssessiv olur, eynilə də, bunu $\mathscr{B}$ və $\mathscr{B}^*$-da ixtiyari

$$\nu R_\alpha(\cdot) = \int_E r_\alpha(x, \cdot)\, \nu(dx)$$

ölçüsünün α – potensialı haqqında da hökm etmək olar, əgər νR_α ölçüsü σ – sonlu olarsa. Ekssessiv ölçülər nəzəriyyəsi bəzi cəhətlərinə görə ekssessiv funksiyalar nəzəriyyəsindən sadədir və bəzi hallarda hətta daha faydalıdır (bax, [3], [6]).

Harmonik ortalama operatorları. Analitik potensial nəzəriyyəsində harmonik ölçülərə görkəmli yer ayrılır (bax, [2]), belə ki, Markov prosesləri ilə əlaqədar işlərdə bu ölçülərin rolu bu prosesin τ anında paylanması

$$\pi_U(x, dy) = \mathbf{P}_x(X_\tau \in dy), \quad x \in E$$

üzərinə düşür, burada $\tau = \tau_{E \setminus U}$ – prosesin $U \subset E$ çoxluğundan ilk çıxış anıdır. Bu zaman U hər hansı olduqca zəngin çoxluqlar ailəsindən seçilir, qeyd olunan paylanmalar ya $\mathscr{B}$ σ – cəbrində və ya onun hər hansı genişlənmiş formasında verilir.

Sadəlik üçün bundan sonra X-in separabel lokal kompakt E Hausdorf fəzasında standart Markov prosesi olduğu, $\mathscr{B}$-nin E fəzasının Borel çoxluqlarının sinfi olduğu fərz olunur. E-nin bütün açıq altçoxluqları və onların kompakt qapayıcılarının ailəsi $\mathfrak{A}$ ilə işarə olunur. Sanki Borel lokal aşağıdan məhdud f funksiyaları sinfində harmonik ortalama operatorları Π_U aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\Pi_U f(x) = \mathbf{M}_x \{ f(X_\tau);\ \tau < \zeta \} = \int_E f(y)\, \pi_U(x, dy), \quad (1)$$

burada $U \in \mathfrak{A}$, $x \in E$. Bu operatorlar vasitəsilə ekssessivlik və klassik superharmoniklik anlayışları arasındakı ideya bağlılığı daha aydın nəzərə çarpır: qeyd olunan tip $f \ge 0$ funksiyası, yalnız və yalnız, o halda ekssessiv funksiyadır ki, o, incə kəsilməz olsun (yəni incə topologiyada kəsilməz olsun) və bütün $U \in \mathfrak{A}$ üçün $\Pi_U f \le f$ bərabərsizliyi ödənilsin (bax, [5]). Burada $\mathfrak{A}$ sinfi bütün mümkün olan kompaktların tamamlayıcılarının çoxluğu ilə əvəz oluna bilinər (bax, [5]). Oxşar nəticələrin lokal variantları və bəzi modifikasiyaları vardır (bax, [3]).

Əgər $V \subset E$ açıq çoxluğunda sanki Borel lokal məhdud f funksiyası incə kəsilməz olarsa və bu çoxluğun bütün $U \in \mathfrak{A}$ altçoxluqları üçün V-də $\Pi_U f = f$ ödənilərsə, f, – V çoxluğunda X üçün harmonik funksiya adlanır (əgər X kəsilməz prosesdirsə, f-in V-dən kənarda verilməsi məcbur deyildir; onu da nəzərə almaq lazımdır ki, Markov zənciri və $V = E$ olduğu halda analoji tərif başqa cürdür) (bax, *Harmonik funksiya*). Harmonik funksiyalar üçün bir qədər zəif məhdudiyyətlərdə Harnak bərabərsizliyi tipli nəticələr və klassik harmonik funksiyaların kompaktlıq xassələri haqqında teoremlərin nəticələri dəyişmir (bax, [11]). Əgər X hər hansı şərtləri ödəyirsə, məs., Qrin funksiyasının varlığını təmin edən şərti ödəyirsə, onda ekssessiv funksiyaların geniş sinfindən olan hər bir funksiyanın yeganə Riss ayrılışı vardır, yəni harmonik funksiyanın və hər hansı ölçünün potensialının cəmi şəklində ayrılışı vardır (bax, [6]).

Stoxastik Dirixle məsələsi. 1923-də H. Fillips (H. Phillips) və N. Vinerin (N. Wiener) işlərilə klassik Dirixle məsələsi və onun ümumiləşmələrinin həllinə ehtimali yanaşmaların tətbiqi başlandı. Qeyd etmək lazımdır ki, C. Dubun işlərinə qədər yalnız S. Kakutaninin (S. Kakutani) işləri istisna olunmaqla, 1944–45-ci illərdə Dirixle məsələsinin həlli məsələnin diskret variantlarının

həllərinin limiti kimi ifadə olunurdu və bunlara baxılarkən münasib Markov zəncirləri istifadə olunurdu.

Dirixle məsələsinin müasir ehtimali izahı [1]-də verilmişdir (bax, həmçinin [2], [5]-ə). Fərz olunur ki, X – kəsilməz standart Markov prosesi, $U \subset E$ sərhədi ∂U olan açıq çoxluqdur və bu çoxluqda hər hansı φ funksiyası verilmişdir. Əgər $f(x),\ x \in U$ funksiyası U çoxluğunda X üçün harmonikdirsə və əgər ixtiyari $x \in U$ üçün

$$\lim_{t \uparrow \tau} f(X_t) = \varphi(X_\tau) \qquad (2)$$

münasibəti $\{\tau < \zeta\}$ çoxluğunda P_x – sanki yəqin ödənilərsə, tərifə görə $f(x)$ funksiyası sərhəd funksiyası φ olan stoxastik Dirixle məsələsinin həllidir, burada $\tau = \tau_{E \setminus U}$. Əgər φ məhdud və Borel funksiyası olarsa, onda qoyulan məsələnin yeganə məhdud həlli $f = \Pi_U \varphi$ funksiyası olacaqdır, burada (1)-ə analoji olaraq,

$$\Pi_U \varphi(x) = \int_{\partial U} f(y) \pi_U(x,\ dy),\ x \in U$$

götürülmüşdür.

Belə bir sual qoymaq olar: hansı şərtlər ödənilməlidir ki, göstərilən f həlli (2) şərtinin klassik variantını ödəsin:

$$\lim_{x \in U,\, x \to y} f(x) = \varphi(y),\quad y \in \partial U \qquad (3)$$

Aydın olmuşdur ki, güclü Feller proseslərinin geniş sinfi üçün (3) şərti hər dəfə φ funksiyası y nöqtəsində kəsilməz olduğu halda reallaşır, bu nöqtənin özü isə $E \setminus U$ çoxluğunun requlyar nöqtəsidir (yəni $\mathbf{P}_y \{\tau = 0\} = 1$).

Bu konteksdə «Dirixle məsələsi» ifadəsinin işlədilməsi ona əsaslanır ki, diffuzion proseslərin geniş sinfi üçün $U \subset E = \mathbb{R}^n$ çoxluğunda baxılan $f = \Pi_U \varphi$ həlli $Lf = 0$ tənliyini ödəyir, burada L – prosesin doğuran differensial operatorudur, baxmayaraq ki, (3) şərti klassik nəzəriyyədə verildiyi kimidir (bax, *Ehtimali həlli*, *differensial tənliklərin*). Qeyd etmək lazımdır ki, sərhəd nöqtəsinin requlyar olması tələbi əksər hallarda onun klassik oxşarı ilə eynigüclü olur (bax, [5]).

Stoxastik Dirixle məsələsinin həllərinin qurulması üçün çox yayılmış metodların, məs., təmizləmə metodunun (rus. метод выметания) münasib modifikasiyaları istifadə oluna bilər (bax, [2]). Bu halda təmizlənmə halı haqqında Hant teoremindən istifadə etmək məqsədəuyğundur (bax, [3], [6]), ən yeni variant isə [9]-da şərh olunmuşdur.

Stoxastik Dirixle məsələsinin uyğun variantına Martin sərhəd nəzəriyyəsi çərçivəsində baxılır.

Potensialın ehtimali nəzəriyyəsinin tərs məsələləri. Ehtimali P. n.-nin tətbiqi sərhədləri ilə maraqlanan analitik aşağıdakı sualları qoya bilər.

$(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasının standart Markov prosesinin ödədiyi şərtlərin ödənildiyi fərz olunur və fərz olunur ki, $(E, \mathscr{B})$-də hər hansı $r(x, dy)$ nüvəsi verilmişdir [$r(x, \Gamma),\ x \in E,\ \Gamma \in \mathscr{B}$ funksiyası birinci arqumentinə görə $\mathscr{B}$ – ölçülən, ikinci arqumentinə görə isə $\mathscr{B}$-də σ – sonlu ölçü olarsa, $r(x, \Gamma)$ $(E, \mathscr{B})$-də nüvə adlanır]. $r(x, dy)$ funksiyası hansı şərtlərlə hər hansı Markov prosesinin potensiallarının nüvəsi ola bilər? İkinci sual: həmin E fəzasında təyin olunmuş mənfi olmayan funksiyaların hər hansı γ ailəsi hər hansı Markov prosesinin ekssessiv funksiyalarının çoxluğu ola bilərmi? Aydındır ki, burada fərz olunur ki, $f \equiv 1$, γ-ya daxildir.

Birinci suala cavab aşağıdakı kimi verilmişdir (bax, [3]). C_0, – ∞-da sıfra çevrilən, E-də kəsilməz funksiyaların Banax fəzası, $f \in C_0$ funksiyasının norması $\|f\| = \sup_E |f|$, C_K – belə funksiyaların kompakt daşıyıcılarla birlikdə çoxluğu olsun. Fərz olunur ki, R operatoru hər bir $f \in C_K$ funksiyasına

$$Rf(\cdot) = \int_E f(y)\, r(\cdot,\ dy) \in C_0$$

funksiyasını qarşı qoyur və $R(C_K)$ C_0-da sıxdır. Fərz olunur ki, maksimumun tam prinsipi ödənilir, yəni: əgər $a \geq 0$ həmişə ödənilərsə, $f, g \in C_K$ mənfi olmayan funksiyalardırsa və g daşıyıcısında $a + Rf \geq Rg$ olarsa, onda bu sonuncu bərabərlik E-də hər yerdə doğrudur. Onda $r(x, dy)$ nüvəsi hər hansı Hant prosesinin potensiallarının nüvəsidir. Bu nəticənin ümumiləşmələri vardır (bax, [14]).

İkinci məsələ ilə P.–A. Meyerdən (P.–A. Meyer, 1963) başlayaraq bir sıra alimlər də məşğul olmuşlar. Harmonik fəzalar nəzəriyyəsi dilində bu məsələnin cavabını belə ifadə etmək olar: əgər E olduqca yaxşı harmonik fəza strukturuna malik olarsa, γ ailəsi isə bu fəzada hiperharmonik mənfi olmayan funksiyaların konusu olarsa, onda γ hər hansı standart prosesin ekssessiv funksiyaları toplusu ilə üst-üstə düşür (bax, [17]).

Bax, *Markov prosesi*; enerji.

Əd.: [1] Doob J. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 77, p. 86–121; [2] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – Hdlb. – B., 1984; [3] Hunt G. A., «Ill. J. Math.», 1957, v. 1, № 1, p. 44–93; № 3, p. 316–69; 1958, v. 2, № 2, p. 151–213, рус. пер. – Хант Д ж. А., Марковские процессы и потенциалы, M., 1962; [4] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilities et potentiel. Theorie discéte du potentiel, P., 1983; [5] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, M., 1963; [6] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968; [7] Meyer P.-A., Processus de Markov, N. Y., 1967; [8] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, M., 1982, с.37–178; [9] Getoor R. K., Markov processes. Ray processes and right processes, B., 1975; [10] Fukushima M., Dirichlet forms and Markov processes, Amst. – Oxf. – N. Y., 1980; [11] Шур М. Г., «Матем. заметки», 1973, т. 13, в. 4, с. 587–96; [12] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 267–91; [13] Watanabe T., «Proc. Japan. Acad.», 1962, v. 38, № 8, p. 397–407; [14] Taylor J. C., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 2, p. 355–57; [15] Chung K. L., Rao M., «Ann. Inst. Fourier», 1980, t. 30, № 3, p. 167–98; [16] Pop-Stojanovic Z. R., Rao M., «Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhus univ.», 1983–84, № 29; [17] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B. – Hdlb. – N. Y., 1972.

POTENSİAL NƏZƏRİYYƏSİ Markov zənciri üçün **«потенциала теория** для цепи Маркова; **potential theory** for a Markov chain **»** – aksiomatik və klassik potensial nəzəriyyəsinin ehtimali analoqudur. Başlanğıcı J. Deninin əsas etibarilə analitik xarakterli işləri seriyası (bax, məs., [1]) və C. Dubun bir ehtimali araşdırması ilə qoyulmuşdur (bax, [2]). Ehtimali P. n.-nin əsas anlayışları və nəticələrinin çox yaxşı məlum klassik proobrazları vardır

(bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün). Hər hansı $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında n addıma keçid ehtimalı $p(n, x, \Gamma)$ olan $X = (X_n, \mathbf{P}_x)$ bircins Markov zənciri verilir (burada və hər yerdə x və Γ uyğun olaraq, $\mathscr{E}$ və $\mathscr{B}$ -dəndirlər; «funksiya» isə $\mathscr{E}$ -nin $(-\infty, \infty]$ -a $\mathscr{B}$ – ölçülən inikası anlaşılır). Bu Markov zəncirinin potensiallarının nüvəsi

$$R(x, \Gamma) = \mathbf{1}_\Gamma(x) + \sum_{n \geq 1} p(n, x, \Gamma) \qquad (*)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $\mathbf{1}_\Gamma$, – Γ çoxluğunun funksiya – indikatorudur, $\mathbf{1}_\Gamma$ -nin məxsusi funksiya olduğu fərz olunur, bu isə onu ifadə edir ki, $R(\cdot, E_n)$ funksiyalarının məhdud olduqlarını təmin edən və birləşməsi $\mathscr{E}$ -ni verən $E_1, E_2, \ldots$ çoxluqları vardır.

Bununla da, bu nəzəriyyənin əsas obyektlərinin və elementlərinin aparatı *ekssessiv funksiyaların* olduqca zəngin ailəsi müəyyənləşir. İxtiyari $f \geq 0$ funksiyasının potensialı

$$Rf(\cdot) = \int_{\mathscr{E}} f(y)\, R(\cdot, dy)$$

ekssessiv funksiyasıdır və hər bir ekssessiv funksiya mənfi olmayan funksiyaların məhdud potensiallarının hər hansı azalmayan ardıcıllığının limitidir.

Xüsusi maraq doğuran bu və ya digər Γ çoxluğunun bərabərçəkili potensialı adlanan π_Γ potensialıdır, burada $\pi_\Gamma(x)$, $x \in E$ – bu çoxluğa nə vaxtsa çatılacağının $\mathbf{P}_x$ – ehtimalına bərabər götürülür (terminologiya mükəmməl deyildir: π_Γ – hər hansı bir funksiyanın potensialı olmaya da bilər).

Klassik potensial nəzəriyyəsinin çoxsaylı prinsiplərinin modifikasiyaları doğrudur (bax, [4], [5]). Məs., ixtiyari $f \geq 0$ funksiyaları, $h \geq 0$ və $a \geq 0$ konstantı üçün $A = \{x : f(x) > 0\}$ çoxluğunda $a + Rh \geq Rf$ bərabərsizliyinin ödənilməsindən bu bərabərsizliyin hər yerdə ödənilməsi alınır (maksimumun tam prinsipi). Əgər f ixtiyari işarəli olarsa, lakin $R[\min(f, 0)] > -\infty$ və $\{x : Rf(x) > 0\}$ boş olmayan çoxluq olarsa, onda $\sup\{Rf(x) : x \in \mathscr{E}\} = \sup\{Rf(x) : x \in A\}$ olur (müsbət maksimum prinsipi).

Tədqiqatların əsas istiqamətləri ekssessiv ölçülərin öyrənilməsi, qayıdışlı, məs., Harris qayıdışlı zəncirlər üçün bu nəzəriyyənin variantının qurulması ilə bağlıdır (bax, [5]). Müəyyən Markov zənciri üçün (*) şəklində ifadə oluna bilinən nüvələrin təsvirləri vardır (bax, [5]). Hesabi Markov zəncirləri üçün nəzəriyyə daha sadə olur (bax, [6]).

Markov zəncirləri üçün P. n. diskret P. n.-nin xüsusi bir fəslidir (bax, [4]), burada yalnız ümumi şəkilli nüvələrə deyil, daha mürəkkəb strukturlu obyektlərə («qumar evləri» kimi) baxılır.

Əd.: [1] Deny J., «Ann. Inst. Fourier», 1952, t. 3, p. 73–101; [2] Doob J. L., «J. Math. Mech.», 1959, v. 8, № 3, p. 433–58; [3] Мейер П.-А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., M., 1973; [4] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilités et potentiel. Théorie discrète du potentiel, des martingales, t. 1–2, P., 1975–80; [5]Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., M., 1997; [6] Ханнекен П. Л., Тортра А., Теория вероятностей и некоторые ее приложения, пер. с франц., M., 1974.

POYA HESABLAMA NƏZƏRİYYƏSİ « Пойа теория перечислений; Polya theory of enumeration » – bax, *Kombinator analiz.*

POYA PAYLANMASI « Пойа распределение; Polya distribution » – tam $k = 0, 1, \ldots, n$ qiymətlərini uyğun

$$p_k = \mathbf{P}\{X_n = k\} = C_n^k \times$$

$$\times \frac{b(b+c)\ldots(b+(k-1)c)\, r(r+c)\ldots(r+(n-k-1)c)}{(b+r)(b+r+c)\ldots(b+r+(n-1)c)} \quad (1)$$

ehtimalları ilə alan X_n təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal *paylanmasıdır*, burada $n > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $c \geq -1$ tam ədədlərdir; $n > 0$ tam ədəd, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\gamma > 0$ olduqda aşağıdakı düstur (1)-ə ekvivalentdir:

$$p_k = \mathbf{P}\{X_n = k\} =$$

$$= C_n^k \frac{p(p+\gamma)\ldots(p+(k-1)\gamma)\, q(q+\gamma)\ldots(q+(n-k-1)\gamma)}{(1+\gamma)\ldots(1+(n-1)\gamma)} =$$

$$= C^k_{(p/\gamma)+k-1}\, C^{n-k}_{(q/\gamma)+n-k-1} \Big/ C^n_{(p/\gamma)+n-1}. \qquad (2)$$

(1) və (2) arasında əlaqə $p = b/(b+r)$, $q = r/(b+r)$ bərabərlikləri ilə alınır. P. p.-nın riyazi gözləməsi np , dispersiyası $npq\,\dfrac{1+\gamma n}{1+\gamma}$ -dir. P. p.-nın xüsusi halları – X_n $c = 0$ olduqda p və n parametrlərli binomial paylanma qanununa, $c = -1$ olduqda, $M = b$, $N = b + r$ və n parametrlərli hiperhəndəsi paylanma qanununa tabedir. $p = b/(b+r)$ sabit olduqda, $\gamma = c/(b+r) \to 0$ münasibəti ödənildikdə $b, r \to \infty$ olduğu halda P. p. parametrləri n və p olan binomial paylanmaya yaxınlaşır.

P. p.-na urn sxemi adlanan sxemlə bağlı C. Poya (G. Polya, 1923) tərəfindən baxılmışdır. İçərisində b sayda qara və r sayda qırmızı kürəcik olan urndan (qutudan) çıxarılmış ixtiyari kürəcik qaytarmaq şərtilə sxemi üzrə yenidən urna, lakin çıxarılmış kürəcik rəngli, c sayda kürəciklə bilikdə qaytarılır. Əgər n həcmli seçimdə bütün qara kürəciklərin sayı X_n olarsa, onda X_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanması (1) və ya (2) düsturları ilə verilir. X_n , $n = 1, 2, \ldots$ ardıcıllığı diskret Markov zənciridir, bu prosesin vəziyyətləri n anında seçimdəki qara kürəciklərin sayı ilə, n anında k vəziyyətindən $n+1$ anında $k+1$ vəziyyətinə şərti keçid ehtimalı isə n -dən asılı olub,

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k\} = (b + kc)/(b + r + nc) =$$

$$= (p + k\gamma)/(1 + n\gamma)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Poya urn sxemindən limitə keçid ilə Poya prosesini – kəsilməz zamanlı «xalis artım» (rus. процесс «чистого размножения») prosesləri sinifindən olan qeyri – bircins Markov prosesini almaq olur. Sonsuz kiçik Δt müddəti ərzində yalnız bir kürəcik çıxarılması mümkünlüyü şərtilə, $n \to \infty$ olduqda $np \to t$, $n\gamma \to \alpha t$ olarsa, Δt müddəti ərzində k vəziyyətindən $k+1$ vəziyyətinə keçidin limit şərti keçid ehtimalı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\mathbf{P}\{X(t+\Delta t)=k+1 \mid X(t)=k\}=\frac{1+\alpha k}{1+\alpha t}\Delta t + o(\Delta t).$$

Poya urn sxemindən Poya prosesinə keçdikdə P. p.-nın mühüm limit forması alınır. Bu halda k vəziyyətində t anında olma ehtimalı $p_k(t)$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$p_k = C^n_{(1/\alpha)+n-1}\left(\frac{\alpha t}{1+\alpha t}\right)^n\left(\frac{1}{1+\alpha t}\right)^{1/\alpha},\ p_0(0)=1.$$

Alınan limit paylanması parametrləri $1/\alpha$ və $1/(1+\alpha t)$ olan [uyğun riyazi gözləməsi t-yə bərabər, dispersiyası isə $t(1+\alpha t)$ olan] *mənfi binomial paylanmadır.*

Urn modeli və Poya prosesindən uyğun olaraq P. p. və onun limit forması alınır və bunlar keçmişin təsirlilik effektinə malik modellərdir (müəyyən rəngli kürəciyin çıxarılması sonrakı sınaqda bu rəngli kürəciyin çıxması ehtimalını çoxaldır).

α parametri sıfra yaxınlaşdıqda Poya prosesi Puasson prosesinə çevrilir və P. p.-nın limiti t parametrli Puasson paylanması olur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

POYA TEOREMİ « Пойа теорема; Polya theorem » – bax, *Kombinator analiz.*

POYA TEOREMİ qeyri–məhdud təsadüfi dolaşmalar üçün **« Пойа теорема** для неограниченных случайных блужданий; **Polya theorem** for unbounded random walks **»** – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma.*

POZULMA ANI « разладки момент; change point » – bax, *Aşkarlanma məsələsi*, *pozulmanın.*

PREDİKTANT « предиктант; predictant » – statistik proqnozda (xüsusi halda, hava haqqında proqnozda) öngörül kəmiyyətdir. Prediktant miqdar dəyişəni, yəni skalyar meteoroloji kəmiyyət (məs., havanın temperaturu, atmosferin təzyiqi), bir çox halda miqdar kəmiyyətlərinin qradiasiyası kimi ortaya çıxan qaydalı dəyişən (məs., havanın buludluluq balı, Bofort meteoroloji şkalası üzrə külək sürətinin balı və ya havanın orta aylıq temperaturunun *iqlim normalarından* yayınması) və ya təsnifləyici dəyişən (məs., hava ilə əlaqədar hər hansı bir əlamətin olması və ya olmaması, havanın bu və ya digər təsnifata görə növü və s.) ola bilər. P. kimi qaydalı və ya iki mümkün qiymətdən birini alan təsnifat kəmiyyəti götürülərsə, uyğun proqnoz havanın *alternativ meteoroloji proqnozu* adlanır.

PREDİKTOR « предиктор; predictor » – statistik proqnoz (xüsusi halda, hava haqqında statistik proqnoz) üçün istifadə olunan məlum kəmiyyətdir. Meteorologiyada P. komponentləri bir sıra meteoroloji kəmiyyətlər olan çoxölçülü vektor kimi anlaşılır (məs., meteoroloji zaman sıralarının qiymətləri və ya müxtəlif fəza – zaman nöqtələrində meteoroloji sahələrin qiymətləri). P. olan vektorun komponentləri havanın dəyişəcəyinə səbəb olan faktorlar haqqında fiziki mülahizələrə əsasən seçilir (bu komponentlər arasında qaydalı, miqdar və təsnifat kəmiyyətləri də ola bilər; bax, *Prediktant*). Bu vektorun dim. – ölçüsü verilənlərin statistik analizi prosesində *mühüm prediktorların seçilməsi* yolu ilə kiçildilə bilinər.

PREDİKTORLARIN ƏN YAXŞI ALTÇOXLUĞUNUN SEÇİLMƏSİ « наилучшего подмножества предикторов выбор; best predictor subset selection » – reqressiya funksiyasının proqnozunu yaxşılaşdırmaq məqsədilə ölçmə nəticələri üzrə xətti *reqression eksperimentin* reqressiya funksiyasının dim. – ölçüsünün azaldılması üçün evristik qaydalar toplusudur. Prediktorların sayının artıq olması proqnozun dispersiyasının artmasına prediktorların sayının az olması proqnozun dəyişməsinə səbəb olur.

Bütün reqressiyalar metodu – xüsusi qaydalardan istifadə edərək kompüter yaddaşının qənaətlə istifadəsini təmin edən, kvadratların ən kiçik qalıq cəmi ilə verilmiş gücə malik prediktorlar altçoxluğunun sürətləndirilmiş axtarışıdır. Altçoxluqların hissəvi axtarışı metodları arasında ardıcıl daxiletmə və xaricetmə metodları və həmçinin bunların bəzi kombinasiyaları ayırd olunur. Misallar vardır ki, bu metodlardan hər biri ən yaxşı altçoxluğu seçə bilmir.

Prediktorların nizamlanmış çoxluğu halında P. ə. y. a. s. üçün bir sıra metodlar mövcuddur (məs., polinomial reqressiyada). Seçmə yalnız $\{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\},...$ prediktorların nömrələrinin çoxluqları arasında həyata keçirilir, belə ki, hissəvi araşdırılan altçoxluqların sayı 2^N-dən N-ə qədər azalır (N – altçoxluğun maksimal mümkün olabilən həcmidir, $N \le n$, n – seçmənin həcmidir). $\{1, 2, ..., p_n\}$ nömrəli prediktorlar çoxluğu seçilir, burada $p_n = \arg\min\limits_{p=1,2,...,N} J_p$ (J_p – hər hansı kriteridir). Əsas etibarilə aşağıdakı kriterilərdən istifadə olunur:

$$J_p = \frac{RSS_p}{\hat{\sigma}^2} + 2p \ (C_p - \text{Mellous kriterisi})$$

$$J_p = RSS_p(n+p)/(n-p) \ (\text{FPE} - \text{kriteri})$$

$$J_p = RSS_p \exp(2p/n) \ (\text{Akaike informasion kriterisi, AİC}).$$

Burada RSS_p – ilk p prediktorları model üçün kvadratların qalıq cəmi, $\hat{\sigma}^2$ – xətaları dispersiyasının statistik qiymətidir.

Müəyyən şərtlər ödənildikdə $J_p = RSS_p(1+\nu(p/n))$ şəklində kriterilərli P. ə. y. a. s. metodları üçün proqnozun kvadratik orta xətalarının asimptotik ekvivalentliyi ödənilir, burada $\nu(t)$, $t>0$ elə funksiyalardır ki, $t\to 0$ olduqda $\nu(t)/2t \to 1$ münasibəti ödənilir (bax, [2]). Bu metodlar C_p – Mellous kriterisinə əsaslanan metodu və öncədən söylənilmiş (fərz olunan) kvadratlar cəminin p üzrə minimizasiyasından ibarət olan kross – yoxlama metoduna asimptotik ekvivalentdirlər.

Əd.: [1] С е б е р Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] П о л я к Б. Т., Ц ы б а к о в А. Б., « Докл. АН СССР », 1989, т. 304, № 2, с. 297 – 301.

PREFİKS ÇOXLUQ « префиксное множество; prefix set » – bax, *Qeyri – müntəzəm kod.*

PRİNSİPİAL TAY « главный двойник; principal alias » – bax, *Tezliklərin üst-üstə yüklənməsi / tezliklərin dəyişdirilməsi / elayzinq.*

PRİORİTET « приоритет; priority » – bax, *Xidmət sistemi.*

PRİORİTETLİ SİSTEM « приоритетная система; priority queue » – bax, *Xidmət sistemi.*

PRODAKT – VƏZİYYƏT « продакт – состояние; product – state » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

PROXOROV KRİTERİSİ « Прохорова критерий; Prokhorov criterion » – nisbi kompaktlıq kriterisidir, tamamilə requlyar topoloji fəzada verilən *Radon ölçüləri*

ailəsinin Proxorov teoremidir (dar topologiyada). Bu nəticənin ehtimal nəzəriyyəsində və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində çoxsaylı tətbiqləri vardır. X – ixtiyari tamamilə requlyar topoloji fəza, $C_b(X)$, – X-də təyin olunmuş, həqiqi məhdud kəsilməz bütün mümkün olan funksiyalar çoxluğu, $M_b(X)$ – sonlu tam variasiyaya malik, X-də verilmiş, həqiqi, dəyişənişarəli bütün mümkün olan Radon ölçüləri çoxluğu olsun.

$$(f,\ \mu) \to \int f(x)\, d\mu(x), \quad f \in C_b(X), \quad \mu \in M_b(X)$$

standart bixətti forması $C_b(X)$ və $M_b(X)$ vektor fəzaları arasında ikilik xassəsi təyin edir. $M_b(X)$ fəzasında qeyd olunan ikilik xassəsilə uzlaşan zəif topologiya $M_b(X)$-də dar yığılma topologiyası (və ya dar topologiya) adlanır. $M_b^+(X)$ simvolu ilə $M_b(X)$-dən olan müsbət ölçülərin qapalı qabarıq konusu işarə olunur.

H, – $M_b(X)$-in hər hansı altçoxluğu olsun. Əgər:

a) $\sup\limits_{\mu \in H} |\mu|(X) < +\infty$,

b) ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $K_\varepsilon \subset X$ kompaktı tapılar ki, ixtiyari $\mu \in H$ ölçüsü üçün $|\mu|(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir, – münasibətləri ödənilərsə, H çoxluğu Proxorov şərtini ödəyir, deyilir.

P. k. aşağıdakı üç müddəanın konyuksiyasıdır:

1) əgər X tamamilə requlyar topoloji fəza, H isə $M_b(X)$-in Proxorov şərtini ödəyən altçoxluğudursa, onda H dar topologiyada nisbi kompakt çoxluqdur;

2) əgər X lokal kompakt topoloji fəza, H isə $M_b^+(X)$-in dar topologiyada nisbi kompakt altçoxluğudursa, onda H çoxluğu Proxorov şərtini ödəyir;

3) əgər X tam separabel metrik fəzadırsa, H isə $M_b^+(X)$-in dar topologiyada nisbi kompakt altçoxluğudursa, onda H çoxluğu Proxorov şərtini ödəyir.

Bax, *Yığılma(sı) paylanmaların*.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах…, пер. с франц., М., 1977.

PROXOROV METRİKASI « Прохорова метрика; Prokhorov metric » – bax, *Levi – Proxorov metrikası*.

PROXOROV ŞƏRTİ « Прохорова условие; Prokhorov condition » – bax, *Proxorov kriterisi*, *Proyektiv sistemləri*, *ölçülərin*.

PROXOROV TEOREMİ təsadüfi proseslər üçün **« Прохорова теорема** для случайных процессов; **Prokhorov theorem** for stochastic processes **»** – təsadüfi proseslərin doğurduğu paylanmalar üçün *ehtimal ölçüləri* ailəsinin zəif nisbi kompaktlığının Proxorov kriterisidir. Kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0,1]$-də və ikinci növ kəsilmə nöqtələri olmayan funksiyalar fəzası $D[0,1]$-də (bax, [1]) 2-ci növ kəsilmə nöqtələri olmayan, qiymətləri metrik fəzada verilən proseslər üçün (bax, [2]) paylanmaların yığılmasının zəruri və kafi şərtləri alınmışdır. Bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün, *Proxorov kriterisi*.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–237; [2] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теории случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [4] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

PROQNOZLAMANIN BRAUN METODU « прогнозирования метод Брауна; Brown's method of forecasting / prediction » – bax, *Braun proqnozlanma metodu*.

PROQNOZLANMASI, TƏSADÜFİ PROSESLƏRİN « прогнозирование случайных процессов; forecasting / prediction of random processes » – bax, *Təsadüfi proses*; proqnozla(n)ma, ekstrapolyasiya.

PROQNOZU, HAVANIN ehtimali **« прогноз погоды** вероятностный; probabilistic **weather forecast »** – bax, *Ehtimali proqnozu*, *havanın*; keyfiyyətin statistik qiyməti.

PROQNOZU, HAVANIN kateqorik **« прогноз погоды** категорический; categorical **weather forecast »** – bax, *Kateqorik hava proqnozu.*

PROQNOZU, HAVANIN; keyfiyyətin statistik qiyməti **« прогноз погоды;** оценка качества; **weather forecast evaluation; skille score »** – hər hansı Y *prediktantının* öngörül qiyməti $\hat{Y}$-in təyin olunması üçün müşahidələrin alınmış qiymətlərindən istifadə edən hava proqnozunun praktiki dəyərliliyinin keyfiyyət statistik qiymətidir (ölçüsüdür). Keyfiyyət statistik qiymətinin hər bir forması Y prediktantının y qiymətinə və $\hat{Y}$ proqnozunun $\hat{y}$ qiymətinə hər hansı $U(y, \hat{y})$ ədədini qarşı qoyan U funksiyasıdır. Adətən, fərz olunur ki, Y və $\hat{Y}$ təsadüfi vektorlardır və tətbiq olunan proqnoz metodunun toplam keyfiyyət statistik qiyməti kimi (seçimi orta kimi qiymətləndirilən) $\overline{U} = \mathbf{M}(U(y, \hat{y}))$ riyazi gözləməsindən istifadə olunur. Bir dəfə üçün olunmuş $U(y, \hat{y})$ proqnozunun keyfiyyət statistik qiyməti prediktantın qiymətləri və onun proqnoz qiymətlərinin oxşarlığını xarakterizə edir, H. p.-nun keyfiyyət statistik qiymətinin orta qiyməti isə müşahidə olunan prediktantların və uyğun proqnozların statistik asılılığının yaxınlıq ölçüsünü ifadə edir. *Havanın statistik proqnozları* üçün keyfiyyətin orta statistik qiymətlərinin mühüm əhəmiyyəti vardır, çünki, proqnoz metodunun optimizasiyası bu qiymətlərdən asılıdır.

H. p.-nun keyfiyyət statistik qiymətinin konkret forması seçildiyi zaman müəyyən istehlakçıların tələbləri nəzərə alınmalı və proqnozların istifadəsindəki effekt (məs., iqtisadi effekt) hesaba alınmalıdır, lakin proqnozların informasion dəyərliliyinin ümumi mülahizələrinə də əsaslanmaq olar. $U(y, \hat{y})$ qiyməti $\hat{y}$-in y-ə yaxınlaşması ilə artarsa (yəni proqnoz yaxşılaşdığı halda), U statistik qiyməti müsbətə meylli olub, proqnozun faydalılığını xarakterizə edir, əgər $U(y, \hat{y})$ qiyməti $\hat{y}$, y-dən uzaqlaşdıqda artarsa, onda U statistik qiyməti mənfiliyə meylli olur (bu halda U xəta ölçüsü və ya itki ölçüsüdür). Y çoxölçülü prediktant olduğu hallarda Y vektorunun komponentlərinin proqnoz xətalarının kvadratları cəminə mütənasib itki ölçüləri və bunlarla bağlı, statistik analizdəki əlaqə göstəricilərindən (nisbi xəta, toplam korrelyasiya əmsalı və s.) istifadə olunur. Digər xəta şkalalarına

əsaslanan itki ölçüləri (məs., sədd, S – obrazlı itki ölçüləri) də təklif olunmuşdur. Diskret prediktantlar (havanın fazaları) üçün faydalılıq (xətalılıq) matrisləri $U_{ij} = U(\Phi_i, \hat{\Phi}_j)$ daxil olunur ki, bunların vasitəsilə havanın fazaları Φ_i və $\hat{\Phi}_j$ proqnozunun təkrarlanmasını nəzərə alan orta statistik qiymət $\overline{U}$ hesablanılır.

H. p.-nun hər hansı metodunun effektivliyi haqqında mülahizələr üçün, adətən, o, standart (trivial) metodlardan biri ilə müqayisə olunur: inersion proqnoz (Y kəmiyyətinin gələcək qiyməti onun sonuncu müşahidə olunan qiymətinə bərabər götürüldükdə), iqlim proqnozu (Y -in qiymətinin öncədən onun iqlim normasına bərabər olacağı halında) və ya təsadüfi proqnozlama kimi proqnozlardan. Bu halda $S = (\overline{U}GU_{st})/(U_{\max} - U_{st})$ nisbətilə ifadə olunan və ustalıq göstəricisi (rus. показатель мастерства) adlandırılan kəmiyyət daxil olunur, burada $U_{\max}$ – maksimal mümkün olan statistik qiymət, U_{st} – standart metodun orta statistik qiyməti olub, hesablama üçün başlanğıc götürülür, $\overline{U}$ – verilən metodun H. p. keyfiyyətinin orta statistik qiymətidir. S kəmiyyəti 0-dan 1-ə qədər dəyişir, S hərdən faizlə ifadə olunur.

Statistik H. p.-nun ixtiyari metodu verilənlərin analizi əsasında qurulur, bu verilənlər isə müşahidələr nəticələrinin müəyyən seçiminə əsaslanır və təcrübə üçün seçim və ya asılı seçim (rus. тренировочноя выборка) adlanır. Asılı seçimin verilənləri üzrə hesablanmış ustalıq göstəricisi metodun təminliliyi adlanır. Nəzarət (asılı olmayan) üçün seçim məlumatı əsasında H. p. metodunun sonradan yoxlanılmasında (və ya ondan istifadə olunduqda), keyfiyyət statistik qiyməti, bir qayda olaraq, təminliliyin hesablanılmasında istifadə olunan statistik qiymətdən aşağı olur. Asılı seçim üzrə təyin olunan proqnozun keyfiyyətinin statistik qiymətinin artıq götürülməsi dərəcəsi H. p.-nun bəzi metodları üçün nəzəri olaraq qiymətləndirilə bilinər (bax, məs., [1]), lakin ümumi halda, bunu etmək mümkün deyildir və buna görə də, asılı olmayan statistik məlumatda metodu hökmən yoxlamaq tələb olunur. Məsələn, mühüm prediktorları seçdikdə, təcrübə üçün seçimlərdən asılı olmayan verilənlər üzrə tapılan keyfiyyət statistik qiymətindən istifadə olunmalıdır. Bu məqsəd üçün «sürüşən nəzarət» alqoritmi təklif edilmişdir, bu alqoritmdə asılı olmayan alqoritmlər kimi seçimin bütün elementləri növbə ilə istifadə olunur (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Ж. геофизики», 1933, в. 1, с. 78–62 (Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 161–67); [2] Груза Г. В., «Тр. Среднеазиатского научно-исследовательского гидрометеорологического института», 1967, в. 29(44), с. 3–41; [3] Груза Г. В., Ранькова Э. Я., Вероятностные метеорологические прогнозы, Л., 1983.

PROQNOZU HAVANIN статистик **« прогноз погоды** статистический; statistical **weather forecast »** – bax, *Statistik hava proqnozu.*

PROQRESSİV ÖLÇÜLƏN PROSES « прогрессивно измеримый процесс; progressively measurable process » – σ – cəbr axını $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ olan $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş, $(M, \mathfrak{B})$ faza fəzasında elə $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ *təsadüfi prosesidir* ki, ixtiyari $t \geq 0$ qiymətində $([0, t] \times \Omega, \mathfrak{B}_{[0,t]} \times \mathscr{A}_t)$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikası $\zeta(\cdot, \cdot)$ – ölçülən inikasdır (burada $\mathfrak{B}_{[0,t]}$ – $[0, t]$ parçasının Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir). Əgər $\zeta(t)$ $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ axınına nəzərən proqressiv ölçülən proses və τ bu axına nəzərən sonlu Markov anıdırsa, onda $\zeta(t)$ təsadüfi elementi $(\Omega, \mathscr{A}_\tau)$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına ölçülən inikasıdır. Bütün P. ö. p.-lərin çoxluğu $\{\mathscr{A}_t\}_{t\geq 0}$ qeyd olunmuş axınına nəzərən $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ -da $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ -nın proqressiv ölçülən altçoxluqlarının σ – cəbrini – bütün mümkün $\Gamma \in \mathfrak{B}$ çoxluqları və P. ö. p.-lər üçün $\{(t, \omega) : \zeta(t, \omega) \in \Gamma\}$ şəklində çoxluqların doğurduğu σ – cəbri doğurur. Proqressiv ölçülən çoxluğun indikatoru P. ö. p.-dir.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

PROSENTİL « процентиль; persentile » – bax, *Persentil.*

(E, h) – PROSES « **(E, h) – процесс; (E, h) – process »** – *Qalton – Vatson prosesidir*; bax, *Şaxələnən proses.*

(G, h) – PROSES « **(G, h) – процесс; (G, h) – process »** – *Bellman – Harris prosesidir*; bax, *Şaxələnən proses.*

(G, h_u) – PROSES « **(G, h_u) – процесс; (G, h_u) – process »** – yaşama müddətindən asılı *şaxələnən prosesdir.*

h – PROSES « **h – процесс; h – process »** – bax, *Martin sərhədi* Markov prosesinin.

(M_λ, h) – PROSES « **(M_λ, h) – процесс; (M_λ, h) – process »** – kəsilməz zamanlı *şaxələnən prosesdir.*

PROTOMİNİMAL METRİKA « протоминимальная метрика; protominimal metric » – təsadüfi kəmiyyətlər cütünün birgə paylanmaları fəzasında mürəkkəbi *ehtimali metrikadır*, bu metrika üçün *minimal metrika* verilən sadə metrika ilə üst-üstə düşür. Elə sadə metrikalar vardır ki (məs., medianlar arasında fərqin mütləq qiyməti), bunlar üçün mürəkkəb P. m.-lar çoxluğu boşdur.

Misallar: ρ müntəzəm metrikası üçün P. m. $\mu(X, Y) = \sup_x [\mathbf{P}\{X < x \leq Y\} + \mathbf{P}\{Y < x \leq X\}]$ metrikasıdır. *Levi – Proxorov metrikası* π üçün *Ki – Fan metrikası* P. m.-dır.

PROYEKSİYA(sı) ranq statistikasının **« проекция** ранговой статистики; rank statistic **projection »** – bax, *Ranq statistikası.*

PROYEKSİYA(sı) təsadüfi çoxluğun **« проекция** случайного множества; **projection** of a random set **»**, X təsadüfi çoxluğunun proyeksiyası, – $B = \mathrm{Proj}\, X$ *qeyri – səlis çoxluğudur*, mənsubiyyət funksiyası μ_B, X çoxluğu ilə $\mu_B(y) = \mathbf{P}\{y \in X\}$, $y \in Y$ münasibətilə bağlıdır. Təsadüfi çoxluğun P. anlayışı təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsi ilə qeyri – səlis çoxluqlar arasında əlaqələrin öyrənilməsi üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980.

PROYEKTİV LİMİT ölçülərin proyektiv sisteminin **« проективный предел** проективной системы мер; **projective limit** of a projective system of measure **»** – bax, *Proyektiv sistemləri*, *ölçülərin.*

PROYEKTİV SİSTEMLƏRİ, ÖLÇÜLƏRİN « проективные системы мер; projective systems of measures » – müəyyən mənada bir-birilə uzlaşmış çoxluqlar, inikaslar və ölçülər ailəsidir. $\mathbf{I}$ – hər hansı əvvəlcədən nizamlanmış (əksər hallarda nizamlanmış), sağdan filtrlənən indekslər çoxluğu olsun. Fərz olunur ki, hər bir $\alpha \in \mathbf{I}$ indeksi üçün ölçülü $(X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)$ fəzası, $\alpha \le \beta$ şərtini ödəyən ixtiyari iki $\alpha \in \mathbf{I}$ və $\beta \in \mathbf{I}$ indeksləri üçün X_β çoxluğunun X_α çoxluğuna $g_{\alpha\beta}$ inikası verilmişdir. Eyni zamanda aşağıdakı uzlaşma şərtlərinin də ödənildiyi fərz olunur:

1) İxtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ indeksi üçün $g_{\alpha\alpha}$ inikası X_α çoxluğunun eynilik inikasıdır;

2) $\alpha \le \beta \le \gamma$ şərtini ödəyən ixtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$, $\beta \in \mathbf{I}$, $\gamma \in \mathbf{I}$ indeksləri üçün

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma}$$

bərabərliyi ödənilir;

3) $\alpha \le \beta$ şərtini ödəyən ixtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ və $\beta \in \mathbf{I}$ indeksləri üçün $g_{\alpha\beta}$ inikası S_α və S_β σ – cəbrlərinə nəzərən ölçülən inikasdır; bu halda $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ g_{\alpha\beta}^{-1}$ bərabərliyi də ödənilir.

$((X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, (g_{\alpha\beta})_{\alpha\le\beta})$ cütü ölçülərin proyektiv sistemi adlanır. Əgər $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \le \beta$ inikasları üzrə heç bir anlaşılmazlıq yaranmazsa, onda $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ ailəsinin özü də Ö. p. s. adlanır. Əgər hər bir əsas bazis çoxluğu X_α, $\alpha \in \mathbf{I}$ topoloji fəza, S_α ya X_α-da Ber α – cəbri, ya da ki, X_α-da Borel σ – cəbri olarsa, onda, adətən, fərz olunur ki, bütün $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \le \beta$ inikasları kəsilməz inikaslardır. $\prod_{i\in\mathbf{I}} X_i$ dekart hasilində $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $\alpha \le \beta$ bərabərliklərini ödəyən $x = (x_i)_{i\in\mathbf{I}}$ elementlərindən təşkil olunmuş X çoxluğuna baxılır. İxtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ indeksi üçün g_α simvolu ilə $\mathrm{pr}_\alpha : \prod_{i\in\mathbf{I}} X_i \to X_\alpha$ kanonik proyeksiyasının X çoxluğuna daralması işarə olunur. Onda $\alpha \le \beta$ olduqda $g_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ g_\beta$ bərabərlikləri ödənilir. S, – $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ inikaslar ailəsinin doğurduğu, X çoxluğunun hissələrindən təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. Başqa sözlə, S, – X-də daxilolma əməlinə görə minimal σ – cəbrdir və bu σ – cəbrə nəzərən bütün g_α, $\alpha \in \mathbf{I}$ inikasları ölçüləndirlər. Əgər S-də ixtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ üçün $\mu_\alpha = \mu \circ g_\alpha^{-1}$ xassəsinə malik olan μ ölçüsünü təyin etmək olarsa, onda ölçülü (X, S, μ) fəzası Ö. p. s. $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ ailəsinin proyektiv limiti adlanır. Bu zaman aşağıdakı işarələmələr istifadə olunur:

$$(X, S, \mu) = \varprojlim (X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}, \quad \mu = \varprojlim (\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}.$$

Əgər hər bir g_α, $\alpha \in \mathbf{I}$ inikası syuryektiv olarsa, onda $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ ehtimal ölçülərinin proyektiv sistemi üçün iki müxtəlif proyektiv limit ola bilməz. Əgər $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ elə Ö. p. s. olarsa ki, indekslər çoxluğu $\mathbf{I}$ boş olmayan çoxluq, hər bir X_α, $\alpha \in \mathbf{I}$ çoxluğu kompakt topoloji çoxluq, bütün $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \le \beta$ inikasları kəsilməz və syuryektiv, hər bir μ_α, $\alpha \le \beta$ ölçüsü isə X_α fəzasının Borel σ – cəbri S_α-da Radon ehtimal ölçüsüdür, onda hökm etmək olar ki, $\varprojlim (\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ proyektiv limiti vardır. Bu sonuncu hökm Yu. V. Proxorovun [1] ümumi nəticəsindən bilavasitə alınır.

Fərz olunur ki, $\mathbf{I}$ – indekslərin boş olmayan çoxluğu, $(X_\alpha, S_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$, – $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \le \beta$ inikasları olan Ö. p. s., X – hər hansı çoxluq, hər bir $\alpha \in \mathbf{I}$ üçün isə $g_\alpha : X \to X_\alpha$ inikası verilmişdir. Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

1) İxtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ indeksi üçün X_α çoxluğu ayrılan topoloji fəza, μ_α isə bu fəzada Radon ehtimal ölçüsüdür;

2) bütün $g_{\alpha\beta}$, $\alpha \le \beta$ inikasları kəsilməzdirlər;

3) X çoxluğu da ayrılan topoloji fəzadır və bütün g_α, $\alpha \in \mathbf{I}$ inikasları kəsilməzdirlər;

4) $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ inikaslar ailəsi X-də nöqtələri ayrılır;

5) $\alpha \le \beta$ şərtini ödəyən ixtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ və $\beta \in \mathbf{I}$ indeksləri üçün $g_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ g_\beta$ bərabərliyi ödənilir.

Onda aşağıdakı müddəalar ekvivalentdirlər:

a) X fəzasında hər bir $\alpha \in \mathbf{I}$ indeksi üçün $\mu_\alpha = \mu \circ g_\alpha^{-1}$ xassəsinə malik yeganə Radon ehtimal ölçüsü μ vardır;

b) ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $K_\varepsilon \subset X$ kompakt çoxluğu vardır ki, ixtiyari $\alpha \in \mathbf{I}$ indeksi üçün $\mu_\alpha(X_\alpha \setminus g_\alpha(K_\varepsilon)) < \varepsilon$ münasibəti ödənilir. b) münasibəti Proxorov şərti adlanır.

Əgər indekslər çoxluğu $\mathbf{I}$ hesabi konfinal altçoxluğa malik olarsa, onda Radon ehtimal ölçülərinin ixtiyari proyektiv $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{I}}$ sisteminin proyektiv ölçüsü vardır. Bax, *Kolmoqorov teoremi* sonlu ölçülü paylanmalar haqqında.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах, пер. с франц., М., 1977.

PROYEKTİV STATİSTİK QİYMƏT « проекционная оценка; orthogonal series estimator » – bax, *Qeyri – parametrik reqression analiz*, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə.*

PSEVDOİNTEQRAL « псевдоинтеграл; pseudo-integral » – elə J inikasıdır ki, bu inikas lokal kompakt ayrılan (Hausdorfa görə) separabel T fəzasında hər bir kəsilməz mənfi olmayan kompakt daşıyıcıya malik u funksiyasına $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının sıfrı özündə saxlayan $J(u)$ kompaktını qarşı qoyur və aşağıdakı şərtləri ödəyir: 1) ixtiyari $p \ge 0$ üçün $J(pu) = pJ(u)$ bərabərliyi ödənilir; 2) ixtiyari u, v üçün $J(u)$, $J(u+v)$, $J(u) \oplus J(v)$, $\overline{J(u)} \oplus \overline{J(v)}$, $\overline{J(u+v)}$ kompaktları daxil olma əməli üzrə artırlar (burada $\oplus$, – $\mathbb{R}^n$-in altçoxluqlarının vektor cəmi, kompakt üzərindəki xətt $\mathbb{R}^n$-də qabarıq qapanmadır).

Ehtimal nəzəriyyəsində P. (daha dəqiq, onun psevdo – inteqrallanan funksiyalara təbii davamı) təsadüfi çoxluqların qurulması və onların riyazi gözləmələrinin hesablanması üçün tətbiq olunur: əgər $U(t)$ T-də mənfi olmayan təsadüfi proses, $u(t)$

isə onun riyazi gözləməsidirsə, onda müəyyən requlyarlıq şərtlərində $J(U)$ təsadüfi çoxluğunun *riyazi gözləməsi* $J(u)$-ya bərabərdir.

Əd.: [1] М а т е р о н Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

PSEVDOMOMENT « псевдомомент; pseudomoment » – istifadəsi *paylanmanın momenti* anlayışına analoji olan ədədi xarakteristikadır. P. momentdən fərqli olaraq ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları $(\mathbf{P}_\xi, \mathbf{P}_\eta)$ cütü çoxluğunda təyin olunur. Ən çox yayılmış və ehtimal nəzəriyyəsində (həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər halı nəzərdə tutulur) istifadə olunan psevdomomentlər aşağıdakılardır:

1. N a t u r a l p s e v d o m o m e n t l ə r:

$$q_k(\xi,\eta) = \int x^k\, d(F_\xi - F_\eta)(x);\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

burada F_ξ, F_η – uyğun olaraq ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyalarıdır. f_ξ, f_η uyğun olaraq ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin xarakteristik funksiyalarıdırsa, q_n-nın Lebeq – Stiltyes inteqralı kimi varlığı halında

$$f_\xi(t) - f_\eta(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\, q_k(\xi,\eta) + o(t^n),\ \ t \to 0$$

ayrılışı doğrudur.

2. M ü t l ə q p s e v d o m o m e n t l ə r:

$$m_r(\xi,\eta) = \int |x|^r\, d(F_\xi - F_\eta)(x),\ \ r \geq 0.$$

3. F ə r q p s e v d o m o m e n t l ə r i:

$$\varkappa_r(\xi,\eta) = r \int |x|^{r-1} \left| F_\xi(x) - F_\eta(x) \right| dx,\ \ r > 0.$$

Bu P.-lər

$$|q_k| \leq \varkappa_k,\ k = 0,1, \ldots;\ \varkappa_r \leq m_r,$$

bərabərsizlikləri ilə bir-birilə əlaqəlidirlər. Bundan başqa m_{r+s}/m_s və $[\varkappa_{r+s}/(r+s)]/[\varkappa_r/r]$ nisbətləri vardırsa, bu nisbətlərə hər hansı ehtimal paylanmasının s tərtib mütləq momenti kimi baxmaq olar. $|q_k|$, m_r və $\varkappa_r$ ehtimal metrikalarıdır. P.-in tətbiqinə aid misallar *Berri – Esseen teoremi* məq.-də verilir. P. anlayışı sonluölçülü və sonsuzölçülü fəzalar halı üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 284–94.

PSEVDOMOMENTİ, FƏRQ « псевдомомент разностный; difference pseudomoment » – bax, *Psevdomoment.*

PSEVDOTƏSADÜFİ ƏDƏD « псевдослучайное число; pseudo – random number » – bax, *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər.*

PUANKARE TEOREMİ q a y ı d ı ş h a q q ı n d a **« Пуанкаре теорема** о в о з в р а щ е н и и; **Poincare recurrence theorem »**: sonlu ölçülü $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ fəzasının ixtiyari T endomorfizmi üçün müsbət ölçülü ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ çoxluğunun sanki hər bir ω nöqtəsi ($\mathbf{P}$ ölçüsü üzrə) üçün elə n tapılar ki, $T^n\omega \in A$; belə n-lərin sayı sonsuzdur. Qayıdış haqqında P. t. ehtimal nəzəriyyəsində və differensial tənliklərin keyfiyyət nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] P o i n c a r e H., «Acta math.», 1890, t. 13, p. 1–270; [2] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

PUASSON AXINI « пуассоновский поток; Poisson stream / flow / input » – *Puasson prosesidir.* Bu termindən bir qayda olaraq, kütləvi xidmət nəzəriyyəsində istifadə olunur.

PUASSON AXINI; a p a r ı c ı f u n k s i y a **« пуассоновский поток;** в е д у щ а я ф у н к ц и я; l e a d i n g f u n c t i o n o f a **Poisson process »** – $[0, t)$ parçasında axın hadisələrinin sayının riyazi gözləməsini təyin edən $\Lambda(t)$ funksiyasıdır. $[a, b)$ yarımintervalında hadisələr sayı $\Lambda(b) - \Lambda(a)$ parametrli Puasson təsadüfi kəmiyyətidir. X i n ç i n t e o r e m i n ə əsasən, P. a.-nın ehtimali strukturu onun aparıcı funksiyası ilə tam mənası ilə təyin olunur. Xüsusi halda, P. a.-nın ordinarlığı üçün onun aparıcı funksiyasının kəsilməzliyi zəruri və kafidir. Yalnız ən sadə axın üçün $\Lambda(t) = \lambda t$ olur, burada λ – axın parametridir. Ölçülən fəzada (məs., çoxölçülü Evklid fəzasında) P. a. üçün aparıcı funksiya anlayışının ümumiləşməsi $\Lambda(A)$ Puasson ölçüsüdür – ölçülən A çoxluğunda axın hadisələrinin sayının riyazi gözləməsidir.

PUASSON BUL MODELİ « пуассоновская Булева модель; Poisson Boolen model » – bax, *Bul modeli.*

PUASSON CƏMLƏMƏ DÜSTURU « Пуассона формула суммирования; Poisson summation formula » – S. Puassonun [1]-də 1827-də

$$\sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) = \sqrt{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(bn) \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə etdiyi düsturdur, burada $a > 0$, $b > 0$, $ab = 2\pi$ və f və g funksiyaları isə

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-ity}\, dy$$

Furye çevirməsi ilə əlaqəlidirlər.

P. c. d. ehtimal nəzəriyyəsində çoxsaylı tətbiqi ilə seçilir və bu düstur vasitəsilə bir çox ehtimal paylanmalarının müntəzəm paylanmaya yaxınlıq dərəcəsini qiymətləndirmək mümkündür (bax, [2], XIX fəsil və [4]).

(1) düsturunda $a = 1$, $b = 2\pi$ qəbul edərək, $f(y)$ funksiyasını $f(x+y)$-lə əvəz etdikdə

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi n x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \right) e^{-2\pi i n y}\, dy \qquad (2)$$

düsturu alınır, burada x – qeyd olunmuş həqiqi ədəddir.

P. c. d.-nun bu forması ehtimal nəzəriyyəsində daha çox istifadə olunur. Qeyd etmək lazımdır ki, (2)-nin sol tərəfi 1 periodlu x-ə görə periodik funksiyadır, sağ tərəfdə onun formal Furye sırasıdır. P. c. d.-nun çoxölçülü analoqları oxşar şəkildə ifadə olunur (bax, [5] və [6]); bu işlərdə və [3]-də (2) düsturunun doğruluğu üçün şərtlər verilmişdir.

Əgər X paylanmasının sıxlıq funksiyası $f(x)$ olan təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda (2)-nin sol tərəfi X təsadüfi kəmiyyətinin kəsri hissəsi $Y=\{X\}$, $0\le Y<1$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır. Bu halda (2) düsturu

$$p_Y(x)=1+\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty} e^{2\pi i n x}\,\mathbf{M}\,e^{-2\pi n X},\quad 0\le x<1 \qquad (3)$$

bərabərliyi şəklində verilir.

Məs., X riyazi gözləməsi m və dispersiyası σ^2 olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda

$$p_Y(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2\sigma^2}\cos 2\pi n(x-m),\quad 0\le x<1$$

olur.

Buradan isə, məs., $\sigma\ge 1$ olduqda

$$\left|p_Y(x)-1\right|\le 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2} < 5{,}36\cdot 10^{-9}$$

olduğu alınır.

σ-nın kiçik qiymətlərində məqbul sayılan dəqiqlik üçün (3) sırasının bir neçə həddini götürmək lazımdır. Məs., $\sigma\ge 0$ olduqda (3)-ün sağ tərəfindəki sıranın ilk altı həddinin cəmi $p_Y(x)$-i 10^{-4} dəqiqliyi ilə approksimə edir.

P. c. d.-nun sonrakı geniş ümumiləşmələri [7]-də göstərilmişdir.

P. c. d. bir sıra hallarda Benford qanununu əsaslandırmağa imkan verir (bax, *İlk mühüm rəqəm qanunu*).

Əd.: [1] P o i s s o n S.-D., «Mem. Acad. sci Inst. France», 1827, t. 6, p. 571–602; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] G o o d I. J., «Statist. Sci.», 1986, v. 1, № 2, p. 157–70; [5] С т е й н И., В е й с Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974; [6] B o c h n e r S., Harmonic analysis and the theory of probability, Berk. – Los Angeles, 1955; [7] D i a c o n i s P., E n g e l E., «Statist. Sci.», 1986, v. 1, № 2, p. 171–74.

PUASSON HƏNDƏSİ PROSESİ « пуассоновский геометрический процесс; Poisson geometric process » – bax, *Həndəsi proses.*

PUASSON KÜYÜ « пуассоновский шум; Poisson noise » – bax, *İmpulsal küy.*

PUASSON NÖQTƏVİ PROSESİ « пуассоновский точечный процесс; Poisson point process » – faza fəzasının kəsişməyən ölçülən çoxluqlarının ixtiyari toplusunda nöqtələr sayı (onların bölünmə əlaməti nəzərə alınmaqla) Puasson qanununa tabe qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi *nöqtəvi prosesdir.* $N(t)$ $\mathbb{R}^1$ ədəd oxu üzərində P. n. p.-inə uyğun sayıcı prosesdirsə (bax, *Nöqtəvi proses*), onda $N(t)$ asılı olmayan artımlarlı Puasson paylanmasına tabe təsadüfi prosesdir (bax, *Puasson prosesi*). Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində əksər hallarda fərz olunur ki, tələblərin giriş axını P. n. p.-dir. Moment ölçüsü Λ Lebeq ölçüsünə mütənasib olan, ədəd oxu üzərində P. n. p. ən sadə Puasson nöqtəvi prosesi adlanır; mütənasiblik əmsalı λ ən sadə nöqtəvi prosesin parametri adlanır. Ən sadə nöqtəvi proses: 1) stasionarlığı, 2) keçmişin təsirsizlik xassəsinə malik olmaması (kəsişməyən intervallara aid olan nöqtələr sayının qarşılıqlı asılı olmamazlığı), 3) ordinarlığı (bax, *Ordinar nöqtəvi proses*) kimi üç xassəsilə xarakterizə olunur.

$(A,\mathfrak{A})$ faza fəzasında verilən P. n. p. Φ-in ehtimal paylanması onun moment ölçüsü $\Lambda(B)=\mathbf{M}\Phi(B)$, $B\in\mathfrak{A}$ ilə tam mənası ilə təyin olunur.

Əgər Λ $\mathfrak{A}$-da səpələnmiş ölçüdürsə, yəni ixtiyari $a\in A$ üçün $\Lambda(\{a\})=0$ şərti və ixtiyari $B\in\mathfrak{A}_0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\Phi(B)=k\}=((\Lambda(B))^k/k!)\exp\{-\Lambda(B)\} \qquad (*)$$

olarsa, onda Φ P. n. p.-dir.

P. n. p.-nin $B\in\mathfrak{A}_0$ çoxluğunda realizasiyasını iki mərhələyə ayırmaq olar. Əvvəlcə, (*) Puasson paylanmasına malik, riyazi gözləməsi $\Lambda(B)$ olan ν təsadüfi kəmiyyətini modelləşdirmək lazımdır. Əgər $\nu=k$ olarsa, onda P. n. p.-nin ehtimal paylanmasının $\Phi(\{a_i\})>0$ münasibətini ödəyən a_i, $i=1,\dots,k$ nöqtələri, bu nöqtələrin B çoxluğuna bir-birindən asılı olmayaraq k dəfə atılması ilə alınır və ixtiyari $C\subseteq B$, $C\in\mathfrak{A}_0$ çoxluğuna bu nöqtələrin düşməsi ehtimalı $Q(C)=\Lambda(C)/\Lambda(B)$ münasibətilə təyin olunur; nöqtənin k_a dəfə atılması nəticəsi a nöqtəsi olursa, onda $\Phi(\{a\})=k_a$ qəbul edilir.

Səpələnmiş moment ölçülü P. n. p.-ni $\mathfrak{A}$-nu doğuran, kifayət qədər geniş olan altçoxluqlar sinfində nöqtələrin olmaması ehtimalı ilə xarakterizə etmək olar. Məs., əgər $A=\mathbb{R}^1$ və $\{I_1,\dots,I_m\}$ kəsişməyən intervallarının ixtiyari toplusu üçün

$$\mathbf{P}\left\{\Phi\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right)=0\right\}=\exp\left\{-\Lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right)\right\}$$

olarsa, onda Φ – moment ölçüsü Λ olan $\mathbb{R}^1$-də P. n. p.-dir.

P. n. p.-ləri sinfinə mənsubluq xassəsi təsadüfi nöqtəvi proseslər üzərində bəzi əməllərdən sonra da itmir (asılı olmayan proseslərin superpozisiyası, asılı olmayan yerinidəyişmələr, asılı olmayan seyrəklənmədə).

Φ_1 və Φ_2 – uyğun olaraq, moment ölçüləri Λ_1 və Λ_2 olan, $(A,\mathfrak{A})$-da qarşılıqlı asılı olmayan P. n. p.-ləri olsun. Onda, $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ superpozisiyası $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$ moment ölçülü P. n. p.-dir.

Əgər Φ moment ölçüsü Λ olan P. n. p., Φ_G isə Φ-in nöqtələrinin asılı olmayan yerinidəyişmələrindən alınan və yerinidəyişmələrinin paylanması G olan təsadüfi nöqtəvi prosesdirsə, onda Φ_G moment ölçüsü $\Lambda_G=\Lambda * G$ ($*$ – ölçülərin kompozisiyası operatorudur) olan P. n. p.-dir.

Əgər Φ_C təsadüfi nöqtəvi prosesi Φ P. n. p.-ndən seyrəklənmə ehtimalı $\mathfrak{A}$ – ölçülən $C(a)$, $0\le C(a)\le 1$ funksiyası ilə verilən asılı olmayan seyrəklənmə yolu ilə alınmışdırsa, onda Φ_C P. n. p.-dir və

$$\Lambda_C(B)=\int_B [1-C(a)]\,\Lambda(da),\quad B\in\mathfrak{A}$$

onun moment ölçüsüdür.

Əgər birkanallı kütləvi xidmət sisteminə tələblər axını daxil olarsa və bu axın xidmət müddətləri asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olan stasionar P. n. p.-dirsə, onda xidmət olunmuş tələblərin çıxış axını da stasionar P. n. p.-dir. Xidmət prosesi qeyri – məhdud bölgülü birkanallı sistem də bu xassəyə malikdir (bax, [6]).

Λ – moment ölçüsü, $\mathbf{P}_\Lambda$, – $(M, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasında, $(A, \mathfrak{A})$-da lokal məhdud ölçülərin uyğun ehtimal paylanması (P. n. p.-ni təyin edən) olsun. Əgər Λ_1 moment ölçüsü Λ_2-yə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü ($\Lambda_1 << \Lambda_2$), $\Lambda_1(B) < \infty$, $\Lambda_2(B) < \infty$ olarsa, onda $\mathbf{P}_{\Lambda_1} << \mathbf{P}_{\Lambda_2}$ olur və uyğun ehtimal sıxlığı

$$\frac{d\,\mathbf{P}_{\Lambda_1}}{d\,\mathbf{P}_{\Lambda_2}}\ (\Phi_B(\cdot)) =$$

$$= \exp\{\Lambda_2(B) - \Lambda_1(B)\} \prod_{a:\,\Phi_{(\{a\})}>0} f(a)\Phi_B(\{a\})$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\Phi_B(C) = \Phi(CB)$, $f(a) = \frac{d\Lambda_1}{d\Lambda_2}(a)$, – Λ_1 ölçüsünün Λ_2 ölçüsünə nəzərən sıxlıq funksiyasıdır.

Əgər $\|V_1 - V_2\|$ $V_1 - V_2$ ölçülər fərqinin variasiyasıdırsa, onda $\|\mathbf{P}_{\Lambda_1} - \mathbf{P}_{\Lambda_2}\| \le 2\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|$ doğrudur.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Работа по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Кокс Д., Смит В., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [3] Kallenberg O., Random measures, B. – [a. o.], 1983; [4] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., К., 1984; [5] Яшков С. Ф., Анализ очередей в ЭВМ, М., 1989.

PUASSON ÖLÇÜSÜ « пуассоновская мера; Poisson measure » – $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ fəzasında tamqiymətli $\mu(\omega, A)$ *təsadüfi ölçüsüdür*; $(E, \mathscr{E})$ $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}_t)_{t\ge 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisinə nəzərən aşağıdakı xassələri ödəyən *Polski fəzasıdır:*

1) $m(A) = \mathbf{M}\mu(\omega, A)$ ölçüsü $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ fəzasında σ – sonlu ölçüdür;

2) ixtiyari $t \ge 0$ üçün $m(\{t\} \times E) = 0$;

3) ixtiyari $t \ge 0$ və $A \subseteq (t, \infty) \times E$, $m(A) < \infty$ şərtlərini ödəyən ixtiyari $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$ üçün $\mu(\cdot, A)$ təsadüfi kəmiyyəti $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrindən asılı deyildir.

m ölçüsü P. ö. μ-nün intensivlik ölçüsü adlanır. Əgər m ölçüsü $m(dt, dx) = dt \times F(dx)$ şəklində ifadə olunarsa, onda P. ö. μ bircins ölçü adlanır, burada F, – $(E, \mathscr{E})$ fəzasında σ – sonlu ölçüdür.

Əgər μ P. ö., $A_1, \dots, A_n$ $\mathscr{B}(R_+) \times \mathscr{E}$ fəzasının cüt-cüt kəsişməyən çoxluqlarıdırsa, $m(A_i) < \infty$, $1 \le i \le n$ olarsa, onda $\mu(\cdot, A_1), \dots, \mu(\cdot, A_n)$ küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və onların riyazi gözləmələri uyğun olaraq $m(A_1), \dots, m(A_n)$ olub, Puasson paylanmasına tabedirlər. Xüsusi halda, əgər bütün $t \ge 0$ və $B \in \mathscr{E}$ üçün $m([0, t] \times B) < \infty$ olarsa, $\pi_t = \mu(\omega, [0, t] \times B)$ Puasson prosesidir (əgər μ bircins P. ö. olarsa, bircins Puasson prosesidir) və:

$$\mathbf{P}\{\pi_t - \pi_s = k\} = \frac{[m(s, t) \times B]^k}{k!}\, e^{-m((s, t] \times B)},\ 0 \le s < t,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots .$$

$\{\zeta(t),\ t \ge 0\}$ – separabel stoxastik kəsilməz, asılı olmayan artımlarlı, qiymətləri $\mathbb{R}^d$-dən olan təsadüfi proses olsun. Onda $\zeta(t)$ proseslərinin sıçrayışlarının

$$\mu(\omega, dt, dx) = \sum_{s>0} \mathbf{I}\,(\Delta\zeta(s, \omega) \ne 0)\, \varepsilon_{(\delta, \Delta\zeta(s, \omega))}(dt, dx)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan ölçüsü P. ö.-dür, burada

$$\Delta\zeta(s, \omega) = \zeta(s + 0, \omega) - \zeta(s - 0, \omega),\ \varepsilon_{(s, a)}(dt, dx)$$

Dirak ölçüsüdür, $E = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Tamqiymətli μ təsadüfi ölçüsü, yalnız və yalnız, onun kompensatoru $\mu^p(\omega, \cdot)$ 2) xassəsini ödədikdə, $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ fəzasında σ – sonlu $m(\cdot)$ ölçüsü ilə sanki yəqin üst-üstə düşdükdə, P. ö. olur; bu halda m intensivlik ölçüsüdür.

Əd.: [1] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1997; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

PUASSON PAYLANMASI « Пуассона распределение; Poisson distribution » – tam mənfi olmayan $k = 0, 1, 2, \dots$ qiymətlərini

$$p_k = \mathbf{P}\{X = k\} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!},\ \lambda > 0$$

ehtimalları ilə alan X təsadüfi kəmiyyətinin diskret ehtimal *paylanmasıdır*. P. p.-nın doğuran və xarakteristik funksiyaları uyğun olaraq

$$\Psi(z) = e^{\lambda(z-1)} \text{ və } f(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

düsturları ilə ifadə olunur.

P. p.-nın riyazi gözləməsi, dispersiyası və daha yüksək ranqlı semi – invariantları λ-ya bərabərdir.

P. p.-nın paylanma funksiyası

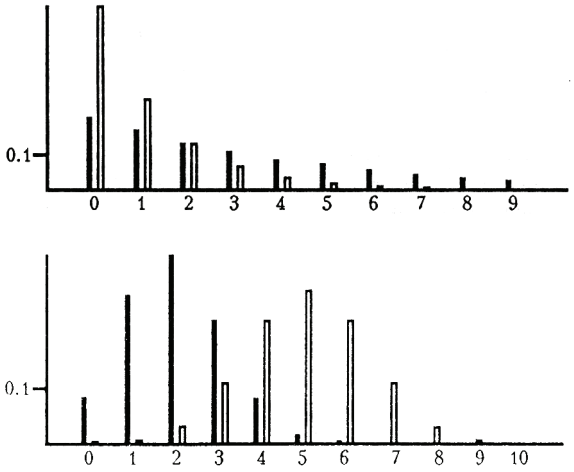
$$F(x) = \sum_{i=0}^{[x]} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^i}{i!},\quad x \in [0, \infty)$$

$k = 0, 1, \dots$ nöqtələrində

$$F(k) = \frac{1}{k!}\int_\lambda^\infty y^k e^{-y} dy = 1 - S_{k+1}(\lambda)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $S_{k+1}(\lambda)$, – $(k+1)$ parametrli qamma – paylanma funksiyasının λ nöqtəsində qiymətidir [və ya $F(k) = 1 - H_{2k+2}(2\lambda)$ düsturu ilə ifadə olunur, burada $H_{2k+2}(\lambda)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı $2k + 2$ olan xi – kvadrat

paylanma funksiyasının 2λ nöqtəsindəki qiymətidir], buradan da, xüsusi halda, $\mathbf{P}\{X=k\}=S_k(\lambda)-S_{k+1}(\lambda)$ münasibəti alınır. Asılı olmayan $X_1,\ldots,X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ parametrlərli Puasson paylanmaları ilə paylanmışlarsa, onda bu təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ parametrli Puasson paylanması ilə paylanır.



1) $\lambda=0{,}8$, $\lambda=1{,}6$ və 2) $\lambda=3$, $\lambda=6$ qiymətlərində Puasson paylanması.

Əksinə, asılı olmayan X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi P. p.-na malikdirsə, onda X_1 və X_2 təsadüfi kəmiyyətlərinin hər biri P. p. qanununa tabedir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanmalarının P. p.-na yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər vardır. $\lambda\to\infty$ olduqda $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır.

P. p. ilk dəfə [1]-də S. Puasson tərəfindən binomial paylanma üçün sınaqlar sayı n-in böyük, bir sınaqda müvəffəqiyyətin ehtimalı p-nin kiçik olduğu hal üçün təqribi düstur kimi alınmışdır (Puasson teoremi). P. p. bir sıra çox fiziki prosesləri yaxşı təsvir edə bilir (bax, [2]). P. p. bir çox diskret paylanmalar, məs., *hiperhəndəsi paylanma*, *mənfi binomial paylanma*, *Poya paylanması*, hissəciklərin oyuqlarda yerləşdirilməsi məsələləri ilə əlaqədar yaranan paylanmalar üçün limit paylanması kimi alınır. Ehtimal modellərində P. p. dəqiq ehtimal paylanması kimi böyük rol oynayır. P. p.-nın dəqiq ehtimal paylanması kimi məğzi təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində tamamilə aydın olur (bax, *Puasson prosesi*), burada P. p. qeyd olunmuş t müddəti ərzində baş verən müəyyən təsadüfi hadisələrin sayı $X(t)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması kimi interpretasiya olunur:

$$\mathbf{P}\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,e^{-\lambda t},\quad k=0,1,\ldots$$

(λ parametri vahid zaman ərzində baş verən hadisələr sayının orta qiymətidir); P. p. fəzanın hər hansı qeyd olunmuş oblastında nöqtələr sayının (təsadüfi kəmiyyət) paylanması kimi də interpretasiya olunur (paylanmanın parametri oblastın həcminə mütənasib olur).

Yuxarıdakı kimi təyin olunmuş P. p. ilə yanaşı ümumiləşmiş və ya mürəkkəb adlandırılan P. p.-na da baxılır. Eyni qanunla paylanmış, təsadüfi ν sayda asılı olmayan $X_1,\ldots,X_\nu$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmi $X_1+\ldots+X_\nu$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması belə adlandırılır (bu halda ν və $X_1,X_2,\ldots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, ν-nün isə λ parametrli P. p.-na tabe olduğu fərz olunur).

Ümumiləşmiş P. p.-nin xarakteristik funksiyası

$$f(t)=\exp\{\lambda(g(t)-1)\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $g(t)$, – X_ν təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır. Məs., mənfi binomial paylanma ümumiləşmiş P. p.-dır; n və p bu paylanmanın parametrləridirsə, onda bu paylanma üçün

$$g(t)=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-qe^{it}},\quad \lambda=\ln\frac{1}{p},\quad q=1-p$$

götürülür.

Ümumiləşmiş P. p.-ları sonsuz bölünən paylanmalardır və hər bir sonsuz bölünən paylanma ümumiləşmiş P. p.-nın limitidir (ola bilsin ki, «yerinidəyişmiş», yəni xarakteristik funksiyaları $\exp\{\lambda_n(g_n(t)-1-ita_n)\}$ şəkilli). Bununla yanaşı, bütün sonsuz bölünən paylanmalar (və yalnız onlar) $h_{n1}X_{n1}+\ldots$ $\ldots+h_{nk_n}X_{nk_n}-A_n$ şəkilli cəmlərin paylanmalarının limiti kimi alına bilinir, burada $X_{n1},\ldots,X_{nk}$ P. p.-na malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər seriyası sxemini təşkil edir, $h_{nk_n}>0$ və A_n – həqiqi ədədlərdir.

Əd.: [1] Poisson S., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en metière civile précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972.

PUASSON PAYLANMASI lokal kompakt Abel qrupunda « **Пуассона распределение** на локально компактной абелевой группе; **Poisson distribution** on a locally compact Abelian group » –

$$\pi=\exp\{-\alpha\}\left(E_0+\alpha E_g+\frac{\alpha^2}{2!}E_{2g}+\ldots+\frac{\alpha_n}{n!}E_{ng}+\ldots\right)$$

şəkilli π *paylanmasının* G qrupunda yerinidəyişmədir, burada $\alpha\geq 0$, E_g, – $g\in G$ nöqtəsində topalanmış cırlaşmış paylanmadır. π paylanmasının xarakteristik funksiyası

$$\hat{\pi}(t)=\exp\{\alpha[(g,\,t)-1]\}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

PUASSON PAYLANMASI mürəkkəb / ümumiləşmiş « **Пуассона распределение** сложное/обобщенное; **Poisson** compound/composite **distribution** » – bax, *Puasson paylanması.*

PUASSON PAYLANMASI ümumiləşmiş « **Пуассона распределение** обобщенное; **Poisson** compound **distribution** » sonlu F ölçüsü ilə uzlaşdırılmış lokal kompakt Abel qrupunda –

$$e(F)=\exp\{-F(X)\}\left(E_0+F+\frac{F^{*2}}{2!}+\ldots+\frac{F^{*n}}{n!}+\ldots\right)$$

düsturu ilə ifadə olunan $e(F)$ paylanmasının X qrupunda yerinidəyişmədir, burada E_0, – X qrupunun sıfrında topalanmış, cırlaşmış *paylanmadır*. $e(F)$ paylanmasının xarakteristik funksiyası

$$\widehat{e(F)}(y) = \exp\{\int [X(x, y) - 1]\, dF(x)\}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

***PUASSON PROSESİ « пуассоновский процесс; Poisson process »** – tam və mənfi olmayan qiymətlər alan, aşağıdakı şərtlərilə $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\zeta_t = \zeta(\omega; t),\ t \in [0; \infty)$ təsadüfi prosesidir:

1°. İxtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\zeta_0 = \zeta(\omega; 0) = 0$;

2°. ζ_t – asılı olmayan artımlarlı prosesdir;

3°. $t_1 < t_2$ şərtini ödəyən ixtiyari t_1, t_2 və ixtiyari $s > 0$ qiymətlərində $\zeta_{t_2} - \zeta_{t_1}$ və $\zeta_{t_2+s} - \zeta_{t_1+s}$ artımlarlı eyni qaynunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir (zamana görə b i r c i n s l i k)

4°. $h \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\zeta_n = 0\} = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_n = 1\} = \lambda h + o(h),\quad 0 < \lambda < \infty$$

(o r d i n a r l ı q şərti). Asılı olmayan artımlarlı $\{\zeta_t : t \in [0; \infty)\}$ prosesinin trayektoriyaları vahid ehtimalla pilləvari olub, t -nin azalmayan funksiyalarıdırsa və $t \geq 0$, $s \geq 0$ olduqda

$$\zeta_t\{\omega; 0\} = 0$$

və

$$\mathbf{P}\{\zeta\{\omega; t + s) - \zeta(\omega; t) = k\} = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!},$$

$$k = 0, 1, 2, ...$$

olarsa, $(\zeta_t : t \geq 0)$ Puasson prosesidir, burada λ – qeyd olunmuş müsbət qiymətli parametr olub, vahid zaman ərzində baş verən sıçrayışların orta sayıdır.

$\{\zeta_t : t \in [0; \infty)\}$ Puasson prosesidirsə, onda

$$\mathbf{P}\{\zeta_t = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0, 1, ...;\ \lambda > 0 \qquad (1)$$

Bu düsturla verilmiş Puasson paylanmasının doğuran funksiyası

$$\Psi_t(z) = e^{-\lambda t(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}z^k$$

düsturu ilə təyin olunur.

(1)-dən istifadə edərək Puasson prosesinin n – ölçülü paylanma funksiyalarını təyin etmək olur. $0 \leq t_1 < ... < t_n$ şərtini ödəyən t_i-lərin ($t_i \in [0, +\infty]$, $i = 1, 2, ..., n$) ixtiyari qiymətlərində $k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_n$ olduqda $\{\zeta_{t_1} = k_1;\ \zeta_{t_2} = k_2; ...\ \zeta_{t_n} = k_n\} =$ $= \{\zeta_{t_1} = k_1; \zeta_{t_2} - \zeta_{t1} = k_2 - k_1, ...\}$ və P. p. artımları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan

$$\mathbf{P}\{\zeta_{t_1} = k_1, ..., \zeta_{t_n} = k_n\} = \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda t_1} \times$$

$$\times\frac{(\lambda\,(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}\cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \times ... \times$$

$$\times\frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{k_n - k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})}\cdot e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \qquad (2)$$

$\{\zeta_t;\ t \in T\}$ Puasson prosesi olarsa, onda onun trayektoriyalar çoxluğu yalnız vahid sıçrayışlarla dəyişən pilləvarı funsiyalar çoxluğu olacaqdır.

Beləliklə, (1) düsturu ilə verilmiş ehtimallar Puasson prosesinin t anındakı qiymətinin k -ya bərabər olması $(k = 0, 1, 2, ...)$ ehtimallarıdır. Prosesin ordinarlıq xassəsinə əsasən, ζ_t təsadüfi prosesinin ixtiyari qeyd olunmuş t anında aldığı qiymət $[0; t]$ parçasında prosesin trayektoriyasının vahid uzunluqlu sıçrayışlarının sayına bərabərdir. (2) düsturu ilə verilmiş ehtimallar da analoji olaraq təyin edilir: $\mathbf{P}\{\zeta_{t_1} = k_1, ..., \zeta_{t_n} = k_n\}$ prosesin trayektoriyasının $[0; t_1]$ parçasında vahid uzunluqlu sıçrayışları sayının k_1 -ə, ... $(t_n - t_{n-1})$ -də sıçrayışlar sayının $(k_n - k_{n-1})$ -ə bərabər olması ehtimalıdır $(t_1 < t_2 < ... < t_n$; $k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_n)$.

θ_k $\{\zeta_t;\ t \geq T\}$ Puasson prosesinin trayektoriyasının k -cı sıçrayış anı olsun, $k = 1, 2, ...$; $\theta_0 = 0$. $\tau_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, $k = 0, 1, 2, ...$ fərqilə təyin olunan qonşu sıçrayış anları arasındakı zaman intervallarının təsadüfi kəmiyyətlər olduğu aydındır. τ_k -nın paylanma qanunu haqqındakı aşağıdakı müddəa doğrudur:

n -in ixtiyari qiymətlərində $\tau_1, ..., \tau_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bu təsadüfi kəmiyyətlərdən hər biri λ parametrli üstlü qanunla paylanmışdır.

Puasson prosesinin trayektoriyaları sıçrayış anları ilə təyin olunduğundan və qonşu sıçrayış anları arasındakı zaman intervalları asılı olmayan və eyni üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan Puasson prosesi üçün onun tərifinə ekvivalent tərif vermək olar.

Puasson prosesi kütləvi xidmət nəzəriyyəsində təsadüf edilən bəzi məsələlərin riyazi modeli kimi mühüm əhəmiyyətə malikdir. «Telefon stansiyasında iş prosesi» məsələsi üçün Puasson prosesi əvəzolunmaz riyazi modeldir. Bu halda ζ_t təsadüfi prosesi stansiyaya t müddəti ərzində daxil olmuş çağırışlar sayını ifadə edir: ζ_t funksiyası vahid uzunluqlu sıçrayışlarla artır; bu prosesin artımlarının (kiçik effektlərin nəzərə alınmaması şərtilə) asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğunu qəbul etmək olar.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

PUASSON PROSESİ i m p u l s a l **« пуассоновский процесс** и м п у л ь с н ы й; i m p u l s e **Poisson process »**, f i l t r l ə n m i ş P u a s s o n p r o s e s i – impulslarının baş vermə anları Puasson ardıcıllığı olan i m p u l s a l t ə s a d ü f i p r o s e s d i r.

Bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

PUASSON PROSESİ ü m u m i l ə ş m i ş **« пуассоновский процесс** о б о б щ е н н ы й; c o m p o u n d **Poisson process »** – bax, *Ümumiləşmiş Puasson proses.*

PUASSON ŞƏBƏKƏSİ « пуассоновская сеть; Poisson net » – *qapalı təsadüfi çoxluqdur*, aşağıdakı kimi təyin olunur. S, – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında vahid radiuslu sfera, λ, – S-də müsbət ölçü, mes – mənfi olmayan yarımoxda Lebeq ölçüsü, Π, – $\lambda \otimes \mathrm{mes}$ ölçüsünə uyğun Puasson nöqtəvi prosesi (burada $\otimes$ – ölçülərin hasili işarəsidir), $H(u, r) = \{x : (u, x) = r\}$, – $\mathbb{R}^n$-də hipermüstəvi, (u, x) isə u və x-in skalyar hasilidir.

$$A = \bigcup_{(u,r)\in\Pi} H(u, r)$$

təsadüfi çoxluğuna Puasson şəbəkəsi deyilir. Əgər $\mathscr{F}$ $\mathbb{R}^n$-in qapalı altçoxluqlarının çoxluğu, K $\mathbb{R}^n$-də kompakt, $\mathscr{F}_K = \{F : F \in \mathscr{F}, F \cap K \neq \varnothing\}$, $\psi(K) = (\lambda \otimes \mathrm{mes}) \times (H^{-1}(\mathscr{F}_K))$ olarsa, onda P. ş. A-nın müşayiətedici funksionalı T_A

$$T_A = 1 - \exp(-\psi)$$

şəklində yazıla bilinər.

Əd.: [1] Матерон Ж.., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Сантало Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983.

PUASSON TEOREMİ « Пуассона теорема; Poisson theorem » – Bernulli sxemində asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin *paylanmalarının Puasson paylanmasına* yığılması haqqında müddəadır. Seriyalar sxemi üçün P. t. aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\{X_{nj}\}_{j=1}^{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ hər bir seriyada asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər seriyalarının ardıcıllığı,

$$p_{nj} \equiv \mathbf{P}\{X_{nj} = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X_{nj} = 0\}$$

olsun. Əgər

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nn},$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le n} p_{nj} = 0, \quad 0 < \lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} p_{nj} < \infty$$

olarsa, onda hər bir $k = 0, 1, 2, \ldots$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{S_n = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

münasibəti doğrudur. Xüsusi halda, əgər $p_{n1} = \ldots = p_{nn} = p_n$ olarsa, P. t.-nə görə n və p_n parametrlərli binomial paylanmalar $np \to \lambda > 0$, $n \to \infty$ olduqda λ parametrli Puasson paylanmasına yığılır. Belə şəkildə ilk müddəanı S. Puasson [1]-də ifadə etmişdir.

Əgər X_{nj} təsadüfi kəmiyyətləri Puasson sınaqları seriyaları sxemində A_{nj} hadisələrinin indikatorları kimi interpretasiya olunarlarsa, onda P. t.-nə əsasən sınaqların sayı böyük, hər bir hadisənin bir sınaqda baş vermə ehtimalı kiçik olarsa, baş verən hadisələr sayı təqribən Puasson qanunu ilə paylanır. Bununla əlaqədar olaraq P. t. bəzən kiçik ədədlər qanunu və ya nadir hadisələr haqqında teorem də adlandırılır.

P. t.-ndə yığılma sürəti aşağıdakı kimi qiymətləndirilmişdir:

$$\left| \mathbf{P}\{S_n = k\} - e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^k}{k!} \right| \le 2 \sum_{j=1}^{n} p_{nj}^2, \qquad (*)$$

burada $\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} p_{nj}$. Xüsusi halda, əgər $p_{n1} = \ldots = p_{nn} = \lambda/n$ olarsa, onda $\lambda_n = \lambda$ və (*)-nun sağ tərəfi $2\lambda^2/n$ olur.

P. t. sonsuz bölünən paylanmaların təsviri haqqında məsələlər çərçivəsində Puasson paylanmasına yaxınlaşmanın öyrənilməsinin və hər hansı A_n sabitlərilə mərkəzləndirilmiş, asılı olmayan müntəzəm sonsuz kiçilən təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nn} - A_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları F_n-lərin Puasson paylanmasına yığılma şərtlərinin tapılmasının əsasını qoymuşdur. Zəif yığılmanın uyğun kriterisini ümumi kriteridən almaq çətin olmur (bax, *Limit teoremləri*).

Qeyri – klassik qoyuluşda limit teoremləri nəzəriyyəsində F_n paylanmalarının Puasson qanununa yığılması üçün daha ümumi kriteri də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en metière criminelle et en metière civile précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

PUASSON TƏSADÜFİ MEYDANI « пуассоновское случайное поле; Poisson random field » – ixtiyari məhdud çoxluğa aid olan nöqtələrinin sayı Puasson paylanmasına malik olan nöqtəvi *təsadüfi meydandır*; kəsişməyən çoxluqlara aid olan nöqtələrin sayları qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Əd.: [1] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимое точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

RABİTƏ KANALI « связи канал; communication channel » – bax, *Kanal*; r a b i t ə k a n a l ı.

RADEMAXER ARDICILLIĞI « Радемахера последовательность; Rademacher sequence » – $[0,1]$ parçasında təyin olunmuş

$$r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

funksionallarının ardıcıllığıdır. H. Rademaxer tərəfindən $[1]$-də daxil olunmuşdur. R. a. asılı olmayan, sanki yəqin iki $+1$ və -1 qiymətlərini $1/2$ ehtimalı ilə alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır ($[0,1]$-də altçoxluqların Borel σ – cəbri və Lebeq ölçüsü götürülür). Əksər hallarda, ixtiyari ehtimal fəzasında təyin olunmuş ixtiyari belə təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı da R. a. kimi anlaşılır (bəzən bu ardıcıllıq asılı olmayan B e r n u l l i t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t l ə r ardıcıllığı kimi də adlandırılır). R. a. Bernulli sınaqları sxemində «müvəffəqiyyətlər» sayı ardıcıllığı ilə sıx əlaqədardır, bu sxem üçün ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox mühüm qanunları ilkin olaraq müəyyən olunmuşdu və bu qanunlar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinə aid idi.

Ehtimal nəzəriyyəsində və funksiyalar nəzəriyyəsində əmsalları skalyar və ya vektor a_n olan ($n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \qquad (*)$$

sırasının sanki yəqin yığılma şərtləri mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Əgər $a_n \in \mathbb{R}^1$ və $\sum_n a_n^2 < \infty$ olarsa, onda (*) sırası sanki yəqin yığılır (R a d e m a x e r t e o r e m i); əgər, əksinə $\sum_n a_n^2 = \infty$ olarsa, onda (*) sırası sanki yəqin dağılır (X i n ç i n – K o l m o q o r o v t e o r e m i), a_n əmsalları ümumi Banax fəzasından götürüldükdə, (*) sırasının yığılması üçün effektiv zəruri və kafi şərtlər yoxdur. Sonlu kotip Banax şəbəkələri üçün bu məsələ tamamilə həll olunmuşdur (bax, $[3]$). Belə fəzalara tipik misal $L^p(S, \Sigma, \mu)$, $1 \le p < \infty$ fəzalarıdır. $\sum_k a_k r_k(t)$, $a_k \in L^p$ sırası L^p-də, demək olar ki, bütün $t \in [0,1]$ qiymətlərində, yalnız və yalnız, o halda yığılır ki,

$$\int_S \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(s) \right)^{p/2} d\mu(s) < \infty$$

şərti ödənilsin. Məsələn, əgər B Hilbert fəzasıdırsa, onda (*) sırası $a_n \in B$ olduğu halda sanki yəqin, yalnız və yalnız, o halda yığılır ki, $\sum \| a_n \|^2 < \infty$ olsun.

(*) sırasının yığılma şərtləri Banax fəzalarının mühüm siniflərinin tərifinin əsasını təşkil edir (*Banax fəzası* p t i p).

R. a. $L_2[0,1]$-də tam ortonormalanmış sistem deyildir. R. a.-nı özündə saxlayan ən çox yayılmış tam ortonormalanmış sistem Uolş funksiyalar sistemidir.

Əd.: [1] R a d e m a c h e r H., «Math. Ann.», 1922, Bd 87, S. 112–38; [2] К а ш и н Б. С. и др., Ортогональные ряды, М., 1984; [3] M a u r e y B., в кн.: Séminaire Maurey – Schwartz, 1973–1974. Exp. № 24–25, P., 1974; [4] К а ц М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

RADEMAXER TEOREMİ « Радемахера теорема; Rademacher theorem » – bax, *Rademaxer ardıcıllığı*.

RADON FƏZASI « радоново пространство; Radon space » – bax, *Ölçü*.

RADON ÖLÇÜSÜ « Радона / радонова мера; Radon measure » – T topoloji Hausdorf fəzasının Borel σ – cəbri $\mathscr{B}(T)$-də elə sonlu μ *ölçüsüdür* ki, hər bir $B \in \mathscr{B}(T)$ çoxluğu üçün

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) : K \subset B,\ K - \text{kompakt çoxluqdur} \}$$

münasibəti doğrudur.

Hər bir R. ö. τ – hamar, requlyar və sıx ölçüdür. Polski fəzasında hər bir sonlu Borel ölçüsü (tam separabel metrik fəzada da) R. ö.-dür.

$\mathscr{B}(T)$-də sonsuz ölçü üçün (*) münasibəti ödənilərsə və bu ölçü lokal sonlu olarsa (yəni hər bir $x \in T$ nöqtəsinin sonlu ölçüyə malik ətrafı olarsa), belə ölçü də R. ö. adlanır.

$\mathscr{B}(T)$-də dəyişənişarəli (həm də kompleks) ölçünün variasiyası yuxarıdakı tərif mənasında r a d o n variasiyası olarsa, belə ölçü də R. ö. adlanır.

Əd.: [1] Б у р б а к и Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977; [2] S c h w a r t z L., Radon measure on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, L., 1973.

RADON – NİKODİM XASSƏSİ B a n a x f ə z a s ı n d a **« Радона – Никодима свойство** б а н а х о в а п р о с т р а н с т в а; **Radon – Nikodym property** o f a B a n a c h s p a c e **»** – qiymətləri bu fəzadan olan vektor ölçüləri üçün *Radon – Nikodim teoreminin* doğruluğu ilə əlaqədar olan fəza xassəsidir. Əgər ixtiyari $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası üçün sonlu variasiyalı, $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ixtiyari vektor ölçüsü $\varphi : \Omega \to \mathbf{B}$

$$\varphi(A) = \int_A X \, d\mathbf{P}\,, \quad A \in \mathscr{A}$$

inteqralı şəklində göstərilərsə, Banax fəzası $\mathbf{B}$ R. – N. x.-nə malikdir, deyilir, burada $X : \Omega \to \mathbf{B}$ güclü 1-ci tərtiblə separabel qiymətli təsadüfi elementdir. Həqiqi ədədlərin fəzası $\mathbb{R}$ və

kompleks ədədlərin fəzası $\mathbb{C}$ Radon – Nikodim teoreminə əsasən R. – N. x.-nə malikdirlər. Əgər $\mathbf{B}$ fəzası Lebeq ölçülü $[0,1]$ ehtimal fəzasına nəzərən R. – N. x.-nə malikdirsə, onda bu fəza R. – N. x.-sinə malikdir. Banax fəzalarından refleksiv fəzalar, qoşma olan separabel fəzalar R. – N. x.-nə malik fəzalardır. c_0 və $L^1[0,1]$ fəzaları R. – N. x.-nə malik deyildirlər. R. – N. x.-ni təmin edən müxtəlif həndəsi şərtlər məlumdur.

$\mathbf{B}$ fəzası R. – N. x.-nə malik olduğu halda (və yalnız bu halda), $\mathbf{B}$ fəzasında martinqal üçün martinqalın yığılması haqqında klassik Dub teoreminin analoqu vardır. R. – N. x. anlayışı *radonlayıcı operatorlara* aid nəticələr baxımından maraqlıdır.

Əd.: [1] D i e s t e l J., U h l J., Vector measures, Providence, 1977.

RADON – NİKODİM TEOREMİ « Радона – Никодима теорема; Radon – Nikodym theorem » – *ölçü* nəzəriyyəsinin əsas teoremlərindən biridir, yüklərin (ümumiləşmiş ölçülərin) ölçülər vasitəsilə inteqral ifadələrinə aiddir; bu yüklərin bu ölçülərə nəzərən mütləq kəsilməz olduğu fərz olunur. $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, – σ – sonlu ölçülü fəza, λ, – $\mathscr{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ixtiyari σ – sonlu yük olsun [sonuncu şərt onu ifadə edir ki, ixtiyari $Y \in \mathscr{A}$ üçün $\mu(Y) = 0$ münasibəti $\lambda(Y) = 0$ münasibətini doğurur]. Onda Ω -da elə ədədi sonlu μ – ölçülən f funksiyası vardır ki, ixtiyari $Z \in \mathscr{A}$ üçün

$$\lambda(Z) = \int_Z f \, d\mu$$

bərabərliyi doğrudur (R a d o n – N i k o d i m t e o r e m i).

f funksiyası o mənada yeganədir ki, əgər g Ω -da hər hansı digər elə μ – ölçülən ədədi funksiya olarsa ki, bu funksiya üçün

$$\lambda(Z) = \int_Z g \, d\mu, \quad Z \in \mathscr{A}$$

bərabərliyi doğrudur, onda μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə $g(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ münasibəti ödənilir.

f funksiyası μ ölçüsünə nəzərən λ y ü k ü n ü n R a d o n – N i k o d i m t ö r ə m ə s i (s ı x l ı ğ ı) adlanır və $\frac{d\lambda}{d\mu}$ simvolu ilə işarə olunur. Əgər λ yükü ölçü (müsbət) olarsa, onda onun Radon – Nikodim törəməsi sanki hər yerdə müsbətdir. λ yükünün tam variasiyası $|\lambda|$ üçün

$$|\lambda|(Z) = \int_Z |f| \, d\mu, \quad Z \in \mathscr{A}$$

münasibəti doğrudur.

Məsələn, λ yükünün Radon – Nikodim törəməsi μ ölçüsünə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda inteqrallanandır ki, λ yükünün sonlu tam variasiyası olmuş olsun.

R. – N. t. Hilbert fəzasında verilmiş ixtiyari kəsilməz xətti funksionalın ifadəsi haqqında Riss teoremi ilə sıx əlaqəlidir (bu teoremlərdən ixtiyari biri digərindən alınır). Ehtimal nəzəriyyəsində şərti ehtimal və şərti riyazi gözləmə anlayışları R. – N. t. vasitəsilə korrekt şəkildə daxil olunur (bax, [2]). R. – N. t.-nin bəzi ümumiləşmələri funksional analizdə istifadə olunur (bax, məs., [3]).

Bax, *Mütləq kəsilməz paylanma*.

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [3] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [4] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

RADON – NİKODİM TÖRƏMƏSİ « Радона – Никодима производная; Radon – Nikodym derivative » – bax, *Sıxlıq*, *ehtimal sıxlığı*.

RADONLAYICI OPERATOR « радонизирующий / радонифицирующий оператор; Radonifying operator » – B_1 -də kəsilməz xarakteristik funksionalı olan hər bir silindrik ölçünü Radon ölçüsünə qədər davam olunmuş silindrik ölçüyə çevirən, B_1 Banax fəzasından B_2 Banax fəzasına kəsilməz xətti u operatorudur. Ekvivalent tərif: əgər hər hansı $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və hər bir kəsilməz xətti $T : B_1^* \to L_0(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ operatoru üçün $Tu^* : B_2^* \to L_0(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ hər hansı $Y : \Omega \to B_2$ separabelqiymətli təsadüfi element ilə doğurulursa, $u : B_1 \to B_2$ R. o.-dur.

Sazonov teoreminə əsasən, əgər H_1 və H_2 Hilbert fəzaları olarsa, onda $u : H_1 \to H_2$ kəsilməz xətti operatoru, yalnız və yalnız, o halda R. o.-dur ki, u Hilbert – Şmidt operatoru olsun. Bu hökmün Banax fəzalarının daha ümumi cütləri üçün ümumiləşdirilməsi ilə əlaqədar olaraq L. Şvarts (L. Schwartz) «R. o.» anlayışını daxil etmişdir.

R. o. anlayışı ilə (p, q) – r a d o n l a y ı c ı və p – radonlayıcı o p e r a t o r l a r anlayışları da sıx əlaqədardırlar, $0 \le q \le p \le \infty$. Əgər B_1 -də hər bir p – tip μ silindrik ölçüsü üçün onun obrazı $\mu_u = \mu \circ u^{-1}$ B_2 -də güclü q – tərtib Radon ölçüsünə qədər davam olunarsa və ya buna ekvivalent olaraq: hər bir $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və hər bir $T : B_1^* \to L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ kəsilməz xətti operatoru üçün $T \circ u^*$ operatoru güclü q tərtib (yəni $\mathbf{M} \|Y\|^q < \infty$) hər hansı $Y : \Omega \to B_2$ separabelqiymətli təsadüfi elementi ilə doğurulursa, $u : B_1 \to B_2$ kəsilməz xətti operatoru (q, p) – r a d o n l a y ı c ı o p e r a t o r adlanır. (p, p) – radonlayıcı operator p – r a d o n l a y ı c ı o p e r a t o r adlanır. 0 – radonlayıcı operator anlayışı R. o. anlayışı ilə eynidir. $1 < p < \infty$ olduqda $u : B_1 \to B_2$ kəsilməz xətti operatoru, yalnız və yalnız, o halda p – radonlayıcı olur ki, o, p – c ə m l ə y i c i o p e r a t o r, yəni hər hansı $\beta > 0$ və bütün $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in B_1$ üçün

$$\sum \|u b_k\|^p \le \beta \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \left| b^*(b_k)^p \right| : b^* \in B_1^* \, \|b^*\| \le 1 \right\}$$

xassəsini ödəyən operator olsun (K v a p e n – Ş v a r t s teoremi). p – cəmləyici operatorunun tərifinin $0 < p \le 1$ olduqda da mənası vardır. $p = 1$ olduqda, əgər B_2 Radon – Nikodim xassəli Banax fəzası olarsa, yuxarıdakı müddəanın analoqu qeyd olunduğu kimi ifadə olunur. Əgər B_1^* məhdud

approksimasiya xassəsinə malik olarsa, B_2 Radon – Nikodim xassəli Banax fəzası olarsa, analoji hökm $0 < p < 1$ olduqda doğrudur.

Sonuncu müddəada məhdud approksimasiyalıq xassəsini atmaq olmaz, hətta B_2 Hilbert fəzası olsa belə (bax, [5]).

Əd.: [1] S c h w a r t z L., «C. r. Acad. sci.» Ser. A, 1967, t. 265, № 25, p. 832–34; [2] S e m i n a i r e L., S c h w a r t z L., Applications radonifiantes, P., 1969–70; [3] K w a p i e n S., «C. r. Acad. sci.», Ser. A, 1969, t. 269, № 14, p. 590–92; [4] П и ч А., Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [5] P i s i e r G., «Asterisque», 1985, t. 131, № 1, p. 163–74.

RANDOMİZASİYA « рандомизация; randomization » – 1) statistik nəticənin alınması üçün istifadə olunan və randomlanmış statistik prosedurlarda qərarların çıxarılması üçün əlavə asılı olmayan eksperimentlərin aparılmasından ibarət olan prosedurlardan biridir. Bu prosedur araşdırılan obyekt haqqında son qərar qəbul edilməsi üçün statistik eksperimentin növbəti təkrarında müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin seçilməsindən ötrü statistik eksperimentin dayandırılmasını münasib surətdə təyin etməyə xidmət edir. R. prosedurunda təsadüfilik mexanizmi olaraq vergəc (rus. датчик) və ya təsadüfi ədədlər cədvəlindən istifadə edilir (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*); 2) eksperimentlərin statistik planlaşdırılmasında təkmilləşdirilmə üsullarının təsirlərinin effektivliyinin araşdırılmasına əsaslandırılaraq statistik nəticələrin alınması üçün mövcud prosedurlardan biridir və təkmilləşdirmə üsullarının eksperimental vahidlərlə «ixtiyari» (təsadüfi) qaydada tutuşdurulmasından (müqayisəsindən) ibarətdir. Bax, məs., *Dispersion analiz.*

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез., пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятность и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1984; [3] F i s h e r R. A., The design of experiments, Edin. – L., 1935.

RANDOMİZASİYA(s ı) k r i t e r i l ə r i n, k r i t e r i l ə r i n y e r d ə y i ş m ə l ə r i n i n **« рандомизация** к р и т е р и й, п е р е с т а н о в о к к р и т е р и й; **randomization / permutation** t e s t **»** – müşahidə olunan təsadüfi vektorun bu vektorun arqumentlərinin yerdəyişməsinə nəzərən ehtimal sıxlığının simmetrikliyi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir.* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun realizasiyası $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ üzrə $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun naməlum ehtimal sıxlığı $p(x) = p(x_1, \dots, x_n)$-in öz arqumentlərinin yerdəyişməsinə nəzərən simmetrik olması, yəni $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{r_1}, \dots, x_{r_n})$ [$(r_1, \dots, r_n)$, – $(1, 2, \dots, n)$ vektorunun koordinatlarının yerdəyişməsindən alınan vektordur] bərabərliyinin ödənilməsi haqqında H_0 hipotezini yoxlamaq tələb olunur. Daha sonra fərz olunur ki, $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ və $\mathbf{R}$ – uyğun olaraq, qaydalı statistikalar vektoru və ranqlar vektorudur, bu vektorlar isə $\mathbf{X}$-in müşahidələri vektoru üzrə qurulmuşdur; $\Psi = \Psi(\mathbf{X}^{(\cdot)}, \mathbf{R})$ elə statistika olsun ki,

$$\mathbf{M}\{\Psi(\mathbf{X}^{(\cdot)}, \mathbf{R}) \mid \mathbf{X}^{(\cdot)}\} = \alpha$$

bərabərliyi hər hansı $\alpha \in (0; 1)$ üçün sanki hər yerdə ödənilsin. Bu halda Ψ statistikası ilə $\varphi(\mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{X}^{(\cdot)}, \mathbf{R})$ münasibətilə əlaqəli olan, kritik funksiyası φ olan statistik kriteri r a n d o m i z a s i y a k r i t e r i s i adlanır. $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ tam *kafi statistika* olduğundan, H_0 hipotezinin doğruluğu halında *oxşar kriterilər* ailəsi yerdəyişmələr kriteriləri ailəsi ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

RANDOMİZASİYA(s ı) o y u n u n **« рандомизация** и г р ы; **randomization** o f a g a m e **»** – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*.

RANDOMLANMAMIŞ HƏLL « нерандомизированное решение; nonrandomized decision » – randomlanmamış həlledici funksiyaya görə seçilmiş həldir (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*).

RANDOMLANMAMIŞ HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « нерандомизированная решающая функция; nonrandomized decision function » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

RANDOMLANMAMIŞ KRİTERİ « нерандомизированный критерий; nonrandomized test » – kritik funksiyası φ yalnız 0 və 1 qiymətlərini alan *statistik kriteridir*. R. k. kritik oblast $S = \{x : \varphi(x) = 1\}$ ilə verilir ki, müşahidə nəticəsi bu oblastdan olduqda ilkin hipotez qəbul edilmir. Praktikada yalnız R. k. istifadə olunur. R. k.-nin ölçüsü verilən mühümlük ölçüsünə çatmaya da bilər (diskret paylanmalar üçün). Bu halda belə kriterinin faktiki ölçüsünü göstərmək qəbul olunmuşdur.

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

RANDOMLANMAMIŞ STRATEGİYA « нерандомизированная стратегия; nonrandomized strategy / policy » – bax, *Strategiya*, *İdarəolunan təsadüfi proses* d i s k r e t z a m a n l ı.

RANDOMLANMIŞ BLOKLAR PLANI « рандомизированных блоков план; randomized block design » – blokda nümunələr üzərində ölçmələrin aparılma qaydası təsadüfi olan *blok plandır.*

RANDOMLANMIŞ HƏLLEDİCİ FUNKSİYA « рандомизированная решающая функция; randomized decision function » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

RANDOMLANMIŞ HƏLLEDİCİ QAYDA « рандомизированное решающее правило; randomized decision rule » – bax, *Statistik oyun.*

RANDOMLANMIŞ KRİTERİ « рандомизированный критерий; randomized test » – kritik funksiyası seçimi fəzanın heç olmasa bəzi nöqtələrində 0 və 1-dən fərqli qiymətlər alan *statistik kriteridir.* R. k. ilə hipotezlərin yoxlanılması prosedurunda r a n d o m i z a s i y a aparılır, yəni əlavə təsadüfi sınaq aparılır və bu sınağın nəticəsindən asılı olaraq hipotezin qəbul edilib-edilməməsi haqqında qərar verilir.

Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

RANDOMLANMIŞ OYUN « рандомизированная игра; randomized game » – bax, *Statistik oyun.*

RANDOMLANMIŞ PLAN « рандомизированный план; randomized design » – bax, *Dispersion analiz.*

RANDOMLANMIŞ STATİSTİK QİYMƏT « рандомизированная оценка; randomized estimator » – qiymətləndirmənin statistik problemində randomlanmış *həlledici funksiyadır*. R. s. q., x – statistik eksperimentin nəticəsidirsə, qiymətləndirilən θ parametrinin ölçülən fəzasında $\varphi(\cdot \mid x)$ paylanmasını verməklə təyin olunur və bu halda paylanması $\varphi(\cdot \mid x)$

olan təsadüfi kəmiyyəti ayrıca müşahidə etmək tələb olunur; bu müşahidənin nəticəsi θ üçün statistik qiymət götürülür. Qiymətləndirmənin statistik problemində hipotezlərin yoxlanılması məsələlərindən fərqli olaraq, optimal statistik qiymətlər bir qayda olaraq, randomlanmayan həlledici funksiyalardır.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., M., 1975; [2] Hodges J., Lehman E., «Ann. Math. Statist.», 1950, v. 21, № 2, p. 182–97.

RANDOMLANMIŞ STRATEGİYA, qarışıq strategiya **« рандомизированная стратегия,** смешанная стратегия; **randomized (mixed) strategy »** – *iki şəxsin oyununda* (və ya *strategiya oyunda*) strategiyalardan birinin təsadüfi seçilmə qaydasıdır (verilmiş paylanma ilə). Təsadüfi seçilmiş strategiya bütün mümkün «təmiz strategiya»lar çoxluğundan seçilir. Seçilmiş paylanma R. s. kimi qəbul edilir.

RANQ KORRELYASİYA ƏMSALI « ранговой корреляции коэффициент; rank correlation coefficient » – nominal təsadüfi dəyişənlər arasında statistik əlaqənin sıxlığı dərəcəsini ölçən kəmiyyətdir. Aşağıda cütün R. k. ə.-nın qurulması üsullarından biri verilmişdir. Fərz olunur ki, ümumiləşmiş korrelyasiya əmsalı Γ ([4]-dəki kimi) aşağıdakı şəkildə verilir:

$$\Gamma = \sum a_{ij}\, b_{ij} \Big/ \sqrt{\sum a_{ij}^2 \sum b_{ij}^2}\ ,$$

burada $a_{ij} = a(X_i, X_j)$, $b_{ij} = b(Y_i, Y_j)$ – uyğun olaraq, X və Y müşahidələr cütlərinin bəzi funksiyalarıdır. $a_{ij} = X_j - X_i$, $b_{ij} = Y_j - Y_i$ olduqda cütün Pirson korrelyasiyasının adi əmsalı alınır.

(R_i, S_i), – seçimdaxili ranqlanmada (X_i, Y_i) təsadüfi kəmiyyətlərinin ranqları olsun, $i = 1, \ldots, n$. $a_{ij} = R_j - R_i$, $b_{ij} = S_j - S_i$ götürdükdə, Spirmen ranq korrelyasiya əmsalı ρ alınır, burada R_i, – X müşahidələrinin, S_i, – Y müşahidələrinin ranqlarıdır, $i = 1, \ldots, n$. Beləliklə, ρ – cütün korrelyasiya əmsalı kimi, müşahidələrin onların ranqları ilə əvəz olunması ilə hesablanır. $R_i < R_j$ olduqda $a_{ij} = 1$, $R_i > R_j$ olduqda $a_{ij} = -1$ götürdükdə Kendall ranq korrelyasiya əmsalı τ alınır.

Nominal təsadüfi dəyişənlərin sayı ikidən çox olduqda (m, $m > 2$) bunlar arasında statistik əlaqənin sıxlığı dərəcəsini ölçmək üçün, adətən, R. k. ə.-nın toplam variantı – Kendall konkordasiya (uzlaşma) əmsalı adlandırılan $W(m)$ əmsalından istifadə olunur. Bu əmsalın seçimi versiyası aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\hat{W}_m = \frac{12}{m^2(n^3 - n)} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} R_i(j) - \frac{m(n+1)}{2} \right)^2 ,$$

burada $R_i(j)$, – j-ci təsadüfi dəyişənin i-ci müşahidəsinin ranqıdır.

Əd.: [1] Кендэл М. Дж., Ранговые корреляции, пер. с англ., M., 1975; [2] Холлендер М., Вульф Д. А., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., M., 1983; [3] Лике Ш., Ляга Й., Основные таблицы математической статистики, пер. с чеш., M., 1985; [4] Daniels H. E., «Biometrika», 1948, v. 35, p. 416–17.

RANQ KORRELYASİYASI « ранговая корреляция; rank correlation » – nominal təsadüfi dəyişənlər arasında statistik əlaqədir, bu dəyişənlər statistik olaraq araşdırılmış obyektləri bunlarda analiz olunan xassənin aşkar olunma cəhəti üzrə nizamlamağa imkan yaradır. Statistik praktikada bu əlaqə statistik araşdırılmış obyektlərin müxtəlif xassələr üzrə nizamlandırılmış sonuncu verilənləri (ranqlanmaları) əsasında analiz olunur. Beləliklə, eyni bir obyektlər çoxluğunun iki və ya bir neçə ranqlanmaları arasında statistik əlaqəni ölçməyə və analizə imkan yaradan anlayış və metodlar sisteminə baxılır.

Belə ranqlanmaların generasiyalanma mexanizmini təsvir edən ən çox yayılmış riyazi model (iki bir-birindən asılı dəyişən halında) aşağıdakı sxemlə ifadə olunur.

(X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$ – ikiölçülü $F(x, y)$ paylanmasına tabe, marginal paylanma funksiyaları F_1 və F_2 olan təsadüfi kəmiyyətlər, $X_1 \le \ldots \le X_n$, – X-in müşahidələri üzrə qurulmuş variasion sıra olsun. Asılılığın ranq ölçüləri bir qayda olaraq Y-in müşahidələrinin qaydası ilə bu artmaqda olan qaydanın uzlaşmasını ölçür. Belə ölçülər X və Y müşahidələrinin monoton çevirmələrinə həssas olmayıb, bu mənada qeyri – parametrik ölçülərdir. Belə ölçülərin əksəriyyətinin seçimi versiyaları asılı olmamazlıq hipotezinin yoxlanılması üçün təyin olunmuş kriterilərin paylanmasından asılı olmayan statistikalar olur.

Asılılıq ölçülərinin qurulmasının ümumi ideyası aşağıdakı kimidir. Əvvəlcə F-in $F_1 \cdot F_2$ hasilindən fərqini xarakterizə edən hər hansı funksional daxil olunur. Sonra bu funksionalın statistik qiyməti olan *ranq statistikası* qurulur. Asılı olmamazlıq hipotezi ödənildikdə bu statistikanın paylanması F-dən asılı olmur.

R. k.-nın ən yayılmış əmsallarından Spirmen əmsalı ρ və Kendall əmsalı τ-dur. Spirmen əmsalı

$$\rho_{\text{sp}} = 3 \iint [\,2F_1(x) - 1]\,[\,2F_2(y) - 1]\, dF(x, y)$$

şəklində asılılığı ölçür. Kendall əmsalı isə

$$\tau_K = 2\mathbf{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - 1$$

funksionalının statistik qiymətidir. ρ və τ əmsallarının xətti kombinasiyası olduqca ümumi

$$r_m = \iint [\,F(x,\, y) - F_1(x)F_2(y)]\, dF(x, y)$$

funksionalının statistik qiymətidir (bax, [4]).

Asılılıq ölçülərindən ən məşhur olanlardan biri də

$$\Delta F = \iint [\,F(x, y) - F_1(x)F_2(y)]^2\, dF(x, y)$$

Höfdinq ölçüsüdür (bax, [5]). Bu ölçüyə əsaslanan Höfdinq asılı olmamazlıq kriterisi yalnız asılı olmamazlığı müəyyənləşdirmək üçün tətbiq olunmur.

Bütün qeyd olunmuş və digər asılılıq ölçülərinin statistik qiymətləri olan statistikalar U statistikalardır.

Asılılıq ölçülərinin qurulmasına digər yanaşma xətti ranq statistikaları nəzəriyyəsinin metodlarının tətbiqindən ibarətdir (bax, [1]). Uyğun statistikalar

$$T = \sum_{i=1}^{n} a(R_i)\, b(S_i)$$

şəklindədir, burada (R_i, S_i), $i = 1, \ldots, n$, – X və Y müşahidələrinin ranqlarıdır; $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ – ranqların bəzi funksiyaları olub,

n i ş a n l a r (rus. м е т к а) adlanır. Bu statistikaların asimptotik normallığı isbat olunmuşdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Х о л л е н д е р М., В у л ф Д., Непараметрическая методы статистики, пер с англ., М., 1983; [3] B h u c h o n g k u l S., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, p. 138–49; [4] C r o u s e C. F., «Biometrika», 1966, v. 53, № 1, p. 293–325; [5] H e o f f i n g W., «Ann. Math. Statist.», 1948, v. 19, p. 293–325; [6] J o a g - D e v K., Handbook of Statistics, v. 4, Amst., 1984, p. 79–88.

RANQ KRİTERİSİ « ранговый критерий; rank test » – ranq statistikasına əsaslanan *statistik kriteridir.* Məs., Uilkokson və Mann – Uitni kriteriləri ranq kriteriləridir. R. k.-ləri kəsilməz ciddi artan funksiyalarla verilən bütün çevrilmələrin qrupu G -yə nəzərən invariantdır; deməli, R. k.-ləri yerinidəyişmə parametrləri və miqyasın dəyişmələrinə nəzərən invariantdır. Bundan əlavə, hipotezlərin statistik yoxlanılması məsələlərinin çoxunda ən güclü invariant kriterilər R. k.-ləri ilə yaxşı approksimə olunur.

Bax, *Qeyri – parametrik kriteri.*

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

RANQ STATİSTİKASI « ранговая статистика; rank statistics » – *ranqlar metodu* üzrə qurulmuş *statistikadır*. Əgər $\mathbf{R}=(R_1, \dots, R_n)$ – müşahidələrin təsadüfi vektoru $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$ üzrə qurulmuş ranqlar vektorudursa, onda $\mathbf{R}$ -in funksiyası olan ixtiyari $\mathbf{T}=\mathrm{T}(\mathbf{R})$ statistikası r a n q s t a t i s t i k a s ı adlanır. $\mathbf{R}$ və $\mathbf{1}=(1, 1, \dots, 1)$ vektorları arasında K e n d a l l r a n q k o r r e l y a s i y a əmsalı τ R. s.-na klassik bir misaldır; bu əmsal

$$\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \operatorname{sign}(i-j) \operatorname{sign}(R_i - R_j)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Bütün R. s.-ları sinfində xətti R. s. adlanan R. s. xüsusi yer tutur. Bu statistikalar aşağıdakı kimi təyin olunur. $A = \|a(i, j)\|$ ixtiyari n tərtib kvadrat matris olsun. Onda

$$T = \sum_{i=1}^{n} a(i, R_i)$$

statistikası x ə t t i r a n q s t a t i s t i k a s ı adlanır. Məs., $\mathbf{R}$ və $\mathbf{1}$ vektorları arasında Spirmen ranq korrelyasiya əmsalı ρ –

$$\rho = \frac{12}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right) \left(R_i - \frac{n+1}{2} \right)$$

düsturu ilə təyin olunur və ρ xətti R. s.-dır.

Xətti R. s.-ları bir qayda olaraq hesablama üçün sadə şəkildədir və onların ehtimal paylanmalarını tapmaq çətin olmur. Məhz buna görə də, R. s. nəzəriyyəsində R. s.-nın xətti R. s.-ları ailəsinə proyeksiyası anlayışı böyük rol oynayır. Əgər T təsadüfi X vektoru üzrə qurulmuş hər hansı R. s.-dırsa və onun ehtimal paylanmaları haqqında H_0 hipotezi irəli sürülmüşdürsə, H_0 hipotezi doğru olduğu halda xətti R. s.-lar ailəsində $M(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}})$ - nin minimallığını təmin edən $\hat{T} = \hat{T}(R)$-ə R. s. T -nin p r o y e k s i y a s ı deyilir. Bir qayda olaraq, $\hat{T}$ proyeksiyası R. s. T -ni olduqca yaxşı approksimasiya edir və $n \to \infty$ olduqda $T - \hat{T}$ fərqi əhəmiyyətsiz qədər kiçikdir. H_0 hipotezi doğru olduqda və bu hipotezə görə $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun komponentləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunursa, onda R. s. T -nin proyeksiyası $\hat{T}$

$$\hat{T} = \frac{n-1}{n} \sum_{i=r}^{n} \hat{a}(i - R_i) - (n-2)\,\mathbf{M}T \qquad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\hat{a}(i, j) = \mathbf{M}\{T \mid R_i = j\}$, $1 \leq i, j \leq n$ (bax, [1]).

R. s.-ları τ və ρ arasında daxili əlaqə vardır. [1]-də göstərilmişdir ki, H_0 hipotezi doğru olduğu halda, Kendall korrelyasiya əmsalı τ -nun xətti R. s.-lar ailəsinə proyeksiyası $\hat{\tau}$ Spirmen ranq korrelyasiya əmsalı ρ ilə sabit vuruq dəqiqliyi ilə üst-üstə düşür, yəni $\tau = (2/3)(1+1/n)\rho$. Bu bərabərlikdən alınır ki, ρ və τ arasında korrelyasiya əmsalı $\operatorname{corr}(\rho, \tau)$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\operatorname{corr}(\rho, \tau) = \sqrt{\mathbf{D}\hat{\tau}/\mathbf{D}\tau} = 2(n+1)\Big/\sqrt{2n(2n+5)}$$

yəni n -in böyük qiymətlərində ρ və τ asimptotik ekvivalentdirlər (bax, [2]).

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] K e n d a l l M. G., Rank correlation methods, 4 ed., L., 1970.

RANQLANMA « ранжировка; ranking » – bax, *Binar münasibətlər statistikası*, *Ranq korrelyasiyası*.

RANQLAR CƏMİ KRİTERİSİ « суммы рангов критерий; rank sum test » – X_i və Y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin ümumi variasion sırasında Y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin ranqları cəmi $R_1 + \dots + R_m$ ranq statistikasına əsaslanan, iki $X_1, X_2, \dots, X_n$ və $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ seçimlərinin bircinsliyi üçün *statistik kriteridir* (seçimlərin elementləri qarşılıqlı asılı olmayan və kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir). *Uilkokson kriterisinin* variantıdır.

RANQLAR VEKTORU « рангов вектор; vector of ranks » – müşahidələrin $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektoru üzrə qurulmuş $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ vektor statistikasıdır və onun i -ci komponenti $R_i = R_i(X)$, $i = 1, \dots, n$

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} I_{[0, \infty)}(X_i - X_j)$$

qaydası ilə qurulur, burada $I_{[0,\infty)}(x)$, – $[0, \infty)$ çoxluğunun indikatorudur, yəni

$$I_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x \geq 0, \\ 0, & \text{əgər } x < 0. \end{cases}$$

R_i, $i = 1, \dots, n$ statistikası $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun i -ci komponenti X_i -nin r a n q ı adlanır. R. v.-nun tərifi aşağıdakı şərt ödənildikdə korrekt olur: $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun ehtimal paylanması $p(x) = p(x_1, \dots, x_n)$ sıxlığı ilə verildikdə,

$\mathbf{P}\{R_i = R_j\} = 0$, $i \neq j$ şərti ödənilir. Bu şərtlər ödənildikdə R. v.-nun tərifindən belə nəticə alınır: R statistikası $1, 2, \dots, n$ ədədlərinin bütün yerdəyişmələri $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ -lərin $\mathfrak{R} = \{r\}$ fəzasından qiymətlər alır və bu zaman R_i ranqının realizasiyası r_i ($r_i = 1, 2, \dots, n$) ədədi qiymətcə $\mathbf{X}$ vektorunun müşahidə olunmuş i-ci qiymətləri X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ komponentinin realizasiyalarını aşmayan komponentlərinin sayına bərabərdir.

$\mathbf{X}^{(\cdot)} = (X_{(n1)}, \dots, X_{(nn)})$, – $\mathbf{X}$ müşahidələr vektoru üzrə qurulmuş qaydalı statistikalar vektoru olsun. Onda $(R, \mathbf{X}^{(\cdot)})$ cütü $\mathbf{X}$ vektorunun paylanması üçün kafi statistikadır, $\mathbf{X}$ vektorunun özü isə $(R, \mathbf{X}^{(\cdot)})$ kafi statistikası üzrə birqiymətli bərpa olunur. Bundan başqa, əgər əlavə olaraq fərz olunarsa ki, $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun ehtimal sıxlığı $p(x)$ arqumentlərin yerdəyişməsinə nəzərən simmetrikdir, onda $(R, \mathbf{X}^{(\cdot)})$ kafi statistikasının komponentləri R və $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ asılı deyildirlər və

$$\mathbf{P}\{R = r\} = 1/n!, \quad r \in \mathfrak{R}.$$

Məsələn, əgər

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (1)$$

olarsa, yəni $\mathbf{X}$ təsadüfi vektorunun komponentləri asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsdüfi kəmiyyətlər olarsa ($f(\cdot)$, – X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal sıxlığıdır), onda ixtiyari $k = 1, 2, \dots, n$ üçün

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}\{R_i = k\} = 1/n, \ i = 1, 2, \dots, n \\ &\mathbf{P}\{R_i = k, R_i = m\} = 1/n(n-1), \ i \neq j, \ k \neq m, \\ &\qquad i, j, k, m = 1, 2, \dots, n, \\ &\mathbf{M}R_i = (n+1)/2, \ \mathbf{D}R_i = (n^2-1)/12, \ i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1) şərti ödənildiyi halda X_i və R_i təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü ehtimal sıxlığı $q(x_i, k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ vardır və o,

$$q(x_i, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} [F(x_i)]^{k-1} [1 - F(x_i)]^{n-k} f(x_i) \qquad (3)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $F(\cdot)$, – X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyasıdır. (2) və (3)-dən alınır ki, X_i təsadüfi kəmiyyətinin $R_i = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) şərtinə nəzərən şərti ehtimal sıxlığı $q(x \mid R_i = k)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$q(x \mid R_i = k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x_i)]^{k-1} [1 - F(x_i)]^{n-k} f(x_i) \qquad (4)$$

(4) düsturu $X_{(n,k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, – k-cı qaydalı statistikasının ehtimal sıxlığının ifadəsi olduğundan, bu düstur müşahidələr vektoru $\mathbf{X}$, R. v. R və qaydalı statistikalar vektoru $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ arasında olan daxili əlaqəni izləməyə imkan yaradır. Bundan əlavə, (3)-dən aydındır ki, R_i ranqının şərti paylanması

$$\mathbf{P}\{R_i = k \mid X_i\} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} [F(X_i)]^{k-1} [1 - F(X_i)]^{n-k}$$

düsturu ilə ifadə olunur. Nəhayət, $\mathbf{M}X_i$ və $\mathbf{D}X_i$ momentlərin varlığı qəbul edilərsə və (1) ödənilərsə, (2) və (3)-dən alınır ki, X və R_i arasındakı korrelyasiya əmsalı $\rho(X_i, R_i)$

$$\rho(X_i, R_i) = \sqrt{\frac{12(n-1)}{(n+1)\mathbf{D}X_i}} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \left[F(x_i) - \frac{1}{2} \right] dF(x_i)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Məsələn, əgər X_i $N(a, \sigma^2)$ normal qanununa tabedirsə, onda

$$\rho(X_i, R_i) = \sqrt{3(n-1)/\pi(n+1)}$$

olur və $\rho(X_i, R_i)$ normal qanununun parametrlərindən asılı olmur. X_i $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanma qanununa tabe olarsa, onda

$$\rho(X_i, R_i) = \sqrt{(n-1)/(n+1)}.$$

Əd.: [1] H e o f f d i n g W., в кн.: Proceedings of the 2-d Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berk. – Los Ang., 1951, p. 83–92; [2] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Т а р а с е н к о Ф. П., Непараметрическая статистика, Томск, 1976; [4] V o i n o v V. G., N i k u l i n M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 2 – Multivariate case, Dordrecht, 1996.

RAO KRİTERİSİ « Рао критерий; Rao test » – mürəkkəb statistik hipotezlərin fərqləndirilməsi məsələsində *statistik kriteridir.* $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, – $\omega \in \Omega$ parametrindən asılı, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən sıxlığı $p(x, \omega)$ olan, $\mathbf{P}_\omega$ paylanmalar ailəsindən təkrar seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1 : \omega \in \Omega_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \omega \in \Omega_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, burada Ω_0 və Ω_1, – Ω-nın kəsişməyən boş olmayan altçoxluqlarıdır. R. k.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln p(X_i; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\overline{\omega}_n} \right)' \times$$

$$\times \Sigma^{-1}(\overline{\omega}_n) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln p(X_i; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\overline{\omega}_n} \right) \qquad (*)$$

statistikasına əsaslanır və (*) statistikasının böyük qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etmir, burada $\overline{\omega}_n$ – ilkin hipotez şərtlərində (yəni $\omega \in \Omega_0$), $X^{(n)}$ seçimi üzrə hesablanmış, maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir, $\Sigma(\omega)$, – $\mathbf{P}_\omega$ ailəsinin Fişer informasion matrisidir; R. k. *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisinə*, *Vald kriterisinə*, $C(\alpha)$ *statistik kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir, deməli, uyğun asimptotik xassələrə də malikdir.

Əd.: [1] R a o C. R., «Proc. Cambr. Philos. Soc.», 1948, v. 44, p. 50–57; [2] P a o C. P., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., M., 1968.

RAO – BLEKUELL TEOREMİ « Рао – Блэкуэлла теорема; Rao – Blackwell theorem » – bax, *Kafi statistika.*

RAO – BLEKUELL – KOLMOQOROV TEOREMİ « Рао – Блэкуэлла – Колмогорова теорема; Rao – Blackwell – Kolmogorov theorem » – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsindən bir hökmdür, bu hökm əsasında meylsiz statistik qiymətlərin yaxşılaşdırılması metodu qurulmuşdur. X, – $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathbf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$ seçimi fəzasından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyət olsun. Fərz olunur ki, ehtimal paylanmaları ailəsi $\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ kafi $T = T(X)$ statistikasına malikdir və $\varphi = \varphi(X)$ ikinci momentlərin sonlu matrisi olan hər hansı vektor statistikadır. Bu halda φ statistikasının riyazi gözləməsi $\mathbf{M}_\theta\{\varphi\}$ mövcuddur və hətta $\varphi^* = \mathbf{M}_\theta\{\varphi \mid T\}$ şərti riyazi gözləməsi $\mathbf{M}_\theta\{\varphi\}$ üçün meylsiz statistik qiymətdir, yəni $\mathbf{M}_\theta\{\varphi^*\} = \mathbf{M}_\theta\{\mathbf{M}_\theta\{\varphi \mid T\}\} = \mathbf{M}_\theta\{\varphi\}$. Bu şərtlərlə R. – B. – K. t.-ində hökm olunur ki, φ^* statistikasının kvadratik riski bütün $\theta \in \Theta$ üzrə φ statistikasının kvadratik riskini müntəzəm aşmır, yəni ixtiyari φ statistikası ilə eyni ölçüyə malik z vektoru üçün bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində

$$z\,\mathbf{M}_\theta\{(\varphi - \mathbf{M}_\theta\{\varphi\})^{\mathsf{T}}(\varphi - \mathbf{M}_\theta\{\varphi\})\}\,z^{\mathsf{T}} \geq$$

$$\geq z\,\mathbf{M}_\theta\{(\varphi^* - \mathbf{M}_\theta\{\varphi^*\})^{\mathsf{T}} - (\varphi^* - \mathbf{M}_\theta\{\varphi^*\})\}\,z^{\mathsf{T}}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Məs., φ birölçülü statistika olduğu halda ixtiyari $\theta \in \Theta$ qiymətində φ^* statistikasının dispersiyası $\mathbf{D}_\theta\{\varphi^*\}$, φ statistikasının dispersiyası $\mathbf{D}_\theta\{\varphi\}$ -ni aşmır.

Ən ümumi halda R. – B. – K. t.-ində hökm olunur ki, kafi statistika üzrə ortalama əməliyyatı ixtiyari qabarıq itki funksiyasına nəzərən riskin artmasına səbəb olmur. Deməli, yaxşı statistik qiymətləri kafi statistikalar terminlərində, yəni zəruri statistikalar sinfində axtarmaq lazımdır.

$\{\mathbf{P}_\theta\}$ tam ailə olarsa, yəni sıfrın yeganə meylsiz statistik qiyməti sanki hər yerdə sıfra bərabər funksiya olarsa, onda R. – B. – K. t. vasitəsilə alınan müntəzəm minimal riskə malik meylsiz statistik qiymət yeganə olur. Beləliklə, R. – B. – K. t. ən yaxşı meylsiz statistik qiymətlərin qurulması üçün bir qayda verir: əvvəlcə ixtiyari meylsiz statistik qiymət götürmək, sonra isə bu statistik qiyməti kafi statistika ilə ortalamaq lazımdır.

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303–26; [2] P a o C. P., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., M., 1968; [3] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., M., 1960; [4] B l a c k w e l l D., «Ann. Math. Statist.», 1947, v. 18, p. 105–10; [5] V o i n o v V. G., N i k u l i n M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 1–2, Dordrecht, 1993–96.

RAO – KRAMER BƏRABƏRSİZLİYİ « Рао – Крамера неравенство; Rao – Cramer inequality », F r e ş e b ə r a b ə r s i z l i y i, i n f o r m a s i y a b ə r a b ə r s i z l i y i, – kvadratik itki funksiyasına nəzərən naməlum parametri *statistik qiymətləndirmə* məsələsində riskin aşağı sərhədini müəyyənləşdirən bərabərsizlikdir. Bax, *Kramer – Rao bərabərsizliyi.*

RAO – KRAMER – VOLFOVİTS BƏRABƏRSİZLİYİ « Рао – Крамера – Вольфовица неравенство; Rao – Kramer – Wolfowitz inequation » – bax, *Ardıcıl qiymətləndirmə*.

RAYKOV TEOREMİ « Райкова теорема; Raikov theorem »: sabit olmayan iki *təsadüfi kəmiyyətin* cəmi Puasson qanunu ilə paylanmışdırsa, onda toplananların hər biri də Puasson qanunu ilə paylanmışdır (bax, [1]). R. t.-dən Puasson paylanmasının $\mathbf{I}_0$ sinfindən olduğu alınır (bax, *Sonsuz bölünən paylanma*; a y r ı l ı ş). Lokal kompakt Abel qruplarından qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün R. t.-nin ümumiləşmələri məlumdur (bax, [2]). R. t. ilə təsvir olunan xassələr dayanıqlıdır: əgər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminin paylanması Puasson paylanmasına yaxın paylanmadırsa, onda toplananların paylanması da Puasson qanununa yaxın paylanmaya malikdir; dayanıqlılığın keyfiyyət statistik qiymətləri məlumdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Р а й к о в Д. А., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 1, с. 9–12; [2] Р у х и н А. Л., «Тр. Матем. Ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 52–109; [3] Ч и с т я к о в Г. П., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 3, с. 433–50.

REALİZASİYA « реализация; realisation » – bax, *Seçimi funksiya.*

REALİZASİYA(s ı) t ə s a d ü f i f u n k s i y a n ı n **« реализация** с л у ч а й н о й ф у н к ц и и; **realization** o f a r a n d o m f u n c t i o n / s a m p l e f u n c t i o n **»** – bax, *Təsadüfi funksiya.*

REDUKSİYASI, VERİLƏNLƏRİN (ƏLAMƏTLƏRİN) « выделение признаков; reduction of data » – özündə az miqdarda əhəmiyyət kəsb edən informasiya saxlayan, lakin olduqca çoxsaylı verilənləri olan ölçmə nəticələri çoxluğunun nisbətən azsayda verilənləri (əlamətləri) özündə saxlayan çoxluğa gətirilməsidir.

Bu istiqamətdə klassik məsələlərdən biri p – dim. – ölçüsünü $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^{\mathsf{T}}$ ölçmələr vektorunun m – dim. – ölçüsünə gətirməkdən (azaltmaqdan) ibarətdir, $m < p$.

Məs., baş komponentlər metodu bu məqsədə xidmət edir; bu metodun əsas ideyası özündə çoxsaylı qarşılıqlı asılı kəmiyyətləri olan verilənlər çoxluğunun dim. – ölçüsünü azaltmaqdır ki, bu da imkan daxilində, dispersiyaya malik olan ilkin verilənləri ayırd edərək, onları saxlamaqdan ibarət olur. Bu isə verilənlərin yeni çoxluğuna (baş komponentlərinə) çevirmələr tətbiq olunmaqla həyata keçirilir və burada qeyd olunmalıdır ki, bu baş komponentlər qeyri – korrelyardırlar və bunlar elə nizamlanır ki, ilk komponentlərin bir neçəsi ilkin verilənlərlə müqayisədə ən böyük dispersiyaya malik olsun. Baş komponentlərin məlum tərifi və onların tapılması (ayırd olunması) hələ K. Pirson (K. Pearson) tərəfindən daxil olunmuşdu və bu tərifdə çoxölçülü $\mathbf{x}$ vektorunun riyazi gözləməsi $\mathbf{Mx} = \mathbf{a}$ -nın və kovariasion matrisi $\Xi = \mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \times$ $\times (\mathbf{x} - \mathbf{a})^{\mathsf{T}}$ -nin varlığı fərz olunur. Baş komponentlər xüsusi xassələrli dispersiyaları olan, ilkin kəmiyyətlərin xətti kombinasiyaları kimi təyin olunur (bax, *Baş komponentlər analizi*). Məs., b i r i n c i b a ş k o m p o n e n t ən böyük dispersiyalı xətti kombinasiyaya deyilir. Digər komponentlərin dispersiyaları azalan qaydada, yəni $\mathbf{D}(z_1) \geq \mathbf{D}(z_2) \geq \ldots \geq \mathbf{D}(z_p)$ münasibətini ödəmək şərtilə nizamlanır, burada z_i – baş komponentlərdir, $i = 1, \ldots, p$, p isə vektorun dim. – ölçüsüdür. Praktikada kiçik dispersiyalı xətti kombinasiyalar (komponentlər) nəzərə alınmır (atılır) və yalnız böyük dispersiyalı xətti kombinasiyalara baxılır. Baş komponentlər metodu Ξ matrisinin məxsusi $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m$

ədədlərinə uyğun h_k məxsusi vektorlarının tapılmasından ibarətdir. Bu halda λ_i baş komponentlərin dispersiyalarıdır. $(h_i, \mathbf{X})$ xətti kombinasiyaları baş komponentlər adlanır. Əgər $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)^{\mathsf{T}}$ olarsa, onda $\mathbf{z} = H^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ yazmaq olar, burada H – ortoqonal matrisdir, bu matrisin k-cı sütunu h_k Ξ matrisinin k-cı məxsusi vektorudur.

Əgər $x_1, \dots, x_p$ dəyişənləri çoxölçülü birgə normal qanunla paylanmış olarlarsa, onda baş komponentlər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

İxtiyari iki bərabər olmayan $\mathbf{D}(z_i)$ və $\mathbf{D}(z_j)$ məxsusi qiymətlərinin uyğun məxsusi vektorları düz bucaq əmələ gətirir. Bu xassə vektorların ortoqonallıq xassəsi adlanır və $\sum_{k=1}^{p} h_{ik} h_{jk} = 0$, $i \neq j$ münasibətilə ifadə olunur. Əgər iki məxsusi qiymət bərabər olarsa, onda onlara uyğun məxsusi vektorları elə seçmək olar ki, onlar ortoqonal olsunlar. Deməli, hesab etmək olar ki, p sayda baş komponent qarşılıqlı ortoqonaldırlar.

Baş komponentləri təyin etmək üçün kovariasion matris əvəzinə korrelyasion matrisdən istifadə etmək olar. Ümumi halda, korrelyasion matris üzrə alınmış baş komponentlər kovariasion matrislə alınan baş komponentlərdən fərqli olur.

Əd.: [1] Патрик Э., Основы теории распознавания образов, пер. с англ., М., 1980; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Jolliffe I., Principal Component Analysis, N. Y., 1986; [4] Гирко В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

REDÜSLƏNMİŞ (STANDART NÖV) LATIN KVADRATI « редуцированный (стандартный) латинский квадрат; reduced (standart tipe) Latin square » – bax, *Latın kvadratı.*

REDÜSLƏNMİŞ SXEMİ, EKSPERİMENTİN « редуцированная схема эксперимента; reduced experimental scheme » – bax, *Aprior informasiyadan istifadə.*

REDÜSLƏNMİŞ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « редуцированный ветвящийся процесс; reduced branching process » – ilkin şaxələnən prosesin bu və ya digər hissəciklərindən yaranan, bu hissəciklərin isə nəsli (varisləri) verilən $T < \infty$ anında mövcud olan *şaxələnən prosesdir.* İlkin prosesin kritikaltı, kritik və ya kritiküstü olmasından asılı olaraq R. ş. p. kritikaltı, kritik və ya kritiküstü R. ş. p. adlanır (bax, *Şaxələnən proses*; kritiklik).

R. ş. p. [1]-də daxil olunmuşdur və şaxələnən proseslərdə *ən yaxın ümumi əcdad* anlayışının ümumiləşməsidir. Hər iki anlayış şaxələnən təsadüfi meydan nəzəriyyəsində istifadə olunur.

Markov prosesi üzrə qurulmuş R. ş. p. də Markov prosesidir, lakin, ümumiyyətlə, zamana görə bircins deyildir (bax, [7]).

R. ş. p.-in xassələri ilkin prosesin uyğun xassələrindən seçilir.

Misallar. 1) R. ş. p. kritikliyindən asılı olmayaraq cırlaşmayandır.

2) $\zeta_T(t)$, $0 \le t \le T$ – R. ş. p.-in hissəciklərinin sayıdır [yəni ilkin şaxələnən $\zeta(t)$ prosesinin elə hissəcikləri sayıdır ki, onlar t anında mövcuddurlar və onların T anındakı varisləri çoxluğu boş olmayan çoxluqdur] və $\zeta_T(0) = 1$.

a) Əgər R. ş. p. kritikaltı prosesdirsə, onda ixtiyari $\sigma < \infty$ qiymətində və $T \to \infty$ olduqda $\xi_T(t) = \zeta_T(T - \sigma + t)$, $0 \le t \le \sigma$ ardıcıllığı zaman üzrə qeyri – bircins şaxələnən limit prosesinə yığılır (bax, [6]).

b) Əgər R. ş. p. kritik proses olarsa, onda $\nu_T(t) = \zeta_T(tT)$, $0 \le t < 1$ prosesləri $T \to \infty$ olduqda t anında hissəciyin bölünmə intensivliyi $1/(1-t)$-yə mütənasib olan, zaman üzrə qeyri – bircins Yul prosesinə yığılır (bax, [2], [4]). Hissəcikləri tipi birdən çox olan kritik R. ş. p. üçün limit prosesində ixtiyari $t_1, t_2 \in (0, 1)$ anlarındakı hissəciklərin tipləri asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış tiplərdir (bax, [5]).

c) Kritiküstü halda $T \to \infty$ olduqda $\zeta_T(t)$ ardıcıllığının limiti vardır (bax, [6]).

Markov R. ş. p.-ləri əsasən araşdırılmış proseslərdəndir. Məsələn, *Skoroxod topologiyasında* yığılma haqqında limit teoremləri isbat olunmuşdur, Donsker – Proxorov invariantlıq prinsipinin analoqu alınmışdır (bax, *İnvariantlıq prinsipi* təsadüfi proseslər üçün), R. ş. p.-in şəcərə ağacının struktur xarakteristikalarının bəziləri öyrənilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] Fleischmann K., Sigmund – Shultze R., «Math. Nachr», 1977, Bd 79, S. 233–41; [2] Fleischmann K., Sigmund – Shultze R., «Serdica Bulgarical math. publ.», 1978, v. 4, p. 111–34; [3] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [4] Сагитов С. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 4, с. 737–49; [5] Якымив А. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 593–96; [6] Якымив А. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 30, в. 1, с. 183–88; [7] Якымив А. Л., в сб.: вероятностные процессы и их приложения, М., 1984, с. 24–31.

REGENERASİYA « регенерация; regeneration » – bax, *Yeniləşdirici hadisə.*

REGENERASİYA ANI « регенерации момент; regeneration time » – bax, *Regenerativ proses.*

REGENERASİYA MÜDDƏTİ « регенерации период; regeneration period » – bax, *Regenerativ proses.*

REGENERATİV PROSES « регенерирующий процесс; regenerative process » – $(X, \mathscr{B})$ faza fəzasından qiymətlər alan elə $Y(t)$ ölçülən *təsadüfi prosesidir* ki, bu proses üçün elə daxil edilmiş $(X_n, n \ge 0)$ *bərpa prosesi* vardır ki: $n \ge 1$ olduqda, regenerasiya müddətləri $\tau_n = X_n - X_{n-1}$ və $Y(t)$ prosesinin bu müddətlərdəki trayektoriyaları ilə yaranmış $(\tau_n, X(t + X_{n-1}),\ 0 \le t \le \tau_n)$ tipli təsadüfi elementlər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlərdir. X_n anları $Y(t)$ prosesinin bərpa anları və ya regenerasiya anları adlanır. $Y(t)$ R. p.-nin paylanması $t \ge 0$ olduqda τ_1 təsadüfi kəmiyyəti və t-nin $0 \le t \le \tau_1$ qiymətləri üçün $Y(t)$-nin paylanmaları ilə birqiymətli olaraq verilir, belə ki,

$$x(t) = \mathbf{P}\{Y(t) \in A\},\ A \in \mathscr{B}$$

tipli funksiyalar

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s)\, dF(s)$$

bərpa tənliyinin həlləridir, burada $F(t)$ – regenerasiya müddəti τ_1-in paylanma funksiyasıdır və $y(t)=\mathbf{P}\{Y(t)\in A,\ \tau_1>t\}$. $\mathbf{P}\{Y(t+t_i)\in A_i,\ 1\le i\le k\}$ sonluölçülü paylanmaları da analoji tənliyi ödəyir.

$Y(t)$ R. p.-nin əsas mühüm xassələrindən biri final ehtimallarının varlığından ibarətdir: əgər $F(t)$ şəbəkəvari olmayan paylanma funksiyasıdırsa, $\mathbf{M}\tau_1<\infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}f(Y(t))=\frac{1}{\mathbf{M}\tau_1}\mathbf{M}\int_0^{\tau_1}f(Y(s))\,ds \qquad (*)$$

münasibəti elə məhdud $\mathscr{B}$ – ölçülən funksiyalar üçün ödənilir ki, bu funksiyalar üçün $f(Y(t))$ təsadüfi prosesi sanki bütün mənfi olmayan t-lər üçün Lebeq ölçüsünə görə stoxastik kəsilməz prosesdir; əgər bundan əlavə hər hansı bir $F^{n*}(t)$ kompozisiyası Lebeq ölçüsü ilə qeyri – sinqulyar olarsa, onda (*) münasibəti bütün məhdud ölçülən f funksiyaları üçün ödənilir, xüsusi halda bütün $A\in\mathscr{B}$ olan A-lar üçün

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{Y(t)\in A\}=\frac{1}{\mathbf{M}\tau_1}\int_0^{\infty}\mathbf{P}\{Y(t)\in A,\ \tau_1<t\}\,dt$$

olur.

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Смит В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967; [2] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы, К., 1983;.

REGENERATİV PROSES; dayanıqlılıq **« регенерирующий процесс;** устойчивость; stability of a **regenerativ process »** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) regenerativ proseslərin.

***REKORD QİYMƏT « рекордное значение; record value »** – *təsadüfi dolaşma* hərəkətində olan hissəciyin $n>0$ anındakı vəziyyətini ifadə edən $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ təsadüfi kəmiyyətinin

$$S_n>S_j,\quad j=0,1,\ldots,n-1 \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunan qiymətidir, burada $\xi_1,\xi_2,\ldots$ – paylanma funksiyaları eyni F olan, qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, n isə zaman parametridir və $S_0=0$. (1) münasibəti ödənildiyi halda, təsadüfi dolaşma rekord qiymətini alır, deyilir. Təsadüfi dolaşmanın bütün trayektoriyaları üçün belə n indeksləri olmaya da bilər; lakin R. q.-ləri vardırsa, onda onlara çatma anları təsadüfi kəmiyyətlər olub (yəqin ki, qeyri – məxsusi təsadüfi kəmiyyətlər), sonlu və ya sonsuz nizamlanmış ardıcıllıq təşkil edir. Buna görə də, (1) münasibətinin birinci, ikinci və s. anda baş verməsi kimi anlayışlar daxil edilmişdir.

Təsadüfi dolaşmaların bəzi xüsusiyyətləri ardıcıl R. q.-lər terminologiyasında verilir (bax, [1], § 8).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

REKURRENT AXIN « рекуррентный поток; recurrent input » – bax, *Giriş axını* keçmişi məhdud təsirli.

REKURRENT ƏN KİÇİK KVADRATLAR METODU SONLU YADDAŞLI « рекуррентный метод наименьших квадратов с конечной памятью; recursive least squares method with finite memory » – *ən kiçik kvadratlar metodu* əsasında nöqtəvi statistik qiymətin alınması üçün hesablama alqoritmidir, istifadə olunan maşın yaddaşına minimal tələblərlə verilənlərin istifadə edilən həcminə operativ nəzarət etməyə imkan yaradır.

Fərz olunur ki, ümumi xətti modeldə ən kiçik kvadratlar metodu ilə reqression eksperimentlər matrisi X-in $(n+1)$-cidən $(n+r)$-ciyə qədər sətirlərindən istifadə etməklə, $y_{n+1},\ \ldots,\ y_{n+r}$ ölçüləri əsasında $\hat\theta(n,n+r)$ statistik qiyməti alınmışdır. Uyğun massivləri $Y(n,n+r)$, $X(n,n+r)$ ilə işarə edərək,

$$\Sigma(n,\ n+r)=[X^{\mathsf T}(n,n+r)\,X(n,n+r)]^{-1}$$

matrisi daxil edilir. Onda

$$\hat\theta(n,\ n+r)=\Sigma(n,\ n+r)\,X^{\mathsf T}(n,\ n+r)\,Y(n,\ n+r), \quad (1)$$

$$\operatorname{cov}\hat\theta(n,\ n+r)=\sigma^2\,\Sigma(n,\ n+r)$$

olur. Yeni ölçmə operatoru təşkil edib, onu daxil etməklə bu statistik qiyməti rekurrent etmək qaydası yaxşı məlumdur (bax, [1] – [3]), onda

$$\hat\theta(n,\ n+r+1)=\hat\theta(n,\ n+r)+$$
$$+K^{(1)}(n,\ n+r)[\,y_{n+r+1}-x_{n+r+1}^{\mathsf T}\,\hat\theta(n,\ n+r)\,] \qquad (2)$$

alınır, burada $x_{n+r+1}^{\mathsf T}$, – $\mathbf{X}$ matrisinin $(n+r+1)$-ci sətridir, $K^{(1)}$ – aşağıdakı düsturla hesablanan ötürmə əmsalıdır:

$$K^{(1)}(n,n+r)=\int\Sigma(n,\ n+r)x_{n+r+1}\times$$
$$\times[I+x_{n+r+1}^{\mathsf T}\,\Sigma(n,\ n+r)\,x_{n+r+1}]^{-1}. \qquad (3)$$

Bu halda

$$\Sigma(n,\ n+r+1)=\Sigma(n,\ n+r)-$$
$$-K^{(1)}(n,\ n+r)x_{n+r+1}^{\mathsf T}\,\Sigma\,(n,\ n+1) \qquad (4)$$

(2) – (4) düsturlarının çıxarılışlarında tətbiq olunan metodlardan istifadə edərək (1) statistik qiyməti üçün

$$\hat\theta(n+1,\ n+r+1)=\hat\theta(n,\ n+r+1)-$$
$$-K^{(2)}(n,\ n+r+1)[\,y_{n+1}-x_{n+1}^{\mathsf T}\,\hat\theta(n,\ n+r+1)]$$

– unutma operatoru təşkil etmək olar, burada

$$K^{(2)}(n,n+r+1)=$$
$$=\Sigma\,(n,\ n+r+1)\,x_{n+1}[I+x_{n+1}^{\mathsf T}\Sigma(n,n+r+1)x_{n+1}]^{-1},$$

bu halda

$$\Sigma\,(n+1,\ n+r+1)=\Sigma\,(n,\ n+r+1)+$$
$$+K^{(2)}(n,\ n+r+1)\,x_{n+1}^{\mathsf T}\,\Sigma(n,\ n+r+1). \qquad (5)$$

(5) düsturu əvvəl daxil edilmiş ölçmə və unutmanın yeni ölçmə və unutma daxil etmə tsikllərini istənilən dəfə təkrarlamağa imkan

verir. Mühüm praktiki məsələlərin həllində oxşar prosedurların tətbiqinə aid misallar, məs., [4] – [6]-da şərh olunmuşdur.

M i s a l. Fərz olunur ki, $[\tau - l, \tau + l]$ parçasında verilən $y(s)$ empirik asılılığı lokal olaraq

$$y(s) = P_m(s) + \xi(s), \quad s = \tau - l, \ \tau - l + 1, \ \dots, \ \tau + l \qquad (6)$$

modelini ödəyir, burada $P_m(s)$, – m dərəcəli çoxhədlidir:

$$P_m(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j, \quad t = s - \tau,$$

$\xi(t)$ stasionar erqodik diskret təsadüfi prosesi isə məlum olan p ($p \geq l$) tərtib avtoreqressiya sxeminə tabedir: $\xi(t) = \rho_1 \xi(t-1) + \dots + \rho_p \xi(t-p) + \eta(t)$, burada $\eta(t)$ – intensivliyi σ^2 olan diskret bəyaz küydür və

$$\mathbf{M}\eta(t) = 0, \ \mathbf{M}[\eta(t_1)\eta(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2).$$

Naməlum $a_0, \dots, a_m, \ \rho_1, \dots, \rho_p$ parametrlərini qiymətləndirmək üçün Mann və Vald metodu istifadə olunur (bax, [7] – [8]).

$$\eta(t) = \xi(t) - \rho_1 \xi(t-1) - \dots - \rho_p \xi(t-p) =$$
$$= y(t) - P_m(t) - \rho_1 [y(t-1) - P_m(t-1)] - \dots$$
$$\dots - \rho_p [y(t-p) - P_m(t-p)] =$$
$$= y(t) - \sum_{j=1}^{p} \rho_j y(t-j) - \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

çevirmələrini apardıqdan sonra $\rho_1, \dots, \rho_p, \ \gamma_0, \dots, \gamma_m$ əmsallarını $Y = X\theta + H$ xətii modelindən ən kiçik kvadratlar metodunun standart proseduru əsasında tapmaq olar, burada

$$Y = \{y(\tau - l), \ y(\tau - l + 1), \ \dots, \ y(\tau + l)\}^{\mathsf{T}};$$
$$\theta = (\rho_1, \dots, \rho_p, \ \gamma_0, \dots, \gamma_m)^{\mathsf{T}};$$
$$H = \{\eta(\tau - l), \ \eta(\tau - l + 1), \ \dots, \ \eta(\tau + l)\}^{\mathsf{T}}$$
$$X = (X_1, \ X_2)^{\mathsf{T}};$$
$$X_1 = \{y(k-j)\}, \ \tau - l \leq k \leq \tau + l, \ 1 \leq j \leq p$$
$$X_2 = \{k^j\}, \ \tau - l \leq k \leq \tau + l, \ 0 \leq j \leq m.$$

$\gamma_0, \dots, \gamma_m$ kəmiyyətləri axtarılan $a_0, \dots, a_m$ parametrləri ilə

$$\gamma_s = a_s \delta_0 + \sum_{k=1}^{m-s} (-1)^{k+1} C_{s+k}^{k} a_{s+k} \delta_k, \ s = 0, \dots, m$$

münasibətlər sistemi ilə əlaqəlidirlər, burada $\delta_0 = 1 - \rho_1 - \dots - \rho_p$, $\delta_j = \rho_1 + 2^j \rho_2 + \dots + p^j \rho_p$, $0 \leq j \leq m$. Statistik qiymətlərin alınmış vektorunun kovariasion matrisinin qurulması qaydası [8]-də təklif olunmuşdur. Avtoreqressiya əmsalları $\rho_1, \dots, \rho_p$ $[\tau - l, \tau + l]$ parçasından $[\tau - l + 1, \ \tau + l + 1]$ parçasına keçdikdə sabit qalır və bu halda $\rho_1, \dots, \rho_p$ -dən asılı çəkilərlə sürüşən polinomial hamarlama klassik proseduruna gəlinir (bax, [9]).

Bununla belə, bu halda da hesablamaları, adətən, baxılan sonlu yaddaşlı rekurrent sxem üzrə aparmaq sərfəlidir. Daha mürəkkəb vəziyyətlərdə ölçmələrin hamarlanması dəyişən və ya təsadüfi korrelyasion strukturlu küy fonunda aparıldığı halda sonlu yaddaşlı sxemin praktik olaraq alternativi yoxdur.

Ədd.: [1] Современные методы идентификации систем, пер. с англ., М., 1983; [2] А л б е р т А., Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание, пер. с англ., М., 1977; [3] Адаптивные фильтры, пер с англ., М., 1988; [4] М о н з и н г о Р. А., М и л л е р Т. У., Адаптивные антенные решетки, пер. с англ., М., 1986; [5] К у з ь м и н С. З., Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации, М., 1974; [6] K a i l a t h T., Lectures on Wiener and Kalman filtering, W. – N. Y., 1981; [7] M a n n H. B., W a l d A., «Econometric», 1943, v. 11, p. 173–220; [8] R a o C. R., в кн.: Proceding of the 5-th Berkeley Symposium on mathematical statistics, v. 1, Berk. – Los Ang., 1967, p. 355–72; [9] А н д е р с о н Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [10] N i c h o l l s D. F., Q u i n n B. G., Random coefficient autoregressive models, B. – Hdlb. – N. Y., 1982; [11] L e d o l t e r J., в кн.: Applied time series analysis II, N. Y., – [a. o.], 1981, p. 449–71.

REKURRENT HADİSƏ « рекуррентное событие; recurrent event », q a y ı d ı ş l ı h a d i s ə, – bax, *Bərpa prosesi.*

REKURRENT KOD « рекуррентный код; recurrent code » – bax, *Konvolyusion kod.*

REKURRENT QİYMƏTLƏNDİRMƏ « рекуррентное оценивание; recursive estimation » – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsinin r e k u r r e n t s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r i, yəni θ_n statistik qiymətinin $\theta_{n+1} = f_n(\theta_n, X_{n+1})$ münasibətilə bağlı statistik qiymətlərini öyrənən bölməsidir, burada $X_1, \dots, X_{n+1}$ – müşahidələr ardıcıllığıdır. R. q. bəzi hallarda naməlum parametrlərin asimptotik effektiv statistik qiymətlərinə gətirir.

Robbins – Monro və Kifer – Volfovits stoxastik approksimasiya prosedurlarına (bax, *Kifer – Volfovits proseduru*, *Robbins – Monro proseduru*) uyğun olaraq reqressiya funksiyasının, sıfrının və ya maksimumunun tapılması üçün R. q.-nin qeyri – parametrik prosedurları kimi baxmaq olar. Lakin, adətən, R. q. parametrik məsələlərin həllinin rekurrent metodları kimi anlaşılır. Məs., $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – asılı olmayan müşahidələr, $f(x, \theta)$ – bunların σ – sonlu ν ölçüsünə nəzərən paylanma sıxlığı olsun və $f(x, \theta)$ statistikə məlum olmayan $\theta \in \mathbb{R}$ parametrindən asılıdır. Fərz olunur ki,

$$m_1(\theta) = \int x \, f(x, \theta) \, \nu(dx),$$
$$m_2(\theta) = \int (x - m_1(\theta))^2 \, f(x, \theta) \, \nu(dx)$$

momentləri sonludurlar və $m_1(\theta)$ – ciddi artan funksiyadır. Onda

$$\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{a}{k+1} (X_{k+1} - m_1(\theta_k)), \ (\theta_0 \text{ ixtiyaridir}) \qquad (1)$$

proseduru $2 a m_1'(\theta) > 1$ şərti ödənilərsə, θ üçün asimptotik meylsiz və asimptotik normal statistik qiymət verir. Bəzi əlavə şərtlərlə və $I(\theta)$, – f sıxlığının Fişer informasiya miqdarı, θ_0 isə ixtiyari olduqda

$$\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{1}{(k+1) I(\theta_k)} \frac{f_\theta'(X_{k+1}, \theta_k)}{f(X_{k+1}, \theta_k)}, \ (\theta_0 \text{ ixtiyaridir}) \ (2)$$

proseduru asimptotik effektiv olur.

(1) və (2) prosedurları $\theta \in \mathbb{R}^k$ parametrinin qiymətləndirilməsi halı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [1]). (2) prosedurunun və onun çoxölçülü ümumiləşməsinin bir sıra modifikasiyaları məlumdur, bunlar üçün daha zəif məhdudiyyətlərlə asimptotik effektivliyi isbat etmək olur. Bu modifikasiyaların mənası ondan ibarətdir ki, (2) proseduru müəyyən bir köməkçi tutarlı statistik qiymət ətrafında «kəsilir».

R. q. asılı küylər halında xətti reqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün, zaman üzrə kəsilməz proseslər üçün tətbiq olunur. R. q. *Kalman filtri* tipli rekurrent filtrlərlə sıx bağlıdır.

Əd.: [1] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [2] Невельсон М. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3, с. 577–87.

REKURRENT STATİSTİK QİYMƏT « рекуррентная оценка; recursive estimator » – bax, *Rekurrent qiymətləndirmə*.

REQRESSİON ANALİZ « регрессионный анализ; regression analysis » – riyazi statistikanın statistik kəmiyyətlər arasındakı reqression asılılığını verilənlər əsasında araşdırmaq üçün, praktikada tətbiq edilən metodları özündə cəmləşdirən bir bölməsidir (bax, *Reqressiya*). Riyazi statistikada reqressiya problemi onunla səciyyəvidir ki, araşdırılan kəmiyyətlərin paylanmaları haqqında kifayət qədər informasiya olmur. Məs., X təsadüfi kəmiyyətinin qeyd olunmuş $X = x$ qiymətində Y təsadüfi kəmiyyətinin müəyyən bir ehtimal paylanmasının varlığına əsasların olduğu fərz edilir, odur ki, $\mathbf{M}(Y \mid x) = g(x, \beta)$, burada β, – $g(x)$ funksiyasını təyin edən naməlum parametrlər çoxluğudur və müşahidələrin nəticələrinə görə parametrlərin qiymətlərini təyin etmək tələb olunur. Məsələnin mahiyyəti və analizin məqsədindən asılı olaraq, eksperimentin nəticələri – $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ – x dəyişəninə görə müxtəlif cür interpretasiya olunur. Eksperimentdə kəmiyyətlər arasında asılılığı təyin etmək üçün sadələşdirilmiş fərziyyələrə əsaslanan model istifadə olunur: eksperimenti planlaşdırarkən x -in nəzarət oluna bilinən kəmiyyət olduğu və onun qiymətlərinin əvvəlcədən verildiyi, y -in müşahidə olunan qiymətlərinin isə $y_i = g(x_i, \beta) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ şəklində ifadə olunduğu fərz olunur, burada ε_i – xətaları xarakterizə edən, müxtəlif ölçülər aparıldıqda asılı olmayan eyni qanunla paylanmış, dispersiyaları sabit, riyazi gözləmələri sıfır olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. x nəzarət oluna bilinməyən dəyişən olduğu halda, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ – müşahidələrin nəticələri olub, müəyyən bir ikiölçülü çoxluqdan olan seçimdir. Hər iki halda R. a. metodları eyni, nəticələrin interpretasiyası isə müxtəlifdir (sonuncu halda analiz *korrelyasiya* nəzəriyyəsi metodları ilə xüsusilə zənginləşdirilir).

Eksperimental verilənlər üzrə reqressiyanın tədqiqi kvadratik orta reqressiya prinsiplərinə əsaslanır. R. a.-də aşağıdakı əsas məsələlərin həllinə baxılır: 1) reqressiya funksiyasının x və β -dan asılılığı fərziyyəsinə əsaslanan reqressiya modelinin seçilməsi; 2) seçilmiş modeldə β parametrlərinin ən kiçik kvadratlar metodu ilə qiymətləndirilməsi; 3) reqressiya üçün irəli sürülmüş statistik hipotezlərin yoxlanılması.

Naməlum parametrlərin qiymətləndirilməsinin yeganə metod nöqteyi – nəzərindən ən təbiisi bu parametrlərə görə xətti reqressiya modeli

$$g(x, \beta) = \beta_0 g_0(x) + \dots + \beta_m g_m(x)$$

çoxhədlisidir. $g_i(x)$ funksiyaları bəzən (x, y) eksperimental qiymətlərinin səpələnmə diaqramında yerləşməsinə görə bir çox hallarda – nəzəri mülahizələrə əsaslandırılaraq təyin olunur. Eyni zamanda müşahidə nəticələrinin dispersiyası σ^2 -nın sabit olduğu (və ya x -dən asılı məlum funksiya ilə mütənasib olduğu) fərz olunur. Reqressiyanın qiymətləndirilməsi üçün standart metod: $1 \le m < n$ şərtini ödəyən hər hansı m dərəcəli

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_m x^m$$

çoxhədlisindən və ya ən sadə halda

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x$$

xətti funksiyasından (*xətti reqressiyadan*) istifadəyə əsaslanır.

Approksiməedici çoxhədlinin dərəcəsinin seçilməsi üçün xəttilik kriteriləri və tövsiyyələr məlumdur.

Kvadratik orta reqressiya prinsipinə uyğun olaraq naməlum reqressiya əmsalları – $\beta_0, \dots, \beta_m$ və dispersiya – σ^2 -nın qiymətləndirilməsi ən kiçik kvadratlar metodu ilə aparılır. Bu metoda görə, $\beta_0, \dots, \beta_m$ parametrlərinin statistik qiymətləri olaraq elə $\hat\beta_0, \dots, \hat\beta_m$ qiymətləri götürülür ki, bu qiymətlər

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2$$

ifadəsinin minimum qiymət almasını təmin etsin. Ən kiçik kvadratlar metodu ilə qurulmuş $\hat g(x) = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 x + \dots + \hat\beta_m x^m$ çoxhədlisi empirik reqressiya xətti adlanır və naməlum əsl reqressiya xətti üçün statistik qiymətdir. Reqressiyanın xətti reqressiya olduğu hipotezi qəbul olunarsa, empirik reqressiya düzxətti

$$\hat g(x) = \hat\beta_0 + \hat\beta_1 x$$

şəklində olur, burada

$$\hat\beta_0 = \bar y - \hat\beta_1 \bar x, \quad \hat\beta_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar x)(y_i - \bar y)}{\sum_i (x_i - \bar x)^2},$$

$$\bar x = \frac{1}{n}\sum_i x_i, \quad \bar y = \frac{1}{n}\sum_i y_i.$$

$\hat\beta_0, \dots, \hat\beta_m$ təsadüfi kəmiyyətləri seçimi reqressiya əmsalları adlanır.

σ^2 parametri üçün meylsiz statistik qiymət

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat g(x_i))^2 / (n - m)$$

düsturu ilə verilir. Əgər dispersiya x -dən asılı olarsa, ən kiçik kvadratlar metodu müəyyən dəyişikliklərlə tətbiq olunur.

Əgər Y təsadüfi kəmiyyətinin $x_1, \dots, x_n$ dəyişənlərindən asılılığı araşdırılırsa, onda bu halda ümumi xətti reqressiya modelini matris formada yazmaq daha məqsədəuyğun olur: komponentləri asılı olmayan $y_1, \dots, y_n$ olan müşahidələr vektoru y -in orta qiyməti və kovariasion matrisi vardır və

$$\mathbf{M}(Y \mid x_1, \dots, x_k) = \mathbf{X}\beta, \quad \mathbf{D}(Y \mid x_1, \dots, x_k) = \sigma^2 \mathbf{I}, \qquad (*)$$

burada $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ – reqressiya əmsalları matrisi, $\mathbf{X} = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ – ümumiyyətlə, bir-birilə ixtiyari qaydada əlaqədar olan məlum kəmiyyətlər matrisi, $\mathbf{I}$, – n tərtib vahidi matrisdir; $n > k$ və $|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}| \neq 0$. Daha ümumi halda müşahidələrin nəticələri y_i-lər arasında korrelyasiya ola bilər:

$$\mathbf{M}(Y \mid x_1, \dots, x_k) = \mathbf{X}\beta, \quad \mathbf{D}(Y \mid x_1, \dots, x_k) = \sigma^2\mathbf{A},$$

burada $\mathbf{A}$ matrisi məlumdur, lakin bu sxem (*) modelinə gətirilir. β üçün meylsiz statistik qiymət ən kiçik kvadratlar metoduna görə

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}y,$$

σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət isə

$$s^2 = \frac{1}{n-k}(y^{\mathrm{T}}y - \hat{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}y)$$

olur.

(*) modeli ən ümumi xətti reqressiya modelidir, belə ki, bu model müxtəlif reqression situasiyalarda tətbiq olunur və Y-in $x_1, \dots, x_k$-lara görə parabolik reqressiyasının bütün növlərini əhatə edir (məsələn, yuxarıda baxılmış Y-in x-ə görə m tərtib *parabolik reqressiyası* (*) modelinə gətirilir ki, bu modeldə m sayda reqressiya dəyişənləri funksional asılıdır). R. a. bu xətti anlamında β-nın qiymətləndirilməsi məsələsi və $\mathbf{D}\hat{\beta} = \sigma^2(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ kovariasion statistik qiymətlər matrisinin hesablanması $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ matrisini çevirmə məsələsinə gətirilir.

Müşahidələrin nəticələrinin normal qanunla paylanmış olduğunu fərz etməklə, empirik reqressiyanın qurulması üçün yuxarıda göstərilən metodu tətbiq etdikdə, β və σ^2 üçün tapılan statistik qiymətlər maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə hesablanmış qiymətlər ilə üst-üstə düşür. Lakin bu metodla hesablanan statistik qiymətlər nəticələrin normal qanunla paylanmadığı halda müəyyən mənada daha yaxşıdır, bu şərtlə ki, seçimin həcmi kifayət qədər böyük olsun.

Ümumi xətti reqressiya modeli (*) verilmiş matris formasında müşahidə olunan y_i kəmiyyətləri vektor təsadüfi kəmiyyətlər olduğu hal üçün sadə şəkildə ümumiləşdirilə bilinir. Bu halda yeni statistik məsələ alınmır (bax, *Reqressiya matrisi*). R. a. məsələləri (*) ümumi xətti modelinin β və σ^2 parametrlərinin noqtəvi statistik qiymətlərinin tapılması ilə məhdudlaşmır.

Müşahidələr vektoru Y normal qanunla paylanarsa, qurulmuş empirik asılılığın dəqiqlik problemi daha effektiv həll olunur. Əgər ixtiyari β statistik qiyməti Y-in xətti funksiyası olarsa və Y vektoru isə normal qanunla paylanmış olarsa, belə nəticə çıxarmaq olar ki, $\hat{\beta}_i$ təsadüfi kəmiyyəti də riyazi gözləməsi β_i, dispersiyası $\mathbf{D}\hat{\beta}_i = \sigma^2 b_{ii}$ olan normal qanunla paylanmışdır. Burada b_{ii}, – $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}$ matrisinin diaqonal elementidir. Digər tərəfdən, σ^2 üçün s^2 statistik qiyməti $\hat{\beta}$ vektorunun ixtiyari komponentindən asılı olmayan paylanmaya malikdir və $(n-k)s^2/\sigma^2$ kəmiyyəti isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-k)$ olan xi – kvadrat paylanması ilə paylanır. Deməli, $t = (\hat{\beta}_i - \beta_i)/[s^2 b_{ii}]^{1/2}$ statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı $(n-k)$-ya bərabər Styudent paylanmasına tabedir. Bu fakt β_i parametrləri üçün etibarlı intervalların qurulması və β_i kəmiyyətinin aldığı qiymətlər üçün hipotezin yoxlanılmasında istifadə olunur.

Bundan başqa, bütün reqressiya dəyişənlərinin qeyd olunmuş qiymətlərində $\mathbf{M}(Y \mid x_1, \dots, x_k)$ üçün etibarlı intervalları və y-in sonrakı $(n+1)$-ci qiymətini özündə saxlayan (öncəgörmə intervalı adlanan) etibarlı intervalları tapmaq mümkün olur. Nəhayət, seçimi reqressiya əmsalları vektoru $\hat{\beta}$ əsasında β vektoru üçün və ya naməlum reqressiya əmsallarının ixtiyari toplusu üçün etibarlı ellipsoid; həmçinin bütün reqressiya xətti və reqressiya düzxətti üçün etibarlı oblast qurmaq olar.

R. a. fizika, biologiya, iqtisadiyyat, texnika və digər sahələrdə asılılığı tədqiq etdikdə eksperimental verilənlər üzərində yenidən işləmək üçün ən çox yayılmış metodlardan biridir. Riyazi statistikanın dispersion analiz, eksperimentin planlaşdırılması kimi bölmələri R. a. modellərinə əsaslanır. Bu modellər çoxölçülü statistik analizdə geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи., пер. с англ., М., 1973; [2] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [4] Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., 2 изд., кн. 1–2, М., 1986.

REQRESSİON DƏYİŞƏN, reqressor **« регрессионная переменная,** регрессор; **regressor »** – reqressiya modelində asılı olmayan dəyişən rolunu oynayan *təsadüfi kəmiyyətdir*. X və Y təsadüfi kəmiyyətlər olsun; x-in hər bir qiyməti üçün $y = y(x) = \mathbf{M}(Y \mid X = x)$ riyazi gözləməsi Y-in X-ə görə reqressiyasıdır. Bu halda X təsadüfi kəmiyyəti reqression dəyişən adlanır.

REQRESSİON EKSPERİMENT « регрессионный эксперимент; regression experiment » – təsadüfi xətalarlı *reqressiya* funksiyasını ölçmələrin ardıcıllığıdır. R. e.-in ən ümumi sxemi ondan ibarətdir ki, hər hansı X çoxluğunun x_j, $j = 1, \dots, N$ nöqtələrində y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətləri müşahidə olunur:

$$y_j = g(x_j) + \varepsilon_j,$$

burada $g(\cdot)$, – X-də təyin olunmuş reqressiya funksiyası (və ya səda funksiyası) kimi adlanan müəyyən funksiyalar çoxluğu $\mathcal{F}$-ə daxil olan funksiyadır; ölçmələrin təsadüfi xətaları vektoru $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^{\mathrm{T}}$ üçün

$$\mathbf{M}\varepsilon = 0, \quad \mathrm{cov}\,\varepsilon = \sigma^2 W$$

şərtləri ödənilir, burada W – məlum, müsbət – müəyyən $(N \times N)$ – tərtib matrisdir, σ^2 kəmiyyəti isə naməlum da ola bilər. Xətti R. e. onunla səciyyəvidir ki, $\mathcal{F}$ – funksiyaların sonluölçülü xətti fəzasıdır. Bu fəzada $\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_p(\cdot)$ bazis funksiyaları seçərək, reqressiya funksiyasını

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \varphi_i(x) = \beta^{\mathrm{T}}\varphi(x)$$

şəklində yazmaq olar, burada $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^{\mathsf{T}}$ – naməlum parametrlər vektoru, $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_p(\cdot))^{\mathsf{T}}$. Xətti R. e.-in sxemi matris şəklində aşağıdakı kimi yazılır:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon,$$

burada $\mathbf{M}\varepsilon = 0$, $\operatorname{cov}\varepsilon = \sigma^2 W$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_N)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\Phi} = \left\| \varphi_i(x_j) \right\|_{j,i=1}^{N,p}$ – R. e. matrisidir. Bəzən xətti R. e. $\mathscr{R}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 W)$ nizamlı üçlüyü şəklində də yazılır. $\boldsymbol{\beta}$-nın naməlum parametrlərinin xətti qiymətləndirilməsində onların statistik qiymətlərinin kovariasion matrisi ε təsadüfi vektorunun paylanmasının yalnız birinci və ikinci momentlərindən asılıdır.

$\mathscr{R}(\mathbf{Y}, \eta(x_i, \boldsymbol{\beta}), i = 1, \dots, N, \sigma^2 W)$ qeyri – xətti R. e.-ində reqressiya funksiyası $\boldsymbol{\beta}$ naməlum parametrlərindən qeyri – xətti asılıdır. $\boldsymbol{\beta}$ parametrinin qiymətləndirilməsi üçün, adətən, ən kiçik kvadratlar metodundan istifadə olunur. Xətti R. e.-də ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymət $\hat{\beta} = M^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}} W Y$, $\mathbf{M}\hat{\beta} = \beta$, $\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 M^{-1}$ münasibətlərilə təyin olunur; $M = \boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}} W \boldsymbol{\Phi}$ – R. e.-in *informasion matrisi* adlanır və onun cırlaşmayan olduğu fərz olunur.

Qeyri – xətti R. e. anlayışından daha ümumisi, *ümumiləşmiş* R. e. anlayışı və ya F – modellərdir (bax, [1], [2]) ki, bu eksperimentlərdə $\operatorname{cov}\varepsilon$-nun $\boldsymbol{\beta}$-dan asılılığı nəzərdə tutulur və $\boldsymbol{\beta}$ parametri $(\eta(x_1, \beta), \dots, \eta(x_N, \boldsymbol{\beta}))$ toplusu ilə eyniləşdirilir. F – modelində $\boldsymbol{\beta}$ üçün statistik qiymətlər Qauss – Nyuton iterasiya metodu ilə dəqiqləşdirici çəkilərlə tapılır (bax, [1], [2]).

Çoxölçülü xətti R. e. halında $\boldsymbol{\beta}$ naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi asanlıqla xətti R. e.-lərindəki analoji qiymətləndirilməyə gətirilir.

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [2] Малютов М. Б., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41; [3] Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М.,1987; [4] Корхин А. С., Гинзбург М. И., «Экономика и математическая методы», 1987, т. 23, № 3, с. 496–506.

REQRESSİON EKSPERİMENT MATRİSİ « регрессионного эксперимента матрица; matrix of a regression experiment » – *reqression eksperimentin* plan nöqtələrində prediktor funksiyalarının qiymətləri yazılmış sütunlardan təşkil olunmuş matrisdir.

REQRESSİON EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « регрессионных экспериментов планирование; design of regression experiment » – *reqressiya* funksiyası haqqında qərarın optimizasiyası üçün *reqression eksperiment* sxemində ölçmələrin seçilməsidir (bax, *Diskriminəedici eksperimentlərin planlaşdırılması*). Ən çox araşdırılan – xətti reqression eksperimentlərin reqressiya funksiyalarının qiymətləndirilməsi üçün ölçmələrin planlaşdırılması aşağıda şərh olunmuşdur.

Ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətin $\operatorname{cov}\hat{\theta}$ kovariasiyaları matrisi $\sigma^2 M^{-1}$-dir, burada $M = \Phi^{-1} W \Phi$ informasion matris adlanır. Xətaların paylanması haqqında informasiya olduğu halda və nəticələrin robastlığı üçün statistik qiymətlərin geniş bir T sinfindən (məs., minimal kontrast sinif) istifadə olunur. Bunlar üçün limit normal paylanmanın kovariasiyalar matrisi $\alpha(T) M^{-1}$ şəklindədir, burada α, – $\xi = \{x_1, \dots, x_N\}$ planından asılı olmayan skalyardır, odur ki, böyük həcmli seçimlər üçün real (dəqiq) planları approksiməedici optimal ümumiləşmiş planlar (kəsilməz də adlandırılan; bax, aşağı) nəzəriyyəsi belə statistik qiymətlərə də aiddir. $z = W^{1/2} y$, $f(\cdot) = W^{1/2}\varphi(\cdot)$ çevirməsindən sonra reqression eksperiment matrisi $F = (\mathbf{f}(x_1), \dots, \mathbf{f}(x_N))^{\mathsf{T}}$ olan $R(z, F\theta, I)$ reqression eksperimenti alınır. Aşağıda məhz bu modelə baxılır. Bu model üçün informasion matris aşağıdakı kimidir:

$$M(\xi) = F^{\mathsf{T}} F = \sum_{i=1}^{N} m(x_i), \quad m(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{f}^{\mathsf{T}}(x) \qquad (1)$$

(1)-dən aydındır ki, informasion matrislər vuruq dəqiqliyilə plan daşıyıcısını – (bəzən plan spektri, planın dayaq nöqtələri, planın ən mühüm nöqtələri də adlanan)

$$\operatorname{supp}\xi = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}, \quad x^{(i)} \in X,$$

əgər $i \neq j$ olarsa, $x^{(i)} \neq x^{(j)}$ kəmiyyətini və n_j $x^{(j)}$ ilə üst-üstə düşən x_i-lərin sayı olduqda $p_j = n_j / N$ – planın çəkilərini təyin edir; $p_j \geq 0$, $\sum_j p_j = 1$. $\hat{\theta}$-nın birinci və ikinci momentləri axtarılan parametrlərdən asılı deyildir. Buna görə də, (aşağıda baxılan) optimal planı statistik seçmək olar, çünki kvadratik riski eksperimentin aparılmasına qədər tapmaq olar (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*, *Ardıcıl planlaşdırılması eksperimentlərin*).

Əgər ξ diskret plandırsa, yəni n sayda p_i çəkili və $x^{(i)}$ nöqtələrində daşıyıcıya malik olan ixtiyari ehtimal ölçüsüdürsə, onda $x^{(i)}$ nöqtələrində ölçmələri $\lfloor Np_i \rfloor$ və $\lceil Np_i \rceil$ olan ξ və $\bar{\xi}$ planları $N - n$-dən az olmayan (uyğun olaraq $N + n$-dən çox olmayan) nöqtəyə malikdir; burada $\lfloor \bar{x} \rfloor$ və $\lceil \underline{x} \rceil$ simvolları uyğun olaraq $\leq x$ olan ən böyük və $\geq x$ olan ən kiçik tam ədəddir. Aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$M(\xi) \leq \int m(x)\xi(dx) \leq M(\bar{\xi});$$

burada $M(\xi)$ və $M(\bar{\xi})$ matrislərinin elementləri $n \to \infty$ olduqda $O(N)$ tərtibdən kəmiyyətlər olub, $O(n)$ tərtib kəmiyyətlə bir-birindən fərqlənir və bu dəqiqliklə də $m(\xi) = \int m(x)\xi(dx)$ matrisi ilə xarakterizə olunur. Əgər $\xi_0 = \xi(x_0)$ planı x_0 nöqtəsində topalanmışdırsa, onda $m(\xi_0)$ və $m(x_0)$ üst-üstə düşür.

Aşağıda şərh olunan asimptotik nəzəriyyədə plan əmələr fəzası X-də ixtiyari ehtimal ölçüsünə deyilir; bu halda N sayda ölçmələr ardıcıllığının dəqiq plan (əvvəllərdə verilmiş ad) adlandırılması, $m^{-1}(\xi)$ və $m(\xi)$ matrislərinin uyğun olaraq dispersion və informasion matris adlandırılması nəzərdə tutulmalıdır.

Planlar çoxluğu X^* qabarıq və qapalıdır. Qabarıq çoxluqlar haqqında məşhur Karateodori teoreminin nəticəsinə əsasən; əgər $\mathfrak{M} = \{m(\xi),\ \xi \in X^*\}$ kompakt çoxluqdursa (bundan ötrü kifayətdir ki, X kompakt çoxluq, $f : X \to \mathbb{R}^p$ kəsilməz olsun), onda ixtiyari ξ planı üçün informasion matrisi

$$m(\xi) = \sum_{i=1}^{r} p_i\, m(x_i),$$

$$p_i \geq 0, \quad r \leq p(p+1)/2 + 1, \quad x_i \in X$$

münasibətlərilə ifadə etmək olar.

Bir çox konkret hallarda r üçün bu qiymətləndirməni gücləndirmək olar. Məs., bu nəticənin isbatında $\mathfrak{M}$ çoxluğunun $\mathbb{R}^r$ fəzasından olan $\{m(x),\ x \in X\}$ çoxluğunun qabarıq örtüyü kimi həndəsi interpretasiyası mühüm rol oynayır.

Ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətlərin optimallığına (bax, *Reqression eksperiment*) analoji olaraq, *universal optimal plan* – ξ^*-nu, yəni bütün $\xi \in X^*$ olan ξ-lər üçün $m(\xi^*) \geq m(\xi)$ bərabərsizliyini təmin edən ξ_m^* planını təyin etmək məsələsinə də baxmaq olar. Lakin məzmunlu məsələlərdə belə plan mövcud deyildir (bax, aşağı). Simmetrik hallarda, hər hansı daha zəif mənada m ü n t ə z ə m o p t i m a l planlar, məs., Şuru planı, təyin etmək olur.

$\mathbb{R}^{m\times p}$, $S_p \subseteq \mathbb{R}^{p\times p}$, $S_p^+ \subset S_p$, $\lambda_i(A)$ – uyğun olaraq həqiqi $(m \times p)$ – matrislərinin çoxluğu, p tərtib simmetrik matrisləri çoxluğu, müsbət – müəyyən matrislər çoxluğu və A, $A \in S_p$ matrisinin kəmiyyətcə i-ci məxsusi qiymətidir.

$A, B \in S_p$ və bütün $r \leq p$ şərtini ödəyən r və p-lər üçün

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i(A) - \lambda_i(B)) \geq 0$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, $A >_s B$ ($A \geq B$, Şuruya görə) deyilir. $m(\xi) >_s m(\eta)$ bərabərsizliyindən $\operatorname{tr} m^{-\alpha}(\xi) \leq \operatorname{tr} m^{-\alpha}(\eta)$ bərabərsizliyi $\alpha > 0$ və $\alpha \to 0$, $\alpha \to \infty$ şərtini ödəyən bütün α-lar üçün ödənilir ($\left(\frac{1}{p} \operatorname{tr} m^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}$ funksiyası Φ_α – kriteri adlanır). $\alpha \to \infty$ olduqda $\Phi_\alpha(m)$ – k r i t e r i E – k r i t e r i $\lambda(m^{-1})$-ə çevrilir. $\alpha \to 0$ olduqda $\Phi_\alpha(m)$ – k r i t e r i D – k r i t e r i s i n ə gətirilir:

$$(\det m^{-1})^{1/p} = \left(\prod_{i=1}^{p} \ln \lambda_i(m)\right)^{1/p}.$$

$\alpha = 1$ olduqda $\Phi_\alpha(m)$ – kriteri A – k r i t e r i d i r. $C \in \mathbb{R}^{l\times p}$; C-lər üçün xətti L_C – k r i t e r i s i $\mathbf{M}\left\| C(\theta - \hat{\theta})\right\|^2 = \operatorname{tr} C^{\mathsf{T}} m^{-1} C$ -nin xüsusi halıdır.

$\xi \in X^*$ planı və onun uyğun informasion matrisi $m(\xi)$ üçün $\widetilde{\xi} \in X^*$, $m(\widetilde{\xi}) \geq m(\xi)$ şərti ödənildikdə $m(\widetilde{\xi}) = m(\xi)$ olarsa, ξ planı və $m(\xi)$ matrisi uyğun olaraq m ə q b u l p l a n və m ə q b u l m a t r i s adlanır.

Məqbul planlar $\mathfrak{M}$ çoxluğunun nisbi sərhədi $\partial\mathfrak{M}$ -ə aiddirlər.

Məqbulluq plan daşıyıcısının xassəsidir: daşıyıcısı hər hansı diskret məqbul planın daşıyıcısının tərkibində olan plan məqbul plandır. Əgər hər hansı $T \in S_p^+$ matrisi üçün $\xi_0\{A_T\} = 1$ bərabərliyi ödənilərsə, onda ξ_0 məqbul plandır, burada

$$A_T = \arg\max_X \varphi_T(x), \quad \varphi_T(x) = \mathbf{f}^{\mathsf{T}}(x) T\, \mathbf{f}(x).$$

Əksinə, ξ_0 məqbul plandırsa, onda elə $T \geq 0$ matrisi vardır ki, $\xi_0\{A_T\} = 1$. $[-1, 1]$-də təyin olunmuş birölçülü polinomial reqressiya funksiyası $(1, x, \ldots, x^p)\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ üçün əgər $\operatorname{supp}\xi \cap (-1, 1)$ çoxluğunun gücü p-dən kiçik olarsa, ξ məqbul plandır.

Əgər X^*-dan olan məqbul planların informasion matrisi yeganə deyildirsə, onda universal optimal plan mövcud deyildir. Məs., $[-1, 1]$-də təyin olunmuş reqressiya funksiyası $(1, x)\theta$ üçün hər iki $-m(\pm 1)$ matrisləri məqbul matrislərdir və müxtəlifdir.

Adətən, $m(\xi)$-nin hər hansı funksiyası Φ-i minimallaşdıran plan (Φ – p l a n adlanan) axtarılır. Fərz olunur ki, $\mathfrak{M}$ çoxluğu kompaktdır və Φ aşağıdakı şərtlərin ya hamısını və ya bəzilərini ödəyir.

1) Monotonluq: $A \leq B$ olduqda, $\Phi(A) \geq \Phi(B)$.

2) Bircinslik: $\Phi(\alpha A) = \gamma(\alpha)\Phi(A)$, burada $\alpha > 0$, $\gamma^{-1}(\alpha)$, – α artdıqca ciddi artır.

3) Qabarıqlıq: $\Phi(m_\alpha) \leq (1-\alpha)\Phi(m_0) + \alpha\Phi(m_1)$, $m_\alpha = \alpha m_1 + (1-\alpha) m_0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

4) A-da $(A \in \mathfrak{M})$ differensiallananlıq: elə $\overset{\circ}{\Phi}(A) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ matrisi vardır ki, $\|B\| \to 0$ olduqda

$$\Phi(A+B) - \Phi(A) = \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\Phi}(A)B) + o(B)$$

olur, burada $\|B\|^2 = \operatorname{tr} B^{\mathsf{T}}B = \sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta}^2$, isə $\|B\| \to 0$ olduqda bütün elementləri yalnız $o(\|B\|)$ olan matrisdir.

3) şərtini ödəyən, $\mathfrak{M}^+ = S_p^+ \cap \mathfrak{M}$ çoxluğunda sonlu və $m_n \in \mathfrak{M}^+$, $m_n \to m \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^+$ olduqda ∞-a yaxınlaşan – *qlobal kriterilər sinfi* geniş bir sinif olub, mühüm əhəmiyyətə malikdir. Belə kriterilər (məs., Φ_α, $\alpha \in [0, \infty]$ kimi) $\mathfrak{M}$-da kəsilməz olub, minimum qiymət alır. Ümumi Φ kriteriləri üçün

$$\xi^* \in \arg\min_{\mathfrak{M}} \Phi(m)$$

Φ – planının varlığının kafi şərti Φ-in aşağıdan semikəsilməz olması, yəni

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(m_n) \geq \Phi(\lim_{n\to\infty} m_n)$$

şərtidir. Qabarıq Φ kriterisinin aşağıdan semikəsilməzliyi

$$\Phi(m) = \sup\{a_\alpha + \operatorname{tr}(B_\alpha m),\ a_\alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha \in S_p,\ \alpha \in A\}$$

şərtinə, yəni $\Phi(m)$-in m-in xətti funksiyaları ailəsinin yuxarı qurşayanı olması şərtinə ekvivalentdir.

$D(\mathbf{l}^{\mathsf{T}}\hat{\theta}) = \mathbf{l}^{\mathsf{T}} m^{-1}\mathbf{l}$ funksiyaları

$$\mathbf{l}^{\mathsf{T}} m^{-1}\mathbf{l} = \max_{\alpha \in \mathbb{R}^p}\{2\mathbf{l}^{\mathsf{T}}\mathbf{a} - \mathbf{x}^{\mathsf{T}} m\,\mathbf{x}\}$$

bərabərliyinə əsasən aşağıdan semikəsilməzdirlər. $A \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $r \le p$ olan A-lar üçün $\sum_{i=1}^{r} D(\mathbf{l}_i^{\mathsf{T}}\hat{\theta})$ cəminə gətirilən L_C – kriterisi $\mathbf{M}\left\|A(\hat{\theta}-\theta)\right\|^2$ və $s \le p$ ranqlı $A \in \mathbb{R}^{s\times p}$ olan A-lar üçün ümumiləşmiş D_A – optimallıq kriterisi $\det(A^{\mathsf{T}} m^{-1} A)$ belə kriterilərdir.

Φ – optimallıq və Φ – planların ədədi metodlarının qurulması üçün analitik nəticələr ekvivalentlik teoreminə əsaslanır; bu teoremə görə $m(\xi^*)$-da qabarıq və differensiallanan Φ funksiyası üçün ξ^* planının Φ – optimallığı

$$\max_X \varphi_T(x\xi^*) = \operatorname{tr} T m,\quad \operatorname{supp}\xi^* \subseteq A_T$$

şərtlərindən hər birinə ekvivalentdir, burada $T = \overset{\circ}{\Phi}(m(\xi^*))$. Bu teoremin xüsusi halı da populyardır.

ξ^* planının D – optimallığı (D – kriteri üzrə optimallıq) onun minimakslığına ekvivalentdir:

$$\max_{x\in X} d(x, \xi^*) = p = \min_{\xi\in X^*}\max_{x\in X} d(x, \xi),$$

burada $d(x,\xi) = \mathbf{f}^{\mathsf{T}}(x) m^{-1}(\xi)\mathbf{f}(x)$ reqressiya funksiyasının x nöqtəsində statistik qiyməti $\hat{\theta}\mathbf{f}(x)$-in normalanmış dispersiyasıdır. Bərabərçəkili planların D – optimallığı ekvivalentlik teoreminin köməyilə isbat edilmişdir: a) $[-1, 1]$-də təyin olunmuş p tərtib polinomial reqressiya üçün $(1-x^2)L_p'(x)$ çoxhədlisinin köklərində;

b) $\theta_0 + \sum_{j=1}^{m}(\theta_{2j}\cos jx + \theta_{2j+1}\sin jx)$ reqressiyası üçün $[0, 2\pi)$ intervalının $N \ge 2m+1$ olan N sayda bir-birindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrində və s. hallarda.

Diskret planın dayanıqlılığı araşdırılarkən, aşağıdakı hökmləri bilmək məsləhətdir: diskret ξ_0 planının çəkiləri qeyd olunduqda $\Phi(m)$-in $m(\xi_0)$ nöqtəsində xüsusi törəməsi $\sum_{x'\in \operatorname{supp}\xi}\varphi_T'(x^i)\,dx^i$ cəminə, $\operatorname{supp}\xi$ qeyd olunduqda, $\sum \varphi_T(x^i)\,dp_i$ cəminə bərabərdir; burada $T = \overset{\circ}{\Phi}(m(\xi))$.

Əgər $\operatorname{rank} m(\xi^*) = k < p$, Φ funksiyası $\mathfrak{M}^+$-da differensiallanan olarsa, onda ξ^* planının Φ – optimallığı $m + HH^{\mathsf{T}} \in S_p^+$ şərtini ödəyən $H \in \mathbb{R}^{(p-k)\times p}$ matrisinin varlığı və 1) – 3) şərtlərindən ixtiyari birinə ekvivalentdir, burada $T = \overset{\circ}{\Phi}(m(\xi^*) + HH^{\mathsf{T}})$.

Differensiallama olmayan hal üçün ekvivalentlik teoremi subqradientlər terminlərində daha az effektiv ümumiləşməyə malik olur. Bu halda bu teorem ikilik kriteriləri nəzəriyyəsinin xüsusi halıdır və onun vasitəsilə $\xi m(\xi) \notin \mathfrak{M}^+$ cırlaşmayan Φ – planlar haqqında olduqca dərin bir sıra nəticələr alınmışdır.

L_A – kriterisi üçün ümumiləşmiş Elfvinq ekvivalentlik teoremi alınmışdır: $\mathscr{R}$, – $f(x)a^{\mathsf{T}}$, $k \le p$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$, $\|\mathbf{a}\| = 1$, $x \in X$ şəklində $(p\times k)$ – matrislər çoxluğunun qabarıq örtüyü olsun; onda

$$\xi^* \in \arg\min_{X^*} \operatorname{tr}(m^{-1}(\xi)A^{\mathsf{T}}A),\ A \in \mathbb{R}^{k\times p}$$

şərti elə $\varepsilon : X \to \{\pm 1\}$ ölçülən funksiyasının varlığına ekvivalentdir ki:

1) $\int \mathbf{f}^{\mathsf{T}}(x)\varepsilon(x)\xi^*(dx) = \beta A$ hər hansı $\beta \ge 0$ üçün;

2) βA, – $\partial\mathscr{R}$-dəndir; bu halda

$$\beta^{-2} = \operatorname{tr} m^{-1}(\xi^*)A^{\mathsf{T}}A.$$

$\Phi(m)$-in çəkilər və plan daşıyıcısı üzrə birbaşa minimizasiyası məsələnin böyüklüyü cəhətdən, adətən, az effektli olur. Φ – planların ədədi qurulması üçün ekvivalentlik teoreminə əsaslanan iterasion alqoritmlər mövcuddur. Bunlardan ən sadəsi $\Phi(\cdot)$-in qabarıq differensiallananlığına uyğun alqoritm aşağıda şərh olunur.

ξ^s, $s = 1, 2, \ldots$ və

$$\xi_\alpha(1-\alpha)\xi^s + \alpha\xi,\ 0 \le \alpha \le 1$$

planlarının olduğu fərz olunur.

α-nın kifayət qədər kiçik qiymətlərində Teylor düsturuna əsasən

$$r(\alpha) = \Phi(m(\xi_\alpha)) - \Phi(m(\xi^s)) \sim \alpha r'(0)$$

münasibəti doğrudur, burada

$$r'(0) = \int \varphi_T(x, \xi^s)\,\xi(dx) - \operatorname{tr}(Tm),$$

$$T = \overset{\circ}{\Phi}(m(\xi^s)).$$

ξ planı elə seçilir ki, $r'(0)$ kəmiyyəti minimal olsun; buna görə isə $\xi^s(x) = \mathbf{1}(x^{(s)})$ planını $x^{(s)} \in \arg\min_X \varphi_T(x, \xi^s)$ olan $x^{(s)}$ nöqtəsində vahidi ölçülü plan və

$$\xi^{s+1} = (1-\alpha_s)\xi^s + \alpha_s\mathbf{1}(x^{(s)}) \qquad (2)$$

alqoritmini götürmək kifayətdir, burada α_s – klassik qradiyent metodundakı (bax, [1], [2]) kimi seçilən ədədi ardıcıllıqdır. Bu alqoritmin daha yüksək sürətlə yığılan modifikasiyaları məlumdur. N nöqtədən ibarət optimal dəqiq planların approksimasiyası üçün Φ – planların yuvarlaqlaşdırılması ilə yanaşı (2) tipli alqoritmlər də istifadə olunur, bu halda hər bir iterasiyada eyni sayda nöqtələr əlavə və xaric olunur.

Aşağıdakı ümumiləşmələr də mühümdür.

Əməllər fəzası X -in Banax fəzasının sonsuzölçülü altçoxluğu olduğu hala baxılmışdır (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin* riyazi fizikanın tərs məsələləri üçün, [2] fəsillər 7, 9).

Minimal kontrast statistik qiymətlərindən fərqli olan reqressiya parametrlərinin statistik qiymətlərindən istifadə etdikdə, R. e. p. metodları əksər hallarda yuxarıda baxılanlara yaxın olur. Məs., yalvarı statistik qiymətdən istifadə etdikdə (bax, *Aprior informasiyadan istifadə*) əsas fərq onunla bağlı olur ki, (1) informasion matrisi əvəzinə onun analoqları $m(\xi)+B$ istifadə olunur, burada B – müsbət müəyyən ($p\times p$) – matrisdir (bax, [1], [6]).

Reqression eksperiment sxemində, xüsusi halda avtoreqression xətalar sxemində, asılı xətalar halı da tədqiq olunmuşdur. $\sum_{i=0}^{k} a_i \varepsilon_{n-i} = \gamma_n,\ a_0 = 1;\ \gamma_n$ – paylanması $\mathbf{P}_n$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\mathbf{u}_n = (x_1, \dots, x_{n-k})$,

$$F(\mathbf{u}_n, \theta) = \sum_{i=0}^{k} f(x_{n-i}, \theta) a_i, \quad Y_n = \sum_{i=0}^{k} a_i y_{n-i},$$

olsun, burada $(x_j,\ \varphi(x_j, \theta),\ y_j) = 0,\quad j < 0$ fərz olunur. $Y_n - F(\mathbf{u}_n, \theta)$, $n = 1, \dots, N$ toplusunun paylanması $\prod_{n=1}^{N} \mathbf{P}_n(\cdot)$ -dir, burada y_1^N üçün $\mathbf{P}_\theta^\xi(\cdot)$ paylanmasını bərpa etmək mümkündür. *Asimptotik planlar* çoxluğu, yəni u_n -in nöqtələrinin $N \to \infty$ olduqda bu və ya digər $B \subset X^{k+1}$ altçoxluğundan olması tezliklərinin limitlərinin çoxluğu X^{k+1} -də elə paylanmaların Π çoxluğu ilə üst-üstə düşür ki, bu paylanmaların martinqalları X^{k+1} -in ilk k və son k sayda komponentləri ilə üst-üstə düşür.

Bundan başqa orta kəmiyyəti $\theta^{\mathrm{T}}\varphi(x)$ olan və korrelyasion funksiyası məlum $y(x)$ təsadüfi meydanının kəsilməz ölçmələrinin kvantlanması da tədqiq olunmuşdur; bu kvantlamada kvantlanmış və tam seçim üzrə $\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrinin ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətləri kovariasiyaların mümkün qədər yaxın matrislərinə malik olur.

R. e. p. məsələlərinin mühüm altsinfini informasion matris naməlum parametrlərdən asılı olduğu halda, qeyri – xətti (ümumiləşmiş) reqression modellərin naməlum parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün eksperimentin planlaşdırılması məsələləri təşkil edir.

Naməlum parametrlər üçün alınmış informasiyanı maksimizasiyaedici planlar da işlənilmişdir (bax, *Ardıcıl planlaşdırılması*, *eksperimentlərin*).

Ədd.: [1] Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [2] Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; [3] Федоров В. В., Теория оптимального эксперимента, М., 1971; [4] Малютов М. Б., Заираев А. Ю., Современные задачи оптимального планирования регрессионного эксперимента, К., 1989; [5] Pukelsheim F., Titterington D. M., «Ann. Statist.», 1983, v. 11, № 4, p. 1060–68; [6] Pazman A., Foundations of optimum experimental design, Dordrecht – [a. o.], 1986.

REQRESSİON ƏMSALLAR MATRİSİ « регрессионных коэффициентов матрица; matrix of regression coefficients / regression matrix » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu.*

REQRESSİON MODEL « регрессионная модель; regression model » – bax, *Çoxölçülü verilənlərin struktur modeli.*

REQRESSİON PROQNOZ « регрессионный прогноз; regression prediction » – bax, *Xətti interpolyasiya*(sı) reqressiya funksiyasının.

REQRESSİON PROQNOZ XƏTASI « регрессионного прогноза ошибка; error of regression prediction » – bax, *Reqressiya tənliyi.*

REQRESSİON STATİSTİK QİYMƏT « регрессии оценка; regression estimator » ən kiçik kvadratlar metodunun – *reqressiya* funksiyasının ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış qiymətidir; reqressiya funksiyasının ifadəsində parametrin əsl qiyməti əvəzinə onun ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiyməti götürülür və reqressiya funksiyasının statistik qiyməti hesablanır.

REQRESSİYA « регрессия; regression » – hər hansı bir təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin (orta qiymətinin) bir və ya bir neçə kəmiyyətdən asılılığını ifadə edir. Əgər, məs., X təsadüfi kəmiyyətinin hər bir $x = x_i$ qiymətində Y təsadüfi kəmiyyətinin n_i sayda $y_{i_1}, \dots, y_{in_i}$ qiyməti müşahidə olunarsa, onda bu qiymətlərin ədədi ortaları – $\bar{y}_i = (y_{i_1} + \dots + y_{in_i}) / n_i$ kəmiyyətlərinin x_i -dən asılılığı reqressiyadır; bu termin statistik mənada anlaşılır. x -in dəyişilməsi ilə $\bar{y}$ -in dəyişilməsində bir qanunauyğunluq müşahidə olunarsa, onda bu qanunauyğunluğun ehtimali asılılığa əsaslandığı fərz olunur: x -in hər bir qeyd olunmuş qiymətində Y təsadüfi kəmiyyəti müəyyən bir ehtimal paylanmasına malikdir və bu paylanmanın riyazi gözləməsi $\mathbf{M}(Y \mid x) = a(x)$ x -in funksiyasıdır. $y = a(x)$ asılılığında, x asılı olmayan dəyişən rolunu ifadə edir; $y = a(x)$ reqressiya və ya reqressiya funksiyası adlanır. $a(x)$ funksiyasının qrafiki Y təsadüfi kəmiyyətinin x -ə görə reqressiya xətti və ya reqressiya əyrisi adlanır. x dəyişəninə reqressiya dəyişəni və ya reqressor deyilir. Y -in x -ə görə reqressiya əyrisinin x -in dəyişməsi ilə Y -in orta qiymətinin dəyişməsi dəqiqliyi Y təsadüfi kəmiyyətinin hər bir x üçün hesablanan $\mathbf{D}(Y \mid x) = \sigma^2(x)$ dispersiyası ilə ölçülür.

$\sigma^2(x)$ dispersiyasının x -dən qrafik asılılığı skedastik xətt adlanan və $y = \sigma^2(x) = \mathbf{D}(Y \mid X = x)$ tənliyi ilə ifadə olunan xətlə təsvir edilir. Əgər x -in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda Y və X təsadüfi kəmiyyətləri vahid ehtimalla ciddi funksional asılılıqla əlaqədidirlər. Əgər x -in heç bir qiymətində $\sigma^2(x) \neq 0$ və $a(x)$ x -dən asılı deyildirsə, onda Y -in x -ə görə R.-ı yoxdur.

Ehtimal nəzəriyyəsində R. məsələsinin həlli o hallarda mümkündür ki, reqressiya dəyişəni x -in qiymətləri hər hansı bir X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinə uyğun olsun və X ilə Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanma funksiyası məlum fərz olunsun; [bu halda $\mathbf{M}(Y \mid x)$ riyazi gözləməsi və $\mathbf{D}(Y \mid x)$

dispersiyası uyğun olaraq Y təsadüfi kəmiyyətinin X-in $X = x$ qeyd olunmuş qiymətinə nəzərən şərti riyazi gözləməsi və şərti dispersiyası olacaqdır.] bu halda iki R. təyin olunur: x-ə görə Y-in və y-ə görə X-in reqressiyası; R. anlayışı həm də X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin qarşılıqlı bağlılığının bəzi ölçülərini, reqressiya əyriləri ətrafında paylanmanın topalanma dərəcəsinin xarakteristikaları kimi təyin olunan ölçülərini təyin etmək üçün istifadə oluna bilinir. R. funksiyalarının belə bir xassəsi vardır ki, $\mathbf{M}(Y - f(x))^2$ riyazi gözləməsi mümkün qiymətini bütün həqiqi $f(x)$ funksiyalarından $f(x) = a(x)$ olduğu halda alır, yəni Y-in x-ə görə R.-sı qeyd olunan mənada Y təsadüfi kəmiyyətini ən yaxşı surətdə təsvir edir. Y-in x-ə görə R.-sı **xətti** olduğu, yəni

$$\mathbf{M}(Y \mid x) = \beta_0 + \beta_1(x)$$

olduğu hal, ən mühüm haldır.

β_0 və β_1 **reqressiya əmsalları** adlanır və

$$\beta_0 = a_Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}a_X, \quad \beta_1 = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

düsturları ilə hesablanır, burada ρ_{XY}, – X və Y-in korrelyasiya əmsalı, $\sigma_X^2 = \mathbf{D}X$, $\sigma_Y^2 = \mathbf{D}Y$, $a_X = \mathbf{M}X$, $a_Y = \mathbf{M}Y$.

Y-in x-ə görə R. **düzxətti** isə

$$y = a_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - a_X)$$

düsturu ilə ifadə olunur. X-in y-ə görə R. düzxətti analoji qaydada tapılır. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin ikiölçülü paylanması normal paylanma olduğu halda dəqiq xətti R. vardır.

Statistik tətbiq məsələlərində, təsadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanması haqqında kifayət qədər məlumat olmadığı hallarda, R.-nı dəqiq təyin etmək üçün, onun təqribi tapılması məsələsi qoyulur.

Bu məsələnin həlli verilmiş sinifdən olan bütün $g(x)$ funksiyalarından $\mathbf{M}(Y - g(X))^2$ riyazi gözləməsinin minimum qiymət almasını təmin edən bir funksiyanın seçilməsi məsələsinin həllinə gətirilir. Tapılmış funksiyaya **kvadratik orta reqressiya** deyilir. **Xətti kvadratik orta reqressiyanın** təyin edilməsinin ən sadə halı Y təsadüfi kəmiyyətinin X kəmiyyəti vasitəsilə ən yaxşı xətti approksimasiyasının tapılmasıdır, yəni elə $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ xətti funksiyası axtarılmalıdır ki, $\mathbf{M}(Y - g(x))^2$ mümkün ola bilən ən kiçik qiymət alsın. Bu ekstremal məsələnin yeganə həlli vardır və

$$\beta_0 = a_Y - \beta_1 a_X, \quad \beta_1 = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

deməli, təqribi xətti R.-nın hesablanması dəqiq xətti R. üçün alınmış

$$y = a_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - a_X)$$

R.-nın alınması ilə nəticələnir. $\mathbf{M}(Y - g(X))^2$-ın minimal qiyməti parametrlərin hesablanmış qiymətlərində $\sigma_Y^2(1 - \rho_{XY})^2$-ə bərabərdir. Əgər $a(x)$ R.-sı vardırsa, onda ixtiyari β_0 və β_1 qiymətlərində

$$\mathbf{M}[Y - \beta_0 - \beta_1 X]^2 =$$
$$= \mathbf{M}[Y - a(X)]^2 + \mathbf{M}[a(X) - \beta_0 - \beta_1 X]^2$$

münasibəti doğrudur. Deməli, $y = \beta_0 + \beta_1 x$ kvadratik orta R. düzxətti $a(x)$ R. əyrisinə ən yaxşı approksimasiyadır, bu şərtlə ki, məsafə y oxu boyunca ölçülsün. Ona görə də, əgər $a(x)$ xətti düzxətt olarsa, onda o, kvadratik orta R. düzxətti ilə üst-üstə düşür.

Ümumi halda R. xətti reqressiyadan çox fərqlənərsə, elə m dərəcəli $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$ çoxhədlisinin tapılması məsələsini qoymaq olar ki, bu funksiya ($g(x)$) $\mathbf{M}(Y - g(X))^2$ riyazi gözləməsinin mümkün ola bilən ən kiçik qiymət almasını təmin etsin.

Məsələnin bu qaydada həlli **m – tərtib parabolik və ya polinomial kvadratik** orta R.-nın tapılmasına uyğundur (bax, *Parabolik reqressiya*). $y = g(x)$ əyrisi m – tərtib parabolikdir və o, həqiqi R. əyrisini ən yaxşı surətdə approksimasiya edir. Parabolik R.-nın ümumiləşmiş halı, bu və ya digər verilmiş $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ funksiyalarının xətti kombinasiyası şəklində ifadə olunan aşağıdakı R. funksiyası olacaqdır:

$$g(x) = \beta_0\varphi_0(x) + \beta_1\varphi_1(x) + \ldots + \beta_m\varphi_m(x).$$

$\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$ X-in paylanması əsasında qurulmuş uyğun olaraq, $0, \ldots, m$ tərtib ortoqonal çoxhədlilər olduğu hal ən mühüm əhəmiyyət kəsb edən haldır. **Qeyri–xətti və ya əyrixətli reqressiyaya** triqonometrik R., üstlü R. və s. misal göstərmək olar. Reqressiya anlayışı təbii olaraq, bir R. dəyişəninə deyil, R. dəyişənləri çoxluğuna baxıldığı hal üçün də ümumiləşdirilir. Əgər $X_1, X_2, \ldots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə ehtimal paylanması vardırsa, onda **toplam reqressiya**, məs., X_1-in $x_2, x_3, \ldots, x_n$-ə görə R.-sı təyin olunur:

$$\mathbf{M}(X_1 \mid X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = a_1(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Uyğun tənlik X_1-in $x_2, x_3, \ldots, x_n$-ə görə *reqressiya səthini* təyin edir. X_1-in $x_2, x_3, \ldots, x_n$-ə görə xətti R.-sı

$$\mathbf{M}(X_1 \mid x_2, \ldots, x_n) = \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\beta_2, \ldots, \beta_n$ – R. əmsallarıdır ($\mathbf{M}X_k = 0$ olduqda). X_1 kəmiyyətinin $x_2, x_3, \ldots, x_n$ üzrə xətti kvadratik orta R.-sı X_1 kəmiyyətinin $X_2, X_3, \ldots, X_n$ kəmiyyətlərilə ən yaxşı xətti qiymətləndirilməsi kimi təyin olunur və bu qiymətləndirilmə $\mathbf{M}(X_1 - \beta_2 X_2 - \ldots - \beta_n X_n)^2$ ifadəsinin minimum qiymət alması mənada anlaşılır. Uyğun **reqressiya müstəvisi**, əgər $x_1 = a(x_2, \ldots, x_n)$ R. səthi vardırsa, bu reqressiya səthinin ən yaxşı approksimasiyasını verir. Əgər R. səthi müstəvi olarsa, onda bu səth kvadratik orta R. müstəvisi ilə hökmən üst-üstə düşür (bu o halda olur ki, $X_1, \ldots, X_n$ kəmiyyətlərinin birgə paylanması normal paylanma olsun).

Y-in X-ə görə R.-na sadə misal Y və X arasında $Y = u(x) + \delta$, $u(x) = \mathbf{M}(Y/X = x)$ münasibətilə ifadə olunan

asılılıq olduğu, lakin X və δ-nin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu haldır. y və x qeyri – təsadüfi kəmiyyətləri arasındakı funksional asılılığı təyin etmək üçün eksperimenti planlaşdırarkən, Y-in yuxarıda qeyd olunan şəkildə ifadə olunması yaxşıdır. R.-nın bu modeli Y təsadüfi kəmiyyətinin təsadüfi olmayan x kəmiyyətindən asılılıq xüsusiyyətlərinin araşdırılmasında istifadə olunur.

Praktikada $y = u(x)$ funksiyasının və R.-nın naməlum əmsallarının eksperimental məlumatlara əsasən seçilməsi *reqression analiz* metodları ilə aparılır.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

REQRESSİYA DÜZXƏTTİ « регрессии прямая; regression line » – bax, *Reqressiya xətti / əyrisi*, *Reqressiya müstəvisi.*

REQRESSİYA ƏMSALI « регрессии коэффициент; regression coefficient » – *reqressiya tənliyindəki* asılı olmayan dəyişənin əmsalıdır.

Məs., $\mathbf{M}(Y \mid X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$ xətti reqressiya tənliyində Y və X təsadüfi kəmiyyətlərini əlaqələndirən R. ə.-ları β_0 və β_1 aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$\beta_0 = a_2 - \rho_{XY}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}a_1, \quad \beta_1 = \rho_{XY}\frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

burada ρ_{XY}, – X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalıdır. $a_1 = \mathbf{M}X$, $a_2 = \mathbf{M}Y$, $\sigma_1^2 = \mathbf{D}X$, $\sigma_2^2 = \mathbf{D}Y$. R. ə.-larının (s e ç i m i R. ə.) hesablanması *reqression analizin* əsas məsələsidir.

REQRESSİYA ƏYRİSİ « регрессии кривая; regression curve » – bax, *Reqressiya xətti / əyrisi.*

REQRESSİYA FUNKSİYASI « регрессии функция; regression function » – Y təsadüfi kəmiyyətinin *riyazi gözləməsinin* hər hansı digər müşahidə olunan (deterministik) X təsadüfi kəmiyyətinin müşahidə olunmuş $X = x$ qiymətindən asılılığıdır: $\mathbf{M}(Y \mid x) = f(x)$ reqressiya funksiyasıdır.

Bax, *Reqressiya*.

REQRESSİYA FUNKSİYASI; x ə t t i i n t e r p o l - y a s i y a « **регрессии функция;** л и н е й н а я и н - т е р п о л я ц и я; l i n e a r i n t e r p o l a t i o n o f **regression function »** – bax, *Xətti interpolyasiya*(s ı) r e q r e s s i y a f u n k s i y a s ı n ı n.

REQRESSİYA FUNKSİYASI; m ü ş a h i d ə l ə r ü z r ə s t a t i s t i k q i y m ə t « **регрессии функция;** о ц е н к а п о н а б л ю д е н и я м; **regression function;** e s t i m a t i o n f r o m o b s e r v a t i o n s » – *reqressiya* funksiyasının statistik qiyməti kimi istifadə olunan, müşahidələr nəticələrinin funksiyasıdır. (X, Y) – ehtimal sıxlığı $f(x, y)$ olan ikiölçülü təsadüfi vektor, $r(x) = \mathbf{M}(Y \mid X = x)$, – Y-in X-də reqressiya funksiyası olsun. $r(x)$ R. f.-nın statistik qiyməti kimi

$$r_n(\tilde{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j K(a_n(x - X_j))}{\sum_{j=1}^{n} K(a_n(x - X_j))} \qquad (1)$$

statistikalar sinfi istifadə olunur, burada (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, – (X, Y) vektorunun asılı olmayan müşahidələridir, K funksiyası mütləq inteqrallanandır və onun inteqralı x-in bütün qiymətləri üzrə vahidə bərabərdir, a_n ardıcıllığı isə elədir ki, $a_n \to \infty$ olduqda $a_n/n \to 0$. R. f.-nın (1) statistik qiymətləri [1], [2]-də eyni zamanda daxil olunmuşdur və n ü v ə t i p s t a t i s - t i k q i y m ə t l ə r adlanır.

R. f.-nın (1) statistik qiymətləri f üzərinə olduqca zəif məhdudiyyətlərlə və K nüvələrinin geniş sinfi üçün asimptotik normal, tutarlı və asimptotik meylsiz statistik qiymətlərdir və

$$\mathbf{M}r_n(x) = r(x) + O(a_n^{-2}),$$

$$\mathbf{D}r_n(x) \sim \frac{\mathbf{D}(Y \mid X = x)}{g(x)}\,\frac{a_n}{n}\int K^2(u)du$$

münasibətləri də doğrudur, burada $g(x)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlığıdır. Bundan başqa, R. f.-nın statistik qiyməti, K məhdud dəyişən funksiya, Y sanki yəqin məhdud, $\min_{a \le x \le b} g(x) > 0$ və $n^{-1}a_n^2 \ln n \to 0$ olduqda, $-\infty < a \le x \le b < \infty$ şərtini ödəyən x-lər üzrə $r(x)$-ə sanki yəqin müntəzəm yığılır. R. f.-nın (1) statistik qiymətlərinin xətalarının müxtəlif kvadratik ölçülərinin asimptotikası yaxşı öyrənilmişdir (bax, [3], [4]).

$$g_n(x) = \frac{a_n}{n}\sum_{j=1}^{n} K(a_n(x - X_j)),$$

$$V_n(x) = \frac{a_n}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j^2 K(a_n(x - X_j))\,(g_n(x))^{-1} - r_n^2(x)$$

olduqda

$$\xi_n = \sup_{-\infty < a \le x \le b < \infty} \left| r_n(x) - r(x) \right| \left(\frac{g_n(x)}{V_n(x)} \right)^{1/2}$$

kəmiyyətini $r_n(x)$-in $r(x)$-dən yayınma ölçüsü kimi götürmək olar. Bəzi olduqca ümumi şərtlərlə

$$\mathbf{P}\{\sigma_n \xi_n - d_n < \lambda\} \to e^{-2e^{-\lambda}} \qquad (2)$$

münasibəti ödənilir, burada σ_n və d_n aşkar yazılan məlum parametrlərdir (bax, [3], [5]). (2) münasibətinin tətbiqi iki məsələ: a) R. f. üçün asimptotik etibarlı zonanın qurulması və b) $v = r_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün testlərin qurulması məsələlərinin həllindən ibarətdir.

$r_n(x)$-in $r(x)$-dən yayınmasının digər ölçüsü kimi

$$W_n = \int (r_n(x) - r(x))^2 g_n^2(x)\, h(x)\, dx$$

inteqralı ilə təyin olunan W_n kəmiyyətindən istifadə olunur, burada h – hər hansı çəki funksiyasıdır. Bəzi şərtlər ödənildikdə W_n-in limit paylanması normal paylanmadır. Bu nəticəyə əsasən H_0-a yaxınlaşan H_n alternativlərinə qarşı $H_0 : r = r_0$ hipote-

zinin yoxlanılması üçün W_n statistikasına əsaslanan kriteri qurmaq olur, yəni

$$\bar{r}_n(x) = r_0(x) + n^{-1/2+\delta/4}\,\bar{r}(x), \quad 1/4 < \delta < 1/2.$$

Əd.: [1] Надарая Э. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 1, с. 157–59; [2] Watson G., «Sankhya, ser. A.», 1964, v. 26, p. 359–72; [3] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тбилиси, 1983; [4] Collomb G., «Ann. Sci. Univ. de Clermont», 1977, № 65, Math, fasc. 15, p. 24–46; [5] Liero H., «Math. Operat. und Statist.», 1982, Bd 13, № 2, S. 171–82; [6] Конаков В. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 4, с. 879–88.

REQRESSİYA XƏTTİ / ƏYRİSİ « регрессии линия / кривая; regression line / curve » – bir təsadüfi kəmiyyətin digər təsadüfi kəmiyyətə görə *reqressiya* funksiyasının qrafikidir. X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin və hər bir x qiyməti üçün $\mathbf{M}(Y \mid X = x)$ sərti riyazi gözləməsinin varlığı fərz olunur. $y = y(x) = \mathbf{M}(Y \mid X = x)$ funksiyası Y-in X-ə görə reqressiya əyrisi və ya reqressiya xətti adlanır. R. ə. *reqressiya səthinin* xüsusi bir halıdır. $y(x)$ xətti funksiya olduğu halda (bu texniki tətbiq üçün ən mühüm bir haldır) $y = y(x)$ reqressiya düzxətti adlanır.

REQRESSİYA MATRİSİ « регрессии матрица; regression matrix » –

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\,\mathbf{Z} + \mathbf{E} \qquad (*)$$

çoxölçülü xətti reqressiya modelində *reqressiya* əmsalları β_{ij}, $i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, m$ olan $\mathbf{B}$ matrisidir. $\mathbf{X}$ – elementləri ilkin m – ölçülü təsadüfi kəmiyyətin j-ci komponenti üçün müşahidələrin nəticələri X_{jk}, $k = 1, \dots, n$ olan matris; $\mathbf{Z}$ – elementləri məlum reqressiya dəyişənləri z_{ik}, $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, n$ olan matris; $\mathbf{E}$ – elementləri ε_{jk}, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ xətaları və $\mathbf{M}\varepsilon_{jk} = 0$ olan matrisdir. R. m.-nin elementləri β_{jk} naməlumdur və onların qiymətləndirilməsi tələb olunur. (*) modeli *reqression analizin* ümumi xətti modelinin m – ölçülü model halına ümumiləşməsidir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

REQRESSİYA MÜSTƏVİSİ « регрессии плоскость; regression plane » – *reqressiya funksiyası* xətti olduqda onun qrafikidir. Y, $X_1, \dots, X_n$ – təsadüfi kəmiyyətlər, $y = f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{M}(Y \mid X_1 = x, \dots, X_n = x)$, – Y-in $X_1, \dots, X_n$-lərə görə reqressiyası olsun. Əgər f funksiyası xətti olarsa, yəni $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ olarsa, bu tənliyin $\mathbb{R}^{n+1}$-də təyin etdiyi müstəvi – Y-in $X_1, \dots, X_n$-lərə görə reqressiya müstəvisi adlanır. $n = 1$ olduqda, R. m. reqressiya xətti adlanır.

REQRESSİYA SƏTHİ « регрессии поверхность; regression surface » – *reqressiya* funksiyasının qrafikidir. Y, $X_1, \dots, X_n$ – təsadüfi kəmiyyətlər və $y = f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{M}(Y \mid X_1 = x, \dots, X_n = x)$, – Y-in $X_1, \dots, X_n$-lərə görə reqressiyası olsun. Bu tənlik $\mathbb{R}^{n+1}$ fəzasında reqressiya səthi adlanan səthi təyin edir. $n = 1$ olduqda, R. s. reqressiya əyrisi (xətti) adlanır. Əgər f bütün arqumentlərinə görə xətti funksiya olarsa, R. s. reqressiya müstəvisi adlanır.

REQRESSİYA SPEKTRİ « регрессии спектр; regression spectrum » – stasionar zaman sıraları üçün reqression sxemə daxil olan *təsadüfi prosesin* spektridir.

$t = 1, \dots, n$ qiymətlərində müşahidə olunan Y_t təsadüfi prosesi

$$Y_t = a_t + X_t \qquad (1)$$

kimi ifadə olunsun, burada X_t – riyazi gözləməsi $\mathbf{M}X_t \equiv 0$ olan təsadüfi prosesdir, prosesin orta qiyməti $\mathbf{M}\,Y_t = a_t$ isə

$$a_t = \sum_{k=1}^{s} \beta_k\,\varphi_t^{(k)} \qquad (2)$$

xətti reqressiya formasında ifadə olunur, burada $\varphi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_n^{(k)})$, $k = 1, \dots, s$ – məlum reqression vektorlar, $\beta_1, \dots, \beta_s$ – naməlum reqressiya əmsallarıdır. $M(\lambda)$, – $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(s)}$ reqression vektorların spektral paylanma funksiyası olsun. $M(\lambda)$-nın reqressiya spektri bütün λ-ların elə çoxluğuna deyilir ki, λ-nı özündə saxlayan $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ ixtiyari (λ_1, λ_2) intervalı üçün $M(\lambda_2) - M(\lambda_1) > 0$ münasibəti ödənilsin.

(1) – (2) sxemlərində reqressiya əmsallarının qiymətləndirilməsi məsələlərində R. s. mühüm rol oynayır. Məs., R. s.-nin elementlərinin terminlərində ən kiçik kvadratlar metodu üzrə tapılmış β statistik qiymətlərinin asimptotik effektivliyinin zəruri şərtləri ifadə olunur.

Əd.: [1] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956.

REQRESSİYA TƏNLİYİ « регрессии уравнение; regression equation » – bir təsadüfi vektorun müşahidə olunmuş qiymətlərinə görə digər təsadüfi vektorun qiymətlərinin proqnozu üçün *şərti riyazi gözləmə* terminlərində funksiya təyin edən tənlikdir.

$X = (X_1, \dots, X_m)^{\mathrm{T}}$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^{\mathrm{T}}$ uyğun olaraq, $x = (x_1, \dots, x_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ və $y = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ qiymətlərini alan, birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x, y)$ ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Əgər

$$\mathbf{M}(Y \mid X) = f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^{\mathrm{T}}$$

riyazi gözləməsi vardırsa, onda $y = f(x)$ bərabərliyi Y-in X-ə görə reqressiya tənliyi, $f(\cdot)$ funksiyası reqressiya və ya reqressiya funksiyası adlanır.

Reqression analizdə R. t.-dən Y təsadüfi vektoru üçün X təsadüfi vektorunun müşahidə olunmuş qiymətinə görə $f(\cdot)$ reqressiya funksiyası vasitəsilə reqression proqnoz adlanan $\hat{Y}$-nin qurulmasında istifadə olunur: $\hat{Y} = f(X)$ qəbul olunur. $\delta = Y - \hat{Y}$ fərqinə *reqression proqnoz xətası* deyilir və $\mathbf{M}\delta = 0$ ($\mathbb{R}^n$-də sıfır vektoru), yəni reqression proqnoz

meylsiz xarakteristikadır. Əgər $\mathbf{M}(Y \mid X) = f(X)$ vektorunun komponentləri $f_1(X), \ldots, f_n(X)$ məhz müşahidə olunan X vektorunun $X_1, \ldots, X_m$ komponentlərinin çoxhədliləri olarsa, reqressiya parabolik reqressiya adlanır (bax, *Xətti reqressiya*, *Xətti interpolyasiya*(sı) reqressiya funksiyasının, *Reqression analiz*).

Əd.: [1] Себер Дж. А. Ф., Линейный регрессионный анализ., пер. с англ., М., 1980.

REQRESSOQRAM « регрессограмма; regressogram » – bax, *Qeyri – parametrik reqression analiz.*

REQRESSOR « регрессор; regressor » – bax, *Reqression dəyişən,* reqressor.

REQULYAR BİRÖLÇÜLÜ DİFFUZİYA « регулярная одномерная диффузия; regular one-dimensional diffusion » – bax, *Birölçülü diffuziya.*

REQULYAR ÇOXLUQ « регулярное множество; regular set » – bax, *Böyük yayınmalar* təsadüfi proses üçün.

REQULYAR DİRİXLE FORMASI « регулярная форма Дирихле; regular Dirichlet form » – bax, *Markov prosesi*; Dirixle forması.

REQULYAR MARKOV ZƏNCİRİ « регулярная цепь Маркова; regular Markov chain » – vəziyyətlərinin təşkil etdiyi yeganə mühüm sinfi tsiklik altsiniflərə bölünməyən, vəziyyətləri sayı sonlu bircins *Markov zənciridir*. Markov zənciri, yalnız və yalnız, o halda requlyar zəncirdir ki, hər hansı t (ola bilər ki, ixtiyari böyük t) qiymətində t addıma $p_{ij}(t)$ keçid ehtimallarının hamısı sıfırdan fərqlidir. R. M. z.-ində bütün final ehtimalları $p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ mövcuddur, sıfırdan fərqlidir və yeganə stasionar paylanma əmələ gətirirlər.

Əd.: [1] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

REQULYAR NÖQTƏ çoxluq üçün **« регулярная точка** для множества; **regular point** for a set **»** – bircins *Markov prosesinin* vəziyyətləri fəzasının elə nöqtəsidir ki, $t = 0$ anında prosesin bu nöqtədən başlayan trayektoriyaları verilən çoxluğa ixtiyari $[0, \delta)$, $\delta > 0$ zaman müddətində sonsuz dəfə sanki yəqin daxil ola bilir. Əgər $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, – $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ faza fəzasında standart prosesdirsə, onda $x \in \mathscr{E}$ və $\Gamma \subset \mathscr{E}$ Borel çoxluqlarının nə cür olmasından asılı olmayaraq: ya x nöqtəsi Γ çoxluğu üçün requlyardır və ya qeyd olunan hadisənin $\mathbf{P}_x$ – ehtimalı sıfra bərabərdir, – alternativi doğrudur. Sonuncu halda Γ çoxluğu x nöqtəsində incə və ya seyrək çoxluq, x nöqtəsi isə Γ çoxluğu üçün irrequlyar nöqtə adlanır. ζ prosesinin Qrin funksiyası üçün müəyyən fərziyyələrlə (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) klassik Viner kriterisini ümumiləşdirən, Borel çoxluğu üçün nöqtənin requlyarlığının zəruri və kafi şərtləri doğrudur (bax, [5], [6]).

Açıq $U \subset \mathscr{E}$ çoxluğunda Dirixle stoxastik məsələsinə baxdıqda (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) requlyar sərhəd nöqtəsi $\mathscr{E} \setminus U$ üçün requlyar nöqtə anlaşılır. Olduqca zəif əlavə şərtlərlə belə nöqtədə Dirixle məsələsinə uyğun sərhəd şərti reallaşır (bax, [1]). Klassik halda olduğu kimi sərhəd nöqtəsinin requlyarlıq kriterisi baryerin (çəpərin) (belə adlandırılan) varlığı terminlərində ifadə oluna bilinir (bax, [1]).

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y., 1968; [3] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [4] Doob J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – [a. o.], 1984; [5] Kanda M., «J. Math. Soc. Japan», 1967, v. 19, p. 46–69; [6] Stoica L., «Stud. si cerc. mat.», 1986, t. 38, p. 389–91.

REQULYAR ÖLÇÜ « регулярная мера; regular measure » – topoloji T fəzasının Borel σ – cəbri $\mathscr{B}(T)$ - də aşağıdakı xassəni ödəyən *ölçüdür:* hər bir $B \in \mathscr{B}(T)$ çoxluğu üçün $\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B,\ F$ qapalı çoxluğudur$\}$ münasibəti doğrudur. Metrik fəzada hər bir sonlu Borel ölçüsü requlyar ölçüdür. Elə kompakt Hausdorf fəzası vardır ki, ixtiyari Borel ehtimal ölçüsü bu fəzada requlyar olmaya bilər.

Bax, *Təsadüfi ölçü.*

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

REQULYAR SƏRHƏD NÖQTƏSİ « регулярная граничная точка; regular boundary point » – bax, *Requlyar nöqtə* çoxluq üçün.

REQULYAR ŞƏRTİ EHTİMAL « регулярная условная вероятность; regular conditional probability » – bax, *Şərti ehtimal.*

REQULYAR TƏSADÜFİ MEYDAN « регулярное случайное поле; regular random field » – X_t, $t \in T$ *təsadüfi kəmiyyətlərinin* çoxluğudur, burada T elə hesabi çoxluqdur ki, $\bigcap\limits_V \mathfrak{B}(T \setminus V)$ σ – cəbri trivial cəbrdir (yəni ehtimalları ya 0 və ya 1 olan hadisələrdən ibarətdir). Burada $\mathfrak{B}(T \setminus V)$, – X_t, $t \in T$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir, kəsişmə isə bütün sonlu $V \subset T$ üzrə götürülür.

REQULYARLANMA SƏRHƏDİ « регулирования граница; regulation limit / boundary » – bax, *Statistik nəzarət, keyfiyyətə.*

REQULYARLIĞI, ÖLÇÜNÜN « регулярность меры; regularity of a measure » – bax, *Ölçü.*

REQULYARLIQ(ğı) təsadüfi prosesin trayektoriyasının **« регулярность** траектории случайного процесса; **regularity** of trajectory of a random process**»** – bax, *Təsadüfi proses*; trayektoriyanın requlyarlığı.

RELEY FEYDİNQİ / DONMASI « рэлеевское замирание; Rayleigh fading » – bax, *Feydinqlər / donmalar* kanalda.

RELEY – KORRELYASİON FUNKSİYA « релейная корреляционная функция; relay correlation function », stasionar təsadüfi $X(t)$ prosesinin – $\operatorname{sgn} X(t)$ və $X(t)$ proseslərinin *qarşılıqlı korrelyasion funksiyası* $B^{(r)}(\tau) = \mathbf{M}\, X(t) \operatorname{sgn} X(t+\tau)$ funksiyasıdır, burada

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Əgər $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ ikiölçülü stasionar təsadüfi proses olarsa, onda birölçülü hala uyğun olaraq, $B_{XY}^{(r)}(\tau) = \mathbf{M}Y(t)\operatorname{sgn}X(t+\tau)$ $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin qarşılıqlı R. - k. f. adlanır.

Əgər (X, Y) normal qanunla paylanmış ikiölçülü təsadüfi vektor, $\mathbf{M}X = \mathbf{M}Y = 0$, $g(x)$ isə $\mathbf{M}Xg(X) < \infty$ şərtini ödəyən funksiya olarsa, onda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\mathbf{M}Yg(X) = cXY, \quad c = \mathbf{M}Xg(X)/\mathbf{M}X^2. \qquad (1)$$

Baxılan halda

$$\mathbf{M}X\operatorname{sgn}X = \mathbf{M}|X| = \{2\mathbf{M}X^2/\pi\}^{1/2}$$

olduğundan, riyazi gözləmələri sıfra bərabər olan $X(t)$ və $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ Qauss təsadüfi proseslərinin $B^{(r)}(\tau)$ və $B_{XY}^{(r)}(\tau)$ R. – k. f.-nın təqribən təyin olunmasından $X(t)$ və $\zeta(t) = \{X(t), Y(t)\}$ proseslərinin aşağıdakı korrelyasion funksiyalarının statistik qiymətləri üçün istifadə oluna bilinər:

$$\mathbf{M}X(t+\tau)X(t) = B(\tau) = \pi B^{(r)}(\tau)B^{(r)}(0)/2 \qquad (2)$$

[və ya $R(\tau) = B(\tau)/B(0) = B^{(r)}(\tau)/B^{(r)}(0)$]

və

$$\mathbf{M}X(t+\tau)Y(t) = B_{XY}(\tau) = \pi B_{XY}^{(r)}(\tau)B_{XX}^{(r)}(0)/2 \qquad (3)$$

[və ya $R_{XY}(\tau) = B_{XY}(\tau)/[B_{XX}(0)/B_{YY}(0)]^{1/2}$].

Eyni zamanda $B^{(r)}(\tau)$ və $B_{XY}^{(r)}(\tau)$ R. – k. f.-larının seçimi qiymətlərinin təyin olunması üçün $\sum_k x(k\Delta)\operatorname{sgn}x(k\Delta+\tau)$ və $\sum_k y(k\Delta)\operatorname{sgn}x(k\Delta+\tau)$ şəklində cəmləri tapmaq tələb olunur [burada $x(t)$ və $y(t)$, – $X(t)$ və $Y(t)$ proseslərinin realizasiyalarıdır], əgər t yalnız tam qiymətlər alırsa, onda bu cəmlərdə vurma əməli olmadığından, onlar asanlıqla hesablanır [seçimi $B_T^*(\tau)$ və $B_{XY,T}^*(\tau)$ korrelyasion funksiyalarının ifadələrindəki $\sum_k x(k\Delta)x(k\Delta+\tau)$ və $\sum_k y(k\Delta)x(k\Delta+\tau)$ cəmləri ilə müqayisədə]. Buna görə də, reley metodu Qauss təsadüfi proseslərinin korrelyasion funksiyalarının təyin olunmasında, $B^{(r)}(\tau)$ və $B_{XY}^{(r)}(\tau)$ R. – k. f.-nın əvvəlcədən hesablanmış statistik qiymətlərinə və (2), (3) düsturlarına əsaslandığından praktikada olduqca tez-tez istifadə olunur (bax, məs, [1] – [6]).

Korrelyasion funksiyaların təyin olunması üçün reley metodunun xətasının kvadratik ortasının hesablanması hətta adi metoddan – $x(t)x(t+\tau)$ və ya $y(t)x(t+\tau)$ hasillərinin zaman üzrə orta qiymətinin tapılmasına əsaslanan metoddan daha dəqiqdir.

Korrelyasion funksiyaların qiymətlərinin tapılmasının reley metodu və onun bəzi modifikasiyaları qeyri – Qauss təsadüfi proseslərinin korrelyasion funksiyalarının qiymətləndirilməsi üçün də istifadə oluna bilinir.

Əd.: [1] Балл Г. А., Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов, М., 1968; [2] Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н., Автоматические цифровые корреляторы, М., 1971; [3] Жовинский В. Н., Арховский В. Ф., Корреляционные устойства, М., 1974; [4] Курочкин С. С., Многоканальные счетные системы и коррелометры, М., 1972; [5] Мирский Г. Я., Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, 2 изд., М., 1972; [6] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [7] Хавкин В. П., Гринберг А. И., «Заводская лаборатория», 1970, т. 36, № 10, с. 1236–38; [8] Косякин А. А., Филаретов Г. Ф., в кн.: Труды к 5-му Всесоюзн. симпоз. «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», Секц. 3, Л., 1972, с. 144–50; [9] Iwase K., «Repts Statist. Appl. Res. Union Jap. Sci. and Eng.», 1973, v. 20, № 4, p. 113–17; [10] Bogner R. E., «Electronics Letters IEE», 1965, v. 1, № 3, p. 53–54; [11] Knowles J. B., Tsui H. T., «J. Appl. Phys.», 1967, v. 38, № 2, p. 607–12.

RELEY METODU korrelyasion funksiyaların təyin olunmasının **« релейный метод определения корреляционных функций; relay method** of correlation analysis **»** – bax, *Reley – korrelyasion funksiya*.

RELEY PAYLANMASI « Рэлея распределение; Rayleigh distribution » – kəsilməz, $(0, \infty)$ -da topalanmış, sıxlığı (bax, şəkil)

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

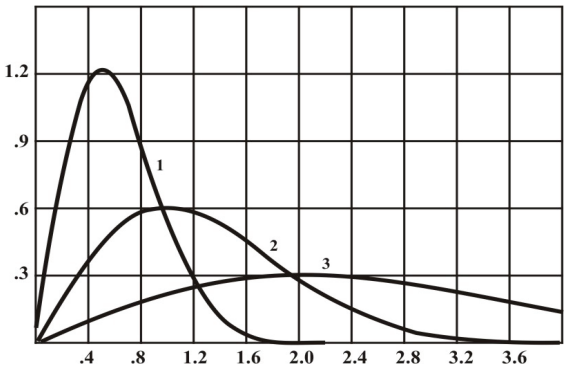
olan ehtimal paylanmasıdır, $\sigma > 0$, σ – parametrdir. R. p. funksiyası

$$F(x) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$$

düsturu ilə ifadə olunur. R. p. paylanmasının sıxlığı

$$p(x) = \frac{2}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma(n/2)} x^{n-1}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

olan paylanmanın $n = 2$, $\sigma = 1$ qiymətlərində xüsusi halıdır. R. p. sərbəstlik dərəcəsi sayı ikiyə bərabər χ^2 – paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin arifmetik kvadrat kökünün paylanması ilə üst-üstə düşür.



Reley paylanmasının sıxlıqları : (1) $\sigma = 0{,}5$; (2) $\sigma = 1$; (3) $\sigma = 2$.

R. p. müsbət asimmetriyaya malikdir, onun yeganə modası $x = \sigma$ nöqtəsindədir. R. p.-nın bütün momentləri sonludur, riyazi gözləməsi $\sqrt{n/2}\,\sigma$, dispersiyası $2\sigma^2(1-\pi/4)$-ə bərabərdir. R. p.-nı müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemində komponentləri asılı olmayan 0 və σ^2 parametrlərli normal paylanma qanununa tabe vektorun uzunluğunun paylanması kimi interpretasiya etmək olar. R. p.-nın üçölçülü fəzada analoqu *Maksvell paylanmasıdır.*

R. p. əsas etibarilə atəş nəzəriyyəsi və statistik rabitə nəzəriyyəsində tətbiq olunur. R. p.-na ilk dəfə (1880) Reley tərəfindən harmonik rəqslərin toplanılmasında yekun amplitudun paylanması kimi baxılmışdır.

Əd.: [1] Стретт Дж. (лорд Рэлей), Волновая теория света, пер. с англ., М. – Л., 1940.

RELEY PROSESİ « Рэлея процесс; Rayleigh process » – bax, *Bessel prosesi.*

RENORMALİZASİON ÇEVİRMƏ « ренормализационное преобразование; renormalization transformation » – bax, *Renormalizasion qrup.*

RENORMALİZASİON QRUP « ренормализационная группа; renormalization group » – təsadüfi meydanın realizasiyaları fəzasının miqyas çevirmələrinin qrupuna (semi – qrupuna) qoşma olan, *təsadüfi meydanlar* fəzasının çevirmələrinin birparametrik qrupudur (bəzi hallarda semi – qrupudur). R. q. diskret və kəsilməz arqumentlərli təsadüfi meydanlar üçün təyin olunur.

$\{X(j) \in T,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ – qiymətləri topoloji vektor fəzası T-də, d – ölçülü tamqiymətli şəbəkədə diskret arqumentli təsadüfi meydan olsun. Bu təsadüfi meydanın ehtimal fəzası $\mathbf{P} = \{T^{\mathbb{Z}^d}, \mathscr{B}, \mu\}$ üçlüyüdür, burada μ – təsadüfi meydanın realizasiyalarının fəzası $T^{\mathbb{Z}^d}$-də silindrik Borel çoxluqları ilə doğurulmuş çoxluqlar σ – cəbri $\mathscr{B}$-də ehtimal paylanmasıdır. $j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ olduqda

$$X(j) \to X_n^{(\alpha)}(j) = (n^d)^{-\alpha} \sum_{k_1 = h\, j_1 + 1}^{n(j_1+1)} \dots \sum_{k_d = h\, j_d + 1}^{n(j_d+1)} X(k_1, \dots, k_d)$$

xətti çevirməsinə $T^{\mathbb{Z}^d}$ fəzasının miqyası və ya tərtibi $n = 1, 2, \dots$ olan α üstlü $(\alpha > 0)$ miqyas çevirməsi deyilir. $\{X_n^d(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanı $\{X(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının renormalizasion çevirməsi adlanır. $\{X_n^{(\alpha)}(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının ehtimal paylanması $\mu_n^{(\alpha)}$ $\{X(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının μ ehtimal paylanmasının renormalizasion çevirməsi adlanır. Renormalizasion $\{R_n^{(\alpha)} : \mu \to \mu_n^{(\alpha)},\ n = 1, 2, \dots\}$ çevirmələri $\mathscr{B}$ σ – cəbrində ehtimal paylanmaları fəzasının çevirmələrinin kommutativ multiplikativ semi – qrupunu təşkil edir; bu semi – qrup α üstlü diskret renormalizasion qrup adlanır. Diskret R. q. anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinə XX əsrin 70-ci illərində Ya. Q. Sinay (bax, [1]) və ondan asılı olmadan Q. Qallovotti (G. Gallovotti) və Q. İona – Lasinio (G. Jona – Lasinio) kimi alimlərin işlərilə daxil olunmuşdur, bunlar Kadanovun fiziki R. q.-un evristik tərifinə ciddi məna verə bilmişlər.

Diskret R. q. $X(j)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri üçün limit teoremləri ilə sıx bağlıdırlar. Əgər $\lim_{n\to\infty} X_n^{(\alpha)}(j),\ j \in \mathbb{Z}^d$ limiti zəif yığılma mənasında vardırsa və bir realizasiyada topalanmamışdırsa, bu limit μ paylanmasının avtomodel limiti adlanır. μ_* ehtimal paylanması ilə təyin olunan $\left\{X_*(j) = \lim_{n\to\infty} X_n^{(\alpha)}(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\right\}$ təsadüfi meydanı uyğun olaraq, $\{X(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanının avtomodel limiti adlanır. Bununla da avtomodel limit, əgər mövcuddursa, $n \to \infty$ olduqda $\{X_n^{(\alpha)}(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ normalanmış cəmlərinin birgə paylanmasının limit qanununu təyin edir. Əgər bütün $n = 1, 2, \dots$ qiymətlərində $R_n^{(\alpha)}\mu_* = \mu_*$ bərabərliyi ödənilərsə, $\mathscr{B}$ σ – cəbrində μ_* ehtimal paylanması α üstlü avtomodel ehtimal paylanması adlanır. Bu halda μ_*-ya uyğun $\{X_*(j),\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ təsadüfi meydanı avtomodel təsadüfi meydan adlanır. Əgər avtomodel $\lim_{n\to\infty} R_n^{(\alpha)}\mu = \mu_*$ limiti vardırsa, onda bu limit α üstlü avtomodel ehtimal paylanmasıdır. $R_n^{(\alpha)}\mu_* = \mu_*$, $n = 1, 2, \dots$ tənlikləri avtomodellik tənlikləri adlanır. Avtomodel limitləri μ_* ilə üst-üstə düşən μ paylanmalarının çoxluğuna μ_* avtomodel ehtimal paylanmalarının cazibə oblastı deyilir. Avtomodel limitlərin varlığının isbatının R. q. metodu avtomodel ehtimal paylanmalarının qurulması, avtomodellik tənliklərinin həlli, onların cazibə oblastlarının araşdırılmasından ibarətdir.

Riyazi gözləmələri sıfra bərabər və eyni dispersiyaya malik asılı olmayan Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin meydanları avtomodel təsadüfi meydanların xüsusi halıdır. Bu meydanların avtomodellik göstəricisi $\alpha = 1/2$-dir. Avtomodel limitlərin bu meydanlara yığılması mərkəzi limit teoreminin məzmununu təşkil edir.

Avtomodel təsadüfi meydanlara daha ümumi misal dayanıqlı paylanmalara tabe, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər meydanlarıdır. Asılı avtomodel təsadüfi meydanlar sinfi olduqca genişdir və hal-hazırda bu sinif tam təsvir olunmamışdır. Qauss avtomodel təsadüfi meydanları və bu meydanların avtomodel funksionalları sinifləri təsvir olunmuşdur (bax, [1], [2]). Bu avtomodel meydanların cazibə oblastında yerləşən təsadüfi meydanların bəzi sinifləri də araşdırılmışdır.

$\{X(x) \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ Evklid fəzasından olan, d – ölçülü Evklid fəzasında kəsilməz arqumentli, ümumiləşmiş təsadüfi meydan olsun. Bu meydana uyğun ehtimal fəzası $\{S'(\mathbb{R}^d),\ \mathscr{B},\ \mu\}$ üçlüyüdür, burada $S'(\mathbb{R}^d)$ – tədricən artan ümumiləşmiş funksiyalar fəzası, μ, – $S'(\mathbb{R}^d)$-nin Borel silindrik çoxluqlarının doğurduğu $\mathscr{B}$, – σ – cəbrində ehtimal ölçüsüdür. $X(x) \in S'(\mathbb{R}^d)$ ümumiləşmiş funksiyası üçün $\alpha > 0$ üstlü $\lambda > 0$ miqyaslı və ya λ tərtib miqyas çevirməsi – $X(x) \to X_\lambda^{(\alpha)}(x) = \lambda^{(\alpha-1)d} X(x/\lambda)$ düsturu vasitəsilə təyin olunur, burada tərifə görə, $(X(x/\lambda), \varphi(x)) = \lambda^d (X(x), \varphi(\lambda x))$. $\{X_\lambda^{(\alpha)},\ x \in \mathbb{R}^d\}$ təsadüfi meydanına

$\{X(x),\ x\in\mathbb{R}^d\}$ təsadüfi meydanının renormalizasion çevirməsi deyilir. $\{X_\lambda^{(\alpha)}(x),\ x\in\mathbb{R}^d\}$ təsadüfi meydanının ehtimal paylanması $\mu_\lambda^{(\alpha)}$-ya μ ehtimal paylanmasının renormalizasion çevirməsi deyilir. Daha ətraflı, əgər μ sonluölçülü $p_k(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ paylanmaları ilə verilərsə, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in S(\mathbb{R}^d)$, $k=1, 2, \dots$ olduğu halda, $p_k(\lambda^{\alpha d}\varphi_1(\lambda x), \dots, \lambda^{\alpha d}\varphi_k(\lambda x))$, $\mu_n^{(\alpha)}$ üçün sonluölçülü paylanmadır. $\{R_n^{(\alpha)} : \mu \to \mu_n^{(\alpha)},\ \lambda>0\}$ renormalizasion çevirmələri $\mathscr{B}$ σ – cəbrində ehtimal paylanmaları fəzasının birparametrli multiplikativ çevirmələr qrupunu yaradır. $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_\lambda^{(\alpha)}\mu$ və $\lim\limits_{\lambda\to 0} R_\lambda^{(\alpha)}\mu$ limitləri sonluölçülü paylanmaların zəif yığılması mənasında mövcuddurlarsa və bir realizasiyada topalanmamışlarsa, bu limitlər uyğun olaraq, μ paylanmasının böyük miqyaslı və kiçik miqyaslı avtomodel limitləri adlanırlar. Əgər bütün $\lambda>0$ üçün $R_\lambda^{(\alpha)}\mu_* = \mu_*$ şərti ödənilərsə, $\{X_*(x),\ x\in\mathbb{R}^d\}$ təsadüfi meydanı və onun ehtimal paylanması μ, $\alpha>0$ üstlü avtomodel təsadüfi meydan və avtomodel paylanma adlanır. Əgər təsadüfi meydanların böyükmiqyaslı və kiçikmiqyaslı avtomodel limitləri varsa, onda bunlar avtomodel təsadüfi meydanlardır. Kəsilməz zamanlı avtomodel təsadüfi proseslərə ilk dəfə XX əsrin 40-cı illərinin əvvəllərində A. N. Kolmoqorovun işlərində baxılmışdır (bax, [3]). Sonradan kəsilməz arqumentli avtomodel təsadüfi meydanların müxtəlif sinifləri tədqiq olunmuşdur (bax, biblioqraf. [2] və [4]-də). Asılı olmayan qiymətlərli meydanlar və avtomodel təsadüfi proseslər, Qauss avtomodel təsadüfi meydanları, Qauss təsadüfi meydanlarının avtomodel funksionalları, dayanıqlı və Puasson təsadüfi meydanların avtomodel funksionalları və s. belələrindəndir.

Kəsilməz və diskret R. q.-lar arasında təbii əlaqə vardır. $\chi(x)$ – vahid ölçülü $\{x\in\mathbb{R}^d \mid 0\le x_k\le 1,\ k=1, \dots, d\}$ kubunun xarakteristik funksiyası və $\chi_j(x)=\chi(x-j)$ olsun. $\{X(x),\ x\in\mathbb{R}^d\}$ isə elə ümumiləşmiş meydan olsun ki, $X(j)=X(\chi_j)=$ $=(X(x), \chi_j(x))$, $j\in\mathbb{Z}^d$ təsadüfi kəmiyyətləri təyin olunsunlar. Belə ümumiləşmiş təsadüfi meydan *diskretlənən*, $\{X_j,\ j\in\mathbb{Z}^d\}$ diskret təsadüfi meydanı isə onun *diskretizasiyası* adlanır. Onda $DR_{n,\text{kəsilməz}}^{(\alpha)} = R_{n,\text{diskret}}^{(\alpha)} D$ bərabərliyi doğrudur, burada $n\in\mathbb{Z}_+$, D, $R_{n,\text{kəsilməz}}^{(\alpha)}$ və $R_{n,\text{diskret}}^{(\alpha)}$ uyğun olaraq diskretizasiya, kəsilməz və diskret renormalizasion çevirmə operatorlarıdır. Aydındır ki, onda belə nəticə alınır ki, avtomodel təsadüfi meydanın diskretizasiyası avtomodeldir. Bu isə diskret arqumentli avtomodel təsadüfi meydanların quruması üçün ümumi metod almağa imkan verir.

Diskret və kəsilməz R. q.-lar statistik fizikada və konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunur, məs., kritik nöqtələrin və faza keçidlərinin nöqtələrinin araşdırılmasında, hidrodinamikada turbulent axınların təsvirində, avtomat şəbəkələr nəzəriyyəsində və s.

Əd.: [1] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [2] Major P., Multiple Wiener - Ito integrals, B. – [a. o], 1981, p. 1–127; [3] Колмогоров А. Н., Математика и механика, М., 1985; с. 274 –77; [4] Блехер П. М., Сургайлис Д., в кн: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 20, М., 1983, с. 3–51; [5] Добрушин Р. Л., в кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., 1978, с. 179–213.

RENYİ ENTROPİYASI « Реньи энтропия; Rényi entropy » – bax, *İnformasion ölçü.*

RENYİ KRİTERİSİ « Реньи критерий; Rényi test » – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyası $F(x)$-in kəsilməz olması haqqında aşağıdakı şəkildə verilən:

$$H_1^+ : \sup_{|x|<\infty} \psi[F(x)]\,(\mathbf{M}F_n(x) - F(x)) > 0\,,$$

$$H_1^- : \inf_{|x|<\infty} \psi[F(x)]\,(\mathbf{M}F_n(x) - F(x)) < 0\,,$$

$$H_1 : \sup_{|x|<\infty} \psi[F(x)]\,\big|\mathbf{M}F_n(x) - F(x)\big| > 0$$

alternativlərinə qarşı, sadə qeyri – parametrik H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunan *statistik kriteridir*, burada $F_n(x)$, – $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası, $\psi\ge 0$ – çəki funksiyasıdır. Əgər

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} 1/F(x), & F(x)\ge a \text{ olduqda}\,, \\ 0, & F(x)<a \text{ olduqda} \end{cases}$$

və a, – $[0,1]$ parçasından ixtiyari qeyd olunmuş ədəd olarsa, onda H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün tətbiq olunacaq R. k. H_1^+, H_1^-, H_1 alternativlərinə uyğun aşağıdakı Renyi statistikalarına əsaslanır:

$$R_n^+(a,\,1) = \sup_{F(x)\ge a} \frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)} = \max_{F(X_{(m)})\ge a} \frac{m/n - F(X_{(m)})}{F(X_{(m)})}\,,$$

$$R_n^-(a,\,1) = -\inf_{F(x)\ge a} \frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)} =$$

$$= \max_{F(X_{(m)})\ge a} \frac{F(X_{(m)}) - (m-1)/n}{F(X_{(m)})}\,,$$

$$R_n(a,\,1) = \sup_{F(x)\ge a} \frac{\big|F_n(x)-F(x)\big|}{F(x)} =$$

$$= \max\{R_n^+(a,1),\ R_n^-(a,1)\}\,,$$

burada $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, – $X_{(1)}\le X_{(2)}\le \dots \le X_{(n)}$ variasion sırasının hədləridir və bu variasion sıra isə $X_1, \dots, X_n$ müşahidələri üzrə qurulmuş sıradır.

$R_n^+(a,\,1)$ və $R_n^-(a,1)$ statistikaları eyni ehtimal qanununa tabedirlər və əgər $0<a\le 1$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\,R_n^+(a,1) < x\right\} = 2\Phi(x)-1\,,\quad x>0\,, \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\,R_n^-(a,\,1) < x\right\} = L(x)\,,\quad x>0\,, \qquad (2)$$

burada $\Phi(x)$ standart normal qanunun paylanma funksiyası, $L(x)$ Renyi paylanma funksiyası olub,

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{ -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8x^2} \right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. $a = 0$ olduğu halda

$$\mathbf{P}\{ R_n^+(0,\ 1) \geq x \} = 1 - \frac{x}{1+x},\ x > 0$$

olur. (1) və (2)-dən aydındır ki, n -in böyük qiymətlərində $R_n^+(a,\ 1)$ və $R_n^-(a, 1)$ statistikalarının Q – faizli kritik qiymətlərini ($0\% < Q < 50\%$) hesablamaq üçün

$$\sqrt{\frac{1-a}{na}}\ \Phi^{-1}(1 - 0{,}005Q) \text{ və } \sqrt{\frac{1-a}{na}}\ L^{-1}(1 - 0{,}01Q)$$

təqribi qiymətlərindən istifadə etmək olar, burada $\Phi^{-1}(x)$ və $L^{-1}(x)$ – uyğun olaraq, $\Phi(x)$ və $L(x)$ -in tərs funksiyalarıdır, bu zaman həm də nəzərə alınır ki, $0\% < Q < 10\%$ olarsa, onda $\Phi^{-1}(1 - 0{,}005Q) \approx L^{-1}(1 - 0{,}02Q)$ olur.

Bundan başqa, əgər $x > 2{,}99$ olarsa, onda Renyi paylanma funksiyası $L(x)$ -in qiymətlərini hesablamaq üçün

$$L(x) \approx 4\Phi(x) - 3$$

təqribi bərabərliyindən istifadə olunur və bu halda xəta $5 \cdot 10^{-7}$ -dən artıq olmur.

Baxılan R. k.-lərindən başqa

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-F(x)}, & \text{əgər } F(x) \leq a \\ 0, & \text{əgər } F(x) > a \end{cases}$$

münasibətilə verilən çəki funksiyasına müvafiq analoji kriterilər də mövcuddur, burada a , – $[0, 1]$ parçasından ixtiyari qeyd olunmuş ədəddir.

Əd.: [1] Renyi A., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1953, v. 4, p. 191–231; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

RENYİ PAYLANMA FUNKSİYASI « Реньи функция распределения; Renyi distribution function » – bax, *Renyi kriterisi*.

RENYİ STATİSTİKASI « Реньи статистика; Rényi statistic » – bax, *Renyi kriterisi*.

REPREZENTATİV XƏTA « репрезентативная ошибка; representative error » – ümumi çoxluğun elementlərindən ibarət hər hansı bir seçimə əsaslanan hər bir nəticənin hesablanmasında buraxılan xətadır. R. x. seçimlər üzrə tədqiqatın məlumat göstəriciləri ilə bütün ümumi çoxluğun uyğun göstəriciləri arasındakı fərqi kəmiyyətcə ifadə edir.

Böyük ədədlər qanununa əsaslanaraq, seçimin həcmini artırmaqla, mümkün ola bilən R. x.-nın sərhədlərini tənzimləmək və əksinə, R. x.-nın mümkün ola bilən verilmiş sərhədinə əsasən seçimin zəruri olan həcmini (elementlərinin sayını) təyin etmək olur.

Seçimlər əsasında alınan nəticələrin tətbiqində R. x. mühüm əhəmiyyətə malikdir. Orta qiyməti hesabladıqda, R. x. seçimi orta ilə ümumi (çoxluğun elementlərinin) ortanın (ədədi orta) arasındakı fərq kimi təyin olunur.

Ümumi orta araşdırılan kəmiyyətin ümumi çoxluqda əks olunmuş bütün qiymətlərinin orta qiymətidir; yəni

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i},\ \left(\sum n_i = N \right)$$

$\overline{X}$ – seçimi qiymətlər arasında təkrarlanan olduğu halda çəkili ortadır, burada n_i , – x_i seçimi qiymətinin müşahidə olunduğu halların sayıdır.

Təkrarlanan seçimi qiymətlər olmadığı halda ədədi orta düsturu:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

tətbiq olunur.

Seçimi çoxluqdakı seçimi qiymətlər əsasında hesablanan orta qiymət:

$$\widetilde{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n},\quad n = \sum n_i$$

seçimi orta adlanır, n – ümumi çoxluğun seçimi elementlərindən ibarət seçim çoxluğunun həcmidir.

R. x. $\Delta = \widetilde{x} - \overline{X}$ düsturu ilə hesablanır.

REPREZENTATİV SEÇİM « репрезентативная выборка; representative sample » – ümumi çoxluğun əsas xüsusiyyətlərini özündə təmsil edən $F(x)$ paylanması ilə verilən ümumi çoxluqdan seçimdir. Buna görə ümumi çoxluğun hər bir elementinin seçimə daxil olunması hallarının eyniimkanlı olması zəruri şərtdir. Bu halda seçimi paylanma funksiyası $\hat{F}(x)$ seçimin həcmi böyük olduğu hallarda ümumi çoxluğun paylanma funksiyası $F(x)$ haqqında kifayət qədər yaxşı təsəvvür yaradır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

RESTRİKTİV STATİSTİK QİYMƏT « рестриктивная оценка; restrictive / constrained estimator » – bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu* məhdudiyyətli.

REVUZ ÖLÇÜSÜ « Ревуза мера; Revuz measure » – bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

REY PROSESİ « Рэя процесс; Ray process » – ikinci növ kəsilməyə malik olmayan, sağdan kəsilməz, qiymətlərini metrik fəzadan alan, rezolventi *Rey rezolventi* olan *Markov prosesidir*. R. p. ciddi Markov prosesidir və tədrici (rus. умеренное) Markov xassəsini ödəyir. R. p.-nin qurulması üsullarından biri Rey – Nayt kompaktifikasiyasıdır (bax, *Markov prosesi*; faza fəzasının kompaktifikasiyası).

Əd.: [1] Ray D., «Ann. Math.», 1959, v. 70, p. 43–72; [2] Getoor R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440; [3] Engelhert H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 85, S. 235–66.

REY REZOLVENTİ « Рэя резольвента; Ray resolvent » – rezolvent eyniliyini ödəyən elə $r_\lambda(x, \Gamma)$, $\lambda > 0$ nüvələr ailəsidir ki, r_λ nüvələrinə uyğun R_λ operatorları kəsilməz funksiyaları kəsilməz funksiyalara çevirir. E – metrik fəza, $r_\lambda(x, \Gamma)$

– hər bir $\lambda > 0$ addımında n ü v ə, yəni x üzrə ölçülən funksiya və Γ üzrə ölçü olsun. Əgər $\lambda r_\lambda(x, E) \le 1$ və

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu, \quad \lambda, \mu > 0$$

r e z o l v e n t e y n i l i y i ödənilərsə, r_λ nüvələri ailəsi r e z o l v e n t adlanır, burada R_λ operatoru

$$R_\lambda f(x) = \int_E r_\lambda(x, dy) f(y)$$

düsturu ilə təyin olunur.

E – metrik kompakt olsun. D. Reyin [1]-dəki işinə uyğun olaraq, R. r. $r_\lambda(x, \Gamma)$ hər hansı bircins Markov prosesinin rezolventidir (bax, *Markov prosesi*; r e z o l v e n t), yəni $r_\lambda(x, \Gamma)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$r_\lambda(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x; \Gamma)\, dt,$$

burada $p(t, x; \Gamma)$ – keçid funksiyasıdır (bu şəkildə ifadə heç də trivial deyildir). Bundan başqa, uyğun prosesi ikinci növ kəsilməsi olmayan sağdan kəsilməz, ciddi Markov xassəsini və bəsit Markov xassəsini ödəyən proses hesab etmək olar.

Əd.: [1] R a y D., «Ann. Math.», 1959, v. 70, p. 43–75; [2] G e t o o r R. K., «Lect. Notes in Math.», 1975, v. 440.

REY – NAYT KOMPAKTİFİKASİYASI « Рэя – Найта компактификация; Ray – Knight compactification » – bax, *Markov prosesi*; f a z a f ə z a s ı n ı n k o m p a k t i f i k a s i y a s ı.

REZOLVENT « резольвента; resolvent » – bax, *Rey rezolventi*.

REZOLVENT(i) a s ı l ı o l m a y a n a r t ı m l a r l ı t ə s a d ü f i p r o s e s i n **« резольвента** с л у ч а й н о г о п р о ц е с с а с н е з а в и с и м ы м и п р и р а щ е н и я м и; **resolvent** o f a p r o c e s s w i t h i n d e p e n d e n t i n c r e m e n t s **»** – bax, *Təsadüfi proses* a s ı l ı o l m a y a n a r t ı m l a r l ı; r e z o l v e n t.

REZOLVENT EYNİLİYİ « резольвентное тождество; resolvent identity » – bax, *Rey rezolventi*.

REZOLVENT TƏNLİYİ « резольвентное уравнение; resolvent equation » – bax, *Markov semi – qrupu*.

RƏQƏMSAL MODULYASİYA « цифровая модуляция; digital modulation » – bax, *Modulyasiya və demodulyasiya.*

RİC STATİSTİK QİYMƏT « ридж – оценка; ridge estimator » – bax, *Yalvari reqressiya*.

RİÇARDSON ÜÇDƏ DÖRD QANUNU « Ричардсона закон четырех третей; four thirds Richardson law » t u r b u l e n t l i k n ə z ə r i y y ə s i n d ə – n i s b i t u r b u l e n t d i f f u z i y a (yəni maye ilə qarışmış iki hissəciyin bir-birindən qarşılıqlı uzaqlaşma prosesinin və ya çoxsaylı hissəciklərin qarışıq buludunun səpələnməsinin) sürətinin hadisənin miqyasından (yəni baxılan iki hissəcik arasındakı l məsafəsindən və ya diffuziyaedən buludun tipik l ölçüsündən) asılılığını təsvir edən münasibətdir. Güclənən turbulentlikdə müxtəlif miqyaslı kükrəntilər (qasırğa, burulğanlar) olduğundan, nisbi diffuziya prosesi l artdıqca sürətlənir, belə ki, l-in kiçik qiymətlərində kükrəntilər bütün hissəcikləri bir tam şəklində köçürərək, artıq l-in böyük qiymətlərində onların qarşılıqlı vəziyyətlərini dəyişməyə başlayırlar.

L. Riçardson [1]-də nisbi diffuziya sürətini

$$K = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} [\mathbf{M} l^2(t)]$$

düsturu ilə təyin olunan diffuziya əmsalı K ilə xarakterizə etməyi təklif etmişdir, burada $l(t)$ – hissəciklərin diffuziyaedən qrupunun t anında uzunluğu miqyasıdır; bundan sonra, o, atmosferdə qarışıqların səpələnməsi haqqında geniş empirik məlumat üzərində işləyərək, R. ü. d. q.-nu almışdır; bu qanuna görə

$$K(l_*) = \alpha l_*^{4/3},$$

burada $l_* = [\mathbf{M} l^2]^{1/2}$, α – ölçü əmsalıdır. A. M. Obuxov [2]-də göstərmişdir ki, empirik Riçardson qanunu, onun və A. N. Kolmoqorovun inkişaf etdirdikləri lokal izotrop turbulentlik nəzəriyyəsindən alınır, bu nəzəriyyəyə görə l_*-nun inersion miqyaslar intervalından olan qiymətləri üçün

$$K(l_*) = a\, \varepsilon^{1/3}\, l_*^{4/3}$$

münasibəti ödənilməlidir, burada ε – turbulentlik enerjisinin dissipasiyası, a – ölçüsüz universal sabitdir (indiki məlumatlara görə $0{,}1$-ə yaxın sabitdir).

Əd.: [1] R i c h a r d s o n L. F., «Proc. Roy. Soc. London A», 1926, v. 110, № 756, p. 709–37; [2] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.», 1941, № 4–5, с. 453–66; [3] М о н и н А. С., Я г л о м А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, § 24.3, М., 1967.

RİMAN İNFORMASİON METRİKASI « риманова информационная метрика; Riemann information metric » – ehtimal paylanmaları çoxluqlarında *statistik həllər qaydaları kateqoriyasına* nəzərən invariant olan, vuruq dəqiqliyinə qədər yeganə Riman metrikasıdır. Elementar nəticələrin eyni bir ölçülən fəzası $(\Omega, \mathfrak{A})$-da iki ehtimal paylanması üçün R. i. m.

$$s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 2 \arccos \int_\Omega \sqrt{\mathbf{P}(d\omega)\, \mathbf{Q}(d\omega)} \qquad (1)$$

B h a t t a c a r y a – R a o s f e r i k m ə s a f ə s i ilə verilir. R. i. m. lokal olaraq informasiya miqdarı (Fişer informasiya miqdarı) ilə təyin olunur; hamar ailə üçün

$\{\mathbf{P}_t,\ t \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\} \subset \text{cap}\,\{\Omega, \mathfrak{A}\}$ $\mathbf{P}_\theta$ «nöqtəsində»

$$ds^2 = \sum_{i,j}^k dt^i\, dt^j I_{ij}(\theta), \qquad (2)$$

burada $(I_{ij}(\theta))$ – Fişer informasion matrisidir.

Tam variasiya metrikası da statistik həllər qaydaları kateqoriyasına nəzərən invariant sinfə aiddir və bu sinifdə bu metrika vuruq dəqiqliyinə qədər minorantdır (bax, [5]).

(2) fundamental xassəsinə baxmayaraq, (1) metrikası statistik həllər qaydaları kateqoriyalarına nəzərən invariant digər metrikalar kimi nəzəriyyədə mühüm rol oynamır. Riyazi statistikada «oxşamamazlıq» xarakteristikası, adətən, *nisbi entropiya* hesab olunur, bu da bir çox cəhətdən, Pifaqor teoremi də

daxil olmaqla, Evklid məsafəsinin kvadratının yarısının qeyri – simmetrik analoqudur.

Əd.: [1] Bhattacharyya A., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1943, v. 35, p. 99–109; [2] Rao C. R., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1945, v. 37, p. 81–91; [3] Козлов В. П., «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 4, с. 779–82; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Ченцов Н. Н., Дополнение 1, в кн.: Деврой Л., Дьёрфи Л., Непараметрическое оценивание плотности, пер. с англ., М., 1988; [6] Amari S., Differential–geometrical methods in statistics, B. – [a. o.], 1985.

RİSK « риск; risk » – statistik eksperimentin qoyuluşu və qərarın qəbulu ilə bağlı orta itkiləri ifadə edən, *statistik prosedurun* keyfiyyətinin ədədi xarakteristikasıdır. *Risk funksiyası*, *aprior risk*, *Beyes riski*, *minimaks risk* (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*) belə ədədi xarakteristikalardır. Bu xarakteristikalar və orta itki kəmiyyətinin digər bir sıra ədədi xarakteristikalarının minimallaşdırılma şərtindən optimal statistik prosedurlar adlanan qaydalar təyin olunur. Bəzən, baxılan keyfiyyət xarakteristikasında statistik eksperimentin aparılması üçün sərf olunan xərclər nəzərə alındıqda, R. termini əvəzinə «tam risk» termini istifadə olunur; bu halda R. dedikdə, yalnız *həlledici funksiyanın* keyfiyyətinin ədədi xarakteristikası anlaşılır (həlledici funksiyanın riski).

RİSK minimaks **« риск** минимаксный; minimax **risk »** – bax, *Minimaks risk*.

RİSK(i) strategiyanın **« риск** стратегии; **risk** of a strategy **»** – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*.

RİSK FUNKSİYASI « риска функция; risk function » – δ *həlledici funksiyasının* keyfiyyət xarakteristikasıdır və δ-nın tətbiqi nəticəsində statistikin orta itkisini kəmiyyətcə ifadə edir. $L(\theta, d)$ – itki funksiyası, $\delta = \delta(x)$ hər hansı həlledici funksiya olsun. Onda X təsadüfi elementinin $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasının $\theta \in \Theta$ parametrinin funksiyası kimi baxılan $R(\theta, \delta) = \mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X))$ kəmiyyətinə risk funksiyası deyilir. Bax, *Statistik oyun*, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

RİSS AYRILIŞI « Рисса разложение; Riesz decomposition » $X = (X_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ supermartinqalının – $X_n = m_n + \pi_n$ şəklində ayrılışdır, burada $M = (m_n, \mathcal{A}_m)$, $n \geq 1$ – martinqaldır, $\Pi = (\pi_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ – potensialdır, yəni elə mənfi olmayan supermartinqaldır ki, $\mathbf{M}\pi_n \to 0$, $n \to \infty$. R. a.-nın doğruluğu hər hansı $Y = (Y_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geq 1$ supermartinqalının majorantlanma xassəsinə (yəni $X_n \geq Y_n$, $n \geq 1$ qiymətlərində sanki yəqin ödənilir) malik X supermartinqalları üçün isbat olunur. Supermartinqalın R. a. differensial tənliklər nəzəriyyəsində superharmonik funksiyanın harmonik funksiya və hər hansı müsbət modalı Qrin potensialının cəmi şəklində ifadə olunması haqqında Riss teoreminin analoqudur.

Bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün.

Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilites et potentiel. Theorie des martingales, t. 1–2, P., 1975–80; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. И., Статистика случайных процессов, М., 1974.

RİYAZİ GÖZLƏMƏ « математическое ожидание; expectation / mean value / expected value » orta qiymət, təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi – təsadüfi kəmiyyətin ehtimal *paylanmasının* ədədi xarakteristikasıdır. $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ təsadüfi kəmiyyətinin R. g. ümumi halda ilkin $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsünə görə Lebeq inteqralı kimi:

$$\mathbf{M}\xi(\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) \qquad (*)$$

təyin olunur [$\mathbf{M}\xi(\omega)$ bəzən $\mathbf{E}\,\xi(\omega)$ kimi işarə olunur]. R. g. ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}_\xi$ üzrə x-in Lebeq inteqralı kimi, yəni

$$\mathbf{M}\xi(\omega) = \int_{\mathscr{X}} x\, \mathbf{P}_\xi(dx)$$

inteqralı kimi hesablana bilinər, burada $\mathscr{X}$, – ξ-nin bütün mümkün qiymətləri çoxluğudur. ξ təsadüfi kəmiyyətinin funksiyalarının R. g. $\mathbf{P}_\xi$ paylanması vasitəsilə ifadə olunur: məs., ξ aldığı qiymətlər çoxluğu $\mathbb{R}^1$ olan təsadüfi kəmiyyət, $f(x)$, – x-in birqiymətli Borel funksiyası olarsa, onda

$$\mathbf{M}f(\xi) = \int_\Omega f(\xi(\omega))\mathbf{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x)\mathbf{P}_\xi(dx)$$

münasibəti doğrudur. Əgər $F(x)$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdırsa, onda R. g. Lebeq – Stiltyes (və ya Riman – Stiltyes) inteqralı ilə ifadə olunur:

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x),$$

bu halda ξ-nin (*) mənada inteqrallananlığı

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$$

inteqralının sonluluğu ilə eynigüclüdür. Xüsusi hallarda, əgər ξ x_k, $k = 1, 2, \ldots$ mümkün qiymətlərini uyğun $p_k = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$ ehtimalları ilə alan diskret paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda ξ-nin riyazi gözləməsi

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k$$

düsturu ilə ifadə olunur; əgər ξ paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(x)$ olan mütləq kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdirsə, onda

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

düsturu bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini ifadə edir; bu halda R. g.-nin varlığı uyğun sıra və ya inteqralın mütləq yığılması ilə eynigüclüdür.

R. g.-nin əsas xassələri aşağıdakılardır:

a) əgər $\xi_1(\omega) \leq \xi_2(\omega)$, $\omega \in \Omega$ olarsa, $\mathbf{M}\xi_1 \leq \mathbf{M}\xi_2$;

b) $\mathbf{M}C = C$ bərabərliyi ixtiyari həqiqi C üçün doğrudur;

c) ixtiyari həqiqi α və β üçün $\mathbf{M}(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha\mathbf{M}\xi_1 + \beta\mathbf{M}\xi_2$ bərabərliyi doğrudur;

ç) əgər $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}|\xi_n|$ sırası yığılarsa, $\mathbf{M}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{M}\xi_n$ doğrudur;

d) qabarıq $g(x)$ funksiyası üçün $g(\mathbf{M}\xi) \le \mathbf{M}\,g(\xi)$ bərabərsizliyi doğrudur;

e) ixtiyari məhdud təsadüfi kəmiyyətin sonlu riyazi gözləməsi vardır.

ə) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün $\mathbf{M}\left(\prod_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{M}\xi_k$ bərabərliyi doğrudur.

R. g.-si sonsuzluq olan təsadüfi kəmiyyət anlayışını təbii surətdə təyin etmək olar. Tipik misal bəzi təsadüfi dolaşmalarda (məs., bax, *Bernulli dolaşması*) qayıdış müddətləridir.

R. g.-nin köməyilə paylanmanın bir çox ədədi və funksional xarakteristikaları (məs., təsadüfi kəmiyyətin uyğun funksiyalarının R. g. kimi) təyin olunur, məs., *doğuran funksiya*, *xarakteristik funksiya*, ixtiyari tərtib *momentlər*, xüsusi halda *dispersiya.*

R. g. təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin yerləşmə xarakteristikasıdır (onun paylanmasının orta qiymətidir). R. g. bu anlamda paylanmanın hər hansı «tipik» parametrlərini ifadə edir və onun rolu statik moment, mexanikada kütlənin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarına analojidir. Paylanmanın yerləşmə xarakteristikalarından *median* və *modadan* (paylanma bu xarakteristikalarla ümumi cəhətdən təsvir olunur) R. g. özünün elə qiyməti ilə fərqlənir ki, bu qiymət və bu qiymətə uyğun səpələnmə xarakteristikası – dispersiya ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində böyük əhəmiyyətə malikdir. R. g.-nin mahiyyəti, xüsusilə də, böyük ədədlər qanunu (bax, həm də *Çebışev bərabərsizliyi*) və böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu ilə aydın olur. Xüsusi halda, riyazi gözləmələri sonlu $a = \mathbf{M}\xi_k$ olan, eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllığı üçün $n \to \infty$ olduqda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\,|\,(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n - a\,| > \varepsilon\,\} \to 0$$

münasibəti doğrudur və hətta

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \to a$$

münasibəti də sanki yəqin ödənilir.

R. g. anlayışı təsadüfi kəmiyyətin gözlənilən qiyməti kimi qumar oyunları nəzəriyyəsi ilə bağlı 18-ci əsrdə ilk dəfə qeyd olunmuşdu. «R. g.» termini ilk əvvəl, oyunçunun gözlənilən uduşu – mümkün olan $x_1, \ldots, x_n$ uduşları və uyğun $p_1, \ldots, p_n$ ehtimalları üçün $\sum_{k=1}^{n} x_k\,p_k$ cəminə bərabər uduş qiyməti kimi daxil olunmuşdur. R. g. anlayışının müasir anlamda ümumiləşməsi və istifadəsində P. L. Çebışevin xüsusi xidməti olmuşdur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

RİYAZİ GÖZLƏMƏ(si) empirik paylanmanın **« математическое ожидание** эмпирического распределения; **expectation** of empirical distribution **»** – bax, *Seçimi orta.*

RİYAZİ GÖZLƏMƏ(si) təsadüfi çoxluğun **« математическое ожидание** случайного множества; **expectation** of a random set **»**, A təsadüfi çoxluğunun riyazi gözləməsi –

$$\mathbf{M}A = \{\,\mathbf{M}\alpha : \alpha \in \mathrm{Sel}(A)\,\}$$

çoxluğudur, burada A – vektor fəzasının sanki yəqin kompaktı və boş olmayan altçoxluğudur, $\mathrm{Sel}(A)$, – A-nın selektorlarının (yəni elə α təsadüfi kəmiyyətlərinin ki, $\mathbf{P}\{\alpha \in A\} = 1$ olsun) ölçülən ailəsidir (bu ailə zərurilikdən boş olmayandır).

ρ metrikalı vektor metrik fəzasında təsadüfi çoxluğun R. g., yalnız və yalnız, o mənada kompaktdır ki, $\mathbf{M}\sup_{x\in A}\rho(x, 0) < +\infty$ şərti ödənilmiş olsun. Əgər A sanki yəqin qabarıq çoxluq olarsa, onda $\mathbf{M}A$ qabarıqdır; əgər A-nın verildiyi ehtimal fəzası elə olarsa ki, $\mathbf{P}$ -nin atomları olmasın (yəni ixtiyari $\omega \in \Omega$ üçün $\{\omega\}$ hadisəsinin ehtimalı sıfra bərabər olsun), onda $\mathbf{M}A$, – A-nın qabarıq olması haqqında fərziyyəsiz – qabarıqdır.

Təsadüfi çoxluğun R. g. təsadüfi çoxluğun paylanmasının *orta qiyməti* ilə yanaşı onun paylanmasının ən mühüm xarakteristikalarındandır və o, *Stiltyes – Minkovski inteqralı* və *psevdointeqral* vasitəsilə ifadə oluna bilər.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множество и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Аркин В. И., Евстигнеев И. В., Вероятностные модели управления и экономической динамики, М., 1979.

RİYAZİ GÖZLƏMƏ(si) təsadüfi elementin **« математическое ожидание** случайного элемента; **expectation** of a random element **»**, təsadüfi elementin orta qiyməti – $\int_{\Omega} X\,d\mathbf{P}$ inteqralıdır və bu inteqral, əgər vardırsa, bu və ya digər şəkildə təyin olunur [Burada təsadüfi element $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının xətti topoloji T fəzasına ölçülən X inikası anlaşılır]. Məs., əgər E Banax fəzasıdırsa, onda $\int_{\Omega} X\,d\mathbf{P}$, adətən, *Pettis inteqralı* və ya *Boxner inteqralı* kimi anlaşılır. Təsadüfi elementin R. g.-nin mənası və qiyməti təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin klassik anlayışı anlamını daşıyır. R. g. təsadüfi kəmiyyətin «tipik» qiyməti olduğundan təsadüfi elementin qiymətlərinin yerləşmə xarakteristikasıdır. O, ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində təsadüfi elementlər üçün normalaşma məqsədilə geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Araujo A., Gine E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y., 1980.

RİYAZİ STATİSTİKA « математическая статистика; mathematical statistics » – statistik məlumatları (verilənləri) riyazi metodlarla toplamağa, sistemləşdirməyə, üzərində yenidən işləməyə və interpretasiya etməyə, bunlardan həm elmi, həm də praktiki nəticələr çıxarmağa həsr olunmuş riyaziyyat bölməsidir. Riyazi statistikanın qayda və prosedurları hər bir

məsələdə əldə olunan statistik məlumatlar əsasında çıxarılan nəticələrin dəqiqliyi və etibarlılığını qiymətləndirməyə imkanlar verən *ehtimal nəzəriyyəsinə* əsaslanır.

Statistik verilənlər kimi, ənənəvi olaraq, ilk əvvəl ölkə miqyasında bu və ya digər göstəricilərinə və ya əlamətlərinə görə (məs, insanların cinsi və yaşlarına görə, gəlirin tərkibi və miqdarına görə, sahə və dəyərinə görə, istehsal həcmi və işçi qüvvənin sayına görə) hər hansı içtimai – iqtisadi və demoqrafik obyektlərin (məs., vətəndaşların, ailələrin, torpaq paylarının, fabriklərin) paylanması haqqında məlumatlar, bundan başqa əhalinin siyahıya alınması nəticələrinin, torpaq payı və digər xəzinə uçotunun qeydiyyatı və s. haqqında alınan nəticələrin sistemləşdirilməsi ilə alınan belə paylanmanın dinamikası haqqında məlumatlar anlaşılır (bax, *Demoqrafik statistika*). «Dövlətin vəziyyətinin ədədlərlə təsviri», bu şəkildə, 18-ci əsrdə ilk dəfə Statistik sözünün istifadə edilməsinə yaxın olmuşdur (almanca dövlət – bilik, orta əsrlərə aid latın dilində status – dövlət sözündən). 19-cu əsrdə bu termin ixtiyari böyük kollektivlərin hər hansı əlamətlər üzrə laylaşması haqqında verilənlərə də yayılmış oldu (ulduz statistikası, yol – nəqliyyat hadisələri statistikası və s.). Bu halda kollektivin yaranan statistik təsviri ona xas olan mühüm xüsusiyyətləri tamın öz hissələri vasitəsilə səciyyələnməsinə və kollektiv haqqında ətraflı mühüm informasiyanın aşkar olunmasına geniş imkanlar yaradır; bu isə ümumi cəm şəklində və ya orta xarakteristikalarla təsvirlə müqayisədə yaxşı nəticələr çıxarmaq üçün daha məqsədəuyğun sayılır. Hal-hazırda seçimi tədqiqatların nəticələri, ixtiyari ümumi çoxluqlardan seçimlər, qeyri – dəqiq ölçmə seriyalarının nəticələri, ümumiyyətlə, empirik paylanma ilə qarşılıqlı birqiymətli təsvir olunan ixtiyari verilənlər sistemindən alınan ədədi informasiya da statistik verilənlər adlanır.

R. s.-nın müasir riyazi modellərində statistik verilənlər sınaqların və ya ölçmələrin müşahidələr nəticələri olmasından asılı olmayaraq, uyğun kütləvi təsadüfi hadisə və ya proses məsələsinin – $(\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ fəzasının uyğun hadisə və ya proseslərinin realizasiyaları kimi interpretasiya olunur, məs., nəticələrinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}$-nin tam mənada məlum olmadığı halında, $\mathscr{X} = \mathbb{R}$ olduqda skalyar təsadüfi kəmiyyətin, $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ olduqda isə çoxölçülü (vektor) təsadüfi kəmiyyətin realizasiyaları kimi interpretasiya olunur. R. s.-da statistik verilənlərin interpretasiya məsələlərinə bu anlamda ehtimal nəzəriyyəsinin tərs məsələləri kimi baxılır. Məs., ehtimal nəzəriyyəsinin ilk məsələlərindən birində – metal pulu bir dəfə atma stoxastik eksperimentində pulun «gerb» üzü ilə yuxarı düşməsi ehtimalı p məlum olduqda, pulun n dəfə atılmasına uyğun stoxastik eksperimentdə (n sayda asılı olmayan sınağa uyğun) «gerb» üzünün m dəfə düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapmaq tələb olunur. R. s.-da isə uyğun məsələdə pulun n dəfə atılması eksperimentində «gerb» üzünün m dəfə düşməsi məlum olduqda, naməlum p ehtimalını qiymətləndirmək tələb olunur.

Qeyd etmək lazımdır ki, R. s. üçün yuxarıdakı tipdə təsvir olunan səciyyəvi ehtimal modeli ehtimali təsadüfi kateqoriyaya aid olmayan kütləvi hadisə və ya proseslərin statistik öyrənilməsində də yarana bilir, bu şərtlə ki, bunların araşdırılma qaydaları ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olsun (bax, *Seçimi metod*, *Xətalar nəzəriyyəsi*).

Statistik verilənlərin araşdırılmasında zəruri mərhələ bunlardakı statistik qanunauyğunluqların, həmçinin anomaliyaların aşkar olunması məqsədilə onların əvvəlcədən analiz olunmasıdır. Bir sıra tətbiqi məsələlərdə verilənlərin konkret toplusunun öyrənilməsi müstəqil məna daşıya bilər. Bu halda məsələ verilənlər çoxluğunun xassələri haqqında yığcam şəkildə və mümkün olduqca aşkar təsəvvür almağa imkan verən, verilənlərin strukturunu tədqiq etməyə imkan yaradan (xüsusilə də, çoxölçülü verilənlərin ki, hər bir obyekt müşahidəolunan əlamətlərin çoxsaylılığı ilə səciyyəvi olduqda) təsvirdən (verilənlərin təsvirindən) ibarət olur.

Verilənlərin təsvirində əsas qaydalar verilənləri ifadə etmək üçün vasitələr sayılan histoqramın, səpələnmə diaqramının və digər qrafik vasitələrin qurulması, seçimi orta, median, dispersiya, asimmetriya və s. kimi xarakteristikaların hesablanmasından ibarətdir. Verilənlərin analizi asılılığın aşkar olunmasına, təsnifatına xidmət edir. Verilənlərin üzərində yenidən işlənilmənin daha gec mərhələlərində, bəzən, müəyyən xüsusiyyətləri ilə seçilən müşahidələrin analizi aparılır, bu isə bunları nəzərə almamaq məqsədini güdür. Çoxölçülü massiv verilənlərin işlənilməsində hesablama texnikası mühüm rol oynayır.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi R. s.-nın metodları statistik verilənlərin məhz ehtimal xarakteri haqqında fərziyyələrə əsaslanır. Statistik modelin qurulması $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ seçimi fəzasının təsviri üçün verilənlərin təsviri mərhələsində onların araşdırılması və öyrənilən hadisə və ya prosesin təbiəti haqqında nəzəri biliklərlə birlikdə onların analiz olunması mərhələsində statistik verilənlərin yaranma mexanizmi haqqında məlumatlar və analoji verilənlər üzərində əvvəlki sınaqlarda işlənilmə qaydaları da nəzərə alınmaqla araşdırmalardan istifadə olunur. Statistik modelin qurulması $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ seçimi fəzasının təsvirindən, yəni müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesin bütün mümkün nəticələri $\mathscr{X}$-in təsvirindən, bu nəticələrin verilən statistik məsələdə nəzəri nöqteyi – nəzərdən mümkün olan ehtimal paylanmaları $\mathbf{P}$-lərin $\mathscr{P}$ ailəsinin seçilməsindən, bu ailə haqqında digər lazımlı aprior informasiyanın təyin olunmasından ibarətdir. Əksər hallarda seçilmiş $\mathscr{P}$ ailəsi, təbii olaraq, parametrlə, diskret və ya kəsilməz hər hansı $\theta \in \Theta$ parametri ilə götürülür; bu halda

$$\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}.$$

R. s. məsələlərinin ən mühüm və geniş yayılmış sinifləri sonlu n həcmli bircins asılı olmayan $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ seçimlərinin üzərində işlənilmələrlə bağlıdır. Belə seçim hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin eyni şərtlər ödənilməklə (yəni dəyişilməyən şəraitdə) asılı olmayan təkrarlanan sınaqlarda müşahidəsi ilə bağlı olub, bu haqda təsəvvürü reallaşdırır; bu halda X təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı nəzəri ehtimal paylanması $\mathbf{P} \in \mathscr{P}$ ilə verildiyi, $\mathbf{P}$-nin isə $\mathbf{X}$ realizasiyalarının fazası $\mathscr{X}$-in uyğun $\mathscr{A}$ hadisələr cəbrində təyin olunduğu fərz olunur. Belə sxemdə statistik model təbii olaraq, $(\mathscr{X}^n, \mathscr{A}^n)$ seçimi fəzası və $\mathscr{P}^n = \{\mathbf{P}^n : \mathbf{P} \in \mathscr{P}\}$ ailəsi ilə təsvir olunur, məsələn, $\mathscr{P}^n = \{\mathbf{P}_\theta^n,\ \theta \in \Theta\}$, $\mathbf{X}$ seçiminin özü isə onun uyğun empirik paylanması ilə təsvir olunur. Bununla yanaşı müasir R. s.-da olduqca tez-tez, hər hansı təsadüfi prosesin: Markov, stasionar (statistik analizdə zaman sıralarının) və s. proseslərin realizasiyaları olan stoxastik asılı müşahidələrin ardıcıllıqlarına təsadüf olunur. $\mathbf{X}$-in verilənləri kəsilməz zamanlı təsadüfi prosesin realizasiyası da ola bilər; məs., yararlı S siqnalı və ε küyünün cəmi $S(t) + \varepsilon(t)$ kimi.

Aşağıda statistik verilənlərə aid sadə misallar və mümkün statistik modellər verilir.

Misal 1. Geodeziya çəkilişlərində azimutun eyni bir istiqamətdə təkrar ölçülmələrində: $62^\circ 01' 11'',46$; $11'',01$; $12'',29$; $13'',47$; $14'',07$; $10'',60$; $10'',76$; $14'',13$; $12'',99$; $10'',46$; $11'',25$; $12'',02$ nəticələri alınmışdır (dərəcə və dəqiqələrin sayı ümumidir).

Statistik model: verilənlər $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $(n = 12)$

$$X_i = a + e_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

şəklində realizasiyaları kimi anlaşılır, burada a – bucağın əsl qiyməti, $e_1, \dots, e_n$ – təsadüfi ölçmə xətalarıdır və e_i -lər orta qiymətləri $\mu = 0$, dispersiyaları σ^2 olan, eyni normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Deməli, müşahidələrin bütün toplusu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun realizasiyasıdır; bu təsadüfi vektor – orta qiymətləri vektoru $a\mathbf{1}$, kovariasion matrisi $\sigma^2\mathbf{I}$ [$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{I}$ – vahidi matrisidir] olan $\mathbb{R}^n$-də çoxölçülü normal paylanmaya malikdir [yəni $N(a\mathbf{1}, \sigma^2\mathbf{I})$ qanunlu].

M i s a l 2. Təcrübədə alınmışdır ki, suyun 100 hissələrində uyğun temperaturlarda azot turşusunun natrium duzu aşağıdakı şərti hissələr miqdarında həll olunur:

0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	50°	68°
66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Statistik model: nəzəri şərait əsasında maddənin həllolunma xüsusiyyəti suyun temperaturundan xətti asılıdır, verilənlər $X_1, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin

$$X_i = a + bt_i + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n = 9 \tag{2}$$

şəklində realizasiyaları kimi anlaşılır, burada a və b – xətti asılılıq əmsalları, t_i – suyun temperaturunun qiymətləri, e_i – misal 1-də olduğu kimi eyni xassələrli ölçmə xətalarıdır. Verilənlər çoxluğu paylanma qanunu $N(a\mathbf{1} + b\mathbf{t}, \sigma^2\mathbf{I})$ olan $\mathbb{R}^n$-də verilmiş $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ təsadüfi vektorunun realizasiyasıdır, burada $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$.

M i s a l 3. Podşipniklərin işləmə müddətlərini (fasiləsiz) təyin etmək üçün aparılan sınaqlarda imtinaya qədər işləmə müddətləri üçün aşağıdakı qiymətlər alınmışdır (saatlarla):

375	377	438	472	480	580	638	690	728	786
1016	1078	1215	1276	1399	1647	1726	2734	3096	3767

Statistik model: baxılan eksperimentin verilənlərinin xarakteri ilə, həm də baxılan tip podşipniklər üzərində əvvəllər aparılan eksperimentlərin verilənlərinin xarakteri ilə təsdiq olunan nəzəri mülahizələrə əsasən qəbul etmək olar ki, alınan qiymətlər asılı olmayan $X_1, \dots, X_n$ $(n = 20)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyalarının məhz artan qaydada yerləşmiş qiymətləridir; bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(x \mid a, b) = \begin{cases} b^{-1} \exp[-(x - a)^2 / b], & x > a, \\ 0, & x \le a \end{cases} \tag{3}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $a \ge 0$ və $b > 0$ – parametrlərdir, məsələn, a – zəmanətli fasiləsiz işləmə müddətidir. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ vektorunun $\mathbb{R}^n$-də paylanma sıxlığı funksiyası

$$p(x_1, \dots, x_n \mid a, b) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid a, b) =$$

$$= \begin{cases} b^{-n} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 / b \right\}, & \min\{x_i\} > a, \\ 0, & \min\{x_i\} \le a, \end{cases} \tag{4}$$

düsturu ilə təyin olunur.

M i s a l 4. N sayda məmulatdan ibarət partiyadan yoxlanılma məqsədilə təsadüfi qaydada n saydası seçilir və bunların arasında m saydasının qüsurlu olduğu məlum olur.

Statistik model: M – partiyada defektli məmulatların sayı olsun. n həcmli bütün C_N^n sayda seçmələrin eyniimkanlı olduğu fərz edildikdə, m ədədi paylanma qanunu

$$\mathbf{P}\{X = m\} = C_M^m C_{N-m}^{n-m} / C_N^n, \quad m = 0, 1, \dots, n \tag{5}$$

düsturu ilə ifadə olunan (h i p e r h ə n d ə s i p a y l a n m a) X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyasıdır.

M i s a l 5. A və B nişanlı podşipniklər üçün sürtünmə anını ölçmə nəticələri aşağıdakı kimidir:

A nişanlı	1,94	1,63	1,60	1,95	1,78	1,64	1,92	1,88	1,67	1,98
B nişanlı	1,53	1,52	1,76	1,57	1,72	1,73	1,77	1,45	1,25	1,65

Statistik model: eksperimentin keçirilməsi şərtlərinin mülahizələrinə görə verilənlərə asılı olmayan $X_1, \dots, X_m$ ($m = 10$, A nişanlı) təsadüfi kəmiyyətlərinin, $Y_1, \dots, Y_n$ ($n = 10$, B nişanlı) təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyaları kimi baxmaq olar; X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni qanunla paylandığı və paylanma funksiyasının F olduğu (uyğun olaraq Y_i və G) fərz olunur. İnformasiyanın məlum olmasından asılı olaraq, F və G paylanma funksiyalarının paylanmaların hər hansı parametrik ailəsindən olduğu, ya da ki, onların yalnız hər hansı ümumi şərtləri, məs., kəsilməzlik şərtini ödədiyi fərz oluna bilinər.

Statistik məsələnin qoyuluşu əsasən, statistik qarşısında duran məqsədlərdən asılı olaraq təyin olunur və bunlar da məsələnin həlli metodlarını müəyyənləşdirir (verilənlərin toplanılması mərhələsindən başlayaraq eksperimentin planlaşdırılması da daxil olunmaqla). Məs, misal 1-də azimutun 12 ölçməsi α bucağının əsl qiymətinin daha dəqiq təyin olunması məqsədilə aparılmışdırsa, onda ən yaxşı, yəni effektiv statistik qiymət

$$a = (X_1 + \dots + X_n)/n \tag{6}$$

seçimi ortası olacaqdır.

Bucaqölçənin ölçmə keyfiyyətini yoxlamaq üçün, yəni hesabatlardakı təsadüfi xətaların kvadratik orta kəmiyyəti σ-nı qiymətləndirmək üçün verilənlər üzərində işlədikdə istifadə olunan prosedurlar fərqli olur; bu, hətta həmin cihazda aparılan ardıcıl ölçmələrin asılı olmamazlığında şübhə olduğu halda da belədir (qeyd etmək lazımdır ki, son suallara etibarlı cavab verilməsi üçün eksperimentlər sayının çox olmasını tələb etmək təbiidir). Müvafiq olaraq, statistik məsələnin formal təsviri, onun həlli üçün müşahidələrin statistik modelindən başqa, Valda görə tələb olunur ki, (bax, [13]), bir də mümkün olan atılacaq addımlar (hərəkətlər) və ya nəticələr δ-ların, $\delta \in \mathfrak{D}$ hər hansı ölçülən fəzası $(\mathfrak{D}, \mathscr{B})$ göstərilməli, həllərin keyfiyyətini yoxlamaq üçün

üsul təklif olunmalıdır. Yuxarıdakı misalda nəticə α bucağının statistik qiymətidir, yəni mümkün olan nəticələr fəzası paylanma parametrinin dəyişmə oblastı ilə üst-üstə düşür. Məmulatın keyfiyyətinə statistik nəzarət (kontrol) halında (misal 4) nəzarət zamanı hökmən sıradan çıxan (məs., kibrit, patron və s.) məmulat da ola bildiyi hallarda aşağıdakı üç alternativ addımı atmaq olar: 1) nəzarət olunmuş məmulat partiyasını adi qiymətlə satmaq, 2) qüsurlu məmulatları ikinci növ kimi (əgər bunların faizi çox olarsa) qəbul edərək partiyanı aşağı qiymətə satmaq, 3) zay məhsulun olduqca çox olduğunu nəzərə alaraq partiyanı satmamaq (bax, [12]). Tətbiqi statistikanın müxtəlif məsələlərində hər hansı tibbi dərmanların müqayisəli effektivliyi haqqında, xarici ticarətin dinamikası haqqında nəticələr çıxarmaq, bu və ya digər faktorların statistik əlaqələrini, məs., siqaretçəkmə və xərçəng xəstəlikləri arasında əlaqələri və onların empirik funksional asılılığını tapmaq tələb olunur.

İxtiyari $\delta : \mathfrak{X} \to \mathfrak{D}$ ölçülən funksiyası determinik həlledici qayda təyin edir, yəni X verilənlərinin üzərində hər hansı işləmə prosedurunu və $\delta : \delta = \delta(X)$ nəticəsini qurmağı təyin edir. Ümumi halda, statistik həlledici qayda keçid funksiyası $\Pi(X, \cdot) = \Pi_X(\cdot)$ ilə $(\mathfrak{D}, \mathscr{B})$-də $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$-dan olan Markov keçid ehtimal paylanması ilə verilir (bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi*). Keçid paylanması burada yalnız həllin qaydasını verir. Prosedur isə ondan ibarətdir ki, X-in nəticəsi müşahidə olunduqdan sonra $(\mathfrak{D}, \mathscr{B}, \Pi_x)$ təsadüfi hadisə və ya prosesinin imitasiyası yolu ilə, əlavə asılı olmayan $\delta \in \mathfrak{D}$ «nəticə»si çıxarılır. Xüsusi halda, əgər Π keçid paylanması cırlaşmış paylanma olarsa, onda bütün X-lər üçün elə $\delta(\cdot)$ vardır ki, $\Pi(X;\ \delta(X)) = 1$ və o, determinə olunmuş qaydaya – δ həlledici funksiyasına müvafiq olur. *Ardıcıl analizdə* həlledici qaydalar bir qədər mürəkkəb şəkildə olur, məs., hər növbəti müşahidədən sonra son nəticələrin qurulması və ya məlumatların toplanılmasını davam etdirmək haqqında qərar qəbul olunur; (bax, [3]) belə prosedurlar aparılacaq sınaqlar sayının zəruri olan orta qiymətini olduqca azaltmağa imkan yaradır.

Bir qayda olaraq, statistik məsələdə dürüst cavab vermək və ya dürüst nəticə çıxarmaq yalnız $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathbf{P})$-nin müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesi haqqında tam informasiya olduğu halda mümkündür, lakin məhz həmin bu informasiya yoxdur. Bəzi məlum aprior informasiya və ya müşahidə verilənləri (məlumatları) dürüst cavab üçün, adətən, kifayət etmir. Əgər statistikə naməlum, lakin əsl seçim paylanması $\mathbf{P}_\theta \in \mathscr{P}$ qanunu ilə ifadə olunursa, onda Π həlledici qaydası üzrə çıxarılmış nəticələrin paylanmalarının hər hansı nəzəri ehtimal qanunu:

$$\mathbf{P}_\theta\,\Pi(\cdot) = Q_\theta^{(\Pi)}(\cdot) = \int \mathbf{P}_\theta(d\,\mathbf{X})\ \Pi(X;\ \cdot),\ \ \theta \in \Theta \qquad (7)$$

münasibətilə ifadə olunur.

İtki funksiyası $l(\theta,\ \delta)$ əsl $\mathbf{P}_\theta$ qanununda δ nəticəsinin əmələ gətirdiyi itkiləri təyin edir. Onda hər bir Π qaydasının keyfiyyətinin aprior xarakteristikası risk funksiyası, yəni itkilərin riyazi gözləməsi:

$$R(\theta, \Pi) = \int l(\theta, \delta)\, Q_\theta^{(\Pi)}(d\delta) \qquad (8)$$

olacaqdır, yəni itkilərin orta qiyməti $R(\theta, \Pi)$ nə qədər kiçik olsa, Π qaydası o qədər yaxşı sayılır. Lakin müşahidələrin aparıldığı «əsl» qiymət məlum olmadığından, riski «ümumiyyətlə» minimallaşdırmaq lazım olur, məs., $\mathscr{R}_{\max}(\Pi) = \sup\limits_\theta R(\theta, \Pi)$, $\Pi_\theta = \arg\min_\Pi \{\mathscr{R}_{\max}(\Pi)\}$ qaydası – minimaks qayda adlanır (bax, *Minimakslıq*(ğ ı) statistik prosedurun). Tətbiqi statistikanın kütləvi məsələlərində, eyni bir məsələni hər dəfə özünün nəzəri paylanması $\mathbf{P}_\theta \in \mathscr{P}$ ilə həll etmək tələb olunanda, θ-nın təsadüf olunan naməlum qiymətləri Θ-da hər hansı apriori verilmiş $G(d\theta)$ ehtimal paylanmasının təsadüfi realizasiyaları sayıla bilinər. Onda, təbiidir ki, optimal Π qaydası ortalanmış risk funksiyası $\mathscr{R}_G = \int R(\theta;\ \Pi)\, G(d\theta)$ funksiyasını minimallaşdırmalıdır. [bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə, *Beyes yanaşması* empirik, burada $G(\cdot)$ əvvəlcədən məlum deyildir].

Risk funksiyasına görə həlledici qaydanın keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi statistik oyunlar nəzəriyyəsinin ideyaları ilə bağlıdır. Hələ P. Laplas [2]-də statistik qiymətlərin alınmasını, statistikin aldığı statistik qiymətlər yaxşı olmadıqda, onun məğlub olduğu təbiətli qumara oxşatmışdı. Lakin əgər tətbiqi statistikada itki funksiyasının ifadəsi, əksər hallarda, məsələnin şərtlərilə təyin olunursa, interpretasiya və qiymətləndirmə problemlərində yanaşmanın riyazi sadəliyi mühüm rol oynaya bilir. Məs., n həcmli X seçimi üzrə $N(a, \sigma^2)$ normal qanununun naməlum a parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsində (misal 1) P. Laplas statistik qiymət kimi (a parametrinin)

$$m = \arg\min_x \sum_k \left| X_k - x \right|$$

seçimi medianını təklif etmişdir. K. Qauss (bax, [4]) qeyd etmişdir ki, statistik qiymət kimi

$$\alpha = \arg\min_x \sum_k \left| X_k - x \right|^2$$

götürülərsə, alınan nəticələr olduqca sadələşir (bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu*) və o, hələ o zaman yaxşı məlum olan (6) qaydasını almışdır. Bu qayda $\left| \alpha - a \right|^2$ itki funksiyasına nəzərən optimaldır. İxtiyari $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_t,\ t \in T\}$ hamar paylanmalar ailəsindən olan $\mathbf{P}_t$ qanununun statistik qiyməti $\mathbf{P}_\tau$-nun müəyyən olunması üçün qoyulan ümumi məsələdə bu funksiyanın təbii, lakin qeyri – simmetrik ümumiləşməsi (bax, [15]) yayınmanın iki misli – $2\mathbf{I}(\mathbf{P}_t : \mathbf{P}_\tau)$ olacaqdır (bax, *Nisbi entropiya*), burada $\mathbf{I}(\mathbf{P}_t : \mathbf{P}_\tau)$ – aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$\frac{1}{2}\, l(t, \tau) = \mathbf{I}(\mathbf{P}_t : \mathbf{P}_\tau) = \int \ln\left[\mathbf{P}_t(dx) \,/\, \mathbf{P}_\tau(dx)\right] \mathbf{P}_t(dX). \qquad (9)$$

Bu kəmiyyət $+\infty$ ola bilsə də, ailənin parametri dəyişdikdə dəyişmir.

Ehtimal nəzəriyyəsində olduğu kimi, R. s.-da da seçimin həcmi qeyri – məhdud artırıldıqda, təsadüfi prosesin realizasiyalarının müşahidə edilmə müddətini çoxaltdıqda və ya küy səddinin məhdudiyyət qoyulmadan azalmasında və s. yaranan asimptotik qanunauyğunluqlar olduqca mühüm rol oynayır. Məsələ budadır ki, optimal həlləri R. s. məsələlərinin yalnız olduqca məhdud (bununla belə çox mühüm) dairəsi üçün aşkar surətdə qurmaq olur: fərz olunarsa ki, verilənlərin aprior paylanması olduqca spesifik ailələrdəndir (Qauss – Laplas, Puasson paylanmaları və s.

ailələrindən). Asimptotik qanunauyğunluqlar isə daha universal xarakter daşıyır. Doğrudur, tətbiqdə seçmələrin həcmləri həmişə sonlu hesab olunur və asimptotik metodlar isə yalnız optimal həllərə yaxın həlləri verir. Bir çox hallarda belə həlləri qurmaq olur, buna görə $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_t,\ t \in T\}$ aprior ailəsi üçün $\mathrm{lik}(t, X) = (d\mathbf{P}_t / d\mathbf{P}_\theta)(X)$ -ə doğruyaoxşarlıq funksiyasına X -in eksperimentdən məlum olan qiymətində t -nin funksiyası kimi baxılmalıdır. Burada $d\mathbf{P}_t / d\mathbf{P}_\theta$, – t üzrə hamar Radon – Nikodim törəməsidir və hər hansı $\theta = t_0 \in T$ qeyd olunmuşdur. Məs., maksimal doğruyaoxşarlıq metodu t parametrinin statistik qiyməti τ üçün Π^M qaydasını tövsiyə edir:

$$\Pi^M : X \to \tau(X) = \arg\ \max_t\ \mathrm{lik}(t;\ X). \qquad (10)$$

R. s.-nın məsələlərinin ən mühüm siniflərindən biri – nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsidir və bu halda asılı olmayan sınaqların məlumatlarına əsasən «müşahidəolunan» $\mathbf{P} \in \mathscr{P}$ qanununu və ya da ki, ekvivalent, bu $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_t,\ t \in T\}$ qanunun parametri t -ni qiymətləndirmək tələb olunur. Nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsinin həlli $\mathbf{P}_t$, bəzən, son nəticələrin qurulmasında aralıq mərhələdir, məs., məhsulun keyfiyyətinə statistik nəzarətdə və s. (doğrudur, məsələlərin bəzi siniflərində, məs., əngəlləyici parametrli məsələlərdə bu heç də yaxşı olmur və ya ümumiyyətlə, mümkün olmur).

Nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsinin qoyuluşu və onun həlli metodları bu məsələlərdə təsadüf oluna bilən bütün mümkün nəticələr çoxluğu kimi təsadüf oluna bilinən ehtimal paylanmalarının aprior ailəsi $\mathscr{P}$ -nin nə dərəcədə geniş olmasından olduqca asılıdır. Əgər $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\}$ olarsa, deməli, sadə hipotezlərin yoxlanılması məsələsinə baxılır (bax, [9]). Yoxlama prosesində ya düzgün qərar qəbul edilir, yaxud iki səhvdən birinə yol verilir: birinci növ səhvə, yəni $H : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ hipotezi doğru olduğu halda o qəbul olunmur; ikinci növ səhvə, yəni H hipotezi doğru olmadığı halda o qəbul olunur, bu halda $K : \mathbf{P} = \mathbf{P}_1$ alternativ hipotezi doğrudur. Bu səhvlərin nəticələri əksər hallarda müxtəlif olur. Sınaqların sayı verildiyi halda bu səhvlərin ehtimalları eyni zamanda olduqca kiçik ola bilməz. Adətən, birinci növ səhvin ehtimalı $\mathbf{P}_0\,\Pi\{K\}$ -nın sərhədi verilir və ikinci növ səhvin ehtimalı $\mathbf{P}_1\,\Pi\{H\}$ minimallaşdırılır. Neyman – Pirson lemmasına əsasən $\mathrm{lik}(X) = (d\mathbf{P}_1 / d\mathbf{P}_0)(X)$ doğruyaoxşarlıq nisbətinin qiymətlərinə görə ən güclü (yəni bu mənada optimal) kriteri qurulur. Yəni əgər $\mathrm{lik}(X)$ statistikasının monoton paylanma funksiyası $F(z) = \mathbf{P}_0\{\mathrm{lik}(X) < z\}$ $\mathbf{P}_0$ ölçüsünə görə kəsilməzdirsə, onda nəticələrin kritik oblastı $\mathscr{X}_K$ H hipotezinin qəbul edilməyib, K alternativinin qəbul olunduğu halında, $\mathscr{X} = \{X : \mathrm{lik}(X) > k\}$ şəklində olur, bu zaman kritik k qiyməti $F(k) = 1 - \alpha$ tənliyinin həllidir. Əgər $F(z)$ paylanma funksiyasının sıçrayışları vardırsa, onda k elə tapılır ki,

$$F(k) \le 1 - \alpha, \qquad \mathbf{P}_0\{\mathrm{lik}(X) > k\} \le \alpha$$

münasibətləri ödənilsin. İlkin $X : \mathrm{lik}(X) = k$ qiymətlərində son nəticələr çıxarılır (bax, [9]). Asılı olmayan sınaqlar sxemində seçimin həcmi $n \to \infty$ olduqda ikinci növ səhv ehtimalının loqarifmi üçün

$$\lim_n n^{-1}\ \ln \mathbf{P}_1^n\{\mathscr{X}_H^n\} = \mathbf{I}(\mathbf{P}_0 : \mathbf{P}_1) \quad [\text{ bax, (9) }]$$

münasibəti doğrudur.

Əgər T $\mathbb{R}^n$ -də oblast, $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_t,\ t \in T\}$ olarsa, $t \to \mathbf{P}_t$ inikası isə ehtimal paylanmaları çoxluğunda Riman informasion metrikasında differensiallanan olarsa, onda belə nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsi hamar parametrin qiymətləndirilmə məsələsi adlanır. Eyni bir $\tau(X)$ statistikası bəzi $t \in T$ qiymətlərində $\mathbf{P}_t$ ehtimalına görə t -yə yaxın, digər $t \in T$ qiymətlərində isə t -dən uzaq ola bilər. $\tau(X)$ -in *meylsiz statistik qiymətləri* üçün müəyyən dərəcədə bu çatışmamazlıq yoxdur:

$$\mathbf{M}_t\,\tau(X) = \int \tau(X)\mathbf{P}_t(dx) = t, \quad t \in T$$

Meylsiz statistik qiymətlər dəqiq olmaya da bilər. n seçimin həcmi olduqda, *Kramer – Rao bərabərsizliklərindən*

$$\mathbf{M}_t \left\| \tau(X) - t \right\|^2 \ge c(t)n^{-1}$$

kobud aşağı sərhədini almaq olur.

Əgər

$$\lim_n \mathbf{P}_t^n\,\Pi_n\ \{\left\|\tau_n - t\right\| \ge \varepsilon\} = 0,\ \ \varepsilon > 0,\ \ t \in T$$

münasibəti ödənilərsə, $n = 1, 2, \ldots$ həcmli seçimlər üzrə Π_n həlledici qaydalar ardıcıllığı τ_n tutarlı statistik qiymətini (fərqi yoxdur, meylli və ya meylsiz) təyin edir. Hamar ailələr üçün Π_n^M maksimal doğruyaoxşarlıq qaydası üzrə alınmış (bax, [10]) statistik qiymət yalnız tutarlı deyil, həm də asimptotik effektiv statistik qiymət olur. $l(t,\ \tau) = \left\|\tau - t\right\|^2$ əvəzinə təbii, lakin parametrizasiyasından asılı olmayan

$$\lim_n\ n^{-1}\mathscr{R}(\Pi_n^M) = \dim T \qquad (11)$$

itki funksiyaları ailəsindən istifadə etdikdə, $R(t,\ \Pi)$ risk funksiyasının funksionalı kimi onun $t \in T$ üzrə yuxarı sərhədi $\mathscr{R}_{\max}(\Pi)$ -ni, həm də sıxlıq funksiyası $g(t)$ hamar olan $G(\cdot)$ paylanmaları halında $\mathscr{R}_G(\Pi)$ -nin orta qiymətini götürmək olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, $\mathbf{P}_t$ -nin t -dən differensial asılılığı olan $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_t\}$ ailələri üçün statistik qiymət xətasının kvadratik ortası bir qədər zəif mənada n -dən tamamilə başqa şəkildə asılı ola bilər (bax, [20]).

Parametrin qiymətləndirilməsinin (seriya halında deyil) müxtəlif məsələlərinin həllində orta dəqiqlik və ya risk əvəzinə etibarlı sərhəddən istifadəyə üstünlük verilir (bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*). Məs.,

$$\mathbf{P}_t^n\ \Pi_n\{\left\|\tau_n - t\right\| \le Q_n(\varepsilon;\ t)\} = 1 - \varepsilon$$

olsun, burada $Q_n(\varepsilon;\ t)$, – τ_n nəticələrinin paylanması $\mathbf{P}_t^n\Pi_n$ olduqda $\left\|\tau_n - t\right\|$ təsadüfi kəmiyyətinin nəzəri paylanmasının $1 - \varepsilon$ tərtib kvantilidir, $\varepsilon = 0{,}05$ və ya $\varepsilon = 0{,}01$ və s. $\Theta_\tau = \{t : \left\|\tau_n - t\right\| < Q_n(\varepsilon;\ t)\}$ τ_n statistik qiymətinin alınmış qiy-

məti üzrə qurulmuş etibarlı oblast olacaqdır (bax, [14]). Qeyd etmək zəruridir ki, seçimin həcmi qeyd olunduğu halda $\max\limits_{t\in\Theta} Q_n(\varepsilon;\, t) \sim Q_n(\varepsilon;\, \tau_n)$ münasibətinin dəqiqliyi və $1-\varepsilon$ etibarlılığı bir-birilə bağlı olur: etibarlı sərhədi daha yaxşı almaq üçün Θ_τ etibarlı oblastını böyük götürmək məqsədəuyğundur. Asimptotik (güclü) normal statistik qiymətlər üçün $Q_n(\varepsilon;\, t) = q(\varepsilon;\, t)n^{-1/2}$ kvantilinin asimptotikası $\|\tau - t\|^2$ itki funksiyasına nəzərən riskin asimptotikası vasitəsilə, $q(\varepsilon, t)$-nin t-dən asılılığı isə Teylor sırası ilə ifadə oluna bilinər.

Fərz olunur ki, apriori yalnız o məlumdur ki, müşahidə olunan məhdud skalyar X kəmiyyətinin paylanmasının C^2 funksional fəzasından olan sıxlıq funksiyası $p(x)$ vardır. Funksional $p(\cdot)$ parametri ilə verilmiş uyğun $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_p\}$ ailəsini də hesabi sayda skalyar a_k parametrləri ilə (məs., hər hansı ayrılışın əmsalları ilə) hamar şəkildə koordinatlandırmaq olar, bu şərtlə ki, bu parametrlərin dəyişmə oblastı k artdıqca kiçilsin. Bu halda nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsi paylanma sıxlığının *qeyri – parametrik* (daha dəqiq, hesabi parametrik) *qiymətləndirilməsi* adlandırılır. (11)-ə əsasən $\mathbf{P}$ qanununun lokalizasiyasının orta xətası seçimin həcmi n artdıqca parametrik (sonlu) halda olduğundan daha yavaş azalır. $\pi(x)$ histoqramları üçün, n ilə birgə bölgü intervalları sayı m-i $m \sim n^{1/3}$ qanunu ilə artıraraq, ən yaxşı halda

$$\mathbf{M}_p \int |\, \pi(x) - p(x)\,|^2\, dx \sim n^{-2/3}$$

statistikasını, tezliklər poliqonu üçün isə $m \sim n^{1/5}$ halında $\sim n^{-4/5}$ almaq olur. Daha hamar sıxlıq funksiyaları üçün daha dəqiq qiymətlər mövcuddur (bax, [15]).

Əgər müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin mümkün ola bilən $\mathbf{P}$ qanunu haqqında heç bir apriori informasiya tamamilə məlum deyilsə, nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsində tutarlı statistik qiymətin olmayacağını hökm etmək olar. Yəni daha dəqiq, $(X_1, \ldots, X_n)$ seçimi üzrə $\mathbf{P}$ qanunu üçün $\mathbf{P}^*$ statistik qiymətini qurmağa imkan verən həlledici qaydaların elə Π_n ardıcıllığı yoxdur ki, $\mathbf{P}(\mathbb{R},\, \mathscr{D})$-də ixtiyari ilkin ehtimal paylanmaları üçün

$$\int \left|\mathbf{P}^* - \mathbf{P}\right| \mathbf{P}^n \Pi_n \{\, d\,[\mathbf{P}^*(\cdot)]\,\} \to 0$$

münasibəti ödənilsin, burada $\left|\mathbf{P}^* - \mathbf{P}\right|$ – tam variasiya metrikasında məsafədir, belə ki, bu metrika qeyd olunan ifadədə ixtiyari digər invariant informasion metrika və ya invariant (statistik həlledici qaydalar kateqoriyalarına nəzərən) itki funksiyası ilə əvəz oluna bilinər, məs., (9). Bundan başqa, artan həcmli seçim üzrə $\mathbf{P}$-nin $\mathbb{R}$-in Lebeq altçoxluqlarının $\mathscr{D}$ cəbrində mütləq kəsilməz və ya sinqulyar paylanma olduğunu əsaslı surətdə təyin etmək olmaz. $\mathbf{P}$-ni yalnız zəif metrikalarda – $\mathbf{P}$-ni ehtimal ölçüsü kimi lokalizə etməyə imkan verməyən metrikalarda qiymətləndirmək olar. $\mathbf{P}^*(\cdot)$ statistik qiymətləri haqqında Proxorov – Çentsovun təsadüfi ölçülər nəzəriyyəsi çərçivəsində ciddi təsbit edilmiş nəticələr nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsində aprior informasiyanın istifadə üsullarını ehtimal nəzəriyyəsinin qeyri – korrekt qoyulmuş tərs məsələsinin requlyarizasiya (tənzimləmə) metodları kimi şərh etməyə imkan verir (bax, [15], əlavə 2).

R. s.-nın əsas bölmələrindən biri məsələlərin qoyuluşu və həll metodları ilə səciyyələnən *statistik hipotezlərin yoxlanması* bölməsidir. Bu məsələnin ən geniş surətdə qoyuluşunda bir-biri ilə kəsişməyən, $(\mathfrak{X},\, \mathscr{A})$-da verilmiş ehtimal paylanmalarının iki $\mathscr{H}$ və $\mathscr{K}$ aprior ailəsi verilir; $\mathbf{P} \in \mathscr{P} = \mathscr{H} \bigcup \mathscr{K}$ münasibəti ilə verilən hər hansı naməlum nəzəri $\mathbf{P}$ paylanması haqqında mülahizə yürütmək məqsədilə seçim götürülür və bu seçimin nəticələri əsasında qərar qəbul edilir: ya $\mathbf{P} \in \mathscr{H}$ (yəni $H \in \mathscr{H}$ statistik hipotezi qəbul edilir) və ya $\mathbf{P} \in \mathscr{K}$ (yəni $\mathscr{H}$-a alternativ $K \in \mathscr{K}$ hipotezi qəbul olunur). Əgər $\mathscr{H}$ və $\mathscr{K}$ ailələri informasion metrikada ayrılmayandırlarsa, nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsi isə aprior $\mathscr{P}$ ailəsi üçün həll olunandırsa, onda bu hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik texnikası sadə hipotezlər üçün bunu ümumiləşdirir.

$H : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ sadə hipotezini ona alternativ $K : \mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$ hipotezinə qarşı yoxladıqda tamamilə başqa vəziyyət alınır. Bu halda $\mathbf{P}_0$ paylanmasını ona çox yaxın olan alternativ $\mathbf{P}$-lərdən fərqləndirmək üçün statistik məlumatlar heç bir rol oynaya bilmir. Lakin statistik verilənlərə görə çıxarılan qərar H hipotezinin qəbul olunmamasına da səbəb ola bilər, bu o halda baş verə bilər ki, n həcmli X seçimini analiz etdikdə, onun $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ olduqda olduqca az ehtimallı hər hansı bir sadə xassəsi $X \in \mathfrak{X}_K^n$ aşkar olunsun, məs, $\mathbf{P}_0^n\{\mathfrak{X}_K^n\} < \varepsilon m^{-1}$. Belə nəticənin (belə ki, az ehtimallı hadisələr çox olur) etibarlılığı üçün zəruridir ki, belə hadisə əvvəlcədən verilmiş, m uzunluqlu sonlu bir siyahıdan olsun və ya təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlərin test üsulu ilə yoxlanılmasında qəbul olunduğu kimi, onun bitlərlə təsviri uzunluğu $\log_2 m$-dən az olsun. Əksər hallarda bu yoxlama məsələsi bir qədər dar qoyuluşda həll edilir, lakin əvvəlcədən nəzərə alınmalıdır ki, $\mathbf{P} \in \mathscr{P}$ olmalıdır; belə ki, $\mathscr{P}$ ailəsi üçün nöqtəvi statistik qiymətləndirmə məsələsinin müəyyən bir ρ metrikasında (ola bilər ki, zəif və ya $\mathscr{P}$ ailəsinin parametrizasiyası ilə) tutarlı həlli ola bilər. Onda hər hansı yaxın bir hipotezə qarşı, məs., $\mathbf{P} \in \mathscr{H}_\delta = \{\, \mathbf{P} : \mathbf{P} \in \mathscr{P},\ \rho(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) \geq \delta\}$ alternativinə qarşı $H \in \mathscr{H}$ hipotezi yoxlanılır (bax, *Styudent kriterisi*). Oxşar vəziyyət iki asılı olmayan seçimin bircinsliyini, yəni onların statistik modelləri $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathbf{P}_1)$ və $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathbf{P}_2)$ üçlüklərinin üst-üstə düşməsini yoxladıqda yaranır, buna görə də, məs., *Kolmoqorov kriterisi* istifadə olunur. Axırıncı məsələdə dar qoyuluşda başqa bir tip də mümkündür (bax, *Uilkokson kriterisi*).

Digər, yuxarıda qeyd olunmayan statistik məsələlərin qoyuluşu haqqında, *Dispersion analiz*, *Çoxölçülü statistik analiz*, *Eksperimentin planlaşdırılması*, *Reqression analiz*, *Statistik analiz*(i) t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n, *Faktor analiz* kimi məqalələrə bax. Hesablama texnikasının statistik praktikaya daxil olunması *statistik modelləşdirmə* metodlarını (Monte – Karlo metodu) R. s. məsələlərinin həllində istifadə etməyə imkan yaratmışdır. R. s.-nın metodları tətbiqdə geniş surətdə istifadə olunur, bunlar araşdırma və kütləvi istehsalata nəzarət üçün statistik metodların, fizika, biologiya, təbabət, meteorologiyada statistik metodların əsasını təşkil edir; bunlar həmçinin elm və texnikanın müxtəlif məsələlərində statistik modelləşdirmə nəticələrinin yenidən işlənilməsində tətbiq olunur.

Statistik nəzəriyyənin məqsədi «ən böyük və ya verilmiş etibarlılığa» malik, «ən dəqiq» hökmlər çıxarmağa imkan verən, verilənlər üzərində işləmək üçün ən effektiv metodların tərtib olunmasıdır. Qeyd olunan bu ifadələrin dəqiq mənası məsələnin qoyuluşundan asılıdır və yuxarıda qeyd olunduğu kimi seçimin həcmi sonlu olduqda optimal prosedurlar axtarışı mürəkkəb variasion problemlərin yaranması ilə nəticələnir. Lakin asimptotik nəzəriyyədə bir çox məsələlər üçün statistik modellərin həndəsi strukturu ilə bağlı asimptotik dəqiq informasiya bərabərsizliklərini qurmaq mümkün olmuşdur, bəzi bir sıra məlum prosedurlar üçün asimptotik optimallığı da göstərməyə müyəssər olunmuşdur. Bu istiqamətdə araşdırmalar son illərdə R. s.-nın özünün strukturlarına həndəsi yanaşma üçün bir stimul olmuşdur (bax, *Həndəsiləşdirilməsi*, *statistik nəzəriyyənin*). Burada ehtimal paylanmaları ailəsi cəbri kateqoriya yaradan, hərəkətləri (7)-yə görə təsvir olunan statistik həlledici qaydalarla təyin olunan həndəsi fiqurlar kimi (o cümlədən, xətlər, əyrilər, səthlər) şərh olunur (bax, *Statistik həllər qaydaları kateqoriyası* və bu məqalədəki ədəbiyyat). Bu yanaşma çərçivəsində təbii olaraq, bəzi anlayışlar yaranır: statistik modellərin Blekuell ekvivalentliyi; faydalı informasiyanı itki olmadan, statistik verilənləri maksimal reduksiya etməyə imkan verən kafi statistikalar; Kramer – Rao informasion bərabərsizliklərinin yazılışındakı Fişer informasion matrisi (bu matris vuruq dəqiqliyi ilə yeganə invariant differensial kvadratik formanı, eksponensial paylanmalar ailəsini təyin edir). R. s.-da yaranan həndəsi ifadə tərzi (dil) onun bir çox əsas asimptotik qanunauyğunluqlarını yığcam surətdə ifadə etməyə imkan verir.

Tarixi araşış. R. s. üzrə ilk araşdırmalar artıq D. Bernulli (D. Bernoulli) və L. Eyler (L. Euler) kimi alimlərin işlərində, 18-ci əsrin 70-ci illərində statistik qiymətlərin qurulması metodlarının müzakirələri kimi əks olunmuşdur. R. s.-nın bir sıra əsas anlayışları 19-cu əsrin əvvəllərində P. Laplasın məşhur «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi» işində və ən kiçik kvadratlar metodunun və xətalar nəzəriyyəsinin inkişafı ilə bağlı A. Lejandr və ələlxüs K. Qaussun işlərində daxil olunmuşdur. 19-cu əsrin sonu – 20-ci əsrin əvvəllərində ingilis statistikləri F. Qalton (F. Galton) və K. Pirson (K. Pearson) böyük əhəmiyyət kəsb edən nəticələr almışlar. Müasir qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin və hipotezlərin yoxlanılma nəzəriyyəsinin əsasları 20-ci əsrin 20–30-cu illərində R. Fişer (R. Ficher) və Yu. Neyman (J. Neyman) tərəfindən qoyulmuşdur. Statistik həllər nəzəriyyəsi terminlərində R. s. məsələlərinin formal birləşməsini 20-ci əsrin 40-cı illərində A. Vald (A. Wald) həyata keçirmişdir. R. s.-nın müasir inkişafına Q. Kramerin monoqrafiyası böyük təsir göstərmişdir.

Rusiyada R. s. üzrə ilk tədqiqatlar L. Eyler və bir az sonra M. V. Ostroqradskinin adları ilə bağlıdır. Ən kiçik kvadratlar metodunun fundamental inkişafında A. A. Markovun böyük rolu olmuşdur. Rusiyada 20-ci əsrin əvvəllərində R. s.-nın inkişafı haqqında təsəvvür A. A. Markov və A. A. Çuprovun yazışmalarından aydındır. V. İ. Romanovskinin işlərinin də R. s.-nın inkişafında böyük rolu olmuşdur.

20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov müasir qeyri – parametrik statistikanın əsasını qoydular. Təsadüfi proseslərin statistikası üzrə ilk işlər Ye. Ye. Slutskiyə məxsusdur (müşahidələrin stasionar sıralarının analizi). Yu. V. Linnikin işləri R. s.-nı yeni güclü analitik metodlarla zənginləşdirmiş oldu.

R. s. cədvəllərinin tərtib olunmasında Ye. Ye. Slutskinin, N. V. Smirnov və L. N. Bolşevin böyük xidmətləri olmuşdur.

Əd .: **Elmin klassikləri.** [1] Euleri L., Opera omnia, v. 7, 1923 (англ. пер. – «Biometrika», 1961, v. 48, pt 1–2); [2] Laplace P. S. de, Theorie analytique des probabilites, 2 ed., P., 1820, 3 ed., P., 1886; [3] Legendre A., Nouvelles methodes pour la determination des orbites des comefes, P., 1806; [4] Gauss C. F., Werke Bd IV, Gottingen, 1980; [5] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [6] Марков А. А., О теории вероятностей и математической статистике (переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова), М., 1977; [7] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986.

Dərsliklər və məlumat kitabları. [8] Смирнов Н. В., Дунин – Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [9] Боровков А. А., Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; [10] Боровков А. А., Математическая статистика. Дополнительные главы, М., 1984; [11] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

Monoqrafiyalar. [12] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [13] Вальд А., Основные идеи общей теории статисческих решений, пер. с англ., дополн. к кн. [12]; [14] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [15] Деврой Л., Дьерфи Л., Непараметрическое оценивание плотности, пер. с англ., М., 1988; [16] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер с англ., М., 1966; [17] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [18] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [19] Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; [20] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [21] Le Cam L., Asymptotic methods in statistical decision theory, B., 1986; [22] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

RİYAZİ STATİSTİKA; asimptotik metodlar **« математическая статистика** асимптотические методы; asymptotic methods of **mathematical statistics »** – müşahidələr həcmi qeyri – məhdud artırıldıqda (bəzən statistik nəticənin alınan dəqiqliyini artırmaq üçün limit keçidlərində) statistik prosedurların dəyişikliklərinə əsaslanan metodlardır.

Asimptotik metodlar tətbiq olunan R. s. məsələlərini şərti olaraq iki kateqoriyaya ayırmaq olar:

a) verilmiş statistik prosedurların xassələrinin araşdırılması;

b) tələb olunan statistik xassələrə malik olan prosedurların axtarılması (məs., optimallıq, məqbulluq kimi xassələr).

Birinci tip məsələlər statistikaların verilmiş şəkilli paylanmalarının öyrənilməsinə gətirilir. Asimptotik metodlarla paylanmalar üçün (və ya onların verilən məsələdə tələb olunan xarakteristikaları üçün) limit (asimptotik) ifadələri almaq olur, bu ifadələr müşahidələr sayı qeyd olunan konkret məsələlərdə tətbiq edildikdə təqribi düsturlar kimi istifadə olunur. Asimptotik metodların tətbiq olunmasına zərurət onunla əsaslandırılır ki, «dəqiq» həllin birbaşa alınması üçün tələb olunan hesablamaların mürəkkəbliyi, bir qayda olaraq, müşahidələr həcminin artması ilə sürətlə artır. Bu tipli məsələlərdə istifadə olunan asimptotik metodlar, əsas etibarilə, ehtimal nəzəriyyəsinin *limit teoremlərinin* metodlarıdır.

İkinci tip məsələlərdə optimal prosedurların qurulmasının statistik metodları (bax, *Optimallıq*(ğ ı) statistik prosedurun) və ya *statistik həllər nəzəriyyəsinin* metodlarından istifadə olunur. Statistik modellərin ardıcıllıqlarının asimptotik analizi güclü bir vasitə kimi verilən model üçün mühüm olan xassələr saxlanılan limit keçidinə – daha sadə limit modelinə keçidə imkan yaradır. Bir çox hallarda asimptotik metodlar vasitəsilə dəqiq mənada optimal prosedurlar olmadığı halda, məqbul sayılan asimptotik mənada, tələb olunan optimallıq xassələrinə malik olan (bax, *Asimptotik effektiv statistik qiymət* və ya *Asimptotik ən güclü kriteri*) prosedurları qurmaq mümkün olur. Müşahidələr sayı verilmiş konkret məsələlərdə asimptotik optimal prosedurlar təxmini optimal prosedurlar kimi istifadə olunur, yəni əgər bu prosedurlar özünün keyfiyyət xarakteristikalarına görə az da olsa

(məs., statistik qiymətlərin dispersiyası kimi, kriterilərin gücü kimi), hər hansı digər prosedurlardan yaxşı sayılmayan prosedurlar kimi istifadə olunur.

M i s a l. $X_1, \dots, X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, paylanma sıxlıqları $p(x-\theta)$ olan təsadüfi kəmiyyətləri müşahidə olunur, $\theta \in \mathbb{R}$ – naməlum parametr, $p(x)$ – sıfra görə simmetrik [yəni $p(x)=p(-x)$], məlum elə sıxlıq funksiyasıdır ki, aşkar olaraq qeyd olunmayan requlyarlıq şərtlərini ödəyir (momentlərin varlığı, differensiallananlıq). Asimptotik metodların tətbiqi θ parametrinin qiymətləndirilməsi və $H_0 : \theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması məsələlərində illüstrasiya ediləcəkdir.

Q i y m ə t l ə n d i r m ə. θ üçün statistik qiymətlər, məs., $\overline{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ədədi ortası və $\widetilde{X}$ secimi medianı ola bilər. Bu statistik qiymətlərin hər ikisi meylsiz statistik qiymətlərdir: $\mathbf{M}_\theta \overline{X} = \mathbf{M}_\theta \widetilde{X} = \theta$. Mümkün statistik qiymətlərdən daha dəqiqini, yəni, məs., ən kiçik dispersiyası olanını seçmək məsləhətdir. Aydındır ki, $\mathbf{D}\overline{X} = \sigma^2/n$, burada $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$, medianın dispersiyası üçün isə, ümumiyyətlə, yalnız $\mathbf{D}\widetilde{X} \sim (4p^2(0)n)^{-1}$ asimptotik münasibəti alınır. Bu münasibətlərdən, məs., müşahidələr paylanması normal qanuna tabe olduğu halda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\overline{X}/\mathbf{D}\widetilde{X} = 2/\pi \approx 0{,}637 ,$$

$p(x) = e^{-|x|}/2$ (Laplas paylanması) olduğu halda isə

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\overline{X}/\mathbf{D}\widetilde{X} = 2$$

asimptotik qiymətləri alınır, yəni birinci halda $\overline{X}$ daha dəqiqdir, ikinci halda $\widetilde{X}$ daha dəqiqdir, bu şərtlə ki, n çox böyük olsun. $\overline{X}$ və $\widetilde{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları haqqında, ümumiyyətlə, asimptotik normal paylanma kimi yalnız asimptotik nəticələr vardır.

Müxtəlif statistik qiymətlər sinifləri də aşkar surətdə tədqiq olunur. Məs., $\hat{\theta}_n$ M *– statistik qiyməti*

$$\sum_{i=1}^{n} h(X_i - \theta) = 0 \qquad (1)$$

tənliyinin kökü kimi təyin olunur, burada h – cüt olmayan müəyyən requlyarlıq şərtlərini ödəyən funksiyadır. Onda $\hat{\theta}_n$ meylsiz, asimptotik olaraq normal qanuna tabe statistik qiymətlərdir və onun dispersiyası

$$\mathbf{D}\hat{\theta}_n \sim n^{-1} \mathbf{D}h(X_1)/J^2(h) \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunur, burada

$$J(h) = \mathbf{M}_0 h'(X_1) = -\int h(x)\, p'(x)\, dx \qquad (3)$$

[məs., $\overline{X}$ və $\widetilde{X}$, – M – statistik qiymətlərdir, bunlar üçün $h(x)=x$ və $h(x) = \operatorname{sign} x$]. (2) düsturu vasitəsilə ilə müxtəlif M – statistik qiymətləri müqayisə etmək olur; (2)-nin sağ tərəfini $h(\cdot)$ üzrə minimallaşdıraraq, M – statistik qiymətlər sinfində asimptotik ən yaxşı statistik qiymət tapmaq olur. Bu statistik qiymət $h(x) = \psi(x)$ halında θ_n^* maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir, burada

$$\psi(x) = -p'(x)/p(x) .$$

Ayrı-ayrı statistik qiymətlərin (və ya statistik qiymətlərin verilmiş siniflərinin) xassələrini ifadə edən qeyd olunmuş nəticələr, bütün statistik qiymətlər sinfində asimptotik olaraq ən yaxşı statistik qiyməti müəyyən etməyə imkan vermir. Belə məsələnin həlli üçün $\{p(x-\theta)\}$ paylanmalar ailəsinin xassələrinə əsasən statistik nəticələr tələb olunur. Belə bir nəticəyə misal K r a m e r – R a o b ə r a b ə r s i z l i y i d i r: müəyyən requlyarlıq şərtlərini ödəyən, ixtiyari meylsiz $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ statistik qiyməti üçün

$$\mathbf{D}T_n \geq 1/(nI) \qquad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada I – Fişer informasiya miqdarıdır:

$$I = \mathbf{M}_0 \psi^2(X_1) .$$

(2) – (4) ilə birlikdə bu bərabərsizlik əsasında hökm etmək olar ki, maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti asimptotik minimal dispersiyaya malikdir və bu həm də requlyar meylsiz statistik qiymətlər sinfində də belədir.

Bu misalda sadələşdirici şərtlər (paylanma sıxlığının simmetrikliyi, yerinidəyişmə parametrinin birölçülülüyü) qoyulmuşdur və bu şərtlər daxilində, xüsusilə, statistik qiymətlərin meylsiz olması tələbi təbii idi. Belə şərtlər qoyulmadığı və statistik qiymətlər sinfinə məhdudiyyətlər qoyulmadığı (requlyarlıq, meylsizlik) hallarda asimptotik optimallıq anlayışının dəqiqliyi və daha incə asimptotik metodların tətbiqi tələb olunur. Məs., maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinin lokal asimptotik minimaks xassəli olması belə müəyyənləşir (bax, [2]).

Eyni asimptotik xarakteristikalarlı statistik qiymətlərin sonradan müqayisə olunması üçün, xarakteristikaların asimptotikaları dəqiqləşdirilməlidir, məs., asimptotik ayrılışların köməyilə (bax, [3], [10]).

$H_0 : \theta = \theta_0$ h i p o t e z i n i n y o x l a n ı l m a s ı. Bu və ya digər kriterilərin asimptotik tədqiqatı uyğun statistikaların paylanmalarının asimptotikasının öyrənilməsinə gətirilir. Məs., birtərəfli $H_1 : \theta > \theta_0$ alternativlərində $\theta_n^* > c_n^*$ olduqda H_0 hipotezini qəbul etməyən, θ_n^* maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinə əsaslanan kriteridən istifadə etmək olar. Tələb olunur ki, kriterinin asimptotik ölçüsü $\alpha > 0$ olsun, yəni $\mathbf{P}_{\theta_0}\{\theta_n^* > c_n^*\} \to \alpha$ münasibəti ödənilsin. θ_n^*-nun asimptotik olaraq normal qanuna tabeliyi və (2) münasibətindən aydındır ki, $c_n^* = \theta_0 + (nI)^{-1/2} z_\alpha$ götürmək olar, burada $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, Φ – standart normal paylanma funksiyasıdır. «Yaxınlaşan alternativdə» $\beta_n^*(\theta) = \mathbf{P}\{\theta_n^* > c_n^*\}$ güc funksiyası üçün

$$\beta_n^*(\theta_0 + t n^{-1/2}) \to \Phi(I^{1/2} t - z_\alpha) \qquad (6)$$

yığılması ödənilir.

Müəyyən etmək olar ki, (6) münasibətinin sağ tərəfi onun hər bir $t > 0$ qiymətində ən güclü kriterinin gücü ilə müqayisə etmək yolu ilə ən böyük mümkün olan güc funksiyasını verir.

$$L_{n,t} = L_{n,t}(X_1, \dots, X_n) = \ln \prod_{i=1}^{p} \frac{(X_i - (\theta_0 + t n^{-1/2}))}{p(X_i - \theta_0)}$$

olsun. Neyman – Pirson lemmasına əsasən

$$L_{n,t} > c_{n,t} \tag{7}$$

kriteriси $\theta = \theta_0 + t n^{-1/2}$ hipotezinə qarşı $\theta = \theta_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün ən güclü kriteridir. Əgər $\beta_n(\theta_0 + tn^{-1/2})$ $\alpha_n \to \alpha$ ölçülü hər hansı kriterinin güc funksiyasıdırsa, onda $\mathbf{P}_{\theta_0}\{L_{n,t} > c_{n,t}\} = \alpha_n$ münasibətini ödəyən $c_{n,t}$-lər olduqda

$$\beta_n(\theta_0 + t n^{-1/2}) \le \overline{\beta}_n(\theta_0 + t n^{-1/2}) \tag{8}$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\overline{\beta}_n$ – (7) kriterisinin gücüdür. [Çünki, ümumiyyətlə, müntəzəm ən güclü kriteri yoxdur, yəni bütün $t > 0$ qiymətlərində eyni zamanda ən güclü kriteri, müxtəlif t qiymətlərində müxtəlif (7) kriterilərinin gücü $\overline{\beta}_n(\theta_0 + t n^{-1/2})$ yoxdur; bax, *Qurşayıcı funksiyası*, *gücün*.] $L_{n,t}$-yə mərkəzi limit teoremini tətbiq edərək, isbat etmək olur ki,

$$\overline{\beta}_n(\theta_0 + t n^{-1/2}) \to \overline{\beta}(t) = \Phi(I^{1/2} t - z_\alpha). \tag{9}$$

(8) və (9)-dan aydındır ki, $\alpha_n \to \alpha$ ölçülü ixtiyari kriterilər üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sup\ \beta_n(\theta_0 + t n^{-1/2}) \le \overline{\beta}(t)$$

münasibəti ödənilir. Bununla da, əgər hər hansı kriterinin gücü $\overline{\beta}(t)$-yə yığılırsa, onda bu kriteri *asimptotik müntəzəm ən güclü kriteridir*. Belə kriterilərə misal θ_n^* maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinə və

$$Y_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \psi(X_i - \theta_0) \tag{10}$$

statistikasına əsaslanan kriterilərdir.

Daha mürəkkəb hallarda (məs., $\theta \ne \theta_0$ ikitərəfli alternativlərdə, vektor parametr halında) ən güclü kriteri ilə müqayisəetmənin qeyd olunmuş qaydasını tətbiq etmək mümkün deyildir. Baxılan misalda $H_1 : \theta \ne \theta_0$ alternativində statistik modelin sadələşdirilməsinə lokal asimptotik normallıq xassəsinə əsaslanaraq nail olunur və bu ödənildikdə isə Y_n (bax, [10]) asimptotik kafi statistika olur. Bu isə onu ifadə edir ki, yalnız Y_n-dən asılı kriterilərlə kifayətlənmək olar. Y_n statistikasının paylanması $\theta = \theta_0 + t n^{-1/2}$ qiymətində $N(tI, I)$ paylanmasına (orta qiyməti tI, dispersiyası I olan normal paylanmaya) yığıldığından, belə kriterilərin xassələri $Y \sim N(tI, I)$ müşahidəsi üzrə (Limit modeli) $t = 0$ hipotezinin yoxlanılma kriterilərinin xassələrindən alına bilinər. $Y > c_\alpha$, $c_\alpha = I^{1/2} z_\alpha$ kriterisi $t > 0$ alternativ hipotezində müntəzəm ən güclü kriteridir. $t \ne 0$ alternativində $|Y| > c_{\alpha/2}$ kriterisi müntəzəm ən güclü meylsiz kriteridir, $\{Y < -c_{\alpha_1}\} \cup \{Y > c_{\alpha_1}\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ kriteriləri isə tam sinif təşkil edir. Y əvəzinə Y_n əvəzləməsi apardıqda uyğun asimptotik xassələrli kriterilər alınır.

Oxşar surətdə və daha ümumi sxemlərdə lokal asimptotik normallıq xassələri ödənilən statistik məsələlər yerinidəyişmə parametrindən asılı olan, normal paylanmalar (çoxölçülü) ailələri ilə bağlı məsələlərə gətirilir. Bu metod qiymətləndirmə məsələlərində də, xüsusilə də, lokal asimptotik minimakslıq xassələrinin müəyyənləşdirilməsində istifadə olunur.

Eyni limit gücünə malik kriterilərin müqayisəli öyrənilməsi bunların güclərinin asimptotik ayrılışının qurulması yolu və bunlarda yüksək tərtibdən kiçik hədlərin araşdırılması ilə aparılır (bax, [10]).

Statistik, əsas etibarilə, paylanmalarının asimptotik öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremləri metodlarından istifadə edir. Bir sıra hallarda məsələ məlum teoremlərin tətbiqinə də (böyük ədədlər qanunu, mərkəzi limit teoremi kimi) gətirilə bilinir. Lakin, bir qayda olaraq, R. s.-da ehtimal nəzəriyyəsi üçün müstəqil tədqiqat tələb edən, ənənəvi olmayan obyektlər yaranır. R. s. üçün səciyyəvi istiqamətlərin qısa xülasəsi aşağıda verilir.

Statistikaların geniş sinfi üçün statistikanın təsadüfi kəmiyyətlər cəmilə approksimasiyaolunma imkanı ilə şərtləndirilmiş asimptotik normallıq ödənilir. Seçimi momentlər, parametrlərin bir çox statistik qiymətləri (məs., *maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti*, *Beyes statistik qiyməti*, M *– statistik qiymət*), parametrik kriterilərin statistikaları (məs., $C(\alpha)$ kriterilərinin, *ranq statistikası*, U – statistikaları, *qaydalı statistika* və onların xətti kombinasiyaları) belə statistikalardandır. Bu qəbildən olan statistikaların limit paylanmalarını tapmaq üçün effektiv metod «yaxınlaşan alternativlər» halında lokal asimptotik normallıq xassəsilə (kontiquallıq, Le Kamın üçüncü lemması) bağlıdır. 20-ci əsrin $70 - 80$-ci illərində statistikaların müxtəlif sinifləri üçün qeyd olunan statistikalar üçün yeni, özünəməxsus, asimptotik normallığı dəqiqləşdirmələrə imkan verən metodlar işlənildi (yığılma sürəti, asimptotik ayrılışlar) (bax, [10], [11]).

20-ci əsrin 30-cu illərində V. İ. Qlivenkonun ([6]), A. N. Kolmoqorovun ([8]), N. V. Smirnovun ([4], [5]) işlərində empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan *qeyri – parametrik kriterilərin* tədqiqatı 40-cı illərin sonundan başlayaraq təsadüfi proseslərin yığılma nəzəriyyəsinə əsaslanmaqla, həm də onun inkişafının stimullarından biri oldu. Təsadüfi proseslərin yığılma aparatı qeyri – parametrik yığılma, ardıcıl analiz məsələlərində də istifadə olunur (bax, [12]).

Statistik prosedurların asimptotik effektivliyinin tədqiqatında böyük yayınmalar nəzəriyyəsinin metodları tətbiq olunmaqla yanaşı, sonrakı inkişafa da səbəb oldu.

Seçimi tezliklərin funksiyalarının paylanmalarının, seçimin həcmi və bölgünün sinifləri sayının eyni zamanda artdığı halında, öyrənilməsi böyük bir bölməni əmələ gətirmiş oldu. Burada yanaşmaların əksəriyyəti o fakta əsaslanır ki, tezliklərin polinomial paylanması Puasson təsadüfi kəmiyyətləri toplusunun onların qeyd olunmuş cəmlərinə nəzərən şərti ehtimalı ilə üst-üstə düşür. Speysinqlərin funksiyaları üçün araşdırma metodlarına yaxın araşdırmalar aparılmışdır (bax, [11]).

Empirik paylanma funksiyalarının, tezlik funksiyalarının, speysinqlərin funksionalları üçün limit teoremlərinin alınmasında martinqallar nəzəriyyəsinin metodları müvəffəqiyyətlə tətbiq olunmağa başladı (bax, [12]).

Fəzanın dim. – ölçüsü müşahidələr sayının çoxalması ilə artdıqda (*diskriminant analiz*, təsnifat) «böyük dim. – ölçülü» asimptotikada *çoxölçülü statistik analizin* prosedurları özünəməxsus xassələr aşkara çıxarır (təsnifat, diskriminant analiz).

Statistik modellərin dərin yığılma nəzəriyyəsi və asimptotik optimal prosedurların qurulması L. Le Kam tərəfindən inkişaf etdirilmişdir [9]. Onun ideyaları asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi və digər istiqamətlərin inkişafının əsasını qoymuşdur.

Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərinin (və digər asimptotik effektiv statistik qiymətlərin) lokal asimptotik minimakslıq xassələrinin Ya. Qayek tərəfindən isbatı mühüm addım olmuşdur (bax, [7]). Optimallığın bu xassəsi və onun isbat metodu sonralar qeyri – parametrik və semiparametrik məsələlər də daxil olunmaqla (bax, [2], [3]), qiymətləndirmə məsələlərinin geniş sinfinə yayılmış oldu.

Parametrik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərinə əsaslanan kriterilərin asimptotik optimallığı haqqında ilk nəticələri A. Vald almışdır (bax, [13]). Asimptotik optimal kriterilərin qurulmasının ümumi metodları Le Kam nəzəriyyəsində verilir. Asimptotik müntəzəm ən güclü kriterilər mövcud olmayan məsələlərdə kriterilərin asimptotik tam siniflərinin təsviri Le Kam metodları və Vald statistik həllər nəzəriyyəsi metodları əsasında alınır (bax, [1]).

Parametrik tətbiqlər parametrik modellərin dəqiq məlum olmadığı hallar üçün statistik metodların işlənib hazırlanmasına səbəb oldu. Belə hallarda qeyri – parametrik metodlar və robast metodlar tətbiq olunur. Asimptotik optimal prosedurlar müşahidələrdən naməlum paylanma haqqında zəruri informasiyanın alınmasına əsaslanan adaptiv metodlar vasitəsilə qurulur.

Paylanmalar ailəsinin xassələrinin təsviri və onların statistik prosedurların xarakteristikaları ilə əlaqəsi üçün faydalı aparatı R. s.-da differensial həndəsə metodları verir.

Ədt.: [1] Бернштейн А. В., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 3–18; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 2, с. 309–38; [4] Смирнов Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 973–93; [5] Смирнов Н. В., «Бюлл. Моск. гос. ун-та», 1939, т. 2, в. 2, с. 3–14; [6] Qlivenko V., «G. Ist. Ital. attuari», 1933, v. 4, № 1, p. 92–99; [7] Hajek J., «Proc. Berk. Symp. Math. Statist. and Probab.», 1972, v. 1, p. 175–94; [8] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 134–41; [9] Le Cam L., Asymptotic methods in statistical decision theory, N. Y., 1986; [10] Pfanzagl J., «Lect. Notes in Statist.», 1985, № 31; [11] Serfling R. J., Approximation theorems of mathematical statistics, N. Y., 1980; [12] Shorack G. R., Wellner J. A., Empirical processes with applications to statistics, N. Y., 1986; [13] Wald A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, p. 426–82.

RİYAZİ STATİSTİKA; qeyri–parametrik metodlar « **математическая статистика;** непараметрические методы; nonparametric methods of **mathematical statistics »** – ümumi çoxluğun paylanmalarının funksional növünün naməlum halı üçün nəzərdə tutulan metodlardır. Mümkün oluna bilinən ehtimal paylanmaları ümumi, hər hansı xarakterli şərtlərlə, məs., kəsilməzlik, hamarlılıq, simmetriklik, asılı olmamazlıq və s. şərtlərilə verilən məsələlərdə belə metodlardan istifadə olunur. «Qeyri – parametrik» metodlar termini onun ənənəvi «parametrik» metodlar terminindən fərqini adı ilə nəzərə çarpdırır, parametrik metodlarda fərz olunur ki, ümumi çoxluq sonlu sayda parametrlər dəqiqliyi ilə məlumdur və bu metodlar «standart» paylanmalar ailələri üçün, o cümlədən, normal, eksponensial, Puasson və s. tipli paylanmalar ailələri üçün təfərrüatı ilə araşdırılmışdır.

Qeyri – parametrik metodlarla həll oluna bilən məsələlər şərti olaraq iki böyük hissəyə ayrılır: hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirmə məsələləri.

Hipotezlərin qeyri – parametrik yoxlanılması qeyri – parametrik metodların tətbiqinin ən inkişaf etmiş oblastıdır. Ən inkişaf etmiş və tətbiq olunan metodlar ranq metodları və modifikasiyaları və ümumiləşmələri də daxil olmaqla empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan metodlardır.

Ranq prosedurlarından istifadə aşağıdakı mülahizəyə əsaslanır. Ranqlar vektoru qaydalı statistikalar vektoru ilə birlikdə seçimdəki bütün informasiyanı özündə saxladığından, bu informasiyanın hər hansı hissəsi yalnız ranq vektorunda olur. Buna görə də, statistik prosedurlar qurularkən yalnız ranqlar əsas götürülərək, seçimi qiymətlərin özlərindən istifadə olunmur. Belə prosedurların üstünlüyü ranqların tamqiymətli olmasından irəli gələn hesablamada alınan sadəlikdir. Ranq prosedurlarının digər mühüm cəhəti müşahidələrin kəmiyyət deyil, keyfiyyət xarakterli olduğu hallarda onların tətbiq oluna bilinməsindədir, lakin bu halda müşahidələrin nizamlanıla bilinməsi şərtdir ki, tətbiqdə bu xüsusilə mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Nəhayət, ranq statistikaları ümumi paylanmadan asılı olmur və bu da onu hesablamağa və sonra da cədvəlləşdirməyə imkan verir.

20-ci əsrin 40 – 50-ci illərində ranq metodları inkişaf etdikcə, ranqlar vektorundakı informasiya payı olduqca mühüm ola bilər ki, bu da ranq prosedurlarının yüksək asimptotik nisbi effektivliyini təmin edir. Ranq statistikalarının asimptotik nəzəriyyəsi incə analitik metodlardan və təsadüfi proseslərin və meydanların yığılma nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edir.

Ranq metodları ənənəvi surətdə istifadə olunan «parametrik» metodlarla, əsas etibarilə, paylanmaların normal qanuna tabeliyini fərzedən metodlarla həll olunan məsələlərin geniş sinfi üçün işlənilmişdir (bax, *Ranq korrelyasiyası*).

Qeyri – parametrik kriterilərin böyük qrupu empirik paylanma funksiyasından istifadəyə əsaslanır. F_n – ümumi çoxluğunun paylanma funksiyası F olan n həcmli seçim üzrə qurulmuş empirik paylanma funksiyası olsun. Qlivenko – Kantelli teoreminə əsasən, $n \to \infty$ olduqda

$$\sup_t \left| F_n(t) - F(t) \right| \to 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir. Beləliklə, F_n və F -in yaxınlığına əsasən paylanma funksiyası haqqında hipotezlə uzlaşma kriterisini əsaslandırmaq olar. Belə tip kriterilər ilk dəfə 20-ci əsrin 30-cu illərində təklif olunmuş *Kolmoqorov kriterisi* və *Kramer – Mizes kriterisidir*. Uyğun statistikaların paylanmaları, ümumi çoxluğun paylanma funksiyasından onun kəsilməz olduğu halında asılı olmur. Bunların limit paylanmaları 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorov və N. V. Smirnov tərəfindən tapılmış və cədvəllər tərtib olunmuşdur ki, bu da mühümlük ölçüsünün verildiyi halda uyğun kritik oblastın sərhədini təqribi təyin etməyə imkan verir. Bu statistikaların müxtəlif modifikasiyaları vardır və bunlardan parametrik ailəyə mənsubluq hipotezi üçün, çoxölçülü halda uzlaşma hipotezinin yoxlanılması üçün, simmetriya, bircinslik və asılı olmamazlıq hipotezləri üçün istifadə olunur. Bunların araşdırmalarında kombinator metodlar, zəif yığılma nəzəriyyəsi metodları və martinqallar nəzəriyyəsi metodları tətbiq olunur.

Empirik paylanma funksiyalarına əsaslanan *qeyri – parametrik kriterilərin* əksəriyyətinin ümumi xassəsi ondan ibarətdir ki, bunlar bütün alternativlərə qarşı tutarlı kriterilərdir. Böyük həcmli seçimlər hallarında bu və ya digər statistikanın seçilməsini ən yaxşı istifadə oluna bilən statistikalar üçün hesablanılan asimptotik nisbi effektivlik qiymətlərinə əsaslandırmaq olar.

Qeyri – parametrik qiymətləndirmə riyazi statistikanın sonsuzölçülü xarakterli qiymətləndirmə məsələləri ilə bağlı olan bir bölməsidir. Paylanma sıxlıqlarının, spektral sıxlıqların, reqressiya əyrilərinin, təsadüfi xətalarla («küy fonunda siqnal») müşahidə olunan funksiyaların və bunların funksionallarının – «əyrilərin» qiymətləndirilməsi mühüm məsələdir.

Qeyri – parametrik qiymətləndirmə məsələlərinin korrekt qoyulması üçün qiymətləndirilən «əyrinin» aid olduğu funksional sinif haqqında əlavə aprior informasiya olması zəruridir. Bu halda, qiymətləndirmənin dəqiqliyi bu sinfin «kütləviliyinin» həndəsi xarakteristikalarından olduqca asılıdır. Buna görə də, qeyri – parametrik

qiymətləndirmə məsələlərində funksional – analitik metodlar mühüm rol oynayır.

Bax, *Qeyri – parametrik yoxlanılması hipotezlərin*, *Qeyri – parametrik qiymətləndirmə*, *Qaydalı statistika*, *Robastlıq*, *Tolerant interval*, *Adaptiv statistik qiymət*.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М, 1983; [2] Боровков А. А., Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; [3] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Хеттманспергер Т., Статистические выводы, основанные на рангах, пер. с англ., М., 1987; [7] Walsh J. E., Handbook of nonparametric statistics, v. 1–3, Princeton, 1962–68; [8] Lehmann E., Nonparametrics: Statistical methods on ranks, S. F., 1975; [9] Handbook of statistics, v. 4. Nonparametric methods, ed. by P. R. Krishnaiah, P. K. Sen, Amst. – [a. o.], 1984.

RİYAZİ STATİSTİKANIN CƏDVƏLLƏRİ « математической статистики таблицы; tables of mathematical statistics / statistical tables » – konkret verilənlərin analizində statistik nəticələrin alınması, həm də iş prosesində statistik hesablamalar üçün tətbiq olunan ədədi cədvəllərdir.

Statistik nəticələrin metodikası üçün xüsusi cədvəllərin zəruriliyi çoxdan yaranmışdır. 20-ci əsrin əvvələrində «Biometrika» adlı ingilis jurnalının yaradıcıları, xüsusən də, K. Pirson (K. Pearson), «statistik hesab əməyini azaldan» ədədi cədvəllərin tərtib edilməsini öz məqsədlərindən biri kimi qarşılarına qoymuşdular. 1941-də bu jurnalın nömrələrində əvvəllər nəşr olunmuş cədvəllər nəşr olunmayanlarla birlikdə «Tables for statisticians and Biometricians» adlı toplunun 1-ci tomunda verilmişdir. 1931-də K. Pirson eyni adlı cədvəllər toplusunun ikinci tomunu nəşr etdirir ki, bu tomda 1914 – 30-cu illərdə «Biometrika» jurnalında nəşr olunmuş çoxlu cədvəllər birlikdə verilmişdir. Statistik nəticələr nəzəriyyəsinin sürətli inkişafı və yeni hesablama texnikasının yaranması çoxsaylı yeni, daha müasir cədvəllərin yaranmasına səbəb oldu. Beynəlxalq praktikada ən məşhur statistik cədvəllər məcmularından biri E. Pirson və H. Hartlinin [1] məcmusudur ki, burada R. Fişerin (R. Fisher) ingilis məktəbinin, digər tərəfdən Yi. Neyman və E. Pirson (J. Neyman, E. Pearson) məktəbinin əsas nailiyyətləri əks olunmuşdur. SSRİ-də digər, cədvəllərin klassik toplusu kimi sayılan, L. N. Bolşev və N. V. Smirnovun [2] kitabı da nəşr olunmuşdur.

R. s. c. mahiyyətcə olduqca müxtəlifdirlər, lakin əsas etibarilə bu cədvəllər müxtəlif paylanmalar üçün (məs., Kolmoqorov paylanması, χ^2 – paylanma, binomial paylanma, hiperhəndəsi paylanma), bunların tərs funksiyaları üçün qrafik və nomoqramların faiz nöqtələri cədvəlləri adlanan cədvəllərdir.

Paylanmalar üçün cədvəllərin tərtib olunması əksər hallarda cədvəllərin tam toplusunun parametrlərinin müxtəlif qiymətlərindən asılı olaraq tərtib olunmasını zəruri edir, məs., χ^2 – paylanma cədvəlləri toplusu sərbəstlik dərəcəsi sayının müxtəlif qiymətlərinə uyğun tərtib olunmuşdur, binomial paylanma üçün cədvəllər müşahidələr sayı və «müvəffəqiyyət» ehtimalının qiymətləri üzrə tərtib edilmişdir və nəhayət, hiperhəndəsi paylanma cədvəllər toplusu üç parametrdən asılı olması nəzərə alınmaqla tərtib olunmuşdur. Beləliklə, yaxşı cədvəllərin tərtibi rahat interpolyasiya və ekstrapolyasiyanın yalnız əsas dəyişənə görə deyil, həm də parametrlərə görə qurulmasından asılı olur. Parametrlər üzrə ekstrapolyasiya məsələsi paylanmalar üçün limit teoremləri ilə birbaşa bağlıdır və buna görə də, paylanmalar üçün cədvəllərin tərtib olunmasında limit teoremlərinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi və müxtəlif asimptotik düsturların qurulması zəruriliyi yaranır. Məs., Γ – paylanma funksiyası $\Gamma(m,\ x)$ üçün cədvəl tərtib olunduqda (xüsusi halda χ^2 – paylanma üçün) m -in böyük qiymətlərində $\Gamma(m,\ x) \cong \Phi((x-m)/\sqrt{2m})$ təqribi bərabərliyindən istifadə etmək olar ki, bu bərabərlik

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(m,\ y\sqrt{2m}+m) = \Phi(y)$$

münasibətilə ifadə olunan klassik limit teoreminə əsaslanır, burada $\Phi(y)$ – ətraflı cədvəlləşdirilmiş standart normal paylanma funksiyasıdır, lakin bu bərabərliyin daha dəqiq və yığcam şəkli –

$$\Gamma(m,\ x) \cong \Phi(\sqrt{2x}-\sqrt{2m})$$

təqribi bərabərliyindən istifadə etmək və

$$\Gamma(m,\ (y+\sqrt{2m})^2/2) - \Phi(y)$$

fərqini cədvəlləşdirmək məsləhətdir.

[2] məcmusunda müəllif şərhində belə yaxşılaşdırılmış asimptotik ifadələrin müxtəlif ifadələrinin nümunələri əks olunmuşdur.

Praktikanın artan tələblərilə əlaqədar cədvəllərin daha dəqiq olması zəruriliyi yaranır. Bu iş prosesində hesablamalarda cədvəllərin rolunun artması, bunların nəzəri araşdırmalarda hesablamalar aparılmasında istifadəsi ilə əlaqədardır.

Məs., olduqca seçilən müşahidələr kriterisinin kritik qiymətlərinin hesablanmasında Styudent paylanmasının kvantillərinin bir neçə onluq işarələrilə verilməsi tələb olunur; beta – paylanmanın kvantillərini böyük dəqiqliklə hesablanmış qamma – paylanmasının kvantillərinə görə qiymətləndirmək mümkündür.

Riyazi statistikanın nisbətən yeni hesablama vasitəsi EHM üçün statistik proqramlar paketləridir. Bu paketlər əksər hallarda, müəyyən paylanmaların və bunların kvantillərinin hesablanması üçün proqramları da özündə saxlayır. Belə proqramlardan, adətən, tezişləklik tələb olunur. Belə proqramlardan fərqli olaraq, cədvəllər tərtibi üçün tutulan proqramlar tezişlək olmaya da bilər, lakin böyük dəqiqliklə hesablanmalıdırlar; bunlar əksər hallarda xüsusi hesablama qaydaları əsasında aparılır. Bir sıra hallarda cədvəllərin özləri paketin bir hissəsi də ola bilir.

Elə hallar da mövcuddur ki, cədvəlləşdirmənin nə limit teoremindən alınan təqribi düstur şəklində, nə də ki, paketdə tezişlək sadə proqramlar şəklində alternativi yoxdur. Məs., empirik prosesin əyrixətli sərhəddən çıxması ehtimalının hesablanması üçün müşahidələr sayı n -in $n\to\infty$ halında limit teoremləri vardır (bax, [3]). Lakin n -in sonlu qiymətlərində bu ehtimallar üçün cədvəllərin tərtibində aydın olunmuşdur ki, bunlar limit ifadələrin yalnız n -in minlərlə tərtibli qiymətlərində yaxın ola bilir (bax, [4]). n -in kiçik qiymətləri üçün cəvdəllərin tərtibi zəruridir. Digər tərəfdən, prosesin sərhəddən çıxmaması ehtimallarını hesablamaq üçün tutulan proqramı paketə daxil etmək məqsədəuyğun deyildir, belə ki, hesablama n -in artması ilə olduqca çətinləşir və $n \sim 100-150$ halında artıq, maşın hesablaması (maşın müddəti) tələb olunur.

R. s. c. üzrə biblioqrafiya [2]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Pearson E. S., Hartley H. O., [eds], Biometrika tables for statisticians, 3 ed., v. 1, Camb., 1966; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Jaeschke D., «Ann. Statist.», 1979, v. 7, № 1, p. 108–15; [4] Котельникова В. Ф., Хмаладзе Э. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 3, с. 599–607; [5] Оуэн Д. В., Сборник статистических таблиц, пер. с англ., М., 1966; [6] Johnson N. L., Kotz S., Contionous univariate

distributions, v. 1–2, N. Y., 1970; [7] Johnson N. L., Kotz S., Discrete distributions, Boston, 1969; [8] Johnson N. L., Kotz S., Contionous multivariate distributions, N. Y., 1972; [9] Хастингс Н., Пикок Д., Справочник по статистическим распределением, пер. с англ., М., 1980; [10] Мартынов Г. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. кибернетика, т. 26, М., 1988, с. 151–203.

RİYAZİ STEREOLOGİYA « математическая стереология; mathematical stereology » – *stoxastik həndəsədə* fiqurların, çoxluqların təsadüfi kəsiklərini və ya təsadüfi *həndəsi proseslərin* düzxətlərlə və ya müstəvilərlə kəsiklərini araşdıran istiqamətdir. R. s.-nın məsələsi yalnız kəsiklər haqqında informasiyaya əsaslanaraq, çoxölçülü obyektlərin həndəsi xassələri haqqında nəticələr çıxarmaqdan ibarətdir. R. s.-nın nəticələri tətbiqi fənlərdə istifadə olunur (bax, [1], [2]).

R. s.-nın bir çox alqoritmləri *inteqral həndəsənin* nəticələrinə əsaslanır. Bu həndəsədə g düzxəttinin hər hansı müstəvi əyrisi l ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı $N(g)$ və ya hər hansı D çoxluğunun $g \cap D$ «vətərinin» uzunluğu $\chi(g)$ kimi kəmiyyətlərin inteqralları araşdırılır. Məs., düzxətlər fəzası üzrə inteqralları Evklid hərəkətləri qrupu M -ə nəzərən invariant dg ölçüsünə görə hesablamaq olar. Onda

$$\int N(g)dg = 2L, \quad \int \chi(g)dg = \pi S \qquad (*)$$

düsturları doğrudur, burada L , – l əyrisinin uzunluğu, S isə D çoxluğunun sahəsidir.

Belə nəticələrdən fiqurun həndəsi parametrlərini onun təsadüfi düzxətlərlə (müstəvilərlə) kəsmə yolu ilə statistik qiymətləndirmə məqsədilə istifadə edilir. Adətən, r radiuslu K_r dairəsini kəsən düzxətlər çoxluğunda dg ölçüsünün daralmasına mütənasib olan eyni paylanmaya malik asılı olmayan $g_1, g_2, \ldots, g_n$ təsadüfi xətlərinə baxılır (fiqur bütünlüklə K_r dairəsində yerləşir). (*)-dan

$$L = \frac{\pi r}{n} \sum_{i=1}^{n} N(g_i), \quad S = \frac{2r}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi(g_i)$$

statistik qiymətləri alınır.

(*) düsturlarının analoqları M – invariant təsadüfi çoxluqların qeyd olunmuş düzxətlərlə kəsikləri üçün də vardır. (*)-dan aydındır ki, təsadüfi çoxluğun vahid uzunluqlu parça ilə kəsiyinin orta birölçülü Lebeq ölçüsü vahid ölçülü sahəyə malik oblastda təsadüfi çoxluğun orta ikiölçülü Lebeq ölçüsünə bərabərdir.

R. s.-da realizasiyaları hamar əyri hissələrindən ibarət təsadüfi çoxluqlara – lif proseslərinə də baxılır. M – invariant lif prosesini kəsən düzxətt üzərində kəsiklərin bircins təsadüfi nöqtəvi prosesi alınır. Bu prosesin intensivliyi $\frac{2\lambda}{\pi}$ -yə bərabərdir, burada λ – vahid ölçülü sahəyə malik oblastda yerləşən bütün liflərin ümumi uzunluğuna bərabərdir (λ lif prosesinin intensivliyi adlanır). Kəsən düzxətlə lif arasındakı «tipik» bucağın paylanma sıxlığı $\frac{1}{2}\sin\alpha$ -ya bərabərdir.

Əgər təsadüfi lif prosesi bircins, lakin izotrop deyilsə, onda nöqtəvi prosesin kəsiklərinin intensivliyi $H(\varphi)$ kəsən düz xəttin istiqaməti φ-dən asılıdır; $H(\varphi)$ *intensivlik qızılgülü* adlanır. İntensivlik qızılgülü məlum olduqda, λ intensivliyini və lif prosesi istiqamətlər qızılgülünün sıxlığı m -i tapmaq olur və bu halda

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} H(\varphi)d\varphi, \quad m(\varphi) = \frac{1}{2\lambda}\left(H(\varphi) + H''(\varphi)\right).$$

Düzxətli liflər üçün ikinci moment ölçünün stereologiya üzrə nəticələri vardır (bax, [5]). Məs., fərz olunur ki, Evklid hərəkətləri qrupuna nəzərən invariant, müstəvi üzərində parçaların təsadüfi meydanı $\{s_i\}$ verilir və $L(B)$ $\{s_i\}$-də olan parçaların (və ya onların hissələrinin) ümumi uzunluğudur və bu parçalar $B \subset \mathbb{R}^2$ Borel çoxluğundandırlar. Tərifə görə, $m_1(B) = \mathbf{M}\,L(B)$, $m_2(B_1 \times B_2) = \mathbf{M}\,[L(B_1)L(B_2)]$ olduğu fərz olunur; m_1 və m_2 – uyğun olaraq, təsadüfi L ölçüsünün birinci və ikinci moment ölçüsü adlanır. m_1 və m_2 lokal sonlu ölçülər olsun. Onda $m_1(B) = \gamma \| B \|$, burada $\| \cdot \|$, – $\mathbb{R}^2$-də Lebeq ölçüsü, $\gamma > 0$ – hər hansı sabitdir. Əgər $\{s_i\}$ prosesinin qeyd olunmuş $g_0 \subset \mathbb{R}^2$ düzxətti ilə kəsiklərinin nöqtəvi prosesi $\{x_i\} = \{s_i \cap g_0\}$ -a baxılarsa, onda m_1 üçün stereologiya məsələsinin həlli $\gamma = \pi\lambda/2$ münasibətilə verilir, burada λ , – $\{x_i\}$ -nin intensivliyidir; m_2 -ni yalnız $\{x_i\}$ nöqtəvi prosesinin terminlərində hesablamaq mümkün deyildir.

Əgər nişanlanmış $\{x_i, \psi_i\}$ nöqtəvi prosesinə baxılarsa, onda $\{s_i\}$ prosesi üzərinə ümumi xarakterli geniş şərtlərlə, $\{x_i, \psi_i\}$ prosesinin ikinci moment ölçüsü ν_2 , $\{s_i\}$-dən olan tipik parçanın uzunluğunun paylanma funksiyası F ilə birlikdə bəzi inteqral düsturlarla m_2 -ni birqiymətli təyin edirlər.

Kəsiklər prosesinin paylanması məlum olduğu halda, bir sıra mövcud nəticələr əsasında həndəsi proseslərin yalnız orta kəmiyyətlərini deyil, onların «tipik» elementlərinin paylanmalarını da təyin etməyə imkan verən bir sıra nəticələr məlumdur. Parçaların təsadüfi prosesinin M – invariant «tipik» parçanın uzunluğunun paylanmasını parçaların düzxətlə kəsiklərinin nöqtəvi prosesi terminlərində hesablamaq olmur. Lakin prosesin parçaları 1 ehtimalla *təsadüfi mozaika* əmələ gətirdikdə bu məsələnin həlli vardır.

Bax, *Stoxastik həndəsə*, *Təsadüfi kəsik*(yi) çoxüzlünün.

Əd.: [1] Салтыков С. А., Стереометрическая металлография, М., 1976; [2] Geometrical probability and biological structures, B. – [a. o.], 1978; [3] Сантало Л. А., Введение в интегральную геометрию, пер. с англ., М., 1956; [4] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [5] Mecke J., «Probab. and Math. Statist.», 1981, v. 2, p. 31–35 .

ROBAST STATİSTİK QİYMƏT « робастная оценка; robust estimator » – ilkin statistik modelin kiçik dəyişikliklərinə həssas olmayan *statistik qiymətdir.* Rus ədəbiyyatında R. s. q. termini ilə yanaşı dayanıqlı, stabil, əngələdayanıqlı terminləri də istifadə olunur.

«Robast» termini C. Boks (G. Box) tərəfindən 1953-də verilmiş fərziyyələrdən kiçik yayınmalara dayanıqlı metodların işarə olunması üçün daxil edilmişdir. Bu termin geniş yayılmışdır və R. s. q. anlayışı onun xüsusi ifadəsidir. Statistik məlumatlar kobud xətalara malik olduğu halda R. s. q. istifadə olunur. Ənənəvi, robast olmayan metodlar, məs., ən kiçik kvadratlar metodu, hətta azsaylı kobud xətalara belə həssasdır. C. Tyuki, ilk dəfə olaraq robast qiymətləndirmə məsələsini araşdırmış və misallarla göstərmişdir ki, kobud xətalara statistik praktikada bir qayda olaraq

yol verilir. R. s. q. riyazi nəzəriyyəsinin əsasları [2]-də P. Hyuber tərəfindən qoyulmuşdur.

Robast qiymətləndirmə məsələsi funksionalların qeyri – parametrik qiymətləndirilmə məsələsinin xüsusi bir halı kimi formalaşır. Θ – parametrik fəza, $\Phi = \{\varphi_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ – hər hansı bir funksiyalar ailəsi, U, – Φ ailəsinin hər hansı bir ətrafı və hər bir $\varphi \in U$ və hər bir natural n üçün $\mathbf{P}_{n,\varphi}$ ehtimal ölçüsü təyin olunmuş olsun.

İlkin statistik model $\{\mathbf{P}_{n,\varphi},\ \varphi \in \Phi\}$ ehtimal ölçüləri ailəsi ilə verilir. U ətrafı ilkin modelin kiçik dəyişikliklərini təsvir edir (məs., kobud xətaların kiçik hissələrinin nəzərə çarpmasını). $Y^n = (y_1, \ldots, y_n)$ seçiminin olduğu və bu seçimin $\mathbf{P}_{n,\overline{\varphi}}$-yə uyğun paylandığı fərz olunur; $\overline{\varphi}$, – U ətrafının naməlum elementidir. Məqsəd θ parametrinin $\overline{\varphi}$-yə «ən müfaviq olan» statistik qiymətini qiymətləndirməkdir. Uyğunluq qiymətləri Θ-dan olan, U-da verilmiş və $T(\varphi_\theta) = \theta$ şərtini ödəyən T funksionalı ilə təyin olunur. Əgər ixtiyari $\overline{\varphi} \in U$ üçün $T_n(Y^n)$ statistikası hər hansı bir kriteri mənasında $T(\overline{\varphi})$ üçün yaxşı statistikadırsa, onda $T_n(Y^n)$ θ parametrinin U-da *robast qiymətidir*, deyilir.

Bu sahədə qoyulmuş məsələlərdən ən çox araşdırılmış hal – $\Phi = \{F_\theta, \theta \in \Theta\}$, – $\mathbb{R}^1$-də paylanma funksiyalar ailəsi, Θ – sonluölçülü Evklid fəzasının altçoxluğu, y_i – eyni $\overline{\varphi} = F$ paylanma funksiyasına malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu haldır. Məsələnin belə qoyuluşuna aid U ətrafı, T funksionalları, robastlıq kriteriləri və R. s. q. seçilməsinin müxtəlif hallarına dair aşağıda misallar şərh olunmuşdur.

Ətraflara aid misallar: 1) ε –kobud xətalı ailələr (rus. ε – засоренные семейства) (kobud xətalar modeli)

$$U_\varepsilon = \{F : F = (1-\varepsilon)F_\theta + \varepsilon H,\ \theta \in \Theta,\ H \in \mathscr{H}\},\quad 0 < \varepsilon < 1;$$

burada $\mathscr{H}$, – $\mathbb{R}^1$-də verilmiş bütün paylanma funksiyalarının çoxluğudur ($\theta \in \mathbb{R}^1$ olduqda, bir çox hallarda $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\theta$ θ-ya görə simmetrik paylanma funksiyalarının çoxluğudur); 2) metrik ətraflar

$$U_{\varepsilon,d} = \{F : d(F, F_\theta) \le \varepsilon,\ \theta \in \Theta\},\ \varepsilon > 0;$$

burada d – paylanma funksiyaları fəzasında metrikadır.

Funksionallara aid misallar. a) $\theta \in \mathbb{R}^1$ olsun. Onda M – funksional $T(F)$ –

$$\int \psi(y - T(F))\, F(dy) = 0$$

kimi təyin olunur, burada ψ – hər hansı monoton tək funksiyadır. $\psi(y) = y$ və $\psi(y) = \operatorname{sign} y$ olduqda M – funksionallar uyğun olaraq F-in riyazi gözləmə (orta qiymət) və medianıdır. Əgər $F_\theta(y)$ – simmetrik paylanma funksiyası, ψ – məhdud funksiya və $F_\theta(y) = F_\theta(y - \theta)$ olarsa, onda $T(F_\theta) = \theta$ olur.

b) Minimal məsafə funksionalı (MD – funksional)

$$T(F) = \arg \min_{\theta \in \Theta} d(F, F_\theta)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Robastlıq kriterilərinə aid misallar.

1) Keyfiyyət robastlığı (bax, [3]). y_i-nin paylanma funksiyası F olduqda, $\mathscr{L}_F(T_n)$ T_n statistik qiymətinin paylanma funksiyası olsun. Hər bir $\delta > 0$ üçün elə $\varepsilon > 0$ varsa ki, $d(F, F') \le \varepsilon$ olduqda $\Delta = \overline{\lim_n}\, d(\mathscr{L}_F(T_n), \mathscr{L}_{F'}(T_n)) \le \delta$ olsun, onda $\{T_n\}$ F üçün *robast statistik qiymətlər* ardıcıllığı adlanır. Bir çox statistik qiymətlər üçün elə ε^* vardır ki, $d(F, F') < \varepsilon^*$ olduqda Δ kiçik, $d(F, F') > \varepsilon^*$ olduqda Δ böyük olur. ε^* T_n statistik qiyməti üçün *sədd nöqtəsi* (rus. пороговая точка) adlanır. Bu nöqtə ε üçün elə limit ölçüsüdür ki, $U_{\varepsilon,d}$-dən olan bütün paylanma funksiyaları üçün T_n statistik qiyməti məqbul olur.

2) Kəmiyyət robastlığı (M – funksional misalında). $\Theta = \mathbb{R}^1$, $\{F_\theta\}$, – $\mathbb{R}^1$-də simmetrik yerinidəyişmə ailəsi, T, – M – funksional və $T_n = T(F^n)$ olsun; F^n, – $(y_1, \ldots, y_n)$-in empirik paylanma funksiyasıdır. Onda T_n statistik qiyməti

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i - T_n) = 0$$

tənliyinin həllidir və bu halda T_n yerinidəyişmə parametrinin M – statistik qiyməti adlanır. Müəyyən şərtlərlə $\sqrt{n}\,(T_n - T(F))$ kəmiyyəti orta qiyməti sıfır olan və müəyyən bir $V(\psi, F)$ dispersiyalı asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [2]). Əgər

$$\sup_{F \in U} V(\psi^*, F) = \min_{\psi} \sup_{F \in U} V(\psi, F)$$

bərabərliyi ödənilərsə, T_n-in $\psi = \psi^*$ funksiyasına uyğun M – statistik qiyməti U-da robast statistik qiymət adlanır. Əgər U normal paylanmanın simmetrik ε – kobud xətalı ətrafıdırsa, onda hər hansı bir $a = a(\varepsilon)$ üçün

$$\psi^*(y) = \min(a, \max(y, -a))$$

olacaqdır.

2) Robastlıq lokal asimptotik minimakslıq kimi (bax, məs., [6]). Əgər

$$\lim_n \Big(\inf_{T_n} \sup_{F \in U_n} \mathbf{M}\, w_n(P_{n,F},\ P_{n,F_{T_n}}) -$$

$$- \sup_{F \in U_n} \mathbf{M}\, w_n(P_{n,F}, P_{n,F^*_{T_n}}) \Big) = 0$$

olarsa, statistik qiymət *robast statistik qiymət* adlanır, burada inf – bütün statistik qiymətlər üzrə aşağı sərhəd, $w_n(\cdot, \cdot)$ – itki funksiyası, $\{U_n\}$, – $\{F_\theta\}$ ailəsinin ətraflarının daralan sistemidir, məs., $U_n = U_{1/\sqrt{n,d}}$ (d – Hellinger metrikasıdır).

Yerinidəyişmə parametri üçün R. s. q. kimi M – statistik qiymət, L – statistik qiymət (qaydalı statistikaların xətti kombinasiyaları, məs., vinzor və kəsik orta qiymətlər), R – statistik qiymət (ranq statistik qiyməti) kimi statistik qiymətləri misal gətirmək olar. Bu statistik qiymətlərin kəmiyyət və keyfiyyət robastlığı və eyni zamanda bunlara müvafiq miqyas statistik qiymətləri haqqında məlumat üçün [8]-ə bax. M – statistik qiymətlər üçün ədədi mənada sadə rekurrent analoqlar vardır (bax, [9]) və bu statistik qiymətləri reqressiya, zaman sıralarının parametrlərinin qiymətləndirilməsi, filtrasiya və s. kimi məsələlərdə ümumiləşdirmək olur. Ümumi reqressiya məsələsi üçün (eyni zamanda qeyri – xətti və qeyri – parametrik reqressiya məsələləri) M – statistik qiymətlər $\sum_{i=1}^{h} \rho(y_i - \theta(x_i)) \to \min_{\theta \in \Theta}$ ekstremal məsələsinin (bax, [7]) həlli kimi təyin olunur, burada ρ – mənfi olmayan qabarıq funksiya (məs., ψ-nin ibtidai funksiyası), Θ, – $\theta(\cdot)$ reqressiya funksiyalarının verilmiş sinfi, x_i və y_i – uyğun olaraq, reqression modelin asılı olmayan və asılı dəyişənləridir. $T_n = T(F^n)$ şəklində olan minimal məsafə statistik qiymətləri də T-nin MM – funksionalı olduğu halda R. s. q.-ə misaldır. d metrikası müəyyən bir qayda ilə seçilərsə, bu statistik qiymətlər (*) mənada MM – funksionalları üçün robast qiymətlərdir (bax, [6]).

$T(F^n)$ tipli R. s. q. üçün əsas xarakteristika

$$IC_{F,T}(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T((1-t)F + t\delta_x) - T(F)}{t}$$

təsir funksiyasıdır, burada δ_x, – x nöqtəsində topalanmış cırlaşmış paylanma funksiyasıdır. IC – bir müşahidə nəticəsində alınmış, x-ə bərabər olan və ən böyük həcmli seçimə əlavə olunan statistik qiymətə nisbi təsiri xarakterizə edən funksiyadır. Təsir funksiyasının qeyri – məhdud olması tək-tək kobud xətaların statistik qiymətini olduqca təhrif edə bilir. $G(F) = \sup_x \left| IC_{F,T}(x) \right|$ kəmiyyətinə *kobud xətalara həssaslıq kəmiyyəti* deyilir. Kiçik qiymətli ε-lar üçün ε – kobud xətalı ailələrdə $T(F^n)$ statistik qiymətinin maksimal meyli təqribən $\varepsilon G(F_\theta)$-ya bərabərdir; θ – qiymətləndirilən parametrin əsl qiymətidir. Əgər $T(F)$ F-in orta qiymətidirsə, onda $G(F) = \infty$ olur, bu isə seçimi ortanın robast statistik qiymət olmadığı kimi interpretasiya olunur. Tipik hallarda $n^{-1} \int IC^2_{F,T}(x)\, F(dx)$ kəmiyyəti $T(F^n)$ statistik qiymətinin asimptotik dispersiyasına bərabərdir.

Əd.: [1] Tukey J., Contributions to probability and statistics, Stanford, 1960, p. 448–85; [2] Huber P., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, № 1, p. 73–101; [3] Hampel F., «Ann. Math. Statist.», 1971, v. 42, № 6, p. 1887–96; [4] Ершов А. А., «Автоматика и телемеханика», 1978, № 8, с. 66–100; [5] Смоляк С. А., Титаренко Б. П. Устойчивые методы оценирования, М., 1980; [6] Millar P., «Z. Wahr. und Verw Geb.», 1981, Bd 55, H. 1, s. 73–89; [7] Немировский А. С., Поляк Б. Т., Цыбаков А. В., «Докл. АН СССР», 1983, т. 273, № 6, с. 1310–14; [8] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984; [9] Цыпкин Я. З., Основы информационной теории идентификации, М., 1984.

ROBASTLIQ (ğ ı) statistik prosedurun **« робастность** статистической процедуры; **robustness** of a statistical procedure **»** – statistikanın parametrik modelinin olduqca «yaxşı» olmasını ifadə edən xassədir, bu halda bu *statistik prosedura* bu model çərçivəsində baxılır. R. nəzəriyyəsi statistikada özünün qeyri – formal təfsirində özünün yaranması ilə belə bir fakta əsaslanır ki, statistikada bir çox ümumi qəbul olunmuş fərziyyələrə (məs., normallıq, xəttilik, asılı olmamazlıq) yalnız həqiqətə az və ya çox uğurlu yaxınlaşmalar kimi baxılır. Tətbiqi riyaziyyatın ixtiyari sahəsində olduğu kimi belə fərziyyələr olduqca faydalıdır; bunların tətbiqinin əsaslandırılmasının qiymətləndirilməsində kəsilməzlik və ya dayanıqlılıq prinsipinə müraciət olunur: riyazi modeldə kiçik xəta son nəticələrin mühüm xətasına səbəb olmamalıdır. Burada da klassik parametrik statistikanın nəzəriyyələri ilə bağlı, bu nəzəriyyələrlə dəqiq paramerik modellər üçün optimal prosedurların verilməsi kimi eyni problem yaranır, lakin real modellərə yalnız yaxın olan modellər üçün (məs., zəif metrikada) bu nəzəriyyələr cavab vermir.

R. problematikasının statistika tarixindən əvvəlki dövrə aid olmasına baxmayaraq, bir çox görkəmli statistiklər [S. Nyukom (S. Newcomb), K. Pirson (K. Pearson), U. Qosset (W. Gosset, təxəllüsü Student), H. Ceffris (H. Jeffreys), E. Pirson (E. Pearson) və b.] bu problematikanın olduğunu aydın dərk edirdilər, formal ciddi və olduqca ümumi yanaşmaların tapılması üçün səylər olduqca yaxın zamanda müvəffəqiyyətlə nəticələnmişdir. Bu yanaşmalar P. Hyuber ([1]) və F. Hamnelin ([2]) adları ilə bağlıdır.

Robast qiymətləndirməyə minimaks yanaşma P. Hyuberə məxsusdur. O hesab edir ki, müşahidələrin paylanması $F(x-\theta) = (1-\varepsilon)\, G(x-\theta) + \varepsilon H(x-\theta)$ düsturu ilə təyin olunur. Burada θ – yerinidəyişmə parametri, G – parametrik modellə əlaqədar məlum paylanma, $\varepsilon > 0$ böyük xətaların naməlum H paylanması ilə müəyyən hissəsini xarakterizə edən məlum ədəddir. θ parametrinin M – statistik qiymətindən, yəni $\sum \psi(x_i - T) = 0$ qiymətləndirmə tənliyinin köklərindən istifadə edildiyi fərz olunur. Qiymətləndirmə funksiyası ψ

$$\min_{\psi} \max_{H} \int \Psi^2\, dF \Big/ \left(\int \varphi'\, dF \right)^2$$

şərtindən seçilir. Qauss paylanma funksiyası halında qiymətləndirmə funksiyası $\psi(x) = \max(-k, \min(k, x))$ olan Hyuber statistik qiyməti alınır, burada k ε-dan asılıdır. $\varepsilon \to 0$ və ya $\varepsilon \to 1$ olduqda statistik qiymət kimi ədədi orta və ya median götürülür. Hyuber yanaşması [3]-də ətraflı şərh olunmuşdur.

F. Hampelin daxil etdiyi infinitezimal yanaşma aşağıdakı üç mərkəzi anlayışa əsaslanır: keyfiyyət robastlığı, təsir funksiyası və sədd nöqtəsi (rus. пороговая точка). Bu anlayışlar birinci tərtib törəmənin kəsilməzliyi və funksiyanın ən yaxın xüsusi nöqtəsinə qədər məsafəyə uyğundurlar.

$x_1, \ldots, x_n$ – paylanma funksiyası $F_0(x)$ olan çoxluqdan təkrar seçim olsun; $F_n(x)$ – bu seçimin uyğun empirik paylanma funksiyasıdır. İnfinitezimal yanaşmada $T_n(x_1, \ldots, x_n) = T(F_n)$ şəklində statistik qiymətlərə baxılır, burada T – bütün empirik ölçüləri özündə saxlayan ehtimal ölçülərinin altfəzasında hər hansı funksionaldır. Əgər $F \to \mathscr{L}_F(T_n)$ inikaslar ardıcıllığı F_0

nöqtəsində bərabər dərəcəli kəsilməz olarsa, yəni ehtimal ölçüləri fəzasında zəif topologiya doğuran münasib d məsafəsi vardır ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$, $n_0 > 0$ tapılar ki, $n > n_0$ olduqda

$$d(F_0,\ F) \le \delta \Rightarrow d(\mathscr{L}_{F_0}(T_n),\ \mathscr{L}_F(T_n)) \le \varepsilon$$

olarsa, T_n ardıcıllığı $F = F_0$ üçün robast ardıcıllıq adlanır. Qeyd etmək lazımdır ki, R. üçün bu təriflə stoxastik modellərin keyfiyyət dayanıqlılığı anlayışı arasında yaxın analogiya vardır (bax, [4]).

Paylanma funksiyası F olduqda T funksionalının təsir funksiyası IF, –

$$IF(x;\ T,\ F) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T((1-t)F + tE_x) - T(F)}{t}$$

funksiyasına deyilir, burada E_x, – x nöqtəsinə vahid kütlə qarşı qoyan ölçüdür. Təsir funksiyası statistik qiymətə təsiri qiymətləndirir, bu təsir x nöqtəsində infinitezimal kirlənmə təsiri olub, bu kirlənmənin normalanmış kütləsi ilə olunur. Təsir funksiyası T_n statistik qiymətinin asimptotik dispersiyasını hesablamağa imkan verir; bu dispersiya $\int IF(x;\ T, F)^2\, dF(x)$ inteqralına bərabərdir.

Paylanma funksiyası F olduğu halda T_n statistik qiymətləri ardıcıllığının sədd nöqtəsi $\varepsilon^* = \sup\{\varepsilon \ge 1:$ elə K_ε kompakt çoxluğu vardır ki, $d(F,\ G) < \varepsilon$ bərabərsizliyindən $n \to \infty$ olduqda $G(\{T_n \in K_\varepsilon\}) \to 1$ yığılması alınır$\}$ münasibəti ilə təyin olunur.

Sədd nöqtəsi olduqca fərqlənən müşahidələri xaricetmə qaydalarının araşdırılmasında istifadə olunur. Təsir funksiyalarının əsasında R.-a ətraflı yanaşma [5]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Huber P. J., «Ann. Math. Statist.», 1964, v. 35, p. 73–101; [2] Hampel F. R., Contributions to the theory of robust estimation. Ph. thesis, Berk., 1968; [3] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., M., 1984; [4] Zolotarev V. M., General problems of mathematical models, Proc. of the 41 St session of JSJ, New Delhi, 1977, p. 382–401; [5] Хампель Ф. [и др.], Робастность в статистике. Подход на основе функции влияния, пер. с англ., M., 1989.

ROBBİNS – MONRO PROSEDURU stoxastik approksimasiyanın **« Роббинса – Монро процедура** стохастической аппроксимации; **Robbins – Monro stochastic approximation procedure »** – naməlum *reqressiya* funksiyasının sıfrının tapılması üçün prosedurdur. $R(x)$, – $x \ge x_0$ olduqda müsbət, $x < x_0$ olduqda mənfi olan naməlum reqressiya funksiyası olsun, burada x_0, – $\mathbb{R}$-in hər hansı bir nöqtəsidir. Bu funksiyanın hər bir $n = 1, 2, \ldots$ anında və hər bir $x \in \mathbb{R}$ nöqtəsində qiymətlərinin hər hansı additiv $G(n,\ x)$ təsadüfi xətası ilə ölçüldüyü fərz olunur, belə ki, ölçmə nəticələri

$$Y(n,\ x) = R(x) + G(n, x), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

şəklindədir, burada $G(n, x)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləmələri, n və x-in qeyd olunmuş qiymətlərində sıfra bərabərdir;

$$\{G(n,\ x),\ x \in \mathbb{R}\} \text{ və } \{G(k,\ y),\ 1 \le k < n,\ y \in \mathbb{R}\}$$

çoxluqları asılı deyildirlər. Məsələ $R(x) = 0$ tənliyinin kökü x_*-nun qiymətləndirilməsidir (bax, *Stoxastik approksimasiya*).

H. Robbins və S. Monro bu məsələnin həlli metodunu (bax, [1]) təklif etmiş və stoxastik approksimasiya metodu da adlandırmışlar. Onlar aşağıdakı rekurrent proseduru (Robbins – Monro prosedurunu) daxil etmişlər:

$$X(n+1) - X(n) = -a(n) Y(n+1,\ X(n)),\ X(1) = x, \quad (1)$$

burada x – ixtiyari başlanğıc nöqtədir, $a(n)$ – elə müsbət ədədlər ardıcıllığıdır ki (addım vuruğu), onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^2(n) < \infty$$

(1) proseduru nəticəsində $X(n)$ ardıcıllığı x_0 nöqtəsinə tərəf hərəkət edir, belə ki,

$$\mathbf{M}\{X(n+1) - X(n) \mid X(n)\} = -a(n) R(X(n))$$

və buna görə də, əgər $X(n) < x_0$ olarsa, onda $X(n+1) - X(n)$ fərqi orta mənada müsbət olur; əgər $X(n) > x_0$ olarsa, onda bu fərq orta mənada mənfi olur. Bu zaman (2) şərtlərindən birincisi ona görə zəruridir ki, $n \to \infty$ olduqda $X(n)$-in x_0-a yığılması təmin olunsun, (2) şərtlərindən ikincisinin məqsədi ölçmə nəticələrində təsadüfi $G(n, x)$ xətalarının «təsirini» azaltmaqdır. $R(x)$ və $G(n, x)$ üzərinə qoyulan bəzi əlavə şərtlərlə $X(n)$-in x_0-a kvadratik orta mənada yığılması isbat olunmuşdur. (1) prosedurunun və onun çoxölçülü analoqundan yığılma xassələri araşdırılmışdır. Buradakı tipik nəticələrdən biri aşağıdakıdır: əgər (2) münasibətləri və ixtiyari $\varepsilon \in (0,\ 1)$ üçün

$$\sup_{\varepsilon < |x - x_0| < 1/\varepsilon} R(x)(x - x_0) > 0$$

və

$$R^2(x) + \sup_{n \ge 1} \mathbf{M} G^2(n,\ x) \le K(1 + x^2),\ K = \text{const}$$

şərtləri ödənilərsə, onda $n \to \infty$ olduqda $X(n)$ ardıcıllığı ixtiyari $x \in \mathbb{R}$ başlanğıc nöqtəsi üçün x_0-a sanki yəqin yığılır.

R. – M. p. ilə bağlı digər istiqamət onun paylanmalarının xassələri ilə əlaqədardır. Məs., isbat olunmuşdur ki (bax, [3]), əgər $a(n) = an^{-1}$, $a > 0$, $X(n) \to x_0$ münasibəti $n \to \infty$ olduqda sanki yəqin ödənilərsə, $R(x)$ vektoru x_0 nöqtəsində differensiallanandırsa, $A = aB + 1/2I$ (I – vahidi matrisdir) dayanıqlı matrisdirsə və $x \to x_0$ olduqda

$$A(n, x) = \mathbf{M} G(n, x)\, G^{\mathsf{T}}(n,\ x) \to A(\infty, x_0)$$

$\{G(n,\ x),\ n = 1, 2, \ldots, |x - x_0| < \theta\}$ ailəsi hər hansı $\theta > 0$ üçün müntəzəm inteqrallanandırsa, onda $\sqrt{n}(X(n) - x_0)$ vektoru orta qiyməti sıfır və kovarasion matrisi

$$a^2 \int_0^{\infty} e^{A\upsilon} A(\infty, x_0) e^{A^{\mathrm{T}}\upsilon} d\upsilon$$

olan asimptotik normal vektordur.

Əd.: [1] Robbins H., Monro S., «Ann. Math. Statist.», 1951, v. 22, № 3, p. 400–07; [2] Галдышев Е. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 297–300; [3] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание, М., 1972; [4] Вазан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [5] Коростелев А. П., Стохастические реккурентные процедуры, М., 1984.

ROSSBERQ TEOREMİ « **Россберга теорема; Rossberg theorem** » – Kolmoqorov hipotezinin müsbət həllini özündə ehtiva edən teoremdir; Kolmoqorov hipotezi: əgər sonsuz bölünən paylanma funksiyası və normal funksiya hər hansı yarımoxda üst-üstə düşərsə, onda bunlar eynidirlər (bax, [1]). R. t. paylanma funksiyalarını onların ədəd oxunun altçoxluqlarında qiymətlərinə görə birqiymətli təyin edilməsi problemi üzrə intensiv tədqiqatların başlanğıcını qoymuş oldu. Bu problem üzrə nəticələr [2]-də verilmişdir.

Əd.: [1] Rossberg H. - J., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 4, с. 824–28; [2] Rossberg H. - J., Jesiak B., Siegel G., Analytic methods of probability theory, B., 1985.

ROZENBLATT – PARZEN STATİSTİK QİYMƏTİ paylanma sıxlığının « **Розенблатта – Парзена оценка** плотности распределения; **Rosenblatt – Parzen distribution density function estimator** » – bax, *Sıxlığı, paylanmanın*; müşahidələr üzrə statistik qiymət.

SABİT KOD, ZAMAN ÜZRƏ « постоянный во времени код; time – constant code » – bax, *Konvolyusion kod.*

SABİT TAKTLI İNTERVAL « постоянный тактовый интервал; constant interpulse interval » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses.*

SADƏ HİPOTEZ « простая гипотеза; simple hypothesis » – bax, *Statistik hipotez*, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

SADƏ İNİKAS(ı) Banax fəzasının **« простое отображение** банахова пространства; **simple mapping** of a Banach space **»** – bax, *Güclü ölçülən inikas*.

SADƏ KƏSİYİ, QRAFIN « простой разрез графа; ordinary cut of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu.*

SADƏ METRİKA « простая метрика; simple metric » – bax, *Ehtimal metrikası.*

SADƏ NÖQTƏVİ PROSES « простой точечный процесс; simple point process » – elə təsadüfi *nöqtəvi prosesdir* ki, onun ixtiyari nöqtəsinin təkrarlıq sayı (kütləvi xidmət sisteminə eyni zamanda daxil olan tələblər qrupunun ölçüsünə bərabər olan) vahidə bərabərdir. Kütləvi xidmət nəzəriyyəsində tələblərin daxilolma anları ilə yaranan nöqtəvi prosesin sadəliyi – tələblərin eyni zamanda qruplara daxil olmasının mümkünsüzlüyünə uyğundur. Kvadratik orta mənada differensiallanan stasionar Qauss prosesinin realizasiyası ilə səddin kəsilmə nöqtələri S. n. p. əmələ gətirir. Əgər Φ lokal məhdud moment ölçüsünə malik S. n. p.-dirsə, onda Φ – *ordinar nöqtəvi prosesdir*.

Bax, *Nöqtəvi proses.*

***SADƏ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « простая случайная величина; simple random variable »** – Ω elementar hadisələr fəzasının sonlu *bölgüsünün atomları* – A_i hadisələrinin indikatorlarının xətti kombinasiyaları –

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega) \qquad (1)$$

diskret təsadüfi kəmiyyətlərinə deyilir (x_i sonlu ədədlərdir); $A_i \subset \Omega$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ və $i \neq j$ olduqda $A_i \cap A_j = \varnothing$; əgər hər hansı bir i üçün $x_i = 0$ olarsa, onda (1) xətti kombinasiyasında x_i-yə uyğun $x_i \cdot I_{A_i}(\omega) = 0$ həddi nəzərə alınmır.

$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot I_{A_i}(\omega)$ sadə təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\xi$ –

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(A_i)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. İxtiyari c sabiti S. t. k.-dir və $\mathbf{M}c = c$. $\xi(\omega)$ S. t. k.-i üçün: $\mathbf{M}c\xi(\omega) = c\mathbf{M}\xi(\omega)$; əgər $\xi(\omega) \geq 0$, yəni bütün i-lər üçün $x_i \geq 0$ olarsa, onda $\mathbf{M}\xi(\omega) \geq 0$; əgər $\xi(\omega)$ və $\eta(\omega)$ S. t. k.-lər və $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ olarsa, onda $\mathbf{M}\xi(\omega) \leq \mathbf{M}\eta(\omega)$ münasibəti doğrudur. İki S. t. k.-in cəmi və hasili də S. t. k.-dir. Sonlu sayda S. t. k.-lər cəminin riyazi gözləməsi toplanan S. t. k.-lərin riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir: $\mathbf{M}\sum_{i=1}^{m} \xi_i(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}\xi_i(\omega)$. $(\Omega, \mathcal{F})$ – ölçülən fəza və A, – $\mathcal{F}$ – ölçülən ixtiyari çoxluq olarsa, $I_A(\omega)$ S. t. k.-dir və $\mathbf{M}I_A = 1 \cdot \mathbf{P}(A) + 0 \cdot \mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A)$.

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, М., 1962.

SADƏ ZƏNCİRİ, QRAFIN « простая цепь графа; ordinary path of a graph » – bax, *Minimal zəncirlər və kəsiklər metodu*.

SAĞ MARKOV PROSESİ « правый марковский процесс; right Markov proses » – sağ Meyer hipotezlərini ödəyən, yəni sağdan kəsilməz olan prosesin bütün α – ekssessiv funksiyaları prosesin bütün trayektoriyaları boyunca sanki yəqin sağdan kəsilməz, Markov prosesidir. $X = (X_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_x)$ – qiymətləri metrik kompaktın Borel E altçoxluğundan olan, bircins Markov prosesi və $\mathbf{P}_x\{X_0 = x\} = 1$ olsun. Əgər X prosesinin: a) trayektoriyaları sağdan kəsilməz olarsa; b) σ – cəbrlər axını $\mathcal{A}_t$ sağdan kəsilməz olub, $\mathcal{A}_t = \bigcap_{\mu} \mathcal{A}_t^{\mu}$ kimi təyin olunarsa (kəsişmə E-də təyin olunmuş bütün ehtimal μ ölçüləri üzrədir), burada $\mathcal{A}_t^{\mu}$, – $\mathcal{A}_t$-ni və μ ölçüsü üzrə $\mathcal{A}$-nın tamamlayıcısından $\mathbf{P}_\mu$ – ölçüsü 0 olan bütün çoxluqları özündə saxlayan minimal σ – cəbrdir; c) ixtiyari α – ekssessiv $f(x)$ funksiyası üçün (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesi üçün) $f(X_t)$ təsadüfi prosesi E-də təyin olunmuş ixtiyari μ ölçüsü üçün $\mathbf{P}_\mu$ – sanki yəqin sağdan kəsilməz olarsa, X prosesi sağ Markov prosesi adlanır. S. M. p. ciddi Markov prosesidir və hətta sağdan kəsilməz ciddi Markov prosesidir, $\mathcal{A}_t$ axını üçün qeyd olunan şərtləri ödəyən bu proses S. M. p.-dir. S. M. p.-ləri [1]-də standart Markov prosesinə əvəz kimi proseslərin ən geniş sinfi olaraq təklif olunmuşdur ki, bunlar üçün ehtimali potensial nəzəriyyəsinin konstruksiyalarını həyata keçirmək olur; bu ideyalar sonralar [2], [3]-də inkişaf etdirilmişdir.

Qeyri – bircins $X = (X_t, \mathcal{A}_t^s, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{s,x}, \mathbf{P}^{t,x})$ Markov prosesləri (bax, *Markov prosesi*) üçün S. M. p.-nin analoqu aşağıdakı şərtləri ödəyən proseslərdir: ixtiyari $s < u$, $A \in \mathcal{A}_\infty^u$, $B \in \mathcal{A}_s^{-\infty}$ üçün $\mathbf{P}_{t, X_t}(A)$ təsadüfi prosesi $[s, u]$-da $\mathbf{P}_{s,\mu}$ – sanki yəqin sağdan kəsilməzdir, $\mathbf{P}^{t, X_t}(B)$ təsadüfi prosesi isə $[s, u]$-da $\mathbf{P}^{s, u}$ – sanki yəqin sağdan kəsilməzdir (bax, [4]).

Əd.: [1] W a l s h J. B., M e y e r P.-A., «Invent. Math.», 1971, t. 14, p. 143–66; [2] G e t o o r R. K., Markov process. Ray processes and right process, B., 1975; [3] E n g e l b e r t H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 84, S. 277–300; [4] К у з н е ц о в С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

SAĞ PALM PAYLANMASI « правое распределение Пальма; right Palm distribution » – bax, *Nöqtəvi proses* q r u p d a.

SAĞ TƏSADÜFİ DOLAŞMA « правое случайное блуждание; right random walk » – bax, *Markov zənciri.*

SANKİ BOREL FUNKSİYASI « почти борелевская функция; almost Borel function » – bax, *Potensial nəzəriyyəsi* M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n.

SANKİ İNVARİANT KRİTERİ « почти инвариантный критерий; almost invariant test » – bax, *İnvariant kriteri*.

SANKİ SEPARABELQİYMƏTLİ İNİKAS « почти сепарабельнозначное отображение; almost separably valued mapping » B a n a x f ə z a l a r ı n ı n – bax, *Güclü ölçülən inikas.*

SANKİ STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES « почти стационарный случайный процесс; almost stationary stochastic process » – müntəzəm məhdud xətti *stasionar təsadüfi prosesdir*; stasionarlığa yaxın xüsusi xassəyə malik təsadüfi prosesdir. Əgər elə sabit $K \geq 1$ olarsa ki, ixtiyari natural n, kompleks $c_1, \dots, c_n$ ədədləri və $s, t_1, \dots, t_n \in T$ qiymətlərində

$$\mathbf{M}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j X(t_j + s)\right|^2 \leq K\,\mathbf{M}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j X(t_j)\right|^2$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda kompleksqiymətli X_t, $t \in T$ təsadüfi prosesi g e n i ş m ə n a d a s a n k i s t a s i o n a r p r o s e s adlanır; $\mathbf{M}\,|X(t)|^2 < \infty$ fərz olunur və $T = (-\infty, \infty)$ və ya $T = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Əgər elə sabit $K \geq 1$ olarsa ki, ixtiyari natural $n, s, t_1, \dots, t_n$ ədədləri və n – ölçülü kompleks fəzanın Borel çoxluğu Γ üçün

$$\mathbf{P}\{(X(t_1 + s), \dots, X(t_n + s)) \in \Gamma\} \leq$$

$$\leq K\,\mathbf{P}\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) \in \Gamma\}$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda kompleksqiymətli $X(t)$, $t \in T$ prosesi d a r m ə n a d a s a n k i s t a s i o n a r p r o s e s adlanır.

$\mathbf{M}\,X(t) = 0$ şərtlərini ödəyən geniş mənada S. s. t. p. üçün H_X Hilbert fəzasında xətti bikəsilməz müsbət A operatoru vardır, bu operator $X(t)$, $t \in T$ prosesinin qiymətlərinin kvadratik orta mənada qapalı xətti örtüyüdür (bax, *Korrelyasion nəzəriyyə*(s i) t ə s a d ü f i f u n k s i y a l a r ı n) və geniş mənada elə $Y(t)$ prosesi və elə $H_Y = H_X$ vardır ki, $X(t) = AY(t)$, $t \in T$ (bax, [1]) bərabərlikləri doğrudur. Əgər $X(t)$ $(\Omega, \mathcal{B}_X, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında dar mənada S. s. t. p.-dirsə, onda $(\Omega, \mathcal{B}_X)$ ölçülən fəzasında $\mathbf{P}$ -yə ekvivalent elə $\mathbf{P}'$ ölçüsü vardır ki, $X(t)$ bu ölçüyə nəzərən dar mənada stasionar prosesdir və $1/K \leq d\,\mathbf{P}'(\omega) \leq K$ münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $\mathcal{B}_X$, – $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir.

Əd.: [1] T j ø s t h e i m D., T h o m a s J. B., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1975, v. 21, № 3, p. 257–62; [2] T j ø s t h e i m D., «Adv. Appl. Probab.», 1976, v. 8, № 4, p. 820–30.

SAPOQOV TEOREMİ « Сапогова теорема; Sapogov theorem » – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) p a y l a n m a l a r ı n x a r a k t e r i z a s i y a l a r ı n ı n.

SAYICI ÖLÇÜ(s ü) n ö q t ə v i p r o s e s i n **« считающая мера** т о ч е ч н о г о п р о ц е с с а; **counting measure** o f a p o i n t p r o c e s s **»** – bax, *Təsadüfi ölçü*.

SAYICI PROSES « считающий процесс; counting process » – $0 \leq t < \infty$ yarımoxunda verilən elə $X(t)$ prosesidir ki, $X(0) = 0$, özünün iki ardıcıl ixtiyari kəsilmə nöqtələri t_{k-1} və t_k arasında $X(t) = \text{const}$ olub, $X(t)$-nin qiyməti hər bir kəsilmə nöqtəsi t_k -da yalnız bir vahid artır [odur ki, $X(t)$ prosesi t -nin bütün qiymətlərində tam mənfi olmayan qiymətlər alır]. $X(t)$ prosesinin kəsilmə nöqtələrinin ardıcıllığı $\{t_k\}$ $X(t)$-nin özünü də birqiymətli təyin edən, $t \geq 0$ yarımoxunda müəyyən bir *nöqtəvi təsadüfi proses* olur. Bütün S. p.-lər sinfinin mühüm xüsusi altsinifləri *Puasson prosesinin* altsinfidir və bunlar üçün $\{t_k\}$ nöqtələrin Puasson ardıcıllığıdır (yəni $t = 0$, $k = 1, 2, \dots$ olduqda $t_k - t_{k-1}$ fərqləri eyni eksponensial qanunla paylanan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı təşkil edir) və daha ümumi altsinif *bərpa proseslərinin* altsinfidir və bu proseslər üçün $t_k - t_{k-1}$ fərqləri eyni ehtimal paylanmasına malik (ümumiyyətlə isə, ixtiyari qanunla paylanmış) qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

S. p.-lərə əksər hallarda tətbiqi məsələlərdə təsadüf olunur, bu məsələlərdə təsadüfi t_k anlarında baş verən hadisələr, bu hadisələrin t anına qədər baş vermə sayı maraq doğurur; məs., $X(t)$ bərpa prosesi hər hansı aqreqatın t müddəti ərzində əvəz olunmaları (və ya təmiri) sayını əksər hallarda yaxşı dəqiqliklə təsvir edir. Bəzi hallarda S. p.-ə bütün $-\infty < t < \infty$ ədəd oxunda baxılır və bu hallarda bu proses də tam mənfi olmayan qiymətlər alır, lakin $k = -1, -2, \dots$, t_k ardıcıl təsadüfi kəsilmə nöqtələrinin hər birində bir vahid artır, bu halda da $X(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ prosesi S. p. adlanır.

Bax, *Nöqtəvi proses*.

SAZONOV XASSƏSİ Banax fəzasının **« Сазонова свойство** банахова пространства; **Sazonov property** of a Banach space **»** – bax, *Banax fəzası* Sazonov xassəli.

SAZONOV TEOREMİ « Сазонова теорема; Sazonov theorem » – *Boxner – Xinçin teoreminin* sonsuzölçülü Hilbert fəzası üçün variantıdır: H Hilbert fəzasında kompleks χ funksionalı H-da Radon ehtimal ölçüsünün xarakteristik funksionalı, yalnız və yalnız, o halda ola bilər ki, χ müsbət müəyyən, $\chi(0)=1$ və χ *Sazonov topologiyasında* kəsilməz olsun. Bu teoremi V. V. Sazonov [1]-də isbat etmişdir; ondan asılı olmayaraq, bir qədər sonra, L. Qross tərəfindən [2]-də alınmışdır. S. t.-nə ekvivalent teorem: Hilbert fəzasında silindrik μ ölçüsü, yalnız və yalnız, o halda hesabi – additiv ölçüdür ki, onun xarakteristik funksionalı $\hat{\mu}$ Sazonov topologiyasında kəsilməz olsun (bax, *Banax fəzası* Sazonov xassəli, *Məqbul topologiya*).

Əd.: [1] Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, в. 2, с. 201–05; [2] Gross L., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 46, p. 1–62.

SAZONOV TOPOLOGİYASI « Сазонова топология; Sazonov topology » – H Hilbert fəzasında ən zəif vektor topologiyadır; bu topologiyada $h\to(Sh,\ h)$ şəklində funksionallar kəsilməzdirlər, burada S, – H fəzasında izə malik olan simmetrik müsbət operatorlar (S – operatorlar) çoxluğunda dəyişir. S operatoru H-da S – operatorlar çoxluğunda dəyişdikdə $\{h\in H:(Sh,\ h)<1\}$ şəklində çoxluqlar S. t.-nın sıfır ətraflarının fundamental sistemini əmələ gətirir. Sonsuzölçülü fəza üçün S. t. ilkin topologiyadan ciddi zəifdir. İlkin topologiyanı S. t. ilə əvəz etdikdə *Boxner – Xinçin teoremi* öz qüvvəsində qalır (bax, *Sazonov teoremi*). H-da ehtimal ölçülərinin hər hansı M ailəsinin nisbi zəif kompaktlığı üçün $\{\hat{\mu}:\mu\in M\}$ xarakteristik funksionallar ailəsinin S. t.-da müntəzəm kəsilməzliyi kifayətdir (lakin zəruri deyildir).

Əgər T lokal qabarıq topoloji vektor fəza olarsa, onda qoşma T^* fəzasında S. t. ən zəif vektor topologiya kimi təyin olunur, bu topologiyada $x^*\to(Su^*x^*,\ u^*x^*)$ şəklində funksionallar kəsilməzdirlər; u – Hilbert fəzası H-dan T-yə kəsilməz xətti operatorların çoxluğunda dəyişir (məs., hesab etmək olar ki, $H=l^2$) S H-da S – operatorlar çoxluğudur. Bu halda S. t. *kafi topologiyadır*.

İlkin T fəzasında S. t. ən zəif vektor topologiyadır, bu topologiyada $x\to(S\upsilon x,\ \upsilon x)$ şəklində funksionallar kəsilməzdirlər, burada υ T-dən Hilbert fəzası H-a kəsilməz xətti operatorların çoxluğunda dəyişir ($H=l^2$ hesab etmək olar), S, – H-da S operatorlar çoxluğudur. T fəzasının S. t. ilkin topologiyadan zəifdir və kafi topologiyadır (T Makkı topologiyası ilə T^*-ya qoşma fəza ilə eyniləşdirilmişdir). Əgər T nüvə fəzası olarsa, onda T fəzasının S. t. onun ilkin topologiyası ilə üst-üstə düşür, beləliklə, ilkin topologiya kafi topologiyadır (Minlos teoremi).

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Сазонов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 87–93; [2] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977.

SEÇİLMƏSİ, ƏN YAXŞI OBYEKTİN « выбор наилучшего объекта; best choice problem » – *Markov zəncirinin* optimal dayanma anı məsələlərindən biridir: keyfiyyətinə görə nizamlanmış n sayda obyekt $1, 2, \dots, n$ anlarında yoxlanılmaq məqsədilə ixtiyari qaydada yoxlamaya daxil olunur (obyektlər keyfiyyətinə görə: 1 ranqlı – ən yaxşısı, keyfiyyətinə görə ikinci 2 ranqlı və s. kimi nizamlanır); bütün mümkün olan halların sayı $n!$ olur. Növbəti daxil olmuş obyekt keyfiyyətinə görə əvvəlki obyektlə müqayisə olunur və onun nisbi ranqı təyin olunur, yəni onun ranqı əvvəlki daxil olmuş obyektlərin keyfiyyətlərinə görə təyin olunur, lakin onun əsl ranqı naməlum olur. Növbəti obyektlə tanışlıqdan sonra, o ya seçilir (onu geri qaytarmaq olmaz), ya da ki, müşahidələr davam etdirilir. Ən böyük ehtimalla keyfiyyəti ən yaxşı obyekti seçmək tələb olunur. İsbat olunmuşdur ki, nisbi ranqı 1-ə bərabər obyektlərin rast gəlinməsi anları Markov zənciri təşkil edir və bu məsələ bu Markov zəncirinin optimal dayanma anı məsələsinə çevrilir. Məsələ XX əsrin 50-ci illərində yaranmışdır, lakin onun müəllifi məlum deyildir. [1]-də ilk jurnal variantı ifadə olunmuşdur. [2]-də baxılan obyektlərin sayı n-in təsadüfi kəmiyyət olduğu və onun verilmiş bir paylanmaya malik olduğu hal araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Gardner M., «Sci. Amer.», 1960, v. 202, № 1, p. 150–56; № 3, p. 172–82; [2] Пресман Э. Л., Сонин И. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 695–706; [3] Freeman P., «Int. Statist. Rev.», 1983, v. 51, № 2, p. 189–206; [4] Березовский Б. А., Гнедин А. В., Задача наилучшего выбора, М., 1984.

SEÇİM « выборка; sample » – ümumi Ω çoxluğundan ehtimal metodları ilə seçilmiş obyektlərdən ibarət, sonlu altçoxluqdur. S.-dəki obyektlərin sayı seçimin həcmi adlanır. Əksər hallarda statistik S. S.-i təşkil edən obyektlərin xarakteristikalarının qiymətlər toplusu ilə eyniləşdirilir. Obyektlər toplusunu (məs., istehsalatda ədədi məmulatları, demoqrafiyada əhalini) araşdırmaq üçün statistik S.-lərin yaradılmasında müxtəlif ehtimal metodları istifadə olunur (bax, *Seçimi statistik araşdırma*).

Qaytarmamaq şərtilə təsadüfi seçim – Ω-dan ixtiyari qaydada obyektlərin bir-bir ardıcıl surətdə götürülməsilə aparılır və seçilmiş obyektlər sonrakı seçmədə iştirak etmir, seçilməmiş bütün obyektlərin seçilməsi ehtimalları eyni hesab olunur. Ω n elementli çoxluqdursa, onda qaytarmamaq şərtilə r həcmli seçimlərin sayı

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1),\quad 1\le r\le n$$

olacaqdır. Bu halda n elementli çoxluqdan r həcmli seçim qaytarmamaq şərtilə sxemi üzrə aparılır, deyilir.

Qaytarmaq şərtilə təsadüfi seçim – Ω-dan ixtiyari qaydada seçilən obyekt hər dəfə məhz bu çoxluqdan götürülür, belə ki, eyni bir obyekt təkrar götürülə bilinər. Ω n elementli çoxluq olarsa, qaytarmaq şərtilə n həcmli seçimlərin sayı

$$\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{r\ \text{dəfə}}=n^r$$

olacaqdır. Bu halda n elementli çoxluqdan r həcmli seçim qaytarmaq şərtilə sxemi üzrə aparılır, deyilir.

Əgər seçimdə hər bir obyektin hər hansı bir qaydadan asılı olmadan eyni p ehtimalı ilə seçilməsi qərarı qəbul edilirsə, onda alınan statistik seçim binomial seçim adlanır.

Riyazi statistikada sonlu sayda obyektlərdən ibarət çoxluqlardan statistik seçimlərlə yanaşı, sonsuz çoxluqlardan S.-lərə də baxılır.

Bax, *Seçimi metod.*

SEÇİM; açım « **выборка;** размах; **sample range** » – bax, *Açım*(ı) seçimin.

SEÇİM kəsik « **выборка** усеченная; truncated **sample** » – bax, *Kəsik seçim*.

SEÇİM laylanmış « **выборка** расслоенная; stratified **sample** » – bax, *Laylanmış seçim*.

SEÇİM reprezentativ « **выборка** репрезентативная; representative **sample** » – bax, *Reprezentativ seçim*.

SEÇİM senzurlanmış « **выборка** цензурированная; consored **sample** » – bax, *Senzurlanmış seçim*.

SEÇİM; səpələnmə « **выборка;** рассеивание; **sample dispersion / variation** » – bax, *Səpələnmə*(si) seçimin.

SEÇİMİ ASİMMETRİYA ƏMSALI « выборочный коэффициент асимметрии; sample coefficient of skewness » – bax, *Asimmetriya əmsalı*.

SEÇİMİ BAŞ KOMPONENTLƏR « выборочные главные компоненты; sample principal components » – adi baş komponentlərin analoqudur, lakin bunların tapılmasında kovariasion Ξ matrisi deyil, empirik kovariasion $\hat{\Xi}$ matrisindən istifadə olunur. Beləliklə, S. b. k. o halda tapılır ki, X vektoru məlum olmayıb, yalnız müşahidə olunan asılı olmayan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ müşahidələnənləri məlum olsun. Bax, *Reduksiyası*, *verilənlərin* (*əlamətlərin*).

SEÇİMİ BLOKLAR « выборочные блоки; sample blocks » seçimi intervalların – F paylanmasına malik $X_1, \dots, X_N$ təkrarlanan seçiminin *qaydalı statistikaları* – $X_N(S)$-lərdən təşkil olunmuş $(-\infty, X_N(1)]$, $(X_N(1), X_N(2)], \dots, (X_N(N), +\infty)$ intervallarıdır. Bu intervalların uzunluqları speysinqlər (seçimi) adlanır. Əgər F $[0, 1]$-də müntəzəm paylanma funksiyasıdırsa, qeyd olunan intervalların uzunluqları müntəzəm speysinqlər adlanır. G paylanmasına müvafiq n həcmli təkrarlanan seçimin nöqtələrindən (əvvəlkindən asılı olmayan) S. b.-lara daxil olan nöqtələrin sayları – uyğun olaraq $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N+1}$ ədədlərinə blok tezlikləri deyilir. Əgər F kəsilməz paylanma funksiyasıdırsa, onda $\Delta_N(s) = F(X_N(s)) - F(X_N(s-1))$ kəmiyyətləri müntəzəm speysinqlər təşkil edir; əgər, bundan əlavə, $F = G$ olarsa, onda $((N+1)\Delta_N(s), \varkappa_s), \quad s = 1, \dots, N+1$ vektorlarının birgə paylanması

$$\sum_{s=1}^{N+1} \eta_s = N+1, \qquad \sum_{s=1}^{N+1} \zeta_s = n$$

şərtinə görə $(\eta_s, \zeta_s), \quad s = 1, \dots, N+1$ vektorlarının birgə paylanması ilə üst-üstə düşür. Burada (η_s, ζ_s) – ikinci komponentinin marginal paylanması $n(N+n+1)^{-1}$ parametrli həndəsi paylanma olan asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi vektorlar, η_s-in $\zeta_s = z$ şərtinə əsasən şərti paylanması $z+1$ şəkilli parametrlərli və $(N+1)(N+n+1)^{-1}$ miqyaslı qamma – paylanmadır. $F(X_N(0)) = 1 - F(X_N(N+1)) = 0$ olduqda

$$\xi = \sum_{s=1}^{N+1} f_s((N+1)\Delta_N(s), \varkappa_s)$$

şəklində kəmiyyətlər ayrılan statistikalara aid misaldır, burada f_s – Borelə görə həqiqi funksiyalardır. Əgər hər bir s üçün f_s funksiyaları ikinci arqumentdən asılı olmazsa, onda ξ – uzlaşma kriterilərinin statistikaları, əgər f_s birinci arqumentdən asılı olmayan funksiyalar olarsa, onda ξ iki seçimin bircinsliyi kriterilərinin statistikalarıdır.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Кудлаев Э. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 170–74; [3] Рукe R., «J. Roy. Statist. Soc. B.», 1965, v. 27, № 3, p. 395–436.

SEÇİMİ DİSPERSİYA « выборочная дисперсия; sample variance » – *empirik ehtimal paylanmasının* dispersiyasıdır. $X_1, \dots, X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

statistikası seçimi dispersiya və ya $X_1, \dots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanmanın dispersiyası adlanır, burada

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

$a_k = \mathbf{M} X_1^k$, $\mathbf{m}_k = \mathbf{M}(X_1 - a_1)^k$ olsun. Onda $a_4 < \infty$ olduqda, S. d. S_n^2 asimptotik meylsizlik xassəsinə malikdir, çünki

$$\mathbf{M}\, S_n^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{m}_2$$

və tutarlılıq xassəsinə də malikdir, çünki,

$$\mathbf{D} S_n^2 = \frac{\mathbf{m}_4 - \mathbf{m}_2^2}{n} - 2\frac{\mathbf{m}_4 - 2\mathbf{m}_2^2}{n^2} + \frac{\mathbf{m}_4 - 3\mathbf{m}_2^2}{n^3} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \overline{X}_n)^2$$

statistikası da $\mathbf{m}_2$ dispersiyasının meylsiz statistik qiymətidir, yəni $\mathbf{M}\, s_n^2 = \mathbf{m}_2$.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Воинов В. Г., Никулин М. С., Несмещенные оценки и их применения, М., 1989.

SEÇİMİ EHTİMAL FƏZASI « выборочное вероятностное пространство; sample probability space » – bax, *Paylanma*(sı) təsadüfi kəmiyyətin.

SEÇİMİ EKSSES ƏMSALI « выборочный коэффициент эксцесса; sample coefficient of excess » – bax, *Eksses əmsalı*.

SEÇİMİ FUNKSİYA « выборочная функция; sample function », $\zeta(t)=\zeta(t,\omega)$ təsadüfi prosesinin trayektoriyası, realizasiyası – ω qeyd olunduqda T çoxluğunun M çoxluğuna $\zeta(\cdot,\omega)$ inikasıdır, burada $\zeta(t)$ prosesi $t\in T$ olduqda (T hər hansı parametrik çoxluqdur) $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuşdur və $(M, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasından qiymətlər alır. Əgər təsadüfi prosesin sanki bütün S. f.-ları ($\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən) hər hansı bir xassəyə malik olarlarsa, onda prosesin özünün də bu xassəyə malik olduğu deyilir. Məs., T və M topoloji fəzalardırsa və prosesin sanki bütün S. f.-ları kəsilməzdirlərsə, onda proses kəsilməz proses adlanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

SEÇİMİ XARAKTERİSTİKA « выборочная характеристика; sample characteristic » – *empirik ehtimal paylanmasının* funksionalıdır. S. x.-nın köməyilə riyazi statistikanın ideyaları əsasında, təsadüfi kəmiyyətlərin çevrilmələri texnikasından istifadə edərək statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin, hipotezlərin statistik yoxlanılması və s. məsələlərin həlli üçün statistik prosedurlar qurulur. Empirik paylanma funksiyası, seçimi orta və dispersiya, seçimi asimmetriya və eksses əmsalları seçim elementinin ehtimal paylanmasının uyğun xarakteristikalarının dəqiq nöqtəvi statistik qiymətləri olub, S. x.-ya ən sadə misallardır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

SEÇİMİ İNTERVALLAR (ARALIQLAR) « выборочные промежутки; sample intervals » – bax, *Seçimi bloklar*.

SEÇİMİ KƏSİLMƏZLİK (yi) təsadüfi prosesin **« выборочная непрерывность** случайного процесса; **sample continuity** / continuity of sample paths of a stochastic / random process **»** – *seçimi funksiyaların* kəsilməzliyidir. $\{\zeta(t),\ t\in[a,b]\}$ prosesinə stoxastik ekvivalent kəsilməz seçimi funksiyalarlı prosesin varlığı üçün kafi şərtlərdən ən yayılmış hesab olunan Kolmoqorov şərtidir (bax, [1]):

$$\mathbf{M}\left|\zeta(s)-\zeta(t)\right|^{p}\le c\left|s-t\right|^{1+\gamma},\quad p>0,\ \gamma>0,\quad s,t\in[a,b].$$

Kolmoqorov şərti kompakt metrik fəzanın metrik fəzaya təsadüfi inikasları üçün ümumiləşdirilir (bax, [3]). S. k. şərtləri ən çox Qauss prosesləri üçün öyrənilmişdir (bax, [2]). $\mathbb{R}^k$-nın altçoxluqlarında təsadüfi meydanlar üçün S. k. şərtləri daxil etmə teoremlərinin köməyilə alına bilinir (bax, [4]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Беляев Ю. К., в кн.: Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, с. 775–76; [3] Boulicaut P., «Ann. Inst. Fourier», 1974, t. 24, № 2, p. 27–48; [4] Ибрагимов И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 229–49.

SEÇİMİ KORRELOQRAM « выборочная корреллограмма; sample correlogram » – bax, *Korreloqram.*

SEÇİMİ KORRELYASİON FUNKSİYA « выборочная корреляционная функция; sample correlation function », stasionar təsadüfi prosesin seçimi kovariasion funksiyası – $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi prosesinin

$$B(\tau)=\mathbf{M}\zeta(t+\tau)\zeta(t)$$

və ya

$$b(\tau)=\mathbf{M}\left[\zeta(t+\tau)-\mathbf{M}\zeta(t+\tau)\right]\left[\zeta(t)-\mathbf{M}\zeta(t)\right]$$

korrelyasion funksiyasının $0\le t\le T$ və ya $t=1,2,\dots,T$ qiymətlərində bu prosesin bir realizasiyası $x(t)$-nin müşahidə olunmuş qiymətləri üzrə hesablanan sadə statistik qiymətidir. $0\le|\tau|<T$ olarsa, onda seçimi korrelyasion funksiya – $B_T^*(\tau)$ t kəsilməz olduğu halda

$$B_T^*(\tau)=\frac{1}{T}\int_{t=1}^{T-|\tau|}x(t+|\tau|)x(t)\,dt$$

düsturu ilə, t diskret olduğu halda isə

$$B_T^*(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|\tau|}x(t+|\tau|)\,x(t)$$

düsturu ilə verilir. Əgər $b(\tau)$ funksiyası qiymətləndirilirsə və prosesin orta qiyməti $\mathbf{M}\zeta(t)=m$ naməlumdursa, onda S. k. f. $b_T^*(\tau)$

$$b_T^*(\tau)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T-|\tau|}[x(t+|\tau|)-\bar{x}]\,[x(t)-\bar{x}]\,dt,$$

$$\bar{x}=T^{-1}\int_{0}^{T}x(t)\,dt,$$

və uyğun olaraq,

$$b_T^*(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-|\tau|}[x(t+|\tau|)-\bar{x}][x(t)-\bar{x}],$$

$$\bar{x}=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}x(t)$$

düsturları ilə verilir.

$B_T^*(\tau)$ statistik qiyməti $B(\tau)$ üçün meylli, lakin tutarlı statistik qiymətdir, $b_T^*(\tau)$ statistik qiyməti də $b(\tau)$ funksiyası üçün eyni statisik qiymətdir. $|\tau|\ge T$ olduqda τ arqumentinin bütün həqiqi qiymətləri (uyğun olaraq tamqiymətli) üçün $B_T^*(\tau)=0$ və $b_T^*(\tau)=0$ şərtlərinin köməyilə tamamilə təyin olunan $B_T^*(\tau)$ və $b_T^*(\tau)$ funksiyaları τ arqumentinin müsbət müəyyən funksiyalarıdır; bunların Furye çevirməsi $\zeta(t)$ prosesinin periodoqramı və ya $\zeta(t)-\mathbf{M}\zeta(t)$ – spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində (yəni stasionar proseslərin spektral analizində) mühüm rol oynayır.

SEÇİMİ KORRELYASİYA ƏMSALI « выборочный коэффициент корреляции; sample correlation coefficient » – bax, *Korrelyasiya.*

SEÇİMİ KOVARİASİON FUNKSİYA « выборочная ковариационная функция; sample covariance function » – bax, *Seçimi korrelyasion funksiya.*

SEÇİMİ KOVARİASİYA « выборочная ковариация; sample covariance » – bax, *Kovariasiya.*

SEÇİMİ KVANTİL « выборочная квантиль; sample quantile » λ tərtib seçimi kvantil, $0<\lambda<1$, – $[n\lambda]+1$ nömrəli $\{X_i\}_{i=1}^n$ seçimi üzrə qurulmuş *variasion sıranın* elementidir, $[a]$, – a-nın tam hissəsidir. Paylanma funksiyası ümumi F və paylanmasının sıxlıq funksiyası f olan asılı olmayan X_i, $1\le i\le n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_k<1$ tərtib S. k.-lər $n\to\infty$ olduqda asimptotik olaraq k – ölçülü normal qanunla paylanır və bunların uyğun riyazi gözləmələri x_{λ_i}, $1\le i\le k$, kovariasiyaları –

$$\lambda_i(1-\lambda_j)\big/nf(x_{\lambda_i})f(x_{\lambda_j}),\ i\le j$$

kəmiyyətləridir; $F(x_\lambda)=\lambda$. S. k.-dən paylanma funksiyası F-in kvantillərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur.

Əd.: [1] Д э й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979.

SEÇİMİ MEDİAN « выборочная медиана; sample median » – *empirik paylanmanın* medianıdır;

$$\mu_n=X_{(k+1)},\quad \text{əgər}\quad n=2k+1,$$

$$\mu_n=(X_{(k)}+X_{(k+1)})/2,\quad \text{əgər}\quad n=2k\ \text{olarsa},\ k=1,2,...,$$

münasibətlərilə təyin olunan μ_n statistikasıdır, burada $(X_{(i)})_{i=1}^n$ – artan qaydada nizamlanmış $\{X_i\}_{i=1}^n$ təsadüfi kəmiyyətləridir. X_i, $i=1,2,...$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F(x)$ isə X_i-lər üçün ümumi paylanma funksiyası olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{\mu_{2k+1}<x\}=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\int_0^{F(x)}y^k(1-y)^k\,dy,\ k=1,2,....$$

Əgər

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

və $F(m)=1/2$, f isə m nöqtəsi ətrafında müsbət və differensiallanan olarsa, onda μ_n m və $1/4nf^2(m)$ parametrlərli asimptotik normal qanunla paylanan təsadüfi kəmiyyətdir.

Əd.: [1] Д э й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979.

SEÇİMİ METOD « выборочный метод; sampling method » – hər hansı obyektlər çoxluğunun ümumi xassələrinin araşdırılması üçün onun yalnız bir hissəsi olan *seçim* üçün götürülmüş obyektlərin xassələrinin öyrənilməsinə əsaslanan statistik metoddur. S. m.-un riyazi nəzəriyyəsi riyazi statistikanın iki mühüm bölməsinə – sonlu çoxluqdan seçmə nəzəriyyəsi və sonsuz çoxluqdan seçmə nəzəriyyəsi kimi bölmələrə əsaslanır. Sonlu və sonsuz çoxluqlar üçün S. m.-ların fərqi ondan ibarətdir ki, birinci halda S. m., bir qayda olaraq, təsadüfi olmayan, determinik təbiətli obyektlərə (məs., hazır məhsulun verilmiş bir partiyasında qüsurlu məhsulların sayı təsadüfi kəmiyyət deyil: bu naməlum sabit bir ədəddir və o, seçimi verilənlər əsasında təyin olunur) tətbiq olunur. İkinci halda S. m., adətən, təsadüfi obyektlərin xassələrinin öyrənilməsi üçün tətbiq olunur (məs., kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi olan ölçmə xətalarının xassələrinin araşdırılması üçün tətbiq oluna bilər; bu halda ölçmə xətalarından hər biri, nəzəri olaraq, mümkün nəticələrin sonsuz çoxluğunun bir realizasiyası kimi interpretasiya oluna bilər).

Sonlu çoxluqdan seçim və onun nəzəriyyəsi keyfiyyətə nəzarətin əsas statistik metodlarının əsası sayılır, sosioloji araşdırmalarda tez-tez tətbiq olunur. Ehtimal nəzəriyyəsinə görə, seçim təsadüfi qayda ilə aparılarsa, yəni N həcmli ümumi çoxluqdan verilmiş n həcmli mümkün seçimlərin ixtiyari birinin seçilməsi ehtimalı faktiki seçilmiş seçim ehtimalı ilə eyni olur [belə seçimlərin sayı $N!\,n!\,(N-n)!$-a bərabərdir].

Praktikada əksər hallarda qaytarmamaq şərtilə seçim (təkrarsız seçim) istifadə olunur; bu halda, hər bir seçilmiş obyekt ondan sonra seçiləcək obyektlərin araşdırılan çoxluğuna qaytarılmır (belə seçimlər, məs., uduşlu lotereya biletlərinin təyin olunmasında, keyfiyyətə statistik nəzarətdə, demoqrafik araşdırmalarda və s. tətbiq olunur). Qaytarmaq şərtilə seçim (təkrarlı seçim), adətən, yalnız nəzəri araşdırmalarda istifadə olunur (məs., qapalı qabda Braun hərəkətində olan, verilmiş zaman ərzində qabın divarlarına toxunan hissəciklərin sayı qeyd olunduqda). Əgər $n<<N$ olarsa, onda qaytarmaq şərtilə və qaytarmamaq şərtilə seçimlər praktik olaraq ekvivalent nəticələr verir.

S. m.-la çoxluğun araşdırılan xassələri keyfiyyət və kəmiyyət xarakterli ola bilər. Birinci halda seçimi araşdırma ümumi çoxluqdan hansısa əlamətlərə malik obyektlərin sayı M-i təyin etməkdən ibarətdir (məs., statistik nəzarətdə, əksər hallarda, N həcmli partiyada qüsurlu məmulatların sayı M-i təyin etmək tələb olunur). M üçün mN/n nisbəti onun statistik qiyməti kimi götürülür, burada m, – n həcmli seçimdəki verilən əlamətli obyektlərin sayıdır. Kəmiyyət əlamətli halda ümumi çoxluq üçün orta qiymət – $\bar{x}=(x_1+x_2+...+x_N)/N$ kəmiyyətindən istifadə olunur. $\bar{x}$ üçün statisik qiymət

$$\bar{X}=(X_1+X_2+...+X_n)/n$$

seçimi ortası götürülür, burada $X_1, X_2, ..., X_n$ – araşdırılan $x_1, x_2, ..., x_N$ çoxluğundan elə qiymətlərdir ki, onlar n həcmli seçimə daxildirlər. Riyazi nöqteyi – nəzərdən vahidə bərabər olan x_i-lərin sayı M, digər sıfra bərabər olan x_i-lərin sayı $(N-M)$ olarsa, birinci hal ikinci halın xüsusi bir halıdır, bu halda, $\bar{x}=M/N$, $\bar{X}=m/n$ olur.

S. m.-un riyazi nəzəriyyəsində orta qiymətin qiymətləndirilməsi mühüm əhəmiyyətə malikdir, çünki çoxluq daxilində əlamətin dəyişikliklərinin kəmiyyətcə təsvir edilməsinin əsasını orta qiymət üçün təyin edilən statistik qiymət təyin edir, belə ki, dəyişikliklər xarakteristikası kimi

$$\sigma^2=[(x_1-\bar{x})^2+...+(x_N-\bar{x})^2]/N$$

dispersiyası götürülür ki, bu da x_i-lərin onların orta qiyməti $\bar{x}$ ilə yayınmalarının kvadratlarının orta qiymətidir. Keyfiyyət əlaməti yoxlanıldığı halda

$$\sigma^2=M(N-M)/N^2$$

götürülür.

m/n və $\overline{X}$ statistik qiymətlərinin dəqiqliyi haqqında onların disperiyaları –

$$\sigma^2_{m/n} = \mathbf{M}(m/N - M/N)^2 \text{ və } \sigma^2_{\overline{X}} = \mathbf{M}(\overline{X} - \overline{x})^2$$

kəmiyyətlərinə görə mülahizələr edilir, bunlar da sonlu çoxluq üçün dispersiyanın σ^2 terminlərində σ^2/n nisbəti (təkrarlanan elementli seçimlər halında) və $\sigma^2(N-n)/n(N-1)$ kimi ifadə olunurlar (təkrarsız elementli seçimlər halında). Praktiki cəhətdən bir çox maraqlı məsələlərdə $n \geq 30$ qiymətlərində m/n və $\overline{X}$ təsadüfi kəmiyyətləri təqribi olaraq normal qanuna tabe olduqlarından, m/n -in M/N -dən və $\overline{X}$ -nin $\overline{x}$ -dən yayınmaları – uyğun olaraq, mütləq qiymətcə $2\sigma_{m/n}$ və $2\sigma_{\overline{X}}$ dispersiyalarından kiçik olmayan yayınmaları – $n \geq 30$ olduqda orta hesabla təqribən iyirmi haldan birində baş verə bilər.

Verilən ümumi çoxluğun kəmiyyət əlamətinin paylanması haqqında daha mükəmməl informasiyanı bu əlamətin seçim üzrə empirik paylanması əsasında almaq olar.

S o n s u z ç o x l u q d a n s e ç i m. Riyazi statistikada hər hansı bircins olan müşahidələrin (əksər hallarda asılı olmayan) nəticələri s e ç i m adlandırılır və bu termindən bu nəticələrin təkrarlanan və təkrarlanmayan elementlərli seçim anlayışına uyğun gəlmədiyi halda belə istifadə edilir. Məs., ərazidəki küclərin ölçülməsi nəticələri asılı olmayan kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi xətalara məruz olduğundan, bu nəticələr əksər hallarda s o n s u z ç o x l u q d a n s e ç i m kimi adlandırılır. Fərz olunur ki, belə müşahidələri prinsip etibarilə ixtiyari sayda aparmaq olar. Faktiki alınmış nəticələrin çoxluğu mümkün olabilən nəticələrin sonsuz çoxluğundan – *ümumi çoxluq* adlandırılan çoxluqdan seçim hesab edilir. Ümumi çoxluq (rus. генеральная совокупность) anlayışı məntiqi nöqteyi – nəzərdən qüsursuz və zəruri deyildir. Məsələlərin praktiki həlli üçün ümumi çoxluğun özündən deyil, bu çoxluğa uyğun götürülən bu və ya digər xarakteristikalardan istifadə olunur. Bu xarakteristikalar ehtimal nöqteyi – nəzərindən hər hansı ehtimal paylanmasının ədədi və ya funksional xarakteristikalarıdır, s e ç i m i n e l e m e n t l ə r i isə t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t l ə r d i r və bunlar bu ehtimal paylanmasına tabedirlər. Belə yanaşma seçimi statistik qiymətlərə *statistik qiymətlərin* ümumi nəzəriyyəsini tətbiq etməyə imkan verir. Buna görə də, məs., müşahidələr üzərində işlənilmənin ehtimali nəzəriyyəsində sonsuz ümumi çoxluq anlayışı naməlum parametrlərli ehtimal paylanması anlayışı ilə əvəz olunur. Müşahidələrin nəticələri bu paylanmaya tabe olan təsadüfi kəmiyyətlərin eksperimental müşahidə qiymətləri kimi interpretasiya olunur. Müşahidəolunanlar üzərində işlənilmənin məqsədi müşahidə nəticələri üzrə, bu və ya digər mənada, paylanmanın naməlum parametrləri üçün optimal statistik qiymətlər təyin etməkdən ibarətdir.

Yuxarıda obyektlərin hər hansı bir çoxluğunun seçim üzrə araşdırılmasından bəhs olundu. Lakin S. m.-un praktiki tətbiqi əksər hallarda bir çox bircins çoxluqların (məs., hazır məhsulun bir neçə partiyasında qüsurlu məmulatların hissəsinin qiymətləndirilməsində) üzərində aparılır. Bu halda araşdırılan obyekt bir M ədədi deyil, bir neçə naməlum $M_1, M_2, \ldots$ ədədləri olur.

Məs., hazır məhsulun araşdırılan bütün partiyalarında N sayda məmulat vardır, belə ki, $M_1, M_2, \ldots$ – bu partiyalardakı qüsurlu məmulatların sayları, $m_1, m_2, \ldots, -$ n həcmli seçmələrdə aşkar olunmuş qüsurlu məmulatların uyğun saylarıdır. Q ü s u r s u z q ə b u l e t m ə adlandırılan şərtə görə r saylı partiya istehlakçıya $m_i = 0$ olduğu halda ötürülür, əks halda bu partiya qüsurlu sayılır. Əgər məmulatlara nəzarət onların məhvinə səbəb olursa, onda istehlakçı ya $R_i = 0$ həcmli ($m_i > 0$ olduqda) partiya qəbul edir (yəni heç nə qəbul etmir) və ya qüsurlu məmulatlar sayı $D_i = M_i$ olan $R_i = N - n$ həcmli partiya qəbul edir ($m_i = 0$ olduqda), belə ki, $R_1, R_2, \ldots$ məlum olur (deməli, onların cəmi də), $D_1 + D_2 + \ldots$ cəmi isə məlum olmur.

$$(D_1 + D_2 + \ldots)/(R_1 + R_2 + \ldots)$$

nisbəti ö t ü r ü l m ü ş b r a k (zay məmulat) payı, onun riyazi gözləməsi q ö t ü r ü l m ü ş b r a k ı n o r t a p a y ı adlanır. Bu halda riyazi statistikanın məsələsi S. m.-un tətbiqi nəticəsində qeyd olunan $R_1, R_2, \ldots$ qiymətləri üzrə q -nün qiymətləndirilməsindən ibarət olur. Əgər $M_1, M_2, \ldots$ qiymətləri paylanma qanunu məlum və $\mathbf{P}\{M_i = r\} = p_r$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin realizasiyaları kimi interpretasiya olunarsa, onda Beyes düsturuna əsasən, qəbul olunmuş partiyalardakı qüsurlu məmulatların orta qiymətinin statistik qiyməti

$$\widetilde{D} = \mathbf{M}\{M \mid m = 0\} = \left(\sum_{r=1}^{N-r} r \, \frac{C^n_{N-r}}{C^n_N} \, p_r \right) \Big/ \mathbf{P}\{m = 0\}$$

olur, belə ki,

$$\widetilde{D} \leq [(N-n)\mathbf{P}\{m=1\}]/[n\,\mathbf{P}\{m=0\}],$$

burada

$$\mathbf{P}\{m=k\} = \sum_{r=0}^{N-n} \frac{C^k_r C^n_{N-r}}{C^n_N} p_r, \quad k = 0,1,\ldots,n\,.$$

Buna görə də, qəbul olunmuş partiyalarda ötürülmüş brakın orta payının statistik qiyməti $\widetilde{q} = \widetilde{D}/(N-n)$

$$\widetilde{q} \leq \mathbf{P}\{m=1\}/n\;\mathbf{P}\{m=0\} \approx s_1/n s_0$$

bərabərsizliyini ödəyir, burada s_0 – qəbul olunmuş partiyaların sayı, s_1 – yalnız bir ədəd qüsurlu məmulat aşkar olunmuş seçimlərdə brak sayılmış partiyaların sayıdır.

Ədb.: [1] Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В., С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (Общая часть), М., 1955, гл. 5; [2] Б е л я е в Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

SEÇİMİ MOMENT « выборочный момент; sample moment » s e ç i m i n m o m e n t i – bax, *Empirik paylanma.*

SEÇİMİ NÖQTƏ « выборочная точка; sample point » – bax, *Statistik model*.

SEÇİMİ ORTA « выборочное среднее; sample mean » – *empirik ehtimal paylanmasının* seçim üzrə orta qiymətidir. $X_1, \ldots, X_n$ – asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Onda

$$\overline{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$$

statistikasına s e ç i m i o r t a və ya $X_1, \ldots, X_n$ seçimi üzrə qurulmuş empirik ehtimal paylanmasının r i y a z i g ö z l ə m ə s i

deyilir. Əgər X_1 təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi – $a = \mathbf{M}X_1$ varsa, onda $\overline{X}_n$ statistikası $\mathbf{M}\overline{X}_n = a$ üçün meylsiz statistik qiymətdir, belə ki, Xinçin teoreminə görə ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|\overline{X}_n - a| \geq \varepsilon\} \to 0$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

SEÇİMİ PAYLANMA « выборочное распределение; sample distribution » – bax, *Empirik paylanma.*

SEÇİMİ REQRESSİYA ƏMSALI « выборочный коэффициент регрессии; sample reqression coefficient » – bax, *Reqression analiz.*

SEÇİMİ STATİSTİK ARAŞDIRMA « выборочное статистическое обследование; sample survey » – yalnız *seçim* obyektlərinə aid verilənlər əsasında, obyektlərin ümumi çoxluğunun xarakteristikalarını təyin etmək məqsədilə araşdırmadır. Araşdırılan xarakteristikalar kimi verilmiş xassələrə malik obyektlərin hissəsinə, orta qiymət və obyektlərin əsas kəmiyyət parametrlərinin səpələnmə göstəricilərinə (məs., dispersiya) baxılır.

Olduqca diqqətlə planlanmış S. s. a., bəzi hallarda, öyrənilən hadisə və ya proseslər haqqında obyektiv kəmiyyət informasiyasının alınmasında yeganə vasitədir. Məs., fasiləsiz işləmə müddətinin öyrənilməsi (bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*) məmulatların sıradan çıxmasına (imtinasına) qədər aparılan sınaqlarla bağlıdır. Belə sınaqların dağıdıcı xarakteri bütün sınaqların aparılması halını istisna edir. İstehsal prosesində pozuntuların (dayanmaların, gecikmələrin) aşkar olunması məqsədilə birbaşa araşdırma aparmaq faktiki vəziyyətin qiymətləndirilməsində mühüm təhriflərə səbəb ola bilər. S. s. a. sənayedə, kənd təsərrüfatında, təbabətdə, sosiologiyada və s. geniş tətbiq olunur.

Uyğun statistik modellərin qurulmasının əsasını araşdırılan $\mathfrak{P} = (O_1, \ldots, O_N)$ obyektlər toplusu anlayışı təşkil edir. Hər bir O_i obyekti ya hər hansı X_i parametrlərinin bir qiyməti ilə və ya $X_i Y_i$, $i = 1, \ldots, n$ parametrlərinin qiymətləri toplusu ilə xarakterizə olunur.

Ən sadə halda X_i iki qiymət alır; bu hal alternativ əlamət olduğu hal kimi interpretasiya olunur. Məhsulun keyfiyyətinə nəzarətdə O_i obyekti yararlı məmulat olarsa, $X_i = 0$, əks halda $X_i = 1$ götürülür.

S. s. a.-nın planlaşdırılmasında $\mathfrak{P}$ çoxluğu *seçimi vahidlər* adlanan altçoxluqlara ayrılır. $M_j \subseteq \mathfrak{P}$, $M_j \cap M_k = \varnothing$, $j \neq k$, $j = 1, \ldots, N$ şərtlərini ödəyən seçimi vahidlər çoxluğu $(M_1, \ldots, M_M)$ S. s. a.-nın *əsası* adlanır. Əgər seçimi vahid M_i-də obyektlərin sayı birdən çox olarsa, onda belə M_i *yuvalı seçimi vahid* adlanır.

Şəhər əhalisinin S. s. a.-sında evlər, mənzillər, ailələr yuvalı seçimi vahidlərə misallardır. Kənd təsərrüfatı ilə bağlı S. s. a.-da, ziyanverici həşəratlar sayının təyin olunmasında, seçimi vahid kimi tərəfinin uzunluğu $1m$-ə bərabər kvadrat sahə götürmək olar.

Araşdırılan ümumi çoxluğun xarakteristikaları haqqında obyektiv nəticələr, obyektlərin və ya seçimi vahidlərin ehtimali metodlardan istifadə olunaraq seçilməsi ilə alınır.

Fərz olunur ki, S. s. a.-nın statistik modelində seçimi vahidlər obyektlərdir ($M_i = O_i$, $M = N$) . Bu halda n həcmli seçim kimi araşdırma məqsədilə seçilmiş $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ obyektlər altçoxluğu anlaşılır. Araşdırma nəticəsində seçimi təşkil edən bütün obyektlərin parametrlərinin qiymətləri qeyd olunur: X_{i_1}, Y_{i_2} – seçim daxil edilmiş 1-ci obyektin parametrlərinin qiymətləri, X_{i_1}, X_{i_2}, – 2-ci obyekt üçün analoji qiymətlər və s.

S. s. a.-nın mühüm xarakteristikaları: $s = (i_1, \ldots, i_n)$ seçiminə O_i obyektlərinin daxilolunma ehtimalları π_i-lər; O_i, O_j obyektlər cütünün s seçiminə daxilolunma ehtimalları π_{ij}-lərdir. n həcmli təsadüfi təkrarsız seçim üçün i-nin bütün qiymətlərində $\pi_i = n/N$, bütün $i \neq j$, i, j qiymətlərində isə $\pi_{ij} = n(n-1)/N(N-1)$ olur. Əgər seçimdəki obyektlər p ehtimalı ilə seçilirsə, belə binomial seçim üçün ixtiyari i qiymətində $\pi_i = p$ və ixtiyari $i \neq j$, i, j qiymətlərində $\pi_{ij} = p^2$ olur. Əgər seçim siyahı üzrə, sistematik seçmə yolu ilə, hər h obyektdən bir və ilk h sayda obyekt arasında O_{i_1} obyektinin eyniehtimalla seçilməsi ilə təşkil olunarsa, onda bütün i qiymətlərində $\pi_i = 1/h$, $|i-j| \neq h$, $i \neq j$ olduqda $\pi_{ij} = 0$; $|i-j| = h$ olduqda isə $\pi_{ij} = 1/h$ olur.

X_i xarakteristikasının

$$\overline{X} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

düsturu ilə verilən orta qiymətinin statistik qiyməti üçün

$$\overline{X}^{\wedge} = N^{-1} \sum_{i_k \in S} X_{i_k} / \pi_{i_k} \qquad (*)$$

statistik qiymətindən istifadə etmək olar, burada cəmləmə seçimi təşkil edən obyektlərin nömrələri üzrə aparılır.

Əgər $i = 1, \ldots, N$ qiymətlərinin hamısı üçün $\pi_i > 0$ olarsa, (*) statistik qiyməti meylsiz statistik qiymətdir. Bütün i, j qiymətlərində $\pi_{ij} > 0$ olarsa, (*) statistik qiymətinin dəqiqliyi onun dispersiyasının meylsiz statistik qiymətini –

$$N^{-2} \left\{ \sum_{i_k \in S} (X_{i_k}^2 / \pi_{i_k})(1/\pi_k - 1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i_k \neq i_l, \\ i_k, i_l \in S}} (X_{i_k} X_{i_l} / \pi_{i_k i_l})(\pi_{i_k i_l} / \pi_{i_k i_l} - 1) \right\}$$

ifadəsi ilə xarakterizə olunur.

Seçimə daxilolunma ehtimalları π_i-lərin bərabər olmadıqları bəzi məsələlərdə S. s. a.-nın istifadə olunması statistik qiymətlərin dəqiqliyini olduqca çoxaltmağa səbəb ola bilir.

Araşdırılan $\mathfrak{P}$ çoxluğu haqqında məlumatlar əsasında bu çoxluq $\mathfrak{P}$-nin müəyyən bircinslik xassələrinə malik altçoxluqlara – l a y l a r a bölünür. Məs., demoqrafiyada laylar cinsi əlamətə, yaşa və s. görə təşkil olunur. Hər bir laydan olan seçimlərin həcmi layı təşkil edən obyektlərin sayından çox asılı ola bilər.

Əgər $A, B, \ldots$ obyektlərinin əlamətlərinə görə $\mathfrak{P}$-nin laylara bölgüsu aparılırsa, bu əlamətlərə təsiredici faktorlar kimi baxılır və bunların qiymətləri A_i, B_j-lərə faktorların səviyyəsi kimi baxılırsa, onda laylarda aparılan seçim bir çox xüsusiyyətlərinə görə dispersion analizin sxemlərinə uyğun olur. Bu halda araşdırılan parametr, məs., O_i obyekti üçün Y_i parametri xətti statistik modelə müvafiq təsir nəticəsi kimi interpretasiya olunur. S. s. a. planlaşdırılarkən *latın düzbucaqlılarından* (natamam *latın kvadratlarından*) istifadə olunur.

Xarakteristikaları müşahidə müddətində asılı ümumi çoxluqların S. s. a. üçün xüsusi planlandırılmış c a r i n ə z a r ə t d ə n istifadə olunur. Cari nəzarətin aparıldığı anlar nöqtəvi təsadüfi prosesin realizasiyalarına uyğun götürülür.

S. s. a. prosesində ilkin araşdırma planında bəzi pozuntular, verilənlərin (məlumatların) bəzi hissəsinin itməsi kimi hallar mümkündür. Məs., binanın sakinlərinin seçimi araşdırılmasında onların bir hissəsi mənzillərində olmaya bilər, suallara düzgün olmayan cavablar verilə bilinər. Pozuntular statistik nəticələrin təhriflərinə səbəb olur. Əgər S. s. a. nəticəsində qəbul edilən düzgün olmayan qərarlar böyük itkilərə səbəb olarsa, bu hallarda S. s. a. üçün müxtəlif planların seçimi vahidlər və seçimlərin təşkili üçün müxtəlif əsaslar istifadə olunur.

S. s. a. metodlarından təsir effektivliyinin obyektiv qiymətləndirilməsində istifadə olunur. Məs., yağıntı miqdarını artırmaq məqsədilə havaya təsirin müşahidə olunduğu eksperimentin planlaşdırılmasında istifadə edilən randomizasiya metodu belələrindəndir.

Əd.: [1] Б е л я е в Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [2] Д ж е с с е н Р. Д., Методы статистических обследований, пер. с англ., М., 1985; [3] Й е й т с Ф., Выборочный метод в переписях и обследованиях, пер. с англ., М., 1965; [4] Физика облаков и активных воздействий, М., 1981 (Тр. ин.-та прикл. геофизики, в. 46).

SEÇİMİ TEZLİK « выборочная частота; sample frequency » – n sayda asılı olmayan sınaqlarda A hadisəsinin baş vermə sayı X-in n-ə nisbətidir. A hadisəsinin hər bir sınaqda baş vermə ehtimalı eyni p ədədinə bərabər olarsa, onda Bernulli teoreminə əsasən, $X/n \sim p$ münasibəti n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində ödənilir. $A_1, \ldots, A_N$ – tam qrup əmələ gətirən uyuşmayan hadisələr, X_k, – n sayda asılı olmayan təkrarlanan sınaqlarda A_k hadisəsinin baş vermə sayı, $p_k > 0$ isə A_k hadisəsinin hər bir sınaqda baş vermə ehtimalı olsun. Onda $(X_1, \ldots, X_N)$ vektorunun paylanması elə $(Y_1, \ldots, Y_N)$ vektorunun şərti birgə paylanması ilə üst-üstə düşür ki, onun koordinatlarının cəmi n-ə bərabərdir və $Y_1, \ldots, Y_N$ – uyğun olaraq, $n\,p_k$ parametrlərli Puasson qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Buna görə də, $Y = \sum_{k=1}^{N} f_k(X_k)$ kəmiyyəti, f_k ixtiyari Borel funksiyaları olduğu halda, ayrılışı olan statistika olur.

Əd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 6 изд., М., 1988; [2] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [3] Ш и р я е в А. Н., Вероятность, М., 1980.

SEÇİMİ VAHİD « выборочная единица; sample unit » – bax, *Seçimi statistik araşdırma.*

SEÇİMİ VERİLƏNLƏRİN ÇƏKİLƏNDİRİLMƏSİ « выборочных данных взвешивание; sample data weighting » – statistik informasiyanın eynidəyərli olmamasını nəzərə alan metoddur. Məs., əgər stoxastik modelin (vektor halında) əmsalının qiyməti zamana görə dəyişirsə (proses qeyri – stasionardır), yeni müşahidələr köhnə müşahidələrdən dəyərli ola bilər. Kvadratik itki funksiyası məlum olduğu halda əmsalı qiymətləndirmək üçün

$$Q = \sum_{t=1}^{T} \omega_t (y_t - \hat{y}_t)^2$$

funksionalının minimallığı tələb olunur, burada $y_t, \hat{y}_t$ – uyğun olaraq, müşahidə olunan və model qiymətləri, ω_t – müşahidələrdə olan, informasiya dəyərini xarakterizə edən və ç ə k i adlandırılan, mənfi olmayan konstantlardır (çəki böyük olduqda dəyər də çox olur). S. v. ç. müşahidələrin qeyri – bərabər dəqiqliyi halında reqression analizdə də tətbiq olunur. Beləliklə, əgər y_t müşahidələri σ_t^2 dispersiyalarına malik olarsa, onda $\omega_t = \sigma_t^{-2}$ olduqda Q funksionalının minimizasiyası reqression modelin əmsalının ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlərinin alınmasını təmin edir.

Əd.: [1] В у ч к о в И., Б о я д ж и е в а Л., С о л а к о в Е., Прикладной линейный регрессионный анализ, пер. с болг., М., 1987.

SEÇİMİN HƏCMİ « объем выборки; sample size » – bax, *Seçim.*

SEÇKİ MƏSƏLƏSİ « баллатировки задача; ballot problem » – seçki ərəfəsində namizəd A-nın namizəd B-dən həmişə irəlidə olması ehtimalının təyin edilməsi haqqında məsələdir, bu şərtlə ki, A-nın topladığı səslərin ümumi sayı a, B-nin topladığı səslərin ümumi sayı b-yə bərabərdir, verilən səslər ardıcıl olaraq qeydə alınır və $a > b$. Bülletenlərin bütün mümkün ardıcıllıqlarının bərabərehtimallı olduğu fərz olunur. S. m.-nin həlli J. Bertran tərəfindən tapılmışdır (bax, [1]): bu ehtimal $p = (a-b)/(a+b)$ nisbəti ilə təyin olunur. Bu nəticə əksər hallarda «seçki haqqında teorem» də adlandırılır və o, qumar oyunları ilə bağlı olaraq A. Muavrın (A. Moivre) 1708-də aldığı nəticə ilə ekvivalentdir. *Təsadüfi dolaşma* nəzəriyyəsi terminologiyasında S. m. – sıfır nöqtəsindən hərəkətini başlayan hissəciyin trayektoriyasının $a+b$ sayda sıçrayışdan sonra $a-b$ nöqtəsində olması, $1, 2, \ldots, a+b$ anlarında bu trayektoriyanın yalnız müsbət koordinatlı nöqtələrdən keçməsi ehtimalının hesablanması məsələsinə ekvivalentdir (hissəciyin $1/2$ ehtimalı ilə hər addımda sağa və ya sola vahid uzunluqla sıçrayışla hərəkət etdiyi qəbul olunur).

Seçki haqqında teoremlərin müxtəlif ümumiləşmələri bir sıra hallarda cəmlər ardıcıllıqlarının maksimumunun və digər sərhəd funksionallarının paylanmalarının kombinatorika metodlarının köməyi ilə tapılmasına imkan yaradır (bax, [2]).

Əd.: [1] B e r t r a n d J., «C. r. Acad. sci. Paris», 1887, t. 105, p. 369; [2] Т а к а ч Л., Комбинаторные методы в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

SEÇMƏ METODU « отбора метод; rejection method » – bax, *Modelləşdirilməsi*, *təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

SEHRLİ KVADRAT « магический квадрат; magic square » – bax, *Kombinator məsələlər* klassik.

SELEKTOR « селектор; selector » – bax, *Riyazi gözləmə*(si) təsadüfi çoxluğun, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

SEMİ – ADDİTİVLİK « полуаддитивность; semi – additivy » – bax, *Ehtimal metrikası*; requlyarlıq.

SEMİ – AXIN « полупоток; semi – flow » – ölçülən X fəzasının ölçülən çevirmələrinin elə $\{\{T^t\},\ t \geq 0\}$ ailəsidir ki, bu çevirmələr μ ölçünü dəyişdirmir və

1) $T^0 x = x$;

2) $T^{t+s}x = T^t T^s x$ bərabərliyi bütün $t,\ s,\ x$-lər üçün ödənilir.

Əgər X-də ixtiyari ölçülən $f(x)$ funksiyası üçün $f(T^t x)$ funksiyası $(t,\ x)$-in funksiyası kimi ölçülən funksiya olarsa, onda belə S. - a. ölçülən semi – axın adlanır. Əgər $U^t : f(x) \to f(T^t x)$ çevirmələri $L^2(X, \mu)$-də operatorların zəif kəsilməz semi – qrupunu təşkil edərsə, onda S. – a. kəsilməz semi – axın adlanır.

SEMİ – CƏBRİ, ÇOXLUQLARIN « полуалгебра множеств; semi – algebra of sets » – bax, *Ölçü.*

SEMİ – DAİRƏVİ QANUN « полукруговой закон; semi – circular law » – elementləri asılı olmayan $\xi_{ij},\ i \geq j$ olan simmetrik təsadüfi $\Xi_n = \left\| \xi_{ij} \right\|$ matrislərinin normalanmış *spektral funksiyaları* $\mu_n(x)$ üçün limit qanunudur. Fərz olunur ki, simmetrik həqiqi Ξ matrislərinin elementləri $\xi_{ij},\ i \geq j,$ $i,\ j = 1, \ldots, n$, – n-in hər bir $n = 1, 2, \ldots$ qiymətində asılı olmayan və eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi elementlərdir və

$$\mathbf{M}\xi_{ij} = 0,\ \ \mathbf{D}\xi_{ij} = \sigma^2 n^{-1},\ \ 0 < \sigma^2 < \infty,$$

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} F(\lambda_k - x),$$

burada λ_k, – Ξ_Λ matrisinin məxsusi qiymətləridir, əgər $y < 0$ olarsa, $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda isə $F(y) = 0$. Onda aşağıdakı kimi ifadə olunan semi – dairəvi qanun doğrudur: S. - d. q.-un paylanması –

$$\mu(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \int_D \sqrt{4\sigma^2 - y^2}\ dy,$$

$$D = \{(-\infty,\ x) \cap y : |y| < 2\sigma\}$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = \mu(x)$$

münasibətinin sanki yəqin ödənilməsi üçün, ixtiyari $\tau > 0$ qiymətində

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{M}\left|\xi_{ij}\right|^2 F\left(\tau - \left|\xi_{ij}\right|\right) = 0$$

Lindeberliq şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Əd.: [1] Гирко В. Л., Случайные матрицы, К., 1975.

SEMİDAYANIQLI PAYLANMA qrupda « полуустойчивое распределение на группе; semistable distribution on a group » – bax, *Dayanıqlı paylanma* qrupda.

SEMİDAYANIQLI PROSES « полуустойчивый процесс; semistable process » – bax, *Avtomodel proses.*

SEMİ – DETERMİNİSTİK KANAL « полудетерминированный канал; semi – deterministic channel » – informasiyanı bir ötürücüdən bir neçə qəbulediciyə ötürən və kanalarından biri determinik olan çoxkomponentli diskret kanaldır.

Bax, *Genişyayımlı kanal.*

SEMİ – HALQASI, ÇOXLUQLARIN « полукольцо множеств; semi – ring of sets » – bax, *Ölçü.*

SEMİ – İNTERKVARTİL GENİŞLİK « семиинтерквартильная широта; semi – interquantile range » – bax, *Kvantil*, *Kvartil.*

SEMİ – İNVARİANT « семиинвариант; semi – invariant / cumulant », kumulyant, – *təsadüfi kəmiyyətin* və ya *təsadüfi vektorun* moment anlayışına yaxın və uyğun xarakteristik funksiyanın loqarifminin Teylor sırasına ayrılışı ilə bağlı olan ədədi xarakteristikasıdır.

$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$, – m – ölçülü təsadüfi vektor, $f(t_1, \ldots, t_m)$ – onun xarakteristik funksiyası olsun. Əgər $\mathbf{M}|X_i|^n < \infty$, $i = 1, \ldots, m$, $n \geq 1$ olarsa, onda $\ln f(t_1, \ldots, t_m)$ loqarifminin (sıfır nöqtəsində sıfra bərabər «hissə») $t_1 = \ldots = t_m = 0$ nöqtəsinin hər hansı ətrafında $\leq n$ olan bütün tərtib kəsilməz törəmələri vardır.

$$\mathbf{s}^{k_1, \ldots, k_m} = (-i)^{k_1 + \ldots + k_m} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_m}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_m^{k_m}} \ln f(t_1, \ldots, t_m)\Big|_{t=0},$$

$$k_i \geq 0,\ \ k_1 + \ldots + k_m \leq n$$

kəmiyyətlərinə ($\ln f(t_1, \ldots, t_m)$-in Teylor sırasına ayrılışı əmsalları) X təsadüfi vektorunun $k = k_1 + \ldots + k_m$ tərtib semi – invariantları deyilir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin (vektorların) cəmlənməsində uyğun S.-ları cəmlənir:

$$\mathbf{s}_{X+Y}^{k_1, \ldots, k_m} = \mathbf{s}_X^{k_1, \ldots, k_m} + \mathbf{s}_Y^{k_1, \ldots, k_m}.$$

S. və təsadüfi vektorun momentləri sadə münasibətlərlə birbirilə ifadə olunur. Məs., birölçülü halda $(m = 1)$

$$\mathbf{M}\, X^n = \sum_{r=0}^{n} \sum \left(\frac{\mathbf{s}_X^{l_i}}{l_i!}\right)^{j_1} \ldots \left(\frac{\mathbf{s}_X^{l_r}}{l_r!}\right)^{j_r} \frac{n!}{j_1! \ldots j_r!},$$

burada daxildəki cəm bütün mənfi olmayan elə j və l-lər üzrə aparılır ki, bunlar $l_1 j_1 + \ldots + l_r j_r = m$ şərtini ödəsinlər.

S. momentlərlə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\mathbf{s}_X^n = n! \sum_{r=0}^{n} \sum \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{j_1! \dots j_r!} \left[\frac{\mathbf{M}X^{l_1}}{l_1!}\right]^{j_1} \dots \left[\frac{\mathbf{M}X^{l_r}}{l_r!}\right]^{j_r},$$

burada daxildəki cəmləmə bütün mənfi olmayan elə i və j -lər üzrə aparılır ki, bunlar

$$l_1 j_1 + \dots + l_r j_r = n, \quad j_1 + \dots + j_r = j,$$

şərtlərini ödəsinlər.

Əd.: [1] Прохоров Ю. Н., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

SEMİ – İNVARİANT SPEKTRAL SIXLIQ « семиинвариантная спектральная плотность; semi – invariant spectral density » – bax, *Spektral semi – invariant*.

SEMİ – KƏSİLMƏZ BİRCİNS TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı **« полунепрерывный однородный случайный процесс** с независимыми приращениями; **semicontinuous homogeneous random process** with independent increments **»** – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

SEMİ – KƏSİLMƏZ YUXARIDAN MODEL « полунепрерывная сверху модель; upper semi – continuous model » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

SEMİ – KƏSİLMƏZ YUXARIDAN (AŞAĞIDAN) SONSUZ BÖLÜNƏN PROSES « полунепрерывный сверху (снизу) безгранично делимый процесс; upper (lower) semicontinuous infinitely divisible process » – bax, *Sonsuz bölünən proses*.

***SEMİ – QRUP « полугруппа; semi – group »** –

$$\mathfrak{Q}(s+t) = \mathfrak{Q}(s)\,\mathfrak{Q}(t) \qquad (1)$$

şərtini ödəyən operatorlar ailəsidir ($\mathfrak{Q}(t)$ – ümumi halda tərs operatora malik olmadığından, o, qrup deyildir).

Fərz olunur ki, Q_t

$$Q_s * Q_t = Q_{s+t} \qquad (2)$$

şərtini ödəyən $\mathbb{R}^1$-də paylanmalar ailəsidir, burada Q_t, – $t > 0$ parametrindən asılı ehtimal *paylanmasıdır*. $\mathfrak{Q}(t)$ isə uyğun operatorlardır, yəni

$$\mathfrak{Q}(t)\,u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)\; Q_t\{dy\}. \qquad (3)$$

Onda (2) kompozisiya tənliyi (1)-ə ekvivalentdir.

S. operatorları ixtiyari təbiətli ola bildiyindən $\mathfrak{Q}(t)$ ilə ehtimal paylanmalarının əlaqəsi ilə yaranmış «kompozisiyalı semi – qrup» termini aşağıdakı kimi təyin olunur.

(1) münasibətini ödəyən, ehtimal paylanmaları ilə bağlı $\{\mathfrak{Q}(t)\}$ ($t > 0$) operatorlar ailəsinə kompozisiyalı semi–qrup deyilir. Operatorların təyin olunma oblastı kimi $C_0[-\infty, \infty]$ götürmək olar. $\mathfrak{Q}(t)$ operatorları keçid operatorlarıdır, yəni $0 \le u \le 1$ olarsa, $0 \le \mathfrak{Q}(t)\,u \le 1$ olur və həmçinin, $\mathfrak{Q}(t)\,1 = 1$.

Əgər

$$\mathfrak{Q}(h) \to \mathbf{1}, \; h \to 0+$$

olarsa, kompozisiyalı $\{\mathfrak{Q}(h)\}$ semiqrupu kəsilməz semiqrup adlanır, burada $\mathbf{1}$ – eynilik operatorudur. Bu halda $\mathfrak{Q}(0) = \mathbf{1}$ olduğu fərz edilir.

(1) və $\|\mathfrak{Q}(t)\,u\| \le \|u\|$ bərabərsizliyindən $h > 0$ olduqda

$$\|\mathfrak{Q}(t+h)\,u - \mathfrak{Q}(t)\,u\| \le \|\mathfrak{Q}(h)\,u - u\| \qquad (4)$$

olduğu alınır. h -ın kifayət dərəcədə kiçik qiymətində (4)-ün sol tərəfi ixtiyari t üçün $< \varepsilon$ olur. Bu mənada kompozisiyalı semi – qrup müntəzəm kəsilməz semi–qrup adlanır.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1984.

SEMİ – MARKOV PROSESİ « полумарковский процесс; semi – Markov process », qiymətləri ölçülən $(X, \mathscr{X})$ vəziyyətlər fəzasından olan –

$$\upsilon(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$$

sayıcı prosesi vasitəsilə konstruktiv surətdə $\{\varkappa_n, \theta_n, n \ge 0\}$ Markov bərpa prosesi ilə verilən $\zeta(t) = \varkappa_{\upsilon(t)}$ şəklində *təsadüfi prosesdir*; $\varkappa_n = x(\tau_n)$ – daxil olunmuş Markov zənciri, τ_n – bərpa anları (vəziyyətlərin dəyişmə anları), θ_n – S. – M. p.-nin vəziyyətlərdə qaldığı müddətlərdir.

Hər bir sonlu intervalda sonlu sayda bərpaları olan requlyar S. – M. p.-ləri konstruktiv verilir.

S. – M. p. analitik olaraq ikinci komponentinə görə bircins, ikiölçülü bircins $\{\varkappa_n, \theta_n, n \ge 0\}$ Markov zəncirinin keçid ehtimallarını təyin edən

$$Q(x, A, t) = \mathbf{P}\{\varkappa_{n+1} \in A, \; \theta_{n+1} \le t \,|\, \varkappa_n = x\}, \quad x \in X, \; A \in \mathscr{X}$$

semi – Markov nüvəsi ilə verilir. Məs.,

$$Q(x, A, +\infty) = P(x, A) = \mathbf{P}\{\varkappa_{n+1} \in A \,|\, \varkappa_n = x\}$$

daxil olunmuş Markov zəncirinin keçid ehtimallarıdır;

$$Q(x, X, t) = G_x(t) = \mathbf{P}\{\theta_{n+1} \le t \,|\, \varkappa_n = x\}$$

vəziyyətlərdə qalma müddətlərinin paylanma funksiyalarıdır.

Əgər $Q(x, X, t) = P(x, A)\,G_x(t)$ olarsa, onda Markov bərpa prosesinin komponentləri $\varkappa_n$ və θ_n şərti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Ümumi halda

$$Q(x, dy, t) = P(x, dy)\,G_{xy}(t),$$

$$G_{xy}(t) = \mathbf{P}\{\theta_{n+1} \le t \,|\, \varkappa_n = x, \varkappa_{n+1} = y\}.$$

Semi – Markov nüvəsi

$$Q(x, A, t) = P(x, A)(1 - e^{-q(x)t})$$

olan sıçrayışvari (pilləvari) Markov prosesi S. – M. p.-dir. S. – M. p.-ni xəttivari Markov prosesi $(\varkappa(t),\ \gamma(t);\ t \geq 0)$ prosesinin komponenti $\gamma(t)$ vasitəsilə də vermək olar; $\gamma(t) = \inf\{s \geq t : \varkappa(s) \neq \varkappa(t)\}$ – t – çatım kəmiyyəti (rus. величина перескока) və ya vəziyyətdə olma üçün qalan müddətdir. S. – M. p. nəzəriyyəsinin analitik aparatı

$$u(t, x) - \int_0^t \int_X Q(x, dy, ds)\, u(t-s, y) = \varphi(t, x)$$

Markov bərpa tənliyinə əsaslanmışdır, bu tənliyin sağ hissəsindəki $\varphi(t, x)$-in məlum olduğu fərz olunur. Məs., S. – M. p.-nin $F(t, x, A) = \mathbf{P}\{\varkappa(t) \in A \mid \varkappa(0) = x\}$ keçid ehtimalları $\varphi(t, x) = \mathbf{I}_A(x)(1 - G_x(t))$ ilə Markov bərpa prosesini ödəyirlər.

S. – M. p. nəzəriyyəsinin əsas problemləri: requlyarlıq şərtləri, erqodiklik, Markov bərpa tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi, semi – Markov nüvəsi seriyalar sxemində seriyaların parametrindən asılı olduğu halda, $t \to \infty$ olduqda həllin limit ifadəsinin müəyyənləşdirilməsidir. S. – M. p.-ləri diskret müdaxiləli proseslərin birindən digərinə keçən proseslər, təsadüfi evolyusiyalar halında istifadə olunur.

S. – M. p., bir çox tətbiqi hallarda, vəziyyətləri sıçrayışlarla (ani olaraq) dəyişən stoxastik sistemlərin təbii riyazi modelləri rolunu oynayır, o cümlədən, xidmət sistemi nəzəriyyəsində, ehtiyatları idarəetmə, etibarlılıq nəzəriyyəsi və s.-də.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Королюк В. С, Турбин А. Ф., Полумарковские процессы и их приложения, К., 1976.

SEMİ – MARKOV PROSESİ idarəolunan **« полумарковский процесс** управляемый; controlled **semi – Markov process »** – bax, *İdarəolunan semi – Markov prosesi*.

SEMİ – MARKOV PROSESİ; qeyd olunmuş vəziyyətdə qalma müddəti **« полумарковский процесс;** время пребывания в фиксированным состоянии; **semi – Markov process; sojourn time »** – paylanması verilən prosesin vəziyyətindən və ola bilər ki, bu vəziyyətdən sonrakı növbəti vəziyyətdən asılı, mənfi olmayan *təsadüfi kəmiyyətdir*. Sıçrayışvari Markov prosesləri üçün vəziyyətdə qalma (olma) müddətlərinin hamısı yalnız verilən vəziyyətdən asılı üstlü qanunla paylanır. Stoxastik sistemlərin etibarlılığının analizində S. – M. p.-nin vəziyyətləri altçoxluğunda vəziyyətdə qalma müddətləri fasiləsiz işləmə müddəti və ya bərpa müddəti və ya dayanma (işləməmə) müddəti kimi interpretasiya olunur.

SEMİ – MARKOV PROSESİ qərarların (həllərin) qəbul edilməsi **« полумарковский процесс** принятия решений; **semi – Markov decision process »** – bax, *İdarəolunan semi – Markov prosesi*.

SEMİ – MARKOV TƏSADÜFİ ÇOXLUĞU « полу – марковское случайное множество; semi – Markov random set » – müşayiətedici (rus. сопровождающий) funksionalı T olan, $Q(K \cup K' \cup C)Q(C) = Q(K \cup C)Q(K' \cup C)$ xassəsinə malik təsadüfi qapalı A çoxluğudur, burada $Q = 1 - T$; K, K', C – baza fəzasının ixtiyari elə kompaktlarıdır ki (bax, *Təsadüfi çoxluq*), C kompaktı K və K'-i ayırır (bu isə belə anlaşılmalıdır: ixtiyari $x \in K$, $x' \in K'$ nöqtələri üçün $[x, x']$ parçası C-ni kəsir).

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

SEMİMARTİNQAL « семимартингал; semimartingale » – lokal martinqal və məhdud variasiyalı prosesin cəmi kimi ifadə olunan *təsadüfi prosesdir*. Ciddi tərifdə fərz olunur ki, bütün anlayışlar (tam) stoxastik $\mathscr{B}_{\mathbf{P}} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ bazisində, yəni sağdan kəsilməz və $\mathbf{P}$ ölçüsü üzrə tamamlanmış $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t \geq 0}$, $\mathscr{A}_s \subseteq \mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A}$, $s \leq t$ σ – cəbrlər ailəsi təyin olunmuş $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilir.

X_0, – $\mathscr{A}_0$ – ölçülən təsadüfi kəmiyyət, $M = (M_t, \mathscr{A}_t)_{t \geq 0}$ – lokal martinqal, $A = (A_t, \mathscr{A}_t)_{t \geq 0}$ – lokal məhdud variasiyalı proses olsun; əgər $X = (X_t)_{t \geq 0}$ stoxastik $\mathscr{B}$ bazisində verilmiş, trayektoriyaları D fəzasından olan (sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan funksiyalar) proses və X_t-lər

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

bərabərliyi ilə təyin oluna bilinən və hər bir $t \geq 0$ qiymətində $\mathscr{A}_t$ – ölçülən olarlarsa, onda X prosesinə semimartinqal deyilir. İxtiyari $X = X_0 + M + A$ ayrılışı üçün hər bir X S. ilə $M^c = X^c$ şərtini ödəyən, kəsilməz lokal X^c martinqalı birqiymətli (stoxastik fərqlənməməzlik dəqiqliyi ilə) əlaqələnir. Bu X^c prosesi (cəmdəki toplananlardan biri) X semimartinqalının kəsilməz martinqal komponenti (rus. непрерывная мартингальная составляющая) adlanır.

Əgər X semimartinqalı $A = (A_t, \mathscr{A}_t)_{t \geq 0}$ öngörül prosesi ilə $X_t = X_0 + M_t + A_t$ şəklində ifadə oluna bilərsə, X xüsusi semimartinqal (rus. специальный семимартингал) adlanır. $A = (A_t)_{t \geq 0}$ öngörül proses olduqda $X_t = X_0 + M_t + A_t$ ifadəsi yeganədir və bu ifadə X prosesinin kanonik ayrılışı adlanır. $|\Delta X_t| = |X_{t-} - X_t| \leq c$, $t \geq 0$ şərtini ödəyən, məhdud ΔX_t sıçrayışlarlı $X = (X_t)_{t \geq 0}$ prosesləri xüsusi S. sinfindəndirlər. X prosesi, yalnız və yalnız, o halda xüsusi S.-dır ki, $X - X_0$ fərqi iki lokal submartinqalların (supermartinqalların) fərqi olsun.

Determinik $X_t(\omega) = f(t)$, $t \geq 0$ prosesi, yalnız və yalnız, o halda S.-dır ki, $f = f(t)$, $t \geq 0$ funksiyası D fəzasından olsun və hər bir sonlu zaman intervalında məhdud variasiyalı olsun. S. sinfi ölçünün mütləq kəsilməz əvəzlənməsinə nəzərən invariantdır (əgər $Q << \mathbf{P}$ və X $\mathscr{B}_{\mathbf{P}}$-də S. olarsa, onda X $\mathscr{B}_Q$-də də S.-dır); əgər $G = (\mathscr{G}_t)_{t \geq 0}$ $\mathscr{G}_t$, $t \geq 0$ σ – cəbrlərinin azalmayan sağdan kəsilməz elə ailəsi olarsa ki, $\mathscr{G}_t \subseteq \mathscr{A}$, X_t $\mathscr{G}$ – ölçülən, $t \geq 0$ və X – $\mathscr{B}_{\mathbf{P}}$-də S. olsun, onda X redüslənmiş stoxastik $\mathscr{B}'_{\mathbf{P}} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{G} = (\mathscr{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ bazisində də S.-dır. S. sinfi $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_t)_{t \geq 0}$ zamanının təsadüfi əvəzlənməsinə

nəzərən dayanıqlıdır. Doğrudan da, əgər $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_t)_{t\geq 0}$ elə artan təsadüfi prosesdirsə ki, hər bir t qiymətində $\hat{\tau}_t$ kəmiyyətləri Markov anlarıdır, onda $\hat{X} = (X\hat{\tau}_{t(\omega)}(\omega))_{t\geq 0}$ prosesi $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ axınına nəzərən S.-dır, $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_{\tau_t}$, $t \geq 0$.

Diskret zaman halında – $n = 0, 1, \ldots$ olduqda «diskret» stoxastik $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A} = (\mathscr{A}_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$ bazisində verilən $X = (X_n)_{n\geq 0}$ S.-nın təbii tərifində $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ardıcıllığındakı X_n -lərin $\mathscr{A}_n$ – ölçülən olduğu fərz olunur.

$X = (X_n)_{n\geq 0}$ S., yalnız və yalnız, o halda xüsusi S.-dır ki, $X - X_0$ ardıcıllığı lokal inteqrallanan olsun. Bu halda $X = X_0 + M + A$ kanonik ayrılışında

$$A_n = \sum_{1\leq k\leq n} \mathbf{M}(X_k - X_{k-1} \mid \mathscr{A}_{k-1}),$$

$$M_n = \sum_{1\leq k\leq n} [(X_k - X_{k-1}) - \mathbf{M}(X_k - X_{k-1} \mid \mathscr{A}_{k-1})].$$

Diskret zaman halında iki (lokal) kvadratik inteqrallanan X və Y martinqallarının öngörül kvadratik kovariasiyası $\langle X, Y\rangle$ aşağıdakı kimi ifadə olunur,

$$\langle X, Y\rangle_n = \sum_{1\leq k\leq n} \mathbf{M}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}) \mid \mathscr{A}_{k-1}],$$

kvadratik kovariasiya – $[X, Y]$ isə

$$[X, Y]_n = \sum_{1\leq k\leq n} [X_k - X_{k-1}][Y_k - Y_{k-1}] = \sum_{1\leq k\leq n} \Delta X_k \Delta Y$$

düsturu ilə verilir; $\Delta X_t = X_{t-} - X_t$. $\langle M\rangle = \langle M, M\rangle$ ardıcıllığı kvadratik xarakteristika, $[M] = [M, M]$ isə kvadratik variasiya adlandırılır.

Diskret zaman halında İto dəyişənləri əvəzetmə düsturları (differensiallanan $f = f(x)$ funksiyaları üçün) aşağıdakı şəkil alır:

$$f(X_n) = f(X_0) + \sum_{1\leq k\leq n} \frac{\partial f}{\partial x}(X_{k-1})\Delta X_k +$$

$$+ \sum_{1\leq k\leq n} [f(X_k) - f(X_{k-1}) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_{k-1})\Delta X_k].$$

Kəsilməz zaman halında – $t \geq 0$ olduqda iki – lokal kvadratik inteqrallanan M_1 və M_2 martinqalları üçün $\langle M_1, M_2\rangle$ öngörül kvadratik kovariasiyası lokal inteqrallanan variasiyalı elə yeganə ($\mathbf{P}$ – əhəmiyyətsizlik dəqiqliyilə) öngörül proses kimi təyin olunur ki, $M_1M_2 - \langle M_1, M_2\rangle$ – lokal martinqaldır. $\langle M, M\rangle$ prosesi $\langle M\rangle$ kimi işarə olunur və M -in kvadratik xarakteristikası adlanır. Kvadratik kovariasiya $[M_1, M_2]$ isə

$$[M_1, M_2]_t = \langle M_1^c, M_2^c\rangle + \sum_{s\leq t} \Delta M_{1s}\Delta M_{2s}$$

prosesi kimi təyin olunur, burada M_1^c və M_2^c (cəmdəki toplananlardan biri) – M_1 və M_2 -nin kəsilməz martinqal komponentləridir.

Əgər $X = (X^1, \ldots, X^d)$ d – ölçülü S.-dırsa (yəni X^k proseslərinin hər biri S.-dır), $f = f(x_1, \ldots, x_d)$ – ikiqat kəsilməz differensiallanan funksiyadırsa, onda $f(X) = (f(X_t^1, \ldots, X_t^d))_{t\geq 0}$ prosesi S.-dır və bu halda İto dəyişənləri əvəzetmə düsturu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i\leq d} D_i f(X_-)\cdot X_t^i +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j\leq d} D_{ij} f(X_-)\cdot \langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_t +$$

$$+ \sum_{s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i\leq d} D_i f(X_{s-})\cdot \Delta X_s^i],$$

burada $D_i f(x) = \partial f/\partial x_i$, $D_{ii} f(x) = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ və $H\cdot X^i$, – X^i S.-ı üzrə *stoxastik inteqraldır*, $H\cdot\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle$, – $\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle$ prosesi üzrə Stiltyes inteqralını ifadə edir.

d – ölçülü hər bir $X = (X_t^1, \ldots, X_t^d)_{t\geq 0}$ S. ilə bu S.-ın öngörül xarakteristikalarının tripleti $T = (B, C, \nu)$ əlaqələnir. Bu triplet aşağıdakı kimi təyin olunur. $h = h(x)$ – qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan, $\mathbb{R}^d$ -də məhdud, kompakt daşıyıcıya malik elə funksiya olsun ki, sıfır ətrafında $h(x) = x$ şərtini ödəsin; $x = (x^1, \ldots, x^d)$.

$$X(h)_t = \sum_{s\leq t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)], \quad X(h)_t = X_t - X(h)_t$$

olsun. $\Delta X(h) = h(\Delta X)$ olduğundan $|\Delta X(h)_t| \leq C$ və $X(h)$ S.-ı xüsusi S.-dır.

$M(h)$ – lokal martinqal, $B(h)$ – lokal məhdud variasiyalı öngörül proses, $X(h) = X_0 + M(h) + B(h)$ olsun. $B = (B^i)_{i\leq d}$, – $B(h)$ öngörül proses, $C = (C^{ij})_{i,j\leq d}$, – $C^{ij} = \langle X^{ic}, X^{jc}\rangle$ olan kəsilməz proses (X^{ic}, – X^i S.-nın kəsilməz martinqal komponentidir); $\nu = \nu(dt, dx)$, $x \in \mathbb{R}^d$, – $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ -də öngörül təsadüfi ölçü olub, X prosesinin sıçrayışlarının ölçüsü μ -nün kompensatoru (yəni

$$\mu(dt, dx) = \sum_s I(\Delta X_s \neq 0)\ \delta(s, \Delta X_s)(dt, dx),$$

$\delta(a)$, – a nöqtəsində Dirak ölçüsüdür) olsun. Onda hər bir qeyd olunmuş $h = h(x)$ funksiyası üçün X S.-nın [h kəsim funksiyasına nəzərən, rus. функция урезания)] xarakteristikaları (öngörül) $T = (B, C, \nu)$ tripleti adlanır.

C və ν xarakteristikaları kəsim funksiyası $h = h(x)$ -in seçilməsindən asılı deyildirlər. $B(h)$ xarakteristikası isə, ümumiyyətlə, h -dan asılıdır və

$$B_t(h) - B_t(h') = (h - h') * \nu_t$$

$$\left(= \int\limits_{(0,1]\times \mathbb{R}^d} (h(x) - h'(x))\, \nu(ds, dx) \right).$$

$X(t)$ və $X(h)_t$ proseslərinin tərifləri nəzərə alaraq tapmaq olur ki,

$$X(t) = X(h)_t + X(h)_t = X_0 + M(h)_t + B(h)_t + \\ + \sum_{s\le t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)],$$

$M(h) = X^c + M^d(h)$ ayrılışını nəzərə aldıqda isə

$$X_t = X_0 + B(h)_t + X_t^c + M^d(h) + \sum_{s\le t} [\Delta X_s - h(\Delta X_s)]$$

ifadəsini almaq olur. Martinqal ölçüləri üzrə stoxastik inteqrallar üçün bu ifadəni aşağıdakı şəkildə yazmaq olur:

$$X_t = X_0 + B(h)_t + X_t^c + \\ + \int\limits_{(0,t]\times\mathbb{R}^d} h(x)\, d(\mu - \nu) + \int\limits_{(0,t]\times\mathbb{R}^d} (x - h(x))\, d\mu.$$

Əgər $h(x) = xI\ (|x| \le 1)$ olarsa, onda k a n o n i k adlandırılan aşağıdakı ifadə alınır:

$$X_t = X_0 + B_t + X_t^c + \\ + \int\limits_{(0,t]\times\{|x|\le 1\}} x\, d(\mu - \nu) + \int\limits_{(0,\,t]\times\{|x|>1\}} x\, d\mu,$$

burada $B_t = B_t(xI\ (|x| \le 1))$.

S.-lara və onların xarakteristikalarına aid m i s a l l a r.

1) $w = (w_t)_{t\ge 0}$ Viner prosesinin tripleti (kəsim funksiyası h -a nəzərən) $T = (0, t, 0)$ -dır.

2) asılı olmayan artımlarlı d – ölçülü proses, yalnız və yalnız, o halda S.-dır ki, hər bir $\lambda \in \mathbb{R}^d$ üçün $\mathbf{M} e^{i\lambda\cdot X_t}$ funksiyası hər bir sonlu zaman intervalında sonlu variasiyaya malik olsun.

3) Əgər X d – ölçülü S., $X_0 = 0$ olarsa, X, yalnız və yalnız, o halda asılı olmayan artımlarlı prosesdir ki, (B, C, ν) xarakteristikalarının determinik versiyası olsun.

4) d – ölçülü X prosesi, yalnız və yalnız, o halda asılı olmayan artımlarlı prosesdir ki, o, S. olsun və onun xarakteristikaları $(B, C, \nu) : B_t = b\cdot t,\ C_t = c\cdot t,\ \nu(dt, dx) = dt\, K(dx)$ şəklində ola bilsin, burada $b \in \mathbb{R}^d$, c – simmetrik mənfi olmayan $(d\times d)$ – matris, K, – $\mathbb{R}^d$-də elə müsbət ölçüdür ki, $\int \left(|x^2| \wedge 1\right) K(dx) < \infty,\ K\{0\}) = 0.$ Bu halda

$$\mathbf{M} e^{i\lambda\cdot X_t} = \exp t\, [i\lambda\cdot b - \frac{1}{2}\lambda\cdot c\cdot\lambda + \\ + \int (e^{i\lambda\cdot x} - 1 - i\lambda\cdot h(x)) K(dx)]$$

– Levi – Xinçin düsturu doğrudur.

$$A(\lambda)_t = i\lambda\cdot B_t - \frac{1}{2}\lambda\cdot C_t\cdot\lambda + \\ + \int (e^{i\lambda\cdot x} - 1 - i\lambda\cdot h(x))\nu([0,t]\times dx)$$

olsun. Aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

a) X – xarakteristikaları (B, C, ν) olan S.-dır;

b) hər bir $\lambda \in \mathbb{R}^d$ üçün $e^{i\lambda\cdot X} - (e^{i\lambda\cdot X_-})_t \cdot A(\lambda)$ – kompleks-qiymətli lokal martinqaldır;

c) hər bir məhdud ikiqat kəsilməz differensiallanan $f = f(x),\ x \in \mathbb{R}^d$ funksiyası üçün

$$f(X) - f(X_0) - \sum_{j\le d} D_j f(X_-)\cdot B^j - \\ - \frac{1}{2}\sum_{j,k\le d} D_{jk} f(X_-)\cdot C^{jk} - \\ - \left\{ f(X_- + x) - f(X_-) - \sum_{j\le d} D_j f(X_-)\cdot h^j(x) \right\} * \nu$$

prosesi – lokal martinqaldır.

Hər bir kompleks $X = X' + iX''$ S.-ı və

$$Y = 1 + Y_-\cdot X, \quad Y_0 = 1$$

tənliyinin (trayektoriyaları D-dən olan $\mathbf{A}$ uzlaşmış proseslər sinfində) yeganə həlli olan $\mathscr{E}(X)_t$ stoxastik eksponenti aşağıdakı ifadə ilə bir-birilə əlaqəlidir:

$$\mathscr{E}(X)_t = \left\{ \left(\exp(X_t - X_0 - \frac{1}{2}\left\langle X'^c, X'^c \right\rangle_t + \frac{1}{2}\left\langle X''^c, X''^c \right\rangle_t - \right. \right. \\ \left. \left. - i\left\langle X'^c, X''^c \right\rangle_t \right) \right\} \prod_{s\le t} [(1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}].$$

$\mathscr{E}(X)_t = (\mathscr{E}(X)_t)_{t\ge 0}$ prosesi də S.-dır. Bu halda X prosesinin lokal məhdud variasiyası olarsa, onda

$$\mathscr{E}(X)_t = e^{X_t - X_0} \prod_{s\le t} (1 - \Delta X_s) e^{-\Delta X_s};$$

əgər S. həqiqi olarsa, onda

$$\mathscr{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\left\langle X^c,\, X^c \right\rangle} \prod_{s\le t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

olur.

$G(\lambda) = \mathscr{E}(A(\lambda)),\ T(\lambda) = \inf\{t : \Delta A(\lambda) = -1\}$ olsun. Onda $T(\lambda)$ anı öngörül andır, $T(\lambda) = \inf\{t : G(\lambda)_t = 0\}$ və $\left(e^{i\lambda\cdot X} / G(\lambda)\right)\cdot I_{[[0,\,T(\lambda)]]}$, – $[[0, T(\lambda)]] = \{(t, \omega) : 0 \le t \le \\ \le T(\lambda)\}$ stoxastik intervalında lokal martinqaldır. Bu xassə S.-ın zəif yığılması haqqında nəticələrin isbatları üçün stoxastik eksponentlər metodunda əsas rol oynayır (bax, [2], [4]).

Əd.: [1] D e l l a s h e r i e C., M e y e r P.-A., Probabilite`s et potentiel. Theorie des martingales, t. 1–2, P., 1975-80; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986;

[3] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [4] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

SEMİMARTİNQAL; limit teoremləri **« семимартингал;** предельные теоремы; limit theorems for **semimartingales »** – bax, *Limit teoremləri martinqallar və semimartinqallar üçün.*

SEMİMARTİNQALIN FİLTRASİYASI « семимартингала фильтрация; filtering of a semimartingale » – müşahidə olunan müəyyən tip proses üzrə onun müşahidə olunmayan komponenti üçün kvadratik orta mənada optimal statistik qiymətin axtarılması haqqında məsələdir.

$(X, Y) = (X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ – ikiölçülü semimartinqal olsun; Y – müşahidə olunmayan komponent, X – müşahidə olunacaq prosesdir. $\mathbb{A}^X = (\mathcal{A}_t)^X_{t\geq 0}$, – $\mathcal{A}_t^X = \sigma\{X_s,\ 0\leq s\leq t\}$ σ – cəbrlərinin ailəsi və $\mathbb{A}_t^X = (\mathcal{A}_{t^+}^X)$, – $\mathcal{A}_{t^+}^X = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{A}_{t+\varepsilon}^X$ σ – cəbrlərinin ailəsi olsun. $\mathbf{M}Y_t^2 < \infty$ və $\mathbb{A}_+^X = \mathbb{A}^X$ olduğu halda Y prosesinin $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən opsional proyeksiyası $\pi(Y) = (\pi_t(Y))_{t\geq 0}$ X_s, $s\leq t$ müşahidələri üzrə Y_t-nin kvadratik orta mənada optimal statistik qiymətini təyin edir. Y xüsusi semimartinqal olduqda, $\pi(Y)$ strukturu olduqca sadə müəyyən olunur. Burada Y-in xüsusi semimartinqal olması $Y_t = Y_0 + M_t + A_t$ olması kimi anlaşılır, burada $A = (A_t)_{t\geq 0}$ – lokal məhdud variasiyalı [$\mathrm{var}(A_t) < \infty$ $\mathbf{P}$ – sanki yəqin ödənilir, $t > 0$] öngörül proses, $M = (M_t)_{t\geq 0}$ – lokal martinqaldır, X özünün kanonik ifadəsi ilə verilir ki, bu ifadəyə öngörül xarakteristikalar tripleti $T = (B, C, \nu)$ müvafiqdir (bax, *Semimartinqal*). X-in semimartinqallıq xassəsi $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən saxlanılır, $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən öngörül xarakteristikalar tripleti $T^X = (B^X, C^X, \nu^X)$ kimi işarə olunur. Məsələn,

1) $\mathbf{M}(Y_0^2 + (\mathrm{var}(A)_t)^2 + M_t^2) < \infty$, $t > 0$;

2) X_0 təsadüfi kəmiyyətinin paylanması və T^X tripleti X prosesinin paylanmasını birqiymətli təyin edirlər;

3)

$$\left(\int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\nu - \nu^X)^c (d\,s,\ d\,x) \right)_{t\geq 0}$$

prosesinin lokal məhdud variasiyalı trayektoriyaları vardır, $(\upsilon - \upsilon^X)^c$ komponenti $\upsilon - \upsilon^X$ ölçüsünün ayrılışında kəsilməz (s üzrə) komponentdir;

4)

$$L_t = (B - B^X)_t^c - \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\upsilon - \upsilon^X)^c\ (d\,s,\ d\,x)$$

olduqda $L = (L_t)_{t\geq 0}$ prosesi $C = (C_t)_{t\geq 0}$ xarakteristikasına nəzərən mütləq kəsilməzdir, $(B - B^X)^c$ komponenti $(B - B^X)$ funksiyasının ayrılışında kəsilməz komponentdir;

5) $\mathbf{M}\int_0^t \left| Y_s \frac{d\,L_s}{d\,C_s} \right| d\,C_s < \infty$, $t > 0$ şərtlərində $\mathbb{A}^X$ və $\mathbb{A}_+^X$ σ – cəbrlər ailələri üst-üstə düşür, $\pi(Y)$ prosesi xüsusi semimartinqal olur və o, aşağıdakı kimi ifadə oluna bilinir:

$$\pi_t(Y) = \mathbf{M}(Y_0 \mid \mathcal{A}_0^X) + A_t^X + \int_0^h h(s)\, d\,\overline{X}_s^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} H(s, x)(\mu - \nu^X)(d\,s,\ d\,x), \qquad (*)$$

burada $A^X = (A_t^X)_{t\geq 0}$, – $\mathbf{M}(\mathrm{var}(A^X)_t)^2 < \infty$, $t > 0$ şərtini ödəyən $\mathbb{A}^X$ – öngörül prosesdir, (*)-nun sağ tərəfindəki inteqrallar kəsilməz lokal $\overline{X}^c = (\overline{X}_t^c)_{t\geq 0}$ martinqalı (X semimartinqalının $\mathbb{A}_+^X$ ailəsinə nəzərən martinqal toplananı olan) və martinqal ölçüsü $\mu - \nu^X$ [$\mu = \mu(d\,t,\ d\,x)$ X-in sıçrayışları ölçüsüdür] üzrə stoxastik inteqrallardır; $h = h(\omega, s)$ və $H = H(\omega, s, x)$ funksiyaları isə uyğun olaraq, T və T^X tripletləri üzrə hesablanılır.

Əd.: [1] Григелионис Б., «Литов. матем. сб.», 1972, т. 12, № 4, с. 37–51; [2] Ветров Л. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 1, с. 24–35; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

SEMİ – POLYAR ÇOXLUQ « полуполярное множество; semi – polar set » – qeyd olunmuş sağ Markov prosesinə nəzərən incə çoxluqların hesabidən çox olmayan toplusunun birləşməsidir. S. – p. ç. və prosesin başlanğıc vəziyyətinin nə cür olmasından asılı olmayaraq, prosesin trayektoriyaları hesabi saydan çox olmamaqla bu çoxluqda sanki yəqin olurlar (bax, [1]). Hər bir polyar çoxluq, həm də S. – p. ç.-dur.

Əd.: [1] Blumental R. M., Getoor R. K., Markov process and potential theory, N. Y. – L., 1968.

SEMİ – VARİASİYA(sı) vektor ölçünün **« полувариация** векторной меры; **semi – variation** of a vector measure **»** – bax, *Vektor ölçü.*

SENTİL « центиль; centile » – bax, *Persentil.*

SENZURLA(N)MA « цензурирование; censoring » – imtinaya qədər işləmə müddətinin natamam müşahidəsinə deyilir. Məs., 10 gün ərzində müşahidə olunan və imtinaya məruz qalmayan obyekt müşahidə olunan obyektlər çoxluğundan xaric olunur, bu obyektin imtinaya qədər işləmə müddəti 10 gündən artıq sayılır. Bu müşahidə senzurlamadır. Qeyd etmək lazımdır ki, senzurlama da imtina kimi nöqtəvi hadisədir, senzurlanan obyektlərin müşahidə olunduğu müddət qeyd olunmalıdır.

Fərz olunur ki, n həcmli seçimdə i-ci obyekt imtinaya qədər τ_i müddəti qədər işləmişdir və müşahidələr S.-sız aparılır (τ_i təsadüfi kəmiyyətdir). Bir də fərz olunur ki, elə müşahidə müddəti c_i vardır ki, əgər obyekt bu müddət ərzində imtinaya məruz qalmazsa, onda c_i anında bu obyekt üzərindəki müşahidə dayandırılır. Bu halda, əslində $X_i = \min(\tau_i, C_i)$ kəmiyyətləri

indikator dəyişəni ν_i ilə birgə müşahidə olunur; əgər $\tau_i \le c_i$ olarsa, $\nu_i = 1$ götürülür və onda obyekt senzurlanmamışdır, $\tau_i > c_i$ olduqda isə $\nu_i = 0$ götürülür və bu halda obyekt senzurlanmışdır. İmtinaya, həqiqətən də, məruz qalmış obyektlər üçün c_i kəmiyyətləri realizə olunmuş senzurlanma anlarının əksinə olaraq, realizə olunmamış senzurlanma anları sayılır. «Potensial senzurlama anı» termini, adətən, senzurlama və ya imtina olub-olmamasından asılı olaraq, c_i kəmiyyətlərinə baxıldığı hallarda istifadə olunur.

Bəzi tətbiqi məsələlərdə c_i anlarının hamısı məlum olur, məs., əgər S.-nın yeganə məqsədi əvvəldən məlum olan müəyyən müddətdən sonra sınaqların planlı surətdə saxlanılmasından ibarət olarsa. Digər bir misal c_i-lərin hamısı bərabər olduğu, yəni $c_i = c$ olduğu hal (c kəmiyyəti tədqiqatçı tərəfindən verilir), bu – I tip senzurlama adlanır. II tip senzurlamada imtinaların sayı əvvəlcədən məlum olan d ədədinə çatdıqda müşahidə dayandırılır, bu halda c təsadüfi kəmiyyət olur. II tip S. texnikada etibarlılığı təyin etmək üçün aparılan sınaqlarda vəsaitlərin qənaətlə istifadə olunması üçün faydalı metoddur. S.-nın təsadüfi senzurlama adlanan digər formaları da mümkündür. c_i anı üçün fəaliyyətdə olan ixtiyari obyektin imtina edəbiləcəyi proqnozuna (izahedici dəyişənlərin qiymətlərinin verilməsi şərtilə – bu həlledici şərt kimi qəbul edilir) bu obyektin c_i anında senzurlanmış olub-olmadığının təsiri yoxdur. Başqa sözlə, c anında senzurlanmış obyekt c anına qədər imtinaya məruz qalmayan obyektlər sinfindəndir, bu şərtlə ki, bu obyektlər də izahedici dəyişənlərin eyni qiymətlərilə müşahidə olunur. Bunun təmin olunmasının sadə yolu – c_i kəmiyyətlərinin prinsip etibarilə əvvəldən məlum konstantlar olduğunu fərz etməkdir. Lakin, bununla belə, qeyd olunmalıdır ki, c_i-lər əvvəlcədən müşahidəçiyə məlum olmur, hətta müşahidə olunan imtinalara uyğun realizə olunmamış c_i-lər ola bilsin ki, heç vaxt məlum olmasın. Yuxarıda qeyd olunmuş şərt o halda yerinə yetir ki, potensial senzurlama anları c_i-lər τ_i-lərdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. II tip S. daha ümumi sxemə misaldır və bu sxemdə S. bütün prosesin onun gələcəyindən deyil, keçmişindən asılı ola bilər. Belə senzurlama evolyusion S. adlanır.

Bax, *Kəsik seçim*, *Senzurlanmış seçim.*

Əd.: [1] Кокс Д. Р., Оукс Д., Анализ данных типа времени жизни, М., 1988.

SENZURLAMA; təsadüfi **« цензурирование** случайное; **censorization** of random **»** – bax, *Senzurla(n)ma.*

SENZURLAMA ANI « цензурирования момент; time of censoration » – bax, *Senzurla(n)ma.*

SENZURLAMA ANI, POTENSİAL « момент цензурирования потенциальный; potential time of censoration » – bax, *Senzurla(n)ma.*

SENZURLANMA evolyusion **« цензурирование** эволюционное; evolutional **censored »** – bax, *Senzurla(n)ma.*

SENZURLANMIŞ SEÇİM « цензурированная выборка; censored / trimmed sample », II tip senzurlanma – F paylanmasına malik $X_1, \dots, X_n$ təkrar seçimi üzrə qurulmuş *variasion sıranın* bir hissəsidir. Əgər variasion sıranın yalnız r_1 sayda ən kiçik (r_2 sayda ən böyük) həddi seçimdə müşahidə olunursa, seçim sağdan (soldan) senzurlanmışdır. İkiqat senzurlanmış seçimlər (sağdan və soldan senzurlanmış), məs., paylanma funksiya qalıqlarının dəyişmələrinə dayanıqlı statistik qiymətlərin və statistik kriterilərin alınması üçün istifadə olunur. Əgər F paylanmasının sıxlıq funksiyası f olan mütləq kəsilməz paylanma funksiyası, $X_n(k_i)$, $1 < k_1 < \dots < k_l < n$, – k_i-ci qaydalı statistikalardırsa, onda $X_n(k_i) = x_i$, $x_1 < \dots < x_l$ şərtində variasion sıra şərti asılı olmayan $(X_n(k_{i-1}+1),\ X_n(k_i - 1))$, $i = 1, \dots, l+1$ parçalarına bölünür və bu parçalar $(k_i - k_{i-1} - 1)$ həcmli asılı olmayan təkrar seçimlərə görə uyğun olaraq qurulur; bu seçimlər isə uyğun olaraq, $(x_{i-1},\ x_i)$ intervallarında topalanmış paylanmalara malik olub, paylanmalarının sıxlıq funksiyaları uyğun olaraq, $f \big/ [F(x_i) - F(x_{i-1})]$, $F(x_i) \ne F(x_{i-1})$ münasibətlərilə təyin olunur; burada $k_0 = 0$, $k_{l+1} = n+1$, $F(x_0) = 1 - F(x_{l+1}) = 0$.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Кудлаев Э. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1973, т. 18, в. 3, с. 655–62; [3] Halperin M., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, p. 226–38; [4] Sarhan A. E., Greenberg B. G. (eds.), Contributions to order statistics, N. Y. – L., 1962; [5] Dixon W. J., Vuen K. K., «Statist. Hefte», 1974, Bd 15, № 3, S. 157–70.

SEPARABEL σ – CƏBR « сепарабельная σ – алгебра; separable σ – algebra » – bax, σ – *Cəbri*, *çoxluqların.*

SEPARABEL MÜNASİBƏT « сепарабельное отношение; separable relation » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

SEPARABEL PROSES « сепарабельный процесс; separable process » – mahiyyət etibarilə, trayektoriyalarındakı dəyişikliklər onların hər hansı hesabi çoxluqda dəyişikliyi prosesi ilə təyin olunan *təsadüfi prosesdir.* Fərz olunur ki, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi $(M, \mathfrak{B})$ metrik faza fəzasında verilmişdir. $\mathfrak{B}$ Borel çoxluqlarının σ – cəbridir, t isə hər hansı T metrik fəzasında dəyişir. Təsadüfi prosesin tərifindən belə nəticə alınmır ki, G – açıq altçoxluq, Γ, – M-in qapalı altçoxluğu olduğu halda $\bigcap\limits_{t \in G} \{\omega : \zeta(t, \omega) \in \Gamma\}$ hadisədir. Bununla belə, məs., həqiqi təsadüfi prosesin t_0 anından t_1 anına qədər keçən müddət ərzində $[a, b]$ parçasını tərk etməməsi ehtimalı haqqında məsələ olduqca təbiidir. Bununla əlaqədar C. Dub [1]-də S. p. anlayışını daxil etmişdir. Əgər T metrik fəzasında hər yerdə sıx elə S çoxluğu və elə $N \in \mathcal{A}$ çoxluğu varsa ki, $\mathbf{P}(N) = 0$ və bundan əlavə hər bir $G \subset T$ çoxluğu və hər bir qapalı $\Gamma \subset M$ çoxluğu üçün

$$A = \bigcap_{t \in S \cap G} \{\omega : \zeta(t, \omega) \in \Gamma\} \quad \text{və}$$

$$B = \bigcap_{t \in G} \{\omega : \zeta(t, \omega) \in \Gamma\}$$

çoxluqları bir-birindən yalnız N çoxluğunun altçoxluqları qədər

fərqlənərsə, $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesi separabel təsadüfi proses adlanır. A çoxluğu hadisədir, yəni $A \in \mathscr{A}$. Əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ fəzası tam fəza, $\zeta(t)$ prosesi separabel prosesdirsə, onda $B \in \mathscr{A}$ və $\mathbf{P}(B)$ təyin olunmuşdur. S çoxluğu tərifdə prosesin separabellik çoxluğu adlanır.

T – separabel fəza, M – kompakt çoxluq olsun; $A(G, \omega)$ – t dəyişəni $G \cap S$ çoxluğunda qiymətlər aldıqda $\zeta(t, \omega)$ funksiyasının qiymətləri çoxluğunun qapayıcısı, $A(t, \omega) = \bigcap A(G, \omega)$ olsun, burada kəsişmə G-nin t nöqtəsini özündə saxlayan bütün açıq çoxluqları üzrədir; bu çoxluqlar T fəzasının topologiyasının hesabi bazasındandır. $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin separabel proses olması üçün $\mathbf{P}(N) = 0$ şərtini təmin edən $N \in \mathscr{A}$ çoxluğunun varlığı və bütün $t \in T$ qiymətlərində $\omega \neq N$ üçün $\zeta(t, \omega) \in A(t, \omega)$ münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Prosesin separabel olub-olmaması prosesin sonluölçülü paylanmalarından asılı deyildir (T və M üzərinə qoyulan olduqca ümumi fərziyyələrlə). Belə bir teorem doğrudur (bax, [1]): T – separabel metrik fəza, M – kompakt çoxluq olsun. Onda M-dən qiymətlər alan və T-də verilmiş ixtiyari təsadüfi proses hər hansı separabel təsadüfi prosesə stoxastik ekvivalentdir. Başqa sözlə, hər bir $t \in T$ qiymətində verilmiş prosesin qiymətini sıfırölçülü ω – çoxluğunda elə dəyişmək mümkündür ki, alınan proses S. p. olur.

Əgər M lokal kompakt və $\widetilde{M}$ onun kompakt genişlənməsi olarsa, onda əvvəlki teoremə əsasən, M-də ixtiyari təsadüfi proses üçün qiymətləri $\widetilde{M}$-dən olan, bu prosesə stoxastik ekvivalent separabel proses vardır. Burada ilkin prosesin separabel modifikasiyasına keçid onunla nəticələnir ki, yeni proses «qeyri – məxsusi» qiymətlər ala bilər (yəni M-dən olmayan qiymətlər). Bu hal hər bir $t \in T$ qiymətində sıfır ehtimalı ilə baş verir.

Əgər proses separabel və stoxastik kəsilməzdirsə, onda separabellik çoxluğu kimi T-də hər yerdə sıx hesabi çoxluq götürmək olar.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SERİAL KORRELYASİYA ƏMSALI « сериальный коэффициент корреляции; serial correlation coefficient / sample autocorrelation coefficient » – zaman sırasının *avtokorrelyasiyasının* (avtokorrelyasion funksiyasının) statistik qiymətini təyin edən statistikadır. $x_1, \ldots, x_N$ – zaman sırası olsun.

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} A_i B_i \Bigg/ \left[\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} A_i^2 B_i^2 \right]^{1/2} \qquad (*)$$

düsturu ilə verilən r_k statistikasına k tərtib serial korrelyasiya əmsalı deyilir, burada

$$A_i = x_i - \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i, \quad B_i = x_i + k - \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i + k.$$

S. k. ə. kimi (*)-ya yaxın və bir qədər sadə şəkilli statistikalardan istifadə olunur. S. k. ə.-ları toplusu korreloqram adlanır; bu termin r_k-nın qrafikinin k-nın funksiyası kimi işarə olunması üçün də istifadə olunur. x_i-lərin (bunlar təsadüfi kəmiyyətlərdir) paylanması haqqında müxtəlif fərziyyələrlə S. k. ə.-larının paylanması və onların momentləri üçün dəqiq və təqribi ifadələr vardır. S. k. ə.-ları statistik məsələlərdə zaman sırasının hədləri arasında asılılığı aşkar etmək məqsədilə istifadə olunur.

S. k. ə. termini «seçimi avtokorrelyasiya» termini ilə yanaşı istifadə olunur.

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

SERİYALAR KRİTERİSİ « серий критерий; runs test / Wald – Wolfowitz twosample test » – iki təkrar seçim üzrə qurulmuş ümumi variasion sırada ümumi seriyalar sayı – $u = r_1 + r_2$ sayına əsaslanan *statistik kriteridir.* Burada $r_i = \sum_j r_{ij}$ $(i = 1, 2)$, r_{ij}, – j uzunluqlu seriyalar sayıdır ki, bu seriyalar i-ci seçimin nöqtələrindən ibarətdir. S. k. [4]-də daxil olunmuşdur və iki seçimin bircins və təsadüfiliyi haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün istifadə edilir. *Boş bloklar kriterisi* ilə sıx əlaqəlidir (bax, [5]). Eyni kəsilməz paylanma funksiyasına malik asılı olmayan təkrarlanan seçimlər halı üçün kritik qiymətlər cədvəlləri tərtib olunmuşdur (bax, [1]). $k > 2$ tip elementlərdən təşkil olunmuş seriyalar üçün ümumiləşmələrə [3], [5]-də baxılır.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Mood A. M., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 367–92; [4] Wald A., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 147–62; [5] Кудлаев Э. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 26, М., 1988.

SERİYALAR SXEMİ, ÜÇBUCAQ SXEMİ « серий схема, треугольная схема; triangular array scheme » – $X_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ *təsadüfi kəmiyyətlər* cəmlərinin asimptotik xassələri öyrənilən modeldir. $U_n = (X_{n1}, X_{n2}, \ldots)$ cəmlər topluları təsadüfi kəmiyyətlərin seriyaları adlanır. Əksər U_n toplusunda elementlərin sayı sonsuz olarsa, onda S_n sırasının 1 ehtimalla yığıldığı fərz olunur. S. s-inin əsas tədqiqat obyektləri, ənənəvi olaraq $Z_n = S_n - A_n$ kəmiyyətlərinin mümkün olan limit ehtimal paylanmalarının $\mathfrak{L}$ çoxluğudur, burada A_n – bəzi sabitlərdir və bu kəmiyyətlərin ehtimal paylanmalarının $\mathfrak{L}$ çoxluğunun ayrı-ayrı limit ehtimal paylanmalarına yığılma şərtləridir. S. s.-inə ilk dəfə, belə ümumi şəkildə 1922-də S. N. Bernşteyn tərəfindən baxılmışdır (bax, [1]). 20-ci əsrin 30-cu illərinə qədər ehtimal nəzəriyyəsində əsasən S. s.-nin xüsusi halı – $X_{nj} = X_j / B_n$, $B_n > 0$ və S_n-dəki toplananların cəmi ixtiyari n qiymətində sonlu olan hala baxılırdı. Həm asılı olmayan toplular hallarına, həm də asılı təsadüfi kəmiyyətlər hallarına baxılırdı (bax, [2], [1]). Ən çox birinci hal öyrənilmişdir. X_{nj} toplananlar üçün əlavə – *sonsuz kiçilənlik şərti* burada limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsini digərlərindən fərqləndirir (bax, [3]). Bu nəzəriyyənin yaran-

masında ən çox A. N. Kolmoqorov, P. Levi (P. Lévy) (sonsuz bölünən paylanmaların $\mathfrak{S}$ sinfinin təsviri); Q. M. Bavli, A Ya. Xinçin ($\mathfrak{L}=\mathfrak{G}$ bərabərliyinin isbatı); C. Lindeberq (J. Lindeberg), V. Feller (W. Feller), A. Ya. Xinçin, B. V. Qnedenko ($\mathfrak{G}$ sinfinin qanunları zəif yığılma kriteriləri, o cümlədən, cırlaşan, normal və Puasson paylanmalarına) kimi alimlərin xidmətləri olmuşdur.

X_{nj} toplananlarının müntəzəm sonsuz kiçilənlik şərtinin nəzərə alınmaması (bu toplananların asılı olmamazlığı şərti saxlanılmaqla) limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsini olduqca genişləndirilməsinə imkan yaratdı, belə ki, bu halda $\mathfrak{L}$ çoxluğu $\mathbb{R}^1$-dəki bütün paylanmaların çoxluğu ilə üst-üstə düşür (bax, [4]).

S. s. X_{nj} toplananların cəmlənmə əməlinin həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğunda digər binar əməllərilə əvəz olunması istiqamətində ümumiləşdirdiyi kimi (bax, *Maksimum sxemi*, *təsadüfi kəmiyyətlərin*; *Vurulma sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin*; *Urbanik cəbri*), X_{nj} təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin $\mathbb{R}^1$ fəzasının daha ümumi təbiətli fəzalarla əvəz olunması istiqamətində ümumiləşdirilirdi.

S. s. modeli ilə ümumi limit teoremlərinin xüsusi halları invariantlıq prinsipi baxılan, limit paylanmalarına yığılma sürəti araşdırılan, paylanmaların yığılması zəif topologiyadan fərqli topologiyalarla əlaqədar yığılmalara baxılan çoxsaylı işlər bağlıdır (bax, [5] – [7]).

Əd.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 66–70; [2] Марков А. А., Избр. труды, М., 1951, с. 339–398; [3] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986; [5] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1986; [6] Зингер А. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1965, т. 10, в. 4, с. 672–92; 1971, т. 16, в. 4, с. 614–37; [7] Кругов В. М., «Теория вероятностей и ее примен.», 1972, т. 17, в. 4, с. 723–32.

S. s. – $X_{k,n}$ ($k=1,2,\dots,n$; $n=1,2,\dots$) *təsadüfi kəmiyyətlərin* elə iki qat ardıcıllığıdır ki, n-ci sətrin (seriyanın) elementləri $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. İxtiyari $\varepsilon>0$ üçün n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində $X_{k,n}$ *asimptotik əhəmiyyətsiz* təsadüfi kəmiyyət olarsa, yəni $k=1,\dots,n$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{|X_{k,n}|>\varepsilon\}<\varepsilon \qquad (*)$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə, seriyalar sxemi *sıfıral* və ya *asimptotik əhəmiyyətsiz komponentlərli* seriyalar sxemi adlanır. Ehtimal nəzəriyyəsinin yığılma anlayışı terminologiyasında $\{X_{k,n}\}$ ikiqat təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının $k=1,\dots,n$-ə görə müntəzəm olaraq ehtimala görə sıfra yığılması *asimptotik əhəmiyyətsizliklə* eynigüclüdür. Bu tipli təsadüfi kəmiyyətlər sistemi çox təsadüf olunduğundan, onlara belə xüsusi ad verilmişdir.

Misal. $\{X_j\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $S_n=X_1+\dots+X_n$ olsun. $a_m\neq 0$ və $X_{k,n}=X_k a_n^{-1}$ ardıcıllığı seriyalar sxemidir və bu sxemin n-ci seriyasının (sətrinin) elementlərinin cəmi $S_n\cdot a_n^{-1}$ normalanmış cəmdir.

Əgər $a_n\to\infty$ olarsa, bu seriyalar ardıcıllığı sıfıral seriyalar sxemidir. [1]-də isbat olunmuşdur ki (bax, IX, XVII fəsillər), sıfıral seriyalar sxeminin n-ci seriyasının komponentlərinin cəmləri S_n-lərin limit paylanması (əgər bu limit varsa) *sonsuz bölünən paylanmadır.* Əgər asimptotik əhəmiyyətsizlik şərti (*) ödənilərsə, bu halda $X_{k,n}$ komponentlərinin eyni qanunla paylanıb-paylanmaması əhəmiyyət kəsb etmir və sonsuz bölünən paylanmalar sinfi ilə sıfıral seriyalar sxeminin n-ci seriyasının komponentləri cəmlərinin limit paylanmaları sinfi üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984.

SEVASTYANOV DÜSTURU « Севастьянова формула; Sevast'yanov formula » – λ parametrli ən sadə giriş axını halında və xidmət müddətinin paylanması ixtiyari olduqda, tələbə orta xidmət müddəti ρ/λ olduğu halda itkilərli n – xətli xidmət sistemində k sayda xəttin məşğul olmasının stasionar ehtimalı p_k üçün:

$$p_k=\frac{1}{k!}\rho^k\Big/\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\rho^i,\quad 0\le k\le n$$

düsturudur. Bu düstur Erlanq düsturunu ümumiləşdirir; Markov prosesləri üçün B. A. Sevastyanovun erqodik teoreminin nəticəsi kimi onun tərəfindən alınmışdır (1956) (bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi*; əlavə dəyişənlər metodu). S. d. xidmət sistemi nəzəriyyəsində invariantlıq probleminin araşdırılmasının mənbəi olmuşdur.

SEVASTYANOV PROSESİ « Севастьянова процесс; Sevast'yanov process » – bax, *Şaxələnən proses* yaşından asılı.

SEYRƏKLƏNMƏ « прореживание; decimation » – bax, *Desimasiya.*

SEYRƏKLƏNMƏ(si) axının « прореживание потока; thinning of flow » – *kütləvi xidmət sistemi nəzəriyyəsində* bir anlayışdır. Praktiki cəhətdən bir sıra mühüm məsələlərdə elə hallara təsadüf olunur ki, ardıcıl xidmətdən sonra cihazlar öz elementlərinin müəyyən bir hissəsini itirir. Məs., kütləvi istehsalda cihazın elementi bir sıra dəzgahlarda düzəldilir və hər bir belə əməliyyatdan sonra defektli element atılır və beləliklə də, ilkin axın seyrəklənir. Belə hal düzəlişlər aparıldığı halda bir neçə korrektordan istifadə olunduqda da müşahidə olunur. Hər bir korrektordan sonra tekstdə qalan səhvlərin sayı azalır. Belə hallar axının seyrəklənməsi kimi adlandırılır. A. Renyi bu sahədə tədqiqat aparmış (bax, [2]) və bu istiqamətdə aşağıdakı sxemi öyrənmişdir: ixtiyari bərpa axınına baxılır; hər bir tələb axında q ehtimalı ilə qalır və $1-q=p$ ehtimalı ilə axından xaric olunur. Zaman miqyasının dəyişməsi hesabına axının intensivliyi dəyişməz qalır. Bu əməliyyat ardıcıl surətdə təkrar olunur (çox dəfə). A. Renyi isbat etmişdir ki, dəyişilmiş axın doğrudan da, sadə axınla yaxınlaşır (bax, [1]).

Deməli, sadə axın yalnız sonsuz kiçilən asılı olmayan axınların cəmlənməsindən alınmır. Digər limit prosesləri də bu axına gətirir.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания; [2] Реньи А. (A. Rényi), Poisson-folyamat egy jemllemzëse, Труды Мат. Института АН Венгрии I, 4, 1956, 519-27.

SEYRƏKLƏNMİŞ / ZƏRİF ÇOXLUQ « разреженное множество; thin set » – bax, *Requlyar nöqtə* çoxluq üçün, *Zərif / seyrəklənmiş çoxluq.*

SƏDA FUNKSİYASI « отклика функция; response function », r e q r e s s i y a f u n k s i y a s ı, *reqression eksperimentin* S. f. – nəzarət olunan dəyişənlərin funksiyası kimi ölçmələrin orta qiymətidir.

SƏDA FUNKSİYASI, FİLTRİN « отклика фильтра функция; response function of a filter » – bax, *Xətti filtr.*

SƏDD – AVTOREQRESSİV PROSES « пороговый процесс авторегрессии; threshold autoregressive process » – bax, *Sədd modeli.*

SƏDD MODELİ « пороговая модель; threshold model » t ə s a d ü f i p r o s e s i n s ə d d m o d e l i, s ə d d – a v t o r e q r e s s i v p r o s e s, z a m a n s ı r a s ı n ı n s ə d d m o d e l i, – diskret zamanlı $\{\zeta_t,\ t=0,\pm1,\pm2,\dots\}$ *təsadüfi prosesinin* əmsalları ζ_t prosesinin qiymətlərinin hər hansı bir «səddi» (və ya «sədləri») bir və ya bir neçə anda aşdıqda, sıçrayışla dəyişən xətti tənliklə (ζ_t-nin qiymətlərini eyni qanunla paylanmış asılı olmayan e_t təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığının qiymətləri ilə əlaqələndirən tənliklə) verilən qeyri – xətti modeldir. Təsadüfi prosesin S. m.-nə ən sadə misal:

$$\zeta_t = \begin{cases} a^{(1)}\zeta_{t-1} + b^{(1)} e_t, & \zeta_{t-1} < c \quad \text{olduqda,} \\ a^{(2)}\zeta_{t-1} + b^{(2)} e_t, & \zeta_{t-1} \ge c \quad \text{olduqda} \end{cases} \qquad (1)$$

tənliyi ilə təyin olunan prosesdir; burada $\mathbf{M}e_t = 0,\ \mathbf{M}e_t^2 = 1,$ $a^{(1)},\ a^{(2)},\ b^{(1)}, b^{(2)}$ və c müəyyən sabitlərdir. Bu modelə ilk dəfə 1977-də H. Tonq tərəfindən statistik hidrologiyanın konkret bir məsələsi araşdırılarkən baxılmışdır (bax, məs., [1], [2]).

$(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k}) \in R^{(i)},\ i=1,\dots,l,\quad R^{(1)}, \dots, R^{(l)}$ isə bütün k – ölçülü $(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k})$ vektorlar fəzasını dolduran, hər hansı kəsişməyən k – ölçülü oblastlar olsun. Onda

$$\zeta_t = a_1^{(i)}\zeta_{t-1} + \dots + a_k^{(i)}\zeta_{t-k} + b^{(i)} e_t \qquad (2)$$

şəklində tənliklə ifadə olunan təsadüfi prosesin S. m. (1) modelinin təbii ümumiləşməsidir. (2) şəklində tənliklər təsadüfi proseslərin çoxölçülü S. m. - ni təyin edir; bu halda $\{\zeta_t\}$, – n – ölçülü təsadüfi vektorlar ardıcıllığı, $\{e_t\}$ – asılı olmayan (bir-birindən və $s<t$ olduqda ζ_s vektorlarından), orta qiymətlərinin sıfır vektoru olan eyni qanunla paylanmış n – ölçülü təsadüfi vektorlar ardıcıllığı (kovariasion matrisi ilə verilmiş), $a_1^{(i)}, \dots, a_k^{(i)}$ və $b^{(i)}$ – hər hansı $(n\times n)$ – matrislər, $R^{(1)}, \dots, R^{(l)}$, – $(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k})$ vektorlarının nk – ölçülü fəzasının oblastlarıdır. Təsadüfi proseslərin S. m.-inə aid daha ümumi misallar mövcuddur (bax, məs., [2]).

$b^{(1)} = \dots = b^{(l)}$ olduqda təsadüfi prosesin (2) şəklində S. m.-nə

$$\zeta_t = f(\zeta_{t-1}, \dots, \zeta_{t-k}) + be_t$$

şəklində tənliklə verilən ümumi *qeyri – xətti avtoreqressiv prosesin* hissəvi xətti approksimasiyası kimi baxmaq olar, burada $f(x_1, \dots, x_k)$, – $i=1,\dots,l$ qiymətlərində hər bir $R^{(i)}$ oblastı çərçivəsində xətti approksimasiya oluna bilinən k dəyişənli funksiyadır. Müxtəlif tətbiqi məsələlərdə (bax, [2]) təsadüfi prosesin S. m. istifadə olunur. Təsadüfi proseslərin S. m. nəzəriyyəsinin statistik məsələlərinə də baxılmışdır (bax, [1] – [3]).

Əd.: [1] P r i e s t l e y M. B., Spectral analysis and time series, v. 2, L., 1981; [2] T o n g H., Threshold models in non-linear time series analysis. – N. Y., 1983; [3] C h a n W. S., T o n g H., «J. Forecasting», 1986, v. 5, № 4, p. 217–28.

SƏDD NÖQTƏSİ « пороговая точка; breakdown point » – bax, *Robast statistik qiymət.*

SƏHV, XƏTA, FƏRQ « промах, погрешность, разность; error, mistake, deviation » – ölçmə nəticəsində müxtəlif səbəblərə görə yaranan ən böyük qiymətlər alan, ölçmə nəticəsini olduqca dəyişən xətalardır. Belə xətalar müşahidə olunduqda, ölçmə nəticələri üzərində hesablamalarda onlar nəzərə alınmamalıdır. Müşahidə olunan xətanın səhv olub-olmadığını təyin etmək üçün onu verilmiş ümumi çoxluqdakı digər qiymətlərilə müqayisə etmək lazımdır.

Əd.: [1] Д л и н А. М., Математическая статистика в технике. М., 1958.

SƏHV DEKODLAMA EHTİMALI « ошибочного декодирования вероятность; probability of error decoding » – rabitə kanalı ilə ötürülən *məlumatların bərpa dəqiqliyinin* xarakterizasiyasının mümkün ölçülərindən biridir.

U mənbəindən hasil olunan X məlumatının M sayda müxtəlif $1, \dots, M$ qiymətlərini $p_m = \mathbf{P}\{X=m\}$ ehtimalları ilə aldığı fərz olunur; $m=1,\dots,M$. Fərz olunur ki, bir məlumat rabitə kanalı ilə bəzi qeyd olunmuş *kodlama və dekodlama* metodları vasitəsilə ötürülür. m sayda məlumatın ötürülməsində S. d. e. $\mathbf{P}_{e,m}$

$$\mathbf{P}_{e,m} = \mathbf{P}\{\widetilde{X} \ne m \mid X = m\}$$

bərabərliyi ilə verilir, burada $\widetilde{X}$ – kanalın çıxışında dekodlanmış məlumatdır. S ə h v i n o r t a e h t i m a l ı

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{P}\{\widetilde{X} \ne X\} = \sum_{m=1}^{M} p_m \mathbf{P}_{e,m}$$

kəmiyyətinə deyilir. *Səhvin maksimal ehtimalı*

$$\mathbf{P}_{\max} = \max_{m=1,\dots,M} \mathbf{P}_{e,m}$$

kəmiyyətinə deyilir.

$$\mathbf{P}_e^{\text{opt}} = \inf \mathbf{P}_e$$

düsturu ilə təyin olunan o p t i m a l S. d. e. xüsusilə maraqlıdır, burada aşağı sərhəd kodlama və dekodlamanın bütün mümkün metodları üzrə götürülür. Ümumi halda, $\mathbf{P}_e^{\text{opt}}$ üçün ifadə almaq olduqca çətindir, odur ki, X məlumatındakı M-in aldığı qiymətlər sayı artdıqda və uyğun olaraq kanal üzrə ötürmə uzunluğu artdıqda $\mathbf{P}_e^{\text{opt}}$ ehtimalının asimptotik yaxınlaşmasını araşdırmaq daha maraqlıdır.

Məs., X məlumatı eyni ($p_m = 1/M$) ehtimalla $M = [2^{nR}]$ sayda qiymətlər aldığı halda, diskret zamanlı rabitə kanalının N uzunluqlu parçasından istifadə olunur və $R = \text{const}$, $N \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}_e^{\text{opt}}$ ehtimalı asimptotik olaraq araşdırılır. Tipik hal $R < C$ olduqda (C – kanalın ötürücülük qabiliyyətidir) $\mathbf{P}_e^{\text{opt}}$

ehtimalının eksponensial azaldığı və $R > C$ olduqda $1 - \mathbf{P}_e^{\text{opt}}$-nin eksponensial azaldığı hal sayılır.

Azalma sürətinin olması etibarlılıq əmsalı ilə xarakterizə olunur və onun aşağı və yuxarı sərhədlərinin də olduğu fərz olunur (bax, *Təsadüfi kodla*(n)*ma*; sərhəd). $\mathbf{P}_e^{\text{opt}}$ ehtimalının belə asimptotikası kanalların geniş sinfi üçün isbat olunmuşdur (xüsusi halda, diskret zamanlı bütün stasionar erqodik kanallar üçün).

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

SƏPƏLƏNMƏ(si) paylanmanın « **разброс** распределения; **dispersion** of distribution » – bax, *Səpələnmə*(si) təsadüfi kəmiyyətin.

SƏPƏLƏNMƏ(si) seçimin « **рассеивание** выборки; **dispersion** of a sample » – səpələnmə mərkəzi adlandırılan hər hansı seçilmiş nöqtəyə nəzərən *seçim* elementlərinin səpələnməsinin kəmiyyət xarakteristikasıdır. Birölçülü halda səpələnmə mərkəzi kimi, adətən, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ilkin seçimi üzrə qurulmuş empirik paylanmanın orta qiyməti, medianı və ya modası seçilir, seçimin S. ölçüsü isə münasib qaydada seçilmiş statistikanın köməyilə təyin olunur. Məs., seçimin S. ölçüsü kimi əksər hallarda

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

– seçimi ortasına nəzərən

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_i - \overline{X}_n \right|, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \quad \text{və} \quad S_n$$

statistikalarına baxılır; bunlar uyğun olaraq, seçimin orta mütləq yayınması, seçimi dispersiya və seçimin kvadratik orta yayınması adlanır. S. haqqında mühüm informasiyanı variasiya əmsalı və ya seçimin orta nisbi yayınması adlandırılan $V = S_n / \overline{X}_n$ statistikası daşıyır. Seçimin S.-nin digər mühüm xarakteristikaları empirik paylanmanın asimmetriya və eksses əmsallarıdır.

Əd.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Voinov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 2 – Multivariate case, Dordrecht, 1996.

SƏPƏLƏNMƏ(si) təsadüfi kəmiyyətin « **разброс** случайной величины; **dispersion** of a random variable », paylanmanın səpələnməsi, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasının ədədi xarakteristikasıdır və bu təsadüfi kəmiyyətin xarakteristik funksiyası $f_\xi(t)$ əsasında aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\mathbb{B}_r(\xi) = -2 \int_0^1 \operatorname{Re} \log f_\xi(t) \mu(dt) \Big/ r^2 \int_0^1 t^2 \mu(dt),$$

burada μ – hər hansı ölçüdür və bu ölçü üçün məxrəcdəki inteqral sonludur və r – təsadüfi kəmiyyətin *indeksindən* kiçik olan müsbət ədəddir.

Təsadüfi kəmiyyətin S. dispersiyanın bir çox xassələrinə malikdir, məsələn, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün additivlik xassəsini ödəyir. Bununla yanaşı zəif yığılma topologiyasında bu xarakteristika kəsilməzdir. Ölçünün $t = 1$ nöqtəsində cırlaşmış halına sanki yəqin yüngül səpələnmə, $\mu(dt) = dt$ olduğu halda isə ağır səpələnmə uyğundur. Təsadüfi kəmiyyətin S. və onun ümumiləşmələri çoxölçülü halda, təsadüfi kəmiyyətlər və vektorların cəmlənmə modellərində faydalı vasitədir.

Əd.: «*Mərkəz*(i) təsadüfi kəmiyyətin» məqaləsinə bax.

SƏPƏLƏNMƏ ELLİPSOİDİ « рассеивания эллипсоид; ellipsoid of concentration » – *təsadüfi vektorun* realizasiyaları fəzasında ellipsoiddir, hər hansı vektor ətrafında bu vektorun ehtimal paylanmalarının topalanmasını ikinci tərtib momentlər terminləri vasitəsilə xarakterizə edir. X, – n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathsf{T}}$ qiymətlərini alan təsadüfi vektor, B – bu vektorun cırlaşmayan kovariasion matrisi olsun. Bu halda, ixtiyari qeyd olunmuş $a \in \mathbb{R}^n$ vektoru üçün, realizasiyalar fəzası $\mathbb{R}^n$-də a vektoruna nəzərən X təsadüfi vektorunun ehtimal paylanmasının səpələnmə ellipsoidi və ya X təsadüfi vektorunun səpələnmə ellipsoidi adlandırılan

$$(x - a)^{\mathsf{T}} B^{-1} (x - a) = n + 2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

– ellipsoidini təyin etmək olar. Məs., əgər $a = \mathbf{M} X$ olarsa, onda S. e. X təsadüfi vektorunun paylanma ehtimallarının onun riyazi gözləməsi $\mathbf{M} X$ ətrafında topalanmasının həndəsi xarakteristikasıdır.

Naməlum n – ölçülü θ parametrinin statistik qiymətləndirilməsi məsələsində S. e. anlayışının köməyilə θ parametrinin bütün meylsiz T statistik qiymətlərinin $\tau = \{T\}$ çoxluğunda hissəvi nizamlama münasibətini daxil etmək olar; bu halda fərz olunur ki, bu statistikalar cırlaşmayan kovariasion matrislərə malikdirlər və iki $T_1, T_2 \in \tau$ statistik qiymətlərindən T_1 statistik qiyməti o halda üstün hesab olunur ki, T_1 statistik qiymətinin S. e. T_2 statistik qiymətinin S. e.-nin daxilində bütünlüklə yerləşmiş olsun. Məhz bu mənada vektorun naməlum parametrinin meylsiz effektiv statistik qiymətləri ən yaxşı statistik qiymətlər hesab olunur, yəni meylsiz effektiv statistik qiymətin S. e. ixtiyari başqa bir meylsiz statistik qiymətin S. e.-nin daxilində yerləşir.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Ибрагимов А. И., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

SƏPƏLƏNMİŞ ÖLÇÜ « рассеянная мера; diffuce / non-atomic measure » – bax, *Puasson nöqtəvi prosesi*, *Təsadüfi ölçü.*

SƏRBƏST ENERJİ « свободная энергия; free energy » – Λ-ə aid tutumda $Z_\Lambda(u)$ statistik cəmi vasitəsilə,

$$F_\Lambda^U(\beta) = -\ln Z_\Lambda(U) \tag{1}$$

düsturu ilə təyin olunan statistik mexanika modellərinin ən mühüm xarakteristikalarındandır.

β tərs temperaturundan asılı $U\beta = \beta U$ potensiallar ailəsinə baxıldığı halda S. e.

$$F_\Lambda^U(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_\Lambda \tag{2}$$

kimi təyin olunur. Van – Hov teoreminə müvafiq olaraq halların geniş sinfi üçün

$$f(\beta) = \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|} F_\Lambda^U(\beta) \qquad (3)$$

limiti vardır və bu limit sonsuz həcmdə uyğun Gibbs meydanının xüsusi sərbəst enerjisi adlanır.

Gibbs paylanmaları nəzəriyyəsində aşağıdakı düstur mühüm rol oynayır. λ – həqiqi parametr, $x_\Lambda = (x_t,\ t\in\Lambda)\in X^\Lambda$ və Ψ , – x_Λ realizasiyasının ölçülən funksiyası olduqda, $H_\Lambda^\lambda(x_\Lambda) = H(x_\Lambda) + \lambda\Psi(x_\Lambda)$ hamiltonianlarının ailəsi ilə verilmiş diskret arqumentli meydan halında

$$\int_X \Lambda\,\Psi(x_\Lambda)\,p_\Lambda(x_\Lambda)\prod_{t\in\Lambda}\mathbf{m}(dx_t) = \frac{1}{|\Lambda|}\frac{\partial}{\partial\lambda}F_\Lambda^\lambda\Big|_{\lambda=0}$$

[burada p_Λ – hamiltonu H olan Gibbs paylanmasının sıxlığı, $\mathbf{m}$ ölçüdür və p_Λ sıxlığına isə bu ölçüyə nəzərən baxılır, F_Λ^λ , – H_Λ^λ hamiltonianı üçün (1) düsturu ilə statistik cəm ilə təyin olunan sərbəst enerjidir]. (2) düsturu ilə verilən S. e. halında, $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ qabında sistem halında və nəhayət, Gibbs təsadüfi meydanının funksionallarının orta qiymətlərinin ifadə olunduğu halda (3) limit S. e.-si üçün də analoji düsturlar doğrudur.

Faza keçidləri nəzəriyyəsində funksionalının orta qiymətlərinin parametrlərdən analitik asılılığı (Gibbs meydanında) haqqında məsələ mühüm yer tutur; bu parametrlərin meydanın potensialından (məs., β tərs temperaturu və μ kimyəvi potensialından) analitik asılılığı nəzərdə tutulur. Statistik cəm belə parametrlərdən analitik asılı olduğundan, S. e. və onun törəmələri üçün bu doğru olmur, bu isə onunla bağlıdır ki, parametrlərin kompleks qiymətləri üçün statistik cəm sıfra bərabər ola bilər. Sonsuz həcmin limit halında belə xüsusiyyətlər parametrlərin həqiqi qiymətlərində də ola bilər, bu isə onunla bağlıdır ki, statistik cəmin kompleks sıfırları $|\Lambda|\to\infty$ olduqda asimptotik olaraq həqiqi oxa yaxınlaşa bilər. Bununla əlaqədar olaraq Gibbs təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində statistik cəmlərin sıfra çevrilmədikləri (məs., Li – Yanq teoreminin şərtlərində) kompleks müstəvidə oblastların Λ üzrə müntəzəm statistik qiymətləri mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

SƏRBƏST QAZ « свободный газ; free gas » – bax, *İdeal qaz*.

SƏRBƏST MARKOV MEYDANI « свободное марковское поле; free Markov field » – $\mathbb{R}^d$-də elə stasionar Qauss *təsadüfi meydanıdır* ki, onun orta qiyməti sıfra, spektral sıxlığı $(k^2+m^2)^{-1}$-ə bərabərdir ($k\in\mathbb{R}^d$ – spektral parametr, $m\ge 0$ – k ü t l ə adlanan ədəddir). $d=1$ və $m>0$ olduqda bu Ornşteyn – Ulenbek stasionar Markov Qauss prosesidir. $d\ge 2$ olduqda spektral sıxlıq inteqrallanmır və uyğun meydan adi mənada mövcud olmur. Lakin $d=2$, $m>0$ və $d\ge 3$ olduqda spektral sıxlığın inteqralı yalnız sonsuzluqda dağılır.

Bu hal S. M. m.-nı ümumiləşmiş funksiyaların $S'(\mathbb{R}^d)$ fəzasında ehtimal paylanması kimi qurmağa imkan verir. Bu meydan Markov xassəsi və əksolunmalarda müsbətlik kimi xassələrə malikdir.

Əd.: [1] Г л и м м Д ж., Д ж а ф ф е Ф., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984; [2] С а й м о н Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Д о б р у ш и н Р. Л., М и н л о с Р. А., Исследование свойств обобщенных гауссовских полей, в сб.: Задачи механики и математической физики. Посвящается памяти И. Г. Петровского, М., 1976, с. 117–65; [4] М о л ч а н Г. М., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 4, с. 784–87; [5] N e l s o n E., «J. Funct. Anal.», 1973, v. 12, № 2, p. 211–27.

SƏRBƏST MEYDAN « свободное поле; free field » – bax, *Markov təsadüfi meydanı*.

SƏRHƏD–ÇIXIŞ « граница–выход; exit boundary » – bax, *Martin sərhədi*.

SƏRHƏD–GİRİŞ « граница–вход; entrance boundary » – bax, *Martin sərhədi*.

SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ t ə s a d ü f i d o l a ş m a l a r ü ç ü n **« граничные задачи** д л я с л у ч а й н ы х б л у ж д а н и й; **boundary valued problems** f o r r a n d o m w a l k s **»** – sərhəd funksionallarının paylanmalarının öyrənilməsi ilə bağlı məsələlərdir. Sərhəd məsələləri mahiyyətcə *təsadüfi dolaşmanın* tipi (dim. – ölçülüyü, zaman üzrə diskret və ya kəsilməzliyi, sıçrayışların paylanmaları üzərinə qoyulan şərtlər və onların asılılığı və s.) və baxılan sərhəd funksionallarının şəklindən asılı olaraq təyin olunur. S. m.-nə nümunə olaraq *iflas məsələsi* və *seçki məsələsini* göstərmək olar.

$S_0, S_1, \ldots$ – birölçülü təsadüfi dolaşma olsun. Bu dolaşma eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin cəmləri ilə doğurulmuş təsadüfi dolaşmadır:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_j . \qquad (*)$$

(*) şəklində təsadüfi dolaşmalar üçün əsas S. m.-dən: $\sup_{k\le n} S_k$ funksionalının, zolaqdan ilk çıxış anının, çatım və ötüm (eksses və defekt) kəmiyyətlərinin paylanmaları haqqında məsələləri qeyd etmək olar. Təsadüfi dolaşmalar üçün S. m.-nin həlli metodları yanaşmaların müxtəlifliyi ilə xarakterizə olunur.

Əvvəlcə, axtarılan paylanmalar üçün aşkar düsturların axtarılması mümkün olan halı qeyd etmək lazımdır. Fərz olunur ki, (*)-dakı X_i-lər tamqiymətlidirlər. Əgər

$$\sum_{k=-\infty}^{1}\mathbf{P}\{X_j = k\} = 1, \quad \mathbf{P}\{X_j = 1\} > 0,$$

$$\left(\sum_{k=-1}^{\infty}\mathbf{P}\{X_j = k\} = 1,\ \mathbf{P}\{X_j = -1\} > 0\right)$$

olarsa, onda $0, S_1, S_2, \ldots$ təsadüfi dolaşması y u x a r ı d a n (a ş a ğ ı d a n) k ə s i l m ə z d o l a ş m a adlanır. Yuxarıdan (aşağıdan) kəsilməz təsadüfi dolaşmalar S. m.-də xüsusi yer tutur, belə ki, bunların çoxsaylı tətbiqləri, təsadüfi dolaşmanın trayektoriyalarının birtərəfli və ya ikitərəfli düzxətli sərhədlərdən çıxması ilə bağlı əsas funksionalların paylanmalarının aşkar

ifadələrinin tapılması mümkünlüyü bunu əsaslandırır (bax, [1], [2], [4], [5]). Məs., kəsilməz F paylanmalı, n həcmli iki seçim üzrə qurulmuş $F_n(x)$ və $G_n(x)$ empirik paylanma funksiyalarının maksimal fərqi haqqında məsələyə baxılır. Əgər

$$D^+(n) = \sup_x (F_n(x) - G_n(x)),$$
$$D(n) = \sup_x |F_n(x) - G_n(x)|$$

işarələmələrini qəbul edib, seçimi qiymətləri $z_1 < z_2 < \ldots < z_{2n}$ artan qaydada sıraya düzdükdən sonra, z_j birinci seçimə aid olduqda, $X_j = 1$, əks halda $X_j = -1$ götürülərsə, onda

$$\mathbf{P}\{nD^+(n) < z\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\max_{0\le k\le 2n} S_k < z / S_{2n} = 0\} = 1 - C_{2n}^{n-z} / C_{2n}^n,$$
$$\mathbf{P}\{nD(n) < z\} = \mathbf{P}\{\max_{0\le k\le 2n} |S_k| < z | S_{2n} = 0\} =$$
$$= \sum_{k=-[n/z]}^{[n/z]} (-1)^k C_{2n}^{n-kz} / C_{2n}^n, \quad z = [z]$$

bərabərlikləri doğrudur. Bu münasibətlərin asimptotik analizindən Smirnov teoremi alınır:

$z > 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\, D^+(n) < z\right\} \to 1 - e^{-2z^2}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\, D(n) < z\right\} \to K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

münasibətləri doğrudur.

Bu nəticələrdən iki seçim bircins olduğu halda Kolmoqorov – Smirnov kriterisinin qurulmasında istifadə olunur.

Baxılan misala

$$D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$$

Kolmoqorov statistikasının araşdırılması məsələsini də əlavə etmək olar. İsbat olunmuşdur ki,

$$\mathbf{P}\{nD_n < c\} = \mathbf{P}\{\max_{0\le k\le n} |S_k| < c,\ S_n = 0\}\, \frac{n!\, e^n}{n^n},$$
$$c = 1, \ldots, n,$$

burada

$$\mathbf{P}\{X_j = k - 1\} = \frac{1}{k!}\, e^{-1},\ k = 0, 1, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n}\, D_n < z\} = K(z).$$

D_n -in paylanmasının dəqiq ifadələri olduqca böyükdür, bununla belə, bunlardan paylanmanın asimptotikasının ətraflı araşdırılmasında müvəffəqiyyətlə istifadə etmək olur (bax, [4]).

Yuxarıdan kəsilməz təsadüfi dolaşmaların səciyyəvi xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, əgər $S_n \ge x > 0$ (x – tam ədəddir) olarsa, onda hökmən elə $k \le n$ tapılar ki, $S_k = x$ olur. Əgər X_k tamqiymətli eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\mathbf{P}\{X_k \ge 2\} = 0$ şərti

$$n\, \mathbf{P}\{Y(x) = n\} = x\, \mathbf{P}\{S_n = x\},\ x \ge 1,$$
$$Y(x) = \min\{k : S_k \ge x\}$$

münasibətlərinin ödənməsi üçün zəruri və kafidir. Bundan başqa, $x \ge 0$ olduqda $\mathbf{M}\{z^{Y(x)};\ Y(x) < \infty\} = p^x(z)$ olur, burada $p(z)$, – $z\, \mathbf{M}\, p^{-X_1} = 1$, $|z| \le 1$ tənliyinin $|p| \le 1$ oblastında yeganə köküdür.

Əgər X_1 təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanması ixtiyari olarsa, onda S. m.-nin həllərinin ən effektiv və universal metodu *faktorizasion eyniliklərdir*.

S. m.-nin həllində paylanmaların asimptotik xassələrinin öyrənilməsinə xüsusi yer ayrılır. Axtarılan paylanmaların aşkar ifadələrinin qeyd olunan analitik analizi ilə yanaşı, bir sıra digər yanaşmalar da vardır. S. m.-nin analitik həlli, bir qayda olaraq, inteqral-fərq tənliklərinə gətirilir. Məs., $x \in (-a, b)$ nöqtəsindən çıxan hissəciyin n müddəti ərzində $(-a, b)$ intervalını tərk etməsi ehtimalı $u_n(x, a, b)$

$$u_{n+1}(x, a, b) = \int_{-a-x}^{b-x} u_n(x + y,\ a,\ b)\, dF(y) +$$
$$+ 1 - F(b - x) + F(-a - x) \qquad (1)$$

tənliyini ödəyir, burada $F(x) = \mathbf{P}\{X_1 < x\}$; (ilk sıçrayış üzrə tam ehtimal düsturu).

Bu istiqamətdə, Kolmoqorov – Petrovski məsələsi adı ilə məlum olan, S. m.-ndən ən təbiisi olan bir məsələnin asimptotik analizi həyata keçirilmişdir. Bu məsələdə $\{S_n\}$ trayektoriyalarının müəyyən əyrilərlə məhdudlanmış zolaqdan çıxması ilə bağlı hal araşdırılmışdır. Fərz olunur ki, $[0, \infty)$ yarımoxunda verilmiş $g^+(t)$ və $g^-(t)$ funksiyaları $g^-(0) < 0 < g^+(0)$, $g^-(t) < g^+(t)$ şərtlərini ödəyirlər və $t \in [k/n,\ (k+1)/n]$, $k = 0, 1, \ldots$ olduqda $S_n(t) = S_k / \sqrt{n}$. Mühüm əhəmiyyət kəsb etməyən çətinliklərlə qarşılaşmamaq üçün $S_n(t)$ təsadüfi funksiyasının yalnız k/n tipli nöqtələrdəki qiymətlərinə baxılır.

$$\tau_+ = \min\{k/n : S_n(k/n) \equiv S_k / \sqrt{n} \ge g^+(k/n)\}$$

kəmiyyətinə $g^+(t)$ sərhədini ilk keçmə anı deyilir. Əgər bütün k -lar üçün $S_n(k/n) < g^+(k/n)$ olarsa, onda $\eta_+ = \infty$ olduğu hesab edilir. Analoji olaraq,

$$\tau_- = \min\{k/n\ :\ S_n(k/n) \le g^-(k/n)\}$$

kəmiyyəti təyin olunur. $\tau = \min\{\tau_-, \tau_+\}$ təsadüfi kəmiyyəti $S_n(t)$ trayektoriyasının $g^{\pm}(t)$ əyriləri arasındakı zolaqdan ilk çıxma anı adlanır. Əgər G ilə hamar $g^{\pm}(t)$ əyriləri arasındakı $[0, 1)$ -də verilmiş bütün funksiyalar çoxluğu işarə olunarsa, $S_n(t)$ isə $[0, 1)$ -də $S_n(t)$ -nin trayektoriyası kimi hesab edilərsə, onda

$$\mathbf{P}\{S_n(\cdot) \notin G\} = \mathbf{P}\{\tau \le 1\}$$

bərabərliyi doğrudur. Baxılan məsələdə sərhəd funksionallarının limit paylanması ilk dəfə olduqca mükəmməl surətdə A. N. Kolmoqorov (1931, 1933) və İ. Q. Petrovski (1934) tərəfindən öyrənilmişdir. Aydın olmuşdur ki, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{S_n(\cdot)\in G\}$ limit paylanması G -nin sərhədində verilən uyğun başlanğıc və sərhəd şərtləri ilə istilikkeçirmə tənliyinin həlli ilə təsvir olunur (bax, [6]). $\mathbf{P}\{\tau>1,\ S_n(1)<z\}$, $\mathbf{P}\{\tau=\tau_{\pm}\}$ ehtimalları üçün analoji hökmlər doğrudur. Bu standart Viner prosesi w üçün $\mathbf{P}\{S_n(\cdot)\in G\}\to\mathbf{P}\{w(\cdot)\in G\}$ yığılmasına uyğundur.

Bu məsələdə yığılma sürəti qiymətləndirilmişdir.

$$\mathbf{M}\left|X_1\right|^3=c_3<\infty,\quad \left|\,g^{\pm}(t+h)-g^{\pm}(t)\right|<K\,h,\quad h>0$$

$$\Delta_n(T)=\Big|\ \mathbf{P}\{g^{-}(k/n)<S_k/\sqrt{n}<g^{+}(k/n),\ 1\le k\le nT\}-$$

$$-\mathbf{P}\{\,g^{-}(t)<w(t)<g^{+}(t),\ 0\le t\le T\,\}\ \Big|$$

olsun. Onda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur (bax, [7], [8]):

$$\Delta_n(1)\le L_1(k+1)c_3/\sqrt{n}\ ,\ \Delta_n(\infty)\le L_2\,k\,c_3/\sqrt{n}$$

(L_1, L_2 – mütləq sabitlərdir), $c_3=\mathbf{M}\left|X_1-\mathbf{M}X_1\right|^3$.

(1)-də

$$u(z,x,a,b)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n u_n(x,a,b)$$

doğuran funksiyalarına keçdikdə adi inteqral tənliklər alınır. Bu tənliklərin həllərinin asimptotik xassələrinin öyrənilməsi üçün yanaşmalardan biri kiçik parametrli tənliklərin həllində Vişik və Lyüsternik metodundan istifadə ilə bağlıdır (bax, [4]). Bu istiqamətdə baxılan məsələlərin potensial nəzəriyyəsi ilə dərin əlaqələrinin olduğu aydın olur. Digər yanaşma paylanmaların ikiqat çevirmələrinin sonrakı çevirməsi götürülməklə analitik xassələrinin öyrənilməsinə əsaslanır (bax, [3], [9]). Burada bu və ya digər faktorizasion eyniliklərdən istifadə olunur. Faktorizasiya komponentlərinin analitik strukturunun analizi təsadüfi dolaşmadakı hissəciyin vəziyyəti ilə bağlı dəyişənlərdən biri üzrə ikiqat çevirmələr aparmağa imkan verir, bu halda baş hissə ayrılır və qalan hissə qiymətləndirilir. Sonrakı mərhələdə alınan baş hissələrə aşırım metodunun (rus. метод перевала) bəzi modifikasiyası tətbiq olunur. Bu yanaşma [3]-də işlənilmişdir və burada Kramer tipli şərtlər ödənildiyi halda $\mathbf{P}\{\tau(x)=n,\ S_n\ge x+y\}$, $\mathbf{P}\{\max_{k\le n} S_k\ge x,\ S_n<x-y\}$ ehtimallarının tam asimptotik ayrılışları n -dən asılı olaraq, x və y -in dəyişikliklərinə müxtəlif məhdudiyyətlərlə və $x=x(n)\to\infty$, $y=y(n)\to\infty$, $x+y=O(n)$ tələblərilə uyuşanlıq şərtilə tapılmışdır. Bu sxem üzrə iki düzxətli sərhədli məsələlər üçün (bax, [9]), asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslər üçün birsərhədli və ikisərhədli məsələlərdə tam asimptotik ayrılışlar alınmışdır (bax, [10]).

Təsadüfi dolaşmaya Markov prosesi kimi baxdıqda onun potensial nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi olduğu aydın olur (bax, [1]).

Potensial nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə S. m.-nin həllini təsadüfi dolaşmaların geniş sinfi üçün paylanmaların asimptotik analizi də daxil olmaqla, təsvir etməyə imkan verir.

Təsadüfi dolaşmanın trayektoriyalarının qeyri – xətti birtərəfli və ya ikitərəfli sərhədləri kəsməsi haqqında S. m.-nin daha ətraflı öyrənilməsində kombinatorika metodları, faktorizasion eyniliklər, potensial metodları az effektli olur.

$$\tau^*=\inf\{k:\ S_k\ge g^{+}(k)\},$$

$$\sigma=\inf\{k:\ S_k\notin(g^{-}(k),\ g^{+}(k))\}$$

olsun, burada $g^{\pm}$ – hər hansı funksiyalardır. τ^* və σ-nın paylanmaları üzrə araşdırmaların əsas hissəsi bu paylanmaların qiymətləndirilməsinə və asimptotikasına həsr olunmuşdur; bu araşdırmalar sərhədlər üzərinə və X_j -nin paylanması üzərinə qoyulan müxtəlif məhdudiyyətlərlə (Kramer şərti, paylanma «qalıqlarının» requlyar dəyişməsi, moment məhdudiyyətləri və s.) aparılmışdır. Burada araşdırmaların müxtəlif metodları: martinqal metodu (bax, [11]), invariantlıq prinsipinin geniş surətdə istifadəsi tətbiq olunur. Əgər $g^{\pm}(k)$ elə dəyişirlərsə ki, $\mathbf{P}\{\tau^*\le n\}$, $\mathbf{P}\{\sigma\le n\}\to 0$ münasibəti ödənilsin, onda təsadüfi dolaşmalar üçün *böyük yayınmalar* haqqında məsələ alınır.

Əd.: [1] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645–94; [4] Королюк В. С., Боровских Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981; [5] Гнеденко Б. В., Королюк В. С., «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 4, с. 525–28; [6] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Отдел матем. и естеств. наук», 1931, № 7, с. 959–62; 1933, № 3, с. 363–72 (см.: Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 114-16, 141-48); [7] Нагаев С. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 2, с. 179–99; [8] Сахненко А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 2, с. 416–21; [9] Лотов В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 3, с. 475–85, в. 4, с. 873–79; [10] Рогозин Б. А., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 6, с. 1334–63; [11] Новиков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 158, с. 130–40.

SƏRHƏD PROSESİ « граничный процесс; boundary process » – bax, *Markov prosesi*; davamı.

SƏSVERMƏ PROSESİ « голосования процесс; voting process » – bax, *Markov prosesi* qarşılıqlı təsirli.

SFERALAR ÜZRƏ DOLAŞMALAR METODU « блужданий по сферам метод; spherical process method / random walk on a sphere method » – $w(t)$ *Viner prosesinin* təsadüfi trayektoriyasının sərhədə ilk çıxışına qədər $[w(\tau)\in\partial D]$ hər hansı D oblastında kobud modelləşdirilmənin spesifik alqoritmlərinin toplusudur; bəzi elliptik tənliklərin Monte – Karlo metodu ilə həllində istifadə olunur. D -də $\Delta u=0$ Laplas tənliyi üçün Dirixle məsələsinin Monte – Karlo metodu ilə həlli üçün, $u(x)=\mathbf{M}_x f(w(\tau))$ ifadəsi əsasında ən sadə $u(y)=f(y)$, $y\in\partial D$ -də formasında təklif olunmuşdur (bax, [1]), burada riyazi gözləmə $w(0)=x$ olan bütün trayektoriyalar üzrə götürülür. S. üzrə d. m. $w(t)$, $0\le t\le\tau$ trayektoriyasının bütün realizasiyaları əvəzinə, rekurrent olaraq $w(\theta_n)$, $\theta_0=0$ ardıcıllığını verir, $n\to\infty$ olduqda $\theta_n\to\tau$ münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $w(\theta_n)$ trayektoriyanın təsadüfi vəziyyətidir və o, mərkəzi $w(\theta_{n-1})$ -də olan D oblastı daxilinə çəkilmiş maksimal S_n sferasına ilk çıxış vəziyyəti kimi anlaşılır və bütün sfera üzrə eyni ehtimalla paylanmışdır: $\mathbf{P}\{w(\theta_n)\in dS\}=dS/S_{n-1}$. Bu halda ∂D sərhədinin ε – ətrafına çıxışa qədər

υ addım edilir, $F_{x\upsilon} \rightleftarrows |\ln \varepsilon|$, sonra isə, məs., $w(\tau)\lambda w_\varepsilon(\tau) = \arg\min_{y\in\partial D} \|w(\theta_\upsilon) - y\|$ bərabərliyi alınır. Zəruriyyət yarandıqda $\theta_n - \theta_{k-1}$, $k = 1, \ldots, \nu$ kəmiyyətləri də asılı olmadan istifadə olunur (bax, [2]). S. ü. d. m.-nun üstün cəhəti modelləşdirmənin sadə və qənaətli olmasıdır.

Əd.: [1] M u l l e r M., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 569–89; [2] Е р м а к о в С. М., Н е к р у т к и н В. В., С и п и н А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984.

SFERİK BHATTAÇARYA – RAO MƏSAFƏSİ « сферическое расстояние Бхаттачарья – Рао; Bhattacharya – Rao spherical distance » – bax, *Riman informasion metrikası.*

SFERİK SİMMETRİK PAYLANMA « сферически симметричное распределение; spherically symmetric distribution », $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında sferik simmetrik ehtimal paylanması – elə *paylanmadır* ki, qeyd olunmuş O nöqtəsi ətrafında fırlanma nəticəsində biri digərindən alınan ixtiyari iki ölçülən çoxluqların ehtimalları üst-üstə düşür. Sonradan fərz olunur ki, O nöqtəsi koordinant başlanğıcı ilə üst-üstə düşür.

$\mathbb{R}^k$-da S. s. p.-ya mühüm misal paylanma sıxlığı

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\, e^{-(x_1^2 + \ldots + x_k^2)/2}$$

olan normal paylanmadır, $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, bu paylanmanın xarakteristik funksiyası

$$f(t) = e^{-(t_1^2 + \ldots + t_k^2)/2},$$

düsturu ilə ifadə olunur, $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Bu misalda olduğu kimi, ixtiyari S. s. p.-nın ehtimal sıxlığı vardırsa, onda o, yalnız $\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$ kəmiyyətindən, xarakteristik funksiyası isə $\tau = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_k^2}$ kəmiyyətindən asılı olur.

$X \in \mathbb{R}^k$ – S. s. p.-ya malik təsadüfi vektor, $p_X(\rho)$ – onun ehtimal sıxlığı, $f_X(\tau)$ – xarakteristik funksiyası olsun. Onda

$$f_X(\tau) = \frac{2^{l+1}\pi^{l+1}}{\tau^l} \int_\rho^\infty \rho^{l+1} J_l(\rho\tau)\, p_X(\rho)\, d\rho \qquad (1)$$

düsturu doğrudur, burada $J_l(x)$, – l tərtib Bessel funksiyasıdır; $l = k/2 - 1$. Xüsusi halda, X vektoru $x_1^2 + \ldots + x_k^2 \le 1$ kürəsində müntəzəm qanunla paylanarsa, uyğun xarakteristik funksiya aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$f_X(\tau) = \frac{\Gamma(l+2)2^{l+1}}{\tau^{l+1}} J_{l+1}(\tau).$$

Digər xüsusi halda, paylanma $x_1^2 + \ldots + x_k^2 = 1$ sferasının səthi üzərində müntəzəm paylanma olarsa (təsadüfi vektor vahid uzunluqludur, bütün istiqamətləri eyni ehtimallıdır; X -in əvəzinə U işarəsi istifadə olunacaqdır), onda uyğun xarakteristik funksiya

$$f_U(\tau) = \frac{\Gamma(l+1)2^l}{\tau^l} J_l(\tau) \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunur.

$\mathbb{R}^k$-da vahid radiuslu sferanın səthində müntəzəm paylanma bütün S. s. p.-lar arasında xüsusi yer tutur.

1) S. s. p.-ya malik, uzunluğu $|X|$ olan təsadüfi X vektorunun ehtimal sıxlığı

$$p_{|X|}(\rho) = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}\, \rho^{k-1}\, p_X(\rho)$$

düsturu ilə təyin olunur. Buna görə də, (1) və (2) düsturlarından aşağıdakı ifadə alınır:

$$f_X(\tau) = \int_0^\infty f_U(\rho\tau)\, p_{|X|}(\rho)\, d\rho\,.$$

Beləliklə, X -in paylanması $|X|U$ hasilinin paylanması kimi ifadə oluna bilinər, bu halda vuruqların asılı olmadıqları fərz olunur və bu paylanma mərkəzi koordinat başlanğıcında olan sferalar üzərində müntəzəm paylanmaların «qarışığı» olur.

2) U vektorunun paylanması $\mathbb{R}^k$-da Lebeq ölçüsünə nəzərən sinqulyar paylanmadır. Lakin toplananlarından hər birinin paylanması U-nun paylanması ilə eyni olan, asılı olmayan $U_1, \ldots, U_n$, $n \ge 2$ təsadüfi vektorlarının cəminin paylanması sıxlığa malik olur. Məs., $k = 2$ və $n = 2$ olduqda $U_1 + U_2$ cəminin sıxlıq funksiyası

$$p_{U_1+U_2}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2\rho\sqrt{4-\rho^2}}, & 0 < \rho < 2, \\ 0, & \rho > 2 \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur. $k = 3$ olduqda $U_1 + \ldots + U_n$ cəminin sıxlığı n -in çox da böyük olmayan qiymətlərində Reley tərəfindən bəzi təsadüfi dolaşmaların tədqiqi ilə bağlı hesablanmışdır (bax, [1], [2]).

3) dim. – ölçünün artdığı hal ($k \to \infty$ olduğu hal). l – qeyd olunmuş ədəd, $U_1, \ldots, U_k$, – U vektorunun komponentləri olsun; k artdıqca bu vektorun komponentləri asimptotik asılı olmayan və normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olur. Daha dəqiq, $\sqrt{k}\,U_1, \ldots, \sqrt{k}\,U_l$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması asılı olmayan $(0,\ 1)$ parametrlərli normal qanunla paylanan $Z_1, \ldots, Z_l$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanmasına yığılır (bax, [3]). Hətta $\mathbb{R}^l$-də bu iki paylanma arasında «variasiya» üzrə məsafə $2(l+3)/(k-l-3)$ kəmiyyətini aşmır, $1 \le l \le k-4$. Buna görə də, $k \to \infty$ və $l = o(k)$ olduqda qeyd olunan paylanmaların «variasiya» üzrə yaxınlaşması qeyri – məhdud olaraq baş verir.

Ümumi hala nəzər salaraq, qeyd etmək düzgün olardı ki, $|X|$-in paylanması üzrə S. s. p.-ya malik X təsadüfi vektorunun komponentinin, məs., X_1-in paylanmasının axtarılması olduqca sadə məsələdir. Tərs məsələ – $|X|$-in paylanmasının X_1-in

paylanması üzrə tapılması (deməli, həm də X -in) *Abel inteqral tənliyinin* həllinin tapılmasını tələb edir.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Ч а н д р а с е к а р С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] К а ц М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965; [4] D i a c o n i s P., F r e e d m a n D., «Ann. Inst. H. Poincaré», Sup. an. № 2, 1987, t. 23, p. 397–423; [5] Х и н ч и н А. Я., Избранные труды по теории вероятностей, М., 1995, с. 383–420.

SFERİK VİNER PROSESİ « сферический винеровский процесс; spherical Wiener process » – vahid radiuslu S^{n-1} sferasında zaman üzrə bircins, aşağıdakı şərtləri ödəyən Markov prosesidir:

a) prosesin sanki bütün trayektoriyaları kəsilməzdirlər;

b) $x \in S^{n-1}$, Γ S^{n-1} -də Borel çoxluğu olduqda, keçid ehtimalı $P(t, x, \Gamma)$, S^{n-1} -də $SO(n)$ qrupunun tranzitiv təsirinə nəzərən invariantdır, yəni

$$P(t, g\,x, g\,\Gamma) = P(t, x, \Gamma);$$

a) şərti Lindeberq tipli: a)′ ixtiyari $\varepsilon > 0$ və $t > 0$ üçün

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{\|y-x\| \geq \varepsilon} P(t, x, d\,y) = 0$$

şərtinə ekvivalentdir. Sup-normaya malik kəsilməz funksiyaların Banax fəzası $C(S^{n-1})$ -də S. V. p. ilə doğurulmuş

$$(T_t f)(x) = \int\limits_{S^{n-1}} P(t, x, d\,y)\, f(y)$$

semiqrupu daraldıcı semiqrup olub, C_0 sinfindəndir. Onun infinitezimal operatoru A, c müsbət konstant, Δ_0 S^{n-1} -də Laplas operatoru olduqda (sferik koordinatlarla) $A = C\Delta_0$ bərabərliyi ilə təyin olunur:

$$\Delta_0 = \frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1} \sin^{n-3}\theta_{n-2}} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} \sin^{n-3} + \theta_{n-2} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} +$$

$$+ \ \ldots \ + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_1^2}\,.$$

Əd.: [1] Y o s i d a K., «Ann. Math. Statist.», 1949, v. 20, p. 292–96; [2] Y o s i d a K., «Pacific J. Math.», 1952, № 2, p. 263–70.

SFERİKLİK KRİTERİSİ « сферичности критерий; test of sphericity » – nəzəri kovariasion matrisi hər hansı verilən γ matrisinə mütənasib olan ümumi çoxluğun müvafiq empirik kovariasion matrisinin olması haqqında *statistik hipotezin yoxlanılması* qaydasıdır. γ məlum matris olduğundan onu xətti çevirmə tətbiq etməklə vahid $\mathbf{I}$ matrisi şəklində ifadə etmək mümkündür. C – müvafiq surətdə çevrilmiş empirik matris olsun. Yoxlamaq lazımdır ki, doğrudandamı $\sigma^2\mathbf{I}$ nəzəri matrisi C matrisinə uyğundur, σ^2 naməlumdur. Bu prosedur s f e r i k l i y i n y o x l a n ı l m a s ı adlanır.

Kriterinin statistikası:

$$l = \left(\frac{|C|}{((\operatorname{tr} C)/p)^p} \right)^{n/2}$$

düsturu ilə, momentlər isə

$$\mathbf{M}(l^{2r/n}) = p^{r_p} \frac{\Gamma(p(n-1)/2)}{\Gamma(pr + p(n-1)/2)} \prod_{j=1}^{p} \frac{\Gamma(r + (n-j)/2)}{\Gamma((n-j)/2)}$$

düsturu ilə verilir; $-n \ln l^{2/n}$ isə sərbəstlik dərəcəsi sayı $f = p(p+1)/2 - 1$ olan χ^2 – paylanması kimi paylanır. İkinci approksimasiyadan sonra

$$\rho = 1 - (2p^2 + p + 2) \big/ 6p(n-1)$$

düsturu alınır. S. k. meylsiz kriteridir.

Əd.: [1] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

SIÇRAYIŞ ANI « скачка момент; time of a jump » – bax, *Sıçrayışvari Markov prosesi*, *Sıçrayışvari təsadüfi proses*.

SIÇRAYIŞLAR ÖLÇÜSÜ « скачков мера; jump measure » – bax, *Levi ölçüsü*.

SIÇRAYIŞVARİ MARKOV PROSESİ « скачкообразный марковский процесс; jump Markov process » – zaman parametri t $T \subset (-\infty, \infty)$ -dan qiymətlər alan, ixtiyari $s \in T$ qiymətində hər bir trayektoriyası hər hansı təsadüfi $h = h(s) > 0$ uzunluqlu $[s, s+h]$ zaman intervalında sabit qalan *Markov prosesidir* (*qırılan Markov proseslərinə* baxıldıqda bu və bundan sonrakı tərifl ər təbii olaraq modifikasiya olunur). Əgər elə ən kiçik t elementi varsa ki, belə t istisna olunduqdan sonra baxılan ixtiyari $(t-\varepsilon, t]$, $\varepsilon > 0$, $t \in T$ intervalında trayektoriyanın sabitliyi pozularsa, $t \in T$ ədədi S. M. p.-nin s ı ç r a y ı ş a n ı adlanır. Əgər S. M. p.-nin ixtiyari trayektoriyasının sıçrayışları çoxluğu T -nin daxilində limit nöqtələrinə malik olmazsa, belə proses p i l l ə v a r i prosesdir. S. M. p.-lərinə bir çox asılı olmayan artımlarlı proseslər aiddir, o cümlədən, Puasson prosesi, vəziyyətləri çoxluğu sonlu Markov prosesləri və trayektoriyaları sağdan kəsilməz, vəziyyətləri çoxluğu hesabi Markov prosesləri belə proseslərdəndir. S. M. p.-ləri və xüsusilə də, pilləvari S. M. p. öz vəziyyətini ani olaraq, lakin çox da tez-tez dəyişməyən, eyni zamanda yeni vəziyyətə keçdikdə bu yeni vəziyyəti, ola bilsin ki, sistemin yalnız əvvəlki vəziyyətindən asılı ola bilən fiziki sistemlərin təsviri üçün çox münasib riyazi modeldir.

Daha sonra müəyyənlik üçün $T = [0, \infty)$ halına baxılır. $(X_t, \mathcal{A}_t, \mathbf{P}_{t,x})$ Markov prosesinin pilləvari olub-olmadığını müəyyənləşdirmək üçün aşağıdakı nəticədən istifadə etmək məsləhətdir (bu halda prosesin $(E, \mathcal{B})$ faza fəzasında verildiyi, onun keçid ehtimalları $p(s, x; t, \Gamma)$ -lərin məlum olduğu fərz olunur):

əgər

$$\lim_{h \downarrow 0} p(t, x;\ t+h,\ E \setminus \{x\}) = 0$$

münasibəti $t \geq 0$ və $x \in E$ üzrə müntəzəm ödənilərsə, X prosesi hər hansı pilləvari S. M. p.-nə ekvivalentdir. Geniş şərtlərlə

S. M. p. – hər halda ixtiyari bircins S. M. p. – ciddi Markov prosesidir (bax, [3], [4]).

Bir çox praktiki və nəzəri mühüm hallarda X S. M. p.-nin keçid funksiyası $p(s, x; t, \Gamma)$ Kolmoqorov düz və tərs tənliklərini ödəyir (bax, aşağı) və onlarla birqiymətli təyin olunur. Fərz olunur ki, $t \downarrow s$ olduqda

$$p(s, x; t, \Gamma) = \begin{cases} 1 - a(s, x)(t-s) + o(t-s), & x \in \Gamma, \\ a(s, x, \Gamma)(t-s) + o(t-s), & x \notin \Gamma, \end{cases}$$

burada $a(s, x, \cdot)$ – qeyd olunmuş $s \geq 0$ və $x \in E$ qiymətlərində $\mathscr{B}$ -də hər hansı ölçüdür və ölçü $\{x\}$ çoxluğuna sıfra bərabər çəki qarşı qoyur və $a(s, x) = a(s, x, E)$. Onda bəzi requlyarlıq şərtləri ödənildikdə (bax, [1], [2], [4]) aşağıdakı tənliklər doğrudurlar:

$$\frac{\partial p(s, x; t, \Gamma)}{\partial t} = -\int_{\Gamma} a(t, y)\, p(s, x; t, dy) + \int_{E} a(t, y, \Gamma)\, p(s, x; t, dy) \qquad (1)$$

– Kolmoqorov düz tənliyi;

$$\frac{\partial p(s, x; t, \Gamma)}{\partial s} = a(s, x)\, p(s, x; t, \Gamma) - \int_{E} p(s, y; t, \Gamma)\, a(s, x, dy) \qquad (2)$$

– Kolmoqorov tərs tənliyi.

S. M. p.-ləri üçün Kolmoqorov tənliklərinin varlığı və yeganəliyi teoremlərinə B. Pospişil (B. Pospisil) və U. Feller (W. Feller) 1935 – 36-da baxmağa başlamışlar.

Bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

Əd.: [1] Feller W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1940, v. 48, № 3, p. 488–515; [2] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

SIÇRAYIŞVARİ PROSES idarəolunan **« скачкообразный процесс** управляемый; controlled **jump process »** – bax, *İdarəolunan sıçrayışvari proses.*

SIÇRAYIŞVARİ TƏSADÜFİ PROSES « скачкообразный случайный процесс; random / stochastic jump process » – qiymətləri hər hansı $(E, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasından olan elə $(X_t, t \geq 0)$ təsadüfi prosesidir ki, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında elə $\Omega_1 \in \mathscr{A}$ hadisəsi tapılar ki, $\omega \in \Omega_1$ hadisəsi üçün bütün $t \to X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega_1$ trayektoriyaları E fəzasının diskret topologiyasında sağdan kəsilməzdirlər. Bu belə anlaşılır: bütün $s \geq 0$ və $\omega \in \Omega_1$ üçün elə müsbət $\delta = \delta(s, \omega)$ göstərmək olar ki, $0 \leq t < \delta$ olduqda $X(t+s) = X(s)$ olur. Əgər elə $t_n \uparrow \tau$ ardıcıllığı tapılarsa ki, $X_{t_n}(\omega) \neq X_{\tau}(\omega)$ olsun, bu halda $\tau > 0$ nöqtəsi $t \to X_t(\omega)$ trayektoriyasının sıçrayış anı adlanır. Sıçrayışvari prosesin sıçrayış anları $[0; \infty)$ yarımoxunda sanki yəqin hesabidən çox olmayan, tamamilə nizamlanmış çoxluq əmələ gətirir. Məs., ilk sıçrayış anı $\tau_1 > 0$ mövcuddur və bu andan sonra ikinci sıçrayış anı τ_2 olur və $\tau_2 > \tau_1$ və s. Əgər hər bir sonlu zaman intervalında sıçrayışların sayı sanki yəqin sonlu olarsa, S. t. p. pilləvari təsadüfi proses adlanır. Pilləvari X_t, $t \geq 0$ prosesinin trayektoriyası (τ_n, X_{τ_n}), $n = 0, 1, \ldots$, $\tau_0 = 0$ cütlər ardıcıllığı ilə birqiymətli təyin olunur; yəni $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$ olduqda $X_t = X_{\tau_n}$ olur.

Markov və semi – Markov sıçrayışvari prosesləri ən intensiv surətdə öyrənilir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

***SIFIR ÇOXLUQ « нулевое множество; null set »** – Ω fəzasının ölçülən altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathscr{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş μ *ölçüsü* sıfra bərabər olan ixtiyari $S \in \mathscr{A}$ çoxluğuna deyilir. $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ölçülü fəza olarsa, adətən, μ ölçüsü sıfra bərabər olan çoxluq μ – sıfır çoxluq adlanır, əgər hər hansı bir anlaşılmazlıq yaranmazsa, ixtiyari $S \in \mathscr{A}$ üçün $\mu(S) = 0$ olarsa, S -ə sıfır çoxluq deyilir.

Sıfır ehtimallı çoxluq, adətən, nəzərə alınmır və yalnız belə sıfır çoxluğunda fərqlənən iki təsadüfi kəmiyyət, adətən, «praktik olaraq üst-üstə düşür». Belə təsadüfi kəmiyyətlər formal olaraq ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər adlanır. Sıfır çoxluğun elə altçoxluqları ola bilər ki, onlarda ehtimal təyin olunmamışdır. Bax, *Tamamlanma*(sı) ölçünün.

SIFIR SİNFİ, VƏZİYYƏTLƏRİN Markov zəncirinin **« нулевой класс состояний** цепи Маркова; **null set** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

SIFIR – VAHİD QANUNU « нуль – единица закон; zero – one law » – müəyyən şərtlər ödənildikdə hər bir qalıq hadisəsinin ehtimalının sıfra və ya vahidə bərabər olması haqqında müddəadır. $\{\xi_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı ilə bağlı qalıq hadisələri çoxluğu $\sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$, σ – cəbrlərinin hər biri mötərizədəki təsadüfi kəmiyyətlərin doğurmuş olduğu σ – cəbrlərin kəsişməsi kimi təyin olunur.

Ümumi teoremi ilk dəfə A. N. Kolmoqorov isbat etmişdir (bax, [1], s. 116 – 17). $f(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ – sonsuz sayda arqumentlərin Ber funksiyası olsun. Əgər hər bir n üçün $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ məlum olduğu halda $\mathbf{P}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots) = 0 \mid \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ şərti ehtimalı $\mathbf{P}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots) = 0\}$ şərtsiz ehtimalına bərabər olarsa, onda bu sonuncu ehtimal ya 0 və ya 1-ə bərabərdir.

Eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün S. – v. q. qalıq hadisələrin σ – cəbri ilə müqayisədə hadisələrin daha geniş sinfi üçün doğrudur (bax, [13]). Bir sıra hallarda S. – v. q. martinqalların yığılması haqqında teoremlərin nəticəsi kimi alınır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Hewitt E., Savage L. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 80, № 2, p. 470–501.

SIFIR – VAHİD QANUNU Markov prosesləri üçün **« нуль – единица закон** для марковских процессов; **zero – one law** for Markov process **»** – elə teoremdir ki, bu teoremə görə *Markov prosesləri* ilə bağlı müəyyən hadisələrin ehtimalı yalnız 0 və ya 1 qiymət-

lərini alır. Vəziyyətləri çoxluğu $\mathscr{E}$ olan bircins Markov prosesi $X = (X_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$, $t \geq 0$ üçün S. – v. q.-nda hökm olunur ki, X normal proses olduqda (yəni $\mathbf{P}_x\{X_0 = x\} \equiv 1$ olduqda), bütün $\Lambda \subset \mathfrak{G}_0$ hadisələri üçün $\mathbf{P}_x\{\Lambda\} = 0$ və ya $\mathbf{P}_x\{\Lambda\} = 1$ olur, burada $\mathfrak{G}_t = \sigma\{X_s,\ 0 \leq s \leq t\}$. Bu teorem $\mathfrak{G}^* = \overline{\mathscr{A}_0} \cap \overline{\mathfrak{G}}$ σ – cəbrindən olan hadisələr üçün də doğrudur, burada $\mathfrak{G} = \sigma\{X_s;\ s \geq 0\}$, $\overline{\mathscr{A}_0}$ və $\overline{\mathfrak{G}}$ isə ixtiyari ilkin μ paylanmalarına uyğun $\mathbf{P}_\mu$ ölçüləri üzrə $\mathscr{A}_0$ və $\mathfrak{G}$-nın tamamlayıcılarının kəsişməsi kimi təyin olunur (bax, [2]). Sağ Markov prosesi üçün $\overline{\mathscr{A}_0} = \bigcap_{k>0} \overline{\mathscr{A}_k}$ olduğundan, $\mathfrak{G}^*$ $t = 0$ nöqtəsini daxilinə alan sonsuz kiçilən zaman ərzində prosesin cərəyan etməsi ilə rekonstruksiya olunan hadisələr çoxluğu kimi interpretasiya olunur.

S. – v. q. R. Blumental (R. Blumenthal) tərəfindən 1952-də verilmişdir.

Əd.: [1] Дынкин Е. В., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [2] Дынкин Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

SIFIR VƏZİYYƏTİ Markov zəncirinin **« нулевое состояние** цепи Маркова; **null set** of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

SIFIRAL SERİYALAR SXEMİ « нулевая схема серий; null triangular array scheme » – seriyalar sxemi təşkil edən $X_{k,n}$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $k = 1, \ldots, n$ üzrə ehtimala görə müntəzəm yığılma şərtini ödəyən *seriyalar sxemidir*. $X_{k,n}$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$ – təsadüfi kəmiyyətlərin ikiqat ardıcıllığı olsun. Bu ardıcıllığın n-ci sətrindəki $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $\{X_{k,n}\}$ ikiqat ardıcıllığı seriyalar sxemi adlanır (bax, *Seriyalar sxemi*). Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün n-in olduqca böyük qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{|X_{k,n}| > \varepsilon\} < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (*)$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə, seriyalar sxemi sıfıral seriyalar sxemi adlanır (və ya komponentləri asimptotik əhəmiyyətsiz seriyalar sxemi; rus. схема серий с асимптотически пренебрегаемыми компонентами). Bu tip təsadüfi kəmiyyətlər sistemləri tez-tez təsadüf olunduğundan bunlara belə xüsusi ad verilmişdir.

Misal. $\{X_j\}$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ olsun. $S_n a_n^{-1}$ normalanmış cəmi $X_{k,n} = X_k a_n^{-1}$ olan seriyalar sxemində n-ci seriyadakı təsadüfi kəmiyyətlər cəmidir. Əgər $a_n \to \infty$ olarsa, bu ardıcıllıq S. s. s.-dir.

S. s. s.-ndə n-ci seriyanı təşkil edən kəmiyyətlərin cəmi üçün limit paylanması (əgər varsa) *sonsuz bölünən paylanmadır*. Əgər asimptotik əhəmiyyətsizlik şərti (*) ödənilərsə, onda $X_{k,n}$ komponentlərinin eyni qanunla paylanıb-paylanmadıqları mühüm deyildir. Sonsuz bölünən paylanmalar sinfi S. s. s.-ndə n-ci seriya təşkil edən kəmiyyətlər cəmi üçün limit paylanmaları sinfi ilə üst-üstə düşür.

Bax, *Seriyalar sxemi*, *üçbucaq sxemi*.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984, т. 2.

SIĞORTALAMANIN RİYAZİ NƏZƏRİYYƏSİ « страхования математическая теория; mathematical insurance theory » – sığortaçıların gəlir və ya digər qazanclarının kəmiyyətcə qeyri – müəyyənliyi şərtlərində stabilləşdirici iqtisadi mexanizmlərin qarşılıqlı əlaqələrinin riyazi modellərinin toplusudur. Belə mexanizmlərin əksəriyyəti iqtisadi vəziyyətin realizasiyasından sonra sığortaçılar arasında bu və ya digər qaydalarla paylanan (bölüşdürülən) sığorta fondunun yaranmasını nəzərə alır; bu fond iqtisadi vəziyyətin realizasiyasından sonra sığortaçılar arasında bu və ya digər qaydalarla paylanılır. İlk sığorta modelini ola bilsin ki, T. Barrua (T. Barrois) 1834-də qurmuşdur, sığorta firmalarının müasir modelləri F. Lundberqə (F. Lundberg, 1903) aiddir.

Firma modellərinin əksəriyyətində aşağıdakı xarakteristikalara baxılır: X_t, – t anına qədər toplam ödəmələri ifadə edən təsadüfi kəmiyyət, r_t, – t anına qədər toplam sığorta payıdır. Bu ana qədər toplanmış kapital $S_t = s_0 + r_t - X_t$ düsturu ilə ifadə olunur, burada $S_t = s_0 + r_t - X_t$ ilkin kapitaldır. Adətən, fərz olunur ki, $r_t = \mathbf{M}X_t + \lambda t$, burada $\lambda > 0$ – bir qayda olaraq, ekzogen surətdə (xarici təsirlərə məruz qalan) verilən xarakteristika olub, ya üst-üstə gələn xərclər və ya firmanın vahid zaman ərzində gəliri kimi interpretasiya olunur. Məs., T anına qədər firmanın fəaliyyətdə olması ehtimalı kimi

$$R(s_0, T) = \mathbf{P}\{\min_{0 \leq t \leq T} S_t \geq 0\}$$

kəmiyyəti və ya

$$R(s_0) = \lim_{T \to \infty} R(s_0, T)$$

«limit» kəmiyyətinin axtarılması məsələsi qoyula bilər.

Əgər X_t ümumiləşmiş Puasson prosesidirsə, onda məsələni Laplas çevirmələri metodu ilə həll etmək olur (bax, [1], [2]).

Adi şərtlər çərçivəsində $t \to \infty$ olduqda $S_t \to \infty$ münasibəti sanki yəqin ödənilir. Bu fakt ilk əvvəl modelin sadəliyini əks etdirir və təklif olunmuşdur ki, dividendləri ödənməsi mümkünlüyü və ya S_t hər hansı z səddini aşdığı halda gəlirin digər istifadəsi nəzərə alınsın. Əgər zaman diskret, X_t isə asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proses olarsa, onda model uducu $(S_t = 0)$ və elastik $(S_t = z)$ ekranlı təsadüfi dolaşmaya gətirilir. z-in seçilməsi sistemin arzuolunan orta yaşama müddəti, yəni

$$D(s_0, z) = \mathbf{M}\inf\{t:\ S_t \geq 0\}$$

kəmiyyəti ilə təyin olunur.

S. r. n.-nin digər məsələləri sığortaçının maraqları ilə bağlıdır. Məs., $Y = Y(\omega)$ sığorta ödəməsi kəmiyyəti, ω elementar nəticədirsə və $\mathbf{M}Y$ orta qiyməti və gəlir qiymətlərinin ehtimal paylanmaları fəzasında sığortaçının maraqları sisteminin verildiyi halda ω nəticəsində $Y = Y(\omega)$-nın optimal qiymətinin axtarılması belə məsələlərdəndir (adətən, sığortaçının *faydalılıq funksiyası* verildiyi halda; bax, məs., [3]).

Nəzəriyyənin digər cəhəti sığortaçı və firmalar arasında qarşılıqlı əlaqələrdir. Sadə modeldə bir sığortaçı və bir firma götürülür,

bunlar da uyğun olaraq, $u_1(x)$ və $u_2(x)$ faydalılıq funksiyaları və ilkin l_1, l_2 kapitalları ilə xarakterizə olunur. ξ sığortaçının mümkün ola bilən ziyanını ifadə edən təsadüfi kəmiyyət,

$$q_1 = \sup\{q : u_1(l_1 - q) > \mathbf{M}u_1(l_1 - \xi)\}$$

sığortaçı üçün məqbul hesab olunan maksimal sığorta payı (взнос) və

$$q_2 = \inf\{q : u_2(l_2) < \mathbf{M}u_2(l_2 + q - \xi)\}$$

firma üçün məqbul hesab olunan minimal sığorta payı olsun. Əgər $q_1 < q_2$ olarsa, onda sığorta mümkün deyil. Əgər $q_1 \geq q_2$ və sığorta firması yeganədirsə (monopol sığortalama), sığortaçı q_1-ə yaxın pay ödəməlidir. Əgər firmaların sayı çoxdursa (rəqabətli sığorta), pay q_2-yə yaxın olur. Sığortaçıların ziyanlarının müxtəlif ehtimal paylanmalarına malik olduqları hallarda ümumi modellər olduqca mürəkkəb olur.

Öz maraqlarını güdən sığorta firması mövcud olmadıqda, sığortaçılar öz gəlirlərini stabilləşdirmək məqsədilə («riskin yenidən paylanması», «özü-özünü sığortalama») qarşılıqlı sığorta təşkilatı kimi birləşdikdə, digər mühüm vəziyyət yaranır. Bu halda sığorta fondunun tükənməsi arzuolunmaz ola bilər və məsələ də sığortaçıların paylarından, onların maraqlarından və yaranmış vəziyyətdən asılı olaraq sığorta fondunun paylanması üçün ağlabatan qaydaların axtarışından ibarət olur. Yanaşmalardan biri, ümumiyyətlə, tarazlıq vəziyyətini müxtəlif surətdə təyin edən tədqiqatla bağlıdır (bax, [2], [4]). Digər – aksiomatik yanaşmada kooperativ oyunlar nəzəriyyəsindən və gəlirlərin yenidən paylanmasının ümumi prinsiplərinin ifadə olunmasından istifadə olunur (bax, [5]).

Əd.: [1] Scandia Jubillee Volume, Stockh., 1955; [2] Borch K., The mathematical theory of insurance, Lexington, 1974; [3] Arrow K., «Skandinavian Acturial Journal», 1974, v. 1, p. 1–42; [4] Mossin J., «Econometrica», 1966, v. 34, № 4, p. 768–83; [5] Катышев П. К., Ротарь В. И., «Экономика и математические методы», 1983, т. 19, в. 6, с. 1042–52.

SIX ÖLÇÜ « плотная мера; tight measure » – Hausdorf topoloji T fəzasında aşağıdakı şərti ödəyən Borel *ehtimal ölçüsü* μ-dür: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $K_\varepsilon \subset T$ kompakt altçoxluğu var ki, $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Polski fəzasında (məs., tam separabel metrik fəzada) hər bir ehtimal ölçüsü S. ö.-dür.

Əd.: [1] Биллингслей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

SIX YERLƏŞMƏ SƏRHƏDİ « плотной упаковки граница; spher packing bound » – yaddaşsız diskret kanal üzrə məlumatların ötürülməsində *səhv dekodlama ehtimalı* üçün aşağı sərhəddir. Fərz olunur ki, giriş əlifbası $\mathscr{Y}$, çıxış əlifbası $\widetilde{\mathscr{Y}}$ olan və keçid ehtimalları $p(\tilde{y} \mid y)$-lərin çoxluğu ilə verilən yaddaşsız diskret stasionar kanal üçün sıx yerləşmə (və ya sferik yerləşmə) eksponentinin üstü adlandırılan $E_{\mathrm{sp}}(R)$, $R > 0$ funksiyası aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$E_{\mathrm{sp}}(R) = \sup_{\rho > 0} \max_{q} \{E_0(\rho, q) - \rho R\},$$

burada $q = \{q(y),\ y \in \mathscr{Y}\}$, – $\mathscr{Y}$-də ixtiyari ehtimal paylanması, $E_0(\rho, q)$ – Qallager funksiyasıdır (bax, *Təsadüfi kod-la(n)ma*; sərhəd). Onda sürəti R-ə bərabər, N uzunluqlu ixtiyari blok kodun köməyilə verilən kanalla ötürmədə səhv dekodlama ehtimalının orta qiyməti P_e aşağıdan qiymətləndirilir, yəni

$$P_e \geq \exp\{-N[E_{\mathrm{sp}}(R + \alpha(N)) + \beta(N)]\},$$

burada $\alpha(N)$ və $\beta(N)$ N artdıqca sıfra yaxınlaşırlar. S. y. s.-nə verilən kanalın etibarlılıq funksiyası $E(R)$ üçün yuxarı sərhəd kimi də baxmaq olar: $E(R) \leq E_{\mathrm{sp}}(R)$. Məlumdur ki, $0 \leq R < C$ olduqda, $E_{\mathrm{sp}}(R)$ – müsbət qabarıq $\cup$ funksiyadır, R-in monoton azalan funksiyasıdır. C – kanalın ötürücülük qabiliyyətidir. $R_{\mathrm{cr}} \leq R < C$ olduqda $E_{\mathrm{sp}}(R) = E(R)$ bərabərliyi doğrudur.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

SIXLIĞI, ÇIXIŞ EHTİMALININ « плотность вероятности выхода; exit rate » – Markov prosesi üçün anlayışdır: ζ Markov prosesinin t anında x vəziyyətindən Çıxış E. s.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}_{t,x}\{\zeta_{t+h} \neq x\}}{h} = q(t, x) \qquad (*)$$

münasibətini ödəyən $q(t, x) \in [0, +\infty)$ ədədinə deyilir. [$q = +\infty$ olduqda, (*) münasibətindən əlavə surətdəki ehtimalın sıfra yaxınlaşması da tələb olunur]. Ç. e. s. sonlu sayda vəziyyətlər çoxluğu və ya hesabi sayda vəziyyətlər çoxluğu olan *Markov prosesləri* nəzəriyyələri və bunların ümumiləşməsi – *sıçrayışvari Markov prosesləri* nəzəriyyəsində istifadə olunur.

Bax, *Ani vəziyyət*, *Dayanıqlı vəziyyət*, *Kolmoqorov tənlikləri.*

SIXLIĞI, EHTİMAL PAYLANMASININ « плотность распределения вероятностей; density of probability distribution » – bax, *Sıxlıq, ehtimal sıxlığı.*

SIXLIĞI, ÖLÇÜLƏR AİLƏSİNİN « плотность семейства мер; tightness of a family of measures » – bütün limit *ölçülər* ailəsinin hesabi additivliyini təmin edən və ailənin bütün ölçülərinin hər hansı kompaktda «sanki bütünlüklə» topalanmasından ibarət xassədir. Ehtimal ölçülərinin və təsadüfi proseslərin yığılmasının öyrənilməsində yaranan məsələlərdən biri verilən ölçülər ailəsinin hansı şərtlərdə zəif kompakt olması məsələsidir. Öz növbəsində, ehtimal ölçüləri ailəsinin kompaktlıq məsələsi başqa bir sual doğurur: verilən ölçülər ailəsinin limit nöqtələri hansı hallarda hesabi – additiv olur. Ö. a. s. xassəsi limit nöqtələrinin hesabi – additivliyini təmin edir.

$(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ – normal σ – fəza, $\mathscr{M}$, – $\sigma(\mathfrak{G})$ –da verilmiş ölçülər fəzası olsun. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $K \subseteq \mathscr{X}$ kompaktı varsa ki, K kompaktının hər bir $G \in \mathfrak{G}$ ətrafı üçün

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathscr{P}} \mathbf{P}\{\mathscr{X} \setminus G\} < \varepsilon \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilsin, onda $\mathscr{M}$-dən olan ölçülər ailəsi $\mathscr{P}$ ölçülərin sıx ailəsi adlanır. K kompaktı həmişə Borel σ – cəbrinə aid olmur, lakin əgər $K \in \sigma(\mathfrak{G})$ olarsa, onda əvvəlki şərt aşağıdakı şərtə çevrilir: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə K kompaktı vardır ki,

$$\sup_{\mathbf{P}\in\mathscr{P}} \mathbf{P}\{\mathscr{X}\setminus K\} < \varepsilon. \qquad (2)$$

Əgər (1) və ya (2) şərtlərindən biri ödənilərsə, onda hər bir $\mathbf{P}\in\mathscr{P}$ ölçüsü $\mathscr{P}$ ailəsinin bütün limit ölçüləri kimi sıxdır.

Əgər ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün elə $K\subseteq\mathscr{X}$ kompaktı varsa ki, onun ixtiyari G ətrafı üçün

$$\lim_{\theta}\sup \mathbf{P}_\theta\{\mathscr{X}\setminus G\} < \varepsilon \qquad (3)$$

şərti ödənilsin, onda $(\mathbf{P}_\theta)$ ehtimal ölçüləri şəbəkəsi ölçülərin sıx şəbəkəsi adlanır. $K\in\sigma(\mathfrak{G})$ olduğu halda

$$\lim_{\theta}\sup \mathbf{P}_\theta\{\mathscr{X}\setminus K\} < \varepsilon \qquad (4)$$

şərti, əgər $(\mathbf{P}_\theta)$ ardıcıllıq olmasa, (3)-dən alınmır, (3) və ya (4)-ün (1) və ya (2)-dən fərqi ondan ibarətdir ki, bütün limit ölçülərinin hamısının sıx olmasına baxmayaraq, (3) və ya (4) şərtləri $\mathbf{P}_\theta$ ölçülərinin sıxlığına zəmanət vermir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с.177–237; [2] Биллинсглей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук.», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [4] Боровков А. А., Печерский Е. А., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 1, с. 18–20.

SIXLIĞI, PAYLANMANIN; asimptotik düstur « **плотность распределения;** асимптотическая формула; asymptotic formula for a **distribution density** » – bax, *Paylanma funksiyası*; asimptotik düsturlar.

SIXLIĞI, PAYLANMANIN; müşahidələr üzrə statistik qiymət « **плотность распределения;** оценка по наблюдениям; estimation of the **density of a distribution** from observations » – nəzəri paylanma sıxlığının statistik analoqu kimi tətbiq edilən *təsadüfi funksiyadır.* $X_1,\ldots,X_n$ – eyni qanunla paylanmış, qarşılıqlı asılı olmayan, P. s. funksiyası naməlum $f(x)$ olan təsadüfi kəmiyyətlər – müşahidə nəticələri, $P_n(\cdot)$ – uyğun empirik paylanma, yəni X_i nöqtələrində topalanmış $\delta_{X_i}(\cdot)$ delta – ölçülərinin ədədi ortası olsun. P. s.-nın statistik qiymətinin qurulması ideyası aşağıdakı kimidir: hər bir müşahidə olunmuş $\delta_{X_i}(\cdot)$ ölçüsünü sıxlıq funksiyası $K_n(x, X_i)$ olan hər hansı ölçü ilə əvəz edərək, $X_1,\ldots,X_n$ müşahidələri üzrə P. s. statistik qiyməti kimi

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_n(x, X_i) \qquad (1)$$

statistikası götürülür. P. s. üçün belə statistik qiymətlərin (Rozenblatt–Parzen statistik qiymətləri və ya nüvə statistik qiymətləri adlandırılan) bir sinfi M. Rozenblatt (M. Rosenblatt, 1956) və E. Parzen (E. Parzén, 1962) tərəfindən daxil olunmuşdur. Digər sinif (proyeksion statistik qiymətlər adlandırılan) N. N. Çentsov (1962) tərəfindən daxil olunmuşdur.

1) P. s.-nın Rozenblatt–Parzen statistik qiyməti – $K_n(x, y)=a_n K(a_n(x-y))$ nüvəsi ilə alınır, yəni

$$f_n(x)=\frac{a_n}{n}\sum_{i=1}^{n} K(a_n(x-X_i)) \qquad (2)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada K funksiyası mütləq inteqrallanandır və $\int K(u)\,du=1$, a_n ardıcıllığı isə $a_n\to\infty$, $a/n\to 0$ şərtlərini ödəyir.

P. s. üçün (2) statistik qiyməti K və f üzərinə qoyulan olduqca zəif məhdudiyyətlərlə asimptotik meylsiz, tutarlı və asimptotik normal statistik qiymətdir və

$$\mathbf{M} f_n(x)= f(x)+o(a_n^{-2}),$$

$$\mathbf{D} f_n(x)=(a_n/n)f(x)\int K^2(u)\,du+O(a_n/n).$$

Bundan başqa, $\sup_x |f_n(x)-f(x)|\to 0$ münasibəti sanki yəqin ödənilir, bu şərtlə ki, K məhdud dəyişən, müntəzəm kəsilməz funksiya olsun və $n^{-1}a_n^2\ln n\to 0$ şərti ödənilsin (bax, [1]).

$F_n(\cdot)$ və $F(\cdot)$, – f_n və f -ə uyğun ehtimal paylanmaları olsun. K nüvələrinin elə sinfi vardır ki, bu nüvələr üçün P. s.-nın (2) statistik qiyməti variasiyaya yığılma mənasında korrektdir: hər bir P. s. f üçün

$$\sup_{A\in\mathscr{B}} |F_n(A)-F(A)|\to 0$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur, $\mathscr{B}$ – Borel çoxluqları sinfidir. (2) P. s.-nın statistik qiymətlərinin xətalarının müxtəlif kvadratik ölçülərinin asimptotikası yaxşı öyrənilmişdir (bax, [1], [2]).

$$\xi_n=\sup_{-\infty<a\le x\le b<\infty}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{\sqrt{f(x)}}$$

kəmiyyəti üçün bəzi ümumi şərtlərlə

$$\mathbf{P}\{\sigma_n\xi_n-d_n<\lambda\}\to e^{-2e^{-\lambda}} \qquad (3)$$

münasibəti ödənilir, burada σ_n və d_n parametrləri aşkar ifadə olunur (bax, [1], [3]). (3) ifadəsinin köməyilə P. s.-nın (2) statistik qiymətlərinin f -dən verilmiş yayınmalarının ehtimallarını təqribi qiymətləndirmək olur və bununla da, verilmiş ehtimalla f -in qrafikinin yerləşdiyi sərhədləri hesablamaq olur.

$$U_n=\int (f_n(x)-f(x))^2\,r(x)\,dx$$

olsun; $r(x)$ – çəki funksiyasıdır. Bəzi normalaşdırmalarla U_n -in limit paylanması normal paylanmadır. Buna əsaslanaraq, U_n statistikası əsasında $H_0: f=f_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün kriteri qurmaq mümkündür. Aydın olmuşdur ki, sinqulyar alternativlərdə, f_0 və alternativ P. s. yalnız olduqca kiçik ölçülü çoxluqda fərqləndikdə, bu kriterilər Kolmoqorov – Smirnov tipli kriterilərdən daha güclüdürlər.

2) P. s. -nın Çentsov statistik qiyməti –

$$K_n(x, y)=\sum_{i=1}^{N_n}\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)\,r(y)$$

nüvəsi ilə alınır, yəni bu statistik qiymət

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{N_n} \hat{a}_i \varphi_i(x), \quad \hat{a}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(X_j)\, r(X_j)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, -\ r(x)$ çəkisi ilə ortonormalanmış funksiyalar sistemidir və $N_n \to \infty$. Bu tip statistik qiymətlər L^2 metrikasında minimal xətalara nail olmaq zəruriliyi yaranan məsələlərdə əlverişlidir (bax, [4]). $\|f_n - f\|_2$ statistikasının limit paylanması normal paylanmadır və bu da öz növbəsində f üçün statistik kriterilər qurmağa imkan yaradır (bax, [1]).

(1) sxeminə müvafiq P. s. statistik qiymətlərinə histoqram, tezliklər poliqonu, «yaxın qonşu» metodu ilə qurulmuş statistik qiymətləri misal göstərmək olar.

Əd.: [1] Надарая Э. А., Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии, Тб., 1983; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1980, т. 98, с. 61–85; [3] Bickel P., Rosenblatt M., «Ann. Statist.», 1973, v. 1, № 6, p. 1071–95; [4] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [5] Деврой Л., Дьёрфи Л., Непараметрическое оценивание плотности – L_1 – подход, пер. с англ., М., 1988.

SIXLIĞI, STOXASTİK NÜVƏNİN « плотность стохастического ядра; density of stochastic kernel » – bax, *Stoxastik / ehtimali nüvə.*

SIXLIQ(ğı) keçid ehtimalının « **плотность вероятности** перехода; **transition density / rate »**, sıçrayışvari Markov prosesi ζ-nın t anında x vəziyyətindən x-ı özündə saxlamayan Γ vəziyyətinə keçid ehtimalının S., elə $q(t, x, \Gamma) \in [0, +\infty]$ ədədinə deyilir ki,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}_{t,x}\{\zeta_{t+h} \in \Gamma\}}{h} = q(t, x, \Gamma) \qquad (1)$$

münasibəti ödənilsin, burada Γ, – ζ prosesinin $\mathscr{E}$ faza fəzasının ölçülən çoxluğudur [$q = +\infty$ olduqda, (1) münasibətindən əlavə surətdəki ehtimalın sıfra yaxınlaşması da tələb olunur]. Keçid ehtimalının S.-nın xüsusi halı $\Gamma = \mathscr{E} \setminus \{x\}$ olduğu halda *çıxış ehtimalı sıxlığıdır.* Keçid ehtimalı S. *sıçrayışvari Markov prosesinin* əsas infinitezimal xarakteristikasıdır. $\mathscr{E}$ faza fəzası sonlu və ya hesabi fəza olduğu halda keçid ehtimalı S., adətən, $y \in \mathscr{E}$ birnöqtəli çoxluqları üçün limitlər nəzərdə tutulur, «requlyar» hallarda

$$q(t, x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} q(t, x, y) \qquad (2)$$

qəbul olunur, lakin, ümumiyyətlə isə, $\mathscr{E}$ hesabi fəza olduğu halda (2)-dəki $=$ işarəsi $\geq$ ilə əvəz olunmalıdır.

Bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

SIXLIQ(ğı) stoxastik differensial tənliyin həllinin paylanmasının « **плотность распределения** решения стохастического дифференциального уравнения; **density of the distribution** of solution of a stochastic differential equation **»**:

$$d X_t = \sigma(t, X_t)\, d \boldsymbol{w}_t + b(t, X_t) dt, \quad X_0 = x \qquad (*)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidir,

1) əgər σ və b ölçülən və məhduddurlarsa və $\sigma\sigma^*$ cırlaşmayandırsa, sanki bütün $t > 0$ üçün (*) tənliyinin həllinin paylanma sıxlığı vardır (bax, *Stoxastik inteqral*; paylanmanın statistik qiymətləri); bütün $t > 0$ qiymətlərində sıxlıq olmaya da bilər (bax, [1]);

2) əgər əlavə olaraq $\sigma\sigma^*(t, \cdot)$ müntəzəm kəsilməz funksiya olarsa, sıxlıq bütün $t > 0$ qiymətləri üçün mövcud olarsa və parabolik tənlik üçün uyğun Koşi məsələsinin fundamental həlli olarsa, (*)-nun həllinin paylanma sıxlığı vardır (bax, [2]);

3) əgər a və b funksiyaları C_b^∞ sinfindən olarsa və Hermander tipli şərtləri ödəyərsə və bütün $t > 0$ qiymətlərində sıxlıq olarsa və analoji şərtlərlə bu sıxlıq C_b^∞ sinfindən olarsa, (*)-nun həllinin paylanma sıxlığı vardır (bax, *Mallyavin hesabı*).

Əd.: [1] Сафонов М. В., в сб.: Тезисы докладов 3-й Междунар. вильнюсской конф. по теории вероятн. и матем. статистике, т. 2, Вильнюс, 1981, с. 133–34; [2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [3] Веретенников А. Ю., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3, с. 113–25.

SIXLIQ(ğı) təsadüfi matrisin paylanmasının « **плотность распределения** случайной матрицы; **density of the distribution** of a random matrix **»** – bax, *Təsadüfi matris.*

SIXLIQ, EHTİMAL SIXLIĞI « плотность вероятности; probability density » ehtimal paylanmasının sıxlığı – mütləq kəsilməz ehtimal ölçüsünə müvafiq olan *paylanma funksiyasının* törəməsidir.

$\xi(\omega)$, – $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyət, $F(x)$ – onun paylanma funksiyası olsun. Əgər

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}\{\omega : x \leq \xi(\omega) < x + \Delta x\}}{\Delta x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

varsa, onda bu limitə $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyası deyilir.

x-in bütün qiymətlərində

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du$$

bərabərliyini ödəyən inteqrallanan $p(u)$ Borel funksiyası varsa, bu funksiya $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır.

Aydındır ki, $p(u) \geq 0$ və $\int_{-\infty}^{\infty} p(u)\, du = 1$.

X, – n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Evklid fəzasından qiymətlər alan təsadüfi vektor, $F(x_1, \ldots, x_n)$ – onun paylanma funksiyası olsun. Əgər ixtiyari həqiqi $x_1, \ldots, x_n$ qiymətləri üçün

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

bərabərliyini ödəyən mənfi olmayan $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası varsa, bu funksiyaya X təsadüfi vektorunun ehtimal sıxlığı (çoxölçülü paylanmanın ehtimal sıxlığı) deyilir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ ixtiyari Borel çoxluğu olarsa,

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \int_A \dots \int_A f(u_1, \dots, u_n)\, du_1 \dots du_n .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$$

şərtini ödəyən ixtiyari mənfi olmayan inteqrallanan $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası hər hansı təsadüfi vektorun E. s.-dır.

Əgər $\mathbb{R}^n$-dən qiymətlər alan X və Y təsadüfi vektorları asılı olmayandırlarsa və uyğun olaraq $f(x_1, \dots, x_n)$ və $g(x_1, \dots, x_n)$ E. s.-larına malikdirlərsə, onda $X + Y$ təsadüfi vektorunun E. s. $h(x_1, \dots, x_n)$ vardır və $h(\cdot)$ f və g-nin kompozisiyasıdır:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n) \times$$

$$\times\, g(x_1, \dots, x_n)\, du_1 \dots du_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, u_n)\, g(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n)\, du_1 \dots du_n .$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ – qiymətlərini $\mathbb{R}^n$ və $\mathbb{R}^m$-dən alan $(n, m \geq 1)$ və E. s.-ları uyğun olaraq, $f(x_1, \dots, x_n)$ və $g(y_1, \dots, y_n)$ olan təsadüfi vektorlar $Z = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ isə $\mathbb{R}^{n+m}$-də təsadüfi vektor olsun. Əgər X və Y asılı olmayan vektorlardırsa, onda Z-in E. s. $h(t_1, \dots, t_{n+m})$ vardır və $h(\cdot)$ X və Y təsadüfi vektorlarının birgə ehtimal sıxlığı adlanır və bu halda

$$h(t_1, \dots, t_{n+m}) = f(t_1, \dots, t_n)\, g(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}). \qquad (1)$$

Əksinə, əgər Z-in E. s. (1) münasibətini ödəyirsə, onda X və Y asılı olmayan vektorlardır.

E. s. $f(x_1, \dots, x_n)$ olan X təsadüfi vektorunun xarakteristik funksiyası $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \times$$

$$\times\, f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n ;$$

əgər $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ mütləq inteqrallanan funksiyadırsa, onda $f(x_1, \dots, x_n)$ məhdud kəsilməz funksiyadır və

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} \times$$

$$\times\, \varphi(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n .$$

E. s. $f(x_1, \dots, x_n)$ və uyğun xarakteristik funksiya $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ aşağıdakı münasibətlə də (Planşerel eyniliyi) əlaqəlidirlər: $f^2(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası, yalnız və yalnız, $[\varphi(t_1, \dots, t_n)]^2$ funksiyası inteqrallanan olduğu halda inteqrallanandır və bu halda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(t_1, \dots, t_n)\right|^2 dt_1 \dots dt_n .$$

$(\Omega, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza, ν və μ, – $(\Omega, \mathscr{A})$-da σ – sonlu ölçülər, ν ölçüsü μ-yə nəzərən mütləq kəsilməz ölçü, yəni $\mu(A) = 0$ olduqda, $\nu(A) = 0$, $A \in \mathscr{A}$ olduğu fərz olunur. Bu halda $(\Omega, \mathscr{A})$-da mənfi olmayan ölçülən f funksiyası vardır ki, ixtiyari $A \in \mathscr{A}$ üçün

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu .$$

f funksiyasına ν ölçüsünün μ ölçüsünə nəzərən Radon – Nikodim törəməsi deyilir və ν ehtimal ölçüsü olduqda, ν ölçüsünün μ-yə nəzərən E. s. deyilir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд. М., 1987; [2] Феллер В., Теория вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1984; [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [4] Леман Э., Проверка статисческих гипотез, пер. с англ., М., 1979.

SIXLIQ OPERATORU « плотности оператор; density operator » – H Hilbert fəzasında müsbət, vahidi izli, özü-özünə qoşma S operatorudur. Daha ətraflı, bütün $\psi \in H$ vektorları üçün

$$(\psi, S\psi) \geq 0$$

və ixtiyari ortonormalanmış $\{e_i\} \subset H$ bazisi üçün

$$\sum_i (e_i, Se_i) = 1$$

şərtlərini ödəyən operatordur.

S. o. kvant mexanikasında sistemin statistik vəziyyətini təsvir edir, yəni bu və ya digər müşahidə olunan kəmiyyətin ölçülmə sində sistemin bilavasitə əvvəlki vəziyyəti haqqında individual kvantmexaniki sistemlərin verilən statistik ansamblının hazırlanması üçün bütün mühüm informasiyanı özündə daşıyır. Bu halda S S. o. ilə təsvir olunan, statistik vəziyyətdə müşahidələnən X-in orta qiyməti $E_S\{X\} = \operatorname{tr} SX$ olur. Kvant vəziyyəti dedikdə, adətən, müvafiq S S. o. nəzərdə tutulur.

$\varphi(X) = \operatorname{tr} SX$ münasibəti H Hilbert fəzasında S. o. ilə H-dakı bütün məhdud X operatorlar cəbrinin normal φ vəziyyətləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır (bax, *Cəbri müşahidələnənlərin*). Beləliklə, qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində S. o.-na bir növ φ vəziyyətinin izə nəzərən Radon – Nikodim törəməsi kimi baxmaq olar.

Əgər S_i, $i = 1, 2, \dots,$ S. o.-larıdırsa, onda onların ixtiyari qarışığı, yəni

$$S = \sum_i p_i S_i ,$$

qabarıq kombinasiyası da S. o.-dur, burada $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$. Kvant mexanikasında hesab olunur ki, S. o. S S. o. S ilə verilən statistik ansamblların uyğun qarışığını təsvir edir. Beləliklə, H Hilbert fəzasında bütün S. o.-nun çoxluğu $\mathfrak{S}(H)$ qabarıq çoxluqdur. S. o. S əgər başqa S. o.-larının qarışığı kimi ifadə olunmursa, onda S operatoru $\mathfrak{S}(H)$ çoxluğunun kənar nöqtəsidir. Uyğun vəziyyətlər x a l i s v ə z i y y ə t l ə r (rus. чистыми состояниями) adlanır. S. o. S-in xalis vəziyyət olması üçün zəruri və kafidir ki, S H fəzasının hər hansı vahidi ψ vektoru üzərinə ortoproyektor olsun; ψ v ə z i y y ə t v e k t o r u adlanır. Bu halda $E_S\{X\} = (\psi, X\psi)$. Xalis vəziyyətlər və ψ vektorları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq modul üzrə vahidə bərabər kompleks vuruq dəqiqliyi ilədir.

Hər bir S S. o. birölçülü ortoproyektorların qarışığı şəklində ifadə olunur və belə ifadə olunma birqiymətli deyildir; seçilmiş ifadənin (qarışığın ifadəsinin) komponentləri qarşılıqlı ortoqonal olduqda bu ifadə S. o.-un spektral ayrılışı ilə verilir.

Əd.: bax, «*Kvant nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin*» məq.-də ([1], [5]).

***SINAQ « испытание; trial »** – klassik ehtimal nəzəriyyəsinin əsas terminlərindən biridir. Aksiomatik yanaşmada S. elementar hadisələr fəzasının «sınağın nəticələri» adlanan, cüt-cüt uyuşmayan hadisələrə ixtiyari bölgüsü kimi təyin olunur, sınağın nəticələri bunların doğurduğu σ – cəbrin elementləridir – «verilən sınaqlarla bağlı hadisələrdir». S. termini, əsas etibarilə, «təkrar S.», «asılı olmayan S.», «Markov zənciri ilə bağlı sınaqlar» və s. birləşmələrdə istifadə olunur. Başqa sözlə, eksperimentin aparılması üçün qoyulan müəyyən şərtlər kompleksi ilə eksperimentdə baş verəcək və ya baş verməyəcək bütün mümkün olan hadisələr çoxluğu sınağı təşkil edir.

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$ qiymətləri üçün $A_i \cap A_j = \varnothing$ və $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega$ olsun, burada $A_i \in \mathscr{A}$.

Sınaq – $A_1, A_2, \ldots, A_r$ hadisələrindən hansı birinin baş verməsinin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir, bu halda $A_1, A_2, \ldots, A_r$ sınağın m ü m k ü n n ə t i c ə l ə r i adlanır. Cüt-cüt uyuşmayan mümkün nəticələrindən biri ilə hökmən baş verəcək təsadüfi hadisələrlə ifadə olunan eksperiment S.-dır. Sınaqların asılı olmamazlığı anlayışı ehtimal nəzəriyyəsində xüsusi yer tutur. $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mathbf{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathscr{A}_n, \mathbf{P}_n)$, – n sayda ehtimal fəzaları olsun. Ω_i-nin r_i sayda $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \ldots, A_{r_i}^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$ atomları ilə bölgüsünün verildiyi fərz olunur, yəni

$$\Omega_i = A_1^{(i)} \cup A_2^{(i)} \cup \ldots \cup A_{r_i}^{(i)},$$

$$A_k^{(i)} \cap A_\ell^{(i)} = \varnothing, \quad l \neq k, \quad l, k = \overline{1, r_i}, \quad r_i \geq 2.$$

Bu halda, $p_k^{(i)} = \mathbf{P}(A_k^{(i)})$ ehtimalları üçün $p_k^{(i)} \geq 0$ və $\sum_{k}^{r_i} p_k^{(i)} = 1$ şərtləri ödənilməlidir (i sınağın nömrəsidir).

$\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2 \otimes \ldots \otimes \Omega_n$ çoxluğunda

$$p_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \mathbf{P}\left(A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{k_n}^{(n)}\right) \geq 0,$$

$$\sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} p_{k_1 k_2 \ldots k_n} = 1$$

şərtlərini ödəyən $r = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$ sayda ehtimallar təyin etmək olar, burada $A_{k_s}^{(i)} \in \mathscr{A}_i$, $k_s = 1, 2, \ldots, r_s$, $i = \overline{1,n}$, $r_s \geq 2$, $s = \overline{1,n}$.

n sayda sınağın ehtimal modelinə uyğun σ – cəbr kimi $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n$ sinfi, yəni $\mathscr{A}_i$-lərin düz hasili götürülür; bu halda

$$A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{k_n}^{(n)} \in \mathscr{A}.$$

T ə r i f (K o l m o q o r o v): $k_1, k_2, \ldots, k_n$-lərin ixtiyari qiymətlərində

$$\mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)} \cap A_{k_2}^{(2)} \cap \ldots \cap A_{k_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(A_{k_1}^{(1)}) \cdot \mathbf{P}(A_{k_2}^{(2)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{k_n}^{(n)})$$

bərabərliyi ödənilərsə, n sayda s ı n a q a s ı l ı o l m a y a n S.-lar adlanır (bax, [1]).

Asılı olmayan S.-ların ehtimal modelini qurmaq istədikdə, əgər bu S.-lara uyğun ehtimal fəzaları müəyyən obyektiv səbəblərə görə bir-birindən asılı olmayan ehtimal fəzaları olarsa, ehtimal nəzəriyyəsi baxımından $\mathscr{A}_i$-lərə ümumi $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının (n sayda uyğun ehtimal fəzasının) $\mathscr{A}$ σ – cəbrinin σ – altcəbrləri kimi baxılmalı və a s ı l ı o l m a m a z l ı q da məhz bu nöqteyi – nəzərdən anlaşılmalıdır.

Asılı olmayan S.-lara aid aşağıdakı iki teorem A. N. Kolmoqorova məxsusdur.

T e o r e m 1. n sayda S. asılı olmayan S.-lardırsa, bu S.-lardan ixtiyari m ($m \leq n$) saydası da asılı olmayan S.-lardır.

S.-lar asılı olmayandırsa, aydındır ki,

$$\mathbf{P}(A_{k_1}^{(i_1)} \cap A_{k_2}^{(i_2)} \cap \ldots \cap A_{k_m}^{(i_m)}) =$$

$$= \mathbf{P}(A_{k_1}^{(i_1)}) \cdot \mathbf{P}(A_{k_2}^{(i_2)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{k_m}^{(i_m)})$$

bərabərlikləri ödənilir (i_s-lərin müxtəlifliyi fərz olunur).

T e o r e m 2. $A_{k_i}^{(i)} \in \mathscr{A}_i$ ixtiyari təsadüfi hadisə, $\mathbf{P}(A_{k_i}^{(i)}) > 0$ olarsa, onda n sayda S.-ın asılı olmayan sınaqlar olması üçün $A_{k_i}^{(i)}$ hadisəsinin $1, 2, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, n$-ci S.-larda uyğun olaraq $A_{k_1}^{(1)}, \ldots, A_{k_{i-1}}^{(i-1)}, A_{k_{i+1}}^{(i+1)}, \ldots, A_{k_n}^{(n)}$ nəticələrinin birgə baş verməsi şərtinə nəzərən şərti ehtimalı $A_{k_i}^{(i)}$-nin şərtsiz ehtimalı $\mathbf{P}_k(A_{k_i}^{(i)})$-yə bərabər olması, yəni

$$\mathbf{P}\left(A_{k_i}^{(i)} \Big/ \bigcap_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq i}}^{n} A_{k_\ell}^{(\ell)}\right) = \mathbf{P}(A_{k_i}^{(i)}), \quad i = \overline{1,n}$$

bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

Bu teoremlərə əsaslanan aşağıdakı teorem də A. N. Kolmoqorova məxsusdur.

Əgər $\mathbf{P}(A_k) > 0$, $k = \overline{1,n}$ olarsa, $A_1, \ldots, A_n$ hadisələrinin asılı olmayan təsadüfi hadisələr olması üçün $\mathbf{P}(A_k / A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_n}) = \mathbf{P}(A_k)$ bərabərliyinin cüt-cüt

müxtəlif olan ixtiyari $k, k_1, k_2, \dots, k_n$ indeksləri üçün ödənilməsi zəruri və kafidir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. Изд. второе, М.,1974; [2] Лоэв М., Теории вероятностей, пер. с англ., М., 1972; [3] Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; [4] Невё Ж., Математические основы вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

SINAQLARIN ASILI OLMAMAZLIĞI « независимость испытаний; independence of trials » – bax, *Sınaq*, *Asılı olmayan sınaqlar.*

SIRF ARTIM PROSESİ « чистого размножения процесс; birth process » – elə *doğum və ölüm prosesidir* ki, burada sanki yəqin keçidlər yalnız böyük nömrəli vəziyyətlərdə mümkündür. Əgər vəziyyət hissəciklər sayı kimi interpretasiya olunarsa, onda S. a. p.-ndə hissəciklər sayının yalnız artması mümkündür.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

SIRF ATOMİK ÖLÇÜ « чисто атомическая мера; purely atomic measure » – bax, *Atomik ölçü.*

SIRF KƏSİLƏN MARTİNQAL « чисто разрывный мартингал; purely discontinuous martingale » – bax, *Martinqal.*

SIZMA / PERKOLYASİYA NƏZƏRİYYƏSİ « протекания / просачивания теория; percolation theory » – bax, *Perkolyasiya nəzəriyyəsi.*

SİQMA – CƏBRİ, ÇOXLUQLARIN « сигма – алгебра множеств; sigma – algebra of sets » – bax, σ *– Cəbri, çoxluqların*.

SİQMA – CƏBRİ, HADİSƏLƏRİN « сигма – алгебра событий; sigma – algebra of events » – bax, σ *– Cəbri, çoxluqların*.

SİQMA – CƏBRLƏR / σ – CƏBRLƏR AXINI « сигма алгебр / σ – алгебр поток; sigma algebr's flow » – bax, *Təsadüfi zaman anı*, *Axını*, σ *– cəbrlərin.*

SİQMA CƏBRLƏR CƏMİ / BİRLƏŞMƏSİ « сигма алгебр объединение; union of sigma – algebras » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

SİQMA – TOPOLOJİ FƏZA « сигма – топологическое пространство; sigma – topological space » – bax, σ *– Topoloji fəza.*

SİQNAL / KÜY ƏMSALI « сигнал / шум отношение; signal / noise ratio » – rabitə *kanalının* girişində additiv küylü siqnalın gücünün küy gücünə nisbətidir. S. / k. ə. rabitə kanallarının *əngələdayanıqlılığını* xarakterizə edir. Qauss additiv küylü kanallar üçün S. / k. ə. vasitəsilə *kanalın ötürücülük qabiliyyəti* də ifadə olunur: əgər $Y = (\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots)$ və $\widetilde{Y} = (\dots, \widetilde{Y}_{-1}, \widetilde{Y}_0, \widetilde{Y}_1, \dots)$ – Qauss additiv küylü kanalın giriş və çıxışında stasionar təsadüfi ardıcıllıqlardırsa, onda $Z = (\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots)$ olan kanalın ötürücülük qabiliyyəti C

$$C = (1/2) \log [1 + S/N] \qquad (*)$$

Şennon düsturu ilə verilir; burada Z_k, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ – asılı olmayan elə Qauss təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığıdır ki, Z və Y asılı olmayandırlar, $N = \mathbf{M} Z_k^2$ – küy gücüdür, bu şərtlə ki, girişdə siqnalın gücü S konstantı ilə məhduddur, yəni $\mathbf{M} Y_k^2 \le S$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$. (*) düsturunun analoqu daha ümumi Qauss kanalları üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Харкевич А. А., Борьба с помехами, М., 1965.

SİQNALIN SEÇİLİB AYRILMASI əngəllər fonunda **« выделение сигнала на фоне помех; signal detection in noise »** – təsadüfi proseslə bağlı siqnalın müşahidələr üzrə parametrlərinin qiymətləndirilməsidir. Praktikada olduqca ətraflı öyrənilmiş Ə. f. s. s. a. məsələsi $\zeta(t)$ Qauss bəyaz küyü fonunda tez-tez təsadüf olunur. Bu halda müşahidə olunan $Z(t)$ prosesi

$$Z(t) = S(t, \mathbf{a}, \theta) + \zeta(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $\theta \in \mathbf{\Theta} \subset \mathbb{R}^m$ – əngəlləyici parametrlər vektoru, $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^k$, – $Z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ prosesinin müşahidələri üzrə qiymətləndiriləcək parametrlər vektorudur. $S(t, \mathbf{a}, \theta)$ siqnalı üçün: 1) $S(t, \mathbf{a}, \theta)$, – t, $\mathbf{a}, \theta$ arqumentlərinin məlum funksiyasıdır; 2) $S(t, \mathbf{a}, \theta)$ – korrelyasion funksiyası $\mathbf{a}$ və θ vektor parametrlərindən asılı şərti Qauss prosesinin realizasiyasıdır – kimi modellərindən biri bir qayda olaraq istifadə olunur.

Siqnalın seçilib ayrılmasına aid məsələlərin geniş sinfi küy fonunda siqnalların filtrasiya və demodulyasiya məsələlərini təşkil edir (bax, *Filtrasiya*(sı) siqnalın, *Modulyasiya və demodulyasiya*).

Əd.: [1] Ван Трис Г. Л., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1–3, М., 1972–77; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 2, М., 1975.

SİQNATUR(u) yerdəyişmənin (permutasionun) **« сигнатура** перестановки; **signature** of a permutation **»** – bax, *Yerdəyişmə / permutasion.*

SİLİNDR « цилиндр; cylinder » – bax, *Cəbri, silindrik çoxluqların*.

***F* – SİLİNDR « *F* – цилиндр; *F* – cylinder »** – bax, *Silindrik* σ *– cəbr*.

SİLİNDRİK σ – CƏBR « цилиндрическая σ – алгебра; cylindrical σ – algebra », silindrik çoxluqlar cəbri, – ehtimal nəzəriyyəsində, xüsusilə də, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində ən çox təsadüf olunan, *çoxluqlar* σ *– cəbrinin* bir növüdür. S. σ – c.-in mühüm rolu onunla əsaslandırılır ki, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və topoloji vektorlar fəzaları nəzəriyyəsində, bir qayda olaraq, müxtəlif S. σ – c.-lərdə verilən ölçülərə baxılır.

$\mathscr{M}$ – əsas bazis çoxluq, $F = \{f_i, i \in I\}$, – $\mathscr{M}$ çoxluğunun müxtəlif, ümumiyyətlə, ölçülən fəzalara inikaslarının hər hansı ailəsi olsun. Hər bir f_i inikasının X çoxluğunda minimal σ – cəbrə nəzərən ölçülən olduğu σ – cəbrə F inikaslar ailəsinin doğurduğu σ – cəbr deyilir. Əgər F $\mathscr{M}$-də ədədi funksiyaların hər hansı ailəsidirsə (yəni $F \subset \mathbb{R}^{\mathscr{M}}$ olarsa, burada $\mathbb{R}$ – özünün adi Borel strukturu ilə verilmiş həqiqi oxdur), onda F ailəsi ilə doğurulan σ – cəbr F_b – silin-

drik σ – cəbr və ya silindrik σ – cəbr adlanır və bu halda F -ə görə heç bir anlaşılmazlığın olmadığı nəzərdə tutulur. $\{x \in \mathcal{M} : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in B\}$ şəklində çoxluqlar $\mathcal{M}$ -də F – silindrlər adlanır, burada $n \geq 1$, $\{f_1, \dots, f_n\} \subset F$, B, – $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında Borel altçoxluğudur. Bütün mümkün F – silindrlər çoxluğu $\mathcal{M}$ -də çoxluqlar cəbridir və bu cəbr F – silindrlər cəbri adlanır. Aydındır ki, F – silindrlər cəbrinin doğurduğu $\mathcal{M}$ çoxluğunda σ – cəbr F – silindrik σ – cəbr ilə üst-üstə düşür.

Əgər $\mathcal{M}$ vektor fəza olarsa, onda F ailəsi kimi $\mathcal{M}$ -də xətti funksionalların müxtəlif ailələri ola bilir, belə ki, əgər $\mathcal{M}$ topoloji vektor fəza olarsa, onda F əvəzinə $\mathcal{M}$ -ə qoşma topoloji fəzanın müxtəlif altçoxluqları götürülür. Məs., $\mathcal{M} = \mathbb{R}^T$ olsun, burada T – parametrlərin hər hansı çoxluğudur. Onda, bir qayda olaraq, proyeksiyalayıcı pr_t, $t \in T$ funksiyaları ailəsinin doğurduğu, $\mathcal{M}$ -də kanonik silindrik σ – cəbrə baxılır. Kanonik S. σ – c.-lə sonluölçülü paylanmalar haqqında Kolmoqorov teoremi əlaqəlidir.

Əgər $\mathcal{M}$ topoloji fəza, F $\mathcal{M}$ -də bütün kəsilməz ədədi funksiyalar ailəsidirsə, onda F ailəsinin doğurduğu σ – cəbr $\mathcal{M}$ -də Ber σ – cəbri adlanır (aydındır ki, fəzanın Ber σ – cəbri onun Borel σ – cəbrinin tərkibindədir).

Topoloji $\mathcal{M}$ fəzası və $\mathcal{M}$ -də kəsilməz ədədi funksiyaların verilən F ailəsi üçün çox vaxt belə sual qoyulur: F – silindrik σ – cəbr ilə Borel σ – cəbri üst-üstə düşürmü? Ümumi halda $\mathcal{M}$ -də Borel σ – cəbri F – silindrik σ – cəbrdən genişdir, lakin bəzi mühüm hallarda bu σ – cəbrlər üst-üstə düşə bilərlər. Məs., əgər $\mathcal{M}$ polski fəzası olarsa və F ailəsi $\mathcal{M}$ -də nöqtələri ayırarsa, onda qeyd olunan σ – cəbrlər üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SİLİNDRİK ÇOXLUQ « цилиндрическое множество; cylindrical set / cylinder » – sonsuz T çoxluğunda verilmiş və $(\mathcal{M}, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasından qiymətlər alan bütün $x(t)$ funksiyalarının $\mathcal{M}^T$ çoxluğunun bəzi $n = 1, 2, \dots$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $\Gamma \in \mathfrak{B}^n$ qiymətlərində

$$A = \{x(\cdot) : (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in \Gamma\}$$

şəklində göstərilən A çoxluğudur (burada $\mathfrak{B}^n$, – $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinin özü-özünə n – qat hasilidir). S. ç.-lar $\mathcal{M}^T$ -nin altçoxluqlarının σ – cəbrini deyil, cəbrini əmələ gətirir (T sonsuzdur).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход В. А., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SİLİNDRİK EHTİMAL « цилиндрическая вероятность; cylindrical probability » – bax, *Silindrik ölçü*.

SİLİNDRİK ÖLÇÜ « цилиндрическая мера, цилиндрическая вероятность, промера, квазимера, слабое распределение; **cylindrical measure,** quasi measure, weak distribution », silindrik ehtimal, kvazi ölçü, zəif paylanma, – B Banax fəzasının (və ya ümumi lokal qabarıq Banax fəzasının) $C(B)$ silindrlər cəbrində aşağıdakı xassələri ödəyən μ funksiyasıdır: 1) $\mu(B) = 1$; 2) kəsilməz xətti funksionalların hər bir sonlu Γ çoxluğu üçün B -nin altçoxluqlarının minimal σ – cəbri $C(B, \Gamma)$ -yə μ -nün daralması hesabi – additivdir (Γ -dən olan funksiyaların bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən olduğu fərz olunur).

μ S. ö.-sü üçün 2) xassəsinə əsasən adi qaydada

$$\hat{\mu}(b^*) = \int_X \exp\{ib^*(x)\} d\mu(x)$$

xarakteristik funksionalını təyin etmək olur. μ S. ö.-nün xarakteristik funksionalı $\hat{\mu}$ aşağıdakı xassələrə malikdir: a) $\hat{\mu}(0) = 1$; b) $\hat{\mu}$ – müsbət müəyyəndir; c) B^* fəzasının hər bir sonluölçülü altfəzasına $\hat{\mu}$ -nün daralması kəsilməzdir. Tərsi də doğrudur: a), b) və c) xassələrini ödəyən ixtiyari $\chi : B^* \to \mathbb{C}$ funksionalı üçün $C(B)$ -də elə yeganə μ S. ö.-sü vardır ki, hər hansı $\hat{\mu}$ üçün $\hat{\mu} = \chi$. Onda aydındır ki, ixtiyari $X : B^* \to L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ xətti təsadüfi funksiyası $C(B)$ -də silindrik μ ölçüsünü təyin edir:

$$\hat{\mu}(b^*) = \mathbf{M} \exp\{iX(b^*)\}, \quad b^* \in B^* \qquad (*)$$

və tərsinə, əgər μ $C(B)$ -də S. ö.-dürsə, onda elə xətti təsadüfi X funksiyası vardır ki, (*) münasibəti doğrudur.

Əgər hər bir $b^* \in B^*$ üçün

$$\int_B |b^*(x)|^p \, d\mu(x) \to \infty, \ (0 < p < \infty)$$

olarsa, onda μ S. ö.-sü p – tərtibə malikdir, deyilir. Əgər μ p – tərtibə malikdirsə və

$$b^* \mapsto \int_B |b^*(x)|^p \, d\mu(x)$$

funksiyası kəsilməzdirsə (B^* fəzasının güclü topologiyasında), μ S. ö.-sü p tipə malikdir, deyilir $(0 < p < \infty)$. p – tərtib S. ö. p – tərtib xətti təsadüfi funksiya ilə, p tip S. ö. isə p – tərtib kəsilməz xətti təsadüfi funksiya ilə doğurulur [yəni kəsilməz xətti $X : B^* \to L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ operatoru ilə].

Əgər μ silindrik σ – cəbrdə ehtimal ölçüsüdürsə, onda onun silindrlər cəbrinə daralması S. ö.-dür. Belə sual mühümdür: Silindrik ölçü hansı halda silindrik σ – cəbrdə hesabi – additiv ölçüyə qədər və ya Radon ölçüsünə qədər davam oluna bilinər?

Proxorov kriterisi: $C(B)$ -də μ S. ö.-sü B -də Radon ölçüsünə qədər, yalnız və yalnız, o halda davam oluna bilinər ki, hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $K \subset B$ kompakt altçoxluğu tapılsın ki, $A \in C(B)$ və $A \cap K = \varnothing$ münasibətlərindən

$$\mu(A) < \varepsilon$$

bərabərsizliyi alınsın.

S. ö. uzlaşmış ehtimallar haqqında Kolmoqorov teoreminin isbatında yaranır.

S. ö. tez-tez sonluölçülü fəzalarda verilən ehtimal ölçülərinin proyektiv sistemi kimi təyin olunur.

Əd.: [1] Prohorov Ju. V., «Proc. 4-th Berk. Symp. Math. Statist. and Probab… . 1960», 1961, v. 2, p. 403–19; [2] Муштари Д. Х., Вероятность и топология в банаховых пространствах, Казань, 1989.

SİMMETRİK BÖLÜNƏN STATİSTİKA « симметрическая разделимая статистика; symmetric separabele statistic » – bax, *Bölünən statistika.*

SİMMETRİK FAKTOR EKSPERİMENT « симметричный факторный эксперимент; symmetric factorial experiment » – bax, *Faktor eksperiment.*

SİMMETRİK FOK FƏZASI « симметрическое пространство Фока; symmetric Fock space » – bax, *Fok fəzası.*

SİMMETRİK KANAL « симметричный канал; symmetric channel » – keçid funksiyası bu və ya digər simmetriya xassəsinə malik rabitə *kanalıdır*. Məs., əgər giriş və çıxışda siqnalların qiymətlərinin sonlu çoxluqları ilə baxılan yaddaşsız stasionar kanalın keçid ehtimalları matrisinin sətir və sütunları eyni bir ədədlər toplusunun yerdəyişmələrindən ibarət olarsa, belə kanal simmetrik kanal adlanır. S. k. üçün bir çox mühüm nəzəri – informasion xarakteristikalar ya aşkar surətdə, yaxud qeyri – simmetrik kanallarla müqayisədə olduqca sadə şəkildə hesablanılır.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982.

SİMMETRİK QAUSS PAYLANMASI « симметричное гауссовское распределение; symmetric Gaussian distribution » – bax, *Qauss paylanması* lokal kompakt Abel qrupunda.

SİMMETRİK PAYLANMA « симметрическое распределение; symmetric distribution » – koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik iki ixtiyari çoxluğa eyni ehtimallar qarşı qoyan ehtimal paylanmasıdır. $A \subset \mathbb{R}^n$ – Borel çoxluğu, $-A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ -x \in A\}$ olsun; əgər ixtiyari A çoxluğu üçün $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(-A)$ olarsa, $\mathbb{R}^n$-də $\mathbf{P}(A)$ ehtimal paylanması simmetrik paylanma adlanır. Paylanma, yalnız və yalnız, onun xarakteristik funksiyası həqiqi olduqda (və ya sıfra nəzərən simmetrik olduqda) simmetrik paylanmadır.

Riyazi gözləməsi sıfra bərabər normal paylanma S. p.-dır.

S. p.-nın bütün tək tərtib momentləri, əgər bunlar varsa, sıfra bərabərdir. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması, yalnız və yalnız, o halda S. p.-dır ki, onun paylanması $-\xi$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə üst-üstə düşsün.

SİMMETRİK STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK « симметрическое стохастическое дифференциальное уравнение; symmetric stochastic differential equation » – bax, *Stoxastik differensial tənlik* Stratonoviç formasında.

SİMMETRİK STOXASTİK İNTEQRAL « симметрический стохастический интеграл; symmetric stochastic integral » – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı.*

SİMMETRİK TƏSADÜFİ MATRİS « симметрическая случайная матрица; symmetric random matrix » – n tərtib elə kvadrat $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|$ təsadüfi matrisidir ki, onun baş diaqonala nəzərən simmetrik yerləşən ixtiyari iki elementi bir-birinə bərabərdir. Fərz olunur ki, ξ_{ij}, $i \geq j$, $i,\ j = 1, \dots, n$ elementlərinin birgə paylanma sıxlığı vardır, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri, h_i – onun məxsusi vektorlarıdır və bunların sıfırdan fərqli ilk komponentləri mənfi deyildirlər. Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri λ_i, $i = 1, \dots, n$ vahid ehtimalla müxtəlifdirlər.

Əgər H_n vektor – sütunları h_i, $i = 1, \dots, n$ olan təsadüfi matris, G n – ölçülü həqiqi ortoqonal matrislər qrupu, $\mathscr{B}$ bu qrupda n – ölçülü ortoqonal matrislərin Borel çoxluqlarının σ – cəbri və μ G qrupunda normalanmış Haar ölçüsüdürsə, onda ixtiyari $L \in \mathscr{B}$ altçoxluğu və α_i, β_i, $i = 1, \dots, n$ həqiqi ədədləri üçün

$$\mathbf{P}\{H_n \in L,\ \alpha_i < \lambda_i < \beta_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

ehtimalını hesablamaq olur (bax, [1]).

Əgər $U_n \Xi_n U_n^{\mathrm{T}}$ matrisinin paylanması bütün $U_n \in G_n$ ortoqonal matrisləri üçün Ξ_n matrisinin paylanmasına bərabər olarsa və ξ_{ij}, $i \geq j$, $i,\ j = 1, \dots, n$ elementlərinin birgə paylanma sıxlığı p olarsa, onda H_n matrisi Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı deyildir və aşağıdakı paylanmaya malikdir:

$$\mathbf{P}\{H_n \in L\} = 2^n \int_D \mu(dU_n),$$

$$D = \{U_n \in L \subset G\} \bigcap \{u_{1i} > 0,\ i = 1, \dots, n\},$$

burada u_{1i}, – U_n matrisinin elementləridir. Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətlərinin paylanma sıxlığı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\pi^{n(n+1)/4} \prod_{i=1}^{n} \{\Gamma[(n-i+1)/2]\}^{-1} p(Y_n) \times$$

$$\times \prod_{\substack{i,j=1,\dots,n,\\ i>j}} |y_i - y_j|,\ y_1 > \dots > y_n,\ Y_n = \|\delta_{ij}\, y_i\|.$$

Əd.: [1] Гирко В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

SİMMETRİZASİYA « симметризация; symmetrization » – hər bir ξ təsadüfi kəmiyyətinə hər hansı bir ailədən ${}^s\xi = \xi - \eta$ təsadüfi kəmiyyətinin qarşı qoyulmasıdır, burada η təsadüfi kəmiyyəti ξ-dən asılı deyildir və ξ ilə eyni qanunla paylanmışdır. Əgər ξ-nin paylanması F olarsa, $\eta = -\xi$-nin paylanması ${}^-F$-dirsə və ${}^-F = F$ olarsa, F simmetrik paylanma adlanır. [Sıxlıq funksiyası $p(x)$-in mövcudluğu halında simmetriklik $p(-x) = p(x)$ kimi anlaşılır]. Kəsilməzlik nöqtələrində ${}^-F(x) = 1 - F(-x)$.

ξ_1 və ξ_2 eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $\xi_1 - \xi_2$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası ${}^sF = F * {}^-F$ simmetrik paylanmadır. Onda ${}^sF(x) = 1 - {}^sF(-x)$ simmetriklik şərtindən bilavasitə,

$^sF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x+y)\, F\{dy\}$ olduğu alınır.

Bu halda $^sF(x)$ simmetrik paylanma olub, simmetrikləndirilmə nəticəsində alınmışdır, deyilir.

M i s a l.

F – atomları $0, 1, 2, \ldots$ nöqtələrində topalanmış $p_0, p_1, p_2, \ldots$ çəkili atomik paylanma olsun.

Onda simmetrizasiya nəticəsində alınmış ^sF paylanması da atomik paylanmadır və $\pm n$ nöqtələrində $q_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k\, p_{k+n}$, $n \geq 0$ ilə təyin olunan çəkilərlə paylanmışdır, $q_{-n} = q_n$. Məs., F Puasson paylanması olarsa, $n \geq 0$ olduqda

$$q_n = e^{-2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+2k}}{k!(n+k)!} = e^{-2\alpha}\, I_n(2\alpha)$$

olur, burada I_n – Bessel funksiyasıdır (bax, [1], fəs. II (7.1) məsələ 9).

Simmetrizasiyanın tətbiqi bir çox mülahizələri olduqca sadələşdirməyə imkan yaradır. Məs., F və ^sF paylanmalarının qalıq paylanmaları bir-birilə müqayisə olunan kəmiyyətlər olur. Bax, *Simmetrizasiya metodu.*

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, М., 1962.

SİMMETRİZASİYA BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ « симметризации неравенства; symmetrizasion inequalities » – bax, *Simmetrizasiya metodu.*

SİMMETRİZASİYA METODU « симметризации метод; symmetrization method » – ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi teoremlərinin isbatında tətbiq olunan bu metod, hər bir ξ təsadüfi kəmiyyətinə hər hansı bir ailədən $^s\xi = \xi - \eta$ təsadüfi kəmiyyətinin qarşı qoyulmasına əsaslanır, burada η təsadüfi kəmiyyəti ξ-dən asılı deyildir və ξ ilə eyni qanunla paylanmışdır. $f(t)$ ξ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdırsa, $^s\xi$ təsadüfi kəmiyyəti xarakteristik funksiyası $|f(t)|^2$ (mənfi olmayan) olan simmetrik paylanmaya malikdir; $^sf(t)$ $^s\xi$ təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdırsa, onda $^sf(t) = |f(t)|^2$. Əgər $\zeta = \{\xi_t,\ t \in T\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ailəsidirsə, onda $^s\zeta = \{\xi_t - \eta_t,\ t \in T\}$ simmetriklənmiş ailədir; η_t, $t \in T$ ailəsi ixtiyari $t \in T$ qiymətində ξ_t-dən asılı deyildir, η_t və ξ_t eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir.

Təsadüfi kəmiyyəti öz medianı ilə simmetrikləşdirmək üçün aşağıdakı *simmetrizasiya bərabərsizliklərindən* istifadə etmək olar: hər bir ε və hər bir a üçün

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}\{\xi - \mu_\xi \geq \varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{^s\xi \geq \varepsilon\}$$

və

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}\{|\xi - \mu_\xi| \geq \varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{^s\xi \geq \varepsilon\} \leq 2\mathbf{P}\{|\xi - a| \geq \varepsilon/2\};$$

burada μ_ξ, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin medianıdır.

M i s a l l a r. *a*) Üstlü qanunun simmetrizasiyası ikitərəfli üstlü qanuna gətirir; $(0, 1)$ intervalında müntəzəm paylanmanın simmetrizasiyası nəticəsində üçbucaq paylanma alınır.

b) ± 1 nöqtələrində atomları olan $1/2$ ehtimallarlı simmetrik paylanma heç bir paylanmanın simmetrizasiyası nəticəsi deyildir.

S i m m e t r i z a s i y a b ə r a b ə r s i z l i k l ə r i. X_1, X_2 eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $t > 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|X_1 - X_2| > t\} \leq 2\mathbf{P}\left\{|X_1| > \frac{1}{2}t\right\}.$$

Əgər elə $a \geq 0$ olarsa ki, $\mathbf{P}\{X_i \leq a\} \geq p$ və $\mathbf{P}\{X_i \geq -a\} \geq p$ şərtləri ödənilsin, onda

$$\mathbf{P}\{|X_1 - X_2| > t\} \geq p \cdot \mathbf{P}\{|X_1| > t + a\}.$$

Xüsusi halda X_1-in medianı sıfra bərabər olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{|X_1 - X_2| > t\} \geq \frac{1}{2}\mathbf{P}\{|X_1| > t\}.$$

Əgər $X_1, \ldots, X_n$ simmetrik paylanmalara malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ cəminin paylanması da simmetrik paylanmadır və

$$\mathbf{P}\{|X_1 + \ldots + X_n| > t\} \geq \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\max|X_j| > t\}.$$

Əgər X_j-lər eyni F paylanması olan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{|X_1 + \ldots + X_n| > t\} \geq \frac{1}{2}\mathbf{P}(1 - e^{-n[1-F(t)+F(-t)]}).$$

Əd.: [1] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984, т. 2.

SİMPLEKS METOD « симплексный метод; simplex method » – bax, *Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması*.

SİMPSON PAYLANMASI « Симпсона распределение; Simpson's distribution » – bax, *Üçbucaq paylanma.*

SİNAY BİLYARDI « Синая бильярд; Sinai billiards » – hissə-hissə hamar və Q oblastının daxilində ciddi qabarıq sərhədə malik məhdud qapalı Q oblastında (Evklid fəzasında və ya Evklid metrikalı tor üzərində yerləşən) maddi nöqtənin ətalət üzrə hərəkətinə müvafiq dinamik sistemdir; bu sistemdə nöqtə sərhəddən aşağıdakı qanunla əks olunur: düşmə bucağı qayıtma bucağına bərabərdir. S. b. statistik mexanikanın bəzi modellərində yaranır. S. b. güclü stoxastik xassələrli dinamik sistemə misaldır. Məs., S. b. K – sistemdir (bax, [1]) və *Bernulli yerinidəyişməsinə* metrik izomorfdur (bax, [2]).

Əd.: [1] С и н а й Я. Г., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 141–92; [2] G a l l o v o t t i G., O r n s t e i n D., «Comm. Math. Phys.», 1974, v. 38, № 2, p. 83–101.

SİNXRON ÇOXGİRİŞLİ KANAL « синхронный канал множественного доступа; synchronous channel of multiple access » – bax, *Çoxgirişli kanal.*

SİNXRON KANAL « синхронный канал; synchronous channel » – bax, *Çoxgirişli kanal.*

SİNXRON NÖQTƏVİ PROSESLƏR « синхронные точечные процессы; synchronous point processes » – bax, *Nöqtəvi proses*.

SİNQULYAR AYRILIŞ « сингулярное разложение; singular decomposition » – X matrisinin $X = ULA^{\mathsf{T}}$ şəklində ifadəsidir, burada X, – $(n \times p)$ – matrisi p sayda dəyişənlər üzərində n sayda müşahidələrin matrisidir (bu dəyişənlərin ölçülən orta qiymətlərinin olduğu fərz olunur), U və A – uyğun olaraq, hər birinin ortoqonal sütünları olan $(n \times r)$ – və $(p \times r)$ – matrislərdir; odur ki, $U^{\mathsf{T}}U = I_r$, $A^{\mathsf{T}}A = I_r$, L isə $(r \times r)$ – diaqonal matrisdir, r, – X matrisinin ranqıdır. S. a. ilə baş komponentlərin tapılması üçün effektiv metod alınır.

Əd.: [1] J u l i f f e I., Principal component analysis, N. Y.,1986.

SİNQULYAR KOMPONENTİ, ÖLÇÜNÜN « сингулярная составляющая меры; singular component of measure » – ölçünün *Lebeq ayrılışının* sinqulyar komponentidir. E – əsas bazis fəza, S, – E-nin hissələrindən təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbr, μ və λ, – S-də təyin olunmuş ixtiyari iki σ – sonlu ölçülər olsun. Onda μ ölçüsü $\mu_1 + \mu_2$ cəmi şəklində ifadə oluna bilir, belə ki, μ_1 ölçüsü λ ölçüsünə nəzərən sinqulyardır (yəni $\mu_1 \perp \lambda$), μ_2 ölçüsü isə λ ölçüsünə nəzərən kəsilməz ölçüdür (yəni $\mu_2 << \lambda$). Bu ifadə yeganədir və μ ölçüsünün Lebeq mənada ayrılışı adlanır. Bu halda μ_1 ölçüsü μ ölçüsünün sinqulyar komponenti, μ_2 ölçüsü isə μ ölçüsünün mütləq kəsilməz komponenti adlanır. Məs., μ ölçüsü λ ölçüsünə nəzərən, yalnız və yalnız, o halda mütləq kəsilməz ölçüdür ki, sinqulyar komponent μ_1 eyniliklə sıfra bərabər olsun. Sonlu μ ölçüsünün sinqulyar komponentini almaq üçün $\sup\{\mu(Z) : Z \in S \;\&\; \lambda(Z) = 0\}$ çoxluğuna baxmaq kifayətdir. Y hər hansı λ ölçüsü sıfır olan elə çoxluq olsun ki, qeyd olunan supremum bu çoxluqda olsun (belə çoxluq həmişə vardır). Onda μ ölçüsünün sinqulyar komponenti μ_1 aşağıdakı kimi təyin olunur: $\mu_1(X) = \mu(X \cap Y)$, $X \in S$. Bu halda $\mu - \mu_1$ fərqi μ ölçüsünün mütləq kəsilməz μ_2 komponentini təyin edir.

Lebeq mənada ayrılış, sinqulyar komponent və mütləq kəsilməz komponent anlayışları adi ölçülər əvəzinə dəyişən işarəli ölçülər (yəni yüklər) halı üçün də ümumiləşdirilə bilinir.

Əd.: [1] X a l m o ş P., Teория меры, пер. с англ., M., 1953; [2] H e в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., M., 1969.

SİNQULYAR PAYLANMA « сингулярное распределение; singular distribution » – Lebeq ölçüsü sıfra bərabər çoxluqda topalanmış, $\mathbb{R}^n$-də kəsilməz ehtimal paylanmasıdır. Kantor paylanması düzxətt üzərində S. p.-ya misaldır. $n \geq 2$ olduqda $\mathbb{R}^n$-də S. p., məs., müsbət radiuslu sferada müntəzəm paylanmadır.

Əd.: [1] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., M., 1987; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, M., 1984.

SİNQULYAR PAYLANMA FUNKSİYASI « сингулярная функция распределения; singular distribution function » – bax, *Lebeq ayrılışı* p a y l a n m a f u n k s i y a l a r ı n ı n.

SİNQULYARLIĞI, ÖLÇÜLƏRİN « сингулярность мер; singularity of measures » – iki *ölçü* arasında, ixtiyari prehilbert fəzasında iki vektorun ortoqonallıq münasibətinə müəyyən mənada analoji münasibətdir (bəzən $\mu_1 \perp \mu_2$ simvolu ilə işarə olunur). E – əsas bazis fəzası, S – bu fəzanın hissələrinin qeyd olunmuş σ – cəbri, μ_1 və μ_2, – S σ – cəbrində təyin olunmuş ölçülər olsun. Əgər E fəzasının elə iki S – ölçülən X_1 və X_2 çoxluqlarına $\{X_1, X_2\}$ bölgüsü olarsa ki, $\mu_1(X_2) = \mu_2(X_1) = 0$ şərti ödənilsin, onda μ_1 və μ_2 (qarşılıqlı) s i n q u l y a r ö l ç ü l ə r adlanır; başqa sözlə, μ_1 ölçüsü X_1 çoxluğunda, μ_2 ölçüsü X_2 çoxluğunda topalanmış ölçülərdir. Bu halda deyilir ki, μ_1 və μ_2 ölçüləri a s ı l ı o l m a y a n s p e k t r a l t i p l ə r ə aiddirlər (və ya d i z y u n k t s p e k t r a l t i p l ə r ə). Adi ölçülərin sinqulyarlıq anlayışını dəyişən işarəli ölçülər (*yüklər*) üçün də ümumiləşdirmək olur. İki yükün tam variasiyaları sinqulyar olarsa, onlar (*qarşılıqlı*) *sinqulyar yüklər* adlanır. S E əsas bazis fəzasının hissələrinin qeyd olunmuş σ – cəbri olduqda ölçülərin sinqulyarlıq anlayışını təyin etmək olur.

$(\mu_i)_{i \in I}$ – eyni bir S σ – cəbrində təyin olunmuş ölçülər ailəsi olsun. Əgər iki müxtəlif $i \in I$ və $j \in I$ indeksləri üçün bu ailədən olan uyğun μ_i və μ_j ölçüləri qarşılıqlı sinqulyar olarlarsa, onda bu ailənin ölçüləri c ü t - c ü t s i n q u l y a r ö l ç ü l ə r adlanır. Seçmə aksiomunun köməyilə vahid uzunluqlu $[0, 1]$ seqmentinin altçoxluqlarının σ – cəbri S-i qurmaq və S-də cüt-cüt sinqulyar ehtimal ölçülərinin $(\mu_i)_{i \in I}$ ailəsini elə təyin etmək olar ki, hər bir μ_i, $i \in I$ ölçüsü $[0, 1]$-də klassik Lebeq ölçüsünün davamı olsun və indekslər çoxluğu I-nin gücü ən böyük olsun (yəni $2^{2^{\mathbf{c}}}$-yə bərabər olsun, $\mathbf{c}$ – kontinuum gücüdür).

Əd.: [1] X a l m o ş P., Теория меры, пер. с англ., M., 1953; [2] H e в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., M., 1969.

K – SİSTEM « K – система; K – system » – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, K – x a s s ə l i dinamik sistemdir (avtomorfizm T-dir, daha dəqiq, onun doğurduğu avtomorfizmlər qrupu $\{T^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ və ya *ölçülən axındır*); avtomorfizm halında K – x a s s ə aşağıdakı kimi ifadə olunur: elə $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ σ – cəbri tapılar ki;

1) $T\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_0$;

2) $\bigcup_{n \geq 0} T^n \mathcal{A}_0$ $\mathcal{A}$ σ – cəbrini doğurur;

3) $\bigcup_{n<0} T^n \mathscr{A}_0 = \mathfrak{N}$ şərtləri ödənilsin, burada $\mathfrak{N}$ yalnız 0 və ya 1 ölçülü çoxluqları özündə saxlayan σ – cəbrdir (trivial σ – cəbr), σ – cəbrlər arasında bərabərliklər isə sıfır ölçülü çoxluq dəqiqliyilə yerinə yetir. Axınlar halında K – xassə eyniilə ifadə olunur, amma diskret n parametri kəsilməz parametrlə əvəz olunmaq şərtilə.

K – s. anlayışı [1]-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən daxil olunmuşdur, belə sistemlər kvazirequlyar sistemlər adlandırılmışdır. Diskret zamanlı K – s.-lər K – avtomorfizmlər, kəsilməz zamanlı K – s.-lər isə K axınlar adlanır.

K – s.-ə aid misal – diskret və ya kəsilməz zamanlı ζ_t, $-\infty < t < \infty$ prosesinin dar mənada stasionar seçimi funksiyaları fəzasında yerinidəyişmələr qrupudur və bu prosesin qalıq σ – cəbri trivial σ – cəbrdir (qalıq σ – cəbr – $\bigcup_{n>0} \mathscr{B}_{\geq t}$ kəsişməsi kimi təyin olunur, burada $\mathscr{B}_{\geq t}$ isə bütün $s \geq t$ üçün ζ_s təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbrdir). Trivial qalıq σ – cəbrli proseslər Kolmoqorov mənada requlyar və ya sıfır–vahid qanununu ödəyən proseslər adlanır. Əgər T^t ζ_t requlyar prosesinin ω realizasiyasını $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(s) = \omega(s+t)$ realizasiyasına çevirən yerinidəyişmədirsə (sola yerinidəyişmə), onda $\mathscr{B}_{\geq 0}$ σ – cəbri K – s.-in tərifində $\mathscr{A}_0$ üzərinə qoyulan şərtləri ödəyir. Diskret zaman halında, ζ_0 təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu bölgünün entropiyası da sonlu olarsa (yəni $\zeta_0 = \text{const}$ tipli çoxluqlara bölgü olarsa), ζ_t prosesinin requlyarlığı $\{T^t\}$ sisteminin K – xassəli olması üçün yalnız kafi deyil, həmçinin zəruri şərtdir (ümumi halda bu doğru deyil; bax, [2]).

Ehtimal nəzəriyyəsindən başqa klassik və statistik mexanikanın dinamik sistemləri arasında və digər sahələrdə də K – s.-lərə təsadüf olunur. Çevrilməyən çevirmələr sinfində (endomorfizmlər sinfində) K – avtomorfizmin analoqu *dəqiq endomorfizmdir*.

Ümumi K – s. nəzəriyyəsində, adətən, fərz olunur ki, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ Lebeq fəzasıdır; onda K – s.-in tərifində $\mathscr{A}_0$ σ – cəbrini ona uyğun ölçülən bölgü (K – bölgü) ilə, $\mathscr{A}$ və $\mathfrak{N}$ σ – cəbrlərini uyğun olaraq ayrı-ayrı nöqtələrə bölgü və yeganə elementi bütün Ω fəzası olan bölgü ilə əvəz etmək olar. Qeyd etmək lazımdır ki, bir çox nəticələr (xüsusilə də, K – avtomorfizmlərə aid) ehtimal fəzalarının daha geniş sinfi üçün də doğrudur.

İxtiyari K – s. erqodikdir, müsbət entropiyaya və hesabiqat spektrə malikdir (bax, [1], [3]), ixtiyari bölünmə əlamətli qarışıqdır və bundan başqa da, K – xassəyə ekvivalent K – qarışma xassəsinə malikdir (« K – qarışma» termini də buradan götürülmüşdür). K – s. sinfini xalis entropik terminlərlə xarakterizə etmək olar (bax, [5], [6]): dinamik sistem K – s. sinfinə, yalnız və yalnız, o halda aid olur ki, onun tamamilə müsbət entropiyası olsun. Bu baxılan sistemin ixtiyari qeyri – trivial homomorf obrazının (faktorsistem) müsbət entropiyasının olması kimi anlaşılır (bax, *İzomorfizmi*, *dinamik sistemlərin* metrik). Belə homomorf obraza keçdikdə K – xassə saxlanır. Bu xassə «zaman istiqaməti» dəyişildikdə də, yəni $\{T^t\}$ dinamik sistemindən $\{S^t\}$ dinamik sisteminə keçdikdə saxlanır, burada $S^t = T^{-t}$. Heç olmasa bir K – avtomorfizmi olan ixtiyari ölçülən axın K – s.-dir (bax, [7] – [9]). K – s. sinfi hər biri *Bernulli yerinidəyişməsini* (diskret zaman halında) və ya onun analoqu Bernulli axınını (kəsilməz zaman halında) özündə saxlayan eyni entropiyalı sistemlərin altsiniflərinə bölünür (bax, [10]). Müxtəlif altsiniflərdən ibarət sistemlər izomorf olmur, lakin eyni entropiyalı K – s.-lər arasında cüt-cüt izomorf olmayan K – s.-lərin qeyri – hesabi ailəsini tapmaq mümkündür (bax, [10], [11]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861–64; [2] Перри В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 173, № 2, с. 264–66; [3] Синай Я. Г., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 1961, т. 25, № 6, с. 899–924; [4] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [5] Рохлин В. А., Синай Я. Г., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, № 5, с. 1038–41; [6] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3–56; [7] Rudolph D., «Math. Z.», 1976, Bd 150, № 3, S. 201–20; [8] Blanchard F., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 36, № 2, S. 129–36; [9] Гуревич Б. М., «Функц. анализ и его прилож.», 1977, т. 11, № 3, с. 20–23; [10] Орнстейн Д., Эргодическая теория случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [11] Ornstein D., Shields P., «Adv. Math.», 1973, v. 10, № 1, p. 63–88.

Y – SİSTEM « Y – система; Y – system » – *Anosov dinamik sistemidir*. D. V. Anosov tərəfindən 1967-də onun tərəfindən baxılan sistemlər üçün daxil olunmuşdur.

SİSTEMATİK XƏTA « систематическая ошибка; systematic error » – eksperiment nəticəsində daim yaranan və müəyyən səbəblərin təsirilə (cihazın düzgün tənzimlənməməsi, mühitin təsirilə və s.) hər dəfə eyni bir nəticələrə gətirən xətadır. S. x. ölçülən kəmiyyətin müşahidə olunmuş qiyməti (ξ) və onun əsl qiyməti (a) arasındakı fərq ($\Delta x = \xi - a$; bu fərq *ölçmə* (*eksperiment*) *xətası* adlanır) ya sabit olduqda və ya hər hansı bir qanunauyğunluqla dəyişdikdə yaranan xətalara deyilir; bu halda bu xətaların baş vermə səbəbi və xüsusiyyətləri məlum olmalıdır. Belə xətalar ya əvvəlcədən aradan qaldırılır, ya da hesablamalarda və nəticələrdə uyğun düzəlişlər daxil edilməklə nəzərə alınır.

Cihazın S. x.-nın olub-olmadığını aydınlaşdırmaq üçün, bu cihazın ölçmə nəticələri ilə hər hansı nəzarət cihazının nəticələrini müqayisə etmək məqsədilə xüsusi eksperiment aparılır. Qeyd etmək lazımdır ki, S. x. və *təsadüfi xəta* arasında fərqi həmişə müəyyən etmək olmur, çünki bəzi hallarda bu xətaların hər ikisi də eyni bir səbəb üzündən baş verə bilər.

a – hər hansı araşdırılan ξ təsadüfi kəmiyyətinin üçün ölçmə nəticəsi olsun. Onda, $\xi - a$ fərqi eksperiment xətası adlanır. $b = \mathbf{M}(\xi - a)$ kəmiyyətinə sistematik xəta və ya meyl deyilir. Qeyd olunan halda müşahidədə ξ-ni $\xi = a + b + \delta$ cəmi şəklində ifadə etmək olar; $\delta = \xi - a - b$ və $\mathbf{M}\delta = 0$, b – meyldir. Əgər $b = 0$ olarsa, onda S. x. və ya cihazın S. x.-sı yoxdur, deyilir.

Bax, *Meylsiz statistik qiymət*, *Müşahidə xətası*, *Ən kiçik kvadratlar metodu*, *Ölçmə xətası*.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] Длин А. М., Математическая статистика в технике, М., 1958.

SİYAHI DEKODLAMASI « списочное декодирование; list decoding », L həcmli siyahı ilə

d e k o d l a m a – elə *dekodlamadır* ki, bərpaolunan məlumat $L>1$-dən artıq olmayan sayda məlumatın qiymətlərindən ibarət siyahi şəklində ifadə olunur. Beləliklə, əgər dekodlama φ funksiyası ilə verilirsə, bu funksiyanın qiymətləri məlumatın bütün qiymətləri çoxluğunun L güclü altçoxluqlarıdır. Məlumatın bərpasının keyfiyyəti onunla təyin olunur ki, siyahıdakı L məlumatdan biri qəbuledən tərəfdən verilmiş bərpa dəqiqliyini ödəsin.

Məsələn, səhvin maksimal ehtimalı $\mathbf{P}_{m,L}$ və səhvin orta ehtimalı $\mathbf{P}_{a,L}$ əsl məlumatın L sayda bərpa olmuş məlumatlar siyahısında olmaması ehtimalı kimi təyin olunur. Əgər səhvlərin sayı t-ni aşmayan ixtiyari ədəd olarsa, L sayda bərpa olunmuş məlumatlar siyahısında əsl məlumat da olarsa, S. d. ilə t sayda səhv düzəldilir, deyilir.

Qeyd olunmuş L həcmli S. d.-nda düz və tərs kodlama teoremləri öz qüvvəsində qalır (bax, *İnformasiya nəzəriyyəsi*). Lakin səhv ehtimalı, düzələn səhvlərin sayı kimi ötürmə xarakteristikalarını ötürmə sürəti verildiyi halda olduqca yaxşılaşdırmaq mümkündür.

Məs., fərz olunur ki, $y_j, \widetilde{y}_j = 0,1$, $j = 1, \dots, n$ uyğun olaraq, giriş və çıxışda ikilik siqnallardır və $\mathbf{P}\{y_j = \widetilde{y}_j\} = 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1/2$; bu halda yaddaşsız ikilik simmetrik kanal üzrə məlumatların ötürülməsi araşdırılır. $y^n = (y_1, \dots, y_n)$ və $\widetilde{y}^n = (\widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_n)$ ardıcıllıqları arasında $\rho_n(y^n, \widetilde{y}^n)$ Hemminq (Hamming R. W., [1]) məsafəsidir, yəni elə $j = 1, \dots, n$ j-lərin sayıdır ki, bu ardıcıllıqlarda y_j və $\widetilde{y}_j$ müxtəlifdirlər; $t = [\alpha n]$, $0<\alpha<\varepsilon$ olsun. $\{\rho_n(y_n, \widetilde{y}_n) \geq t\}$ hadisəsinin ehtimalı $P_\alpha^{(n)} = P_{\alpha,\mathrm{sp}}^{(n)}$,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{sp}}(R_\alpha) = \lim_{n\to\infty} (-n)^{-1} \log P_{\alpha,\mathrm{sp}}^{(n)}, \quad R_\alpha = \lim_{n\to\infty} R_\alpha^{(n)}$$

olsun, burada $R_\alpha^{(n)} = \log(2^n / V_t^{(n)})$, $V_t^{(n)}$, – y^n ardıcıllıqları fəzasında t radiuslu, Hemminq metrikalı kürənin həcmidir. İxtiyari α və δ, $0<\delta$, $\alpha<1/2$ üçün, α və δ-dan asılı, hər hansı bir L üçün elə kodlama və L həcmli siyahılı S. d. vardır ki,

$$1)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ (-n)^{-1} \log P_{mL}^{(n)} \geq \mathbf{M}_{\mathrm{sp}}(R_\alpha) - \delta,$$

$$2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-1} t_{nL} \geq 1 - H(\alpha' n) - \delta$$

münasibətləri doğrudur; t_{nL} – düzəldilmiş səhvlərin sayı, $P_{mL}^{(n)}$ – n uzunluqlu blokun S. d.-nda səhvin maksimal ehtimalıdır.

$$H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x).$$

Bu nəticələr yaddaşsız ümumi kanal halı üçün də alınır. S. d. çox mürəkkəb olmayan dekodlamada kodların qurulması üçün istifadə olunur (bax, *Mürəkkəblik*(y i) k o d l a m a v ə d e k o d l a m a n ı n).

Əd.: [1] З я б л о в В. В., П и н с к е р М. С., Списочное каскадное декодирование, «Проблемы передачи информации»,1981, т. 17, в. 4, с. 29–33; [2] Ч и с а р И., К е р н е р Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] E l i a s P., «IRE WESCON Convent. Rec», 1957, v. 1, № 2, p. 94–104; [4] F o r n e y G. D., Exponential error bounds for erasur, list and decision feedback schemes, «IEEE Trans. Inform. Theory», 1968, v. 14, p. 206–20.

SKALYAR CIRLAŞAN ÖLÇÜ « скалярно вырожденная мера; scalarly degenerate measure » – Banax fəzasında (və ya ümumi lokal qabarıq fəzada) elə *ehtimal ölçüsüdür* ki, hər hansı sıfırdan fərqli kəsilməz, xətti funksional bu ölçüyə nəzərən sanki yəqin sıfra bərabərdir. Əgər μ separabel B Banax fəzasında zəif ikinci tərtibli ehtimal ölçüsü və $K_\mu : B^* \to B$ onun korrelyasion operatoru olarsa, onda μ, yalnız və ya yalnız, o halda S. c. ö. olur ki, hər hansı sıfırdan fərqli $x^* \in B^*$ üçün $K_\mu x^* = 0$ olsun. Normalanmış qeyri – separabel fəzada, *silindrik σ – cəbrdə* verilmiş hər bir ehtimal ölçüsü S. c. ö.-dür. Riyazi gözləməsi sıfra bərabər Qauss ölçüsü μ-nün separabel Banax fəzasında cırlaşan ölçü olması onun daşıyıcısının B ilə üst-üstə düşməməsinə ekvivalentdir.

Əd.: [1] V a k h a n i a N. N., «Nagoya Math. J.», 1975, v. 57, p. 59–63.

SKALYAR ÖLÇÜLƏN İNİKAS « скалярно измеримое отображение; scalarly measurable mapping » – bax, *Zəif ölçülən inikas.*

SKEDASTİK XƏTT « скедастическая линия; skedastic curve » – bir təsadüfi kəmiyyətin digər təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlərə nəzərən *şərti dispersiyasının* asılılıq qrafikidir. X və Y təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $y = \sigma^2(x) = \mathbf{D}(Y \mid X = x)$ tənliyinin qrafikinə s k e d a s t i k x ə t t (ə y r i) deyilir. S. x. Y və X-in reqressiya xəttinin X-in aldığı qiymətlər dəyişdikdə Y-in (Y-in X-ə görə reqressiya xəttinin) orta dəyişməsi dəqiqliyini xarakterizə edir. Əgər x-in bütün qiymətlərində $\sigma^2(x) = 0$ olarsa, onda X və Y vahid ehtimalla funksional asılı təsadüfi kəmiyyətlərdir.

SKEYLİNQ MÜNASİBƏT « скейлинговое соотношение; scaling relation » – bax, *Kritik indeks.*

SKEYLİNQ – PROSES « скейлинг – процесс; skaling process » – bax, *Avtomodel proses.*

SKOROXOD STOXASTİK TÖRƏMƏSİ « Скорохода стохастическая производная; Skorohod stochastic derivative » – bax, *Stoxastik törəmə.*

SKOROXOD TOPOLOGİYASI 2-ci növ kəsilməsi olmayan funksiyaların $D[0,1]$ fəzasında **« Скорохода топология** в пространстве функций без разрывов 2-го рода $D[0,1]$; **Skorohod topology** in the space of CADLAG functions / **Skorohod topology** in the space right continuous with left limits **»** –

$$d(x,y) = \inf\{\|\lambda - i\| + \|x \circ \lambda - y\| : \lambda \in \Lambda\}$$

metrikası ilə doğurulmuş topologiyadır, burada Λ, – $[0,1]$-i özünə inikas etdirən bütün kəsilməz ciddi artan funksiyaların çoxluğu,

$$i(t) \equiv t, \quad x \circ \lambda(t) \equiv x(\lambda(t)), \quad \|a\| = \sup\{|a(t)| : t \in [0,1]\}.$$

S. t. təsadüfi proseslər üçün *limit teoremlərində* münasib sayılır, ona görə ki, bu topologiya elə d_0 metrikası ilə verilə bilinir ki,

bu metrika üçün $(D,\ d_0)$ tam separabel metrik fəzadır (bax, *Fəza*(sı) 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan funksiyalar). Qiymətləri $(\mathscr{X},\ \rho)$ metrik fəzasından olan funksiyalar fəzasında S. t. – $\left\| x \circ \lambda - y \right\|$-in

$$\sup\{\ \rho(x \circ \lambda(t),\ y(t)) : t \in [0,1]\ \}$$

ilə əvəz edilməsilə d şəklində metrika ilə verilir.

Əd.: [1] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 3, с. 289–319; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

SLEPİAN BƏRABƏRSİZLİYİ « Слепяна неравенство; Slepian inequality » – *Qauss proseslərinin* maksimumunun paylanması üçün müqayisə bərabərsizliyidir. Əgər X_t, Y_t, $t \in T$ sonlu və ya hesabi T parametrik çoxluğunda verilmiş, mərkəzlənmiş Qauss təsadüfi prosesləridirsə və bu proseslər üçün

$$\mathbf{M} X_t^2 = \mathbf{M} Y_t^2,\ t \in T;\ \mathbf{M} X_t X_s \geq \mathbf{M} Y_t Y_s,\ t \neq s$$

şərtləri ödənilərsə, onda ixtiyari həqiqi a_t, $t \in T$ funksiyası üçün

$$\mathbf{P}\{\ \sup_{t \in T} (X_t - a_t) > 0\ \} \leq \mathbf{P}\{\ \sup_{t \in T} (Y_t - a_t) > 0\ \}$$

S. b. ödənilir.
Məs.,

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in T} X_t > a\} \leq \mathbf{P}\{\sup_{t \in T} Y_t > a\},\ a \in (-\infty,\ \infty).$$

S. b. T parametrik çoxluğu separabel metrik fəza, X_t, Y_t separabel proseslər və a_t kəsilməz funksiya olduğu halda da doğrudur.

S. b. D. Slepian tərəfindən [1]-də Qauss proseslərinin realizasiyalarının qeyd olunmuş səddən kənara çıxması ilə bağlı məsələlərlə əlaqədar alınmışdır. S. b.-dən aydındır ki, Qauss prosesinin ixtiyari səddən kənara çıxması ehtimalı prosesin kovariasiyalarının monoton funksiyasıdır. Bu fakt müxtəlif xüsusi hallar üçün digər müəlliflər tərəfindən də isbat olunmuşdur. S. b.-nin müxtəlif modifikasiyaları da alınmışdır (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Slepian D., «Bell. System Techn. J.», 1962, v. 41, № 2, p. 463–501; [2] Ферник К., в кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, пер. с франц., М., 1978, с. 63–132; [3] Питербарг В. И., Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99.

SLEPİAN MÜQAYİSƏ TEOREMİ « Слепяна теорема сравнения; Slepian comparasion theorem » – bax, *Stoxastik differensial tənlik*; müqayisə teoremləri.

SLUTSKİ ERQODİK TEOREMİ « Слуцкого эргодическая теорема; Slutsky ergodic theorem »: kəsilməz və ya diskret t zamanlı stasionar (geniş mənada) $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

$$\text{l.i.m.}_{T-S \to \infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T \zeta(t)\, dt = \mathbf{M}\zeta(t)$$

və ya

$$\text{l.i.m.}_{T-S \to \infty} \frac{1}{T-S} \sum_{t=S}^{T-1} \zeta(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$$

münasibətinin doğruluğu üçün

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \int\limits_0^T b(\tau)\, d\tau = 0 \\ \text{və ya} \\ \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \sum\limits_{\tau=0}^{T-1} b(\tau) = 0 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir, burada $b(\tau) = \mathbf{M}[\zeta(t+\tau) - \mathbf{M}\zeta(t+\tau)][\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)]$, l.i.m. – kvadratik orta mənada limitdir.

Bu teorem Ye. Ye. Slutskiyə məxsusdur və o, yalnız kəsilməz hala baxmışdır (bax, [1], [2]); sonradan isbat olunmuşdur ki, (*) şərti $\zeta(t) - \mathbf{M}\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$-nın $\lambda = 0$ nöqtəsində kəsilməzlik şərtinə ekvivalentdir.

Bax, *Böyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

Əd.: [1] Slutsky E. E., в сб.: Actualites scientifiques et undustrielles, P., 1938, № 738, p. 35–55 ; [2] Слуцкий Е. Е., Избр. тр., М., 1960, с. 252–68.

SLUTSKİ LİMİT SİNUSOİDAL TEOREMİ « Слуцкого предельная синусоидальная теорема; Slutsky sinusoidal limit theorem »: $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ müşahidələr sıralarının

$$\mathscr{L}_n X(t) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} X(t-k)$$

şəklində, ixtiyari $T > 0$ və $0 < \omega_0 < \pi$ intervalından olan ω_0 üçün $\mathscr{L}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ xətti çevirmələrinin elə ardıcıllığını tapmaq olar ki, $t \neq s$ olduqda $\mathbf{M} X_0(t) = 0$, $\mathbf{M} X_0(t) X_0(s) = 0$ və $t = s$ olduqda $\mathbf{M} X_0(t) = 1$, $\mathbf{M} X_0(t) X_0(s) = 1$ şərtlərini ödəyən $\mathscr{L}_n X_0(t) = Y(t)$ [yəni $X_0(t)$ – diskret bəyaz küydür] ardıcıllığının qiymətləri n-in olduqca böyük qiymətində, ixtiyari T uzunluqlu intervalda vahidə daha çox yaxın ehtimalla ω_0 tezlikli hər hansı sinusoidin [yəni $Y(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$ funksiyasının] qiymətlərindən olduqca az fərqlənəcəklər. Ye. Ye. Slutski [1], [2]-də konkret olaraq,

$$\left.\begin{array}{c} \mathscr{L}_n = \mathscr{D}^{m_n} \mathscr{C}^n, \\ \mathscr{D} X(t) = X(t) - X(t-1),\ \mathscr{C} X(t) = X(t) + X(t-1) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

xətti çevirmələrinin ardıcıllığına baxmışdır, burada $n \to \infty$ olduqda $m_{n/n} \to \lambda$, $0 < \lambda < 1$. O, isbat etmişdir ki, əgər $X_0(t)$ diskret bəyaz küy olarsa, onda $\mathscr{L}_n X_0(t)$ ardıcıllığının ixtiyari sonlu parçası $n \to \infty$ olduqda dairəvi tezliyi

$$\omega_0 = \arccos[\ (1-\lambda)/(1+\lambda)\ ]$$

olan sinusoidin parçasına yaxınlaşır.

S. s. l. t. öz dövründə mühüm rol oynamışdır (onun bəzi ümumiləşmələri [1] işinin dərc olunmasından dərhal sonra [3], [4]-də V. İ. Romanovski tərəfindən göstərilmişdir) və bu teorem belə bir faktın aydınlaşmasına təkan vermişdir: müşahidə olunan zaman sırasının xarakteri bu sıranı doğuran hər hansı periodik mexanizmin varlığını hökmən göstərə bilmir, lakin, məs., müşahidələr üzrə

aparılan xətti çevirmələrin təsiri ilə izah oluna bilinir. Stasionar təsadüfi proseslərin spektral nəzəriyyəsinin yaranması ilə (bax, *Stasionar təsadüfi proses* və *Spektral ayrılış*(ı) təsadüfi funksiyanın) isbat olunmuşdur ki, ixtiyari stasionar zaman sırasını həmişə sinusoidlərin superpozisiyası kimi göstərmək mümkündür, hətta aydın olmuşdur ki, bu nəzəriyyə əsasında Ye. Ye. Slutski və V. İ. Romanovskinin nəticələri çox sadə isbat olunur; bu nəticələri inkişaf etdirən və tamamlayan bir sıra yeni müddəalar almaq olur. Məs., Ye. Ye. Slutskinin aldığı nəticə asanlıqla yoxlanan belə bir müddəadan alınır: (*) düsturunda münasib normalanmış $\mathscr{L}_n$ çevirməsinin *ötürücü funksiyası* $H_n(\lambda)$, $n \to \infty$ olduqda $\delta(\lambda - \omega_0)$ δ – funksiyaya yaxınlaşır (bax, [5], [7]). S. s. l. t.-nin ifadə edilməsində $X_0(t)$ bəyaz küyü spektral sıxlığı $\lambda = \omega_0$ nöqtəsində sıfırdan fərqli olan ixtiyari $X(t)$ stasionar ardıcıllığı ilə əvəz oluna bilinər; S. s. l. t.-ində $0 < \omega_0 < \pi$ şərtini $0 \le \omega_0 \le \pi$ şərti ilə əvəz etmək olar (bax, [7], [8]).

Əd.: [1] Слуцкий Е. Е., «Вопросы конъюктуры», 1927, т. 3, в. 1, с. 34–64; [2] Слуцкий Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 99–132; [3] Romanovsky V. I., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1932, v. 56, p. 82–111; [4] Romanovsky V. I., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1933, v. 57, p. 130–36; [5] Moran P. A. P., «Biometrika», 1949, v. 36, p. 63–70; [6] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976, с. 570–71; [7] Kedem B., «Ann. Statist.», 1984, v. 12, № 2, p. 665–74; [8] Moran P. A. P., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1950, v. 46, p. 272–80.

SLUTSKİ ŞƏRTİ « Слуцкого условие; Slutsky condition » – bax, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

SLUTSKİ – YUL EFFEKTİ « Слуцкого – Юла эффект; Slutsky – Yule effect » – *sürüşən orta metodu* ilə zaman sırasının hamarlanması zamanı *trendin* seçilib ayrılmasında yaranan pozuntulardır; 1927-də aşkar edilmişdir (bax, [2], [3]). S. – Y. e.-nin yaranma səbəbi ondan ibarətdir ki, sürüşən ortalar vasitəsilə qurulan trend güclü avtokorrelyar təsadüfi prosesdir, xüsusilə də, qiymətləri böyük olmayan gecikmələr üçün. Nəticədə belə trend həddindən artıq dərəcədə hamar olur, bundan başqa, bu trenddə ilkin zaman sırasına xas olmayan sistematik dəyişikliklər baş verir.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [2] Слуцкий Е. Е., «Вопросы конъюктуры», 1927, т. 3, в. 1; [3] Yule G., «Phil. Trans. A.», 1927, v. 226, p. 267–98; [4] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

SMİRNOV KRİTERİSİ « Смирнова критерий; Smirnov test » – asılı olmayan iki skalyar seçimin ümumi (kəsilməz) paylanmaya malik olması haqqında hipotezin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir.* $F_m(x)$ və $G_n(x)$ – uyğun olaraq, m və n həcmli seçimlərin empirik paylanma funksiyaları, $F(x)$ və $G(x)$ onların nəzəri paylanma funksiyaları olsun. $H : F(x) \equiv G(x)$ bircinslik hipotezini yoxlamaq tələb olunur.

İkiseçimli Smirnov kriterisi

$$D_{m,n} = \sup_x \left| F_m(x) - G_n(x) \right|$$

statistikasına əsaslanır. H hipotezində əgər nəzəri paylanma kəsilməz paylanma olarsa, onda $D_{m,n}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması nəzəri paylanmadan asılı olmur.

H hipotezi şərtində və $m, n \to \infty$ olduqda $D_{m,n} \to 0$ olduğundan, əksər hallarda, $\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\, D_{m,n}$ təsadüfi kəmiyyətindən istifadə olunur, bu statistikanın paylanması limitdə cırlaşmayan olur. N. V. Smirnov isbat etmişdir ki (bax, [1]): $z > 0$ üçün

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\; D_{m,n} < z \right\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

münasibəti doğrudur. Əgər $G \equiv F$ olarsa, onda $m, n \to \infty$ olduqda $D_{m,n}$ statistikası üçün

$$D_{m,n} \to \sup_x \left| F(x) - G(x) \right| > 0$$

münasibəti ödənilir, odur ki, $\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\, D_{m,n} \to \infty$. Bu xassələrdən aşağıdakı qayda alınır: əgər sınaqda $D_{m,n}$ üçün alınmış qiymət olduqca böyük olarsa, $H : F \equiv G$ hipotezi qəbul olunmur.

$D_{m,n}$ statistikasının faiz nöqtələri üçün cədvəllər hal-hazırkı dövrə qədər olduqca ətraflı hesablanmışdır (bax, məs., [3], [4]). m, n-in böyük qiymətlərində yuxarıda qeyd olunmuş limit paylanmasından istifadə olunur (bu da cədvəlləşdirilmişdir, bax, [3]).

S. k. H hipotezinə alternativ bütün hipotezlərə qarşı tutarlı kriteridir. Müəyyən tip alternativlər üçün (F və G-nin yerinidəyişmədə, miqyasda fərqləri) digər statistik kriterilər S. k.-ni güc üzrə aşa bilər.

Bir seçimli Smirnov kriterisi. *Kolmoqorov kriterisi* ilə sıx bağlıdır və bu halda S. k. skalyar seçimin verilmiş nəzəri paylanmaya (məs., $F(x)$) malik olması haqqında hipotezin yoxlanılması üçün istifadə olunur.

$F_n(x)$, – n həcmli seçimin empirik paylanma funksiyası, $G(\cdot)$ – əsl paylanma funksiyası olsun. S. k. $H : F = G$ hipotezinin yoxlanılması üçün istifadə olunur.

$$D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x)], \quad D_n^- = \sup_x [F(x) - F_n(x)]$$

– Smirnov statistikalarıdır.

Əgər G kəsilməz paylanma funksiyası olarsa, H hipotezi şərtində D_n^+ və D_n^- eyni qanunla paylanmış və G funksiyasından asılı olmayan statistikalardır. Bu şərtlərdə paylanma və onun approksimasiyası N. V. Smirnov tərəfindən göstərilmişdir (bax, [2]). D_n^+ və D_n^--in faiz nöqtələri haqqında, bax, [3], [4].

Əgər eksperimentdə statistikanın alınmış qiyməti olduqca böyük olarsa, H hipotezi S. k.-nə əsasən qəbul olunmur. D_n^+ statistikasına əsaslanan kriteri $G \ge F$ alternativ hipotezinə qarşı tutarlı kriteridir; D_n^- statistikasına əsaslanan kriteri $F \ge G$ alternativinə qarşı tutarlı kriteridir.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика. Избр. тр., М., 1970, с. 117–27; [2] Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика,

Избр. тр., М., 1970, с. 133–59; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Тимонин В. И., Черномордик О. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 572–73.

SMİRNOV PAYLANMASI « Смирнова распределение; Smirnov distribution » –

$$\int \alpha_n^2 \, dF$$

kəmiyyətləri ardıcıllığının limit *paylanmasıdır*, burada $\alpha_n(x) = \sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x))$, $F(x)$ – verilmiş paylanma, $F_n(x)$ – empirik paylanmadır və F_n paylanmalar ardıcıllığı F -ə yaxınlaşır. 1944-də qeyri – parametrik qiymətləndirmə məsələlərini araşdırdıqda N. V. Smirnov tərəfindən daxil olunmuşdur.

SMİRNOV STATİSTİKASI « Смирнова статистика; Smirnov statistic » – bax, *Kolmoqorov – Smirnov kriterisi*, *Smirnov kriterisi*.

SMİRNOV TEOREMİ « Смирнова теорема; Smirnov theorem » – bax, *Sərhəd məsələləri* təsadüfi dolaşmalar üçün.

SNEDEKOR PAYLANMASI « Снедекора распределение; Snedecor distribution » – bax, *Fişer F – paylanması*.

SOL PALM PAYLANMASI « левое распределение Пальма; left Palm distribution » – bax, *Nöqtəvi proses* qrupda.

SOL TƏSADÜFİ DOLAŞMA « левое случайное блуждание; left random walk » – bax, *Markov zənciri.*

SON QƏRAR FUNKSİYASI « заключительного решения функция; terminal decision function » – bax, *Ardıcıl yoxlanılması*, *hipotezlərin.*

SONLU – ADDİTİV ÇOXLUQ FUNKSİYASI « конечно – аддитивная функция множеств; finitely additive set function » – çoxluqların hər hansı bir sinfində təyin olunmuş və sonlu additivlik xassəsinə (sonlu sayda toplananlar üçün additivlik xassəsinə) malik olan funksiyadır. Daha dəqiq, K – çoxluqların hər hansı sinfi, G – additiv yazılışda götürülmüş kommutativ qrup olsun (yəni G -də daxili kompozisiya qanunu $+$ simvolu ilə işarə olunur). Onda K sinfinin elementlərindən təşkil olunmuş ixtiyari sonlu dizyunkt $(X_i)_{1\le i\le m}$ ailəsi üçün bunların birləşmələri də K sinfinə daxil olduqda,

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i\le m} X_i\right) = \sum_{1\le i\le m} \mu(X_i)$$

bərabərliyi hökmən ödənilərsə, $\mu : K \to G$ münasibətini ödəyən μ funksiyası sonlu – additiv funksiya adlanır. Hər bir S. - a. ç. f. eyni zamanda *additiv çoxluq funksiyasıdır*. Tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyildir, lakin K sinfinə müəyyən məhdudiyyətlərlə bu hökm, ola bilər ki, yerinə yetsin (məs., əgər K sinfinin özü də additiv olarsa).

S. - a. ç. f.-na riyaziyyatın müxtəlif oblastlarında təsadüf olunur. Belə funksiyalardan ədədi hesabi – additiv çoxluq funksiyaları xüsusi rola malikdir və bunlar da müxtəlif çoxluqlar σ – cəbrləri və ya çoxluqlar σ – halqalarında verilir. Hesabi – additiv çoxluq funksiyası olan ədədi S. - a. ç. f.-na misal n – ölçülü Evklid fəzasının Jordan mənada bütün ölçülən altçoxluqları üçün təyin olunan klassik Jordan həcminin funksiyasıdır. Verilən S. - a. ç. f.-nın eyni zamanda hesabi – additiv çoxluq funksiyası da olması üçün hansı şərtlərin ödənilməsi sualı ölçü nəzəriyyəsinin əsas suallarından biridir. Ehtimal nəzəriyyəsində əksər hallarda analoji suala – zəif paylanmanın, uyğun fəzada, hansı şərtlər daxilində paylanma olması haqqında suala baxılır.

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. 3 изд., М., 1987; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

SONLU BÖLGÜ « конечное разбиение; finite partition » – bax, *Bölgü.*

SONLU EHTİMALİ AVTOMAT « конечный вероятностный автомат; finite probabilistic automation » – bax, *Ehtimali avtomat.*

SONLU FURYE ÇEVİRMƏSİ « конечное преобразование Фурье; finite Fourier transform » –

$$d_x^N(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \exp\{-i\lambda j\}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

münasibətilə təyin olunan çevrilmədir, burada x_j, $j = 0, \dots, N-1$ – kompleks ardıcıllıqdır. Bu halda $d_x^N(\lambda)$ periodu 2π olan periodik funksiyadır. Tezlik oblastında zaman sıralarının analizində belə çevirmələr mühüm statistikalar olur.

S-də, $0 \le \lambda \le 2\pi$ intervalında bir-birindən eyni məsafədə yerləşən $\lambda = 2\pi n/S$, $n = 0, \dots, S-1$ nöqtələrində $d_x^N(\lambda)$ qiymətlərinin hesablanmasını $y(j)$, $j = 0, \dots, S-1$ ardıcıllığının

$$y(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(j + kS), \quad j = 0, \dots, S-1$$

çevirməsinin köməyilə ($y < 0$, $j \ge N$ olduqda $x(j) = 0$) diskret Furye çevirməsinin (bax, *Sürətli Furye çevirməsi*, *Vinoqrad metodu*) effektiv alqoritmləri ilə həyata keçirmək olur.

$S > T$ olduqda bu prosedur $j = N, \dots, S-1$ qiymətlərində $x(j)$ ardıcıllığının sıfra bərabər qiymətləri də əlavə olunmaqla ardıcıllığın S – nöqtəvi çevirməsinin hesablanmasına gətirilir.

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория , пер. с англ., М., 1980.

SONLU MARKOV ZƏNCİRİ « конечная цепь Маркова; finite Markov chain » – 1) geniş mənada – vəziyyətləri çoxluğu sonlu *Markov prosesidir*. 2) S. M. z. dar mənada – vəziyyətləri çoxluğu sonlu bircins *Markov zənciridir.* Vəziyyətlərinin sayı sonlu olduğu halında S. M. z. nəzəriyyəsi, asılı təsadüfi sınaqlar və kəmiyyətlərin bütün nəzəriyyəsi kimi, A. A. Markovun (1906, 1907) əsas sayılan işləri seriyasından mənbələnmişdir. Vəziyyətlərinin sayı sonsuz zəncirlərin öyrənilməsinə 1936-da A. N. Kolmoqorov tərəfindən başlanılmışdır. Bax, *Hesabi Markov zənciri.*

Əd.: [1] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949; [2] Феллер В., Введение в теория вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984, гл. 16; [3] Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.

SONLU ÖLÇÜ « конечная мера; finite measure » – bax, *Ölçü.*

σ – SONLU ÖLÇÜ « σ – конечная мера; σ – finite measure » – bax, *Ölçü.*

σ – SONLU ÖLÇÜLÜ ALTÇOXLUQ « σ – конечной меры подмножество; set of σ – finite measure » – bax, *Ölçü.*

SONLU ÖLÇÜLÜ ÇOXLUQ « конечной меры множество; set of finite measure » – bax, *Ölçü.*

SONLU ÖLÇÜLÜ PAYLANMA « конечномерное распределение; finite – dimensional distribution » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*, *Birgə paylanma* (*Çoxölçülü paylanma*).

SONLU TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « конечное случайное множество; finite random set » – sonlu çoxluğun təsadüfi altçoxluğudur. S. t. ç., daha dəqiq, aşağıdakı kimi təyin olunur. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, Ω – elementar nəticələr fəzası, $\mathscr{A}$ – hadisələrin σ – cəbri, $\mathbf{P}$, – $\mathscr{A}$ -da ehtimal ölçüsü olsun; C – sonlu çoxluq, 2^C – onun bütün altçoxluqlarının çoxluğudur. $\mathscr{A}$ -ya nəzərən ölçülən $K : \Omega \to 2^C$ inikasına sonlu təsadüfi çoxluq deyilir. S. t. ç.-un paylanması bütün $D \subseteq C$ üçün $\mathbf{P}\{K = D\}$ ehtimallar toplusu ilə verilir.

S. t. ç.-un mühüm xüsusi halı asılı olmayan elementlərli S. t. ç.-dur (bax, *Lyusian*) və bu çoxluq aşağıdakı xassəyə malikdir: ixtiyari k və ixtiyari $c_1, \dots, c_k \in C$ elementləri üçün $\{c_j \in K\}$, $j = 1, \dots, k$, ($i \neq j$ olduqda $c_i \neq c_j$) hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979.

SONLU VARİASİYA « конечная вариация; finite variation » – bax, *Ölçü*; variasiya, *Vektor ölçü.*

SONSUZ BÖLÜNƏN NÖQTƏVİ PROSES « безгранично делимый точечный процесс; infinitely divisible point process » – ixtiyari tam n qiymətində n sayda qarşılıqlı asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi nöqtəvi proseslərin superpozisiyası şəklində ifadə oluna bilinən təsadüfi *nöqtəvi* prosesdir. Beləliklə, S. b. n. p.-ə təsadüfi kəmiyyətlərin *sonsuz bölünən paylanmalarının* ümumiləşməsi kimi baxmaq olar. *Puasson nöqtəvi prosesi* S. b. n. p.-dir.

$E(\cdot)$ – bütün lokal məhdud sayıcı ölçülərin (bax, *Nöqtəvi proses*) ölçülən fəzası $(M, \mathfrak{M})$ -də sonlu ölçü, E^n, – E ölçüsünün n – qat kompozisiyası olsun. Onda $(M, \mathfrak{M})$ fəzasında təyin olunmuş

$$U_E = e^{-E(M)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} E^n(\cdot)$$

ifadəsilə verilən ehtimal paylanması S. b. n. p. təyin edir.

Əgər $(M, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasında $\mathbf{P}$ ehtimal paylanması B vəziyyətlərinin faza fəzasına malik Φ S. v. n. p.-ni təyin edirsə və $\mathbf{P}(\Phi(B) < \infty) = 1$ olarsa, onda $(M, \mathfrak{M})$ -də elə E ölçüsü tapılar ki, $\mathbf{P} = U_E$. Aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\left\| U_{E_1} - U_{E_2} \right\| \leq 2 \left\| E_1 - E_2 \right\|.$$

Əd.: [1] Керстан И., Маттес К., Мекке И., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « безгранично делимое распределение; infinitely divisible distribution » – bircins, stoxastik kəsilməz, asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslərin – *sonsuz bölünən proseslər* adlandırılan proseslərin – öyrənilməsi ilə bağlı yaranmış anlayışdır. S. b. p.-nın tərifini B.de Finetti [1]-də vermişdir. «S. b. p.» termin kimi P. Levi (bax, [2]) tərəfindən daxil olunmuşdur. Əgər $\mathbb{R}^1$ -də təyin olunmuş ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ (və ya uyğun paylanma funksiyası F) n -in ixtiyari $n \geq 2$ tam qiymətində hər hansı ehtimal paylanması $\mathbf{P}_n$ -in öz-özü ilə n – qat kompozisiyasına bərabər olarsa, yəni

$$\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{P}_n * \mathbf{P}_n * \dots * \mathbf{P}_n}_{n \text{ dəfə}} \qquad (1)$$

olarsa, onda $\mathbf{P}$ ehtimal paylanması S. b. p.-lar sinfi $\mathfrak{G}$ -dandır; $*$ – kompozisiya simvoludur.

$\mathfrak{G}$ çoxluğunu genişləndirmədən, (1) şərtini $1 < n_1 < n_2 < \dots$ ardıcıllığından yalnız n sayda qiymətlər üçün ödənilməsi tələbi ilə zəiflətmək olar. Normal paylanma, Puasson paylanması, qamma – paylanma (üstlü paylanmalar da daxil olmaqla), qamma paylanmalarının diskret variantı – «mənfi binomial paylanma» (həndəsi paylanma da daxil olmaqla), Koşi paylanması S. b. p.-lardır. $\mathfrak{G}$ *sinfi sonsuz kiçilənlik şərtini* ödəyən, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin ardıcıllıqları üçün limit teoremlərinin ümumi nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır. A. Ya. Xinçin 1934-də isbat etmişdir ki, bu modeldə mümkün limit paylanmaları çoxluğu $\mathfrak{G}$ sinfi ilə üst-üstə düşür. (1) şərtinin analoqlarından istifadə edərək, S. b. p. anlayışını daha ümumi təbiətli fəzalar (Evklid, Hilbert və s.) halına keçirmək olur, lakin bəzən elə hallar olur ki (məs., kompakt altqrupları olan lokal kompakt Abel qruplarına baxdıqda), S. b. p. anlayışının verilməsi üçün (1) şərtinin müəyyən modifikasiyası tələb olunur. Məs., M – *sonsuz bölünən paylanmanı* konkret misal kimi göstərmək olar. Aşağıda yalnız kompozisiya əməli ilə birölçülü hala baxılır.

$\mathfrak{G}$ sinfinin təsviri bu sinifdən olan paylanma funksiyaları F -ə uyğun f xarakteristik funksiyaları terminləri ilə verilir. f funksiyasının yazılış forması (bu forma yeganə olmur və müxtəlif şəkillərdə təsvir edilir) kanonik ifadə (təsvir) adlanır. *Levi kanonik ifadəsi və Levi – Xinçin kanonik ifadəsi* ən çox yayılmış kanonik ifadələrdir. Levi – Xinçin kanonik ifadəsinin ümumiləşmiş variantı

$$f(t) = \exp\{it\gamma + \int \mathscr{E}(t, x)\, dG(x)\}, \qquad (2)$$

düsturu ilə verilir, burada $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $G = \lambda U$, $\lambda \geq 0$, U , – $\mathbb{R}^1$ – də hər hansı paylanma funksiyasıdır və

$$\mathscr{E}(t, x) = \begin{cases} (e^{itx} - 1 - itr(x))/s(x), & \text{əgər } x \neq 0, \\ -t^2/2, & \text{əgər } x = 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

r və $s > 0$ funksiyaları aşağıdakı xassələrə malik olmalıdırlar: (2)-dəki inteqral göstərilən şəkilli hər bir G funksiyası üçün və ixtiyari $t \in \mathbb{R}^1$ qiymətində mütləq yığılandır; $r(x) = x + o(x^2)$, $x \to 0$ olduqda $s(x) = x^2(1 + o(1))$.

Məs., $r(x) = x/(1+x^2)$, $s(x) = x^2/(1+x^2)$ və $r(x) = \sin x$, $s(x) = \min(1, x^2)$ belə funksiyalardır. Xüsusi halda *Kolmoqorov düsturları* $r(x) = x$ və $s(x) = x^2$ halı üçün ifadə olunur.

Kanonik təsvirdə, $\mathscr{E}$ funksiyası qeyd olunduğu halda, hər bir S. b. p.-ya onu təyin edən iki xarakteristika – ədədi γ parametri və bu S. b. p.-nın Xinçin spektral funksiyası adlanan G funksiyası qarşı qoyulur. G funksiyasının artım nöqtələri çoxluğu (yəni G -nin daşıyıcısı, $\operatorname{supp} G$) S. b. p.-nın spektri adlanır. $H(-\infty) = H(\infty) = 0$ şərtlərini ödəyən, G ilə $s(x)\,dH(x) = dG(x)$, $x \neq 0$ bərabərliyi ilə əlaqəli və $x < 0$, $x > 0$ yarımoxlarında kəsilməz H funksiyası Levi spektral funksiyası adlanır. F S. b. p.-nın normal komponentinin dispersiya rolunu ifadə edən $\sigma^2 = G(+0) - G(-0)$ kəmiyyəti ilə birlikdə H funksiyası vasitəsilə ikinci tip kanonik ifadəsi aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$f(t) = \exp\{it\gamma - \sigma^2 t^2/2 + \int_{x\neq 0} (e^{itx} - 1 - itr(x))\,dH(x)\}$$

(2)-də $(r_1, s_1, \gamma_1, G_1)$ xarakteristikalarının bir toplusundan digər $(r_2, s_2, \gamma_2, G_2)$ toplusuna keçmək üçün $s_2\,dG_1 = s_1\,dG_2$, $\gamma_2 - \gamma_1 = \int (r_1 - r_2)\,\frac{dG_1}{s_1}$ münasibətlərindən istifadə olunur. Bu halda $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ və $\operatorname{supp} G_1 = \operatorname{supp} G_2$.

γ parametri paylanmanın yerinidəyişməsini həyata keçirir, spektral G funksiyası meylsiz $(\gamma = 0)$ F S. b. p. haqqında informasiyanı özündə daşıyır. Məs., bu funksiya F funksiyasının Lebeq ayrılışını, strukturunu və asimptotikasını təyin edir. Məs., $\mathbb{R}^1$-də ixtiyari cüt ψ funksiyaları bütün $x, y \in \mathbb{R}^1$ qiymətlərində və $c \geq 1$ sabit olduqda

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq \psi(x+y) \leq c(\psi(x) + \psi(y)), \\ 0 \leq \psi(x+y) \leq c(\psi(x)\psi(y)) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

şərtlərindən birini ödədikdə (Ψ sinfi), aşağıdakı implikasiya doğrudur (bax, [7]):

$$\int \psi(x)\,dF(x, \gamma, G) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int I(|x| \geq 1)\psi(x)\,dH(x) < \infty. \qquad (4)$$

Məs., (3) şərtləri onu ifadə edir ki, ψ funksiyaları sonsuzluqda eksponentdən sürətlə arta bilməz. Olduqca sürətlə artan funksiyalar üçün oxşar əlaqə yoxdur. Bu aşağıdakı müddəadan alınır (bax, [7]): əgər $\operatorname{supp} G$ məhduddursa və bircə $x = 0$ nöqtəsindən ibarət deyildirsə, onda elə $a = a(G)$ vardır ki,

$$\int \exp\left(a|x| \log(1 + |x|\right)\,dF(x, \gamma, G)) < \infty$$

və a -nı böyük ədədlə, inteqralın sonlu olmasını təmin etməklə, əvəz etmək olmaz.

(4) xassəsinə əsasən Kolmoqorov düsturunu ümumiləşdirmək və $\mathfrak{G}$ sinfindən $\psi \in \Psi$ tərtib sonlu momentləri olan paylanmaların $\mathscr{K}_\psi$ altsinfini seçmək olur. Bu halda kanonik ifadə $\mathscr{K}_\psi$ -ni təsvir edir, bu şərtlə ki, (2)-də $r(x)$ və $s(x)$ funksiyaları $r(x) = \sin x$ və $s(x) = x^2(1 + \psi(x))/(1 + x^2)$ şəklində olsunlar.

$\mathfrak{G}$ çoxluğu ona daxil olan paylanmaların tam yığılmasına ($\xrightarrow{d}$ yığılma) nəzərən qapalı çoxluqdur. Bu halda

$$F(x, \gamma^*, G^*) \xrightarrow{d} F(x, \gamma, G),\ G^* = \lambda U^*,\ G = \lambda U$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\gamma^* \to \gamma$, $\lambda^* \to \lambda$ və $U^* \xrightarrow{d} U$ münasibətləri ödənilsin. $\mathfrak{G}$ sinfinin mühüm (məs., limit teoremləri nöqteyi – nəzərindən) altsinifləri – *özü-özünə ayrılan paylanmalar* sinfi $\mathscr{D}$ və *dayanıqlı paylanmalar* sinfi $\mathfrak{S}$ kimi altsinifləri vardır. $\mathfrak{G}$ çoxluğu konvolyusiya əməlinə görə elə Abel semi – qrupudur ki, onun vahidi rolunu sıfırda cırlaşmış paylanma oynayır. Lakin $\mathfrak{S}$ çoxluğu belə semi – qrup deyildir, $\mathscr{D}$ çoxluğu isə belə semi – qrupdur. Hər bir F S. b. p. xarakteristik funksiyaları $\{f^\lambda;\ \lambda \geq 0\}$ olan birparametrli $\{F_\lambda;\ \lambda \geq 0\}$ semi – qrupunu doğurur (bax, *Sonsuz bölünən proses*).

Əgər $F(x, \gamma, G)$ S. b. p.-nın təyinedici xarakteristikaları belə xarakteristikaların sıraları ilə ifadə olunurlarsa, yəni

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots,$$
$$G = G_1 + G_2 + \dots,$$

olarsa, onda

$$F(x, \gamma, G) = F_1(x, \gamma_1, G_1) * F_2(x, \gamma_2, G_2) * \dots$$

münasibəti doğrudur, burada $\gamma_k \in \mathbb{R}^1$ və G_k – spektral funksiyalardır.

İxtiyari $F \in \mathfrak{G}$ paylanma funksiyaları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$F(x, \gamma, G) = 1 - F(-x + 0, -\gamma, \widetilde{G}),\ x \in \mathbb{R}^1,$$

burada

$$\widetilde{G}(x) = G(\infty) - G(-x),$$

$$F(x, \gamma, G) = F(x, 0, G_1) * \Phi_{\gamma,\delta}(x) * F(x, 0, G_2),$$

$\Phi_{\gamma,\delta}$ – riyazi gözləməsi γ, dispersiyası σ^2 olan normal paylanma, $G_1(x) = (G(x) - G(+0))I \quad (x > 0)$, $G_2(x) = (G(-0) - G(-x))I \quad (x < 0)$.

$\mathfrak{G}$ sinfini aşağıdakı şərtlərlə üç qrupa bölmək olar:

$$I_1 = \int I(0 < |x| \leq 1)\,|x|\,dH(x) < \infty \quad \text{(A qrupu)},$$

$$I_1 = \infty,\ I_2 = \int I(|x| > 1)\,|x|\,dH(x) < \infty \quad \text{(B qrupu)},$$

$$I_1 = \infty,\ I_2 = \infty \text{ (C qrupu)}.$$

Bu qruplar əsas parametrin $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ və $1 < \alpha \leq 2$ qiymətlərinə müvafiq dayanıqlı paylanmaların müəyyən mənada

analoqlarıdır. Əgər $G(+0)=0$ olarsa, $F(x,\gamma,G)$ S. b. p. k ə n a r S. b. p. adlanır. A qrupunun kənar S. b. p.-ları ilə B qrupunun S. b. p.-nın müvafiq hissəsi arasında analitik əlaqə vardır (bax, *Sonsuz bölünən paylanmaların ikilik xassəsi*). A qrupunun kənar F S. b. p.-ları – birtərəfli sonsuz bölünən paylanmalardır, yəni hər bir belə paylanma üçün elə $q=q(\gamma,G)\in\mathbb{R}^1$ sabiti vardır ki, $F(x)=0,\quad x<q.$ $\mathfrak{G}$ sinfi çərçivəsində kənar S. b. p.-lar ixtiyari $x>0$ yarımoxunda və ya $(-\infty,\ a)$ yarımoxunda, əgər bu S. b. p.-lar B və C qruplarına aid olarsa, öz qiymətlərilə birqiymətli bərpa olunurlar (ətraflı bax, [4]).

Əd.: [1] F i n e t t i B. de, «Atti Accad. naz. Lincei. Met. Cl. sci. fis., mat. e nature. Sez. 1», Ser. 6, 1929, v. 10, p. 163–68; [2] L e v y P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; [3] P a r t h s a r a t h y K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y. – L., 1967; [4] И б р а г и м о в И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 2, с. 393–99; [5] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [6] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [7] К р у г л о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 2, с. 330–36.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA, a s i m p t o t i k a s ı **« безгранично делимое распределение,** а с и м п т о т и ч е с к о е п о в е д е н и е; **infinitely divisible distribution;** a s y m p t o t i c b e h a v i o u r **»** – mərkəzi qeyd olunmuş, radiusu qeyri – məhdud artan kürələrin xaricində olan çoxluqlarda *sonsuz bölünən paylanmaların* xassələrinin ifadəsidir. Belə təsvir uyğun spektral ölçülər terminlərilə mümkündür. Məs., birölçülü halda, əgər H *Levi kanonik ifadəsinə* daxil olan spektral funksiya ($\tau>1$ olduqda $H(\tau)=-\tau^{\alpha}h(\tau)$, burada $h(\tau)$ – müsbət asta dəyişən funksiyadır) və $a>0$ olarsa, onda

$$\lim_{\tau\to\infty}\ (1-F(\tau))\,/\,H(\tau)=-1.$$

Ümumi halda, $0\le\gamma\le\infty$ olan hər hansı γ üçün

$$\inf\{\tau: H(-\tau)-H(\tau)=0\}=\gamma$$

olması üçün

$$\lim_{\tau\to\infty}\ \frac{-\ln[F(-\tau)+1-F(\tau)]}{\tau\ln(1+\tau)}\ =\ \frac{1}{\gamma}\qquad(*)$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir, bu halda əgər $\gamma=0$ olarsa, $1/\gamma=\infty$ olur. Burada F S. b. p.-nın paylanma funksiyasıdır.

Bir sıra hallarda asimptotik yaxınlaşma vasitəsilə ayrıca bir S. b. p.-nı və ya paylanma növünü tam mənası ilə xarakterizə etmək olur. Məs., S. b. p. funksiyası F -in normal paylanma funksiyası olması üçün (*) münasibətinin $\gamma=0$ halı üçün ödənilməsi zəruri və kafidir; S. b. p. F -in Puasson paylanma funksiyası olması üçün $x<0$ olduqda $F(x)=0$, $0<x<1$ olduqda isə $F(x)=c>0$ olması və (*) münasibətinin $\gamma=1$ halı üçün ödənilməsi zəruri və kafidir.

[4] və [5]-də spektral ölçüləri sonlu çoxluqda topalanmayan, lakin bir sıra xüsusi şərtləri ödəyən S. b. p.-ların asimptotik yaxınlaşmaları verilmişdir.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 3, с. 330–34; [2] К р у г л о в В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984; [3] К р у г л о в В. М., «Матем. заметки», 1976, т. 20, в. 6, с. 879–82; [4] К р у г л о в В. М., А н т о н о в С. Н., «Теория вероятн. и ее примен.» 1982, т. 27, в. 4, с. 625–42; т. 29, в. 4, с. 735–42; [5] Я к ы м и в А. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 4, с. 691–702; [6] H o r n R. H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1972, Bd. 21, H. 3, S. 179–87.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA; a y r ı l ı ş **« безгранично делимое распределение;** р а з л о ж е н и е; **infinitely divisible distribution;** d e c o m p o s i t i o n o f **»** – *sonsuz bölünən paylanmaların* müəyyən ehtimal paylanmalarının kompozisiyası şəklində ifadə olunmasıdır. Bu ayrılışdakı paylanmalar a y r ı l ı ş ı n k o m p o n e n t l ə r i adlanır.

S. b. p.-ların bəzi ayrılışlarının komponentləri S. b. p. olmaya bilər (bax, [1] – [3]). Bu nöqteyi – nəzərdən, yalnız sonsuz bölünən komponentləri olan S. b. p.-lar sinfini – $\mathbf{I}_0$ sinfini müəyyən etmək mühüm məsələdir. Məs., normal paylanma, Puasson paylanması, bu paylanmaların kompozisiyası $\mathbf{I}_0$ sinfindəndir. $0<\alpha<2$ olduqda α parametrli dayanıqlı paylanma, qamma paylanma $\mathbf{I}_0$ sinfindən deyildir. $G(x)$ spektral funksiyasının Levi – Xinçin ifadəsində sıfırda müsbət sıçrayışa malik olan və ya $x\to\pm0$ olduqda $x^{-2}\,dG(x)$ ölçüsü olduqca sürətlə artan S. b. p.-ların *Linnik sinfi* L-dən olması S. b. p.-nın $\mathbf{I}_0$ sinfinə aid olması üçün zəruri şərtdir, kafi deyildir. Lakin ixtiyari $k>0$ qiymətlərində $y\to\infty$ olduqda

$$\int\limits_{|x|>y} dG(x)\ =\ O\left(\exp\{-k\,y\}\right)\qquad(*)$$

şərtini ödəyən L sinfindən olan paylanmalar $\mathbf{I}_0$ sinfindəndir.

Ümumi halda L sinfinə məxsusluq $\mathbf{I}_0$ sinfinə məxsusluq üçün zəruri deyildir. Məs., $0<a<b\le 2a$, $x<a$, $x>b$ olduqda $G(x)$ funksiyası sabit olan bütün S. b. p.-lar $\mathbf{I}_0$ sinfindəndir. $G(x)$ funksiyasının (*) şərtini ödəyən şəbəkəvari S. b. p.-ların $\mathbf{I}_0$ sinfindən olması üçün $G(x)$-in artım nöqtələrinin yerləşməsi terminlərində zəruri və kafi şərtlər məlumdur. $\mathbf{I}_0$ sinfinə məxsusluğun sadə kafi şərti: $0<a<2a<b$ olduqda $a<x<b$ intervalında $G'(x)\ge\text{const}>0$ bərabərsizliyinin ödənilməsidir.

$\mathbf{I}_0$ sinfi zəif yığılma topologiyasında bütün S. b. p. sinfində sıxdır; hər bir S. b. p. $\mathbf{I}_0$ sinfindən olan sonlu və ya hesabi paylanmalar çoxluğunun kompozisiyası şəklində ifadə olunur.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [3] Л и в ш и ц Л. З., О с т р о в с к и й И. В., Ч и с т я к о в В. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. т. 12, М., 1975, с. 5–42; [4] О с т р о в с к и й И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 3–30.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA Banax fəzasında « **безгранично делимое распределение в банаховом пространстве**; **infinitely divisible distribution in a Banach space** » – Banax fəzası $\mathbb{B}$ -də elə *ehtimal ölçüsü* μ -dür ki, hər bir $n \geq 1$ üçün elə ν_n ehtimal ölçüsü vardır ki, $\mu = \underbrace{\nu_n * \ldots * \nu_n}_{n \text{ dəfə}}$; « $*$ » – kompozisiya simvoludur.

Sonsuzölçülü Banax fəzasında S. b. p. $\mathbb{R}^k$ fəzası halındakı kimi struktura malikdir; S. b. p.-nın xarakteristik funksionalı *Levi kanonik ifadəsi* kimi təsvir oluna bilinir. Yalnız və yalnız asimptotik əhəmiyyətsizlik xassəsinə malik olan, asılı olmayan toplananlar cəminin paylanmaları üçün S. b. p.-lar limit qanunları ola bilər. S. b. p.-ların bir altsinfi – Banax fəzasında *dayanıqlı paylanmalar* (xüsusi halda, Qauss paylanmaları) daha çox öyrənilmiş paylanmalardır.

Əd.: [1] Araujo A., Giné E., The central limit theorem for real and Banach valued random variables, N. Y., 1980; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процесссов, т. 1, М., 1971; [3] Linde W., Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces, Lpz., 1983.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA birtərəfli « **безгранично делимое распределение** одностороннее; onesided **infinitely divisible distribution** » – bax, *Birtərəfli sonsuz bölünən paylanma*.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA qrupda « **безгранично делимое распределение** на группе; **infinitely divisible distribution** on a group » – lokal kompakt G qrupunda elə $\mathbf{P}$ ehtimal *paylanmasıdır* ki, bu paylanma üçün ixtiyari natural n qiymətində, G -də, elə $\mathbf{P}_n$ ehtimal paylanması vardır ki, $\mathbf{P}_n^n = \mathbf{P}$, burada $\mathbf{P}_n^n$, – $\mathbf{P}_n$ paylanmasının konvolyusiya əməlinə görə n -ci dərəcəsidir.

Əgər G Abel qrupu olarsa, onda G qrupunda bütün S. b. p.-lar çoxluğu $\mathcal{I}(G)$ G -də bütün ehtimal ölçülərinin topoloji $\mathcal{M}^1(G)$ semi – qrupunda altsemi – qrupdur. G Abel qrupu olmazsa, $\mathcal{I}(G)$ üçün semi – qrup xassəsi, ümumiyyətlə, ödənilmir. Əgər G kökləri – kompakt qrup olarsa, onda $\mathcal{I}(G)$ çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -də zəif qapalıdır. İxtiyari lokal kompakt qruplar üçün (hətta Abel qrupları üçün də) bu müddəa artıq doğru olmur.

Klassik halda olduğu kimi, qrupda S. b. p. anlayışı ehtimal ölçülərinin konvolyusiyaları üçün limit teoremləri nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır (bax, *Mərkəzi limit teoremi* qruplarda); bununla yanaşı qeyd etmək lazımdır ki, burada $\mathbb{R}^1$ -ə verilən paylanmalar üçün olduğu kimi tam nəzəriyyə hələ yoxdur. Məs., ixtiyari G qrupu üçün cırlaşmış δ_x , $x \in G$ paylanması, ümumiyyətlə, S. b. p. deyildir; buna görə də, aşağıdakı tərifin verilməsi məqsədəuyğundur. Əgər ixtiyari natural n ədədi üçün G -də elə $\mathbf{P}_n$ paylanması və $x_n \in G$ olarsa ki, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n^n * \delta_{x_n}$ bərabərliyi ödənilsin, onda $\mathbf{P}$ ehtimal paylanması G qrupunda sonsuz bölünən paylanma adlanır, burada $*$, – G qrupunda paylanmaların konvolyusiya əməlinin işarəsidir ($\mathbb{R}^1$ -də əməl kompozisiya adlanır). Abel qrupları üçün G qrupunda bütün zəif S. b. p.-ların çoxluğu $\mathcal{I}_0(G)$ çoxluğu $\mathcal{M}^1(G)$ -də sekvensial qapalıdır. Aydındır ki, $\mathcal{I}(G) \subset \mathcal{I}_0(G)$. $\mathcal{I}_0(G) \subset \mathcal{I}(G)$ münasibəti yalnız sonsuz bölünən G qrupları üçün doğrudur. μ_{nj} , $j = 1, \ldots, k_n$, $n \geq 1$, – G qrupunda ölçülərin kommutativ infinitezimal elə sistemi olsun ki, bu sistem kökləri – kompakt və eyni zamanda Mur qrupu olsun; fərz olunur ki, $\mu_n = \mu_{n1} * \ldots * \mu_{nk_n}$ ardıcıllığı μ -yə yığılır. Onda $\mu \in \mathcal{I}(G)$. Abel qrupları üçün μ_n -lər üçün mərkəzləyici yerinidəyişmələr mümkündür və bu halda $\mu \in \mathcal{I}_0(G)$.

Qruplarda S. b. p.-lara misallar aşağıdakılardır: qrupda *ümumiləşmiş Puasson paylanması*, lokal kompakt Abel qrupunda *Qauss paylanması*, qrupda *idempotent ölçü*, qrupda *dayanıqlı paylanma*.

Bax, həm də *Sonsuz bölünən paylanma* qrupda; daxilolma problemi.

Əd.: [1] Хейер Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA qrupda; daxilolma problemi « **безгранично делимое распределение** на группе; проблема вложения; **infinitely divisible distribution** on a group; imbedding problem » – qrupda verilən S. b. p.-nın (və ya bütün belə paylanmaların) hər hansı konkret qrup üçün (və ya hər hansı xüsusi sinifdən olan qrup üçün) ölçülərin konvolyusion semiqrupuna daxil oluna bilinməsi şərtlərinin təsviri məsələsidir.

Bu məsələnin iki qoyuluşuna baxılır: cəbri və kəsilməz daxilolma. Əgər bütün müsbət rasional ədədlərin toplama əməli təyin olunmuş $\mathbb{Q}_+^*$ semi – qrupunun G -də bütün ehtimal ölçülərinin konvolyusiya təyin olunmuş $\mathcal{M}^1(G)$ semi – qrupuna $\varphi(1) = \mu$ şərtini ödəyən φ cəbri homomorfizmi vardırsa, G qrupunda verilən sonsuz bölünən μ paylanması cəbri daxilolma təmin edir, deyilir. Başqa sözlə, əgər $\varphi(t) = \mu_t$, $t \in \mathbb{Q}_+^*$ işarələməsi qəbul edilərsə, onda μ_t , $t \in \mathbb{Q}_+^*$ ölçülərinin elə konvolyusion semi – qrupu vardır ki, $\mu_t = \mu$. Əgər (μ_t) kəsilməz semi – qrup olarsa (bax, *Konvolyusion semi – qrup*), μ ölçüsü kəsilməz daxilolma təmin edir. Bu halda homomorfizm topoloji homomorfizmdir və bu homomorfizm bütün mənfi olmayan həqiqi ədədlərin semi – qrupu $\mathbb{R}_+$ -un topoloji homomorfizminə qədər zəif yığılma topologiyası ilə verilən daxilolma əməli ilə $\mathcal{M}^1(G)$ semi – qrupuna birqiymətli davam olunur.

Daxilolma probleminin bütün lokal kompakt qruplar üçün müsbət həlli yoxdur. Buna görə də, belə bir sual yaranır: qrupların hansı sinifləri üçün daxilolma problemi doğrudur? Bu tipli ən ümumi teoremlərdən birində hökm olunur ki, əgər lokal kompakt G qrupu kökləri – kompakt qrupdursa, onda G -də ixtiyari μ S. b. p.-sı cəbri daxilolma təmin edir (bax, [1]). Məsələn, bu hökm ixtiyari kompakt qrup üçün doğrudur.

Kəsilməz daxilolma problemi daha mürəkkəbdir. Əgər G qrupunun köklər çoxluğu (rus. корневое множество)

$$R(\mu) = \bigcup_{n \geq 1} \{ \nu^m : \nu \in \mathcal{M}^1(G),\ \nu^n = \mu,\ 1 \leq m \leq n \}$$

$\mathcal{M}^1(G)$ -də nisbi kompakt çoxluqdursa, G qrupunda bütün S. b. p. sinfi $\mathcal{I}(G)$ -dən olan ehtimal ölçüsü μ kökləri-kompakt ölçü adlanır. S sinfi güclü kökləri – kompakt

çoxluqların R_0 sinfini özündə saxlayır. $\mathscr{E}(G)$ kəsilməz daxilolma təmin edən, bütün $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ ölçülərinin sinfi olsun. Əgər G qrupu S-ə daxil olarsa, onda $\mathscr{E}(G)$ sinfi $\mathscr{I}(G)$-də sıx sinifdir. Əgər, bundan əlavə, G-də ixtiyari əlaqə altqrup xətti əlaqəlidirsə, onda $\mathscr{I}(G) = \mathscr{E}(G)$. Məsələn, bu hökm özü Li qrupu olan (və ya onun C_0 komponentləri vahid olan) ixtiyari $G \in S$ üçün doğrudur. Abel qrupları üçün bu nəticəni gücləndirmək mümkündür. Əgər $G \in S$ Abel qrupudursa, onda $\mathscr{I}(G) = \mathscr{E}(G)$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, G_0 lokal xətti əlaqəli olsun. Bundan başqa, Abel qrupları üçün S sinfinə aidiyyatın olduqca sadə kriteriləri mövcuddur: lokal kompakt Abel qrupu, yalnız və yalnız, o halda S sinfində yerləşir ki, G-nin bütün kompakt elementlərinin (yəni kompakt altqrup doğuran) çoxluğu $B(G)$ kompakt olsun, G-nin bölünən elementlərinin ($x^n = a$ tənliyinin həllinin olmasını təmin edən a elementlərinin) çoxluğu $T(G)$ G ilə üst-üstə düşsün.

Daxilolma probleminin müsbət həll olunduğu hallarda, belə daxilolmanın yeganəliyi haqqında problem yaranır. Aydındır ki, bu problemə cəbri daxilolmalar üçün baxmaq yetərlidir. Verilən məsələ ixtiyari $\mu \in \mathscr{I}(G)$-dən ixtiyari $n > 1$ dərəcəli yeganə kökün alınmasının müəyyən olunmasına gətirir. Məqbul həll Abel qrupu üçün alınmışdır: əgər G lokal kompakt Abel qrupudursa, onda ixtiyari $n > 1$ üçün n-ci dərəcədən kökalma ixtiyari $\mu \in \mathscr{I}(G)$ üçün, yalnız və yalnız, o halda birqiymətli təyin olunur ki, G qeyri – trivial kompakt altqruplara malik olmasın.

Əd.: [1] Х е й е р Х., Вероятностные меры на локально компактных группах, пер. с англ., М., 1981.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA; L a p l a s ç e v i r m ə s i **« безгранично делимое распределения;** п р е о б р а з о в а н и е Л а п л а с а; L a p l a c e t r a n s f o r m o f **infinitely divisible distribution »** – ehtimal nəzəriyyəsində *sonsuz bölünən paylanmalarla* bağlı anlayışdır. ω funksiyası, yalnız və yalnız, $\omega = e^{-\psi}$ şəklində olduğu halda S. b. p.-nın Laplas çevirməsidir, burada

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} \mathbf{P}\{dx\}, \ \lambda > 0$$

və $\mathbf{P}$ elə ölçüdür ki,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \mathbf{P}\{dx\} < \infty .$$

ω funksiyası, yalnız və yalnız, o halda S. b. p.-nın Laplas çevirməsidir ki, $\omega = e^{-\psi}$ olsun, burada ψ tamamilə monoton törəməyə malik funksiyadır və $\psi(0) = 0$.

M i s a l l a r. 1)

$$u = e^{-c} \sum_0^n \frac{c^n}{n!} F^{n*}$$

ümumiləşmiş P u a s s o n p a y l a n m a s ı n ı n $e^{-c+c\psi}$-yə bərabər Laplas çevirməsi vardır və (*) $P\{dx\} = cxF\{dx\}$ olduqda doğrudur.

2) $x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha)$ – Q a m m a p a y l a n m a n ı n sıxlıq funksiyasının Laplas çevirməsi $\omega(\lambda) = 1/(\lambda+1)^\alpha$ düsturu ilə ifadə olunur.

Burada

$$\psi(\lambda) = a \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} e^{-x} dx ,$$

belə ki, $\psi'(\lambda) = a(\lambda+1)^{-1} = \omega'(\lambda)/\omega(\lambda)$.

3) D a y a n ı q l ı p a y l a n m a l a r. $0 < \alpha < 1$ olduqda aşağıdakı xassələrə malik G_α paylanmasının Laplas çevirməsi $\gamma_\alpha(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}$ funksiyasıdır: G_α – dayanıqlı paylanmadır; daha dəqiq, əgər asılı olmayan $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni G_α paylanmasına malikdirlərsə, onda $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n^{1/\alpha}$ təsadüfi kəmiyyətinin də paylanması G_α-dır; $x \to \infty$ olduqda

$$x^\alpha [1 - G_\alpha(x)] \to \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)},$$

$$x \to 0 \text{ olduqda } e^{x^{-\alpha}} G_\alpha(x) \to 0 .$$

Bu halda $\psi(\lambda) = \lambda^\alpha$ və $\lambda^\alpha = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} dx$.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA m ü ş a y i ə t e d i c i **« безгранично делимое распределение** с о п р о в о ж д а ю щ е е; a c c o m p a n i n g **infinitely divisible distribution »** – bax, *Müşayiətedici sonsuz bölünən paylanma*.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA; s t r u k t u r **« безгранично делимое распределение;** с т р у к т у р а; s t r u c t u r e o f **infinitely divisible distribution »** – sonsuz bölünən paylanmanın *Lebeq ayrılışı* $\mathbf{P} = \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_s$ və bu paylanmaya uyğun spektral funksiyanın $H = H_a + H_d + H_s$ – *Levi kanonik ifadəsinin* qarşılıqlı asılılığıdır.

Belə qarşılıqlı asılılığa aid m i s a l l a r: 1) S. b. p. $\mathbf{P}$, yalnız və yalnız, o halda diskret paylanmadır ki (yəni $\mathbf{P} = \mathbf{P}_d$), Levi spektral funksiyasının tam dəyişikliyi $\operatorname{Var} H$ məhdud olsun və $H = H_d$ ödənilsin. 2) S. b. p.-nın ayrılışında, yalnız və yalnız, o halda diskret hədd yoxdur (yəni $\mathbf{P}_\alpha = 0$) ki, $\operatorname{Var} H = \infty$ olsun. 3) S. b. p. $\mathbf{P}$, – $H_\alpha \neq 0$ və $\operatorname{Var} H = \infty$ olduğu halda mütləq kəsilməz paylanmadır (yəni $\mathbf{P} = \mathbf{P}_a$). 4) əgər $\operatorname{Var} H = \infty$ və $H = H_d$ olarsa, onda $\mathbf{P} = \mathbf{P}_a$ və ya $\mathbf{P} = \mathbf{P}_s$ olur.

Əd.: [1] T u c k e r H. G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, № 6, p. 316–20; [2] З о л о т а р е в В. М., К р у г л о в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 712–24.

***M* – SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMA « *M* – безгранично делимое распределение; *M* – infinitely divisible distribution »** – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulma sxemində *sonsuz bölünən paylanmanın*

analoqudur. Paylanma funksiyaları F_ξ və F_η olan ξ və η asılı olmayan həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərinin vurulması kompozisiyaya analoji semi – qrup əməli doğurur, yəni $F_{\xi\eta} = F_\xi \amalg F_\eta$. İxtiyari $n \geq 2$ üçün F funksiyası hər hansı paylanma funksiyası G_n-in və $\delta(n) = -1$ və ya $\delta(n) = -1$ nöqtələrindən birində cırlaşmış E_{δ_n} paylanmasının n – qat kompozisiyası kimi: yəni

$$F = G_n \amalg G_n \amalg \ldots \amalg G_n \amalg E_{\varepsilon(n)}$$

şəklində ifadə olunarsa, F paylanma funksiyası M – sonsuz bölünən paylanma adlanır və bu paylanma $\mathfrak{M}$ sinfindəndir. $\mathfrak{M}$ sinfi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasilləri ardıcıllığı –

$$a_n \xi_{n1} \cdot \xi_{n2} \cdot \ldots \cdot \xi_{nm}, \quad n \geq 1$$

üçün mümkün limit paylanmalarının çoxluğu ilə üst-üstə düşür; bu ardıcıllıqlarda $a_n \neq 0$ sabitlərdir, ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətləri isə sonsuz kiçilənlik şərtinə analoji: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\max \mathbf{P}\{\left|\xi_{nk}^2 - 1\right| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (*)$$

şərtinə tabedirlər. Həqiqi ədədlərin semi – qrupu vurma əməlinə nəzərən iki elementdən ibarət kompakt $K = (-1, 1)$ semi – qrupunu özündə saxlayır. (*) şərti ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathfrak{M}$-in alt sinfi olan, K-da topalanmış bütün paylanmaların sinfi $\mathfrak{H}$ ilə zəif topologiyada müntəzəm yaxınlaşmasını ifadə edir.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin bir-birinə vurulması sxemi üçün xarakteristik funksiyalar rolunu F paylanmalarının x a r a k t e r i s t i k ç e v i r m ə l ə r i:

$$W(t) = \begin{Vmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{Vmatrix},$$

$$w_k(t) = \int\limits_{x \neq 0} |x|^{it} (\operatorname{sign} x)^k \, dF(x)$$

ifadə edir. Xarakteristik çevirməsi W olan F paylanma funksiyasının $\mathfrak{M}$ sinfindən olması üçün w_k funksiyalarının

$$w_k(t) = \alpha_k f_1(t) (f_2(t))^{1-2k}, \; k = 0, 1$$

düsturları ilə ifadə olunması zəruri və kafidir, burada f_1 və f_2 sonsuz bölünən paylanmaların xarakteristik funksiyalarıdır, həm də

$$f_2(t) = \exp\left(\int\limits_{x \neq 0} (e^{itx} - 1) \, dH(x) \right)$$

(*Levi kanonik ifadəsi formasında*),
həqiqi α_k parametrləri isə

$$0 < \alpha_0 \leq 1, \; |\alpha_1| \leq \alpha_0 \exp\left(- \int\limits_{x \neq 0} dH(x) \right)$$

şərtlərinə tabedirlər.

$\mathfrak{M}$ sinfində *özü-özünə ayrılan paylanmalar və dayanıqlı paylanmalara* analoji M – özü-özünə ayrılan və M – dayanıqlı paylanmalar anlayışlarını daxil etmək olar.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 4, с. 788–91.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMALARIN İKİLİLİK XASSƏSİ « безгранично делимых распределений двойственность; duality of infinitely divisible distribution » – *sonsuz bölünən paylanmaların* iki sinfi arasında xüsusi növ analitik əlaqədir. $\zeta(u)$, $\zeta(0) = 0$, $u \to \infty$ olduqda sanki yəqin qeyri – məhdud artan və müsbət sıçrayışlarsız, paylanma funksiyası $F_\zeta(x, u)$ olan bircins *sonsuz bölünən proses*; $\tau(v)$, – $\zeta(u)$ prosesinin $v > 0$ səddini ilk aşma anı, $F_\tau(x, v)$, – $\tau(v)$-nin paylanma funksiyası olsun. $\tau(v)$, $\tau(0) = 0$ də sonsuz bölünən prosesdir və müsbət λ və x üçün paylanma funksiyası F_τ paylanma funksiyası F_ζ ilə

$$\int\limits_0^\lambda (1 - F_\zeta(x, u)) \frac{du}{u} = \int\limits_0^x F_\tau(\lambda, v) \frac{dv}{v} \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə bağlıdır. p_ζ və p_τ sıxlıq funksiyaları eyni zamanda ya mövcuddur və ya yoxdur; birinci halda bunlar

$$x p_\zeta(x, u) = u p_\tau(u, x) \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə bir-birilə bağlıdırlar.

S. b. p. i. x. 1954-də (bax, [1]) *ciddi dayanıqlı paylanmalar* sinfi $\mathscr{W}$-da, ümumi halda isə 1961-də (bax, [2] – [4]) aşkar olunmuşdur.

Ciddi dayanıqlı paylanmaların sıxlıqları arasında əlaqə aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunur:

$$x p(x, \alpha, \theta) = x^{-\alpha} p(x^{-\alpha}, \alpha^*, \theta^*), \qquad (3)$$

burada $x > 0$, $1 \leq \alpha \leq 2$, θ isə $\mathscr{W}$ sinfi üçün məqbul ixtiyari qiymətlər alır, $\alpha^* = 1/\alpha$, $\theta^* = \alpha(1 + \theta) - 1$. (3) bərabərliyində (2) halı $\theta = \alpha - 2$ qiymətinə uyğundur. (3)-də digər halların təsadüfi proseslər dilində interpretasiyası məlum deyildir. (1) – (3) münasibətlərinin xüsusi cəhəti – paylanmaların əlaqəsini tamamilə deyil, yalnız yarımoxlarda topalanmış «yarıları» (hissəsi) arasında əlaqəni müəyyən edirlər. Bütün $s > 0$ üçün mövcud olan

$$\mathbf{M} \exp[s \, \zeta(u)] = \exp[u \psi_\zeta(s)],$$

$$\mathbf{M} \exp[-s \, \tau(v)] = \exp[-v \psi_\tau(s)]$$

Laplas çevirmələri (1)-ə ekvivalent, $\psi_x(\psi_\tau(s)) = s$ bərabərliyilə əlaqələdirlər.

Mənfi sıçrayışlarsız bircins sonsuz bölünən proseslər [$\zeta(0) = 0$; $\zeta(u) \to -\infty$, $u \to \infty$] də analoji xassəyə malikdirlər, çünki, $\zeta(u)$ prosesi də yuxarıda baxılan tip prosesdir.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Докл. АН СССР », 1954, т. 98, № 5, с. 735–38; [2] З о л о т а р е в В. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 52–60; [3] З о л о т а р е в В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 4, с. 724–33; [4] Б о р о в к о в А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 360–63.

SONSUZ BÖLÜNƏN PAYLANMALARIN QARIŞMASI « безгранично делимых распределений смесь; mixture of infinitely divisible distributions » –

$$\mathbf{P}(\cdot) = \int_A \mathbf{Q}(\cdot, \alpha)\mu(d(\alpha)) \qquad (*)$$

şəklində ifadə olunan paylanmadır, burada $\{\mathbf{Q}(\cdot, \alpha) : \alpha \in A\}$ – hər hansı bir *sonsuz bölünən paylanmalar* ailəsidir, μ isə A-nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı σ – cəbrdə verilmiş normalanmış ölçüdür [ola bilər ki, dəyişənişarəli, $\mu(A) = 1$]. Əgər $A = [0, 1)$, μ Lebeq ölçüsü və $\mathbf{Q}(\cdot, \alpha)$, – $\zeta(\alpha)$, $\alpha \in A$ ölçülən sonsuz bölünən prosesinin paylanması olarsa, onda $\mathbf{P}$ *qarışma* təsadüfi ν_n sayda hər hansı asılı olmayan və limitcə müntəzəm əhəmiyyətsiz toplananların $S_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{n\nu_n}$ cəmlərinin limit paylanmasıdır (ξ_{nj} və ν asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir) (bax, [1]).

S. b. p. q. $\mathbf{P}$-nin özü də sonsuz bölünən paylanma ola bilər, məs., əgər $A = [0, \infty)$, μ, – A-da sonsuz bölünən paylanmadır və $\mathbf{Q}(\cdot, \alpha)$, – A-da bircins sonsuz bölünən $\zeta(\alpha)$ prosesinin paylanmasıdır (bax, [2]).

Çoxölçülü qarışmalar üçün Şönberqin məhşur teoremində isbat olunur ki, əgər $f_n(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ xarakteristik funksiyaları $f_n(t) = \varphi(|t|)$ şəklində olarsa, $|t|$, – $t \in \mathbb{R}^n$ vektorunun Evklid norması və φ, – $\mathbb{R}^1$-də hər hansı bir funksiya olarsa, onda $n \geq 1$ olan bütün n-lər üçün

$$f_n(t) = \int_0^\infty e^{-|t|^2\alpha}\mu(d\alpha).$$

Əgər bundan əlavə $n \geq 1$ olan bütün n-lər üçün f_n $\mathbb{R}^n$-də sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyası olarsa, onda μ də sonsuz bölünən paylanma olacaqdır. Paylanma funksiyalarının qarışmaları haqqında bax, [3].

Əd.: [1] Szasz D., «Ann. Math. Statist.», 1972, v. 43, № 6, 1902–13; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., М., 1984; [3] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [4] Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов, М., 1961.

SONSUZ BÖLÜNƏN PROSES « безгранично делимый процесс; infinitely divisible process » – stoxastik kəsilməz və asılı olmayan artımlarlı bircins $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir*; yəni elə prosesdir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $s \to t$ olduqda

$$\mathbf{P}\{|\zeta(t) - \zeta(s)| > \varepsilon\} \to 0;$$

ixtiyari $t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \leq \ldots \leq t_n < s_n$ topluları üçün $\zeta(t_1) - \zeta(s_1), \ldots, \zeta(t_n) - \zeta(s_n)$ artımları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və prosesin artımlarının paylanmaları yalnız $t_k - s_k$ fərqlərindən asılıdır. Əgər $\zeta(0) = 0$ şərtinin sanki yəqin ödənildiyi qəbul olunarsa, onda $\zeta(t)$ kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası $f^t(\lambda)$ şəklində olur; $t > 0$, burada $f(\lambda)$ hər hansı *sonsuz bölünən paylanmanın* xarakteristik funksiyasıdır. S. b. p. $\zeta(t)$-nin trayektoriyalarının yalnız sanki yəqin birinci növ kəsilmə nöqtələri ola bilər. Əgər xarakteristik funksiya $f(\lambda)$ *Levi kanonik ifadəsi* formasında ifadə olunursa, onda spektral funksiya $H(x)$-in ehtimali mənası aşağıdakı kimidir: S. b. p.-in trayektoriyası $(t, t + \Delta)$ intervalında $Y < u < 0$ uzunluqlu sıçrayışlarını [uyğun olaraq, $-H(u)\Delta - o(\Delta)$ ehtimalı ilə $0 < u < Y$ uzunluqlu] $H(u)\Delta + o(\Delta)$ ehtimalı ilə alır. Əgər $x > 0$ olduqda $H(x) = 0$ olarsa, onda $\zeta(t)$ prosesinin sanki yəqin müsbət sıçrayışları yoxdur (yuxarıdan semikəsilməz). Aşağıdan semikəsilməz S. b. p. anoloji olaraq təyin olunur. Əgər S. b. p. $\zeta(t)$ yuxarıdan semi kəsilməz proses və

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\} = 1$$

olarsa, onda prosesin ixtiyari $y > 0$ səddini kəsməsi sanki yəqin hər hansı təsadüfi $\tau(y)$ anında baş verir; $\tau(y)$ isə S. b. p.-dir. S. b. p.-lər olan $\zeta(t)$ və $\tau(y)$-in paylanmaları arasında aşkar asılılıq vardır (bax, *Sonsuz bölünən paylanmaların ikililik xassəsi*).

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949.

SONSUZ BÖLÜNƏN PROSES aşağıdan (yuxarıdan) semi – kəsilməz **« безгранично делимый процесс** полунепрерывный снизу (сверху); **lower (upper) semicontinuous infinitely divisible process » –** bax, *Sonsuz bölünən proses.*

SONSUZ BÖLÜNƏN TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « безгранично делимое случайное множество; infinitely divisible random set » – aşağıdakı xassəyə malik *təsadüfi A çoxluğudur:* ixtiyari natural n ədədi üçün elə eyni qanunla paylanmış asılı olmayan $A_1, \ldots, A_n$ təsadüfi çoxluqları vardır ki, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ və A təsadüfi çoxluqlarının paylanmaları eynidir.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

SONSUZ KİÇİLƏNLİK ŞƏRTİ « бесконечной малости условие; infinitesimality condition », asimptotik önəmsizlik şərti, – asılı olmayan $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin (bax, *Seriyalar sxemi, üçbucaq sxemi*) $S_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, $n \geq 1$ cəminin paylanması üçün limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsinin əsas ilkin fərziyyəsidir: ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda,

$$\sup[\mathbf{P}\{|\xi_{nk}| > \varepsilon : k \geq 1\}] \to 0 \qquad (*)$$

fərz olunur

Aşağıdakı hökmlər (*) ilə ekvivalentdir:

$n \to \infty$ olduqda,

$$\sup[L(\xi_{nk}, 0) : k \geq 1] \to 0,$$

burada L – Levi metrikasıdır;

$n \to \infty$ olduqda,

$$\sup\,[\,\mathbf{M}\min(\xi_{nk}^2,\,1):\,k \geq 1\,] \to 0;$$

hər bir $t \in \mathbb{R}^1$ üçün $n \to \infty$ olduqda,

$$\sup[\,|\,f_{nk}(t) - 1\,|:\,k \geq 1\,] \to 0,$$

burada $f_{nk}(t)$, – ξ_{nk} təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyasıdır. «S. k. ş.» anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinə A. N. Kolmoqorov (bax, [1]) tərəfindən daxil edilmişdir. S. k. ş.-nin analoqları ümumiləşmiş cəmləmə modellərilə bağlı (*təsadüfi kəmiyyətlərin birbirinə vurulma sxemi*, *təsadüfi kəmiyyətlərin maksimumu sxemi*) limit teoremlərində istifadə olunur.

$n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\sup|\xi_{nk}|:\,k \geq 1\} \geq \varepsilon\} \to 0$$

şərti, bəzən, *müntəzəm sonsuz kiçilənlik şərti* adlanır.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

SONSUZ LATIN KVADRATI « безконечный латинский квадрат; infinite Latin square » – bax, *Latın kvadratı.*

SPEKTR(i) dinamik sistemin « **спектр** динамической системы; **spectrum** of a dynamical system » – $\{T_t,\ t \in \mathbb{Z}$ və ya $\mathbb{R}\}$ Lebeq fəzası X-də, μ ölçüsünü saxlayan dinamik sistem olduqda, $U_t : f(x) \to f(T_t x)$ unitar operatorlarının $L^2(X,\,\mu)$-də qrupunun spektridir. Unitar operatorların ixtiyari qrupu üçün olduğu kimi dinamik sistemin S. $(\sigma,\,n)$ cütü ilə tamamilə xarakterizə olunur, burada σ – maksimal spektral tipin ölçüsü, $n = n(\lambda)$ – təkrarlıq funksiyasıdır.

Adətən, S.-ə $\int f(x)\,d\mu(x) = 0$ şərtini ödəyən funksiyaların altfəzasında baxılır.

K – sistemlər üçün $(\sigma,\,n) = (d\lambda,\,\infty)$ olur, yəni S. – hesabiqat Lebeq S.-dir. Belə S. entropiyası sıfır olan sistemlərdə də ola bilər (məs., oritsiklər axınlarda). Sırf nöqtəvi S.-li erqodik sistemlər (burada σ – nöqtəvi ölçüdür) üçün S. sadədir, yəni $n(\lambda) = 1$ və tam metrik invariantdır. Sadə və kəsilməz S.-li sistemə misal Qauss dinamik sistemlərinin sinfində qurulmuşdur. Sadə olmayan və sonluqat S.-li sistemlərə aid misallar vardır, burada $n(\lambda) < \infty$, $n\lambda \neq 1$, məs., sonlu sayda parçalarını keçirilmə sinfində. Keçirilmələrdə arasında özünün təsiri ilə qoşma olmayan, sadə və kəsilməz S.-li sistem vardır. Erqodik dinamik sistemdə hansı $(\sigma,\,n)$ cütlərinin mümkün olduğu məlum deyildir, məs., $(d\lambda,\,1)$ cütü mümkündürmü, yəni sadə Lebeq S. mümkündürmü? Yalnız o məlumdur ki, S.-də ikiqat Lebeq komponenti olan sistemlər mövcuddur.

Əd.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [2] Оселедец В. И., «Функц. анализ и его прилож.», 1971, т. 5, № 3, с. 75–79; [3] Оселедец В. И., «Матем. заметки», 1969, т. 5, в. 3, с. 323–326; [4] Mathew J., Nadkarni M., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1984, v. 16, № 4, p. 402–06.

SPEKTR; faza spektri « **спектр** фазовый; phase **spectrum** » – bax, *Faza.*

SPEKTR(i) koherentlik « **спектр** когерентности; **spectrum** of coherence » – bax, *Koherentlik.*

SPEKTR(i) Kolmoqorov « **спектр** колмогоровский; Kolmogorov **spectrum** » – bax, *Kolmoqorov spektri.*

SPEKTR kumulyativ « **спектр** кумулятивный; cumulativ **spectrum** » – bax, *Spektral semi – invariant.*

SPEKTR(i) qarşılıqlı faza « **спектр** взаимный фазовый; phase cross – **spectrum** » – bax, *Faza.*

SPEKTR(i) planın « **спектр** плана; **spectrum** of a design », *plan daşıyıcısı*, *planın dayaq nöqtələri*, *planın nöqtələri* də adlandırılır.

Bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

SPEKTR(i) prosesin « **спектр** процесса; **spectrum** of a process » – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq.*

SPEKTR(i) sonsuz bölünən paylanmanın « **спектр** безгранично делимого распределения; **spectrum** of a infinitely divisible distribution » – bax, *Sonsuz bölünən paylanma.*

SPEKTR(i) stasionar təsadüfi prosesin « **спектр** стационарного случайного процесса; **spectrum** of a stationary random process » – bax, *Spektral sıxlıq.*

SPEKTR(i) təsadüfi bircins meydanın « **спектр** случайного однородного поля; **spectrum** of a random homogeneous field » – bax, *Spektral sıxlıq.*

SPEKTR(i) təsadüfi prosesin « **спектр** случайного процесса; **spectrum** of a random process » – bax, *Spektral ayrılış.*

SPEKTRAL ANALİZ(i) təsadüfi proseslərin və meydanların « **спектральный анализ** случайных процессов и полей; **spectral analysis** of a random processes and fields » – *stasionar təsadüfi proseslər* və *bircins təsadüfi meydanlar* nəzəriyyəsinin bu proseslər və meydanların yüksək tərtib spektral xarakteristikalarını öyrənən bölməsidir; [1] – [3] işlərinin əsasında yaranmışdır.

$\mathbf{T}^{(k)}$, –

$$\mathbf{M}\,|\,\zeta(t)|^k \leq C_k < \infty$$

şərtini ödəyən $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinin sinfi olsun, $\mathbf{S}^{(k)}$ – elə $\zeta(t) \in \mathbf{T}^{(k)}$ proseslərinin sinfi olsun ki, bütün $t_1, \ldots, t_l$ üçün, $1 \leq l \leq k$, $-\infty < \tau < \infty$ üçün bunlar

$$\mathbf{M}(\zeta(t_1) \ldots \zeta(t_l)) = \mathbf{M}(\zeta(t_1 + \tau) \ldots \zeta(t_l + \tau))$$

şərtini ödəmiş olsunlar. $\mathbf{S}^{(k)}$ sinfinin prosesləri, bəzən, k tərtib geniş mənada stasionar proseslər adlanır.

$M_\zeta^{(k)}(\mathbf{\Lambda})$ $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasının Borel çoxluqları sistemində təyin olunmuş elə kompleks tamamilə sonlu ölçü olsun ki (bu ölçü spektral moment ölçüsü adlanır),

$$M^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,\lambda)} M_\zeta^{(k)}(d\lambda)$$

şərtini ödəsin, burada $M^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{M}(\zeta(t_1) \dots \zeta(t_l))$. Əgər bütün $1 \le l \le k$ üçün

$$M^{(l)}(t_1, \dots, t_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} e^{i(t,\lambda)} M_\zeta^{(l)}(d\lambda)$$

münasibəti ödənilərsə, $\zeta(t)$ prosesi $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ sinfindəndir. $\mathbf{T}^{(k)}$, $\mathbf{S}^{(k)}$, $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ sinifləri arasında münasibətlər ödənilir: $\mathbf{S}^{(k)} \subset \mathbf{T}^{(k)}$, $\mathbf{\Phi}^{(k)} \subset \mathbf{T}^{(k)}$. Məlumdur ki, $\mathbf{S}^{(2)} \subset \mathbf{\Phi}^{(2)}$, məs., $\zeta^*(t) = \zeta(t)\cos\omega t$, $\zeta(t) \in \mathbf{S}^{(2)}$ prosesi misalından aydındır ki, $\mathbf{\Phi}^{(2)}$ sinfi $\mathbf{S}^{(2)}$ sinfindən daha genişdir. $k > 2$ üçün [2]-də qurulmuş misaldan aydındır ki, $\mathbf{S}^{(k)}$ sinfindən olan elə proseslər var ki, onlar eyni zamanda $\mathbf{\Phi}^{(k)}$ sinfindən deyildirlər.

Bir çox hallarda təbii olaraq, moment spektral ölçüsü $M_\zeta^{(k)}(\Lambda)$ -ya deyil,

$$\mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{i(t,\lambda)} F_\zeta^{(k)}(d\lambda)$$

münasibətilə təyin olunan spektral semi – invariant $F_\zeta^{(k)}(\Lambda)$ ölçüsünə baxılır, burada

$$\mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k) =$$

$$= \frac{i^{-k}\partial^k}{\partial u_1 \dots \partial u_k} \ln \mathbf{M} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{k} u_j \zeta(t_j) \right\} \Bigg|_{u_1 = \dots = u_n} = 0.$$

$M_\zeta^{(k)}(\Lambda)$ ölçüsü çox vaxt spektral moment, $F_\zeta^{(k)}(\Lambda)$ – spektral semi–invariant adlandırılır. Təsadüfi kəmiyyətlərin semi – invariantları bəzən $\mathbf{S}^{(k)}(\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)) = \mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k)$ kimi işarə olunur.

A. N. Kolmoqorovun [1]-də təklif edərək daxil etdiyi $\mathbf{\Delta}^{(k)}$ sinfi $\mathbf{\Phi}^{(k)} \bigcap \mathbf{S}^{(k)}$ sinfinin altsinfi kimi təyin olunur və bu sinif onunla xarakterizə olunur ki, $F_\zeta^{(l)}(\Lambda)$, $1 \le l \le k$ ölçüləri $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = 0$ müstəvilərində Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər. Təsadüfi proseslərin və meydanların requlyarlıq şərtlərində $F_\zeta^{(k)}(\Lambda)$ ölçüsünün $f_\zeta^{(k)}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sıxlığının varlığı şərtləri [4]-də öyrənilmişdir (bax, *Spektral semi – invariant*).

A. N. Kolmoqorovun təşəbbüsü ilə olunmuş işlərdə $\mathbf{\Delta}^{(k)}$ sinifləri təyin olunmuş və öyrənilmişdir və bu işlər stasionar təsadüfi proseslər və meydanların yüksək tərtib spektrlərinin statistik analizi nəzəriyyəsi adlanan nəzəriyyə kimi yeni bir istiqamətin araşdırılma seriyalarının yaranması ilə nəticələnmiş oldu. Bu istiqamətdəki işlərin nəticələri fundamental xarakter daşıyır, həm də, astronomiya, geofizika, mayenin turbulentliyinin öyrənilməsində, müxtəlif tətbiqi məsələlərin həllində geniş istifadə olunur (bax, məs., [5]).

Təsadüfi proseslərlə bağlı ixtiyari asimptotik araşdırmalarda, praktiki olaraq, əsas vasitə yüksək tərtib semi – invariantlardır (kumulyantlar, bax, [6]) ki, bunlar həm də, yeri gəldikdə proses və meydanların S. a.-ində də istifadə olunur. Aşağıda semi – invariantların bir sıra xassələri verilir və bunlardan axırıncı üç xassədən aydındır ki, semi – invariantlar təsadüfi kəmiyyətlərin statistik asılılığının faydalı bir ölçüsüdür:

1. $\mathbf{S}^{(k)}(a_1\zeta_1, \dots, a_n\zeta_n) = a_1 \dots a_k \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$;
2. $\mathbf{S}^{(k)}(t_1, \dots, t_k)$ – simmetrik funksiyadır;
3. $\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1 + Z, \dots, \zeta_k) = \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) + \mathbf{S}^{(k)}(Z, \dots, \zeta_k)$;
4. $\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1 + C, \dots, \zeta_k) = \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$, $C = \text{const}$, $k > 2$;
5. $\mathbf{S}^{(2)}(\zeta, \overline{\zeta}^*) = \operatorname{cov}(\zeta, \zeta^*)$;
6. $\mathbf{S}^{(1)}(\zeta) = \mathbf{M}\zeta$;

7. əgər $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ və $(\zeta_1^*, \dots, \zeta_k^*)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda

$$\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1 + \zeta_1^*, \dots, \zeta_k + \zeta_k^*) =$$
$$= \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) + \mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1^*, \dots, \zeta_k^*);$$

8. əgər $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ kəmiyyətlərinin hər hansı bir qrupu bu topludakı digər kəmiyyətlərdən asılı olmazsa, onda

$$\mathbf{S}^{(k)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k) = 0;$$

9. əgər $\zeta(t) \in T^{(kq)}$, $q > 2$ və bundan başqa, qarışma əmsalı

$$\alpha(r) = \sup_{t,\, A \in \mathfrak{A}_{-\infty}^t,\, B \in \mathfrak{A}_{t+r}^{\infty}} \left| P(AB) - P(A)P(B) \right|,$$

(burada $\mathfrak{A}_a^b$, – $\zeta(t)$, $t \in [a, b]$-nin doğurduğu σ – cəbrdir) olan Rozenblatt qarışma şərtini ödəyirsə, onda $t_1 \le \dots \le t_k$ olduqda

$$\left| S^{(k)}(t_1, \dots, t_k) \right| \le C K^{k+1} \alpha^{(q-2)/q}(d)$$

münasibəti doğrudur, burada d, – $(t_1, \dots, t_k)$ toplusunun qonşu koordinatları arasında məsafədir.

$P_1 \bigcup \dots \bigcup P_m$

$$A = \left\{ \begin{matrix} (1,1), \dots, (1, m_1) \\ (k,1), \dots, (k, m_k) \end{matrix} \right\}$$

cədvəlinin elementləri çoxluğunun bölgüsü olsun.

Əgər elə $(i_1, j_1) \in P_{m'}$ və $(i_2, j_2) \in P_{m''}$ elementləri varsa ki, $i_1 = i_2$ şərti ödənilir, onda bölgüyə aid $P_{m'}$ və $P_{m''}$ çoxluqları zəncir əmələ gətirir; əgər bölgünün elə $P_{m'} = P_{m_1}$, $P_{m_2}, \dots, P_{m_N} = P_{m''}$ çoxluqları ardıcıllığı varsa ki, P_{m_n} və $P_{m_{n+1}}$ çoxluqları $n = 1, 2, \dots, N-1$ qiymətlərində zəncir əmələ gətirir,

onda $P_{m'}$ və $P_{m''}$ çoxluqları **əlaqəli çoxluqlardır**, yəni bunlar arasında əlaqə vardır, deyilir; əgər bölgünün bütün çoxluqları P_m -lər əlaqəli çoxluqlardırsa, onda bölgü **ayrılmayan bölgü** adlanır. X_{ij} $(i, j) \in A$ təsadüfi kəmiyyətlər və $Y_i = \prod_{j=1}^{m_i} X_{ij}$ olsun. Onda

$$S^{(k)}(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{A = P_1 \cup \dots \cup P_M} S^{(k_1)}(X_{ij}(i,\ j) \in P_1) \dots S^{(k_M)}(X_{ij}(i, j) \in P_M),$$

burada cəmləmə A cədvəlinin bütün ayrılmayan bölgüləri üzrə aparılır, $A = P_1 \cup \dots \cup P_M$, $S^{(k_j)}(X_{ij}(i,\ j) \in P_j)$, – $(i, j) \in P_j$ indekslərli X_{ij} təsadüfi kəmiyyətinin semi – invariantıdır. Təsadüfi kəmiyyətlərin polinomial funksiyalarının semi – invariantlarının hesablanması [7]-də verilmişdir.

Yuxarıdakı bütün mülahizələr şübhə doğurmayan dəyişikliklərlə təsadüfi bircins meydanlar üçün də doğrudur (bax, [4], [8], [9]). Spektral semi – invariantların statistik qiymətləndirilməsi haqqında, bax, [4], [10].

Əd.: [1] Blanc-Lapierre A., Fortet R., Theories des fonctions aleatoires, P., 1953; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 428–29; [3] Ширяев А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 293–313; [4] Журбенко И. Г., Анализ стационарных и однородных случайных систем, М., 1987; [5] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–67; [6] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [7] Леонов В. П., Ширяев А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 342–55; [8] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338; [9] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [10] Time series in the frequency domain, Amst. – [a. o.], 1983.

SPEKTRAL ANALİZ (i) zaman sıralarının **« спектральный анализ** временных рядов; **spectral analysis** of time series **»** – zaman sıralarının statistik analizinin bölməsidir, əsas məqsədi statistikada *zaman sırası* adı ilə qəbul edilmiş diskret zamanlı *stasionar təsadüfi prosesin* tezlik xarakteristikalarının tədqiqidir.

Zaman sıralarının analizi 20-ci əsrin 80-cı illərində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın ən vüsətlə inkişaf edən oblastlardan biri olmuşdur. Stasionar proseslər nəzəriyyəsinin dərin nəzəri nəticələri əsasında zaman sıralarının analizi, tətbiq nöqteyi – nəzərindən, riyazi statistikanın ən mühüm istiqamətlərindən birinə çevrilmişdir. Ən müxtəlif araşdırmalarda, o cümlədən, fizika və iqtisadiyyat, texnika və linqvistika, biologiya və sosiologiya da daxil olmaqla, ya müşahidələrin stoxastik stasionar sıraları ilə və ya stasionar sıralardan asanlıqla seçilib ayrılan trendin olması ilə, mövsüm dəyişmələri ilə, periodik komponentlərlə və s. ilə fərqlənən sıralar tədqiqat obyektləri olur. Belə halların öyrənilməsinə iki əsas yanaşma vardır: birinci yanaşmada zaman üzrə stoxastik əlaqələr öyrənilir və bu hal zaman oblastında zaman sıralarının analizi adlandırılır, ikinci yanaşmada baxılan sıraların tezlik xarakteristikaları araşdırılır ki, bu hal zaman sıralarının spektral analizi adlanır. Birinci yanaşma müşahidə sıralarının korrelyasion funksiyalarına əsaslanaraq, əsas etibarilə, parametrik çoxölçülü araşdırma metodlarından istifadə edir. İkinci yanaşma öyrənilən hadisələr və ya proseslərin fiziki məğzinə bir çox hallarda olduqca bağlı olan müxtəlif spektral, asimptotik, funksional texnikaya əsaslanır və aydınlıqla təsvir oluna bilinir.

Tezlik xarakteristikalarının statistik öyrənilməsinə ilk cəhdlərdən biri A. Şusterə məxsusdur (bax, [1]); o, periodoqramın tərifini daxil etmiş və gizli periodikliklərin ayırd olunmasında onu istifadə etmişdir. O, spektral sıxlığın statistik qiyməti kimi periodoqramı istifadə etməyə imkan verməyən periodoqramın statistik dayanıqsızlığını qeyd etmişdir. Spektral sıxlığın tutarlı statistik qiymətinin alınması üçün spektral pəncərə vasitəsilə periodoqramın ortalanması ideyasını ilk dəfə A. Eynşteyn [2]-də təklif etmişdir, lakin onun bu ilk işi statistik aləmdə nəzərə çarpmamış qaldı və bu sahədə prioritet, adətən, M. Bartlett və F. Daniyelə verilir (bax, [3], [4]). Periodoqram statistikalarının ilk ətraflı öyrənilməsi U. Qrenander və M. Rozenblatta (bax, [5]) məxsusdur (bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət). Yüksək tərtibli statistik qiymətlərin və ya ədəbiyyatda *spektral semi – invariantlar* kimi adlandırılan statistik qiymətlərin öyrənilməsi (bax, [6]) D. Brillincer və M. Rozenblatta (bax, [7]) məxsusdur.

Zaman sıralarının S. a.-nin çoxsaylı tətbiqlərinin inkişafında kəsilməz zamanlı stasionar prosesin diskretizasiya probleminin həlli V. A. Kotelnikov və ondan asılı olmadan K. Şennon (bax, [8]) tərəfindən alınmış və mühüm bir sıçrayışa səbəb olmuşdur. Aydın olmuşdur ki, $-\pi/\Delta \le \omega \le \pi/\Delta$ məhdud zolağında topalanmış, kəsilməz zamanlı, spektrli ixtiyari prosesi onun Δ zaman intervallarından bir diskret qiymətlərinin xətti kombinasiyası şəklində ifadə etmək mümkündür, beləliklə, məhdud spektrli proses özünün bütün xarakteristikaları ilə $x(k\Delta)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ qiymətlərilə tamamilə təyin olunur (*Kotelnikov teoremi*). Əksinə, prosesin spektri sonsuz zolaqda topalanmışdırsa, bu müddəa doğru olmur; məs., apriori sonsuz zolaqda topalanmış spektrin statistik qiymətləndirilməsində $k\Delta$ anlarında prosesin qiymətləri üzrə tezliklərin üst-üstə gəlməsi effekti baş verir və bu halda ən böyük qiymətli dairəvi tezlik təyin etmək olur, bu tezlik isə Naykvist tezliyi adlandırılır.

Bu effektlərin anlaşılması zaman sıralarının filtrasiyası nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır (bax, *Mövsüm dəyişmələri*, *Xətti filtr*, *Desimasiya*, *Kompleks demodulyasiya*).

Zaman sıralarının S. a. uzun müddət, xüsusilə də, *diskret Furye çevirmələrinin* alqoritmlərinin realizasiyası üçün zəruri hesablamalar həcminin böyüklüyü ilə əlaqədar hesablamaların çətinliyinə görə, o qədər də inkişaf edə bilməmişdir. Bu məsələyə marağın kəskin dəyişməsi *sürətli Furye çevirməsinin* alqoritminin yaranması ilə bağlı olmuşdur (bax, [9]). Bu alqoritm nəticəsində sonlu diskret Furye çevirmələrindəki hesablama üçün tələb olunan adi CN^2 sayda əməliyyat $CN \ln N$ sayda əməliyyata qədər azalmışdır, odur ki, hətta kovariasion funksiyanın statistik qiymətinin hesablanması ilkin müşahidələr sırasından istifadə edilərək, ikiqat Furye çevirməsi aparıldıqda səmərəli olmuşdur. Bütün bunlarla yanaşı, hesablama texnikasının imkanlarının da olduqca artması 20-ci əsrin sonuncu onilliyində zaman sıralarının statistik analizinin problemlərinin öyrənilməsində spektral yanaşmanın populyarlığına səbəb oldu.

Zaman sıralarının çoxölçülü S. a.-inin mühüm tətbiqi əhəmiyyəti $\zeta(t)$ prosesinə $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında baxıldığı halda aydın olur. Bu sahədə araşdırmalar aparan tədqiqatçılar, adətən, kross-spektrlərin öyrənilməsilə kifayətlənməyərək, kospektr və kvadratur spektrin, koherentliyin öyrənilməsinə böyük diqqət yetirirlər və bu da çoxsaylı ədəbiyyatda öz əksini tapa bilmişdir (bax, [10] – [15]).

Zamana görə yerinidəyişmə üzrə ortalanma vasitəsilə alınan spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi metodları olduqca inkişaf etməyə başladı. Bu prosedur, ilk dəfə C. Tyuki (J. Tukey) tərəfindən təklif olunmuş və [15]-də ətraflı araşdırıl-

mışdır; bu prosedur qonşu tezliklərdə topalanmış, güclü küylərə nəzərən dayanıqlı spektrlərin robast statistik qiymətlərini almağa imkan verir.

Təsadüfi meydanların S. a. metodlarının inkişafına da çox diqqət yetirilmişdir (bax, [15], [16]).

Zaman sıralarının parametrik S. a.-inə geniş ədəbiyyat həsr olunmuşdur (bax, [8], [17] – [21]). Zaman sıralarının S. a.-inin statistik prosedurlarını reallaşdıran alqoritmlərin işlənilməsinə və EHM-da uyğun proqram təminatının qurulmasına da böyük diqqət yetirilmişdir (bax, [23]).

Böyük tətbiqi əhəmiyyəti olan işlər qeyri – requlyar müşahidə olunan zaman sıralarının analizi ilə əlaqədardır. Məs., praktikada əksər hallarda belə vəziyyət yaranır ki, kəsilməz zamanlı $\zeta(t)$ prosesi təsadüfi zaman anlarında müşahidə olunur, yəni $\zeta^*(dt) = \zeta(t)\mu(dt)$ şərtilə təyin olunan $\zeta^*(t)$ prosesi öyrənilir, burada μ, – A düzxəttində hər hansı təsadüfi ölçüdür. Bu halda stasionar $\zeta(t)$ prosesinin spektral sıxlığı prosesin sıxlığı $F_{\mu\mu}$ və nöqtəvi prosesin spektral ölçüsü $\mu(t)$ ilə

$$f_{\zeta^*\zeta^*}(\lambda) = \left(\mathbf{M}_\mu(A)\right)^2 f_{\zeta\zeta}(\lambda) + \int f_{\zeta\zeta}(\lambda-\alpha) F_{\mu\mu}(d\alpha)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Bu yanaşma nöqtəvi proseslər «üzərində» müşahidə olunan proseslərin spektral nəzəriyyəsini qurmağa imkan verir, bu isə nöqtəvi proseslərin nəzəriyyəsi və tətbiqi üçün geniş imkanlar yaradır (bax, [24]).

Hal-hazırda zaman sıralarının analizinin qeyri – xətti nəzəriyyəsi sürətlə inkişaf etməkdədir. [6]-da başlanan bu nəzəriyyə [7], [15]-də davam etdirilərək həm nəzəri, həm də praktiki əhəmiyyət kəsb edir.

Əd.: [1] Shuster A., «Terr. Magn.», 1898, t. 3, S. 13–41; [2] Einstein A., «Arch. Sci. Phys. et Nature», 1941, v. 37, p. 254–56; [3] Daniel F., «J. Royal Statist. Soc. Suppl.», 1946, v. 8, № 27; [4] Bartlett M., «Nature», 1948, v. 161, p. 686–87; [5] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationare time series, N. Y., 1957; [6] Ширяев А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 3, с. 293–313; [7] Brillinger D., Rosenblatt M., в кн.: Spectral analysis of time series, N. Y. – [a. o.], 1967, p. 153–232; [8] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных функций, Л., 1981; [9] Cooley J., Tukey J., «Math. Comput.», 1965, v. 19, p. 297–301; [10] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [11] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [12] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [13] Отнес Р., Эноксон Л., Прикладной анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1982; [14] Koopmans L., The spectral analysis of time series, N. Y. – [a. o.], 1974; [15] Журбенко И. Г., Анализ стационарных и однородных случайных систем, М., 1987; [16] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [17] Parzen E., Time series analysis papers, San Francisco – [a. o.], 1967; [18] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974; [19] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981; [20] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [21] Priestley M., Spectral analysis and time series, v. 1–2, L. – [a. o.], 1981; [22] Джапаридзе К. О., Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов, Тб., 1981; [23] Robinson E., Multi-channel time series analysis with digital computer programs, Houston, 1983; [24] Handbook of statistics, v. 3, Amst., 1983; [25] Time series analysis of irregularly observed data, ed. by E. Parzen, N. Y. – [a. o.], 1984; [26] Rao T. S., Gabr M. M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models, B. – [a. o.], 1984; [27] Tong H., There shold models in non-linear time series analysis, N. Y. – [a. o.], 1983; [28] Handbook of statistics, v. 5, Time series in the time domains, Amst. – [a. o.], 1985; [29] Tukey J., The collected works, v. 1, Time series. 1949–964, Belmont (Calif), 1984.

SPEKTRAL ANALİZATOR(u) stasionar təsadüfi prosesin « **спектральный анализатор** стационарного случайного процесса; **spectral analyser** of a stationary random process», $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ prosesinin spektral analizatoru, –

$$W_u(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t)\, a(t-u)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

şəklində *xətti filtrdir*, burada $a(u)$ – kvadratı ilə inteqrallanan hər hansı funksiyadır (S. a.-un zaman pəncərəsi) və $a(u)$ özünün

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

spektral xarakteristikasını təyin edir. Təsadüfi prosesin S. a.-undan istifadə edərək, təsadüfi funksionallar qurulur ki, bunlar $\zeta(t)$ stasionar prosesinin bu və ya digər spektral xarakteristikalarına ehtimala görə yığılır. Məs., $a(t)$ zaman pəncərələrinin olduqca geniş seçimi halında və spektral $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ semi – invariantlarının bəzi hamarlıq şərtlərində

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{c}{T} \int_0^T W_u(\lambda_1) \dots W_u(\lambda_n)\, du$$

funksionalı $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ funksionalına $\mathbf{M}\left| f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\right|^2$ kvadratik orta yayınma mənasında yığılır, bu şərtlə ki, normalayıcı c konstantı və $\zeta_1 + \dots + \zeta_n = 0$ hipermüstəvisinə aid olan, lakin

$$\zeta_{i_1^{(1)}} + \dots + \zeta_{i_{k_1}^{(1)}} = 0,$$

.....

$$\zeta_{i_1^{(m)}} + \dots + \zeta_{i_{k_m}^{(m)}} = 0,$$

hipermüstəvilərinin kəsişməsinə aid olmayan $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vektoru münasib olaraq seçilsin, burada $m > 1$, $k_1 + \dots + k_m = n$, $i_1^{(1)}, \dots, i_{k_1}^{(1)}, \dots, i_1^{(m)}, \dots, i_{k_m}^{(m)}$, – $1, \dots, n$ indekslərinin ixtiyari yerdəyişməsidir.

Bircins $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ təsadüfi prosesinin S. a. analoji olaraq,

$$W_u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(t)\, a(t-u)\, e^{i(t,\lambda)}\, d\bar{t}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $a(\bar{t})$ – spektral xarakteristikası

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t)\, e^{i(\lambda, t)}\, dt$$

olan, $\mathbb{R}^n$-də kvadratı ilə inteqrallanan funksiyadır.

Əd.: [1] Grenander U., Rozenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, 2 ed., N. Y. – Stockh., [1966]; [2] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982.

SPEKTRAL AYRILIŞ(ı) kovariasion matrisin «**спектральное разложение** ковариационной матрицы; **spectral decomposition** of covariance matrix» – bax, *Kovariasion matris*; spektral ayrılış.

SPEKTRAL AYRILIŞ(ı) təsadüfi funksiyanın «**спектральное разложение** случайной функции; **spectral decomposition / representation** of random function» – 1) $X(t)$ *təsadüfi funksiyasının* ortoqonal ifadəsidir, yəni təsadüfi funksiyanın (o cümlədən, təsadüfi prosesinin və ya təsadüfi meydanın) sıraya və ya inteqrala xüsusi funksiyaların bu və ya digər sistemi üzrə elə ayrılışıdır ki, bu ayrılışın əmsalları qarşılıqlı korrelyar olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Kompleksqiymətli $X(t)$, $t \in T$ təsadüfi funksiyalarının S. a.-larının geniş sinfi

$$X(t) = \int_{\Lambda} \varphi(t; \lambda) Z(d\lambda) \qquad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilinir, burada Λ – «ölçülən altçoxluqların» sistemi (yəni ölçülən fəza) ilə verilən hər hansı çoxluqdur; $\varphi(t; \lambda)$, $t \in T$, $\lambda \in \Lambda$, – λ parametrindən asılı, T -də kompleksqiymətli funksiyaların sistemidir; $\mathrm{Z}(d\lambda)$ – qeyri – korrelyar qiymətlərli, Λ -da təyin olunmuş təsadüfi ölçüdür [odur ki, ixtiyari iki kəsişməyən ölçülən Δ_1 və Δ_2 altçoxluqları üçün $\mathbf{M}\,\mathrm{Z}(\Delta_1)\,\overline{\mathrm{Z}(\Delta_2)} = 0$], (1)-in sağ tərəfindəki inteqral Koşi inteqral cəmlərinin uyğun ardıcıllığının kvadratik orta mənada limiti kimi təyin olunur (bax, [1]) və ya daha ümumi «$\mathrm{Z}(d\lambda)$ ölçüsü üzrə inteqral» kimi anlaşılmalıdır (bax, məs., [2]). Təsadüfi funksiyaların inteqral şəklində ifadəsi haqqında ümumi *Karunen teoreminə* əsasən (bax, [1]), $X(t)$ təsadüfi funksiyasının (1) şəklində S. a.-nın varlığı üçün uyğun $B(t, s) = \mathbf{M}\,X(t)\overline{X(s)}$ korrelyasion funksiyasının

$$B(t, s) = \int_{\Lambda} \varphi(t; \lambda)\ \overline{\varphi(s; \lambda)}\ F(d\lambda)$$

şəklində ifadə oluna bilməsi zəruri və kafidir, burada $F(d\lambda) = \mathbf{M}\left|Z(d\lambda)\right|^2$, – Λ -da mənfi olmayan ölçüdür.

Təsadüfi funksiyaların S. a.-larının ən geniş yayılmış sinfi stasionar təsadüfi $X(t)$ proseslərinin

$$X(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda}\, d\,\mathrm{Z}(\lambda) \qquad (2)$$

Furye – Stiltyes inteqralı şəklində ifadə olunan sinfidir, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlarlı, λ parametrinin təsadüfi funksiyasıdır, Λ, t kəsilməz olduqda $(-\infty, \infty)$ oxu, diskret zamanlı proseslər halında $[-\pi, \pi]$ intervalıdır (t bu halda diskret qiymətlər alır). Belə S. a.-ın varlığı $B(s) = \mathbf{M}\,X(t+s)\overline{X(t)}$ korrelyasion funksiyasının inteqral ifadəsi haqqında ümumi Xinçin teoremindən alınır (bax, *Stasionar təsadüfi proses*); korrelyasion funksiyanın inteqral ifadəsindən aydın olur ki, ixtiyari stasionar təsadüfi prosesə təsadüfi fazalarlı və amplitudlarlı müxtəlif tezliklərin bir-birilə qeyri – korrelyar, harmonik rəqslərinin üst-üstə gəlməsi kimi baxmaq olar. n – ölçülü yastı dalğalarla harmonik rəqslərin əvəzlənməsilə n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında və ya $\mathbb{R}^n$-in tamqiymətli koordinatlarlı nöqtələrinin $\mathbb{Z}^n$ şəbəkəsində verilən bircins təsadüfi meydanlar üçün analoji şəkildə S. a. mümkündür. $\mathbf{M}\,X(\varphi) = m(\varphi)$ və $\mathbf{M}\,X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)} = B(\varphi_1, \varphi_2)$ xarakteristikaları ixtiyari həqiqi a qiymətində $\varphi(t)$ funksiyasının $\varphi(t+a)$ funksiyasına əvəzlənməsinə nəzərən invariant olduğu halda, ümumiləşmiş stasionar proses [sonsuz differensiallanan finit $\varphi(t)$ funksiyalarının fəzası D_∞ -da $X(\varphi)$ xətti funksionalı] halında

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\, d\,Z(\lambda) \qquad (3)$$

olur, burada

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, \varphi(t)\, dt$$

$\varphi(t)$ funksiyasının Furye çevirməsidir. (3) düsturu

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(\lambda)\ \overline{\tilde{\varphi}_2(\lambda)}\ dF(\lambda)$$

ifadəsi əsasında alınır, burada $F(\lambda) = \mathbf{M}\left|Z(\lambda) - Z(-\infty)\right|^2$ – monoton azalmayan elə spektral funksiyadır ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{-p}\, dF(\lambda) < \infty$$

bərabərsizliyi hər hansı mənfi olmayan p qiymətində ödənilir (bax, [3]). Əgər $\varphi(t)$ funksiyalarının fəzası kimi tam analitik funksiyaların hər hansı fəzası götürülərsə, onda spektral funksiyası eksponensial artan $F(\lambda)$ olan ümumiləşmiş stasionar təsadüfi $X(\varphi)$ proseslərini almaq olur (bax, məs., [4]). G qruplarında və bircins S fəzalarında bircins təsadüfi meydanlar üçün də xüsusi şəkilli S. a.-lar vardır; bu fakt, ortoqonal ifadə haqqında Karnunen teoreminə əsasən, G və S çoxluqlarında müsbət müəyyən funksiyaların (və ya nüvələrin – iki dəyişənli funksiyaların) ümumi şəkli haqqında alınan bir sıra nəticələrdən alınır. Məs., ixtiyari lokal kompakt kommutativ G qrupunda bircins $X(g)$ meydanı üçün $X(g)$ meydanının S. a. (1) şəklində ifadə olunur, burada $\varphi(t; \lambda)$ funksiyası rolunu G qrupunun $\chi^{\lambda}(g)$ xarakteri oynayır, inteqrallama oblastı Λ isə $\hat{G}$-nin xarakterlərinin uyğun qrupu olur (bax, [5], [6]). Daha mürəkkəb şəkilli S. a.-lar, geniş şərtlərlə, qeyri – kommutativ müsbət qruplarda bircins meydanlar üçün də vardır (bax, [5], [7]). Bircins $S = \{s\}$ fəzalarında bircins meydanlar halında $X(s)$ meydanının S. a.-na S fəzasının sferik funksiyaları da daxil olunur, $B(s_1, s_2) = \mathbf{M}\,X(s_1)\overline{X(s_2)}$ korrelyasion funksiyanın ifadəsinə isə uyğun zonal sferik funksiyalar daxil olur (bax, [5],

[7], [8]). Məs., üçölçülü $\mathbb{R}^3$ fəzasının S_2 sferasında $X(\theta,\ \varphi)$ ümumi bircins meydanının S. a.

$$X(\theta,\ \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\ \sum_{m=-l}^{l}\ Y_{l,m}(\theta,\ \varphi)Z_{l,m} \qquad (4)$$

şəklində ifadə olunur, burada $Y_{l,m}(\theta,\ \varphi) = e^{-im\varphi}\,P_l^m(\cos\ \theta)$ – adi sferik funksiyalardır, $Z_{l,m}$ təsadüfi funksiyaları isə $\mathbf{M}\,Z_{l,m}\overline{Z}_{j,n} = \delta_{mn}\,f_l$ şərtini ödəyirlər, burada δ_{ij} – Kroneker simvoludur.

$$\mathbf{M}\,X(\theta_1,\ \varphi_1)\,\overline{X(\theta_2,\ \varphi_2)} = B(\theta_{12})$$

korrelyasion funksiyasının (4) düsturuna uyğun ifadəsi

$$B(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\ [(2l+1)/2\ ]\,f_l\,P_l(\cos\ \theta)$$

düsturu şəklindədir, burada θ_{12}, – (θ_1, φ_1) və (θ_2, φ_2) nöqtələri arasında bucaq məsafəsi, P_l – Lejandr çoxhədlileridir. Əgər $(r,\ \varphi)$ polyar koordinatlar, $X(r, \varphi)$ $\mathbb{R}^2$ müstəvisində bircins və izotrop meydan olarsa [belə ki, r_{12}, – $(r_1,\ \varphi_1)$ və $(r_2,\ \varphi_2)$ nöqtələri arasında Evklid məsafəsi olduqda, $\mathbf{M}\,X(r_1, \varphi_1)\overline{X(r_2,\ \varphi_2)} = B(r_{12})\,]$, $X(r, \varphi)$ meydanının S. a.

$$X(r,\ \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\ e^{ik\varphi}\int_0^{\infty}\ J_k(\lambda r)\,dZ_k(\lambda) \qquad (5)$$

şəklində olur, burada $J_k(x)$, – k tərtib Bessel funksiyasıdır. $Z_k(\lambda)$ isə qeyri – korrelyar artımlarlı elə təsadüfi funksiyalardır ki,

$$\mathbf{M}\,Z_k(\Delta_1)\overline{Z_m(\Delta_2)} = \delta_{km}\,F(\Delta_1 \cap \Delta_2)\,,$$

burada

$$\mathrm{Z}_k(\Delta) = \int_{\Delta}\ dZ_k(\lambda)$$

$[0,\ \infty)$ yarımoxunda mənfi olmayan ölçüdür. (5) S. a.-na $B(r)$ korrelyasion funksiyası üçün aşağıdakı ifadə uyğun olur:

$$B(r)\ = \int_0^{\infty}\ J_0(\lambda,\ r)\,dF(\lambda)\,.$$

Bircins meydanların S. a.-na aid digər misallar da vardır (bax, [5] – [8]).

Təsadüfi funksiyaların S. a. yalnız stasionar təsadüfi proseslər və bircins təsadüfi proseslər üçün mövcud deyildir. Məs., $X(t)$, – $a \le t \le b$ intervalında ixtiyari təsadüfi proses, onun korrelyasion funksiyası $B(t,\ s) = \mathbf{M}\,X(t)\overline{X(s)}$ hər iki arqumentinə görə kəsilməz olarsa, onda $X(t)$ prosesinin S. a.

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\ \lambda_k^{1/2}\,\varphi_k(t)\,Z_k \qquad (6)$$

şəklində ifadə olunur, burada $\varphi_k(t),\ \ k = 1,\ 2,\ ...$ və λ_k, $k = 1,\ 2,\ ...$ – nüvəsi $B(t,\ s)$ olan inteqral operatorunun uyğun olaraq, ortonormalanmış məxsusi funksiyaları və məxsusi qiymətləridir, $\mathbf{M}\,Z_j\overline{Z}_k = \delta_{jk}$. Sonlu intervalda verilən təsadüfi $X(t)$ prosesinin (6) şəklində S. a. təsadüfi vektorun baş komponentlərinə ayrılışına kontinual analoqdur, bu ayrılış çoxölçülü statistik analizdə tez-tez istifadə olunur; $X(t)$-nin bu ayrılışı bir sıra müəlliflər tərəfindən alınmışdır və əksər hallarda *Karunen – Loev ayrılışı* adlanır. Bu növ S. a.-lar tətbiqdə, məs., avtomatik idarəetmədə (bax, məs., [9]) və geofizikada (bax, *Empirik ortoqonal funksiyalar*) geniş istifadə olunur.

2) $\zeta(t),\ \ t \in T$ təsadüfi funksiyasının S. a. – $\varphi(t;\ \lambda)$ funksiyalarının hər hansı standart tam sistemi üzrə – (1) şəklində ümumi ayrılış da anlaşılır. Adətən, belə S. a.-a kəsilməz zamanlı $X(t)$ təsadüfi prosesinə və $\varphi(t;\ \lambda) = e^{it\lambda}$ funksiyalarına tətbiqdə baxılır, belə ki, (1) bərabərliyi (2)-yə çevrilir. Bu halda $B(t, s) = \mathbf{M}\,X(t)\overline{X(s)}$ funksiyası

$$B(t,\ s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ e^{i(\lambda t - \mu s)}\ F(d\lambda \times d\mu) \qquad (7)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $F(d\lambda \times d\mu)$, – $(\lambda,\ \mu)$ müstəvisində $F(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mathbf{M}\,Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}$ münasibətilə verilən kompleksqiymətli ölçüdür. Əksinə, $B(t,\ s)$-in (7) şəklində ifadə olunmasından S. a.-ın (2) şəklində ifadəsinin varlığı alınır (bax, məs., [10], [11]). $Z(\lambda)$-nın artımlarının qeyri – korrelyarlığı heç də hökmən ödənilmədiyi hallarda, S. a.-ları (2) şəklində olan təsadüfi proseslər *harmoniklənən təsadüfi proseslər* adlanır; bu halda $F(d\lambda \times d\mu)$ kompleks ölçüsü $X(t)$ prosesinin spektral ölçüsü adlanır, ətraflarının spektral ölçüsü sıfra bərabər olmayan, $(\lambda,\ \mu)$ müstəvisinin nöqtələri çoxluğu $\zeta(t)$ prosesinin spektri adlanır. Stasionar $X(t)$ təsadüfi prosesinin spektri $\lambda = \mu$ düzxəttində topalanmışdır. Hər hansı $T_0 > 0$ və ixtiyari tam m qiymətində

$$\mathbf{M}\,X(t + m\,T_0) = \mathbf{M}\,X(t),$$

$$\mathbf{M}\,X(t + m\,T_0)\,\overline{X(s + m\,T_0)} = \mathbf{M}\,X(t)\,\overline{X(s)}$$

xassəsinə malik olan periodik korrelyar təsadüfi proseslər, geniş şərtlərlə, harmoniklənən təsadüfi proseslər olur; belə proseslərin spektri $\lambda = \mu + 2\pi k/T_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ düzxətlərinin çoxluğunda topalanmışdır.

Əd.: [1] K a r h u n e n K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. – Phys. I», 1947, № 37, p. 3–79; [2] Р о з а н о в Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [3] Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] O n o y a m a T., «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A.», 1959, v. 13, № 2, p. 208–13; [5] Я г л о м А. М., в кн.: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, Л., 1961, т. 1, Л., 1963, с. 250–73; [6] Я г л о м А. М., в кн.: Proceeding of the 4-th Berkeley symposium mathematical statistic and probability, v. 2, Berk. – Los Ang., 1961, p. 593–622; [7] Х е н н а н Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [8] Я д р е н к о М. И., Спек-

тральная теория случайных полей, K., 1980; [9] Пугачев В. С., Теории случайных функции и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., M., 1962; [10] Лоэв M., Теория вероятностей, пер. с англ., M., 1962; [11] Rao M. M., в кн.: Handbook of statistic, v. 5, Amst., 1985, p. 279–310.

SPEKTRAL FUNKSİYA « спектральная функция; spectral function » – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

SPEKTRAL FUNKSİYA evolyusionar **« спектральная функция** эволюционирущая; evolutionary **spectral function »** – bax, *Evolyusionar spektral ifadə.*

SPEKTRAL FUNKSİYA kumulyativ **« спектральная функция** кумулянтная; cumulative **spectral function »** – bax, *Spektral semi – invariant.*

SPEKTRAL FUNKSİYA qarşılıqlı **« спектральная функция** взаимная; cross **spectral function »** – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

SPEKTRAL FUNKSİYA ortalanmış **« спектральная функция** осредненная; averaged **spectral function »** – bax, *Ortalanmış spektral funksiya.*

SPEKTRAL FUNKSİYA(sı) sonsuz bölünən paylanmanın **« спектральная функция** безгранично делимого распределения; **spectral function** of a infinitely divisible distribution **»** – bax, *Sonsuz bölünən paylanma.*

SPEKTRAL FUNKSİYA; statistik qiymət **« спектральная функция;** оценка; estimator of a **spectral function »** – diskret zamanlı *stasionar* $\zeta(t),\ t=0,\pm1,\dots$ *təsadüfi prosesinin* müşahidə olunmuş $\zeta(1),\dots,\zeta(N)$ qiymətlərinin funksiyasıdır və $F(\lambda)$ spektral funksiyasının statistik qiyməti kimi istifadə olunur. $\zeta(t)$, $t=0,\pm1,\dots$ stasionar təsadüfi prosesinin S. f.-nın statistik qiyməti kimi

$$F_N(\lambda)=\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\le 2\pi k/N\le\lambda}\mathbf{I}_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad (1)$$

düsturundan istifadə olunur, burada $\mathbf{I}_N(x)$ – *periodoqramdır.* $F(\lambda)$ S. f.-nın hamarlığı üçün olduqca geniş şərtlərdə və ya $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin qarışma şərtlərində bu statistik qiymət asimptotik meylsiz və tutarlı statistik qiymət olur. (1) statistik qiyməti $\mathbf{J}(\mathbf{A})=\int_{-\pi}^{\pi}A(x)\,dF(x)$ funksionalının statistik qiyməti –

$$F_N^*=\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi<2\pi k/N<\pi}A\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\mathbf{I}_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad (2)$$

statistikasının xüsusi halıdır. Məs., $A(x)$ funksiyası seçim uzunluğu N-dən asılı və λ nöqtəsi ətrafında topalanmış funksiya olarsa, $f(\lambda)$ spektral sıxlığının statistik qiyməti (2) şəklində olur (bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət).

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., M., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., M., 1974.

SPEKTRAL FUNKSİYA(sı) təsadüfi matrisin **« спектральная функция** случайной матрицы; **spectral function** of a random matrix **»** – *təsadüfi matrisin* məxsusi qiymətlərinin $(-\infty,x)$ intervalından olan məxsusi qiymətləri sayına bərabər olan funksiyadır. Ξ_n – elementləri ξ_{ij}, $i\ge j$, $i,j=1,\dots,n$ olan *simmetrik təsadüfi matris*, $F(x)$ –

$$F(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x\ge 0\end{cases}\quad \text{olduqda}$$

münasibətilə təyin olunan funksiya, λ_i, – Ξ_n matrisinin məxsusi qiymətləri olarsa,

$$\mu_n(x)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}F(\lambda_i-x)$$

ifadəsilə verilən $\mu_n(x)$ *simmetrik təsadüfi* Ξ_n *matrisinin* normalanmış S. f. adlanır. $\mu_n(x)$ üçün limit teoremləri ya

$$\int(x-z)^{-1}d\mu_n(x)=n^{-1}\operatorname{tr}\left\|\Xi_n-zI\right\|^{-1}$$

– Stiltyes çevirməsi (z – ixtiyari kompleks ədəd, $\operatorname{Im} z\ne 0$), yaxud

$$\int(1+itx)^{-1}d\mu_n(x)=n^{-1}\operatorname{tr}\left\|I+it\Xi_n\right\|^{-1}$$

çevirməsi vasitəsilə isbat olunur. $\mu_n(x)$ funksiyasının stoxastik kəsilməzlik nöqtələri x_1 və x_2 -də Stiltyes çevirməsi üçün çevirmə düsturu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\mathbf{P}\{\mu_n(x_2)-\mu_n(x_1)<u\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}\left\{\pi^{-1}\int_{x_1}^{x_2}\operatorname{Im}\xi_n(y+i\varepsilon)\,dy<u\right\},$$

burada $\xi_n(z)=\int(x-z)^{-1}d\mu_n(x)$, $\operatorname{Im} z\ne 0$.

$\mu_n(x)\Rightarrow\mu(x)$ münasibəti $\mu_n(x)$ təsadüfi S. f.-larının sonluölçülü paylanmalarının $\mu(x)$ təsadüfi S. f.-nın sonluölçülü paylanmalarına zəif yığılmasını; $\mu_n(x)\simeq\mu(x)$ isə $\mu_n(x)$ təsadüfi S. f.-larının sonluölçülü paylanmalarının $\mu(x)$ təsadüfi S. f.-nın sonluölçülü paylanmalarına, $\mu(x)$-in stoxastik kəsilməzlik nöqtələrində zəif yığılmasını ifadə etmiş olsun.

Əgər $\mu_n(x)$ normalanmış S. f.-lar ardıcıllığı və $\underline{\lim}_{n\to-\infty}\ \sup_n\mathbf{M}\mu_n(h)=0$, $\mu(x)$ isə hər hansı məhdud variasiyalı azalmayan təsadüfi funksiya olarsa, onda

$$\xi_n(z)\Rightarrow\xi(z),\ \operatorname{Im} z\ne 0,\ \xi(z)=\int(x-z)^{-1}d\mu(x)$$

şərtlərinin ödənilməsi $\mu_n(x) \simeq \mu(x)$ zəif yığılması üçün zəruri və kafidir.

Əgər n-in hər bir qiymətində $(\xi_{i1}, \dots, \xi_{in})$, $i = 1, \dots, n$ vektorları asılı olmayan vektorlar, ξ_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots$ – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər olarsa,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \mathbf{M} \operatorname{tr} \| I + it\, \Xi_n \|^{-1} = m(t)$$

limiti mövcuddursa və $m(t)$ funksiyası sıfırda kəsilməz olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(t) = \nu(x)$$

münasibəti təsadüfi olmayan $\nu(x)$ S. f.-nın hər bir kəsilməzlik nöqtəsində sanki yəqin ödənilir; $\nu(x)$-in Stiltyes çevirməsi

$$\int (1 + itx)^{-1} d\nu(x) = m(t)$$

funksiyasına bərabərdir.

Əgər n-in hər bir qiymətində $H_n = \| \xi_{sl} + i\eta_{sl} \|$ düzbucaqlı matrisinin vektor-sütunları asılı olmayan vektorlar olarsa, ξ_{ij}, η_{ij}, $i, j, n = 1, 2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri eyni ehtimal fəzasında verilərsə ($s = 1, \dots, m_n$, $l = 1, \dots, n$, n – sütunların sayı, m_n – sətirlərin sayıdır),

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \mathbf{M} \operatorname{tr} \| I + it\, H_n\, H_n^* \|^{-1} = a(t)$$

limiti mövcuddursa (burada $a(t)$ – sıfırda kəsilməz funksiya, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} m_n^2$ – yığılan sıradır), onda

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(x) = \alpha(x)$$

münasibəti təsadüfi olmayan $\alpha(x)$ S. f.-nın hər bir kəsilməzlik nöqtəsində sanki yəqin ödənilir və bu halda $\alpha(x)$ funksiyasının Stiltyes çevirməsi

$$\int \frac{d\alpha(x)}{1 + itx} = a(t)$$

inteqralına bərabərdir.

Əgər $\Xi_n = \| \xi_{ij} \|$ təsadüfi matrisinin təsadüfi elementləri ξ_{ij}, $i \geq j$, $i, j = 1, \dots, n$, n-in hər bir qiymətində asılı olmayan və paylanma sıxlıqları p-yə bərabər təsadüfi elementlər olarsa,

$$\lim_{n\to-\infty} \sup_n \mathbf{M} \mu_n(h) = 0$$

münasibəti ödənilərsə, onda hər bir x üçün

$$p \lim_{n\to\infty} (\mu_n(x) - \mathbf{M} \mu_n(x)) = 0$$

münasibəti ödənilir, burada

$$\mathbf{M} \mu_n(x) =$$

$$= n^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \det \| \Xi^{s-1} - Ix \| \det \| \Xi^s - Ix \|^{-1} < x \right\},$$

$$\Xi^s = \| \xi_{ij} \|_{i,j=1}^{s}, \quad \det \Xi^0 = 1.$$

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980; [2] П а с т у р Л. А., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 1, с. 1–64.

SPEKTRAL MOMENT « спектральный момент; spectral moment » – bax, *Spektral analiz*(i) t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r və m e y d a n l a r ı n, *Spektral semi – invariant.*

SPEKTRAL MOMENT ÖLÇÜSÜ « спектральная моментная мера; spectral moment measure » – bax, *Spektral analiz*(i) t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r və m e y d a n l a r ı n.

SPEKTRAL NƏZƏRİYYƏLƏR(i) q e y r i – s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n **« спектральные теории** н е с т а ц и о н а р н ы х с л у ч а й н ы х п р о ц е с с о в; **spectral theories** o f n o n s t a t i o n a r y p r o c e s s **»** – təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin elə bölmələridir ki, qeyri – stasionar proseslərin bu və ya digər siniflərinin öyrənilməsi – proseslərin və onların korrelyasion funksiyalarının spektral ayrılışına və ya bu proseslərin elə spektral xarakteristikalarından istifadəyə əsaslandırılır ki, bu xarakteristikalar, müəyyən dərəcədə, stasionar proseslərin spektral ölçü və sıxlıqlarına oxşar olsun. Təsadüfi əmsallarlı funksiyaların xüsusi sistemləri üzrə stoxastik inteqrallar və sıralar şəklində spektral ayrılışı mümkün olan qeyri – stasionar təsadüfi proseslərin S. n.-nə, məs., aşağıdakı nəzəriyyələr daxildir.

1) H a r m o n i k l ə n ə n t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r nəzəriyyəsi – $T = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ və ya $T = \mathbb{Z} = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ olduqda

$$\zeta(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} Z(d\lambda), \quad t \in T \tag{1}$$

şəklində ifadə olunan $\zeta(t)$, $t \in T$ təsadüfi proseslərinin nəzəriyyəsidir, burada $T = \mathbb{R}$ olduqda, $\Lambda = \mathbb{R}$ və $T = \mathbb{Z}$ olduqda $\Lambda = [-\pi, \pi]$, Z isə $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ Hilbert fəzasından qiymətlər alan, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında ikinci tərtib momentləri olan kompleksqiymətli kəmiyyətlərin Λ-da sonlu semi – variasiyası olan, vektorqiymətli ölçüdür. Bu halda $\Delta, \Delta' \subset \Lambda$ Borel çoxluqlarının $F(\Delta, \Delta') = \mathbf{M} Z(\Delta) \overline{Z(\Delta')}$ additiv ölçüsünün də ($\zeta(t)$ prosesinin s p e k t r a l ö l ç ü s ü adlanan) sonlu semi – variasiyası vardır və

$$\mathbf{M} \zeta(t) \overline{\zeta(s)} = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} e^{i(\lambda t - \mu s)} F(d\lambda, d\mu).$$

Harmoniklənən proseslərin altsinfi, geniş mənada sanki stasionar proseslərdir, yəni elə $\zeta(t)$, $t \in T$, $\mathbf{M} |\zeta(t)|^2 < \infty$ [$T = \mathbb{R}$ olduqda $B_\zeta(t, s) = \mathbf{M} \zeta(t) \overline{\zeta(s)}$ funksiyasının kəsilməz olduğu fərz olunur] proseslərdir ki, bunlar üçün elə $K_\zeta \geq 1$ vardır ki, bütün natural m ədədləri və $c_1, c_2, \dots, c_m$ və $s, t_1, t_2, \dots, t_m \in T$ ədədləri üçün

$$\mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^{m} c_j \zeta(t_j + s) \right|^2 \leq K_\zeta \mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^{m} c_j \zeta(t_j) \right|^2$$

münasibəti ödənilir.

2) Hər hansı n tərtib stasionar artımlarlı təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi, yəni elə qeyri – stasionar $\zeta(t),\ t\in\mathbb{R}$ proseslərinin ki, bunların n-ci tərtib fərqi

$$\Delta_\tau^{(n)}\zeta(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\,\zeta(t-k\tau)$$

– τ parametrindən asılı, t arqumentinin geniş mənada stasionar prosesidir (bax, [3], [4]). Bu halda

$$\Delta_\tau^{(n)}\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}(1-e^{-i\lambda\tau})^n\,\frac{(1+i\lambda)^n}{(i\lambda)^n}\,Z(d\lambda)$$

düsturu doğrudur, burada Z – ortoqonal təsadüfi ölçü, $\zeta(t)$ prosesinin özü isə $\Delta_\tau^{(n)}\zeta(\tau)$ üzrə təsadüfi əmsallarlı, $(n-1)$ tərtib çoxhədli dəqiqliyi ilə təyin olunur.

3) Kvadratik orta mənada kəsilməz təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi. Bu nəzəriyyədə elə $\zeta(t)$, $a\le t\le b$ təsadüfi proseslərinə baxılır ki, bunlar üçün

$$\zeta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)Z_k$$

Karunen – Loev ayrılışı mümkün olsun, burada $\varphi_k,\ k=1,2,\dots,$ – λ_k məxsusi ədədlərinə uyğun, nüvəsi $B_\zeta(t,\ s)$ olan inteqral operatorun məxsusi funksiyaları, Z_k, – $\mathbf{M}\left|Z_k\right|^2=\lambda_k$ şərtini ödəyən ortoqonal təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır (bax, [5]).

4) Qeyri – stasionar xətti ifadə olunan təsadüfi proseslərin bir sıra siniflərinin nəzəriyyəsi. Bu proseslər aşağıdakı kimi təyin olunur. $\zeta(t),\ t\in T$ qeyri – stasionar proses, $T=[0,\infty)$ və ya $T=\mathbb{R}$, $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2<\infty$, A – prosesin qiymətlərinin kvadratik orta mənada qapalı xətti örtüyü kimi təyin olunan H_ζ Hilbert fəzasında xətti operator olsun. Onda

$$\zeta(t)=e^{itA}\zeta(0),\qquad t\in T \tag{2}$$

şəklində ifadə olunan proseslər qeyri – stasionar xətti ifadə olunan təsadüfi proseslərdir. A operatorunun spektri (2) prosesinin spektri adlanır,

$$r_\zeta=\dim\left[\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)H_\zeta\right]$$

kəmiyyətinə prosesin *qeyri – stasionarlıq ranqı* deyilir. Bütün $Y\in H_\zeta$ üçün $\operatorname{Im}\{\mathbf{M}[(AY)\overline{Y}]\}\ge 0$ şərtini ödəyən, dissipativ operatoru A olan, (2) şəklində proseslərin bəzi siniflərinin spektral ayrılışları məlumdur (bax, [6], [7]).

5) Harmoniklənən α – dayanıqlı proseslər nəzəriyyəsi. Bu proseslər (1) bərabərliyi ilə təyin olunur və burada Z, – Λ-nın kəsişməyən Borel çoxluqlarında qiymətləri asılı olmayan elə kompleksqiymətli təsadüfi ölçüdür ki, onun sonluölçülü paylanmaları çoxölçülü simmetrik α – dayanıqlı paylanmalardır; $1<\alpha\le 2$ (bax, [8], [9]). Belə proseslər öyrənilərkən, spesifik korrelyasion nəzəriyyə – kompleksqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər anlayışlarının birlikdə baxılmasına əsaslanan nəzəriyyə istifadə olunur.

6) Ossilyar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi.

$$\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}A(t,\ \lambda)\ Z(d\lambda)$$

şəklində evolyusionar spektral ayrılışı mümkün olan təsadüfi proseslər nəzəriyyəsidir, burada Z – ortoqonal təsadüfi ölçüdür, $\mathbf{M}\left|Z(d\lambda)\right|^2=G(d\lambda),\ G(\mathbb{R})<\infty$ və

$$A(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta t}\,d_\theta H_\lambda(\theta),$$

$\left|d_\theta H_\lambda(\theta)\right|$-nın hər bir λ üçün $\theta=0$ nöqtəsində maksimumu vardır (bax, [10], [11]). $\zeta(t)$ prosesinin $\{e^{i\lambda t}A(t,\lambda)\}$ funksiyalar ailəsinə nəzərən evolyusionar spektral ölçüsü $F_t(d\lambda)$

$$F_t(d\lambda)=\left|A(t,\lambda)\right|^2G(d\lambda)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

7) İkiqat stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi. Bunlar elə $\zeta(t),\ t\in T$ [$T=[0,\infty)$ və ya $T=\{0,1,2,\dots\}$] proseslərdir ki, bütün $s,t\in T$ qiymətlərində

$$B_\zeta(s)=\mathbf{M}\zeta(t\oplus s)\,\overline{\zeta(t)}$$

funksiyası t-dən asılı deyildir, $\oplus$ simvolu T-dən olan ədədlərin ikiqat toplanması əməlidir (bax, [12], [13]). Məs., əgər diskret zamanlı $\zeta(t)$ prosesi üçün hər bir ikilik rasional $\rho\in(0,\ 1)$ qiymətində

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}\sum_{s=0}^{2n-1}B_\zeta(s)\ \psi_s\ (\rho-0)\ =\ 0$$

münasibəti ödənilərsə (ψ_s Uolş funksiyalarıdır), onda

$$\zeta(t)=\int_0^1\psi_t(\lambda)Z(d\lambda)$$

ayrılışı doğrudur, burada Z – ortoqonal təsadüfi ölçüdür.

8) Normal tip proseslər nəzəriyyəsi. Bu tip proseslər üçün $\zeta(t),\ t\ge 0$ təsadüfi prosesinin yerinidəyişmə operatorları V_s H_ζ-də normal operatorlardır və $V_s\zeta(t)=$ $=\zeta(t+s)$ bərabərliyilə təyin olunur və $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2<\infty$ (bax, [14], [15]). Məs., kvadratik orta mənada kəsilməz, normal tip $\zeta(t),\ t\in[0,\infty)$ prosesi üçün

$$\zeta(t)=\int_\Gamma e^{\lambda t}Z(d\lambda)$$

$$B_\zeta(t,\ s)=\int_\Gamma e^{\lambda t+\overline{\lambda}s}F(d\lambda)$$

ayrılışları doğrudur, burada Z – kompleks müstəvidə Borel çoxluqlarında daşıyıcısı Γ olan ortoqonal təsadüfi ölçü və $F(d\lambda)=\mathbf{M}\left|Z(d\lambda)\right|^2$, – $\zeta(t)$ prosesinin spektral ölçüsüdür.

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin tətbiqlərində qeyri – stasionar $\zeta(t),\ t\in\mathbb{R},\ \mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2<\infty$ təsadüfi prosesinin ümumiləşmiş spektral sıxlığı – $\psi_\zeta(\lambda,\mu)$, tezlik – zaman spektral sıxlığı – $\varphi_\zeta(t,\lambda)$, ani spektral sıxlığı – $\rho_\zeta(t,\lambda)$, fiziki spektral sıxlığı – $S_\zeta(t,\lambda,\omega)$ kimi spektral xarakteristikalar da istifadə olunur, bunlar uyğun olaraq, aşağıdakı bərabərliklərlə təyin edilir:

$$\psi_\zeta(\lambda,\mu)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(\tau,s)\,e^{i(\lambda\tau-\mu s)}\,d\tau\,ds,$$

$$\varphi_\zeta(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_\zeta(t-\tau/2,\ t+\tau/2)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau,$$

$$\rho_\zeta(t,\lambda)=\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{M}\left|\int\limits_{-\infty}^{t}\zeta(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau\right|^2,$$

$$S_\zeta(t,\lambda,w)=\frac{1}{2\pi}\,\mathbf{M}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}w(t-\tau)\,\zeta(\tau)\,e^{-i\lambda\tau}\,d\tau\right|^2,\quad(3)$$

bu şərtlə ki, bu bərabərliklərin sağ tərəflərindəki ifadələr vardır [(3)-də fərz olunur ki, $w(t),\ t\in\mathbb{R}$ elə həqiqi funksiyadır ki, $w(0)>0$ və $\int\limits_{-\infty}^{\infty}w^2(t)\,dt=1$ şərtlərini ödəyir]; digər spektral xarakteristikalardan da istifadə olunur (bax, məs., [11], [16] – [21]).

Ortalanmış korrelyasion funksiyası –

$$\widetilde{B}_\zeta(s)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}B_\zeta(t+s,\ t)\,dt,\quad s\in\mathbb{R}$$

kəsilməz olan $\zeta(t),\ t\in\mathbb{R},\ \mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^2<\infty$ təsadüfi prosesləri üçün $\widetilde{B}_\zeta(s)$ ilə

$$\widetilde{B}_\zeta(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}\,d\widetilde{F}(\lambda)$$

münasibətilə bağlı *ortalanmış spektral funksiya* $\widetilde{F}(\lambda)$ spektral xarakteristikadır.

Əd.: [1] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [2] Miamee A. G., Salehi H., «Indiana Univ. Math. J.», 1978, v. 27, № 1, p. 37–50; [3] Яглом А. М., «Матем. сб.», 1955, т. 37, № 1, с. 141–96; [4] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1955, т. 19, с. 319–44; [5] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [6] Лившиц М. С., Янцевич А. А., Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Хар., 1971; [7] Кирчев К., «Сердика. Бълг. Мат. списания», 1975, т. 1, № 2, с. 199–217; [8] Weron A., «Lect. Notes in Math.», 1984, v. 1080, p. 306–64; [9] Pourahmadi M., «SIAM J.Appl. Math.», 1984, v. 44, № 5, p. 1023–30; [10] Priestley M. B., «J. Roy. Statist. Soc., ser. B», 1965, v. 27, № 2, p. 204–37; [11] Priestley M. B., Spectral analysis and time series, v. 1–2, L., 1981; [12] Nagai T., «Bull. Math. Statist.», 1976, v. 17, p. 65–73; [13] Engels W., Splettstosser W., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1982, v. IT28, № 4, p. 612–19; [14] Getoor R., «Duke Math. J.», 1956, v. 23, № 1, p. 175–87; [15] Tjøstheim D., «Stoch. Proc. and Appl.», 1980, v. 10, № 2, p. 145–60; [16] Silverman R. A., «IRE Trans. Inform. Theory», 1957, v. IT 3, № 3, p. 182–87; [17] Loynes R. M., «J. Roy. Statist. Soc., ser. B», 1968, v. 30, № 1, p. 1–30; [18] Бендат Д., Пирсол А., Измерение и анализ случайных процессов, пер. с англ., М., 1974; [19] Bendat J. S., Piersol A. G., Random data. Analysis and measurement procedures, 2 ed., N. Y. – [a. o.], 1986; [20] Харкевич А. А., Спектры и анализ, 4 изд., М., 1962; [21] Рытов С. М., Случайные процессы, 2 изд., М., 1976 (Введение в статистическую радиофизику, ч.1).

SPEKTRAL ÖLÇÜ « спектральная мера; spectral measure » – bax, *Martin sərhədi*, *Spektral ayrılış*.

SPEKTRAL PƏNCƏRƏ(si) **« спектральное окно; spectral window »** spektral sıxlığın statistik qiymətinin – stasionar $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin *spektral sıxlığı* $f(\lambda)$-nın prosesin müşahidələri üzrə qurulmuş *periodoqramın* hamarlanması vasitəsilə qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində istifadə olunan, çəki funksiyası təyin edən dairəvi λ tezliyinin funksiyasıdır. Adətən, spektral sıxlığın λ_0 nöqtəsində statistik qiyməti kimi λ nöqtəsində periodoqramın $B_N A(B_N(\lambda-\lambda_0))$ tipli ifadəsinə hasilinin $d\lambda$ üzrə inteqralı götürülür, burada $A(\lambda)$, – $\lambda=0$ qiymətində ən böyük qiymətini alan elə qeyd olunmuş tezlik funksiyasıdır ki, onun bütün λ qiymətləri üzrə inteqralı vahidə bərabərdir [məhz bu $A(\lambda)$ funksiyası spektral pəncərə adlanır, bununla yanaşı, bu termin $B_N A(B_N(\lambda))$ funksiyasına da şamil olunur], B_n^{-1} – seçimin ölçüsü N-dən asılıdır [yəni $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyasının müşahidə olunan parçasının uzunluğundan] və $N\to\infty$ olduqda sıfra yaxınlaşan (N^{-1}-dən asta sürətlə) S. p.-nin enidir. Diskret zaman halında, $-\pi\le\lambda<\pi$ S. p.-nin Furye əmsalları olduqda, S. p.-nin Furye çevirməsi spektral sıxlığın statistik qiymətinin korrelyasion pəncərəsi adlanır; t-nin diskret və ya kəsilməz olmasından asılı olaraq, korrelyasion pəncərə uyğun olaraq diskret və ya kəsilməz arqumentin çəki funksiyasını təyin edir və bu çəki funksiyasını isə seçim üzrə qurulmuş empirik avtokorrelyasiyalara vurmaq lazımdır ki, alınan hasilin Furye çevirməsi spektral sıxlığın tövsiyyə olunan statistik qiyməti ilə üst-üstə düşsün.

Bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

Əd: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1–2, М., 1971–72; [3] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [4] Марпл С. Л., Цифровой спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., М., 1990.

SPEKTRAL SEMİ – İNVARİANT « спектральный семиинвариант; spectral semiinvariant » – təsadüfi proseslər və meydanların *spektral analizində* öyrənilən, *təsadüfi prosesin* xarakteristikalarından biridir. $\zeta(t)$, $-\infty<t<\infty$, – $\mathbf{M}\left|\zeta(t)\right|^n\le C<\infty$ şərtini ödəyən həqiqi stasionar proses olsun. Bu prosesin semi – invariantı –

$$S^{(n)}(t_1,\dots,t_n)=$$

$$= \frac{i^{-n}\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \ln \mathbf{M}\, e^{i(u_1\zeta(t_1)+\dots+u_n\zeta(t_n))}\Big|_{u_1=\dots=u_n} = 0$$

$M^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{M}\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ momentlərilə

$$S^{(n)}(I) = \sum (-1)^{q-1}(q-1)! \prod_{p=1}^{q} M^{(p)}(I_p),$$

$$M^{(n)}(I) = \sum \prod_{p=1}^{q} S^{(p)}(I_p),$$

münasibətlərilə bağlıdırlar, burada $I = (t_1, \dots, t_n)$, $I_p = (t_{i_1}, \dots t_{i_p}) \subseteq (t_1, \dots, t_n) = I$ və cəmlənmə I çoxluğunun bir-birilə kəsişməyən I_p altçoxluqlarına bölgüsü üzrə aparılır. Əgər bütün $1 \le k \le n$ üçün $\mathbb{R}^k$ fəzasında məhdud variasiyalı elə $M^{(k)}(\Delta)$ ölçüsü varsa ki, bütün $t_1, \dots, t_k$ üçün

$$M^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t_1\lambda_1+\dots+t_k\lambda_k)} M^{(k)}(d\lambda_1, \dots, d\lambda_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t,\lambda)} M^{(k)}(d\lambda)$$

olsun, onda $\zeta(t) \in \Phi^{(n)}$. $M^{(k)}(\Delta)$ ölçüsü $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral momenti adlanır. Bu ölçünün sıxlığını yalnız ümumiləşmiş funksiya kimi təyin etmək olar.

Əgər Borel çoxluqları sistemində təyin olunmuş $F^{(n)}$ ölçüsü üçün

$$S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,\lambda)} F^{(n)}(d\lambda)$$

inteqralı bütün $t_1, \dots, t_n$ üçün mövcud olarsa, $F^{(n)}$ ölçüsü spektral semi–invariant (polispektr, kumulyativ spektr) adlanır. Əgər $\zeta(t) \in \Phi^{(n)}$ olarsa, $F^{(n)}$ ölçüsü vardır və məhdud variasiyaya malikdir. $\zeta(t)$ stasionar təsadüfi proses olarsa, $S^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ semi – invariantları yerinidəyişmələrə görə invariantdırlar, yəni

$$S^{(n)}(t_1+\tau, \dots, t_n+\tau) = S^{(n)}(t_1, \dots, t_n),$$

$F^{(n)}$ və $M^{(n)}$ spektral ölçüləri isə $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ çoxobrazlısında topalanmışlar. Əgər $F^{(n)}$ ölçüsü bu çoxobrazlıda Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz olarsa, onda bütün $t_1, \dots, t_n$ üçün

$$S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t_k\right) \delta(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\, f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, d\lambda$$

bərabərliyi ilə təyin olunan, n-ci tərtib semiinvariant spektral sıxlıq (polispektral sıxlıq, kumulyativ spektral sıxlıq) – $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vardır, burada $\delta(x)$ delta – funksiyadır,

$$f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum{}^{*} S^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t_k\right\},$$

$\sum^{*}$-da cəmlənmə $t_1, \dots, t_n$ üzrə aparılır, $\min_i t_i = 0$.

$\zeta(t)$ prosesinin olduqca geniş qarışma şərtlərində $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ semi – invariant spektral sıxlığı $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ çoxobrazlısında özünün bütün dəyişmələrinin kəsilməz məhdud funksiyasıdır.

Əgər $\zeta(t)$ prosesinin ilk pn $(p > 2)$ momentləri vardırsa və Rozenblatt qarışma əmsalı

$$\alpha(r) = \sup_{x,\ A \in \mathfrak{A}_{-\infty}^{t},\ B \in \mathfrak{A}_{t+r}^{\infty}} \left| P(AB) - P(A)P(B) \right|$$

bərabərliyi ilə ifadə olunarsa, $f_n(\cdot)$-in qarışıq törəməsi məhduddur, yəni

$$\left| \frac{\partial^s f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{\partial \lambda_1^{s_1} \dots \partial \lambda_n^{s_n}} \right| \le C, \quad s_1 + \dots + s_n = s, \quad s_i \ge 0,$$

burada $\mathfrak{A}_a^b$, – $\zeta(t)$, $t \in [a, b]$ prosesinin doğurduğu σ – cəbri

$$\sum_{r=0}^{\infty} r^{n+s-1} \alpha^{(p-2)/p}(r) < \infty$$

şərtini ödəyir.

$$M^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \int_{\Pi^n} g_n(\overline{\lambda}) \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k t_k\right) \delta(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\, d\overline{\lambda}$$

münasibətindən formal təyin olunan, $M^{(n)}(\Delta)$ ölçüsünün moment spektral sıxlığı $g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ çoxobrazlısında ümumiləşmiş funksiyadır və $F^{(n)}(\Delta)$ ölçüsünün semi – invariant spektral sıxlığı ilə

$$f(\overline{\lambda})\delta(|\overline{\lambda}|) = \sum_{p} (-1)^{k-1}(k-1)!\, g(\overline{\lambda}_1)\, \delta(|\overline{\lambda}_1|) \dots g(\overline{\lambda}_p)\, \delta(|\overline{\lambda}_p|),$$

$$g(\overline{\lambda})\, \delta(\left|\overline{\lambda}\right|) = \sum_{p} f(\overline{\lambda}_1)\, \delta(|\overline{\lambda}_1|) \dots f(\overline{\lambda}_p)\delta(|\overline{\lambda}_p|)$$

münasibətlərilə bağlıdır, burada cəmlənmə $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ çoxluğunun nizamlanmamış, kəsişməyən $\overline{\lambda}_p = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p})$, $1 \le i_k \le n$, $k = 1, \dots, p$ toplularının bütün nizamlanmamış bölgüləri üzrə aparılır; $\left|\overline{\lambda}_p\right| = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p}$. $n = 2$ olduqda, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ düzxəttində $f_2(\lambda_1, \lambda_2) = g_2(\lambda_1, \lambda_2)$ moment sıxlığı ilə üst-üstə düşən 2-ci tərtib spektral semi – invariant sıxlıq, sadəcə, 2-ci tərtib spektral sıxlıq adlanır.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ikiölçülü müstəvidə 3-cü tərtib spektral semi – invariant sıxlıq bispektral sıxlıq, bu sıxlığın uyğun ölçüsü bispektral funksiya adlanır.

Diskret zaman halında $\mathbb{R}^n$ fəzası kimi aşağıdakı bütün düsturlarda n – ölçülü $-\pi \le \lambda_i \le \pi$, $i = 1, \dots, n$ kubu anlaşılmalıdır, δ – funksiya isə Dirak «təpəsi» $\delta^*(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + 2\pi k)$ ilə əvəz olunmalıdır.

$\zeta(t)$ Qauss prosesi olduqda 2-ci tərtibdən yüksək bütün S. s.-lar sıfra bərabərdirlər.

Semi – invariant spektral $\hat{f}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sıxlığının asimptotik meylsiz və tutarlı statistik qiymətini $\left|\overline{\lambda}\right| = 0$ müstəvisinin $(\lambda_j - 2\pi k_j / N)$, $j = 1, \dots, n$ nöqtələrində hesablanmış $I_N(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ periodoqramının qiymətlərinin ortalanması ilə almaq olar, bu şərtlə ki, qeyd olunan nöqtələrin heç biri $\left|\overline{\lambda}_p\right| = 0$ müstəvisinin dim. – ölçüsündən kiçik dim. – ölçülü müstəvidən olmamalıdır. Ortalama $\overline{\lambda}$ nöqtəsində toparlanan çəki funksiyası $\Phi_N(\overline{x} - \overline{\lambda})$ vasitəsilə aparılır (2-ci tərtib spektral sıxlığın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsində olduğu kimi). $\bar{f}_N(\overline{\lambda})$ semi – invariant sıxlığının statistik qiymətini zaman sırasının M sayda yerinidəyişmiş parçalarda $(N = MT)$ hesablanmış $I_M(\overline{\lambda})$ periodoqramının qiymətlərinin ortalanması ilə almaq olur.

n -ci tərtibə qədər və n -ci tərtib də daxil olmaqla semi – invariant spektral sıxlıqlar differensiallanan olarsa,

$$\mathbf{M}\,\overline{f}_N(\overline{\lambda}) = \left(\frac{M}{2\pi}\right)^{m-1} \sum \prod_{k=1}^{m} f(\overline{\lambda}_k) + O(M^{m-2} \ln^{n-1} M)$$

düsturu doğrudur, burada cəmlənmə $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_1 + \dots + \overline{\lambda}_m$ şəklində bütün $\overline{\lambda}$ bölgüləri üzrə aparılır; $\overline{\lambda}_k$ vektorlarının hər biri üçün onun sıfırdan fərqli koordinantlarının cəmi $\sum_j \lambda_j^{(k)} = 0$. Belə minimal m ədədi $\overline{\lambda}$ vektorunun xarakteristikası adlanır. $\overline{f}_N(\overline{\lambda})$ statistikası yalnız $m = 1$ halında asimptotik meylsiz statistika olur. $n = 2$ dim. – ölçülü S. s. üçün bu şərt avtomatik ödənilir. $n > 2$ olduqda asimptotik meylsizlik yalnız əsas $\sum_j \zeta_j = 0$ hipermüstəvisinə aid olan, bu dim. – ölçüdən kiçik dim. – ölçülü müstəvilərə aid olmayan $\overline{\lambda}$ nöqtələri üçün ödənilir. [3] və [4]-də arqumentin bütün qiymətlərində tutarlı statistik qiymətlər alınmışdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964; [3] Журвенко И. Г., Анализ стационарных и случайных систем, М., 1987; [4] Time series in the frequency domain, Amst., – [a. o.], 1983; [5] Subba Rao T., Gabr M., An introduction to bispectral analysis and bilinear time. Series models, N. Y. – [a. o.], 1984.

SPEKTRAL SIXLIQ kumulyativ « **спектральная плотность** кумулятивная; cumulative **spectral density** » – bax, *Spektral semi – invariant.*

SPEKTRAL SIXLIQ qarşılıqlı « **спектральная плотность** взаимная; cross **spectral density** » – bax, *Spektral sıxlıq*(ğı) stasionar təsadüfi prosesin.

SPEKTRAL SIXLIQ; qeyri – parametrik statistik qiymət « **спектральная плотность;** непараметрическая оценка; non-parametric estimator of **spectral density** » – diskret zamanlı *stasionar təsadüfi prosesin* müşahidə qiymətləri – $X(1), \dots, X(N)$ toplusunun funksiyasıdır, prosesin spektral sıxlığı $f(\lambda)$-nın statistik qiyməti kimi istifadə olunur.

$X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ stasionar prosesinin S. s. $f(\lambda)$-nın statistik qiyməti kimi ölçü vahidi baxımından $X(1), \dots, X(N)$ seçimi üzrə qurulmuş

$$\sum_{s,t=1}^{N} b_{s,t}^{(N)} X(s) X(t)$$

kvadratik formalarından istifadə olunur, burada $b_{s,t}^{(N)}$ – ixtiyari kompleks əmsallardır. $N \to \infty$ olduqda stasionar prosesin S. s.-nın ilk iki momenti asimptotik olaraq, $b_{s_1,t_1}^{(N)} = b_{s_2,t_2}^{(N)}$, $s_1 - t_1 = s_2 - t_2$ şərtləri ödənilən kvadratik formaların altsiniflərinə baxıldıqda, ümumiyyətlə, pisləşmir və bu halda $f(\lambda)$ üçün aşağıdakı şəkildə statistik qiymətlər alınır:

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-N+1}^{N-1} e^{it\lambda} b^{(N)}(t) B_N(t),$$

burada

$$B_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-|t|} X(s)\, X(s + |t|)$$

– $X(t)$ stasionar prosesinin kovariasion funksiyasının seçimi statistik qiymətidir. $\hat{f}_N(\lambda)$ statistik qiymətini

$$\hat{f}_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x)\, I_N(x + \lambda)\, dx \qquad (1)$$

düsturu ilə də ifadə etmək olar, burada $I_N(x)$ – *periodoqram*, $\Phi_N(x)$ – hər hansı kəsilməz cüt funksiya olub, özünün Furye əmsalları ilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$b_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x)\, e^{itx}\, dt,\ t = -N+1, \dots, N-1.$$

Adətən, aşağıdakı şəkilli $\Phi_N(x)$ funksiyalarına baxılır:

$$\Phi_N(x) = A_N\, \Phi(A_N x), \quad A_N \to \infty$$

və $\Phi(x)$ funksiyası spektral pəncərə adlandırılır və bu halda fərz olunur ki, $\Phi(x)$, – $(-\infty, \infty)$-da elə hər hansı kəsilməz funksiyadır ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, dx = 1,$$

$A_N \to 0$ isə elə ardıcıllıqdır ki, $A_N N^{-1} \to 0$ münasibətini ödəyir. Analoji olaraq,

$$b_N(t) = K(A_N^{-1} t)$$

şəklində $b_N(t)$ əmsallarına baxılır və $K(x)$ funksiyası kovariasion pəncərə, $b_N(t)$ funksiyası – gecikmə pəncərəsi adlanır. $K(x)$ və $\Phi(x)$ funksiyaları bir-birilə Furye çevirməsi ilə əlaqəlidirlər:

$$K(t) = \int \Phi(x)\, e^{itx}\, dx,$$

bunlar A_N əmsalları ilə birlikdə (1) statistikasını tamamilə təyin edirlər; bu statistika əksər hallarda periodoqram və ya Qrenander–Rozenblatt tip statistika adlandırılır.

Praktikada, adətən, müəyyən formada kovariasion və spektral pəncərələr istifadə olunur:

Bartlett statistik qiyməti–

$$\Phi_B = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2,$$

$$K_B = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$$

Parzen statistik qiyməti–

$$\Phi_P(x) = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\sin x/4}{x/4}\right)^4,$$

$$K_P(t) = \begin{cases} 1 - 6t + 6|t|^3, & |t| \le 1/2, \\ 2\left(1-|t|\right)^3, & 1/2 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1; \end{cases}$$

Tyuki–Henninq statistik qiyməti–

$$\Phi_{\mathcal{T}}(x) = \frac{\sin x}{2\pi x}\,\frac{\pi^2}{\pi^2 - x^2},$$

$$K_{\mathcal{T}}(t) = \begin{cases} 2^{-1}(1+\cos \pi t), & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$$

müntəzəm spektral ortalanma statistik qiyməti –

$$\Phi_M(x) = \begin{cases} \pi^{-1}, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases},$$

$$K_M(t) = \frac{\sin \pi t/2}{\pi t/2}.$$

α, $0 \le \alpha \le 1$ üstlü Hölder bərabərsizliyini qeyd olunmuş λ qiymətində ödəyən, spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan $\varkappa$ prosesləri sinfində

$$\min_{\Phi} \sup_{\varkappa} \mathbf{M}(\hat{f}_N(\lambda) - f(\lambda))^2 \qquad (2)$$

kvadratik orta yayınmasını minimallaşdıran optimal spektral pəncərə axtarışı haqqında məsələnin həlli aşağıdakı şəkilli spektral pəncərənin alınması ilə nəticələnir:

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha+1}{2\alpha}\,|x|^{\alpha} + \frac{\alpha+1}{2\alpha}, & x \le 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

bu halda (2) ifadəsi asimptotik olaraq, $C N^{-2\alpha/(1+2\alpha)}$-ya bərabər olur.

Praktikada (1) statistikasının diskret analoqundan tez-tez istifadə olunur, bu halda λ nöqtəsi ətrafında $\Phi_N(x_k)$ çəkilərilə müxtəlif $x_k = 2\pi k/N$ qiymətlərində periodoqramın $I_N(x_k)$ qiymətlərinin orta qiyməti qurulur və alınan statistika $f_N(\lambda)$-nın statistik qiyməti kimi istifadə olunur.

Müxtəlif k-lar üçün periodoqramın $I_N(x_k)$ qiymətlərinin asimptotik qeyri – korrelyarlığından $\hat{f}_N(\lambda)$ statistik qiymətinin dispersiyasının sıfra yaxınlaşması alınır:

$$\mathbf{D}\hat{f}_N(\lambda) \sim \frac{2\pi}{N}\, f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N^2(x)\, dx, \qquad (3)$$

$$N \to \infty, \lambda \ne 0 \bmod \pi,$$

lakin qeyd etmək lazımdır ki, $\mathbf{D} I_N(\lambda) \sim f^2(\lambda)$, $\lambda \ne 0 \bmod \pi$, ümumiyyətlə, sıfra yaxınlaşmır. $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikasının asimptotik meylsizliyi çəki funksiyaları $\Phi_N(x)$-lərin (spektral pəncərələrin) sıfırda topalanması hesabına və $f(x)$-in λ nöqtəsində kəsilməzliyinin fərz olunmasına görə alınır. Bu halda, A_N əmsallarının seçilməsi hesabına $\Phi_N(x)$-lərin sıfırda topalanması sürətlə baş verdiyindən meyl azalır, lakin $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikasının dispersiyası artır.

S. s. $f(\lambda)$-nın hamarlığı üzərinə və ya $X(t)$ təsadüfi prosesinin qarışma şərtlərinə olduqca zəif məhdudiyyətlər qoyulduqda spektral və ya kovariasion pəncərələrin geniş sinfi üçün $\hat{f}_N(\lambda)$ statistik qiyməti asimptotik meylsiz və tutarlı statistik qiymət olur. Çoxölçülü təsadüfi proses halında S. s. matrisinin elementləri $f_{k,l}(\lambda)$-ların statistik qiymətlərinin qurulması üçün uyğun $I_N^{(k,l)}$ periodoqramlarından istifadə olunur.

$X(t)$ təsadüfi prosesinin qarışma əmsalının eksponensial azalma sürətilə Rozenblatt qarışma şərtlərində $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikası orta qiyməti $f(\lambda)$ və dispersiya (3) ifadəsilə təyin olunan asimptotik normal statistika olur. Bu nəticədən istifadə edərək, bu statistika üçün etibarlı intervallar almaq olur. Bir qədər daha məhdud şərtlərlə, $\hat{f}_N(\lambda)$ statistikası $L^2(-\pi, \pi)$ və $C(-\pi, \pi)$ metrikasında $f(\lambda)$-ya yığılır, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Buna əsasən, apriori naməlum S. s. $f(\lambda)$ ilə hər hansı verilmiş $f_0(\lambda)$-nın üst-üstə düşməsi haqqında hipotezi yoxlamaq olur.

Məs., $X(t)$ prosesinin S. s. $f_0(\lambda) = \text{const}$ olan bəyaz küylə üst-üstə düşməsi haqqında hipotezi yoxlamaq olar. Bu halda etibarlı sərhədlər ikiqat eksponentin paylanma qanunu əsasında tapılır.

Kvadratik orta yayınma asimptotikası nöqteyi – nəzərdən periodoqram statistikalarının sinfi – prosesin müşahidəsi nəticəsində alınan ixtiyari kvadratik formalar şəklində alınan bütün S. s. statistikaları arasında kafi statistikalar sinfidir. Praktikada istifadə olunan statistikaların əksəriyyəti konkret tətbiqi nöqteyi – nəzərdən kvadratik orta yayınmaların olduqca yaxın qiymətlərini verir. Bununla belə, kvadratik orta yayınma, praktikada S. s. statistikaları üzərində qoyulan yeganə tələb deyildir. Çoxsaylı tətbiqlərdə, ən müxtəlif təbiətli proseslərin spektrlərinin qiymətləndirilməsində, spektrin güclü girintili-çıxıntılı (kəsik-kəsik) olması, gözəçarpan dərəcəli zaman trendi, tezliklərin «yox olması», «axması» (rus. плавание), güclü qeyri – stasionar küylərlə olması və s. kimi hallara təsadüf olunur. Belə hallarda periodoqram statistikalarından istifadə nəticəsində spektrdə maraqlı xüsusiyyətləri qiymətləndirdikdə, olduqca arzuolunmaz təhriflər, tezliklər üzrə spektrin azalma sürəti göstəricisinin doğru olmadığı statistik qiymət alınır. Belə arzuolunmaz effektlər, real spektrin qiymətləndirilməsində, uzaqlaşmış tezliklərdən zəif asılı spektrlərin qiymətləndirilməsində istifadə olunarkən olduqca azalır. Periodoqram statistikalar belə asılılığın azalma sürətini CN^{-1}-dən yaxşı vermir və tezliklərin olduqca böyük parçasında «yaddaşı» güclü kükrəntidən mühüm olaraq qoruyub saxlayır. Seçimi ardıcıllığın kənarlar üzrə hamarlanması proseduru (zaman pəncərəsinin tətbiqi) uzaq tezliklərin olduqca azalmasına səbəb olur (ətraflı analiz [1], [2]-də verilmişdir). Bu prosedurun uzaqlaşmış tezliklərin təsirini olduqca zəiflətməsinə baxmayaraq, verilmiş uzunluqlu seçim halında dispersiyanın olduqca artmasına və o, bununla yanaşı, kvadratik orta yayınmanın da artmasına səbəb olur.

Zaman parçalarının kənarları üzrə dərin hamarlama tətbiq edib, bu tərzdə zaman sırasının zaman üzrə yerinidəyişmiş parçalarına görə hesablanılan modifikasiya olunmuş periodoqramların orta qiymətlərinin təyin edilməsi ilə çox yaxşı nəticələr almaq olur. Polinomial hamarlama tətbiq edərək zaman üzrə yerinidəyişməyə görə ortalanma uzaq tezliklərdən asılılıq dərəcəsi $\exp(-bN^{\varepsilon})$ tərtib $(b>0,\ \varepsilon>0)$ olan statistikaya gətirir və bu statistikanın kvadratik orta yayınması optimal yayınmaya son dərəcədə yaxın olur (bax, [4]).

Zaman üzrə yerinidəyişmə ilə alınan S. s. ümumi halda aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\overline{f}_N(\lambda) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1}\left|W_M^{L_k}(\lambda)\right|^2, \qquad (4)$$

burada $W_M^Q(\lambda)$ – modifikasiya olunmuş

$$W_M^Q(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_M(t-Q)\,e^{it\lambda}\,X(t)$$

periodoqramıdır, $L,\ M,\ T,\ N$ – tam qiymətli dəyişənlər olub, $N=(T-1)L+M+1,\ \ 4<<M<<N,\ \ LT\sim N$ münasibətlərilə əlaqəlidirlər.

Mənfi olmayan $a_M(t),\ t=0,\pm1,\ldots$ (zaman pəncərəsi, verilənlər pəncərəsi) $[0,\ M]$ parçasından kənarda sıfra bərabərdir; bu funksiya vasitəsilə

$$\varphi_M^Q(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_M(t-Q)\,e^{itx}$$

statistikasının spektral nüvəsi təyin olunur və fərz olunur ki,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_M^Q(x)\right|^2 dx = 1.$$

Olduqca geniş fərziyyələrlə (4) statistikası asimptotik meylsiz, tutarlı, baş həddə malik dispersiyası

$$\mathbf{D}\,\bar{f}_N(\lambda) \sim \frac{2\pi f^2(\lambda)}{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi_M^0(x)\right|^4 dx,\ \ \lambda \neq 0 \bmod \pi$$

normal olan statistikadır.

Asimptotik normallıq şərtlərində dispersiyanın aşkar ifadəsi olması nəticəsində (4) statistikası üçün etibarlı sərhədləri asanlıqla müəyyənləşdirmək olur.

Bu statistikada uzaqlaşmış tezliklərdən son dərəcə zəif asılılıq və zaman üzrə yerinidəyişmədən istifadə olunma kimi keyfiyyətlərin birləşməsi, digər tezliklərdə sıra üzərinə məhdudiyyətlər qoyulmadığı halda, tezliklərin verilən zolağında sıranın stasionar olub-olmadığı və analizi üçün geniş imkanlar yaradır. Bu statistika EHM-dan istifadə ilə tətbiq üçün münasibdir, əməliyyatların ümumi sayınını azalmasına səbəb olur, hesablamalar üçün zəruri yaddaş həcmini xüsusilə qənaətləndirir. Bu statistikadan real rejimdə aparılan spektral statistik qiymətlər üçün istifadə etmək olur, o, spektrin bütün dəyişikliklərini analiz edir, EHM-da çoxsaylı tətbiqlərdə yaranan real prosesləri ətraflı öyrənməyə imkan yaradır.

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Численный анализ и теория временных рядов, пер. с англ., М., 1981; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] Журбенко И. Г., Спектральный анализ временных рядов, М., 1982; [5] Time series in the frequency domain, Amst. – [a. o.], 1983; [6] Priestley M., Spectral analysis and time series, v. 1–2, L. – [a. o.], 1981; [7] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, 2 ed., N. Y. – Stock., 1966.

SPEKTRAL SIXLIQ ortalanmış « **спектральная плотность** осредненная; averaged **spectral density** » – bax, *Ortalanmış spektral sıxlıq.*

SPEKTRAL SIXLIQ(ğı) n – ölçülü fəzada stasionar təsadüfi prosesin və ya bircins təsadüfi meydanın « **спектральная плотность** стационарного случайного процесса или однородного случайного поля в n – мерном пространстве; **spectral density** of a stationary random process or homogeneous random field in n – dimensional space » – *stasionar təsadüfi prosesin* (geniş mənada) və ya *bircins təsadüfi meydanın* (geniş mənada) kovariasion funksiyasının Furye çevirməsidir. Kovariasion funksiyasının Furye çevirməsi olan bu tip proses və meydanlar S. s.-lı proses və ya meydanlar adlanır.

$\zeta(t) = \{\zeta_k(t)\}_{k=1,\ldots,n}$, – n – ölçülü stasionar proses,

$$\zeta(t) = \int e^{i\lambda t}\,\Phi(d\lambda),\quad \Phi = \{\Phi_k\}_{k=1,\ldots,n}$$

– onun spektral ifadəsi olsun (Φ_k – çoxölçülü $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin k-cı komponenti $\zeta_k(t)$-yə uyğun spektral təsadüfi ölçüdür; bax, *Stoxastik inteqral*). t diskret zaman dəyişəni olduqda, inteqral $-\pi \le \lambda \le \pi$ sərhədlərində, t kəsilməz zaman dəyişəni olduğu halda $-\infty < t < \infty$ sərhədlərində götürülür. Əgər $F = \{F_{kl}\}_{l=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n}$ spektral ölçüsünün bütün elementləri, yəni

$$F_{kl}(\Delta) = \mathbf{M}\Phi_n(\Delta)\Phi_k(\Delta),\ k, l = 1, \dots, n$$

funksiyaları mütləq kəsilməz olarlarsa və $f_{kl}(\lambda) = \frac{F_{kl}(d\lambda)}{d\lambda}$ olarsa, prosesin spektral sıxlığı vardır və o,

$$f(\lambda) = \{f_{kl}\}_{k=1,\dots,n}^{l=1,\dots,n}$$

şəklində ifadə olunur. $f_{kk}(\lambda)$ elementi birölçülü $\zeta_k(t)$ prosesinin spektral sıxlığı, $f_{kl}(\lambda)$ – kross–spektral və ya qarşılıqlı spektral sıxlıq, F_{kl} $\zeta_k(t)$ və $\zeta_l(t)$ zaman sıralarının kross–spektral və ya qarşılıqlı spektral funksiyası adlanır.

$$F(x) = \int F(d\lambda)$$

matrisi $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası,

$$B(t) = \{B_{kl}(t)\}_{k=1,\dots,n}^{l=1,\dots,n} = \{\mathbf{M}\zeta_k(t+s)\,\overline{\zeta_l(s)}\}_{k=1,\dots,n}^{l=1,\dots,n}$$

matrisi $\zeta(t)$ prosesinin kovariasion funksiyası adlanır və $B(t)$ spektral ölçü ilə

$$B(t) = \int e^{i\lambda t} F(d\lambda)$$

münasibətilə ifadə olunur. Əgər $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ prosesi üçün $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |B_{kl}(t)| < \infty$, $k, l = 1, \dots, n$ münasibəti ödənilərsə, onda $\zeta(t)$ prosesinin S. s. vardır və

$$f_{kl}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{kl}(t)\, \exp\{-i\lambda t\},$$

$$-\infty < t < \infty,\quad k, l = 1, \dots, n.$$

Analoji münasibət kəsilməz zamanlı proseslər üçün də doğrudur. $f(\lambda)$ S. s. digər yüksək tərtib S. s.-lardan fərqli olaraq, bəzən ikinci tərtib spektral sıxlıq adlanır (bax, *Spektral semi – invariant*).

Bircins n – ölçülü $\zeta(t_1, \dots, t_n)$ təsadüfi meydanının S. s. $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ o halda vardır ki, onun spektral funksiyası $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ -nın qarışıq törəməsi $\frac{\partial^k F}{\partial\lambda_1 \dots \partial\lambda_k}$ sanki hər yerdə mövcud olsun və sanki hər yerdə $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ -ə bərabər olsun və

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \int_{\lambda_{10}}^{\lambda_1} \dots \int_{\lambda_{n0}}^{\lambda_n} f(\mu_1, \dots, \mu_n)\, d\mu_1 \dots d\mu_n + \text{const}$$

şərtini ödəsin.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

SPEKTRAL TİPLƏR asılı olmayan **« спектральные типы** независимые; independent **spectral types »** – bax, *Sinqulyarlığı*, *ölçülərin.*

SPEKTRAL TİPLƏR dizyunkt **« спектральные типы** дизъюнктные; dizjoint **spectral types »** – bax, *Sinqulyarlığı*, *ölçülərin.*

SPEKTRAL TİPLƏR(i) ölçünün **« спектральные типы** меры; **spectral types** of a measure **»** – bax, *Mütləq kəsilməzliyi*, *ölçülərin*, *Ekvivalent ölçülər.*

SPEKTROQRAM « спектрограмма; spectrogram » – $S(\omega) = \mathbf{I}(1/\omega)$ funksiyasıdır, $\mathbf{I}(\lambda)$ – periodoqram, $\lambda = 1/\omega$ – dalğa uzunluğu, ω – tezlikdir. Ədəbiyyatda «S.» və «periodoqram» terminləri qarşılıqlı əvəz olunurlar.

SPESİFİK FAKTOR « специфический фактор; specific factor » – bax, *Faktor analiz.*

SPEYSİNQ « спейсинг; spacing » – *simmetrik təsadüfi matrisin* iki qonşu məxsusi λ_i, λ_{i-1} qiymətləri arasında məsafədir. $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, – n tərtib Ξ_n simmetrik təsadüfi matrisinin məxsusi qiymətləri olsun. Belə matrisin S.-i üçün

$$\lambda_n(x) = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{M} F(\lambda_i - \lambda_{i+1} - x)$$

spektral funksiyasına baxılır, burada $y < 0$ olduqda $F(y) = 1$, $y \geq 0$ olduqda isə $F(y) = 0$. Əgər Ξ_n elə matrisdirsə ki, λ_i təsadüfi funksiyalarının paylanma sıxlığı $p(x_1, \dots, x_n)$, $x_1 > \dots > x_n$ vardır və $|p|$ funksiyası simmetrikdir, yəni dəyişənlərin eyni zamanda yerdəyişmələrində dəyişmirsə, onda

$$\lambda_n(x) = (n-1)^{-1} \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial \upsilon}\, \rho(u, \upsilon) \right]_{u=y,\, \upsilon=z+y} dy\, dz,$$

burada $\rho(u, \upsilon)$, – λ_i məxsusi qiymətlərinin (u, υ) intervalından kənarda yerləşməsi ehtimalıdır.

Bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses.*

Əd.: [1] Гирко В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–106; [2] Mehta M. L., Random matrices and the statistical theory of energy levels, N. Y. – L., 1967.

SPİRMƏN ƏMSALI ranq korrelyasiyasının **« Спирмена коэффициент** ранговой корреляции; **Spearman rank correlation coefficient »** – müşahidələrin asılı olmayan $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ nəticələrinin ranqlanmasına əsaslanan, iki X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin (əlamətlərinin) asılılıq ölçüsüdür. Əgər X -in qiymətlərinin ranqları təbii qaydada, yəni $i = 1, \dots, n$ kimi yerləşmiş olarsa, R_i (X, Y) cütünə müvafiq Y -in ranqı olarsa ki, bu cütdə X -in ranqı da i -yə bərabər olsun, onda ranq korrelyasiyasının S. ə.

$$r_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (i - (n+1)/2)\,(R_i - (n+1)/2)$$

düsturu ilə və ya bu düsturla eynigüclü

$$r_s = 1 - 6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 / n(n^2-1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada d_i, – X_i və Y_i-nin ranqları arasında fərqdir. r_s-in qiyməti -1 və $+1$ arasında dəyişir və ranqlar ardıcıllıqları tamamilə üst-üstə düşdükdə $r_s = +1$ olur, yəni $i = R_i$, $i = 1, \dots, n$ olduqda; ranqlar ardıcıllığı tamamilə birbirinə əks olarsa, yəni $i = (n+1) - R_i$, $i = 1, \dots, n$ olarsa, onda $r_s = -1$ olur. Ranq korrelyasiyasının S. ə. ixtiyari digər ranq statistikası kimi iki əlamətin asılı olmamazlığı haqqında hipotezin yoxlanılması üçün tətbiq olunur. Əgər əlamətlər asılı olmazlarsa, onda $\mathbf{M} r_s = 0$, $\mathbf{D} r_s = 1/(n-1)$ olur. Beləliklə, r_s-in 0-dan yayınmasının qiymətinə görə əlamətlərin asılı olub-olmaması haqqında nəticə çıxarmaq olur. Müvafiq kriterinin qurulması üçün asılı olmayan X və Y əlamətləri üçün r_s-in paylanması hesablanılır. $4 \leq n \leq 10$ olduqda dəqiq paylanma cədvəllərindən istifadə olunur (bax, [2], [4]), $n > 10$ olduqda isə, məs., ondan istifadə etmək olar ki, $\sqrt{n-1}\, r_s$ təsadüfi kəmiyyəti $n \to \infty$ olduqda $(0,\ 1)$ parametrlərli asimptotik normal qanunla paylanır. Bu sonuncu halda, əgər $|r_s| > u_{1-\alpha/2} \big/ \sqrt{n-1}$ olarsa, asılı olmamazlıq hipotezi qəbul edilmir, burada $u_{1-\alpha/2}$, – $\Phi(u) = 1 - \alpha/2$ tənliyinin köküdür [$\Phi(u)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır].

Əgər X və Y-in birgə normal paylanması adi korrelyasiya əmsalı ρ ilə verilmiş olarsa, onda n-in olduqca böyük qiymətlərində

$$\mathbf{M} r_s \sim \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

olur və buna görə də, $2 \sin \frac{\pi}{6} r_s$ kəmiyyətini ρ-nun statistik qiyməti kimi istifadə etmək olar.

Ranq korrelyasiyasının S. ə. psixoloq C. Spirmenin adı ilə adlandırılmışdır; o, psixologiyada adi korrelyasiya əmsalı əvəzinə S. ə.-nı istifadə etmişdir. Ranq korrelyasiyasının S. ə.-na və ranq korrelyasiyasının *Kendall əmsalına* əsaslanan kriterilər asimptotik ekvivalentdirlər ($n = 2$ olduqda uyğun ranq statistikaları üst-üstə düşür).

Əd.: [1] S p e a r m a n C., «Amer. J. Psychol.», 1904, v. 15, p. 72–101; [2] К е н д э л М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [3] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

SPİTSER – ROQOZİN EYNİLİYİ « Спитцера – Рогозина тождество; Spitzer – Rogozin identity » – bax, *Faktorizasiya metodu.*

SPLAYN – STATİSTİK QİYMƏT « сплайн – оценка; spline estimator » – bax, *Qeyri – parametrik reqression analiz.*

STABİL STATİSTİK QİYMƏT « стабильная оценка; stable estimator » – bax, *Robast statistik qiymət.*

STANDART BRAUN HƏRƏKƏTİ PROSESİ « стандартный процесс броуновского движения / стандартный винеровский процесс; standart Brown motion / standart Wiener process » – bax, *Braun hərəkəti prosesi.*

STANDART XƏTA « стандартная ошибка; standard error » – statistikanın öz riyazi gözləməsindən *kvadratik orta yayınmasına* deyilir. «S. x.» termininin yaranması onunla əlaqədar olmuşdur ki, kvadratik orta yayınma və ya normal qanunun standart yayınması belə adlandırılırdı, belə ki, normal qanun 18 – 19-cu əsrlərdə daha çox xətaların paylanma qanunu kimi məlum idi. Riyazi statistikanın inkişafı və asimptotik normallıq anlayışının daxil olunması ilə bağlı «S. x.» termini asimptotik paylanması normal paylanma olan statistikaların kvadratik orta yayınmaları üçün də tətbiq olunmağa başlanıldı.

Müasir ədəbiyyatda «S. x.» terminindən az istifadə olunur.

Əd.: [1] К е н д а л л М. Д ж., С т ь ю а р т А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

STANDART MARKOV PROSESİ « стандартный марковский процесс; standard Markov process » – bircins qırılan $\zeta = \{\zeta_t, \xi, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x\}$ Markov prosesidir və aşağıdakı şərtləri ödəyir: 1) ζ prosesinin faza fəzası $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ lokal kompakt metrik fəzadır və ölçülən çoxluqların σ – cəbri $\mathscr{B}$ $\mathscr{E}$-də açıq çoxluqların doğurduğu σ – cəbrdir; 2) ζ normal prosesdir, yəni bütün $\omega \in \Omega$ üçün qırılma anı $\xi(\omega) > 0$; 3) hər bir $\omega \in \Omega$ üçün $\zeta(t, \omega)$, $0 \leq t < \xi$ trayektoriyası t-yə görə sağdan kəsilməzdir; 4) $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrləri hər bir $\mathbf{P}_x$, $x \in \mathscr{E}$ ölçüsünə nəzərən tam σ – cəbrlərdir; 5) $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrləri sağdan kəsilməzdirlər, yəni $\mathscr{A}_t = \bigcap_{u>t} \mathscr{A}_u$; 6) ζ ciddi Markov prosesidir; 7) ζ soldan kvazi-kəsilməz prosesdir, yəni ixtiyari dayanma anları τ və τ_n, $n \geq 1$, $\tau_n \uparrow \tau$ üçün

$$\mathbf{P}_x \{\tau < \xi,\ \zeta(\tau) = \lim_{n \to \infty} \zeta(\tau_n)\} = \mathbf{P}_x \{\tau < \xi\},\ x \in \mathscr{E}$$

münasibəti doğrudur. S. M. p. [1]-də təyin olunmuşdur. [2]-də isbat olunmuşdur ki, əgər: a) $(\mathscr{E}, \mathscr{B})$ fəzası 1) şərtindəki kimi olarsa, b) keçid funksiyası $p(t, x, \Gamma)$ sağdan stoxastik kəsilməzdirsə: x nöqtəsinin ixtiyari U ətrafı üçün $t \downarrow 0$ olduqda $p(t, x, U) \to 1$, c) keçid funksiyasına uyğun

$$P^t F(x) = \int_{\mathscr{E}} F(y)\, p(t, x, dy), \quad t \geq 0$$

operatorları $\mathscr{E}$-dəki kəsilməz F funksiyalarının sinfini özünə köçürür, belə ki, bu funksiyalar 0-da sonsuzluğa çevrilən funksiyalardır, onda uyğun Markov prosesini S. M. p. hesab etmək olar. «S. M. p.» termini [3]-də daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] B l u m e n t h a l R. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 85, p. 52–72; [2] Х а н т Д ж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [3] Д ы н к и н Е. В., Марковские процессы, М., 1963.

STANDART VİNER PROSESİ « стандартный винеровский процесс; standard Wiener process » – bax, *Braun hərəkəti prosesi*, *Viner prosesi.*

STANDART YAYINMA « стандартное отклонение; standard deviation » – bax, *Kvadratik yayınma.*

STANDARTİZASİYA « стандартизация; standartization » – *demoqrafik statistika* metodudur: bu metodla doğum və ölümün ümumi və interval əmsallarının hesablanılmasında bunlara əhalinin tərkibinin təsiri (yaş həddi nəzərdə tutulur) aradan qaldırılır. Birbaşa S. müşahidə olunmuş yaş göstəricilərinin $\tau^k x$ qiymətlərində və

$$k^{cm} = \sum_x {}_\tau k_x \; {}_\tau C_x^0$$

düsturunda ${}_\tau C_x^0$ standart yaş paylanması götürüldüyü halda ümumi intensivlik göstəricisi k^{cm}-in hesablanmasından ibarətdir.

Dolayısı ilə S.-da

$$k^{cm} = k k^0 \Big/ \sum_x {}_\tau k_x^0 \; {}_\tau C_x$$

düsturu tətbiq olunur, burada k_0 və ${}_\tau k_x^0$ – standart intensivliklər, k və ${}_\tau C_x$ – müşahidəolunan kəmiyyətlərdir.

STASİONAR ARTIMLARLI TƏSADÜFİ PROSES « случайный процесс со стационарными приращениями; stochastic process with stationary increments » – bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

STASİONAR ƏLAQƏLİ TƏSADÜFİ PROSESLƏR « стационарно связанные случайные процессы; stationary connected random process » – *qarşılıqlı korrelyasion funksiyası* (ikinci tərtib qarışıq momenti) $B_{12}(t,\ s) = \mathbf{M}\zeta_1(t)\,\zeta_2(s)$ yalnız $(t-s)$ fərqindən asılı $\{\zeta_1(t);\ t \in T\}$ və $\{\zeta_2(t);\ t \in T\}$ *təsadüfi proseslərinə* deyilir. Bu halda $B_1(t)$ və $B_2(t)$, bəzən, *avtokorrelyasion funksiyalar* da adlanır (bax, *Avtokorrelyasion funksiya*).

STASİONAR HƏNDƏSİ PROSES « стационарный геометрический процесс; stationary geometric process » – bax, *Həndəsi proses*.

STASİONAR KANAL « стационарный канал; stationary channel » – bax, *Kanal* yaddaşsız.

STASİONAR KORRELYASİON FUNKSİYA « стационарная корреляционная функция; stationary correlation function » – bax, *Korrelyasion funksiya.*

STASİONAR KOVARİASİYA(sı) təsadüfi çoxluğun **« стационарная ковариация** случайного множества; **stationary covariance** of a random set **»** – bax, *Kovariasiya*(sı) təsadüfi qapalı çoxluğun.

STASİONAR MARKOV PROSESİ « стационарный марковский процесс; stationary Markov process » – həm *Markov prosesi*, həm də *stasionar təsadüfi proses* olan təsadüfi prosesdir. S. M. p., yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki, Markov keçid ehtimalı $p(x,\ t,\ A)$ zaman üzrə bircins olsun və prosesin stasionar başlanğıc paylanması $\mu(A)$ mövcud olsun, yəni

$$\mu(A) = \int_X p(x, t, A)\,\mu(dx)$$

tənliyini ödəyən paylanma olsun.

Əgər faza fəzası X kompakt, $\mathbf{M}\{f(\zeta(t))|\zeta(0) = x\}$ ixtiyari kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün x üzrə kəsilməz funksiya olarsa, onda verilən keçid funksiyası $p(x,\ t,\ A)$-ya müvafiq S. M. p. həmişə mövcuddur. Vəziyyətləri çoxluğu X hesabi, diskret zamanlı proses üçün S. M. p.-nin varlığı şərti – elə $x \in X$ vəziyyətinin varlığıdır ki, trayektoriyanın bu vəziyyətə orta qayıdış müddəti sonlu olsun (Kolmoqorov kriterisi). İxtiyari ciddi Markov prosesi üçün belə bir kriteri doğrudur: S. M. p.-nin varlığı üçün elə $K \subset H$ kompaktının varlığı kafidir ki, x vəziyyətindən K-ya çatım müddətinin riyazi gözləməsi ixtiyari $x \in X \setminus K$ üçün sonlu olsun. Lyapunov stoxastik funksiyaları terminlərində Foster kriterisi doğrudur: K hər hansı kompakt, L prosesin doğuran operatoru olduqda, elə $V(x) \geq 0$ funksiyası olarsa ki, $x \in X \setminus K$ üçün $LV(x) \leq -1$ şərtini ödəsin, onda Markov keçid funksiyası $p(x,\ t,\ A)$-ya müvafiq S. M. p. vardır.

Əgər prosesin stasionar başlanğıc paylanması μ yeganədirsə, onda uyğun S. M. p. erqodik prosesdir. Bəzi əlavə şərtlərlə keçid ehtimalı, $t \to \infty$ olduqda, μ-yə zəif yığılır. Vəziyyətləri sayı sonlu və diskret zamanlı proses üçün stasionar paylanma $\mu \mathbf{P} = \mu$ tənliyini ödəyir; $\mathbf{P}$ – keçid ehtimalları matrisidir. Əgər $\zeta(t)$ kəsilməz zamanlı analoji proses olarsa, onda $\mu A = 0,$ burada A – keçid ehtimalları sıxlıqları matrisidir. Bu tənliklər S. M. p.-nin varlığı halında vəziyyətlər sayı hesabi hal üçün də doğrudur. Ümumi hal üçün μ paylanması $L^*\mu = 0,$ – Fokker – Plank – Kolmoqorov tənliyini ödəyir; L^* – prosesin infinitezimal operatoruna qoşma operatordur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1984; [2] Севастьянов Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 1, с. 106–16.

STASİONAR – NİŞANLANMIŞ NÖQTƏVİ PROSES « стационарный маркированный точечный процесс; stationary marked point process » – bax, *Nişanlanmış nöqtəvi proses.*

STASİONAR NÖQTƏVİ PROSES « стационарный точечный процесс; stationary point process » – bax, *Nöqtəvi proses.*

STASİONAR ÖLÇÜ « стационарная мера; stationary measure » – bax, *Stasionar paylanma.*

STASİONAR PAYLANMA « стационарное распределение; stationary / steadystate distribution » – zamandan asılı olmayan bircins Markov zəncirinin ehtimal *paylanmasıdır*. $X(t)$ – vəziyyətləri çoxluğu S və keçid ehtimalları $p_{ij}(t) = \mathbf{P}\{X(t) = j \,|\, X(0) = i\}$ olan bircins Markov zənciri olsun. S. p. –

$$\pi_j \geq 0, \qquad \sum_{j \in S} \pi_j = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i \, p_{ij}(t) = \pi_j, \quad j \in S, \ t > 0 \tag{2}$$

münasibətlərilə təyin olunan $\{\pi_j,\ j \in S\}$ ədədlər toplusudur. (2) bərabərlikləri onu ifadə edir ki, S. p. zamana görə invariantdır: yəni əgər $\mathbf{P}\{X(0) = i\} = \pi_i, \ i \in S$ olarsa, onda ixtiyari $i \in S$, $t > 0$ üçün $\mathbf{P}\{X(t) = i\} = \pi_i$ bərabərliyi ödənilir; hətta ixtiyari $t,\ t_1, \ldots, t_k > 0, \quad t_1, \ldots, t_k \in S$ üçün

$$\mathbf{P}\{X(i_1+t)=i_1,\ \dots,\ X(i_k+t)=i_k\}=$$
$$=\mathbf{P}\{X(t_1)=i_1,\dots,X(t_k)=i_k\}$$

Əgər $i\in S$ $X(t)$ Markov zəncirinin elə vəziyyəti olarsa ki,

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j(i)\geq 0,\ \ j\in S,\ \sum_{j\in S}\pi_j(i)=1$$

limitləri mövcuddur, onda $\{\pi_j(i),\ j\in S\}$ ədədlər toplusu (2) münasibətini ödəyir və bu toplu $X(t)$ zəncirinin S. p.-dır.

(2) xətti tənliklər sisteminin (1) əlavə şərtlərində $\{\pi_j\}$ toplusuna nəzərən yeganə həlli vardır, bu şərtlə ki, $X(t)$ Markov zəncirinin vəziyyətlərinin müsbət sinifləri sayı 1 olsun; əgər zəncirin vəziyyətlərinin sayı k olarsa, onda onun S. p. çoxluğu hər biri müsbət sinifdə topalanmış k sayda stasionar paylanmaların qabarıq örtüyüdür (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı).

(2) sisteminin mənfi olmayan ixtiyari həlli stasionar ölçü adlanır; (1), (2) sistemi uyuşmayan olduğu halda belə stasionar ölçü mövcud ola bilər. Məs., $\{0,1,2,\dots\}$ vəziyyətlər çoxluğunda $X(0)=0,\ \ X(t)=X(t-1)+Y(t),\ \ t=1,\ 2,\dots$ təsadüfi dolaşma olsun; burada $Y(1),\ Y(2)$ isə asılı olmayan elə təsadüfi kəmiyyətlərdir ki, $\mathbf{P}\{Y(i)=1\}=p,\ \mathbf{P}\{Y(i)=-1\}=1-p,\ \ 0<p<1,\ \ i=1,2,\dots,$ onda bu təsadüfi dolaşmanın stasionar paylanması yoxdur, lakin stasionar ölçüsü vardır və bu ölçü $\pi_j=(p/(1-p))^j,\ \ j=0,\pm1,\dots$ toplusu ilə təyin olunur.

Vəziyyətləri çoxluğu S olan Markov zənciri $X(t)$-nin stasionar ölçüsü $\{\pi_j\}$ toplusunun mümkün ehtimali interpretasiyalarından biri aşağıdakı kimidir. $X(t)$ zəncirinin asılı olmayan realizasiyalarının hesabi çoxluğunun olduğu fərz olunur və $Y_t(i)$ təsadüfi kəmiyyəti $X(t)=i$ şərtini ödəyən realizasiyalar sayı olsun. Əgər $Y_0(i),\ \ i\in S$ orta qiymətləri uyğun olaraq, $\pi_i,\ i\in S$ olan Puasson paylanmasına tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda ixtiyari $t>0$ qiymətində $Y_t(i),\ \ i\in S$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunlar $Y_0(i),\ \ i\in S$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylandığı qanunla paylanır.

Əd.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., 1964; [2] Карлин С., Основы теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971.

STASİONAR PAYLANMA(sı) bircins Markov zəncirinin **« стационарное распределение** однородной цепи Маркова; **stationary distribution** of a homogeneous Markov chain **»** – bircins *Markov zəncirinin* vəziyyətləri fəzasında invariant ehtimal ölçüsüdür. Ölçülən $(\mathscr{E},\mathscr{B})$ fəzasında bircins (X_n) Markov zənciri keçid ehtimalları $p(x,\mathscr{E}),\ x\in\Gamma,\ \Gamma\in\mathscr{B}$ ilə verilmişdir. Əgər $\mathscr{B}$-də verilmiş μ ölçüsü σ – sonlu və $\mu\mathbf{P}=\mu$ şərtini ödəyərsə, μ zəncir üçün invariant ölçü adlanır, burada

$$\mu\mathbf{P}(\cdot)=\int_{\mathscr{E}} p(x,\cdot)\mu(dx).$$

Məs., vəziyyətləri çoxluğu hesabi $\mathscr{E}=\{1,2,\dots\}$ Markov zənciri halında μ-nü elementləri $\mu_i=\mu(\{i\})$ olan $(\mu_1,\mu_2,\dots)$ ardıcıllığı ilə eyniləşdirmək olar, onda $\mu\mathbf{P}=\mu$ bərabərliyini $\sum_{i\geq1} p_{ij}\mu_i=\mu_j,\ \ j\geq1$ bərabərliklər sistemi kimi yazmaq olar, burada p_{ij}, – i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçid ehtimalıdır. Hər bir invariant ölçü *ekssessiv ölçüdür.*

Erqodik Markov zənciri üçün final ehtimalları S. p.-ya misaldır və eyni zamanda S. p. anlayışının mühümlüyünü illüstrasiya edir. Əgər hər hansı S. p. (X_n) zəncirinin başlanğıc paylanması kimi seçilmişdirsə, onda bu zəncir diskret zamanlı stasionar proses olur: $\{X_m\in\Gamma_0,\dots,X_{m+k}\in\Gamma_k\}$ hadisəsinin ehtimalı $m\geq0$ qiymətindən asılı olmur; $k\geq0,\ \ \Gamma_i\in\mathscr{B},\ 0\leq i\leq k$.

Qayıdışlı Markov zənciri halında bütün sıfır invariant ölçülər bir-birindən ədədi vuruqla fərqlənir və aydın ehtimali məna daşıyır (bax, *Limit teoremləri* Markov zəncirlərində nisbətlər üçün).

Bax, həm də, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

Əd.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Ревюз Д., Цепи Маркова, пер. с англ., М., 1997.

STASİONAR PROSES; statistik məsələlər **« стационарный процесс;** статистические задачи; statistical problems for a **stationary process »** – bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

STASİONAR PROSES ümumiləşmiş **« стационарный процесс** обобщенный; generalized **random process »** – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses.*

STASİONAR PUASSON AXINI « стационарный пуассоновский поток; stationary Poisson input » – bax, *Giriş axını* keçmişi məhdud təsirliliyə malik.

STASİONAR STRATEGİYA « стационарная стратегия; stationary strategy / policy » – bax, *Strategiya*, *İdarəolunan sıçrayışvari proses*, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

STASİONAR TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « стационарное случайное множество; stationary random set » – S vektor fəzasında aşağıdakı xassəyə malik A *təsadüfi çoxluğudur:* ixtiyari $x\in S$ üçün $A\oplus\{x\}$ təsadüfi çoxluqlarının və A-nın paylanmaları üst-üstə düşür (burada $\oplus$ – Minkovski üzrə cəm əməlidir; bax, *Minkovski əməlləri*).

STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES « стационарный случайный процесс; stationary random process », zaman üzrə bircins təsadüfi proses, – t zamanı keçdikcə statistik xarakteristikaları dəyişməyən $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir*, yəni statistik xarakteristikaları $t\to t+a,\ \ \zeta(t)\to\zeta(t+a)$ zaman yerinidəyişmələrinə görə ixtiyari qeyd olunmuş a qiymətində invariant olan təsadüfi prosesdir (prosesin kəsilməz zamanlı və ya diskret zamanlı olmasından asılı olaraq, a həqiqi və ya tamqiymətli ola bilər). S. t. p. anlayışı ehtimal nəzəriyyəsinin təbiətşünaslıq və texnikanın müxtəlif bölmələrinə tətbiqdə geniş istifadə olunur, belə ki, bu tip proseslər nizamlanmamış fluktuasiyalarla müşayiət olunan bir çox real hadisə və prosesləri yaxşı dəqiqliklə

təsvir edir. Məs., elektrik şəbəkəsində cərəyən gücü və ya gərginliyin pulsasiyasına (elektrik «küyü»), əgər şəbəkə stasionar rejimdə olarsa, S. t. p. kimi baxmaq olar; turbulent axın nöqtəsində sürət və ya təzyiqin pulsasiyaları axın qərarlaşmış olduğu halda S. t. p.-dir.

S. t. p.-lərin riyazi nəzəriyyəsində $\zeta(t)$ prosesinin ehtimal paylanmalarının momentləri mühüm rol oynayır; ilk iki tərtib momentlər, yəni $\zeta(t)$ prosesinin orta qiyməti (riyazi gözləməsi) və onun korrelyasion funksiyası – $\mathbf{M}\zeta(t)=\mathbf{m}$ və $\mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\zeta(t)=B(\tau)$ xüsusilə mühüm xarakteristikalardır. S. t. p.-lər nəzəriyyəsi üzrə bir çox araşdırmalarda, ümumiyyətlə, bu prosesin yalnız elə xassələri öyrənilir ki, bunlar yalnız $\mathbf{m}$ və $B(\tau)$ xarakteristikaları ilə tamamilə təyin olunurlar (*korrelyasion nəzəriyyə* və ya ikinci tərtib S. t. p.-lər nəzəriyyəsi adlandırılan nəzəriyyələrdə). Bununla bağlı, $\mathbf{M}\zeta(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\zeta(t)$ momentləri t-dən asılı olmayan proseslərə xüsusi bir sinif kimi baxaraq, onu geniş mənada S. t. p.-lər kimi də adlandırırlar; bu halda zaman etibarilə bütün xassələri dəyişməyən, daha xüsusi təsadüfi proseslər [belə ki, n-in ixtiyari qiymətində $\{\zeta(t_1),\zeta(t_2),\dots,\zeta(t_n)\}$ n – ölçülü təsadüfi kəmiyyətinin n – ölçülü paylanma funksiyası $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ yalnız $(n-1)$ sayda $t_2-t_1,\ t_3-t_1,\dots,$ t_n-t_1 fərqlərindən asılı olur] dar mənada S. t. p.-lər adlandırılır. Buna görə də, S. t. p.-lər nəzəriyyəsi müxtəlif riyazi aparat istifadə edən, dar mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsi və geniş mənada S. t. p. nəzəriyyəsinə ayrılır.

Dar mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsi, birparametrli qruplar nəzəriyyəsi kimi, ehtimal nəzəriyyəsi çərçivəsindən kənar şərh oluna bilinər; belə qruplar ölçüyə malik ölçülü fəzaların çevirmələrinin ölçüsünü dəyişmir; bu nəzəriyyə dinamik sistemlərin ümumi nəzəriyyəsi və erqodik nəzəriyyə ilə qovuşur. Dar mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsində ən mühüm ümumi teorem *Birkhof – Xinçin erqodik teoremidir* (bax, məs., [2], [3], [6], [7]) və bu teoremə əsasən dar mənada ixtiyari $\zeta(t)$ S. t. p.-nin riyazi gözləməsi vardırsa [yəni $\mathbf{M}\,|\,\zeta(t)\,|<\infty$ olarsa], onda

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\int_S^T\zeta(t)\,dt=\hat{\zeta} \qquad (1)$$

və ya

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\sum_{t=S+1}^{T}\zeta(t)=\hat{\zeta} \qquad (1a)$$

limiti sanki yəqin vardır [(1) düsturu kəsilməz zamanlı S. t. p.-lərə, (1a) düsturu diskret zamanlı S. t. p.-lərə aiddir]. Ye. Ye. Slutskinin [1]-də, geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsinə aid aldığı nəticədə hökm olunur ki, (1) və ya (1a) limiti kvadratik orta mənada limit kimi vardır və bu limit, yalnız və yalnız,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T b(\tau)\,d\tau=0 \qquad (2)$$

və ya uyğun olaraq,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{\tau=0}^{T-1}b(\tau)=0 \qquad (2a)$$

olduğu halda $\mathbf{M}\zeta(t)$ ilə üst-üstə düşür, burada $b(\tau)=$ $=B(\tau)-\mathbf{m}^2=\mathbf{M}[\zeta(t+\tau)-\mathbf{m}]\,[\zeta(t)-\mathbf{m}]$, yəni (2) və (2a) şərtləri ödənildikdə [yəni $b(\tau)\to 0$ münasibəti $\tau\to\infty$ olduqda ödənildiyi bütün hallarda] (1) və ya (1a) limiti $\mathbf{M}\zeta(t)$ ilə üst-üstə düşür.

Birkhof – Xinçin teoremi $Y_\Phi(t)=\Phi[\zeta(t)]$ şəklində dar mənada bütün mümkün S. t. p.-lərə tətbiq oluna bilinir, burada $\Phi[\zeta(t)]$ – S. t. p. $\zeta(t)$-nin ixtiyari funksionalıdır və bu funksional riyazi gözləməsi olan təsadüfi kəmiyyətdir; əgər bütün belə $Y_\Phi(t)$ S. t. p.-ləri üçün uyğun $\hat{Y}_\Phi$ limiti $\mathbf{M}\,Y_\Phi$ ilə üst-üstə düşərsə, onda $\zeta(t)$ metrik tranzitiv S. t. p. adlanır. Qauss S. t. p. $\zeta(t)$ üçün dar mənada stasionarlıq şərti geniş mənada stasionarlıq şərti ilə üst-üstə düşür, metrik tranzitivlik, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\zeta(t)$ prosesinin spektral funksiyası $F(\lambda)$ λ-nın kəsilməz funksiyası olsun (bax, məs., [2], [3]). Ümumi halda S. t. p.-lərin metrik tranzitivliyi üçün sadə zəruri və kafi şərtlər yoxdur.

Metrik tranzitivliyə aid yuxarıda qeyd olunan nəticədən başqa, məhz Qauss S. t. p.-lərinə aid olan bir çox digər nəticələr də vardır; məs., belə proseslər üçün $\zeta(t)$ S. t. p.-nin realizasiyalarının (yəni müşahidə olunmuş ayrı-ayrı qiymətlərin) lokal xassələri, $\zeta(t)$ S. t. p.-nin realizasiyasının sıfırları ardıcıllığı və ya maksimumları haqqında, bu realizasiyanın verilmiş səddi kəsdiyi nöqtələrin statistik xassələri haqqında məsələlər ətraflı öyrənilmişdir (bax, məs., [8] – [10]). Hər hansı səddi kəsməyə aid alınan nəticələrə tipik misalda hökm olunur ki, geniş requlyarlıq şərtləri daxilində, müəyyən bir xüsusi zaman miqyasında (u-dan asılı olan və $u\to\infty$ olduqda sonsuzluğa sürətlə yaxınlaşan zaman parametri halında) Qauss S. t. p.-nin yüksək $x=u$ səddini kəsdiyi nöqtələrin çoxluğu $u\to\infty$ olduqda, intensivliyi vahidə bərabər Puasson axınına yaxınlaşır (bax, [3], [9], [10]).

Geniş mənada S. t. p.-lərə baxıldıqda, $\zeta(t)$ prosesinin qiymətlərinin bütün mümkün xətti kombinasiyalarının və bu xətti kombinasiyaların kvadratik orta mənada ardıcıllıqlarının limitlərinin Hilbert fəzası H_ζ daxil edilir və bu fəzada skalyar hasil $(Y_1,Y_2)=$ $=\mathbf{M}\,Y_1\,\overline{Y}_2$ düsturu ilə verilir. Bu halda a qeyd olunmuş ədəd olduqda $\zeta(t)\to\zeta(t+a)$ çevirməsi H_ζ fəzasını özünə inikas etdirən U_a xətti unitar operatorunu doğurur. Bu zaman U_a operatorlar ailəsi $U_aU_b=U_{a+b}$ şərtini ödəyir və $\zeta(t)=U_t\,\zeta(0)$ qiymətləri bütün U_a operatorları ilə özünə çevrilən nöqtələr çoxluğu (t kəsilməz olduqda bu əyri, diskret olduqda isə nöqtələrin hesabi ardıcıllığı) olur. Buna uyğun olaraq, geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsi funksional analiz terminləri ilə H_ζ Hilbert fəzasının $\zeta(t)=U_t\,\zeta(0)$ nöqtələri çoxluğunun öyrənilməsi kimi ifadə oluna bilinər, burada U_t – elə xətti unitar operatorlar ailəsidir ki, $U_aU_b=U_{a+b}$.

Geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsində $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin spektral ayrılışı və onun korrelyasion funksiyası $B(\tau)$-nun Furye – Stiltyes inteqralına ayrılışına əsaslanan spektral baxışlar mərkəzi yer tutur. Kəsilməz zamanlı S. t. p.-in korrelyasion funksiyası $B(\tau)$ Xinçin teoreminə əsasən (bax, [4]-də) (bu teorem Boxnerin müsbət müəyyən funksiyanın ümumi ifadəsi haqqında analitik teoreminin sadə nəticəsidir) həmişə

$$B(\tau) = \int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda}\, dF(\lambda) \qquad (3)$$

düsturu şəklində ifadə oluna bilir, burada $F(\lambda)$, – λ-nın məhdud monoton azalmayan funksiyasıdır, $\Lambda = (-\infty, \infty)$; müsbət müəyyən ardıcıllıqların ümumi şəkli haqqında Herqlots teoremində analoji olaraq isbat olunur ki, belə bir ifadə yalnız $\Lambda = [-\pi, \pi]$ halında diskret zamanlı S. t. p.-in korrelyasion funksiyası üçün də doğrudur. Əgər $B(\tau)$ korrelyasion funksiyası $|\tau| \to \infty$ olduqda olduqca sürətlə azalarsa [bu əksər hallarda tətbiqi məsələlərdə baş verir, bu şərtlə ki, $\zeta(t)$ əvəzinə $\zeta(t) - \mathbf{m}$ fərqinə baxılır, yəni fərz olunur ki, $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$], onda (3)-ün sağ tərəfindəki inteqral adi Furye inteqralına çevrilir, yəni

$$B(\tau) = \int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \qquad (4)$$

burada $f(\lambda) = F'(\lambda)$ – mənfi olmayan funksiyadır. $F(\lambda)$ funksiyası $\zeta(t)$ S. t. p.-nin **spektral funksiyası**, $f(\lambda)$ funksiyası isə onun **spektral sıxlığı** [(4) bərabərliyi ödənilərsə] adlanır. $\zeta(t)$ prosesinin spektral ayrılışı

$$\zeta(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) \qquad (5)$$

düsturu ilə ifadə oluna bilinir, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlarlı təsadüfi funksiyadır [yəni elə funksiyadır ki, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduqda $\mathbf{M}\, dZ(\lambda_1)\overline{dZ(\lambda_2)} = 0$], $\mathbf{M}|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$ şərtini ödəyir, sağ tərəfdəki inteqral isə inteqral cəmlərinin uyğun ardıcıllığının kvadratik orta limiti kimi anlaşılır. (5) ayrılışı geniş mənada ixtiyari S. t. p. $\zeta(t)$-yə təsadüfi amplitudlarlı və fazalarlı müxtəlif tezliklərli, bir-birilə qeyri – korrelyar harmonik rəqslərin çoxluğunun superpozisiyası kimi baxmağa əsas verir; bu halda $F(\lambda)$ spektral funksiyası və $f(\lambda)$ spektral sıxlığı λ tezliklərinin spektri üzrə $\zeta(t)$-nın tərkibinə daxil olan harmonik rəqslərin orta enerjisinin (və ya, daha dəqiq, gücünün) paylanmasını təyin edir [bununla bağlı tətbiqi araşdırmalarda $f(\lambda)$ funksiyası əksər hallarda S. t. p. $\zeta(t)$-nin **energetik spektri** (cərəyan spektri) və ya **güc spektri** adlanır].

(3) düsturu ilə verilən $B(\tau)$ korrelyasion funksiyasının spektral ayrılışından aydındır ki, H_ζ Hilbert fəzasının elementləri $\zeta(t)$-ləri $L^2(dF)$ Hilbert fəzasının elementləri $e^{it\lambda}$-lara çevirən $\zeta(t) \to e^{it\lambda}$ inikası H_ζ fəzasının əyrisi (və ya nöqtələrin hesabi ardıcıllığı) $\zeta(t)$-nin $L^2(dF)$ fəzasına izometrik inikasıdır, burada $L^2(dF)$, – Λ çoxluğunda modulunun kvadratı ilə $dF(\lambda)$ üzrə inteqrallanan kompleksqiymətli funksiyaların Hilbert fəzasıdır. Bu inikası sonra bütün H_ζ fəzasının $L^2(dF)$ fəzasına izometrik xətti $\mathcal{M}$ inikasına qədər davam etdirmək olar ki, bu da geniş mənada S. t. p.-lər nəzəriyyəsinin bir çox məsələlərini funksiyalar nəzəriyyəsinin məsələləri şəklində ifadə etməyə imkan yaradır.

Geniş mənada S. t. p. nəzəriyyəsinin böyük bir hissəsi belə proseslər üçün xətti approksimasiya məsələlərinin həlli metodlarına, yəni $\zeta(t)$-nin hər hansı «məlum» qiymətlərinin elə xətti kombinasiyasının tapılması metodlarına həsr olunmuşdur ki, bu xətti kombinasiya bu prosesin hər hansı «naməlum» qiymətini və ya hər hansı «naməlum» Y təsadüfi kəmiyyətini ən yaxşı yaxınlaşdıran (xətanın kvadratik ortasının minimumu mənasında) kombinasiyadır. Məs., S. t. p. $\zeta(t)$-nin optimal xətti ekstrapolyasiyası haqqında məsələ $t \leq 0$ olduqda $\zeta(t)$-nin «keçmiş qiymətlərindən» xətti asılı olan $\zeta(s)$, $s > 0$ qiymətinə ən yaxşı $\zeta^*(s)$ yaxınlaşmasının tapılmasından ibarətdir; optimal xətti interpolyasiya haqqında məsələ t-nin zaman oxunun s-in aid olduğu seçilmiş intervaldan olmayan bütün qiymətlərində $\zeta(t)$-nin qiymətlərindən xətti asılı olan və $\zeta(s)$-ə ən yaxşı yaxınlaşmanın tapılmasından ibarətdir; optimal xətti filtrasiya haqqında məsələ $t \leq 0$ olduqda $\zeta(t)$-nin qiymətlərindən xətti asılı olan hər hansı Y təsadüfi kəmiyyətinə ən yaxşı Y^* yaxınlaşmasının axtarılmasıdır; bu zaman əksər hallarda Y – hər hansı $t = s$ qiymətində $\zeta(t)$ ilə korrelyar bağlı, «siqnal» rolunu ifadə edən, S. t. p. $Y(t)$-nin qiymətidir, $\zeta(t) = Y(t) + N(t)$ – «siqnal» ilə onu «təhrif edən» $N(t)$ «küyünün» müşahidələrdən məlum olan cəmdir.

Yuxarıda qeyd olunan bütün məsələlər həndəsi olaraq, H_ζ Hilbert fəzasının (və ya onun genişlənməsinin) hər hansı nöqtəsindən bu fəzanın verilmiş altfəzasına perpendikulyar endirilməsinə gətirilir. Belə həndəsi interpretasiyaya və H_ζ ilə $L^2(dF)$ fəzalarının izomorfizminə əsaslanaraq, A. N. Kolmoqorov 1941-də (bax, [5]) diskret t zamanlı S. t. p. $\zeta(t)$-nin spektral funksiyası $F(\lambda)$ üzrə, $\zeta(t)$-nin qiyməti yalnız $t = s$ halında naməlum olduqda, optimal xətti ekstrapolyasiya və ya interpolyasiya xətasının kvadratik ortasını təyin etmək üçün ümumi düsturlar çıxarmışdır (bax, [2], [6], [7]). Ekstrapolyasiya məsələsinə tətbiqdə kəsilməz zamanlı S. t. p. $\zeta(t)$ üçün analoji nəticələri bir qədər sonra M. Q. Kreyn və K. Karunen (K. Karhunen; bax, məs., [2], [6], [7]) almışlar. N. Viner [11]-də isbat etmişdir ki, optimal xətti ekstrapolyasiya və filtrasiya haqqında məsələlər halında ən yaxşı $\zeta^*(s)$ və ya $Y^* = Y^*(s)$ yaxınlaşmalarının tapılması Viner – Hopf tipli hər hansı inteqral tənliyin və ya (diskret t halında) belə tənliyin diskret analoqunun həllinə gətirilə bilinər, bu isə belə tənliklərin həlli üçün işlənilmiş faktorizasiya metodunu tətbiq etməyə imkan verir. Kəsilməz zamanlı S. t. p. $\zeta(t)$-nin $t \leq 0$ halında bütün keçmiş qiymətləri deyil, yalnız sonlu $-T \leq t \leq 0$ intervalında qiymətləri məlum olduqda, bu prosesin optimal xətti ekstrapolyasiya və ya filtrasiyası haqqında məsələlər, həm də belə $\zeta(t)$-nin optimal xətti interpolyasiya məsələlərinin xüsusi şəkildə (simin ümumiləşmiş tənliyi) differensial tənliyin spektri üzrə bərpası haqqında bəzi məsələlərə gətirilə bilinir (bax, [12], [13]).

Optimal xətti ekstrapolyasiya, interpolyasiya və filtrasiya haqqında məsələlərin həllinə yuxarıda şərh olunan yanaşmalar $\zeta^*(s)$ və ya Y^*-nun axtarılan ən yaxşı yaxınlaşmaları üçün yalnız bəzi nadir hallarda olduqca sadə, aşkar düsturlar almağa

imkan yaradır; bu düsturları praktikada müvəffəqiyyətlə tətbiq etmək olur. Belə aşkar düsturların varlığının mühüm halı N. Vinerin [11]-də xüsusi olaraq araşdırdığı bir haldır ki, bu halda S. t. p. $\zeta(t)$-nin spektral sıxlığı $f(\lambda)$-nın $e^{i\lambda}$-ya nəzərən (t diskret olduqda) və ya λ-ya nəzərən (t kəsilməz olduqda) rasional olduğu haldır (bu zaman $t \le 0$ olduqda qiymətlər üzrə ekstrapolyasiya və filtrasiya məsələlərinə tətbiqdə). Sonradan isbat olunmuşdur ki, rasional spektral sıxlığa malik belə S. t. p.-lər üçün $-T \le t \le 0$ (bax, məs., [2], [4]) sonlu intervalında verilənlər üzrə xətti interpolyasiya və ya ekstrapolyasiya və filtrasiya haqqında məsələlərin də aşkar həlli sadəcə tapılır (bax, [2], [14]). Rasional spektral sıxlıqlı proseslərin xüsusi sadəliyi onunla izah olunur ki, belə S. t. p.-lər (və praktik olaraq yalnız bunlar) çoxölçülü stasionar Qauss – Markov prosesinin birölçülü komponentidirlər (bax, *Qauss – Markov prosesi*).

S. t. p. anlayışının bir çox mühüm ümumiləşmələri vardır. Bunlardan biri *ümumiləşmiş stasionar proses* anlayışıdır; digər çox istifadə olunan S. t. p.-in ümumiləşmiş anlayışları – hər hansı tərtib stasionar artımlarlı *təsadüfi proses* və *bircins təsadüfi meydan* anlayışlarıdır.

Əd.: [1] Слуцкий Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 252–68; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42–51; [5] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 255–63; [6] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [8] Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, пер. с англ. и франц., М., 1978; [9] Питербарг В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99; [10] Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzen H., Extremes and related properties of random sequences and processes, N. Y. – [a. o.], 1983; [11] Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., [1949]; [12] Крейн М. Г., «Докл. АН СССР», 1954, т. 94, № 1, с. 13–16; [13] Dym H., McKean H. P., Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem, N. Y. – [a. o.], 1976; [14] Яглом А. М., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1955, т. 4, с. 333–74.

STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES; böyük ədədlər qanunu « **стационарный случайный процесс;** закон больших чисел; law of large numbers for a **stationary random process** » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

STASİONAR TƏSADÜFİ PROSES; böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu « **стационарный случайный процесс;** усиленный закон больших чисел; strong law of large numbers for a **stationary random process** » – bax, *Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu* stasionar təsadüfi proseslər üçün.

STASİONARLIĞI, AXININ « стационарность потока; flow stationarity » – *giriş axınının* ehtimali rejiminin zaman üzrə dəyişməzliyini xarakterizə edən xassədir. A. s. onu ifadə edir ki, $(T, T+t)$ müddətində k sayda tələbin daxil olma ehtimalı T-dən asılı olmur və bu ehtimal yalnız k, t dəyişənlərinin funksiyasıdır.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987.

STASİONARLIQ geniş mənada « **стационарность** в широком смысле; **stationarity** in the wide sense » – bax, *Təsadüfi funksiya*; geniş mənada xassə.

STATİSTİK ANALİZ(i) təsadüfi meydanların « **статистический анализ** случайных полей; **statistical analysis** of random fields » – *təsadüfi meydanın* bir və ya bir neçə realizasiyası şəklində ifadə olunan verilənlər əsasında stoxastik nəticələrə həsr olunmuş riyazi statistika bölməsidir. Ən ümumi qoyuluşda hər hansı $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ oblastında $X(t)$ təsadüfi meydanı müşahidə olunur və müşahidə nəticələri üzrə təsadüfi meydanın xarakteristikaları haqqında statistik nəticələr əldə etmək tələb olunur (məs., meydanın naməlum orta qiymətini, korrelyasion funksiyasını qiymətləndirmək, təsadüfi meydanın paylanması haqqında müəyyən statistik hipotezləri yoxlamaq kimi). Təsadüfi meydanların S. a. intensiv inkişaf mərhələsindədir. Hal-hazırda məlum olan nəticələrin böyük əksəriyyəti bircins, bircins və izotrop, izotrop təsadüfi meydanlara aiddir (bax, [1] – [3]). Təsadüfi meydanların S. a. məsələləri avtomatik tənzimləmədə, statistik radiofizikada, statistik optikada, meteorologiyada, statistik hidrometeorologiyada, geologiyada, obrazların müəyyən edilməsi nəzəriyyəsində, hidrolokasiya səthlərinin nahamarlıq nəzəriyyəsində yaranır (bax, məs., [3] – [6]).

Reqressiya əmsallarının və təsadüfi meydanın naməlum orta qiymətinin qiymətləndirilməsi. Δ oblastında

$$X(t) = \sum_{i=1}^{q} \theta_i g_i(t) + Y(t)$$

təsadüfi meydanı müşahidə olunur, burada $g_i(t)$ – məlum, təsadüfi olmayan funksiyalar, θ_i – naməlum parametrlər, $Y(t)$ – riyazi gözləməsi $\mathbf{M}Y(t) = 0$ olan təsadüfi meydandır və $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ vektor parametrini qiymətləndirmək tələb olunur. Belə ifadə olunmuş məsələ təsadüfi meydanın xətti reqressiya əmsallarının qiymətləndirilməsi məsələsi adlanır; bircins təsadüfi meydanın naməlum orta qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi xüsusi hal kimi ($q = 1$, $g_1(t) \equiv 1$) bu məsələyə aid hesab olunur. Statistik qiymətlərin mühüm sinfi ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətləri sinfidir, yəni

$$\int_{\Delta} (X(t) - \sum_{i=1}^{q} \theta_i g_i(t))^2 dt$$

ifadəsini minimallaşdıran $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ parametrinin statistik qiymətləri – $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\Delta = (\hat{\theta}_{1\Delta}, \dots, \hat{\theta}_{q\Delta})$ vektor parametrlərinin sinfidir.

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\Delta$ statistik vektor parametrinin qiymətləndirilməsi xətti sistemlərin həllinə gətirilir və $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\Delta$ geniş fərziyyələrlə aşkar şəkildə tapılır. Məs., bircins təsadüfi meydanın ($q = 1$, $g_1(t) \equiv 1$) naməlum orta qiymətinin statistik qiyməti $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\Delta$ aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} X(t)\, dt,$$

burada $|\Delta|$, – Δ oblastının həcmidir (sahəsidir). Ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətləri meylsiz statistik qiymətlərdir; bunları hesablamaq üçün təsadüfi meydanın digər xarakteristikalarının heç biri haqqında bilgi tələb olunmur. Əksər hallarda fərz olunur ki, $X(t)$ təsadüfi meydanı $\{\Delta\}$ oblastlar sistemində müşahidə olunur və oblastlar müəyyən şəkildə sonsuzluğa qədər genişlənirlər. [2]-də ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətlərinin meylsiz və asimptotik normal olması üçün şərtlər göstərilmişdir. Burada həmçinin qeyri – xətti reqressiya halında ən kiçik kvadratlar metodunun statistik qiymətlərinin xassələri araşdırılmış, ən kiçik modullar metodunun statistik qiymətləri də ətraflı öyrənilmişdir.

Xətti reqressiya parametrlərinin statistik qiymətlərinin digər mühüm sinfi xətti (yəni müşahidələrin nəticələrilə xətti ifadə olunan) minimal dispersiyalı meylsiz statistik qiymətlərdir. Belə statistik qiymətlərin axtarılması xətti cəbri və ya korrelyasion funksiyalar vasitəsilə təyin olunan xətti inteqral tənliklərin həllinə gətirilir. Sferada müşahidə olunan izotrop təsadüfi meydanlar üçün [1]-də xətti reqressiyanın minimal dispersiyalı xətti meylsiz statistik qiymətləri aşkar şəkildə göstərilmişdir. Məs., r radiuslu $S_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = r\}$ sferasında müşahidə olunan izotrop təsadüfi meydanın naməlum orta qiymətinin statistik qiyməti

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_n(1)} X(r,\, u)\, m_n(du), \quad n \geq 2$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $m_n(\cdot)$, – $S_n(1)$ sferasında Lebeq ölçüsü, ω_n, – $S_n(1)$ sferasının səthi, $r \geq 0$, $u \in S_n(1)$, $t \in \mathbb{R}^n$ nöqtəsinin koordinatlarıdır. Beləliklə, bu halda minimal dispersiyalı xətti meylsiz statistik $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ qiyməti ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ statistik qiyməti ilə üst-üstə düşür.

Korrelyasion funksiyanın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi. $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ – orta qiyməti sıfra bərabər, korrelyasion funksiyası $B(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ naməlum olan geniş mənada bircins təsadüfi meydan, Δ, – $\mathbb{R}^n$-də verilmiş məhdud Borel çoxluğu, K – koordinat başlanğıcını özündə saxlayan kompakt olsun. $X(t)$ meydanının realizasiyasının müşahidəsi üzrə $h \in K$ olduqda $B(h)$ üçün statistik qiymət kimi

$$\hat{B}_{\Delta}^{(1)}(h) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} X(t) X(t+h)\, dt\,,$$

$$\hat{B}_{\Delta}^{(2)}(h) = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta \cap (\Delta - h)} X(t) X(t+h)\, dt,$$

$$\Delta - h = \{\, t \in \mathbb{R}^n;\ t = s - h,\ s \in \Delta \,\}$$

statistikalarından istifadə olunur, bunlar təsadüfi prosesin korreloqramına analoji olan, $B(h)$ korrelyasion funksiyasının qeyri – parametrik statistik qiymətləridir.

$\hat{B}_{\Delta}^{(1)}$ statistik qiyməti $\hat{B}_{\Delta}^{(2)}$ statistik qiymətindən sadə olsa da, $h \in K$ olduqda onu təqdim etmək üçün $X(t)$ meydanının $\Delta + k = \{\, t \in \mathbb{R}^n;\ t = s + u,\ s \in \Delta,\ u \in K \,\}$ çoxluğunda müşahidəsindən istifadə etmək zəruridir. $\hat{B}_{\Delta}^{(2)}$-ni təyin etmək üçün $X(t)$ meydanının müşahidəsindən $t \in \Delta$ olduqda istifadə olunmalıdır.

$\{\Delta\}$ oblastlar sistemi müəyyən surətdə sonsuzluğa qədər genişləndirildiyi halda $\hat{B}_{\Delta}^{(i)}$, $i = 1, 2$ statistik qiymətlərinin xassələri [2]-də tədqiq olunmuşdur. Məs.,

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{h \in K} \left| \hat{B}_{\Delta}^{(i)}(h) - B(h) \right| \to 0 \right\} = 1, \quad i = 1, 2$$

münasibətlərinin ödənilməsi üçün şərtlər tapılmışdır; həm də $K = \Pi\,[0,\ H\,] = \{t \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leq t_i \leq H_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ üçün elə şərtlər göstərilmişdir ki, bu şərtlər daxilində müntəzəm topologiyalı

$$X_{\Delta}^{(1)}(h) = |\Delta|^{1/2} \left(\hat{B}_{\Delta}^{(1)}(h) - B(h) \right),\ h \in \Pi\,[0, H\,]$$

meydanları və

$$X_{\Delta}^{(2)}(h) = |\,\Delta|^{1/2} \left(\hat{B}_{\Delta}^{(2)}(h) - \mathbf{M}\, \hat{B}_{\Delta}^{(2)}(h) \right), \quad h \in \Pi\,[0, H\,]$$

meydanları ilə K-da kəsilməz funksiyaların $C(K)$ fəzasında doğurulmuş bəzi ölçülər $\Delta \to \infty$ olduqda $C(K)$-da hər hansı limit Qauss ölçüsünə zəif yığılırlar. Bu isə bircins təsadüfi $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$ meydanının naməlum korrelyasion funksiyası $B(h)$, $h \in \Pi\,[0, H\,]$ üçün asimptotik etibarlı intervallar qurulmasına imkan verir. Bircins izotrop təsadüfi meydanın naməlum korrelyasion funksiyasının asimptotik etibarlı intervallarının qurulması üçün analoji yanaşma [2]-də istifadə olunmuşdur. Δ çoxluğunun qeyd olunduğu, lakin eksperimentatorun $X(t)$, $t \in \Delta$ meydanının bir çox asılı olmayan realizasiyalarına malik olduğu halda, bircins təsadüfi meydanın korrelyasion funksiyasının qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi məsələsinə də baxılmışdır. Burada $B(h)$-ın statistik qiymətləri kimi müşahidə olunmuş realizasiyaların sayı üzrə orta qiymətləri götürülmüş $\hat{B}_{\Delta}^{(i)}$ statistik qiymətlərini ($i = 1, 2$) götürmək olar. Bu statistik qiymətlərdən istifadə edərək, asılı olmayan realizasiyaların sayı qeyri – məhdud artdığı halda $X(t)$ meydanının naməlum korrelyasion funksiyası $B(h)$ üçün asimptotik etibarlı intervallar da qurmaq olur.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması. Statistik hipotezlərin yoxlanılması haqqında məsələyə mühüm misal küy fonunda siqnalın aşkar olunması məsələsidir. $Y(t)$ – təsadüfi meydan, $f(t)$ – təsadüfi olmayan funksiya (siqnal) olsun. İki hipotezə baxılır: H_1, – Δ-da müşahidə olunan $X(t)$ meydanı $X(t) = f(t) + Y(t)$ şəklindədir; H_0 – müşahidə olunan meydan $X(t) = Y(t)$ şəklindədir. Müşahidələrin nəticələri əsasında bu hipotezlərdən biri qəbul olunmalıdır.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsinin həllində $X_1(t) = f(t) + Y(t)$, $X_0(t) = Y(t)$, $t \in \Delta$ təsadüfi meydanlarının doğurduqları $\mu_1^{\Delta}(\cdot)$ və $\mu_2^{\Delta}(\cdot)$ ölçülərinin mütləq kəsil-

məzliyi və sinqulyarlığı anlayışları və bu ölçülərin Radon – Nikodim törəməsi – (doğruyaoxşarlıq nisbəti) $d\mu_1^\Delta / d\mu_2^\Delta$ anlayışı mühüm rol oynayır. Qauss bircins meydanlarının doğurduqları ölçülərin, bircins və izotrop təsadüfi meydanların doğurduqları ölçülərin mütləq kəsilməzlik və sinqulyarlıq şərtləri [1]-də göstərilmişdir. Məs., $Y(t)$ – Qauss izotrop təsadüfi meydan, $S(r)$, – r radiuslu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan sfera, $f(t)$ isə yalnız $r = |t|$-dən asılı olarsa, onda

$$\frac{d\mu_1^\Delta}{d\mu_0^\Delta} = \exp\left\{ \frac{f(r)}{b_0(r)} \int_{S_n} Y(r, u)\, m_n(du) - \frac{1}{2}\frac{\omega_n}{b_0(r)} f^2(r) \right\}$$

düsturu doğrudur, burada $b_0(\tau)$, – $Y(t)$-nin spektral ayrılışındakı əmsaldır.

Əd.: [1] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [2] Леоненко Н. Н., Иванов А. В., Статистический анализ случайных полей, К., 1986; [3] Van-marcke E., Random fields: analysis and synthesis, Camb. – L., 1983; [4] Grenander U., Abstract inference, N. Y., 1981; [5] Ripley B., Spatial statistics, N. Y., 1981; [6] Метерон Ж., Основы прикладной геостатистики, пер. с франц., М ., 1968.

STATİSTİK ANALİZ(i) təsadüfi proseslərin **« статистический анализ** случайных процессов; **statistical analysis** of a random process **»** – riyazi statistika və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin statistik məsələlərinin həlli və tədqiqinə həsr olunmuş bölməsidir.

***STATİSTİK ASILI ANSAMBLLAR « статистически зависимые ансамблы; statistical dependent ansambles »** – bax, *Diskret ansambl.*

***STATİSTİK ASILI OLMAMAZLIQ « статистическая независимость; statistical independence »** – bax, *Asılı olmamazlıq.*

***STATİSTİK ASILI OLMAMAZLIQ**(ğı) ansamblların **« статистическая независимость** ансамблей; **statistical independence** of ansambles **»** – bax, *Diskret ansambl.*

***STATİSTİK ASILI OLMAYAN ANSAMBLLAR « статистически независимые ансамблы; statistically independent ansambles »** – bax, *Diskret ansambl.*

***STATİSTİK ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR « статистически независимые события; statistically independent events »** – bax, *Asılı olmayan hadisələr.*

STATİSTİK CƏM « статистическая сумма; normalizing constant / factor » – *Gibbs paylanmasının* tərifinə daxil olan normalayıcı vuruqdur. Diskret $t \in \Lambda$ parametrli və qiymətləri ölçülü $(X, \mathscr{D}, \mu)$ fəzasının meydanından olan Gibbs paylanması halında S. c.

$$\mathrm{Z}_\Lambda = \int_{X^\Lambda} \exp\{-H(x_t,\, t \in \Lambda)\} \prod_{t\in\Lambda} \mu(dx_t)$$

inteqralı kimi təyin olunur, burada H – uyğun Gibbs paylanmasının hamiltonianıdır. X sonlu və ya hesabi, μ isə sayıcı ölçü olduqda, inteqral aydındır ki, cəmə çevrilir və bu termin də məhz bu xüsusiyyətlə əlaqədar yaranmışdır. $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ qabında N hissəcikdən ibarət sistemin Gibbs paylanması

$$Z_{N,\Lambda} = \int_{\Lambda^N} \exp\{-H(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N$$

inteqralı kimi təyin olunur; H – uyğun hamiltoniandır. Böyük kanonik və mikrokanonik ansambllarda Gibbs paylanmasının S. c.-i analoji təyin olunur. Gibbs təsadüfi meydanları nəzəriyyəsində S. c.-in mühüm əhəmiyyəti onunla izah olunur ki, meydanın sərbəst enerjisi bu cəmlə ifadə olunur, bu da öz növbəsində Gibbs meydanının sonluölçülü paylanmalarını ifadə etməyə imkan yaradır.

Əd.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

STATİSTİK DAYANIQLILIĞI, TEZLİKLƏRİN « статистическая устойчивость частот; statistical stability of frequencies » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi*.

STATİSTİK ERQODİK TEOREM « статистическая эргодическая теорема; mean ergodic theorem » – bax, *Erqodik teoremlər.*

STATİSTİK HƏLLEDİCİ QAYDALAR KATEQORİYASI « статистических решающих правил категория; category of statistical decision rules » – bütün Markov keçid ehtimalları ilə (riyazi statistikada həm determinik, həm də randomlanmış *həlledici qaydaları* təsvir edən), təbii kompozisiya əməli ilə yaradılan cəbri kateqoriyadır. Hər hansı ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasında bütün ehtimal paylanmalarının $\mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$ topluları S. h. q. k.-sıdır. Hər bir $\Pi : \mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A}) \to \mathrm{cap}(\Omega', \mathscr{A}')$ morfizmi,

$$(\mathbf{P}\Pi)\{\cdot\} = \int_\Omega \mathbf{P}(d\omega)\Pi(\omega, \cdot)$$

qaydası üzrə $\Pi(\omega, \mathscr{A}')$, $\omega \in \Omega$, $\mathscr{A}' \in \mathscr{A}$ keçid ehtimalı ilə verilir. Bundan başqa, S. h. q. k.-nın obyektlərini tenzor qayda ilə bir-birinə vurmaq olar (bax, [6]). Bu kateqoriya [3] və [4]-də birbirindən asılı olmadan qurulmuşdur. Bu kateqoriya elə həndəsə doğurur ki, burada $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\} \subset \mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$ ehtimal paylanmaları ailəsi – həndəsi fiqurlar, morfizmlər – affin çevirmələr rolunu oynayır. Ümumi parametrik çoxluğu Θ olan iki $\{\mathbf{P}_\theta\}$ və $\{Q_\theta\}$ ailəsi, statistik nəticə nəzəriyyəsində,

$$(\mathbf{P}_\theta \text{Ш})\{\cdot\} = Q_\theta\{\cdot\},\ (Q_\theta \text{Ж})\{\cdot\},\ \theta \in \Theta$$

şərtilə verilən iki Ш və Ж morfizmlərinin varlığı halında ekvivalent ailə hesab edilir. Riyazi statistikanın bir çox anlayışları bu həndəsənin invariant, kovariant və daha mürəkkəb ekvivariantlarıdır (məs., kafi statistika). Qrup hərəkətinə olan həndəsədən fərqli olaraq, kateqoriya həndəsəsində invariantdan (skalyar) başqa, monoton invariant (skalyar) anlayışı da vardır. Məs., S. h. q. k.-nın bütün obyektlərinin kvadratlarında təyin olunmuş $f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ funksionalı $f(\mathbf{P}\Pi, \mathbf{Q}\Pi)$ ifadəsi təyin olunmuş bütün $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \Pi$ toplularında $f(\mathbf{P}\Pi, \mathbf{Q}\Pi) \le f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ şərtini ödəyərsə, o, monoton invariant funksional adlanır. Məs., *nisbi entropiya* belə kəmiyyətlərdəndir.

Əd.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960 (добавление); [2] Ченцов Н. Н., Статистические решаю-

щие правила и оптимальные выводы, M., 1972; [3] Ченцов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 3, с. 511–14; [4] Morse N., Sacksteder R., «Ann. Math. Statist.», 1966, v. 37, № 1, p. 203–14; [5] Martin F., Petit J., Petit-Littaye M., «Ann. Inst. H. Poincare», ser. B., 1971, v. 7, № 2, p. 145–76; [6] Cencov N. N., «Math. Operations Forsch. Statist., ser. Statistic», 1978, v. 9, № 2, p. 267–76.

STATİSTİK HƏLLƏR NƏZƏRİYYƏSİ « статистических решений теория; statistical decision theory » – statistik eksperimentlərin planlaşdırılması, alınan nəticələrin analizi və araşdırılan obyekt haqqında müəyyən qərarların (mülahizələrin) qəbul olunması haqqında ümumi riyazi nəzəriyyədir. S. h. n. ümumi nöqteyi – nəzərdən riyazi statistikanın bütün əsas məsələlərini – *statistik qiymətləndirmə* nəzəriyyəsini, *statistik hipotezlərin yoxlanılması* nəzəriyyəsini, *eksperimentin planlaşdırılması* kimi məsələləri araşdırır və formalaşdırır.

Fərz olunur ki, araşdırılan obyekt verilmiş Θ parametrik fəzasının hər hansı abstrakt (naməlum) θ parametrinin qiymətilə xarakterizə olunur. Bu parametr üçün həllər fəzası adlanan, mümkün həllər çoxluğu olan $\mathscr{D}$-dən müəyyən bir d həllini (qərarını) qəbul etmək tələb olunur. Hər bir həllin qəbul edilməsi müəyyən itkilərə səbəb olur, bu itkilər isə obyekti xarakterizə edən θ parametrinin qiymətindən asılı olur. Θ və $\mathscr{D}$ fəzalarında uyğun olaraq, $\mathscr{T}$ və $\mathfrak{A}$ σ – cəbrlərinin verildiyi olduğu fərz olunaraq, *itki funksiyası* $L(\theta, d)$ mənfi olmayan ölçülən funksiya kimi $\Theta \times \mathscr{D}$ fəzasında təyin olunur.

Qərar qəbul etmək məqsədilə statistik eksperiment aparılır, bu eksperimentin nəticəsi x araşdırılan obyektlə bağlı olan təsadüfi element X (X təsadüfi kəmiyyət, vektor, funksiya, seçim ola bilər) üzərində müşahidələnəndir. Statistik eksperiment nəticəsinin qərar qəbul etmədə istifadəsi S. h. n.-ni qərar qəbul etmə ümumi nəzəriyyəsində fərqləndirir (bax, [6]). $\mathscr{X}$ təsadüfi elementinin ölçülən qiymətləri fəzasında [seçimi fəza adlandırılan $(\mathscr{X}, \mathfrak{X})$-də] təyin olunmuş $\mathbf{P}_\theta$ paylanması araşdırılan obyektin naməlum xarakteristikası θ-dan asılıdır. Seçimi fəzalar ailəsi $\mathscr{P} = \{(\mathscr{X}, \mathfrak{X}, \mathbf{P}_\theta),\ \theta \in \Theta\}$ – statistik struktur (ehtimal modeli) adlanır. Araşdırılan obyekt təsadüfi qaydada (hər hansı ehtimal paylanmasına uyğun olaraq) müəyyən bir obyektlər çoxluğundan seçildiyi halda θ müəyyən bir ϑ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası olur, ehtimal modeli (aprior adlanan) ϑ-nın mümkün paylanmaları ilə tamamlanır (bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə). Eksperimentlərin planlaşdırılması nəzəriyyəsinin mövzusu – rasional qərarların qəbul edilməsi məqsədilə, statistik eksperimentdə müşahidə olunacaq X təsadüfi elementinin təyin olunmasıdır (seçilməsidir); bu nəzəriyyəyə S. h. n.-nin bir hissəsi kimi baxmaq olar.

Riyazi statistikanın inkişafının başlanğıc mərhələsində qərarlar $\mathscr{X}$-dən $\mathscr{D}$-yə ölçülən $d(x)$ inikasları (*statistikaları*) əsasında qəbul olunurdu: əgər X-in müşahidəsi nəticəsi x olmuşsa, onda $d = d(x) \in \mathscr{D}$ həlli (qərarı) qəbul olunurdu.

Bu inikas, yəni $d : \mathscr{X} \to \mathscr{D}$ inikası S. h. n.-də randomlanmamış həlledici funksiya adlanır. Əsas statistik nəticənin optimal prosedurlarının qurulması ilə bağlı nəzəriyyənin sonrakı inkişafı, daha ümumi anlayış olan randomlanmış həlledici funksiya anlayışının yaranmasına səbəb oldu; bu funksiya $\mathscr{X}$-in $\mathscr{D}$-yə stoxastik inikası ilə təyin olunur. Bu ümumi halda, x nəticəsinə görə konkret bir $d(x)$ həlli deyil, x-dən asılı, $(\mathscr{D}, \mathfrak{A})$-da təyin olunmuş hər hansı $\varphi(\cdot \mid x)$ ehtimal paylanması təyin edilir; bu ehtimal paylanması $(\mathscr{X}, \mathfrak{X})$-dən $(\mathscr{D}, \mathfrak{A})$-ya keçid ehtimalıdır. φ paylanması qərar qəbuletmə qaydası və ya həlledici qayda adlanır.

Statistik eksperimentin hər bir qeyd olunmuş x nəticəsinə görə $\delta = \delta(x)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $\varphi(\cdot \mid x)$ randomlanmış həlledici funksiya adlanır, bu funksiya bəzən həlledici qayda φ ilə eyniləşdirilir.

Beləliklə, statistik eksperimentin nəticəsi x məlum olduqdan sonra, φ qaydasından istifadə edərək, qərar qəbul etmək üçün randomizasiya adlanan əlavə prosedur aparılır. Bu prosedur (randomizasiya) təsadüfi bir mexanizmin qurulmasından ibarətdir (məs., vergəcin və ya təsadüfi ədədlər cədvəlinin köməyilə), belə ki, bu mexanizmlə paylanması $\varphi(\cdot \mid x)$ olan δ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyalarını almaq olur. $\delta = \delta(x)$ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası d sonuncu qərar (həll) kimi qəbul olunur.

Randomlanmamış həlledici funksiyalar cırlaşmış $\varphi(\cdot \mid x)$ paylanmalarına (həllər fəzası $\mathscr{D}$-nin hər hansı bir $d(x)$ nöqtəsində topalanmış) uyğun olan randomlanmış həlledici funksiyaların xüsusi halıdır. Buna görə də, S. h. n.-də «həlledici funksiya» termini randomlanmış həlledici funksiya kimi anlaşılır.

İxtiyari həlledici δ funksiyasının keyfiyyəti orta itki kəmiyyəti –

$$R(\theta, \delta) = \mathbf{M}_\theta L(\theta, \delta(X)) =$$

$$= \int_{\mathscr{X}} \int_{\mathscr{D}} L(\theta, a)\, \varphi(da \mid x)\, \mathbf{P}_\theta(dx), \qquad (1)$$

ilə təyin edilir; $\theta \in \Theta$ arqumentinin funksiyası $R(\theta, \delta)$ δ həlledici funksiyasının *risk funksiyası* adlanır. Randomlanmamış həlledici funksiyalar halında (1) düsturu

$$R(\theta, \delta) = \int_{\mathscr{X}} L(\theta, \delta(x))\, \mathbf{P}_\theta(dx)$$

kimi ifadə olunur.

S. h. n.-nin əsas məsələsi orta itki kəmiyyətini minimallaşdıran δ həlledici funksiyasının qurulmasından ibarətdir. Belə $R(\theta, \delta)$ itkiləri naməlum θ parametrinin əsl qiymətindən asılı olduqlarına görə məqsədəuyğun olardı ki, elə həlledici funksiyalar tapılaydı ki, bunlar bütün $\theta \in \Theta$ qiymətləri üçün $R(\theta, \delta)$-nı minimallaşdıra bilsinlər. Bütün $\theta \in \Theta$ və ixtiyari δ həlledici funksiyası üçün $R(\theta, \delta^*) \le R(\theta, \delta)$ münasibətinin ödənilməsini təmin edən δ^* həlledici funksiyasına müntəzəm münasib həlledici funksiya deyilir. Bütün mümkün həlledici funksiyalar sinfində belə funksiyalar həmişə olmaya da bilər; bu halda S. h. n.-də daha dar siniflərə baxılır və bu siniflərdə bəzən müntəzəm münasib həlledici funksiya tapmaq mümkün olur. Meylsiz həlledici funksiyalar və invariant həlledici funksiyalar sinifləri belə dar siniflərdəndir.

Nəzərə alınmalıdır ki, həlledici funksiyalar sinfinin daralması qəbul olunacaq qərarın keyfiyyət itkisinə səbəb ola bilər, lakin bununla belə, hər bir halda təbii olaraq, yalnız elə həlledici funksiyaların $\mathscr{K}^*$ sinfinə baxmaqla kifayətlənmək olar ki, ixtiyari δ həlledici funksiyası üçün elə $\delta^* \in \mathscr{K}^*$ olsun ki, bu δ^* üçün bütün $\theta \in \Theta$ üçün

$$R(\theta, \delta^*) \le R(\theta, \delta) \qquad (2)$$

bərabərsizliyi ödənilsin. Belə $\mathcal{K}^*$ sinfi həlledici funksiyaların tam sinfi adlanır.

Tam sinfin altçoxluqlarından heç biri tam sinif olmazsa, belə sinif minimal tam sinif adlanır. Olduqca ümumi halda minimal sinif məqbul funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür: əgər elə δ^* həlledici funksiyası yoxdursa ki, bu funksiya üçün (2) bərabərsizliyi bütün $\theta \in \Theta$ qiymətlərində Θ parametrik fəzasının heç olmasa bir nöqtəsində ciddi bərabərsizliyi ödənilsin, onda δ həlledici funksiyası məqbul həlledici funksiya adlanır.

Minimal tam sinifdə müntəzəm münasib həlledici funksiya olmadığı hallarda, bu sinifdən yeganə həlledici funksiya seçmə prinsipinin olması zəruridir. Bu prinsip həlledici δ funksiyasının (və ya uyğun həlledici φ qaydasının) riski adlanan (risk funksiyasından fərqli olaraq, sadəcə, risk adlandırılan) orta itki kəmiyyətinin bəzi ədədi xarakteristikalarının minimallaşdırılmasına əsaslanır. Məs., risk funksiyasının qeyd olunmuş nöqtədə qiymətinə Vald riski deyilir. Bəzən ədəbiyyatda «risk funksiyası» və «Vald riski» anlayışları fərqləndirilmir. Sonuncu bəzən sadəcə risk adlandırılır. Digər risk nümunələri: risk funksiyasının θ üzrə ən böyük qiyməti, aprior risk, aposterior risk və bunlarla bağlı uyğun optimal həlledici funksiyaların xarakteristikaları – minimaks risk və Beyes riski kimi risklərdir. Bəzən riskə additiv əlavə kimi statistik eksperimentin aparılması ilə bağlı olan xərclər də daxil edilir; bu halda risk tam risk adlanır. Optimal həlledici funksiyaların qurulması üçün hər bir risk növünə müvafiq uyğun yanaşma vardır. Məs.:

Beyes yanaşması. Fərz olunur ki, ölçülən parametrik $(\Theta, \mathcal{T})$ fəzasında aprior paylanma adlanan G paylanması verilir və bu paylanma vasitəsilə ixtiyari δ həlledici funksiyası üçün aprior risk:

$$R_G(\delta) = \int_{\Theta} R(\theta, \delta)\, G(d\theta)$$

funksiyası daxil olunur, bu funksiya tam orta itki kəmiyyətini təyin edir. Aprior riskin minimum qiymət almasını təmin edən δ_θ həlledici funksiyası Beyes həlledici funksiyası, belə optimal həlledici funksiyanın aproir riski $R_G(\delta_G)$ Beyes riski adlanır.

Statistik məsələlərin geniş sinfində Beyes həlledici funksiyaları vardır və G paylanması $(\Theta, \mathcal{T})$ fəzasında bütün ehtimal ölçülərinin və onların limitlərinin (həlledici funksiyaların müəyyən zəif yığılma topologiyasında) çoxluğunda dəyişərsə, bütün Beyes həlledici funksiyalar çoxluğu həlledici funksiyaların tam sinfini əmələ gətirir.

Statistik məsələlərə Beyes yanaşmasının iki müxtəlif aspekti fərqləndirilməlidir. Bir sıra konkret statistik araşdırmalarda parametrin naməlum qiyməti, həqiqətən də, G paylanmasına malik hər hansı təsadüfi kəmiyyətin realizasiyasıdır (məs., *Statistik qəbul nəzarəti*). Bu halda aprior risk tam orta itki kəmiyyətini həqiqətən xarakterizə edir; lakin G məlum olmadığı halda, optimal həlledici funksiyaların qurulması üçün Beyes yanaşması praktik olaraq, əsas etibarilə, empirik *Beyes yanaşması* çərçivəsində mümkündür. Digər tərəfdən, statistik məsələlərin elə geniş sinfi də vardır ki (məs., hər hansı fiziki konstantın qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi), bu məsələlərdə θ-ya təsadüfi kəmiyyətin realizasiyası kimi baxmaq olmaz və bu halda G çəki funksiyası, aprior risk isə həlledici funksiyanın keyfiyyətinin formal ədədi xarakteristikasıdır. Bu halda aprior paylanmaya Beyes həlledici funksiyalarının tam sinfinin münasib parametrizasiyası kimi baxmaq olar.

Minimaks yanaşma risk funksiyasının ən böyük qiyməti – $\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta)$-nın minimallaşdırılması şərtindən həlledici funksiyanın seçilməsini təklif edir. Belə ekstremal məsələnin həlli minimaks həlledici funksiya, $\inf_{\delta} \sup_{\theta} R(\theta, \delta)$ isə minimaks risk adlanır.

Olduqca ümumi halda minimaks həlledici funksiya vardır və bu funksiya

$$\inf_{\delta} R_{G^*}(\delta) = \sup_{G} \inf_{\delta} R_G(\delta)$$

şərtini ödəyən, çox da münasib olmayan G^* aprior paylanmasına nəzərən Beyes (ümumiləşmiş Beyes) həlledici funksiyasıdır.

Bu halda minimaks həlledici funksiyanın risk funksiyası sabitdir və onun qiyməti çox da münasib olmayan paylanmaya nəzərən Beyes riskinə bərabərdir.

Minimaks yanaşma θ parametrinə nəzərən aprior informasiya olmadığı hallarda çox istifadə olunur və statistik eksperimentin optimal dayanma anının planlaşdırılmasında mühüm rol oynayır. Minimaks yanaşmanın tətbiqi praktikada özünü doğrultmur, çünki, bu yanaşmada qərar qəbul edən statistik ən pis halda orta itki kəmiyyətinə əsaslanır; belə itkilərin minimallaşdırılması isə, bir qayda olaraq, parametrik fəzanın digər nöqtələrində Vald riskinin kəskin surətdə artmasına səbəb olur.

Həlledici funksiyaların seçilməsinə müxtəlif yanaşmalar mövcuddur (bax, *Optimallıq*(ğ ı) statistik prosedurların).

S. h. n.-nin daxil edilmiş anlayışları və metodlarını riyazi statistikanın klassik nəzəriyyəsinin iki əsas problemi timsalında illüstrasiya etmək olar.

Misal 1. (parametrin qiymətləndirilmə problemi). Parametrik qiymətləndirmənin statistik problemi, adətən, aşağıdakı kimi ifadə olunur: sonluölçülü $\theta \in \Theta$ naməlum parametri üçün paylanması $\mathbf{P}_\theta$ olan X təsadüfi elementinin müşahidə nəticəsi x-ə görə $\hat{\theta}(x)$ nöqtəvi statistik qiymətini təyin etmək tələb olunur. S. h. n. nöqteyi – nəzərindən məsələnin həlləri fəzası kimi Θ parametrik fəzası, həlledici funksiya kimi $\hat{\theta}$ statistik qiyməti götürülür. İtki funksiyası, adətən, yalnız θ ilə qəbul olunmuş d: $L(\theta, d) = l\left(\left|\theta - d\right|\right)$ həlli (statistik qiymət) arasındakı fərqdən asılı olmaq şərtilə seçilir, $l(0) = 0$. Məs., $l(p) = p^2$ kvadratik itki funksiyasıdır və əgər $p < \Delta$ olarsa, $l(0) = 0$, əks halda $l(p) = 1$, – 0 – 1 tipli itki funksiyasıdır. Kvadratik itki funksiyası halında statistik qiymətin kvadratik orta xətası risk kimi qəbul edilir; 0 – 1 tipli itki funksiyası halında isə risk $(\delta(X) - \Delta,\ \delta(X) + \Delta)$ intervalından kənarda yerləşən oblastın θ-nın əsl qiymətini daxilə alması ehtimalıdır. S. h. n.-nin əsas anlayışları Beyes həlledici funksiyası, minimaks həlledici funksiya və s. kimi anlayışlar statistik qiymətləndirilmə probleminində «Beyes statistik qiyməti», «minimaks statistik qiymət» kimi terminlərlə konkret şəkildə ifadə olunur.

Misal 2 ($k \ge 2$ sayda sadə hipotezin fərqləndirilməsi). $\mathcal{P}$ statistik strukturunda Θ çoxluğu sonlu sayda $\theta_1, \ldots, \theta_k$ nöqtələrindən ibarət olsun. Statistik problem k

sayda $H_i : \theta = \theta_i$, $i = 1, \ldots, k$ hipotezlərindən birinin doğruluğunu yoxlamaqdır. S. h. n. çərçivəsində baxılan statistik problem sonlu həllər fəzası $\mathscr{D} = (d_1, \ldots, d_k)$ ilə təyin olunur, burada d_i, – H_i hipotezinin qəbul edilməsi qərarıdır, $i = 1, \ldots, k$. $L(\theta_j, d_i)$ itki funksiyası

$$L(\theta_j, d_i) = \begin{cases} 0, & \text{əgər } i = j \text{ olarsa,} \\ 1, & \text{əgər } i \neq j \text{ olarsa.} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunur.

Həlledici qayda k r i t e r i adlanır və $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ vektor – funksiyası ilə təyin olunur: $\varphi(x)$-in i-ci komponenti $\varphi_i(x)$ randomizasiya proseduru nəticəsində H_i hipotezinin qəbul olunması ehtimalına bərabərdir, bu şərtlə ki, X-in müşahidə nəticəsi x-ə bərabər olsun; $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = 1$. φ kriterisinin risk funksiyası θ_i nöqtəsində H_i hipotezi doğru olduğu halda onun qəbul edilməməsi ehtimalına bərabərdir. Bu halda da, qiymətləndirilmə məsələsində oluduğu kimi, S. h. n.-nin müvafiq terminləri «Beyes kriterisi», «minimaks kriteri» kimi terminlərlə konkret şəkildə ifadə olunur.

S. h. n.-nin yuxarıda qeyd olunmuş problemləri, əsas etibarilə, riski minimallaşdıran həlledici funksiyaların qurulması məsələlərini əhatə edirdi.

S. h. n.-nin praktik cəhətdən daha mühüm digər məsələsi statistik nəticənin alınması üçün zəmanətli prosedurun qurulması məsələsidir. Problemin mahiyyəti o faktla bağlıdır ki, həlledici funksiyaların optimallığı keyfiyyətli qərar qəbul etməyə zəmanət vermir, belə ki, risk qəbulolunmayacaq dərəcədə böyük ola bilər. Lakin statistik eksperimenti müvafiq surətdə planlaşdıraraq, yəni eksperimentdə müşahidə olunacaq araşdırılan obyekt haqqında ən informativ xarakteristikalar seçərək və kifayət qədər çox müşahidələr apararaq, risk kəmiyyətini kiçiltmək olar.

Beləliklə, S. h. n. çərçivəsində statistik nəticənin zəmanətli olması problemi risk kəmiyyəti üçün verilən məhdudiyyətlərin yerinə yetirilməsinə zəmanət verən, statistik eksperimentin keçirilməsi ilə yaranan xərcləri minimallaşdıran statistik prosedurun (müşahidələrin idarə olunma sxemləri, statistik eksperimentin dayandırılması anı və qərar qəbul olunma qaydaları) qurulmasından ibarətdir. Bu problem iki hipotezin yoxlanılması məsələsində aşağıdakı kimi illüstrasiya olunur.

M i s a l 3. $k = 2$ olduğu, yəni iki hipotezin olduğu hal üçün misal 2-də verilmiş statistik problemə baxılır; X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı şəkildə formalaşır. $X_1, X_2, \ldots$ – paylanmaları θ-dan asılı, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun. Statistik eksperiment bir sıra addımla aparılır: hər bir n nömrəli $(n = 1, 2, \ldots)$ hər bir addımda X_n təsadüfi kəmiyyəti müşahidə olunaraq müşahidənin nəticəsi x_n qeyd olunur və sonra iki hipotezdən birinin qəbul edilməsi qərarı ilə müşahidələrin aparılıb-aparılmaması məsələsinə baxılır. Eksperimentin dayandırılması (müşahidələrin aparılmaması) randomlanmış dayanma qaydası $\varphi_s = \{\varphi_n^s(x^{(n)}),\ n = 1, 2, \ldots\}$ vasitəsilə aparılır, burada $\varphi_n^s(x^{(n)})$ – eksperimentin nəticəsi n-ci addımda $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$ olduqda eksperimentin dayandırılması (randomlanma prosedurunun aparılması ilə) ehtimalıdır. Eksperimentin dayandırılması qaydası Markov dayanma anı – ν təsadüfi kəmiyyətini (seçimin təsadüfi həcmi) doğurur və bu halda $X = (X_1, \ldots, X_\nu)$ qırılan diskret təsadüfi proses olur. Statistik prosedur (kriteri) bu halda $\varphi = \langle \varphi_s, \varphi_d \rangle$ cütü ilə təyin olunur, burada φ_d – statistik eksperiment dayandırılan anda qərar qəbulu üçün qaydadır.

Zəmanətlilik problemi elə φ kriterisinin qurulmasından ibarətdir ki, $R(\theta_i, \varphi) \leq \alpha_i$, $i = 1, 2$ Vald riski üçün verilmiş (α_1, α_2) məhdudiyyətləri ödənilir, belə ki, bu halda ν seçiminin orta həcminin ən böyük qiyməti, yəni $\max(\mathbf{M}_{\theta_1}\nu, \mathbf{M}_{\theta_2}\nu)$ minimallaşır (bax, *Ardıcıl analiz*).

Statistik eksperimentin hər bir addımında yalnız müşahidələrin davam edilməsi məsələsinə deyil, həm də növbəti addımda müşahidə olunacaq təsadüfi kəmiyyətin seçilməsi məsələsini əhatə edən daha mürəkkəb məsələlərə reqression eksperimentlərin planlaşdırılması nəzəriyyəsində baxılır. Belə tipli məsələlərdə statistik prosedura φ_l komponenti əlavə olunur – $\varphi = \langle \varphi_l, \varphi_s, \varphi_d \rangle$ qaydası seçilir.

Beyes yanaşması çərçivəsində zəmanətli qaydaların qurulmasında tələb olunan məhdudiyyətlər bəzən tam aprior risk üzərinə deyil, eyni bir d qərarının qəbulu ilə sona yetmiş statistik eksperimentlərin orta itki kəmiyyəti üzərinə qoyulur; məs., statistik qəbul nəzarətində məhdudiyyətlər məmulatın müəyyən bir partiyasının qəbulu ilə bağlı və (ayrıca) onun qüsurlu olması ilə bağlı orta itki kəmiyyətləri üzərinə qoyulur.

Statistik nəticənin zəmanətliliyi probleminə belə yanaşma (B o l ş e v y a n a ş m a s ı) d – a p o s t e r i o r y a n a ş m a adlanır.

Əd.: [1] В а л ь д А., в сб.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967, с. 300–522; [2] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [3] L e C a m L., «Ann. Math. Statist», 1955, v. 26, p. 69–81; [4] F e r g u s o n T. S., Mathematical statistics. A decision theoretic approach, N. Y. – L., 1967; [5] B e r g e r J. O., Statistical decision theory, N. Y. – [a. o.], 1980; [6] Д е Г р о о т М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974; [7] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [8] Ч е н ц о в Н. Н, Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [9] Х о л е в о А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980; [10] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ, М., 1975; [11] В о л о д и н И. Н., в сб.: Исследования по прикладной математике, в. 10, [Каз], 1984, с. 13–53.

STATİSTİK HƏLLƏRİN ÜMUMİ NƏZƏRİYYƏSİ

« статистических решений общая теория; general statistical decision theory » – statistik qeyri – müəyyənlik vektor fəzanın hər hansı qabarıq $\mathfrak{S}$ altçoxluğunun nöqtələri – abstrakt *vəziyyətləri* ilə təsvir olunduğu hallarda, optimal *həlledici qaydaları* öyrənən nəzəriyyədir.

Statistik struktur $\{S_\theta : \theta \in \Theta\} \subset \mathfrak{S}$ vəziyyətlər ailəsinin verilməsilə təyin olunur, burada Θ – həllərin ölçülən fəzası $\mathscr{U}$-nun və hər bir $\theta \in \Theta$ qiymətində $u \in \mathscr{U}$ üzrə aşağıdan məhdud və ölçülən $W_\theta(u)$ itki funksiyasının naməlum parametri θ-nın qiymətlər çoxluğudur.

Vəziyyətlər çoxluğu $\mathfrak{S}$-nın $\mathscr{U}$-da təyin olunmuş ehtimal paylanmaları çoxluğu $\mathscr{P}(\mathscr{U})$-ya affin inikası $\mathbf{M} : \mathbf{S} \to \mu_S(du)$ a b s t r a k t h ə l l e d i c i q a y d a adlanır. Verilmiş θ üçün $\mathbf{M}$ həlledici qaydasının o r t a r i s k i

$$\mathscr{R}_\theta\{\mathbf{M}\} = \int_{\mathscr{U}} W_\theta(u)\mu_{S_\theta}(du)$$

düsturu ilə təyin olunur və bütün həlledici qaydalar çoxluğunda affin funksiyadır.

Adi (klassik) statistik həllər nəzəriyyəsi ilə analoji olaraq, məqbul, minimaks, Beyes və s. həlledici qaydaları formalaşır. $\mathfrak{S}$ vəziyyətlər çoxluğunun müşahidələrin hər hansı Ω fəzasında paylanmalar çoxluğu olduğu klassik nəzəriyyədəki nəticələrin əksər hissəsi, müvafiq ümumiləşmə nəticəsində, vəziyyətlər çoxluğunun ixtiyari halı üçün də alınmışdır. Eyni zamanda S. h. ü. n. praktiki maraq kəsb edən *hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin kvant nəzəriyyəsinin* elə sxemini əhatə edir ki, bu sxemdə $\mathfrak{S}$ hər hansı Hilbert fəzasında sıxlıq operatorlarının çoxluğudur və bu sxem prinsipial olaraq statistik həllərin klassik nəzəriyyəsinə gətirilə bilinmir.

Əd.: [1] Холево А. С., Исследования по общей теории статистических решений, «Труды МИАН», 1976, т. 124; [2] Ozawa M., «Repts Math. Phys.», 1980, v. 18, p. 11–28.

STATİSTİK HİDROMEXANİKA « статистическая гидромеханика; statistical hidromechanics » – hidromexanika tənliklərinin ehtimali xassələri öyrənilən nəzəriyyədir.

Əd.: [1] Математическая физика. Энциклопедия, M., 1998, c. 569–72.

STATİSTİK HİPOTEZ « статистическая гипотеза; statistical hypothesis » – *ehtimal paylanması* haqqında müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya proseslərə əsaslanan müəyyən fərziyyədir. Müşahidə nəticələri, adətən, təsadüfi kəmiyyətlərin sonlu və ya sonsuz hər hansı çoxluğunun realizasiyası kimi ifadə olunur və S. h. bu təsadüfi kəmiyyətlərin birgə paylanmasının hər hansı müəyyən paylanmalar sinfinə aid olması haqqında fərziyyə kimi formalaşır. S. h. kimi elə bu paylanmalar sinfinin özü də anlaşılır. Əgər bu sinif yalnız bir elementdən ibarətdirsə, onda S. h. sadə hipotez adlanır, əks halda – mürəkkəb S. h. adlandırılır. Yəni sadə S. h. müşahidələrin paylanması haqqında müəyyən birqiymətli təyin olunan fərziyyə ifadə edir. Mürəkkəb S. h.-ə misal paylanmanın naməlum parametrə qədər dəqiqliklə verilməsidir. S. h. *statistik hipotezlərin yoxlanılması* məsələlərinin qoyuluşuna daxildir.

STATİSTİK HİPOTEZLƏRİN YOXLANILMASI « статистических гипотез проверка; testing statistical hypotheses » – müşahidə olunan təsadüfi hadisə və ya prosesi təsvir edən ehtimal paylanması haqqında əvvəlcədən irəli sürülmüş *statistik hipotezlərdən* birinin doğru olub-olmadığı haqqında qərar qəbuletmə problemidir. İki hipotezli məsələlərə daha çox təsadüf olunur və bu halda $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ seçimi fəzasında təyin olunmuş mümkün $\mathbf{P}$ paylanmalarının ailəsi $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, iki – $H_0 = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ və $H_1 = \mathscr{P} \setminus H_0 = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta_1\}$, $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ altçoxluqlarına ayrılır və müşahidə nəticəsi $X \in \mathfrak{X}$ üzrə iki: $\mathbf{P} \in H_0$ və ya $\mathbf{P} \in H_1$ müddəalarından birini qəbul etmək tələb olunur. H_0 və H_1 işarələmələri əksər hallarda hipotezlər üçün istifadə olunur. H_0 hipotezi, adətən, əsas və ya ilkin hipotez, H_1 hipotezi isə alternativ hipotez və ya alternativ adlandırılır. Bu terminologiya H_0 və H_1 hipotezlərinə görə S. h. y. məsələsinin qoyuluşunun qeyri – simmetrikliyi ilə bağlıdır (bax, aşağı).

Əgər H_i, $i = 0, 1$ yalnız bir elementdən ibarətdirsə, onda belə hipotez sadə, əks halda mürəkkəb hipotez adlanır. X-in müşahidəsi üzrə H_0 və H_1-in qəbul olunması üçün ixtiyari qayda statistik kriteri adlanır. Praktikada, adətən, $S \subset \mathfrak{X}$ kritik çoxluğunun verilməsi ilə təyin olunan kriterilərdən (randomlanmamış) istifadə olunur və X-in müşahidələri nəticəsi bu çoxluqdan olduğu halda H_0 hipotezi qəbul olunmur, yəni qəbul olunur ki, $\mathbf{P} \in H_1$, əks halda (yəni $X \in \mathfrak{X} \setminus S$) olarsa, H_0 hipotezi qəbul olunur.

Məs., Bernulli sınaqlarında n-in kifayət qədər böyük qiymətlərində «müvəffəqiyyətlərin» nisbi tezliyinin $1/2$-dən olduqca fərqlənməsi sınaq nəticələrinin eyniehtimallı olması hipotezinə zidd olur. Yəni $H_0 = \{\theta = 1/2\}$ hipotezini qəbul etməmək məqsədəuyğun olur və bu halda $H_1 = \{\theta \neq 1/2\}$ hipotezi məqsədəuyğun sayılır (θ «müvəffəqiyyət» ehtimalıdır) ki, bu halda müvəffəqiyyətlər sayı ν

$$S = \{0,\ 1,\ m,\ n - m,\ ...,\ n\} \qquad (1)$$

çoxluğundan qiymətlər alır və burada m elə seçilir ki, $\mathbf{P}\{\nu \in S \,|\, \theta = 1/2\}$ ehtimalı kifayət qədər kiçik olsun. Ümumiyyətlə, H_0 və H_1 hipotezlərini etibarlı fərqləndirmək üçün S çoxluğu elə seçilməlidir ki, X-in S-dən olması $\mathbf{P} \in H_0$ hipotezi şərtində az ehtimallı, $\mathbf{P} \in H_1$ hipotezi şərtində isə kifayət qədər böyük ehtimallı olsun.

Bu tələb aşağıdakı kimi ifadə olunur. Kriterini tətbiq etdikdə iki növ səhvə yol verilə bilinər. H_0 hipotezi əslində doğru olduğu halda $\mathbf{P} \in H_1$ qərarı qəbul olunur, onda bu 1-ci növ səhv adlanır. 2-ci növ səhv H_1 alternativi əslində doğru olduğu halda, H_0 hipotezinin qəbul edilməsinə deyilir. Kritik çoxluğu S olan kriteri üçün 1-ci növ səhv $\mathbf{P} \in H_0$, lakin müşahidənin nəticəsi $X \in S$ olduğu halda baş verir. Uyğun olaraq, $\mathbf{P} \in H_1$, $X \in \mathfrak{X} \setminus S$ olduqda isə 2-ci növ səhv baş verir.

Kriteri elə seçilməlidir ki, səhv ehtimalları mümkün qədər kiçik olsun. Lakin hər iki səhvi məhdud olmayaraq azaltmaq, ümumiyyətlə, mümkün deyildir: birinin azaldılması, digərinin artmasına səbəb olur. S. h. y.-na ən çox yayılmış yanaşma ondan ibarətdir ki, 1-ci növ səhvin ehtimalı əvvəlcədən verilmiş kiçik $\alpha > 0$ ədədi ilə məhdudlanır (bax, *Mühümlük ölçüsü*) və bu məhdudiyyəti ödəyən kriterilər sinfində 2-ci növ səhv ehtimalı mümkün olduqca kiçik olan kriteri axtarılır. Bir qayda olaraq, bu ehtimalı $\theta \in H_1$ üzrə müntəzəm kiçik etmək olmur. Buna görə də, etibarlılığı verilmiş α ilə nəzarət olunan « H_0 hipotezini qəbul etməmək» qərarından fərqli olaraq, « H_0 hipotezini qəbul etmək» qərarı yalnız onu ifadə edir ki, H_0 hipotezi müşahidə nəticələri ilə uzlaşır, $\mathbf{P}$-nin H_0-dan mümkün yayınması kifayət dərəcədə böyük olmur ki, bu yayınma verilmiş eksperimentdə nəzərə çarpsın.

S. h. y. proseduru ümumi şəkildə $\varphi\colon \mathfrak{X} \to [0, 1]$ kritik funksiyası ilə verilir və bu prosedur ondan ibarətdir ki, X-in müşahidəsində əlavə: ehtimalları $\varphi(X)$ və $1 - \varphi(X)$ olan iki nəticəsi olan təsadüfi sınaq aparılır; birinci nəticə baş verdikdə H_0 hipotezi qəbul olunmur, ikinci nəticə baş verdikdə H_0 qəbul olunur. Bununla da, bütün kriterilər sinfi qiymətləri $[0, 1]$-dən olan, $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ fəzasında bütün ölçülən φ funksiyalarının çoxluğu

kimi təsvir olunur. Əgər φ yalnız 0 və 1 qiymətlərini alırsa, kriteri randomlanmamış kriteri adlanır, bu hal əvvəldə baxılan $S=\{x:\varphi(x)=1\}$ halına uyğundur. Əks halda kriteri randomlanmış kriteri adlanır.

Əgər X $\mathbf{P}_\theta$, $\theta\in\Theta$ paylanmasına malikdirsə, onda kritik funksiyası φ olan kriteri (və ya qısaca, φ kriterisi) H_0 hipotezini

$$\beta_\varphi(\theta)=\mathbf{M}_\theta\,\varphi(X)=\int\varphi(x)\,\mathbf{P}_\theta(dx),\ \theta\in\Theta \qquad (2)$$

ehtimalı ilə qəbul etmir. $\theta\in\Theta_0$ olduqda, $\beta_\varphi(\theta)$ funksiyası φ kriterisinə müvafiq 1-ci növ səhv ehtimalı kimi interpretasiya olunur, $\sup[\beta_\varphi(\theta);\ \theta\in\Theta_0]$ kəmiyyəti isə φ kriterisinin ölçüsü adlanır. 2-ci növ səhv ehtimalı $1-\beta_\varphi(\theta)$-ya bərabərdir, $\theta\in\Theta_1$. Bu ehtimalın kiçik olması tələbi φ kriterisinin güc funksiyası adlanan $\beta_\varphi(\theta)$, $\theta\in\Theta$ funksiyasının özünün 1-ə yaxın olması tələbi ilə eynigüclüdür. Beləliklə, S. h. y. məsələlərində kriterinin seçilməsi

$$\beta_\varphi(\theta)\le\alpha,\quad \theta\in\Theta_1 \qquad (3)$$

şərti ilə məhdudlanır və belə kriterilər sinfində gücü ən böyük

$$\beta_\varphi(\theta),\quad \theta\in\Theta_1 \qquad (4)$$

kriterisinin tapılmasına səy edilir.

(3) şərti ödənildiyi halda (4) funksionalları ailəsinin maksimizasiyası məsələsinin həllinin olduğu statistik modellərin nisbətən dar sinifləri mövcuddur. Əgər H_0 və H_1 sadə hipotezlərdirsə, onda bu məsələnin konstruktiv həlli *Neyman – Pirson lemmasına* əsasən alınır. H_1 alternativi sadə hipotez olduğu halda qeyd olunan məsələnin həlli əvvəlcədən mövcuddur. H_1 mürəkkəb hipotez olduğu halda bu məsələnin həlli yalnız olduqca spesifik H_0 və H_1 hipotezləri ailəsi üçün vardır (bax, *Müntəzəm ən güclü kriteri*).

Misal 1. «Müvəffəqiyyət» ehtimalı θ, $0\le\theta\le1$ olan n sayda Bernulli sınaqlarının nəticəsi üzrə $H_1=\{\theta>1/2\}$ hipotezinə alternativ $H_0=\{\theta\le1/2\}$ hipotezi yoxlanır. Məs., yeni çeşid toxumların yoxlanılması məsələsi belə praktiki məsələdir. n sayda bircins, iki hissəyə bölünmüş sahələrdə yeni çeşid və «nəzarətçi» çeşid toxumlar əkilir və bunların məhsuldarlığı müqayisə olunur. Əgər yeni çeşidin məhsuldarlığı digəri ilə müqayisədə çoxdursa, bu hal «müvəffəqiyyət» kimi qeyd olunur. Təsadüfi dəyişikliklər nəzərə alınmaqla, $\theta=1/2$ olması məhsuldarlıqda fərqin olmadığına, θ-nın $1/2$-dən fərqli olması isə bu və ya digər çeşidin məhsuldarlığının artıq olduğuna dəlalət edir. H_0 hipotezi yeni çeşid toxumun üstün olmadığı fərziyyəsini ifadə edir. Əgər H_0 hipotezi qəbul olunmursa, onda yeni çeşidin məhsuldarlığının müqayisədə çox olması nəticəsi çıxarılır; bu müddəa onun etibarlılığına $\le\alpha$ ehtimalı ilə nəzarət edərək səhv ola bilər. Əks halda, belə nəticə çıxarılır ki, çeşidlərin bir-birindən üstünlüyü yoxdur, ya da ki, bu o qədər azdır ki, onu müəyyən etmək olmur.

Bu misalda $\mathfrak{X}$ fəzası kimi 2^n sayda $x=(x_1,\dots,x_n)$ vektorlarından ibarət çoxluq götürmək olar, burada x_i 0 və 1 qiymətlərini alır. Müşahidə olunan $X=(X_1,\dots,X_n)$ vektoru $x\in\mathfrak{X}$ qiymətini

$$\mathbf{P}_\theta\{x\,|\,\theta\}=\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

ehtimalı ilə alır, $\theta\in\Theta=[0,1]$; $\Theta_0=[0,1/2]$, $\Theta_1=(1/2,1]$. $\nu=\sum_i X_i$ təsadüfi kəmiyyəti («müvəffəqiyyətlər» sayı) (n,θ) parametrlərli

$$\mathbf{P}\{\nu=k\,|\,\theta\}=C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k},\quad k=0,1,\dots,n$$

binomial paylanma qanununa tabedir. ν-nin böyük qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etməmək təbiidir. Bu isə onu ifadə edir ki, əgər randomlanmamış kriterilərlə kifayətlənmək olarsa, onda $\nu>k_\alpha$ olduqda H_0 hipotezi qəbul olunmamalıdır, burada k_α verilən mühümlük ölçüsü α ilə elə təyin olunur ki,

$$\mathbf{P}\{\nu>k_\alpha\,|\,1/2\}=p_{k_\alpha+1}+\dots+p_n=\alpha'\le\alpha,$$

$$\mathbf{P}\{\nu\ge k_\alpha\,|\,1/2\}=\alpha'+p_{k_\alpha}>\alpha \qquad (5)$$

şərtləri ödənilsin, burada $p_k=\mathbf{P}\{\nu=k\,|\,1/2\}=C_n^k2^{-n}$. Belə kriterinin ölçüsü $\alpha'\le\alpha$-ya bərabərdir. Əgər $\alpha'<\alpha$ olarsa, onda böyük gücə malik, α – ölçülü randomlanmış kriteri qurmaq olar. Bu kriterinin kritik funksiyası

$$\varphi_1(X)=\begin{cases}1, & \text{əgər}\quad \nu>k_\alpha,\\ \gamma_1, & \text{əgər}\quad \nu=k_\alpha,\\ 0, & \text{əgər}\quad \nu<k_\alpha\ \text{olarsa,}\end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $\gamma_1=(\alpha-\alpha')/p_{k_\alpha}$, yəni bu kriteri $\nu>k_\alpha$ olduqda determinik olaraq H_0 hipotezini qəbul etmir, $\nu=k_\alpha$ olduqda isə H_0 hipotezini γ ehtimalı ilə qəbul etmir. Bu kriterinin gücü

$$\beta_{\varphi_1}(\theta)=\sum_{k=k_\alpha+1}^{n}C_n^{k_\alpha}\theta^k(1-\theta)^{n-k}+\gamma\,C_n^{k_\alpha}\theta^{k_\alpha}(1-\theta)^{n-k_\alpha}$$

düsturu ilə ifadə olunur (yuxarıda göstərilən randomlanmamış kriterinin gücü düsturunda axırıncı toplanan yoxdur). İsbat etmək olar ki, bu kriteri müntəzəm ən güclü kriteridir, yəni α – ölçülü ixtiyari digər kriterinin gücü hər bir $\theta>1/2$ üçün böyük deyildir. Bununla da, (3) şərti ödənildikdə (4) gücünün maksimizasiyası bu halda tamamilə həll olunur.

Bir çox hallarda məsələnin göstərilən şəkildəki qoyuluşu həllə gətirmir və buna görə də, məsələnin dəqiqləşdirilməsi və ya tamamlanması tələb olunur. Mümkün yanaşmalardan biri kriterinin bu və ya digər arzuolunan xassələrini ifadə edən bəzi əlavə tələblərin köməyilə baxılan kriterilər sinfinin daraldılmasıdır. Bu xassələrdən oxşarlıq, meylsizlik və invariantlıq əsas xassələrdir (bax, *Oxşar kriteri*, *Meylsiz kriteri*, *İnvariant kriteri*). Digər yanaşmalar güc funksiyasının bəzi funksionallarının maksimizasiyasından ibarətdir, məs., hər hansı ölçü üzrə onun ortalanması və ya alternativ hipotezlərin hər hansı çoxluğunda onun minimizasiyasından (bax, *Beyes yanaşması* statistik məsələlərə, *Maksimin kriteri*).

Misal 2. Elə bu statistik modeldə $H_0=\{\theta=1/2\}$ hipotezi alternativ $H_1=\{\theta\ne1/2\}$ hipotezinə qarşı yoxlanılır.

«Təbii» randomlanmamış kriteri H_0 hipotezini $\nu \in S$ olduqda, $m = n - k_{\alpha/2} - 1$ halında qəbul etmir (bax, [1]), burada $k_{\alpha/2}$

$$\mathbf{P}\{\nu > k_{\alpha/2} \,|1/2\} = \alpha''/2 \le \alpha/2, \ \mathbf{P}\{\nu \ge k_{\alpha/2} \,|1/2\} > \alpha/2$$

şərtlərilə təyin olunur. α – ölçülü uyğun randomlanmış kriterinin kritik funksiyası

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{əgər} \quad X \le m \quad \text{və ya} \quad X \ge n - m, \\ \gamma_2, & \text{əgər} \quad X = m + 1 \quad \text{və ya} \quad X = n - m - 1, \\ 0, & \text{əgər} \quad m + 1 < X < n - m - 1 \quad \text{olarsa,} \end{cases}$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $\gamma_2 = (\alpha - \alpha'')/2\, p_{k_{\alpha/2}}$. Bu məsələdə müntəzəm ən güclü kriteri yoxdur. φ_2 kriterisi meylsiz kriterilər sinfində müntəzəm ən güclü kriteridir, yəni $\theta \ne 1/2$ olduqda, $\beta_\varphi(\theta) \ge \alpha$ xassəli, α – ölçülü φ kriteriləri sinfində müntəzəm ən güclü kriteridir. φ_2 kriterisi də, G ölçüsünün $[0,\ 1]$ parçasında $1/2$ -ə görə simmetrikliyi halında

$$\int_0^1 \beta_\varphi(\theta)\, dG(\theta) \tag{6}$$

ən böyük orta gücə malikdir. Bu kriteri «əhəmiyyət kəsb etməyən» simmetriklik zonasından kənarda güc minimumunu maksimallaşdırır, yəni bu zonada

$$\max_{\varphi} \min_{|\theta - 1/2| \ge \delta} \beta_\varphi(\theta) \tag{7}$$

ixtiyari $0 < \delta < 1/2$ üçün nail olunur.

Müntəzəm ən güclü kriteri olmadığı halda kriterilərin mümkün olduqca dar sinfinin seçilməsi məsələsi qarşıya çıxır, yəni elə sinfin ki, bu sinfə daxil olmayan hər bir kriteri üçün həmin sinifdə elə kriteri vardır ki, onun gücü bu kriterilərin gücündən az olmasın. Bu məsələ kriterilərin məqbulluğunun araşdırılması ilə sıx bağlıdır (bax, *Statistik kriteri*; tam sinif; *Məqbulluq*(ğu) statistik prosedurun).

Bu qəbildən olan məsələlərdə *statistik həllər nəzəriyyəsinin* metodlarından istifadə olunur.

Məs., misal 2-də

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, \ \text{əgər} \quad \nu < k_1 \ \text{və ya} \ \nu > k_2, \\ \gamma_i, \ \text{əgər} \quad \nu = k_i, \quad i = 1,2, \\ 0, \ \text{əgər} \quad k_1 < \nu < k_2 \ \text{olarsa} \end{cases} \tag{8}$$

şəklində kriterilər üçün $\beta_\varphi(1/2) = \alpha$ şərtini ödəyən kriterilər tam sinif təşkil edir, burada $0 \le k_1 \le k_2 \le n$, $0 \le \gamma_1, \gamma_2 \le 1$. Bu fakt onu ifadə edir ki, güc funksiyasının qiymətlərinə əsaslanan konkret kriterinin seçilməsi (8) şəkilli kriterilərlə məhdudlana bilinir. Məs., (6) və ya (7)-ni maksimallaşdıran kriterinin axtarılmasında bu siniflə kifayətlənmək olar, ümumiyyətlə, qeyri – simmetrik ölçü və ya əhəmiyyətsiz zona halında məsələ olduqca asanlaşır.

Xüsusi tipli modellərin dar sinfindən başqa (bunlara misal 1 və 2 aiddir) S. h. y. məsələlərinin «dəqiq» həlli mümkün olmur, ya da ki, seçimin həcmi n -in hər hansı böyük qiymətlərində olduqca çətin olur. Buna görə də, S. h. y. məsələlərinin təqribi həlli üçün nisbətən sadə limit qanunauyğunluqlarından və statistik modellərdən istifadə etməklə asimptotik metodlardan geniş istifadə olunur (bax, *Riyazi statistika*; asimptotik metodlar).

Praktiki məsələlərdə H_0 və H_1 hipotezləri ailələrinin seçilməsi $\mathbf{P}$ paylanması haqqında olan aprior informasiya ilə təyin olunur, bu informasiya əvvəllər alınmış məlumatlara və ya araşdırılan hadisə və ya prosesin nəzəri analizinə əsaslanır. Aprior informasiya kifayət qədər olmadıqda riyazi statistikanın qeyri – parametrik metodlarından istifadə olunur (bax, *Riyazi statistika*; qeyri–parametrik metodlar). Aprior informasiyadan maksimal istifadə mühüm əhəmiyyətə malikdir, H_0 və H_1 hipotezləri ailələrinin daralması məsələni sadələşdirdiyindən, ən güclü kriterilərin qurulmasına imkan yaradır. Digər tərəfdən, modelin real vəziyyətə adekvat ola bilməyəcəyi halda, məqsədəuyğun olardı ki, baxılan statistik məsələdəki kriterilərin xassələri modelin bu və ya digər dəyişikliklərində az dəyişsin (bax, *Robastlıq*(ğı) statistik prosedurun).

Yuxarıda nəzərdə tutulurdu ki, müşahidələrin sayı və strukturuna statistik təsir edə bilməz. Bir çox praktiki hallarda, müşahidələr eksperimentin nəticəsi kimi alınır ki, eksperiment kriterinin verilmiş xarakteristikalarının alınması məqsədilə əvvəldən planlaşdırıla bilinər. Məs., verilmiş $\delta > 0$ və $\varepsilon > 0$ üçün sınaqlar sayı n -i elə təyin etmək olar ki, φ_2 kriterisi alternativləri fərqləndirməyə imkan yaratsın, elə alternativləri ki, onların $1/2$ -dən fərqi δ -dan az olmasın, gücü isə $1 - \varepsilon$ -dan kiçik olmasın. Daha mürəkkəb məsələlərə: müşahidələr aparılan nöqtələrin seçilməsi (parametrlərin, rejimlərin seçilməsi), eksperimentin davam etdirilməsi və dayandırılması qaydasının verilməsi və s. aiddir; eksperimentin aparılmasına sərf olunan xərclər və ya onun aparılması üçün ayrılan vaxt nəzərə alına bilinər (bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin*).

S. h. y. məsələləri nöqtəvi və etibarlı qiymətləndirmə məsələlərilə sıx əlaqədardır. Məs., parametrin qiyməti haqqında hipotezin yoxlanılması üçün onun hər hansı statistik qiymətindən istifadə oluna bilinər (məs., hesab etmək olar ki, misal 1 və 2-dəki kriterilər θ parametrinin statistik qiyməti – $\hat{\theta} = \nu/n$ -ə əsaslanır). Digər tərəfdən, S. h. y. nəzəriyyəsinin nəticələri qiymətləndirmədə aşağı sərhədin dəqiqliyini təyin etmək üçün də istifadə oluna bilinər. Məs., $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ olduqda, $\widetilde{\theta}$ statistik qiymətinin θ -ya nəzərən ədəd oxundakı vəziyyəti

$$\mathbf{P}_\theta\{|\hat{\theta} - \theta| > h\}, \quad h > 0 \tag{9}$$

ehtimalları ilə xarakterizə olunur. $\widetilde{\theta}$ -nın θ üçün median – meylsiz statistik qiymət olduğu, yəni

$$\mathbf{P}_\theta\{\hat{\theta} \le \theta\} = \mathbf{P}_\theta\{\hat{\theta} \ge \theta\} = 1/2, \quad \theta \in \Theta$$

olduğu fərz olunur. Onda $\hat{\theta} \le \theta_0 + h$ olduqda $H_1 : \theta = \theta_0$ hipotezinə qarşı $H_0 : \theta = \theta_0 + h$ hipotezini yoxlamaq üçün kriterinin 1-ci və 2-ci növ səhvlərinin ehtimalları uyğun olaraq,

$$\mathbf{P}_{\theta_0 + h}\{\hat{\theta} \le \theta_0 + h\} = 1/2$$

və

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{\hat{\theta} > \theta_0 + h\} \tag{10}$$

olur.

Deməli, (10) ehtimalı $\alpha = 1/2$ ölçülü ən güclü kriterinin 2-ci növ səhvinin ehtimalından kiçik deyildir; bu kriteri Neyman – Pirson lemmasına əsasən qurulur. $\mathbf{P}_{\theta_0}\{\hat{\theta} \le \theta_0 - h\}$ üçün

analoji sərhəd ilə birlikdə bu (9) üçün $\hat{\theta}$-nın median – meylsiz statistik qiymətləri sinfi üzrə aşağı sərhədi təyin edir.

Etibarlı qiymətləndirmədə etibarlı çoxluğa statistik kriterilərin verilmiş sinfi üzrə müşahidələrin nəticələri ilə «uzlaşan» parametr qiymətləri daxildir. Bu halda kriterilərin optimallıq xassələri və etibarlı çoxluqların xassələri bir-birilə əlaqəli olur. Bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*, *Ən dəqiq etibarlı çoxluq*.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Л и н н и к Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [5] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [6] Н е й м а н Ю., Вводный курс теории вероятностей и математической статистики, пер. с англ., М., 1968; [7] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

STATİSTİK XARAKTERİSTİKA « статистическая характеристика; statistical characteristic » – empirik paylanma üzrə qurulmuş orta qiymət, moda, median, kvadratik orta yayınma, variasiya əmsalı və s. kimi ən sadə statistikaların realizasiyalarına tətbiq olunmaqla seçim üzrə statistik nəticələr alındıqda riyazi statistika terminologiyasının formalaşması mərhələsində istifadə olunmuş termindir.

STATİSTİK KRİTERİ « статистический критерий; statistical test », s t a t i s t i k t e s t, – *statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində statistik hipotezlərdən* birinin doğruluğu haqqında qərar qəbuletmə qaydasıdır. Ümumi halda, S. k. *kritik funksiya* ilə verilir; *randomlanmamış kriteri kritik oblastla* verilə bilinər, kritik oblast isə praktiki olaraq, kriterinin *statistikası* vasitəsilə təyin olunur.

STATİSTİK KRİTERİ; m ə q b u l l u q **« статистический критерий;** д о п у с т и м о с т ь; a d m i s s i b i l i t y o f a **statistical test »** – bax, *Məqbulluq*(ğ u) s t a t i s t i k k r i t e r i n i n.

STATİSTİK KRİTERİ; t a m s i n i f **« статистический критерий;** п о л н ы й к л а с с; c o m p l e t e c l a s s o f a **statistical test »** – *stoxastik hipotezlərin yoxlanılması* məsələsində baxılan elə *statistik kriterilər* çoxluğudur ki, bu kriterilər öyrənilən məsələdə qəbul edilən qərarların keyfiyyətinin itkisiz olmasına kifayət edir.

Statistik hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyəsində S. k.-lərin tam sinfi anlayışı statistik həllər nəzəriyyəsində *statistik prosedurların* t a m s i n f i ümumi anlayışının konkret formasıdır. X – paylanması naməlum $\omega\in\Omega$ parametrindən asılı $\mathbf{P}_\omega$ olan təsadüfi seçim olsun. Bu seçim üzrə $H_1:\omega\in\Omega_1$ alternativ hipotezinə qarşı ilkin $H_0:\omega\in\Omega_0$ hipotezi yoxlanılır, Ω_0 və Ω_1 Ω-nın kəsişməyən altçoxluqlarıdır. K bu məsələdə kriterilərin hər hansı sinfi, $K^*\subset K$ hər hansı alt sinif olsun. Əgər ixtiyari $\varphi\in K$ kriterisi üçün elə $\psi\in K^*$ kriterisi olarsa ki, $\beta(\omega|\varphi)=$ $=\mathbf{M}_\omega\varphi(X)$ φ kriterisinin güc funksiyası olduqda

$$\text{bütün } \omega\in\Omega_0 \text{ üçün } \beta(\omega|\psi)\le\beta(\omega|\varphi), \qquad (1)$$

$$\text{bütün } \omega\in\Omega_1 \text{ üçün } \beta(\omega|\psi)\ge\beta(\omega|\varphi) \qquad (2)$$

şərtləri ödənilsin, onda K^* sinfi K sinfində m a h i y y ə t c ə t a m s i n i f adlanır. Əgər bu halda ω-nın ($\omega\in\Omega$) heç

olmasa bir qiymətində hər bir (φ,ψ) cütü üçün (1) və (2)-də ciddi bərabərsizlik ödənilərsə, onda K^* sinfi K sinfində t a m s i n i f adlanır. Əgər K^* sinfini tamlıq xassəsi (mahiyyətcə tamlıq xassəsi) saxlanılmaqla daraltmaq mümkün olmazsa, onda K^* m i n i m a l t a m (m a h i y y ə t c ə t a m) s i n i f adlanır.

Statistik prosedurların tam sinfi haqqında ümumi nəticələr hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində S. k.-lərin tam sinifləri üçün ifadə olunur və konkretləşdirilir: məqbul kriterilər çoxluğu minimal mahiyyətcə tam sinif əmələ gətirir; geniş mənada Beyes kriteriləri çoxluğu mahiyyətcə tam sinif əmələ gətirir və s. Lakin hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinin geniş sinfi üçün S. k.-nin tam sinfinin daha ətraflı təsvirləri məlumdur. Hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində ən mükəmməl nəticələr paylanmaların eksponensial ailəsinin parametrləri haqqında alınmışdır.

$\omega=(\xi,\theta)$ olsun; burada $\xi\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$, $\theta\in\Theta\in\mathbb{R}^m$ və $\Omega=\Xi\times\Theta$. $\mathbb{R}^{k+m}$-də eksponensial tip $\mathbf{P}_\omega\equiv\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ ailəsi $\mathbb{R}^{k+m}$-də hər hansı ehtimal paylanması $\mathbf{P}$-yə nəzərən

$$\frac{d\mathbf{P}_{\xi,\theta}}{d\mathbf{P}}(x)=B(\xi,\theta)\exp\{\xi' U(x)+\theta' T(x)\} \qquad (3)$$

sıxlığı ilə təyin olunur. Paylanması $\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ olan X təsadüfi seçiminin x müşahidəsi üzrə $H_1:\xi\in\Xi\setminus\{0\}$, $\theta\in\Theta$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0:\xi=0$, $\theta\in\Theta$ ilkin hipotezi yoxlanılır; bu qoyuluşda θ əngəlləyici parametrdir. $m=0$ olduqda (yəni əngəlləyici parametrlər olmadıqda) müəyyən olunmuşdur ki (bax, [1]), S. k.-lərin tam sinfi hipotezlərin qəbul olunma oblastlarının qabarıq kriterilərindən ibarətdir, yəni elə $\psi(x)=\psi(x|C)$ kriterilərdən ki, onlar

$$\psi(x|C)=\begin{cases}0, & \text{əgər } U(x)\in\operatorname{Int}C,\\ 1, & \text{əgər } U(x)\notin C\end{cases} \qquad (4)$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $C\subseteq\mathbb{R}^k$ – qapalı qabarıq çoxluqdur ($\operatorname{Int}C$, – C-nin daxilidir); ∂C sərhədinə randomizasiya (ölçülən) mümkündür.

Bu nəticə sonralar dəqiqləşdirilmiş və müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir (bax, [2] – [4]). Məs., əgər Ξ çoxluğu hər hansı qabarıq V konusuna daxildirsə, onda (4) şəklində kriterilər tam sinif təşkil edir, bu kriterilər üçün qabarıq C çoxluqları V konusunun polyarlarıdır, V^0-dan olan istiqamətlərdə recessiv («lat. ə l a m ə t – üstünlük təşkil edən, inkişaf etmiş – dominant əlamətə əks olan əlamətdir) çoxluqlardır. Əgər Ξ çoxluğu $\mathbb{R}^k$ və ya V ilə üst-üstə düşərsə, onda uyğun tam siniflər minimal tam siniflər olur (bax, [5]).

Əngəlləyici parametrlər olduğu hallarda $(m>0)$ S. k.-nin tam sinfi [6]-da müəyyənləşdirilmişdir və bu sinif hipotezin qəbul olunma oblastının qabarıq kəsiklərli kriterilərindən ibarətdir, yəni

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{əgər } (U(x);\,T(x))\in\operatorname{Int}D,\\ 1, & \text{əgər } (U(x);\,T(x))\notin D\end{cases}$$

münasibətilə verilən $\psi(x)$ kriterilərindən ibarətdir, burada $D\subset\mathbb{R}^{k+m}$ – bütün t – kəsikləri $C(t)=\{U\in\mathbb{R}^k;$

$(U,\ t)\in D\}$ $\mathbb{R}^k$-nın qabarıq altçoxluqları olan ölçülən çoxluqdur.

Hipotezlərin yoxlanılmasının asimptotik məsələlərində uyğun olaraq, a s i m p t o t i k t a m s i n i f anlayışı daxil olunur. $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ – naməlum $\xi\in\mathbb{R}^k$ və $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^m$ parametrlərindən asılı, paylanması $\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ olan təkrar seçim olsun [burada $\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ ixtiyari paylanmalar ailəsidir və onun (3) şəklində olması vacib deyildir]. $X^{(n)}$ seçimi üzrə yaxınlaşan $H_{1n}:\xi=\xi_n=\lambda/\sqrt{n}$ ($\lambda\in\Lambda\subseteq\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$, $\theta\in\Theta$) alternativləri ardıcıllığına qarşı $H_0:\xi=0$ hipotezi yoxlanılır; θ – əngəlləyici parametrdir. Bu məsələdə həlledici qayda $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcıllığı ilə verilir və hər bir n qiymətində $\varphi_n(x^n)$ kriterisi n həcmli seçim üzrə qurulur və $\beta_n(\xi,\theta\,|\,\varphi_n)=\mathbf{M}^{(n)}_{\xi,\theta}\,\varphi_n(X^n)$ güc funksiyası ilə xarakterizə olunur.

$r\geq 0$ – tam ədəd, K – ardıcıl kriterilərin hər hansı sinfi olsun. Əgər $\{\varphi_n\}\in K$ kriterilər ardıcıllığı üçün elə $\{\psi_n\}\in K^*$ kriterilər ardıcıllığı tapılarsa ki, bütün $\lambda\in\Lambda$ və $\theta\in\Theta$ qiymətlərində və $n\to\infty$ olduqda

$$\beta_n(0,\theta\,|\,\psi_n)\leq\beta_n(0,\theta\,|\,\varphi_n)+o(n^{-r/2}),$$

$$\beta_n(\lambda/\sqrt{n},\theta\,|\,\psi_n)\geq\beta_n(\lambda/\sqrt{n},\theta\,|\,\varphi_n)+o(n^{-r/2})$$

münasibətlərini ödəsin, onda $K^*\subset K$ sinfi r t ə r t i b a s i m p t o t i k t a m s i n i f adlanır. (k,m,r) parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində bütün ardıcıl kriterilər sinfində S. k.-lərin asimptotik tam sinifləri müəyyən olunmuşdur; $k\geq 1$, $m=0$, $r=0$, bax, [1]; $k=0$, $m=0$, $r=1$ və $r=2$, bax, [7] və [8]; $k\geq 1$, $m=0$ və $r\geq 0$, bax, [9]; $k\geq 1$, $m>0$, $r=0$, bax, [10]; $k\geq 1$, $m>0$, $r>0$, bax, [11]. Bundan başqa, ardıcıl kriterilərin müxtəlif konkret siniflərində S. k.-lərin asimptotik tam sinifləri öyrənilmişdir (bax, məs., [12], [13] və *Statistik kriteri* $C(\alpha)$ və [10]).

Əd.: [1] Ч и б и с о в Д. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 1, с. 96–111; [2] E a t o n M. L., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 6, p. 1884–88; [3] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 404–10; [4] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 3, с. 576–80; [5] S t e i n C h., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 3, p. 616–23; [6] M a t t h e s T. K., T r u a x D. R., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, № 3, p. 681–97; [7] C h i b i s o v D. M., в кн.: Proceeding of the Prague symposium on asymptotic statistics, 1973, v. 2, Prague, 1974, p. 37–68; [8] P f a n z a g l J., в кн.: Statistical inference and related topics, v. 2, N. Y., 1975, p. 1–43; [9] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1986, т. 31, в. 1, с. 67–80; [10] Б е р н ш т е й н А. В., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11(258), с. 3–18; [11] Б е р н ш т е й н А. В., в сб.: Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике, т. 1, Вильнюс, 1985, с. 77–79; [12] P f a n z a g l J., W e f e l m e y e r W., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1978, Bd 45, H. 1, S. 49-72; [13] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 78–91.

STATİSTİK KRİTERİ $C(\alpha)$ « статистический критерий $C(\alpha)$; statistical $C(\alpha)$ – test » – əngəlləyici parametrlər olduğu halda mürəkkəb statistik hipotezlərin fərqləndirilməsi üçün statistik asimptotik *oxşar kriteridir.* Belə kriterilərin qurulması üçün əsas konsepsiyalar Yu. Neyman tərəfindən [1]-də təklif olunmuşdur və buna görə də, S. k. $C(\alpha)$ bəzən N e y m a n $C(\alpha)$ – k r i t e r i l ə r i də adlandırılır. $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$ – naməlum $\xi\in\mathbb{R}^k$ və $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^m$ parametrlərindən asılı $\mathbf{P}_{\xi,\theta}$ paylanmalı, hər hansı σ – sonlu ölçüyə nəzərən paylanma sıxlığı $p(x\,|\,\xi;\theta)$ olan təkrar seçim olsun. Bu seçim əsasında $H_0:\xi=0$ mürəkkəb hipotezi $H_1:\xi\neq 0$ mürəkkəb alternativ hipotezinə qarşı əngəlləyici θ parametri olduğu halda yoxlanılır. Fərz olunur ki,

$$\left.\begin{aligned} y(x,\theta) &= \left.\frac{\partial\ln p(x|\xi;\theta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\\ z(x,\theta) &= \left.\frac{\partial\ln p(x|\xi;\theta)}{\partial\theta}\right|_{\xi=0}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

– loqarifmik törəmələrin uyğun olaraq, k – ölçülü və m – ölçülü vektorlarıdır. $z(X_1;\theta)$ təsadüfi vektorunun komponentləri üçün $y(X_1;\theta)$ təsadüfi vektorunun (H_0 hipotezi şərtində) $k\times m$ tərtib reqressiya əmsalları matrisi $A=A(\theta)$

$$\mathbf{M}_{0,\theta}\,(y(X_1;\theta)-A\,z(X;\theta))(z(X_1;\theta))^{\mathrm{T}}\equiv 0 \qquad (2)$$

şərtindən təyin olunur və fərz olunur ki,

$$y^*(x;\theta)=y(x;\theta)-A(\theta)\,z(x;\theta)\,; \qquad (3)$$

$$\Xi(\theta)=\mathbf{M}_{0,\theta}\,(y^*(X_1;\theta))(y^*(X_1;\theta))^{\mathrm{T}} \qquad (4)$$

– H_0 hipotezi şərtlərində $y^*(X_1;\theta)$ təsadüfi vektorunun kovariasion matrisidir; $k=1$ olduqda (4) dispersiyası $\sigma^2(\theta)$ ilə işarə olunur.

Birölçülü halda ($k=1$), S. k. $C(\alpha)$

$$Y_n=Y_n(X^{(n)})=\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma(\widetilde{\theta}_n)}\sum_{i=1}^{n}y^*(X_i;\widetilde{\theta}_n) \qquad (5)$$

statistikasına əsaslanır, burada $\widetilde{\theta}_n=\widetilde{\theta}_n(X^{(n)})$ – ilkin hipotezin şərtlərində [seçimin paylanması $\mathbf{P}^{(n)}_{0,\theta}$ olduğu halda] θ parametri üçün $X^{(n)}$ seçimi üzrə qurulmuş, ixtiyari $\sqrt{n}$ – tutarlı statistik qiymətdir. (5) statistikası bütün $\theta\in\Theta$ üçün H_0 hipotezi şərtlərində $(0,1)$ parametrlərli asimptotik normal paylanmaya malikdir. Buna görə də, $Y_n\leq\nu(\alpha)$ və $|\,Y_n\,|\leq\nu(\alpha/2)$ olduğu hallarda H_0 hipotezini qəbul edən uyğun φ'_n və φ''_n kriteriləri α hüdudlu asimptotik oxşar kriterilərdir, burada $\nu(\alpha)=\Phi^{-1}(1-\alpha)$ standart normal $\Phi(\cdot)$ paylanma funksiyasının yuxarı α – kvantilidir. Bu kriterilərdən birtərəfli $H'_1:\xi>0$ və

uyğun olaraq, ikitərəfli $H_1'': \xi \neq 0$ alternativ hipotezlərində H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün istifadə olunur; bu halda φ_n'' asimptotik meylsiz kriteridir.

φ_n' və φ_n'' alternativ kriterilərinin xassələrinin öyrənilməsində H_1' və H_2'' asimptotik analoqlarının bir-birinə yaxınlaşan alternativlərinin uyğun olaraq:

$$H_{1n}' : \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}\ ,\ \lambda > 0\,, \tag{6}$$

və

$$H_{1n}'' : \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}\ ,\ \lambda \neq 0\,, \tag{7}$$

ardıcıllıqlarına, əngəlləyici θ parametrinin olduğu halında, baxılır. Limit güc funksiyaları

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n'\}) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n'(X^{(n)})\, d\,\mathbf{P}^{(n)}_{\lambda/\sqrt{n},\theta}$$

və $\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n''\})$ uyğun olaraq:

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n'\}) = 1 - \Phi(\nu(\alpha) - \lambda\sigma^2(\theta))\,;$$

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n''\}) = 2(1 - \Phi(\nu(\alpha/2) - \lambda\,\sigma^2(\theta)))$$

bərabərlikləri ilə ifadə olunur.

(2) – (5) tipli münasibətlərdə $y(x;\theta)$ və $y^*(x;\theta)$ funksiyaları ixtiyari $f(x;\theta)$ və bu funksiya üzrə (3) düsturu ilə hesablanmış $f^*(x;0)$ funksiyası ilə, $\mathbf{M}_{0,\theta} f(X_1;\theta) \equiv 0$ və $\mathbf{M}_{0,\theta}(f(X_1;\theta))^2 < \infty$ şərtlərində əvəz olunduğu halda, $C(\alpha)$ – k r i t e r i l ə r i adlandırılan kriterilər sinfi birölçülü halda araşdırılmışdır (bax, [1]). Belə kriterilər sinfində φ_n' və φ_n'' kriteriləri uyğun olaraq, (6) və (7) alternativlərində, mümkün olan ən böyük gücə malik olub, asimptotik lokal optimal asimptotik oxşar $C(\alpha)$ – kriterilərdir (φ_n'' kriterisi üçün «asimptotik meylsiz»lik də əlavə olunur); bu kriterilər Yu. Neyman terminologiyasında belə adlandırılır. [2]-də isbat olunmuşdur ki, $o(n^{-1/2})$ tərtibə qədər asimptotik ayrılış nəzərə alınmaqla, bütün differensial asimptotik oxşar kriterilər sinfində bu kriterilər asimptotik optimaldır. Sonralar bəzi requlyarlıq şərtlərinin yerinə yetirilmədiyi hallar üçün $C(\alpha)$ tipli kriterilər qurulmuşdur (bax, [3]). Məs., əgər $y(x;\theta)$ vektoru $z(x;\theta)$ vektorunun komponentlərinin xətti kombinasiyası olarsa, onda hətta asimptotik optimal φ_n' kriteriləri üzrə (uyğun olaraq, φ_n'') H_0 və H_{1n}' (uyğun olaraq H_{1n}'') hipotezlərini tutarlı surətdə fərqləndirmək mümkün deyildir; [4]-də yalnız $s > 1$ olan minimal tərtib tapılmışdır və bu halda H_0 və $H_{1n}^{(s)} : \xi = \xi_n = \lambda_n^{-s/2}$, $\lambda > 0$ hipotezlərini tutarlı surətdə fərqləndirmək mümkündür və differensial asimptotik oxşar kriterilər sinfində qeyd olunan hipotezləri fərqləndirmək üçün $C(\alpha)$ tipli kriteriləri olan asimptotik optimal φ_{sn}' (uyğun olaraq φ_{sn}'') kriterisi tapılmışdır.

Çoxölçülü halda $(k > 1)$ $C(\alpha)$ S. k.-nə oxşar çoxölçülü asimptotik S. k.-lər sinfi – $\Phi_{C(\alpha)}$ daxil olunmuşdur (bax, [5]), bu sinifdə H_0 və

$$H_{1n} : \xi = \xi_n = \lambda/\sqrt{n}\ ,\quad \lambda \in \Lambda\,, \tag{8}$$

$(\Lambda = \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ hipotezlərinin fərqləndirilməsi məsələsində asimptotik optimal φ_n kriterisi tapılmışdır; bu kriteriyə görə $Y_n' \Xi^{-1}(\tilde{\theta}_n) Y_n \leq \chi_k^2(\alpha)$ olduqda H_0 hipotezi qəbul edilir, burada $\chi_k^2(\alpha)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı k olan mərkəzi χ^2 – paylanmanın yuxarı α – kvantilidir. $\Lambda = \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ olduğu halda, bu φ_n kriterisi *doğruyaoxşarlıq nisbət kriterisi*, *Rao kriterisi*, *Vald kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir, lakin hesablama cəhətincə bunlardan sadədir. φ_n kriterisinin gücünün limit funksiyası

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n\}) = 1 - G_k(\chi_k^2(\alpha),\ \lambda' \Xi(\theta)\lambda)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $G_k(\cdot, a)$ – qeyri – mərkəzilik parametri a olan və sərbəstlik dərəcəsi sayı k -ya bərabər qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanmanın paylanma funksiyasıdır. $\Phi_{C(\alpha)}$ sinfi bir sıra hallarda olduqca dar sinif olur [məs., əgər (8)-də $\Lambda \subseteq V \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, $V \bigcap \{0\}$ isə $\mathbb{R}^k$-də qabarıq konus olduqda, $\Phi_{C(\alpha)}$ sinfindən olan bütün kriterilər asimptotik qeyri – məqbul olur]; $C(\alpha)$ – kriterilərinin çoxölçülü ümumiləşmələrinin daha geniş sinfi daxil olunmuşdur ki, bu sinfin asimptotik tam altsinfini seçmək mümkün olmuşdur.

Əd.: [1] N e y m a n J., в кн.: Probability and statistics, Stochl. – N. Y., 1959, p. 213–34; [2] C h i b i s o v D. M., «Lect. Notes in Math.», 1974, v. 330, p. 16–45; [3] Б е р н ш т е й н А. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика, Теоретическая кибернетика, т. 17, М., 1979, с. 3–56; [4] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 1, с. 34–47; [5] B u h l e r W. J., P u r i P. S., «Z. Wahr und Geb.», 1966, Bd. 5, № 1, S. 71–88; [6] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 291–302; [7] Б е р н ш т е й н А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 1, с. 78–91.

STATİSTİK QƏBUL NƏZARƏTİ « статистический приемочный контроль; statistical acceptance inspection / acception sampling » – kütləvi məhsul istehsalının *keyfiyyətə statistik nəzarət* metodlarının toplusudur və bu nəzarət keyfiyyətin verilən tələblərə uyğun olduğunu aydınlaşdırmaq məqsədilə aparılır. S. q. n. – nəzarət planları cədvəllərini və bu cədvəllərdən planların seçilməsi qaydalarını özündə əks etdirən dövlət standartları (rus. ГОСТ) əsasında aparılır. Ciddilik həddi (rus. уровень жесткости) və nəzarət planını seçdikdə nəzarət olunan partiyanın (bu partiyaya daxil olan məmulatların) həcmi, əvvəlki partiyalara nəzarətin nəticələri və digər faktorlar nəzərə alınır. S. q. n. məhsulun tələb olunan keyfiyyət həddinin saxlanılması üçün təsir vasitəsidir.

S. q. n.-də, bir qayda olaraq, seçimi təşkil edən məmulatların yalnız bir hissəsi yoxlanılır, buna görə də, səhv qərarlar verilə bilinər. Əgər nəzarət dağıdıcı xarakter (partlayış üçün sınaqlar) daşıyarsa, onda bütün məmulatların hamısına bir-bir nəzarət etmək mümkün deyildir. Nəzarət olunan məmulatları seçmək üçün müxtəlif metodlar vardır. Ən geniş yayılmış metodlardan biri, qaytarmamaq şərtilə təsadüfi seçim metodudur (bax, *Seçim* s t a t i s t i k, *Seçimi metod*).

S. q. n.-nin ən çox tətbiq olunan iki növündən birincisi – alternativ əlamət üzrə nəzarət, yəni nəzarət olunan məmulatlar yararlı və ya qüsurlu olduqda nəzarət, ikincisi isə kəmiyyət əlamətinə görə nəzarət, yəni nəzarət olunan məmulatların həqiqi qiymətlər alan parametrlərinin ölçüldüyü haldakı nəzarətdir.

S. q. n. nəzəriyyəsində ayrı-ayrı nəzarət planlarının, həm də nəzarət planları sisteminin ehtimal göstəricilərinin hesablanması üçün metodlar, nəzarətin gedişində əldə olunan informasiya əsasında S. q. n.-nin faktiki effektivliyinin qiymətləndirilməsi üçün metodlar işlənilir.

Məhsulun çoxlu partiyalarının S. q. n.-nin nəticələri üzrə S. q. n. üçün istifadə olunan, standartın effektivliyini əks etdirən müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlərin ardıcıl statistik qiymətlər adlandırılan statistik qiymətlərini qurmaq mümkündür (bax, [1]). Məs., nəzarətə təqdim olunmuş partiyalarda olan qüsurlu məmulatların toplam sayının meylsiz statistik qiymətlərini tapmaq mümkündür; istehlakçının qəbul etdiyi bütün məmulatlar içərisində qüsurlu məmulatların toplam sayının (qəbulolunma ədədinin) statistik qiymətlərini qurmaq mümkündür. Bu statistik qiymətlərin meyli seçimlərin həcmi artdıqca sürətlə azalır.

S. q. n.-nə standartın əsası nəzarət planını təyin edən parametrlərin cədvəlidir. Cədvəllərə müəyyən optimallıq xassələrinə malik (heç olmasa təqribən də olsa) nəzarət planları daxil edilir. Bu zaman nəzarət planlarının *operativ xarakteristikalarından* istifadə olunur.

$q = D/N$ – qüsurlu məmulatların hissəsi, q_H – stasionar istehsal prosesində qüsurlu məmulatların hissəsi olsun. Optimal nəzarət planlarının axtarışını, $q = q_H$ olduğu halda, eyni orta məsrəfləri olan planlar arasında aparmaq olar. Orta məsrəf seçimi təşkil edən məmulatlara nəzarətin dəyərə və qüsursuz məmulatların səhvən qüsurlu hesab edilməsindən dəyən zərərə bərabərdir. Bəzən sərf olunan bütün məsrəflərə qüsurlu məmulatların qəbulundan dəyən zərəri də daxil etmək məqsədəuyğun hesab edilir. Standartlarda (bax, [2]) birpilləli planların cədvəlləri vardır və bu cədvəllər nəzarətə məsrəflərin orta həddi və q_H verildiyi halda, qiymətlərin $D > N_{q_H}$ geniş intervalında, tərkibində D sayda qüsurlu məmulat olan partiyanın qəbulunda istehlakçının təqribi də olsa, ən yaxşı müdafiəsini təmin edir. Yəni qiymətlərin geniş intervalı D üçün belə planların operativ xarakteristikaları $q = q_H$ olduqda nəzarətin aparılmasına sərf olunan xərcləri eyni olan bütün birpilləli operativ xarakteristikaların aşağı qurşayıcısına yaxın olur. Standartlara daxil ediləsi planları yalnız EHM-nın köməyilə tərtib etmək mümkündür.

S. q. n.-nin ciddilik həddi standartda qəbul edilmiş korrektləyici qaydalarla dəyişir və bu qaydalar əsasında, nəzarətin nəticələri də nəzərə alınmaq şərtilə, cədvəllərdən nəzarət planlarının seçilməsi qaydası ya olduğu kimi qalır, ya da ki, dəyişir.

Alternativ əlamət üzrə S. q. n. metodlarının müxtəlif ümumiləşmələri məlumdur (bax, [3], [4]); bəzi tətbiqlərdə, qüsurlu məmulatların qüsursuz kimi və qüsursuz məmulatların qüsurlu kimi səhv təsnif olunduğu S. q. n.-nə baxmaq da məqsədəuyğun hesab edilir (bax, [5]). S. q. n.-ndə Beyes metodları geniş istifadə olunur (bax, [6]).

Kəmiyyət əlamətləri üzrə S. q. n.-nə standartlar belə bir fərziyyəyə əsaslanır ki, nəzarətdə seçimdəki məmulatların xarakteristikaları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, paylanma funksiyaları hər hansı parametrik ailədən olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Ən çox istifadə olunan standartlarda belə ailə normal (Qauss) paylanmalar ailəsi olur. Praktikada qeyd olunan fərziyyələrin yerinə yetirilməsi ciddi yoxlanılmalıdır və bu kəmiyyət əlaməti üzrə S. q. n. standartının qəbul edilməsi haqqında qərardan əvvəl edilməlidir.

Kəmiyyət əlamətləri üzrə S. q. n.-ni yalnız əsaslandırılaraq istifadə etdikdə, alternativ əlamət üzrə S. q. n. ilə müqayisədə, daha effektiv nəticələr əldə etmək olur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303–26; [2] ГОСТ 24660–81; [3] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [4] Лумельский Я. П., Статистические оценки результатов контрол, качества, М., 1979; [5] Беляев Ю. К., «Докл. АН СССР», 1976, т. 231, № 3, с. 521–24; [6] Hald A., Statistical theory of sampling inspection by attributes, L. – [a. o.], 1981.

STATİSTİK QİYMƏT « статистическая оценка; statistical estimator » – seçimi vektorun ölçülən funksiyasıdır; qiymətləndirilən parametrin ilkin naməlum qiyməti üçün ona yaxın olan qiymətdir. Statistik eksperimentin nəticələri üzrə hesablanılan S. q.-lər ya qiymətləndirilən parametr fəzasının nöqtələri (nöqtəvi statistik qiymət) və ya onun alt çoxluqlarıdır (interval statistik qiymət). Seçimin həcmi olduqca böyük olduğu halda nöqtəvi statistik qiymətin parametrin əsl qiymətinə yaxınlığı bu statistik qiymətin tutarlılığı ilə təmin olunur, əsl qiymətin interval statistik qiyməti ilə interval daxilinə alınmasının etibarlılığına isə etibarlılıq hüdudunun olduqca yüksək seçilməsi ilə nail olunur.

Bax, *Adaptiv statistik qiymət*, *Ardıcıl statistik qiymət*, *Asimptotik effektiv statistik qiymət*, *Asimptotik meylsiz statistik qiymət, Asimptotik minimaks statistik qiymət*, *Asimptotik normal statistik qiymət*, *Beyes statistik qiyməti*, *Ceyms – Steyn statistik qiyməti*, *Effektiv statistik qiymət, Ekvivariant statistik qiymət*, *Empirik Beyes statistik qiyməti*, *Xətti statistik qiymət, Kafi statistik qiymət*, *İnterval statistik qiyməti*, *İnvariant statistik qiymət*, *Median – meylsiz statistik qiymət*, *Meylli statistik qiymət*, *Meylsiz xətti statistik qiymət*, *Meylsiz qiymət*, *Məqbul statistik qiymət*, *Minimaks statistik qiymət*, *Modal meylsiz statistik qiymət, Nöqtəvi statistik qiymət*, *Pitmən statistik qiyməti*, *Randomlanmış statistik qiymət*, *Robast statistik qiymət*, M *– statistik qiymət*, *Supereffektiv statistik qiymət*, *Tutarlı statistik qiymət*, *Ümumiləşmiş Beyes statistik qiyməti.*

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984, [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

STATİSTİK QİYMƏT; tam sinif **« статистическая оценка;** полный класс; complete class of **statistical estimators »** – *statistik qiymətlərin* elə $\mathscr{C}$ çoxluğudur ki, bu çoxluğa aid olmayan ixtiyari statistik qiymət üçün $\mathscr{C}$ -dan olan müntəzəm çox da böyük olmayan *risk funksiyasına* malik statistik qiymət vardır, belə ki, risk funksiyaları arasında qiymətləndirilən parametrin heç olmasa bir qiyməti üçün ciddi bərabərsizlik ödənilir (bax, *Həlledici funksiya*; tam sinif).

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

G – STATİSTİK QİYMƏT « G – оценка; G – estimator » – bax, *Ümumi statistik analizi, müşahidələrin.*

G_2 – STATİSTİK QİYMƏT « G_2 – оценка; G_2 – estimator » – bax, *Ümumi statistik analizi, müşahidələrin.*

L – STATİSTİK QİYMƏT « L – оценка; L – estimator » – bax, *Robast statistik qiymət.*

M – STATİSTİK QİYMƏT « M – оценка; M – estimator » – θ_n *statistik qiymətidir*,

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\,(X_i, \theta_n) = \min \qquad (1)$$

münasibətilə və ya

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\,(X_i, \theta_n) = 0 \qquad (2)$$

tənliklər sisteminin həlli kimi təyin olunur, burada ρ , – $\mathscr{X} \times \Theta$ çoxluğunda həqiqiqiymətli funksiya, $\mathscr{X}$ – müşahidəolunan X_i

kəmiyyətlərinin seçimi fəzası, Θ, – $\mathbb{R}^p$ Evklid fəzasının açıq altçoxluğudur və $\psi(x,\theta)=\nabla_\theta \rho(x,\theta)$.

M – S. q.-ə klassik misallar aşağıdakılardır:

$$\overline{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad (\text{burada } \psi=x-\theta)$$

seçimi ortası; $y_i=\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\theta_j+\varepsilon_i$ xətti modelində

$$\rho=\left(y_i-\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\,\theta_j\right)^2$$

ən kiçik kvadratlar statistik qiymətləri;

$$\mu_n(\psi=\operatorname{sign}(x-\theta))$$

seçimi medianı.

Əgər (1), (2) məsələsinin həlli yeganə deyilsə, onda bu həllərdən birinin seçilməsi üçün əlavə qaydalar istifadə olunur. n cüt olduğu halda, seçimi median $\mu_n=(\theta^*+\theta^{**})/2$ bərabərliyi ilə təyin olunur, burada θ^*,θ^{**} – (1) münasibətinin uyğun olaraq, ən böyük və ən kiçik həlləridir, ya $\mu_n=\theta^*$ və ya $\mu_n=\theta^{**}$ eyni ehtimallı fərz olunur.

$\psi(x;\theta)=\psi(x-\theta)$ olduqda, yerinidəyişmə parametrlərinin M – S. q.-ləri, $\psi(x,\theta)=\psi(\theta^{-1}x)$, $\theta>0$ olduqda isə miqyas parametrlərinin M – S. q.-ləri alınır. Yerinidəyişmə parametrlərinin M – S. q.-ləri $\overline{X}_n$ statistik qiymətinə xas olan, miqyas çevirməsinə nəzərən invariantlıq xassəsini $\psi(x-\theta)$-nı $\psi(x-\theta)/s$ nisbətilə əvəz etdikdə olduğu kimi saxlayırlar, burada s – miqyasın ixtiyari yerinidəyişmə parametrlərinin M – S. q.-dir. X_i-lər həqiqi olduğu halda, s-in statistik qiyməti kimi X_i kəmiyyətlərinin bunlar üçün ümumi μ_n medianından mütləq yayınmaları – $|x_i-\mu_n|$-lərin medianından istifadə olunması məsləhətdir.

$X_1,\dots,X_n$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, F, – X_i-lərin verilən $\mathscr{F}$ ailəsinə mənsub paylanmasıdır. Bəzi ümumi fərziyyələrlə, (1) münasibətilə təyin olunan M – S. q.,

$$\lambda_F(\theta)=\int \psi(x,\theta)\,dF(x),\quad F\in\mathscr{F}$$

tənliklər sistemi ilə təyin olunan F paylanmasının $\theta=\theta(F)$ parametrlərinin tutarlı statistik qiymətləri olur. Əgər bu halda ψ funksiyası bəzən ümumi requlyarlıq şərtlərini ödəyərsə, $\lambda_F(\cdot)$ isə $\theta(F)$ nöqtəsində törəmələrin cırlaşmayan matrisi Λ-ə malik olarsa və hər hansı $\varepsilon>0$ üçün $|\lambda_F(\theta)|\geq \varepsilon(\min(\varepsilon,|\theta-\theta(F)|))$ olarsa, onda $\sqrt{n}\,(\theta_n-\theta(F))$ kəmiyyəti orta qiyməti sıfra bərabər, kovariasion matrisi $\Lambda^{-1}C\Lambda$ olan normal qanunla asimptotik olaraq paylanır, burada

$$C=\int \psi(x_1,\theta(F))\,\psi^{\mathrm{T}}(x,\theta(F))\,dF(x).$$

M – S. q. – in asimptotik effektivliyi üçün kafi, bəzi əlavə şərtlərlə isə zəruridir ki, hər bir $F\in\mathscr{F}$ paylanması ilə birgə, $\mathscr{F}$ çoxluğu $F_k(x,\theta)$, $F(k,0)=F(x)$, $k=1,2,\dots$ parametrik ailələrinin öz sıxlıqları $f_k(x,\theta)$ ilə elə ardıcıllığını özündə saxlasın ki, $-\nabla_\theta \ln f_k(x,\theta)$ funksiyaları $k\to\infty$ olduqda $\psi(x,\theta(F))$ funksiyasını approksimasiya etsin (bax, [2]). Məs., sıxlıq funksiyası $f(x,\theta)$-ya malik $\mathscr{F}=\{F(x,\theta)\}$ parametrik ailəsi halında M – S. q. asimptotik effektiv yalnız o halda olur ki, bu statistik qiymət maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti – $\psi(x,\theta)=\nabla_\theta \ln f(x,\theta)$ ilə üst-üstə düşsün.

(1) tənliyinin Nyuton metodu tipli ədədi həll metodlarından istifadəsi ilə həllində iterasiyanın bir addımına M – S. q.-in xassələrinə analoji asimptotik xassələrə malik statistik qiymətlər alınır.

Klassik olmayan ψ funksiyaları ilə M – S. q.-lər robast qiymətləndirmə nəzəriyyəsində fəal istifadə olunur. $\mathscr{F}_0$, – $\mathbb{R}^1$-də simmetrik F paylanmaları ailəsinin qabarıq altçoxluğu olsun, fərz olunur ki, bu paylanmalar sonlu $\mathbf{I}(F)$ informasiya miqdarına malikdirlər və $\mathscr{F}=\{F(x-\theta)\,|\,F\in\mathscr{F}_0,\ \theta\in\mathbb{R}^1\}$. Olduqca ümumi fərziyyələrlə $\mathscr{F}_0$ sinfində $\mathbf{I}(F)$ informasiya miqdarını minimallaşdıran, sıxlığı R_0 olan yeganə F_0 paylanması vardır. $\psi(x-\theta)=-\nabla_\alpha \ln f_0(x-\theta)$ funksiyasına uyğun θ parametrinin M – S. q. θ_n-in asimptotik dispersiyası bütün $F\in\mathscr{F}$ üçün $\mathbf{I}^{-1}(F_0)$ kəmiyyətini aşmır. Beləliklə, θ_n statistik qiyməti $\mathscr{F}$ ailəsinə nəzərən θ parametrini dayanıqlı qiymətləndirir və bu statistik qiymət asimptotik minimaks qiymətdir: θ parametrinin asimptotik dispersiyası $V(\theta,F)$ olan bütün statistik qiymətləri sinfində θ_n statistik qiyməti

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}^1,\ F\in\mathscr{F}_0} V(\theta,F)$$

ifadəsinin minimumunu təmin edir.

Əgər $\mathscr{F}_0$ standart normal $\Phi(x)$ paylanmasının ε – k o b u d x ə t a l ı o b l a s t ı olarsa, yəni

$$\mathscr{F}_0=\{F/F=(1-\varepsilon)\,\Phi+\varepsilon H\}$$

olarsa, onda F_0 funksiyasına uyğun ψ funksiyası aşağıdakı şəkildə olur:

$$\max\{-k,\ \min\{k,\ x-\theta\}\};$$

burada H – ixtiyari simmetrik paylanmadır və

$$2\varphi(k)/k-2\Phi(-k)=\varepsilon/(1-\varepsilon),\ \varphi=\Phi'.$$

X_n-in statistik qiymətinə müvafiq olan, kəskin surətdə fərqlənən müşahidələrin təsirinin azaldılmasına $\psi=x-\theta$ funksiyasının kəsiyinin götürülməsi ilə nail olunur və bununla da, uyğun M – S. q.-in dayanıqlılığı təmin olunur. Bu statistik qiymətin $\Phi(x-\theta)$ ailəsi üçün effektiv statistik qiymət olmasına baxmayaraq, bu qiymət normal paylanmanın ε – kobud xətalı ətrafına nəzərən

son dərəcə dayanıqsız olur; bu ətrafda $V(\theta, F)$ dispersiyası məhdud deyildir.

Əd.: [1] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., М., 1984; [2] Кошевник Ю. А., Левит Б. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21. в. 4, с. 759–74.

R – STATİSTİK QİYMƏT « R – оценка; R – estimator » – bax, *Robast statistik qiymət.*

STATİSTİK QİYMƏTLƏNDİRMƏ « статистическое оценивание; statistical estimation » – riyazi statistikanın əsas bölmələrindən biri olub, təsadüfi müşahidələr üzrə onların paylanmasının bu və ya digər xarakteristikalarının qiymətləndirilməsinə həsr olunmuşdur.

Misal 1. $X_1, \ldots, X_n$ – ümumi paylanması müşahidəçiyə məlum olmayan $\mathscr{P}$ olan ədəd oxunda verilmiş və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər (müşahidələr) olsun. Hər bir təsadüfi X_i nöqtəsinə $1/n$ çəkisi qarşı qoyulan empirik (seçimi) $\mathscr{P}_n^*$ paylanması $\mathscr{P}$ üçün statistik qiymətdir. $\alpha_\nu = \int x^\nu \, d\mathscr{P}$ momentləri üçün empirik (seçimi) momentlər

$$\alpha_\nu = \int x^\nu \, d\mathscr{P}_n^* = \sum_{i=1}^n X_i^\nu / n$$

düsturu ilə təyin olunur. Məsələn, orta qiymət üçün statistik qiymət

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n,$$

dispersiyanın statistik qiyməti

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_i)^2 / n$$

düsturları ilə təyin olunur.

Əsas anlayışlar. Ümumi qiymətləndirmə nəzəriyyəsində X müşahidəsi naməlum paylanması verilən $\mathscr{P}$ paylanmalar ailəsindən olan, qiymətləri ölçülən $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ fəzasından olan təsadüfi elementdir. Paylanmalar ailəsini həmişə parametrik ailə – $\{\mathscr{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi kimi göstərmək olar. Bu halda parametrdən asılılıq forması və Θ çoxluğunun məlum olduğu fərz olunur. X müşahidəsi üzrə θ parametrinin və ya g funksiyasının θ nöqtəsində $g(\theta)$ qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi θ-nı ($g(\theta)$-nı) olduqca approksimasiya edə bilən müşahidələr funksiyası $\theta^*(X)$-in qurulmasından ibarətdir.

Statistik qiymətlərin müqayisəsi aşağıdakı kimi aparılır. $\Theta \times \Theta$ ($g(\Theta) \times g(\Theta)$) çoxluğunda mənfi olmayan $w(y_1; y_2)$ itki funksiyasının verildiyi fərz olunur, bu funksiyanın mənası belə anlaşılır: parametrin faktiki qiyməti θ olduğu halda θ^* statistik qiymətindən istifadə $w(\theta^*; \theta)$ itkilərinə səbəb olur. İtki funksiyası w olduğu halda θ-nın statistik qiymətləri kimi risk funksiyasının orta itkiləri $R_w(\theta^*; \theta) = \mathbf{M}_\theta \, w(\theta^*; \theta)$ θ^* statistikasının keyfiyyət ölçüsü əvəzində götürülür. Bununla da, statistik qiymətlər çoxluğunda hissəvi nizamlanma münasibəti daxil olunur; əgər $R_w(T_1; \theta) \le R_w(T_2; \theta)$ olarsa, T_1 statistik qiyməti T_2 statistik qiymətindən üstün sayılır. Məs., bütün $\theta \in \Theta$ üçün elə T' statistik qiyməti tapılarsa ki, $R_w(T'; \theta) \le R_w(T; \theta)$ bərabərsizliyi ödənilsin, hər hansı bir θ üçün isə ciddi bərabərsizlik də ödənilmiş olsun, onda θ parametrinin statistik qiyməti T w itki funksiyasına nəzərən qeyri – məqbul statistik qiymət adlanır. Qiymətləndirmə keyfiyyətinin belə müqayisə üsulunda bir çox statistik qiymətlər müqayisəedilməz olur, bununla belə itki funksiyası olduqca ixtiyari qayda ilə seçilir.

Bəzən elə statistik qiymətlər tapmaq mümkün olur ki, bunlar statistik qiymətlərin hər hansı dar sinfində optimal olur. *Meylsiz statistik qiymətlər* sinfi mühüm siniflərdən biridir. Əgər ilkin eksperiment hər hansı çevirmələr qrupuna nəzərən invariant olarsa, məsələnin simmetriyasını pozmayan statistik qiymətlərlə kifayətlənmək təbiidir (bax, *Ekvivariant statistik qiymət*).

Statistik qiymətləri onların «yaxşı olmayan» nöqtələrdə özlərini necə aparması ilə müqayisə etmək olar: əgər $\sup_\theta R_w(T_0; \theta) = \inf_T \sup_\theta R_w(T; \theta)$ olarsa (infimum bütün $T = T(X)$ statistik qiymətləri üzrə götürülür), θ parametrinin T_0 statistik qiyməti minimaks statistik qiymət adlanır (bax, *Minimaks statistik qiymət*).

Qiymətləndirmə məsələsinin Beyes qoyuluşunda hesab edilir ki, naməlum θ parametri Θ-da aprior paylanması $\mathbf{Q}$ olan təsadüfi kəmiyyətin qiymətləridir. Bu halda w itki funksiyasına nəzərən ən yaxşı statistik qiymət T_0

$$r_w(T_0) = \mathbf{M}_w(T_0; \theta) = \int_\Theta \mathbf{M}_\theta \, w(T_0; \theta) \, \mathbf{Q}(d\theta) =$$

$$= \inf_T \int_\Theta \mathbf{M}_\theta \, w(T_0; \theta) \, \mathbf{Q}(d\theta)$$

münasibətilə təyin olunur və infimum bütün $T = T(X)$ statistik qiymətləri üzrə götürülür.

Qiymətləndirilmədə parametrik və qeyri – parametrik məsələlər fərqləndirilir. Parametrik məsələlərdə Θ sonluölçülü Evklid fəzasının altçoxluğu olur. Bu halda, adətən, $l(|\theta_1 - \theta_2|)$ şəklində itki funksiyalarına baxılır, l, – $\mathbb{R}^+$-da mənfi olmayan azalmayan funksiyadır. Daha çox istifadə olunan $|\theta_1 - \theta_2|^2$ kvadratik itki funksiyası xüsusi rol oynayır.

Əgər $T = T(X)$ $\{\mathscr{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsi üzrə kafi statistika dırsa, onda əksər hallarda $\theta^* = h(T)$ statistik qiymətləri ilə kifayətlənmək olur. Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $w(\theta_1; \theta_2) = l(|\theta_1 - \theta_2|)$ və θ^*, – θ üçün hər hansı statistik qiymət olarsa (l – qabarıq funksiyadır), onda elə $h(T)$ statistik qiyməti tapılar ki, o, θ^* – dan pis deyildir; əgər θ^* meylsiz statistik qiymət olarsa, onda $h(T)$-ni meylsiz statistik qiymət seçmək olar (Blekuell teoremi). Əgər T $\{\mathscr{P}_\theta\}$ ailəsi üçün tam kafi statistika, θ^* $g(\theta)$ üçün meylsiz statistik qiymətdirsə, onda $h(T)$ şəklində, meylsiz statistik qiymətlər sinfində minimal dispersiyalı meylsiz statistik qiymət tapmaq olar (Leman – Şeffe teoremi).

Parametrik qiymətləndirmə məsələlərində, bir qayda olaraq, fərz olunur ki, $\{\mathscr{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailəsinin elementləri hər hansı σ – sonlu μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər və

$\frac{d\mathscr{P}_\theta}{d\mu} = p(x,\theta)$ sıxlığı vardır. Əgər $p(x;\theta)$ θ-nın olduqca hamar funksiyası olarsa və

$$\mathbf{I}(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial p}{\partial \theta}(x;\theta) \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}(x;\theta)\right)^{\mathsf{T}} \frac{\mu(dx)}{p(x;\theta)}$$

– Fişer informasion matrisi mövcud olarsa, onda qiymətləndirmə məsələsi r e q u l y a r m ə s ə l ə adlanır. Requlyar məsələlərdə qiymətləndirmə dəqiqliyi K r a m e r – R a o b ə r a b ə r s i z l i y i ilə aşağıdan məhdudlanır: əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ olarsa, onda ixtiyari T statistik qiyməti üçün

$$\mathbf{M}_\theta |T-\theta|^2 \geq \frac{\left(1+\frac{db}{d\theta}(\theta)\right)^2}{\mathbf{I}(\theta)} + b^2(\theta), \quad b(\theta) = \mathbf{M}_\theta T - \theta$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Q i y m ə t l ə n d i r m ə m ə s ə l ə l ə r i n ə a i d m i s a l l a r.

2. Ən çox yayılmış qoyuluş n həcmli seçimin müşahidə olunduğu haldır; $X_1, \dots, X_n$, $-\theta \in \Theta$ olduqda ümumi paylanma sıxlığı ν ölçüsünə nəzərən $f(x,\theta)$ olan, ölçülən $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ fəzasından qiymətlər alan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Requlyar məsələlərdə, əgər bir müşahidə üçün Fişer informasiyası $\mathbf{I}(\theta)$ olarsa, bütün seçimin Fişer informasiyası $\mathbf{I}_n(\theta) = n\mathbf{I}(\theta)$ olur. Bu halda Kramer – Rao bərabərsizliyi

$$\mathbf{M}_\theta |T-\theta|^2 \geq \frac{\left(1+\frac{db}{d\theta}\right)^2}{n\mathbf{I}(\theta)} + b^2(\theta), \quad T = T(X_1, \dots, X_n)$$

şəklində olur.

2.1. X_j – paylanma sıxlığı $(2\pi)^{-1/2}\exp\{-2^{-1}\sigma^{-2}(x-a)^2\}$ olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\theta = (a, \sigma^2)$ naməlum parametrdir; a və σ^2-nın statistik qiymətləri kimi $\overline{X}$ və s^2 ola bilər. Bu halda $(\overline{X}, s^2)$ kafi statistikadır. $\overline{X}$ meylsiz, s^2 meylli statistik qiymətlərdir. Əgər σ^2 naməlum olarsa, $\overline{X}$ minimal dispersiyanın meylsiz statistik qiymətidir, $\overline{X}$ kvadratik itki funksiyasına nəzərən minimaks statistik qiymətdir.

2.2. X_j – paylanma sıxlığı $(2\pi)^{-k/2}\exp\{-2^{-1}|x-\theta|^2\}$, $\theta \in \mathbb{R}^k$ olan $\mathbb{R}^k$-da normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $\overline{X}$ θ-nın meylsiz statistik qiymətidir, əgər $k \leq 2$ olarsa, $\overline{X}$ kvadratik itki funksiyasına nəzərən məqbul statistikadır, əgər $k > 2$ olarsa, $\overline{X}$ qeyri – məqbul statistikadır.

2.3. X_j – naməlum paylanma sıxlığı f, sıxlıqlar ailəsi verilən F-ə aid olan, $\mathbb{R}^1$-də təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Olduqca geniş F sinfi üçün bu q e y r i – p a r a m e t r i k m ə s ə l ə, yəni $f(x_0)$ sıxlığının x_0 nöqtəsində qiymətinin qiymətləndirilməsi məsələsi $g(f) = f(x_0)$ funksionalının qiymətləndirilməsi məsələsidir.

3. X ə t t i r e q r e s s i o n m o d e l. ξ_i – təsadüfi kükrəntilər, $i = 1, \dots, n$, $\|a_{\alpha i}\|$ – məlum matris olsun.

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^{p} a_{\alpha i}\theta_\alpha + \xi_i$$

kəmiyyətləri müşahidə olunur. $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ parametrini qiymətləndirmək tələb olunur.

4. Rasional spektral sıxlığı $\left|\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j\right|^2 \left|\sum_{j=1}^{n} b_j \lambda^j\right|^{-2}$ olan $\zeta(t)$, $0 \leq t \leq T$ Qauss stasionar prosesinin parçası müşahidə olunur; $\{a_j\}, \{b_j\}$ naməlum parametrlərini qiymətləndirmək tələb olunur.

S t a t i s t i k q i y m ə t l ə r i n q u r u l m a s ı ü s u l l a r ı. Ən çox yayılmış *maksimal doğruyaoxşarlıq metodunda* θ-nın statistik qiyməti kimi maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiyməti $\hat{\theta}(X)$ götürülür və bu statistik qiymət $p(X;\theta)$ təsadüfi funksiyasının maksimum nöqtəsi kimi təyin olunur. Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X;\theta) = 0$$

doğruyaoxşarlıq tənliyinin kökləri arasında olur.

Ən kiçik kvadratlar metodunun 3 misalına tətbiqi halında statistik qiymət kimi

$$m(\theta) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \sum_{\alpha} a_{\alpha_1}\theta_\alpha)^2$$

funksiyasının minimum nöqtəsi götürülür.

Statistik qiymətin qurulmasının daha bir üsulunda θ üçün statistik qiymət kimi hər hansı w itki funksiyasına və hər hansı aprior Q paylanmasına nəzərən Beyes statistik qiyməti T seçilir, baxmayaraq ki, ilkin qoyuluş Beyes qoyuluşu deyildir. Məs., əgər $\Theta = \mathbb{R}^1$ olarsa, θ-nı

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta\, p(X;\theta)\, d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(X;\theta)\, d\theta\right)^{-1}$$

vasitəsilə qiymətləndirmək olar. Bu kvadratik itki funksiyası və müntəzəm aprior paylanmaya nəzərən Beyes statistik qiymətidir.

Momentlər metodu aşağıdakı kimi ifadə olunur. $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ və fərz olunur ki, $\alpha_1(\theta), \dots, \alpha_k(\theta)$ üçün k sayda «yaxşı» $a_1(X), \dots, a_k(X)$ statistik qiymətləri vardır. Momentlər metodu statistik qiymətləri məhz $\alpha_i(\theta) = a_i$ sisteminin həlləridir. Əksər hallarda a_i statistik qiyməti kimi empirik momentlər götürülür (bax, misal 1).

Əgər $X_1, \dots, X_n$ seçimi müşahidə olunarsa (bax, misal 1), $g(\mathscr{P})$ üçün statistik qiymət kimi $g(\mathscr{P}_n^*)$-ni seçmək olar. Əgər $g(\mathscr{P}_n^*)$ funksiyası təyin olunmamışdırsa [məs., $g(\mathscr{P}) =$

$= \frac{d\mathscr{P}}{d\lambda}(x)$, λ – Lebeq ölçüsüdür], $g_n(\mathscr{P}_n^*)$-nin münasib modifikasiyaları seçilir. Məs., sıxlığın statistik qiyməti kimi histoqramdan və ya

$$\int \varphi_n(x-y)\, d\mathscr{P}_n^*(y)$$

şəklində statistik qiymətdən istifadə olunur.

S t a t i s t i k q i y m ə t l ə r i n a s i m p t o t i k a s ı. Müəyyənlik üçün misal 2-dəki məsələyə baxılır, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Belə gözləmək olardı ki, $n \to \infty$ olduqda «yaxşı» statistik qiymətlər qiymətləndirilən xarakteristika ilə qeyri – məhdud olaraq yaxınlaşmalıdırlar. Əgər bütün θ üçün $\theta_n^* \to \theta$ münasibəti $\mathbf{P}_\theta$ – ehtimala görə yığılma olarsa, $\theta_n^*(X_1, \dots, X_n)$ statistik qiymətlər ardıcıllığı θ-nın t u t a r l ı s t a t i s t i k q i y m ə t l ə r a r d ı c ı l l ı ğ ı adlanır. Yuxarıda qeyd olunmuş statistik qiymətlərin qurulma üsulları geniş fərziyyələrlə tutarlı statistik qiymətlərin alınmasına gətirir. Misal 1-dəki statistik qiymətlər tutarlı statistik qiymətlərdir. Requlyar qiymətləndirmə məsələlərində maksimal doğruyaoxşarlıq və Beyes statistik qiymətləri riyazi gözləməsi θ-ya bərabər, korrelyasion matrisi $(n\mathbf{I}(\theta))^{-1}$ olan asimptotik normal statistik qiymətlərdir. Bu şərtlərlə bu statistik qiymətlər itki funksiyalarının geniş sinfinə nəzərən asimptotik lokal minimaks statistik qiymətlərdir və bunlara asimptotik optimal statistik qiymətlər kimi baxmaq olar (bax, *Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsi*).

İ n t e r v a l q i y m ə t l ə n d i r i l m ə s i. Etibarlılıq əmsalı γ ilə θ statistik qiyməti üçün *etibarlı çoxluq,* əgər $\mathbf{P}_\theta\{E \supset \theta\} = \gamma(\geq \gamma)$ olarsa, Θ çoxluğunun təsadüfi $E = E(X)$ altçoxluğuna deyilir, yəni E təsadüfi çoxluğuna θ statistik qiymətinin γ etibarlılıq əmsallı e t i b a r l ı ç o x l u ğ u deyilir. Adətən, etibarlılıq əmsalı verilmiş γ olan etibarlı oblastlar çox olur və problem bu halda elə oblastın seçilməsindən ibarət olur ki, o, bəzi optimallıq xassələrinə malik olsun (məs., $\Theta \subset \mathbb{R}^1$ olduqda minimal uzunluqlu interval). 2.1 misalının şərtlərində $\sigma = 1$ olsun; onda

$$[\overline{X} - \lambda/\sqrt{n},\ \overline{X} + \lambda/\sqrt{n}],\quad \gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\lambda^\infty \exp\{-u^2/2\}\, du$$

intervalı etibarlılıq əmsalı γ olan etibarlı intervaldır (bax, *İnterval statistik qiymət*).

Əd.: [1] F i s h e r R., «Phil. Trans. Roy. Soc.» (A), 1922, v. 222, p. 309–68; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 255–63; [3] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; [4] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., 1973; [5] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [7] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [8] G r e n a n d e r U., Abstract inference, N. Y., 1981.

STATİSTİK MEXANİKA « статистическая механика; **statistical mechanics »** – bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan çoxsaylı hissəciklərdən ibarət sistemlərin statistik metodlarla öyrənilməsinə həsr olunmuş fizika bölməsidir. S. m. və ehtimal nəzəriyyəsi uzun müddət bir-birlərinin maraq dairələrinin təbii yaxınlığına baxmayaraq, demək olar ki, bir-birilə təmasda olmadan paralel inkişaf etmişlər. 20-ci əsrin son iki onilliyində vəziyyət kəskin dəyişərək, riyazi fizika və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə mütəxəssislərin müştərək səyləri ilə müəyyən edilmişdir ki, S. m.-nın əsas anlayışları ehtimal nəzəriyyəsinin təbii anlayışları kimi riyazi olaraq ifadə oluna bilinir və S. m.-nın bütün əsas tezisləri riyazi teoremlər kimi interpretasiya oluna bilinir və ya riyazi hipotezlər kimi olduqca dəqiq ifadə oluna bilinir.

S. m. ənənəvi olaraq klassik Nyuton mexanikası anlayışlarına əsaslanan klassik S. m. və kvant mexanikası anlayışlarına əsaslanan kvant S. m.-sı kimi hissələrə ayrılır. Belə aydın olmuşdur ki, klassik S. m. tamamilə təsadüfi meydanlar və təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi dilində şərh oluna bilinir. Kvant S. m.-nın anlayışları təbii olaraq funksional analizin yeni bölməsi terminologiyasında şərh olunur və bu bölmə əksər hallarda *qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi* kimi adlandırılır, bu adlandırılma da adi ehtimal nəzəriyyəsinin ideya və metodları ilə nəzərə çarpacaq qədər paralelizmin olmasından irəli gəlir. Burada klassik S. m.-nın daha əyani anlayışlarına baxılır.

S. m. ənənəvi olaraq, digər şəkildə tarazlıqlı s t a t i s t i k m e x a n i k a və q e y r i – t a r a z l ı q l ı s t a t i s t i k m e x a n i k a kimi hissələrə bölünür. Tarazlıqlı S. m. tarazlıq vəziyyətində olan sistemin statistik xassələrini – fəza bircins sisteminin olduqca uzun müddət ərzində avtonom inkişafında müəyyənləşən xassələrini təsvir edir. Qeyri – tarazlıqlı S. m. belə tarazlığın müəyyənləşmə prosesinin özünü, qeyri – bircins sistemlərin dinamikasını, o cümlədən, kinetik tənliklərin makroskopik miqyasları səviyyəsində belə dinamikanın təsvirinin aşkar edilməsi məsələsini öyrənir.

S. m.-nın tədqiqlərində əsas məqsəd maddənin makroskopik xassələrini onu təşkil edən makroskopik hissələrin qarşılıqlı təsir xarakteri haqqında təsəvvürlər əsasında təsvirdir. Tipik hallarda makromiqyas həcmdə hissəciklərin sayı (normal atmosfer şərtlərində $1\,\mathrm{sm}^3$ havada $\sim 10^{19}$ molekul vardır) olduqca böyük olduğundan sistemin *termodinamik limit keçidindən* sonra (bu halda hissəciklər sayı $N \to \infty$) yaranan xassələrinin öyrənilməsi ön plana çəkilir. Son zamanlar riyazi araşdırmalarla daxil olunmuş əsas metodik yenilik sonsuz sayda qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklərdən ibarət obyektlərin aşkar surətdə baxılmasından ibarətdir, bu obyektlərin xarakteristikaları sonlu sistemlərin uyğun xarakteristikalarının termodinamik limitləri ilə üst-üstə düşür. Sonsuz saylı hissəciklər sistemlərinin öyrənilməsinə keçidin daha çətin və daha abstrakt riyazi aparatın tətbiqi ilə bağlı olmasına baxmayaraq, nəticə etibarilə bu keçid özünü doğruldur, belə ki, belə yanaşmada S. m.-nın bütün anlayışları və ideyaları olduqca düzgün və aşkar surətdə ifadə olunur.

Klassik tarazlıqlı S. m.-da sistemin vəziyyəti $\mathbb{R}^3$ Evklid fəzasında nöqtəvi təsadüfi meydanın ehtimal paylanması kimi təsvir oluna bilinər. Bu meydanın realizasiyaları $\mathbb{R}^3$-də hesabi lokal sonlu altçoxluqlardır. Nöqtələr hissəciklərin vəziyyətləri kimi anlaşılır. Əksər hallarda bir qədər daha ümumi nişanlanmış nöqtəvi meydan modelinə baxılır ki, bu halda hər bir hissəciyə əlavə olaraq onun sürəti qarşı qoyulur, əgər bir neçə tip hissəciklərdən ibarət sistemə baxılırsa, onda hissəciyin tipi də nəzərə alınır. Ən çox tədqiq olunan obyekt üçölçülü tamqiymətli $\mathbb{Z}^3$ şəbəkəsindən qiymətlər alan (çox vaxt digər düzgün şəbəkələrə də baxılır) diskret arqumentli təsadüfi meydanlar kimi riyazi təsvir olunan sistemlərdir. Fiziki olaraq, $t \in \mathbb{Z}^3$ nöqtələrinə kristal şəbəkənin düyünləri, X_t, $t \in \mathbb{Z}^3$ meydanının qiymətlərinə bu düyünlərdə yerləşən hissəciklərin bəzi xarakteristikaları uyğundur. Belə ş ə b ə k ə v a r i m o d e l l ə r, kvant modellərinə baxıldıqda, daha mürəkkəb modellərin sadələşmiş klassik analoqları kimi yaranır.

Meydanın X_t qiymətlərinin Evklid fəzasına aid olduğu hal kimi, X_t qiymətlərinin sonlu və ya hesabi fəzasına baxıldığı hal da maraqlıdır. Fiziki olaraq bu sonuncu halda X_t-nin qiymətləri, əksər hallarda uyğun hissəciyin xarici elektronunun spininin qiyməti kimi interpretasiya olunur, buna görə də, belə modellər **spin modelləri** adlandırılır.

Üçölçülü sistemlərdən başqa, nazik plyonkaların təsvirində istifadə olunan ikiölçülü sistemlərə ($\mathbb{R}^2$ və $\mathbb{Z}^2$-də), tellərin (məs., polimerin uzun molekullarının) təsvirində istifadə olunan birölçülü sistemlərə ($\mathbb{R}$ və $\mathbb{Z}$-də) də baxılır. Dördölçülü modellər, $\mathbb{R}^4$-də ümumiləşmiş təsadüfi meydanlar kimi təsvir olunan meydanların kvant meydan nəzəriyyəsinin dördölçülü modellərinə diskret yaxınlaşmalar kimi maraqlıdır. Təsadüfi meydanların xassələri onların dim. – ölçülərindən kəskin surətdə asılıdır və bu asılılığın tədqiqi S. m.-nın ənənəvi diqqət mövzusudur. Məs., ehtimali proseslərə gətirən birölçülü hal, əksər hallarda, trivial hal kimi izah olunur, belə ki, burada Markov proseslərini xatırladan proseslər yaranır və lokal qarşılıqlı təsirlərin ən təbii halı üçün faza keçidləri yoxdur. Qeyd olunmuş mülahizələrə görə ixtiyari dim. – ölçülü sistemlərə baxılması adi hal şəklini almışdır, bu şərtlə ki, sistemin dim. – ölçüsündən asılı olaraq sistemin xassələrinin keyfiyyətcə dəyişikliklərinə xüsusi diqqət yetirilməlidir.

Tarazlıqlı S. m.-nın əsas nəticəsi **Gibbs postulatıdır**; bu postulatda hökm olunur ki, spin sistemləri halında makroskopik ölçülərli sonlu Ω qabında tarazlıq vəziyyətində hissəciklərin hər hansı x konfiqurasiyasının ehtimalı $\exp\{-H(x)/T\}$ eksponentinə mütənasibdir, burada $H(x)$ – hissəciklərin bu konfiqurasiyasının enerjisi, T – sistemin mütləq temperaturudur və o, uyğun vahidlər sistemində ölçülür. Nöqtəvi təsadüfi meydan halında Gibbs paylanması Ω qabında Puasson nöqtəvi təsadüfi meydanının paylanmasına nəzərən $\exp\{-T^{-1}(H(x)-\mu N(x))\}$-ə mütənasib sıxlıq ilə verilir. Burada $N(x)$, – x konfiqurasiyasındakı hissəciklərin sayı, μ – hissəciklərin orta sıxlığını xarakterizə edən və **kimyəvi potensial** adlanan həqiqi parametrdir. Sonsuzölçülü sistemlərə keçdikdə Gibbs postulatı belə bir müddəa kimi ifadə oluna bilər: S. m.-nın tarazlıq paylanması *DLR–şərti* ilə seçilən *Gibbs təsadüfi meydanının* paylanmasıdır. DLR–şərti sonlu althəcmlərdə realizasiyalar üçün şərti ehtimalları bu althəcmlərin xaricində realizasiyalar verildiyi halda sistemin enerjisini təyin edən potensiallar vasitəsilə ifadə edir. Gibbs postulatı S. m.-da variasion prinsip kimi də başqa şəkildə ifadə oluna bilinər.

Maddənin əsas fiziki maraqlı makroskopik xassələri Gibbs meydanının sonluölçülü paylanmaları ilə ifadə olunur. S. m.-da bu paylanmaların xüsusi surətdə daxil olunmuş korrelyasion funksiyaların köməyilə təsvirinə üstünlük verilir. Buna görə də, sonluölçülü paylanmaları Gibbs meydanının potensialı vasitəsilə ifadə etmə mümkünlüyü məsələsinə fundamental məsələ kimi baxılır. Təəssüflə qeyd olunmalıdır ki, aşkar analitik düsturlar səviyyəsində bu məsələni həll etmək az hallar üçün mümkündür. Bu, əsas etibarilə, birölçülü meydanlar halıdır ki, burada bu problem Markov zəncirinin stasionar paylanmasının onun keçid ehtimalları üzrə tapılması kimi məşhur məsələyə yaxındır. Bu məsələnin məlum olan ən aşkar həlli ikiölçülü *İzinq modeli* üçün dərin cəbri ideyalar sayəsində alınan Onsager həllidir. Aşkar həll olunan modellərdən maraqlılarının siyahısı xüsusi hallar üçün olduğuna baxmayaraq genişlənməkdə davam edir, lakin hər hansı ümumi halda belə aşkar həllin alınmasına ümid azdır. Korrelyasion funksiyaların təqribi hesablanması üçün ənənəvi olaraq ayrılış metodu istifadə olunur və bu funksiyaların yüksək temperaturlu ayrılış sıralara ayrılışında bir neçə ilk hədləri effektiv surətdə hesablamaq olur. Son zamanlar mahiyyətcə qarşılıqlıtəsirli *Markov proseslərinin* modelləşdirilməsinə əsaslanan ədədi metodlar sürətlə inkişaf edir, bu proseslər elə seçilir ki, bunlar üçün Gibbs paylanması zaman üzrə stasionar olsun.

Qeyd olunanlarla əlaqədar olaraq potensial və korrelyasion funksiyalar arasında qarşılıqlı əlaqələrin keyfiyyətli araşdırılmasına böyük maraq göstərilir. Məs., faza keçidləri problemi belə məsələlərə gətirilir. Faza keçidləri fiziki olaraq onun parametrləri kəsilməz dəyişdiyi halda maddənin xassələrinin sıçrayışla dəyişmələrində və maddədə makroskopik qeyri – bircinsliyin yaranması mümkünlüyü halında yaranır. Faza keçidini riyazi olaraq belə bir vəziyyət kimi təyin etmək olar ki, potensial, temperatur, kimyəvi potensial parametrdən analitik asılı olduğu halda sonluölçülü paylanmaların bu parametrdən asılılığının öz xüsusiyyətləri vardır, məs., törəmələrin kəsilməzliyi və ya kəsilənlyi kimi şərtlərin pozulması. Faza keçidləri problemi potensialı ilə verilən müxtəlif Gibbs meydanlarının sayı haqqında problem ilə sıx bağlıdır. Parametrlər oblastını belə meydanın yeganə olduğu və yeganə olmadığı hissələrə ayıran sərhəddə faza keçidləri baş verir. Ciddi riyazi səviyyədə vəziyyət əsas etibarilə, hələlik kükrəntilər nəzəriyyəsi tip metodlarla anlaşılır (Payerls metodu, Piroqov – Sinay metodu).

Sistemlərin bəzi sinifləri üçün korrelyasion bərabərsizliklər metodu da səmərəli olur. Olduqca yüksək temperaturlar oblastında, nöqtəvi meydanlar üçün isə olduqca kiçik sıxlıqlar halında faza keçidləri yoxdur, yeganəlik isə vardır. Aşağı temperaturlarda yeganəlik olmaya bilər və burada yaranan vəziyyətlər olduqca müxtəlifdir. Burada sistemin temperaturu sıfra yaxınlaşdıqda, onun asimptotik vəziyyətini təsvir edən *əsas vəziyyətlərin* araşdırılması mühüm problemdir. Riyazi araşdırmalar üçün xüsusilə çətin sayılan hal – yeganəlik və qeyri – yeganəlik oblastını ayıran kritik temperatur yaxınlığında yerləşən «orta» temperaturlar halının araşdırılmasıdır. Belə kritik temperatur qiymətlərində gözlənilir ki, korrelyasiyaları o dərəcədə asta azalan Gibbs meydanları yarana bilir ki, mərkəzi limit teoremi bu halda doğru olmur. Daha sonra gözlənilir ki, burada uyğun parametrlərlə renormalizasion qrupun seçilməsində limitdə yeni qeyri – trivial avtomodel təsadüfi meydanlar yarana bilər. Bu problematika intensiv müzakirə olunsa da, bu zaman inkişaf edən ideya və metodlar hələ ki, riyazi olaraq, çox çətinliklə anlaşılır.

Qeyri – tarazlıqlı S. m. problemlərinin riyazi işlənilməsi daha da pis vəziyyətdədir. Burada əsas tədqiqat obyektləri S. m.-nın dinamik sistemləridir. Bunlar elə dinamik sistemlərdir ki, onların faza fəzası – $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında nişanlanmış nöqtəvi meydanın realizasiyalarıdır, burada nöqtələr (hissəciklər) də $\mathbb{R}^d$-yə aid olan sürət vektoru ilə nişanlanmışlar. Realizasiyanın hərəkəti differensial tənliklərin sonsuz sistemi ilə verilir, bu tənliklər Nyuton mexanikası tənliklərinin adi sisteminin analoqudur. Belə dinamikanın qurulması məsələsinin özü, realizasiyaların olduqca zəngin çoxluğunda, yalnız $d \le 2$ halı üçün həll olunmuşdur. Fəza ölçülərinin ixtiyari qiymətlərində dinamikanın yalnız tarazlıqlı variantı, yəni uyğun Gibbs təsadüfi meydanını verən invariant ölçüyə malik dinamik sistemi qurmaq mümkün olmuşdur. Əlbəttə, daha artıq nəticələrin alınmasını gözləmək olar. Belə fikirləşmək olar ki, requlyarlıq tipli bəzi əlavə məhdudiyyətlərlə Gibbs paylanmaları sonsuz hissəciklər sistemlərinin dinamikasında dəyişməz qalan bütün paylanmalar çoxluğunu tamamilə istifadə edir və 0 anında başlanğıc ehtimal paylanmalarının olduqca geniş sinfi üçün paylanma $t \to \infty$ anında Gibbs paylanmalarından birinə yığılır. Lakin hələlik belə hipotezin isbatı üçün heç bir yanaşma məlum deyildir.

Qeyri – tarazlıqlı S. m.-da kinetik tənliklər görkəmli yer tutur (o cümlədən, *Boltsman tənliyi*, *Vlasov tənliyi*, hidrodinamik tənlikləri). Bunlar evolyusion tipli inteqro – differensial tənliklər olub, S. m.-nın dinamik sistemlərinin vəziyyətlərinin bəzi ortalanmış xarakteristikalarının zaman üzrə evolyusiyasını təqribən təsvir edir. Son müddətdə riyaziləşdirilmiş tədqiqatlarda kinetik tənliklər zaman və fəza miqyaslarının və qarşılıqlıtəsir potensialının

nəticəsi kimi interpretasiya olunur. Burada araşdırmalar ciddi riyazi çərçivədə yalnız başlanğıc mərhələdədir.

Dinamikanın təqribi təsviri üçün çox vaxt təsadüfi proseslərin istifadəsinə əsaslanan modellər daxil olunur. Məs., hissəciklər sisteminin hərəkəti bəzən çoxölçülü *diffuzion proses* kimi təsvir olunur və bu halda fərz olunur ki, hissəciklərdən birinin vəziyyətinin artımlarının infinitezimal xarakteristikaları və ya sürəti bu hissəciyə qonşu hissəciklərin vəziyyətlərindən asılıdır. Termodinamik limit keçidindən sonra qarşılıqlı təsirli Markov prosesləri sinfinə aid olan sonsuzölçülü diffuzion proses yaranır.

S. m.-nın riyazi problemlər üzrə araşdırmalarının inkişafı yalnız fiziki anlayışlar və nəticələrin əsaslandırılması və dəqiqləşdirilməsi üçün səmərəli olmamışdır. Bu araşdırmaların gedişatında elə təbii və gözəl riyazi anlayışlar aşkar olunmuşdur ki, bunlar özlərinin abstraktlaşdırılmış və fiziki reallıqdan seçilən variantında gözlənilməyən qeyri – fiziki tətbiqlərini tapa bilmişlər. Məs., Gibbs meydanları biologiya və texnikada yaranan təsadüfi proseslərin təsviri üçün geniş istifadə olunur. Gibbs paylanması anlayışı isə dinamik sistemlərin ümumi nəzəriyyəsində özünəməxsus yer tutmuşdur.

Əd.: [1] Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84; [2] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений, М., 1985; [3] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [4] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [5] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980; [6] Ruelle D., Thermodynamic formalism, L. – [a. o.], 1978.

STATİSTİK MƏSƏLƏLƏR qruplarda və bircins fəzalarda « **статистические задачи** на группах и однородных пространствах; **statistical problems** on groups and homogeneous spaces » – qrupda və ya qrupun bircins fəzasında invariant çoxluqlar üçün riyazi statistikanın elə məsələsidir ki, onların həll metodları çoxluqların cəbri xassələrinə, həm də qoyuluşuna görə bunlara ekvivalent olan çoxluqlar üçün həll metodlarına əsaslanır.

G – hər hansı qrup, $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ – statistik struktur olsun. Əgər hər bir $g \in G$ elementi $\mathfrak{X} \leftrightarrow \mathfrak{X}$ $\mathscr{A}$ – ölçülən inikasını təyin edirsə və $\mathscr{P}$ ölçülər çoxluğunu özünə inikas etdirən g^* inikasını doğurursa, $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ G –invariant statistik struktur adlanır. g inikası əksər hallarda sol (sağ) yerinidəyişmə adlanır; x nöqtəsinin sol yerinidəyişməsi gx kimi işarə olunur. İnvariant $\mathfrak{X}$ fəzasını kəsişməyən $\{gx,\ g \in G\}$ altçoxluqlarının – orbitlərinin birləşməsi kimi ifadə etmək olar; əgər $\mathfrak{X}$ bir orbitdən ibarət olarsa, onda $\mathfrak{X}$ bircins fəza adlanır. Məs., hər bir qrup özü özünün bircins fəzasıdır. g^* çevirmələrinin çoxluğu G^* da qrup təşkil edir. Əgər $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Omega\}$ ölçülərin parametrik ailəsi olarsa, G^*-nu parametrik çoxluğun çevirmələr qrupu hesab etmək olar. Əgər $\mathbf{P}$ hər hansı qeyd olunmuş ehtimal ölçüsü, $A \in \mathscr{A}$, $\theta \in \Omega = C$ olduqda, bu parametrik $\mathbf{P}_\theta : \mathbf{P}_\theta(A) = \mathbf{P}(\theta^{-1}A)$ ölçülər ailəsi olarsa, $\mathscr{P}$ ailəsi yerinidəyişmə parametrindən asılıdır, deyilir.

X təsadüfi elementi ilə ifadə olunan ümumi çoxluq (rus. генеральная совокупность) invariant statistik struktur doğurursa, bu çoxluq invariant çoxluq adlanır. İnvariant çoxluqlar üçün statistik məsələlərin özünəməxsus xüsusiyyəti həlledici qaydalara və itki funksiyalarına qoyulan tələblərdə əks olunur. Doğrudan da, əgər d θ parametrinin qiymətində doğru həldirsə, $\bar{g}d$ $g^*\theta$ parametri üçün doğru həldirsə, $\bar{g}$ isə g çevirməsinin doğurduğu, həllər fəzası D-də hər hansı çevirmədirsə, onda $d(x) : d(gx) = \bar{g}d(x)$ ekvivalent həlledici qaydaları və $r : r(\bar{g}d, g^*\theta) = r(d, \theta)$ invariant itki funksiyalarına baxılır. Bu halda risk funksiyası $R(d, \theta) = \mathbf{M}_\theta\, r(d(X), \theta)$ Ω-da G^*-nun orbitlərində sabitdir. Əgər Ω bircinsdirsə, onda risk funksiyası bütün $\theta \in \Omega$ qiymətlərində sabit olur və bu halda, çox vaxt optimal həlledici qaydanı tapmaq mümkün olur.

Ω_0 və Ω_1 G^*-ya nəzərən invariant çoxluqlar olduğu halda $H_1 : \theta \in \Omega_1$ alternativinə qarşı $H_0 : \theta \in \Omega$ hipotezinin yoxlanılması məsələlərində yalnız bütün $g \in G$ üçün $d : d(gx) = d(x)$ invariant kriteriləri ilə kifayətlənmək məsləhətdir. Məlumdur ki, bəzi əlavə məhdudiyyətlərdə elə invariant kriteri vardır ki, bu kriteri bütün kriterilər sinfində minimaksdır. Bu kriterinin tapılması metodu doğruyaoxşarlıq nisbətinin maksimal invariantın doğurduğu σ – cəbrə daralması ilə əlaqədardır (bax, [1]). Maksimal invariant invariant statistikadır, yəni müxtəlif orbitlərdə müxtəlif qiymətlər alan, $t(gx) = t(x),\ x \in \mathfrak{X},\ g \in G$ xassəli $t : \mathfrak{X} \to T$ inikasıdır. Maksimal invariantın köməyilə yalnız seçimin reduksiyası deyil, həm də parametrik fəzanın reduksiyası həyata keçirilir, belə ki, invariant həlledici qaydanın riski parametrlər fəzasında maksimal invariantın funksiyasıdır.

Seçimin reduksiyasının digər üsulu kafi statistikalara baxılmaqla ilə əlaqədardır. İnvariantlıq və kafilik anlayışları arasında münasibət də öyrənilmişdir (bax, [2] – [4]).

Yerinidəyişmə parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsi çox yaxşı öyrənilmişdir. Bu halda $D = \Omega = G$ olur və $d(X)$ statistik qiymətinin ekvivariantlığı $d(gx) = gd(x)$ bərabərliyinə gətirilir. Burada ilk misallardan biri miqyas parametrləri və $\mathbb{R}^1$-də paylanmaların yerinidəyişməsi üçün Pitmən statistik qiymətləridir (bax, [5], [6]). G Abel qrupu olarsa, itki funksiyası kimi $r(d, \theta) = \left|\chi(d) - \chi(\theta)\right|^2$ götürülməsi təklif olunur, burada χ, – G qrupunun hər hansı qeyd olunmuş xarakteridir.

Bəzi təbii məhdudiyyətlər qoyulduqda isbat olunmuşdur ki, təkrar seçim əsasında alınan ekvivariant statistik qiymət, yalnız və yalnız, o halda optimal statistik qiymətdir ki, o, G-də invariant ölçüyə nəzərən ümumiləşmiş Beyes statistik qiyməti olsun. χ xarakterlər qrupunda dəyişdikdə, bütün itki funksiyalarının ailəsinə nəzərən optimal statistik qiymətin varlığı üçün zəruri və kafi şərt – invariant ölçü üzrə X seçiminin paylanma sıxlığı f-in güclü simmetriyaya malik olmasıdır: $\{x : f(x - \theta) = f(x + \theta),\ \theta \in G\}$ çoxluğunun $\mathfrak{X}$-də hər bir orbit ilə yalnız bir ümumi nöqtəsi vardır (bax, [7]). Qeyri – Abel qruplarında mühüm nəticələr yalnız xüsusi qruplar üçün alınmışdır.

Məs., sferada, $SO(m)$ və $\mathbb{R}^m$-də invariant çoxluqlar üçün $SO(m)$ qrupunun yerinidəyişmə parametrinin qiymətləndirilməsi məsələsi həll olunmuşdur, dayanıqlılıq və statistik modellərin $SO(m)$-də kəsilməzliyi araşdırılmışdır (bax, [8]).

Digər məsələlərdən paylanma sıxlığının ekvivariant statistik qiyməti məsələsini qeyd etmək olar. İsbat olunmuşdur ki,

yerinidəyişmə parametrli sıxlığın optimal ekvivariant statistik qiyməti, bəzi şərtlər ödənildikdə, G -də invariant ölçüyə nəzərən ümumiləşmiş Beyes statistik qiymətidir (bax, [9], [10]).

Əd.: [1] Stein C., «Techn. Rept. Nat. Aeron and Space Admin.», 1956, № 6; [2] Hall W. J., Wijsman R. A., Ghosh J. K., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 575–614; [3] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 2, с. 307–21; [4] Сапожников П. Н., «Матем. заметки», 1970, т. 7, № 6, с. 707–15; [5] Pitman E. J. G., «Biometrika», 1939, v. 30, p. 391–421; [6] Каган А. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 104, с. 19–87; [7] Рухин А. Л., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 52–109; [8] Никулин В. Н., в сб.: Проблемы устойчивости стохастический моделей. Труды семинара, М., 1984, с. 94–112; [9] Wertz W., «Metrika», 1979, v. 26, с. 157–67; [10] Кондаков В. М., Сапожников П. Н., «Статистические методы оценивания и проверки гипотез», 1988, № 6, с. 25–30.

STATİSTİK MƏSƏLƏLƏR (i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin **« статистические задачи** теории случайных процессов; **statistical problems** of theory of random processes **»** – *təsadüfi proses* şəklində ifadə olunan müşahidələr əsasında alınan statistik nəticələrə həsr olunmuş riyazi statistika bölməsidir. Ən ümumi qoyuluşda, $t \in T$ üçün, $X(t)$ təsadüfi funksiyasının qiymətləri müşahidə olunur və bu müşahidələr əsasında $X(t)$ təsadüfi prosesinin bəzi xarakteristikaları haqqında statistik nəticələr çıxarılması tələb olunur. Belə geniş qoyuluşda asılı olmayan müşahidələrin bütün klassik statistikası formal olaraq bura daxil olunur. Əslinə qaldıqda isə təsadüfi proseslərin statistik analizi kimi yalnız asılı müşahidələrin statistikası anlaşılır, bu şərtlə ki, məs., təsadüfi prosesin çoxsaylı asılı olmayan realizasiyalarının statistik analizi istisna olunur. Bununla yanaşı, statistik nəzəriyyənin əsasları, məsələlərin əsas qoyuluşları (*statistik qiymətləndirmə*, *statistik hipotezlərin yoxlanılması*), əsas anlayışlar (kafilik, meylsizlik, tutarlılıq və s.) klassik nəzəriyyədə olduğu kimidir. Lakin konkret məsələlərin həllində bəzən yeni səpkili proseslər və mühüm çətinliklər yaranır. Bu çətinliklər müəyyən dərəcədə müşahidə olunan prosesin daha mürəkkəb strukturlu olmasından asılı olduğu kimi, bir qədər də kəsilməz zamanlı müşahidələrlə bağlı – paylanmaların sonsuz – ölçülü fəzalarda baxılması zəruriliyi ilə əlaqədar olur.

Əslinə qaldıqda, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin S. m.-nin həllində müşahidə olunan prosesin strukturundan olduqca istifadə olunur və təsadüfi prosesin təsnifatına uyğun olaraq Qauss, Markov, stasionar, şaxələnən, diffuzion və s. proseslərin S. m.-nə baxılır. Bu istiqamətdə stasionar prosesin statistik nəzəriyyəsi (zaman sıralarının analizi) ən çox inkişaf etmiş hesab oluna bilinər.

Təsadüfi prosesin statistik analizinin zəruriliyi, o cümlədən, meteoroloji iqtisadi sıraların analizi, tsiklik proseslərin (qiymətlərin dəyişməsi, günəş ləkələri kimi) tədqiqi 19-cu əsrdə yaranmışdır. Hal-hazırda təsadüfi proseslərin statistik analizi ilə bağlı məsələlərin dairəsi olduqca genişdir. Təsadüfi küylərin, vibrasiyaların, turbulent proseslərin, dəniz tələtümlərinin, kardioqramların, ensefaloqramların və s. statistik analizini qeyd etmək olar. Küy fonunda siqnalın ayırd edilməsi problemlərinin nəzəri aspektləri təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin olduqca mühüm S. m.-dir.

Bundan sonra fərz olunur ki, $X(t)$ təsadüfi prosesi yalnız $0 \le t \le T$ parçasında müşahdə olunur və fərz olunur ki, t parametri ya bütün $[0, T]$ parçasında dəyişir və ya bu parçadan yalnız tam qiymətləri alır. Adətən, $\{X(t),\ 0 \le t \le T\}$ statistik prosesinin paylanması $\mathbf{P}^T$ haqqında S. m.-də yalnız o məlum olur ki, bu paylanma paylanmaların hər hansı $\{\mathbf{P}^T\}$ ailəsindəndir. Bu ailəni parametrik formada yazmaq həmişə mümkündür.

Misal 1. Müşahidə olunan $X(t)$ prosesi ya təsadüfi olmayan $s(t)$ funksiyası («siqnal») və $Y(t)$ təsadüfi funksiyasının («küy») cəmidir və ya yalnız $Y(t)$ təsadüfi funksiyasıdır. $H_1 : X(t) = Y(t)$ alternativinə qarşı $H_0 : X(t) = s(t) + Y(t)$ hipotezini yoxlamaq tələb olunur (küy fonunda siqnalın aşkar edilməsi məsələsi). Bu statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsidir.

Misal 2. $X(t) = s(t) + Y(t)$ müşahidə olunan prosesdir, burada $s(t)$ – müşahidəçiyə məlum olmayan təsadüfi olmayan funksiyadır (siqnal), $Y(t)$ – təsadüfi prosesdir (küydür). s funksiyasını və ya onun verilmiş t_0 nöqtəsindəki $s(t_0)$ qiymətini qiymətləndirmək tələb olunur. Oxşar şəkildə fərz etmək olar ki, $X(t) = s(t; \theta) + Y(t)$ prosesində s naməlum θ parametrindən asılı məlum funksiyadır, bu funksiyanı $X(t)$ -nin müşahidəsi üzrə qiymətləndirmək tələb olunur (küy fonunda siqnalın ayırd olunması). Bu qiymətləndirməyə aid məsələlərdir.

Təsadüfi proseslər üçün doğruyaoxşarlıq nisbəti: S. m.-də doğruyaoxşarlıq nisbəti və doğruyaoxşarlıq funksiyası böyük rol oynayır (bax, *Neyman – Pirson lemması*, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması*). $\mathbf{P}_u^T$ və $\mathbf{P}_v^T$ paylanmalarının *doğruyaoxşarlıq nisbəti* –

$$p(X(\cdot); u, v) = p(X(\cdot)) = \frac{d\,\mathbf{P}_u^T}{d\,\mathbf{P}_v^T}\,(X(\cdot))$$

sıxlığına deyilir. μ , – σ – sonlu ölçüdür, bütün $\mathbf{P}_\theta^T$ ölçüləri isə μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçülər olarsa,

$$L(\theta) = \frac{d\,\mathbf{P}_\theta^T}{d_\mu}\,(X(\cdot))$$

funksiyasına doğruyaoxşarlıq funksiyası deyilir. Diskret halda, t $[0, T]$ parçasının tam nöqtələrindəki qiymətləri alarsa və $T < \infty$ olarsa, məs., $\mathbf{P}_u$ və $\mathbf{P}_v$ -nin müsbət paylanma sıxlıqları olarsa, doğruyaoxşarlıq nisbəti həmişə mövcuddur və o, bu sıxlıqların nisbəti ilə üst-üstə düşür.

Əgər t bütün $[0, T]$ parçasından qiymətlər alırsa, onda elə hallar ola bilər ki, $\mathbf{P}_u^T$ və $\mathbf{P}_v^T$ ölçüləri bir-birinə nəzərən mütləq kəsilməz olmasınlar; hətta, bundan başqa, elə hallar ola bilər ki, $\mathbf{P}_u^T$ və $\mathbf{P}_v^T$ ölçüləri qarşılıqlı sinqulyar olsunlar, yəni $X(t)$ -nin realizasiyaları fəzasında hər hansı A çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}_u^T\{X \in A\} = 0,\ \ \mathbf{P}_v^T\{X \in A\} = 1.$$

Bu halda $p(X; u, v)$ mövcud deyildir. $\mathbf{P}_\theta^T$ ölçüləri sinqulyar olduğu halda mühüm və müəyyən dərəcədə paradoksal nəticələr alınır, bu isə θ parametri haqqında səhv olmayan nəticələr çıxarmağa imkan verir. Məs., $\Theta = \{0, 1\}$ olsun; $\mathbf{P}_0^T$, $\mathbf{P}_1^T$ ölçülərinin sinqulyarlığı belə anlaşılır: « $X \notin A$ olarsa, H_0 hipotezi qəbul edilir, əgər $X \in A$ olarsa, H_0 qəbul edilmir» kriterisinin köməyilə $H_0 : \theta = 0$ və $H_1 : \theta = 1$ hipotezləri səhv edilmədən fərqləndirilir. Belə mükəmməl kriterilərin olması əksər hallarda

göstərir ki, S. m. o qədər yaxşı qoyulmamışdır və bu səbəbdən çox mühüm olan dəyişikliklər yox olmuşdur.

Misal 3. $X(t)=\theta+Y(t)$ olsun, fərz olunur ki, $Y(t)$ riyazi gözləməsi sıfra bərabər stasionar erqodik proses, θ – həqiqi parametrdir. Fərz olunur ki, $Y(t)$-nin realizasiyaları həqiqi oxu özündə saxlayan zolaqda sanki yəqin analitik funksiyalardır. Erqodik teoremə əsasən

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt=\theta$$

münasibəti doğrudur və bütün $\mathbf{P}_\theta^\infty$ ölçüləri qarşılıqlı sinqulyardırlar. Analitik $X(t)$ funksiyası sıfır ətrafında öz qiymətlərilə tamamilə təyin olunduğundan, θ parametri ixtiyari $T>0$ üçün $\{X(t),\ 0\le t\le T\}$ müşahidələri üzrə səhvə yol verilmədən qiymətləndirilir.

Əgər doğruyaoxşarlıq nisbəti varsa, onda onun hesablanması çətin məsələdir. Hesablamalar əksər hallarda

$$p(X(\cdot);\,u,\,\upsilon)=\lim_{n\to\infty}\frac{p_u(X(t_1),\dots,X(t_n))}{p_\upsilon(X(t_1),\dots,X(t_n))}$$

limit münasibəti əsasında aparılır, burada p_u, p_υ, – $(X(t_1),\dots,X(t_n))$ vektorunun paylanma sıxlıqlarıdır, $\{t_1,t_2,\dots\}$, – $[0,T]$-də sıx çoxluqdur. Bu bərabərliyin sağ tərəfinin araşdırılması $\mathbf{P}_u$, $\mathbf{P}_\upsilon$ ölçülərinin sinqulyarlığının isbatında səmərəlidir.

Misal 4. Ya $X(t)=w(t)$ [burada $w(t)$ – Viner prosesidir (H_0 hipotezi)], yaxud $X(t)=m(t)+w(t)$ olduğu [m – təsadüfi olmayan funksiyadır (H_1 hipotezi)] fərz olunur. $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ ölçüləri $m'\in L^2(0,T)$ olduqda qarşılıqlı mütləq kəsilməz və $m'\notin L^2(0,T)$ olduqda qarşılıqlı sinqulyardırlar. Doğruyaoxşarlıq nisbəti aşağıdakı bərabərliklə ifadə olunur:

$$\frac{d\mathbf{P}_1^T}{d\mathbf{P}_0^T}(X)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T[m'(t)]^2\,dt+\int_0^T m'(t)\,dX(t)\right\}.$$

Misal 5. Fərz olunur ki, $X(t)=\theta+Y(t)$, θ – həqiqi parametrdir, $Y(t)$ isə riyazi gözləməsi sıfra bərabər və korrelyasion funksiyası $r(t)=e^{-\alpha|t|}$, ($\alpha>0$) olan məlum stasionar Markov Qauss prosesidir. $\mathbf{P}_\theta^T$ aşağıdakı doğruyaoxşarlıq funksiyası ilə verilən qarşılıqlı mütləq kəsilməz ölçülərdir:

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta^T}{d\mathbf{P}_\theta^0}(X)=\exp\left\{\frac{1}{2}\theta X(0)+\frac{1}{2}\theta X(T)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\theta\,\alpha\int_0^T X(t)\,dt-\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{4}\theta^2\alpha T\right\}.$$

Məsələn, $X(0)+X(T)+\alpha\int_0^T X(t)\,dt$ $\mathbf{P}_\theta^T$ ailəsi üçün kafi statistikadır.

Təsadüfi proseslərin statistikasının xətti məsələləri.

$$X(t)=\sum_{j=1}^k\theta_j\,\varphi_j(t)+Y(t)\qquad(*)$$

funksiyası müşahidə olunur, burada $Y(t)$ – riyazi gözləməsi sıfra bərabər, korrelyasion funksiyası məlum $r(t,s)$ olan təsadüfi prosesdir, φ_j – məlum təsadüfi olmayan funksiyalar, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_k)$ – naməlum parametrdir (θ_j reqressiya əmsallarıdır). Θ parametrik çoxluğu $\mathbb{R}^k$-nın altfəzasıdır. θ_j əmsalları üçün xətti statistik qiymətlər ya $\sum c_j\,X(t_j)$ şəklində statistik qiymətlərdir və ya bunların kvadratik orta mənada limitləridir. Kvadratik orta mənada meylsiz xətti, optimal statistik qiymətlərin axtarılması məsələsi r-lə təyin olunan xətti inteqral tənliklərin və ya xətti cəbri tənliklərin həllinə gətirilir. Məhz belə optimal $\hat\theta$ statistik qiyməti $Y=\sum b_j X(t_j)$, $\sum b_j\varphi_j(t_j)=0$ münasibətlərilə verilən ixtiyari Y kəmiyyəti üçün $\mathbf{M}_\theta(\theta_j Y)=0$ tənlikləri ilə təyin olunurlar. Bir sıra hallarda ən kiçik kvadratlar metodu ilə θ üçün alınmış statistik qiymətlər asimptotik olaraq ($T\to\infty$ olduqda) optimal xətti statistik qiymətlərdən pis olmur.

Ən kiçik kvadratlar metodu ilə statistik qiymətlərin hesablanması sadə olur və r-dən asılı olmurlar.

Misal 6. Misal 5-in şərtlərində $k=1$, $\varphi_1(t)\equiv1$ olsun. Onda optimal meylsiz xətti statistik qiymət

$$\hat\theta=\frac{1}{2+\alpha T}\,(X(0)+X(T)+\alpha\int_0^T X(t)dt)$$

olacaqdır.

$$\theta^*=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$$

statistik qiyməti asimptotik olaraq həmin dispersiyaya bərabər olur.

Qauss proseslərinin statistik məsələləri. $\{X(t),0\le t\le T,\ \mathbf{P}_\theta^T\}$ – bütün θ qiymətlərində Qauss prosesi olsun. Qauss prosesləri üçün alternativ vardır: ixtiyari $\mathbf{P}_u^T$, $\mathbf{P}_\upsilon^T$ ölçüləri ya qarşılıqlı mütləq kəsilməz və ya sinqulyar ölçülərdir. Qauss paylanması özünün orta qiyməti $m\,\theta(t)=$ $=\mathbf{M}_\theta X(t)$ və korrelyasion funksiyası $r_\theta(s,t)=\mathbf{M}_\theta X(s)X(t)$ ilə tam mənası ilə təyin olunduğundan doğruyaoxşarlıq nisbəti $d\mathbf{P}_u^T/d\mathbf{P}_\upsilon^T$ – m_u, m_υ, r_u, r_υ xarakteristikaları ilə mürəkkəb surətdə ifadə olunur. $r_u=r_\upsilon=r$, r kəsilməz funksiya olduğu hal nisbətən sadə haldır. Doğrudan da, $\Theta=\{0,1\}$, $r_0=r_1=r$ olsun; λ_i – məxsusi qiymətlər, φ_j –

$$\lambda\,\varphi(s)=\int_0^T r(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

inteqral tənliyinin $L^2[0, T]$-də bunlara uyğun normalanmış məxsusi funksiyalarıdır; $m_0(t)$, $m_1(t)$ – orta qiymətləri kəsilməz funksiyalardır və fərz olunur ki,

$$m_{ij} = \int_0^T m_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt\,.$$

$\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ ölçüləri, yalnız və yalnız, o halda mütləq kəsilməz ölçülərdir ki,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (m_{0j} - m_{1i})^2\,\lambda_j^{-1} < \infty$$

şərti ödənilsin.

Bu halda

$$\frac{d\,\mathbf{P}_1^T}{d\,\mathbf{P}_0^T}(x) =$$

$$= \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_{1j} - m_{0j}}{\lambda_j}\left(\int_0^T X(t)\,\varphi_j(t)\,dt - \frac{m_{1j} - m_{0j}}{2}\right)\right\}.$$

Bu bərabərlikdən, r funksiyası müşahidəçiyə məlum olduğu halda, $H_1 : m = m_1$ alternativinə qarşı $H_0 : m = m_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün kriterinin qurulmasında istifadə etmək olar.

S t a s i o n a r p r o s e s l ə r i n s t a t i s t i k m ə s ə l ə l ə r i. Müşahidə olunan $X(t)$-nin riyazi gözləməsi m, korrelyasion funksiyası $r(t)$ olan stasionar proses olduğu fərz olunur; $f(\lambda)$ və $F(\lambda)$, – $X(t)$-nin spektral sıxlığı və spektral funksiyası olsun. Stasionar proseslərin əsas statistika məsələləri hipotezlərin yoxlanılması və ya bu və ya digər – m, r, f, F xarakteristikalarına aid qiymətləndirmə ilə bağlı məsələlərdir. $X(t)$ erqodik proses olduğu halda, m və $r(t)$ üçün tutarlı statistikalar $T \to \infty$ olduqda, uyğun olaraq

$$m^* = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt, \quad r^*(t) = \frac{1}{T}\int_0^{T-t} X(t+s)X(s)\,ds$$

düsturları ilə ifadə olunur. r məlum olduğu halda m-in qiymətləndirilməsi məsələsinə xətti məsələlər çərçivəsində baxılır. (*) şəklində müşahidələr üzrə reqressiya əmsallarının $Y(t)$-nin stasionar proses olduğu halında qiymətləndirilməsi kimi daha ümumi məsələlər də belə məsələlərdəndir.

Fərz olunur ki, $X(t)$-nin orta qiyməti sıfra bərabərdir, spektral sıxlığı $f(\lambda;\theta)$ isə sonluölçülü $\theta \in \Theta$ parametrindən asılıdır. Əgər $X(t)$ Qauss prosesi olarsa, onda $d\,\mathbf{P}_\theta / d\,\mathbf{P}_\theta^0$ doğruyaoxşarlıq nisbəti üçün (əgər bu nisbət varsa) bir sıra hallarda maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərini və ya T-nin böyük qiymətlərində bu statistik qiymətlərə yaxın «yaxşı» qiymətləri tapmaq üçün düsturlar göstərmək olur. Bu statistik qiymətlər, olduqca geniş şərtlərlə, $(\theta, c\theta/\sqrt{T})$ parametrlərli asimptotik normal və asimptotik effektiv qiymətlər olur.

M i s a l 7. $X(t)$ – kəsilməz zamanlı və spektral sıxlığı rasional

$$f(\lambda) = |\,Q(\lambda)/P(\lambda)\,|^2$$

olan stasionar Qauss prosesi olsun; P, Q – çoxhədlilərdir. Rasional spektral f_0, f_1 sıxlıqlarına uyğun $\mathbf{P}_0^T$, $\mathbf{P}_1^T$ ölçüləri yalnız

$$\lim_{\lambda\to\infty} f_0(\lambda)/f_1(\lambda) = 1$$

münasibəti ödənildiyi halda mütləq kəsilməz ölçülər olur. Burada θ parametri P, Q çoxhədlilərinin bütün əmsallarının çoxluğudur.

M i s a l 8. Stasionar Qauss proseslərinin mühüm sinfi avtoreqressiv $X(t)$ proseslərinin sinfidir:

$$X^{(n)}(t) + \theta_n\,X^{(n-1)}(t) + \ldots + \theta_1\,X(t) = \varepsilon(t),$$

burada $\varepsilon(t)$ – vahid intensivlikli Qauss bəyaz küyüdür, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ – naməlum parametrdir. Bu halda

$$f(\lambda;\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-1}\,|P(i\lambda)|^{-2}$$

spektral sıxlıqdır, burada $P(z) = \theta_1 + \theta_2 z + \ldots + \theta_n z^{n-1} + z^n$. Doğruyaoxşarlıq funksiyası isə

$$\frac{d\,\mathbf{P}_\theta^T}{d\,\mathbf{P}^T}(X) = \sqrt{\frac{K(\theta)}{K(\theta^0)^2}}\,\exp\left\{\frac{\theta_n - \theta_n^0}{T} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\,[\lambda_j(\theta) - \lambda_j(\theta^0)]\int_0^T [X^{(j)}(t)]^2\,dt\, - \frac{1}{2}(\lambda(\theta) - \lambda(\theta^0))\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada $\lambda_j(\theta)$, $\lambda(\theta)$, – θ-nın kvadratik formaları olub, $t = 0, T$ nöqtələrində $X^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, (n-1)$ qiymətlərindən asılıdırlar; $K(\theta)$, – $(X(0), X^{(1)}(0), \ldots, X^{(n-1)}(0))$ vektorunun korrelyasion matrisinin determinantıdır.

$\boldsymbol{\theta}$ avtoreqressiya parametri üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri asimptotik normal və asimptotik effektiv statistik qiymətlərdir.

$$\frac{1}{2T}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial\lambda_j(\theta)}{\partial\theta_i}\int_0^T [X^{(j)}(t)]^2\,dt = \begin{cases} 0, & 1 \le i < n, \\ 1/2, & i = n \end{cases}$$

təqribi doğruyaoxşarlıq tənliyinin həlli $\boldsymbol{\theta}_T^*$ da bu xassələrə malikdir.

Stasionar prosesin spektrinin statistik araşdırılmasında $I_T(\lambda)$ p e r i o d o q r a m ı mühüm rol oynayır. Bu statistika aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=0}^{T} e^{-it\lambda}X(t)\right|^2 \quad \text{(diskret zaman halında),}$$

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{-it\lambda}\,X(t)\,dt\right|^2 \quad \text{(kəsilməz zaman halında).}$$

$f(\lambda)$, $F(\lambda)$ üçün müxtəlif növ statistik qiymətlərin qurulmasında və bu xarakteristikalar haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün kriterilərin qurulmasında periodoqramlardan geniş istifadə

olunur. Geniş şərtlərlə $\int I_T(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda$ statistikaları $\int f(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda$ üçün tutarlı statistik qiymətlərdir. Məs., $\int_\alpha^\beta I_T(\lambda)\,d\lambda$ statistikaları $F(\beta)-F(\alpha)$ üçün statistik qiymətdir. Əgər $\varphi_T(\lambda;\lambda_0)$ ardıcıllığı $\delta(\lambda-\lambda_0)$ δ – funksiyasına münasib surətdə yığılırsa, onda $\int \varphi_T(\lambda;\lambda_0)\,I_T(\lambda)\,d\lambda$ inteqralları $f(\lambda_0)$ üçün tutarlı statistik qiymətlər olur. Çox vaxt $\varphi_T(\lambda;\lambda_0)$ funksiyası kimi $a_T\,\psi(a_T(\lambda-\lambda_0)),\quad a_T\to\infty$ şəklində funksiya seçilir. Əgər $X(t)$ diskret zamanlı proses olarsa, bu statistik qiymətləri

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-T+1}^{T-1} e^{-it\lambda}\,r^*(t)\,c_T(t)$$

şəklində yazmaq olar, burada empirik korrelyasion funksiya

$$r^*(t)=\frac{1}{T}\sum_{u=0}^{T-t} X(u+t)X(u)$$

düsturu ilə ifadə olunur, təsadüfi olmayan $c_T(t)$ əmsalları isə ψ, a_T -nin seçilməsi ilə təyin olunurlar. Bu seçmə öz növbəsində $f(\lambda)$ haqqında aprior bilgilərdən asılıdır. Kəsilməz zamanlı proseslər üçün analoji ifadə vardır.

Stasionar proseslərin ekstrapolyasiya, interpolyasiya və filtrasiya məsələləri də bəzən stasionar məsələlərin statistik məsələlərinə aid edilir.

Markov proseslərinin statistik məsələləri. Fərz olunur ki, $X_0, X_1, \dots, X_T$ müşahidələri bircins Markov zənciri təşkil edir. Olduqca geniş fərziyyələrlə doğruyaoxşarlıq funksiyası

$$\frac{d\,\mathbf{P}_\theta^T}{d\,\mu^T}(X)=p_0(X_0;\theta)\,p(X_1\mid X_0;\theta)\dots p(X_T\mid X_{T-1};\theta)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada p_0, p – başlanğıc (ilkin) və keçid paylanma sıxlıqlarıdır. Bu ifadə asılı olmayan müşahidələr ardıcıllığı üçün doğruyaoxşarlıq funksiyasına oxşardır və requlyarlıq şərtləri ödənildikdə ($\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$ üzrə hamarlıq) asılı olmayan müşahidələr üçün uyğun olaraq analoji qiymətləndirmə və hipotezlərin yoxlanılması nəzəriyyələrini qurmaq olur.

$X(t)$ kəsilməz zamanlı Markov prosesi olduğu halda daha mürəkkəb vəziyyət yaranır. $X(t)$ – vəziyyətləri sayı sonlu N, differensiallanan keçid ehtimalları $p_{ij}(t)$ olan Markov prosesi olsun. Keçid ehtimalları matrisi $Q=\|q_{ij}\|$ matrisi ilə təyin olunur, $q_{ij}=p'_{ij}(0)$, $q_i=-q_{ij}$. Fərz olunur ki, başlanğıc anda $X(0)=i_0$ qiyməti Q-dən asılı deyildir. Hər hansı $Q_0=\|q_{ij}^0\|$ matrisini seçərək

$$\frac{d\,\mathbf{P}_Q^T}{d\,\mathbf{P}_{Q_0}^T}(X)=\exp\{(q_{i_n}^0-q_{i_n})^T\}\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{q_{j_\nu j_{\nu+1}}}{q^0_{j_\nu j_{\nu+1}}}\times$$

$$\times\exp\{t_\nu(q_{i_n}-q_{i_\nu}-q_{i_\nu}^0+q_{i_n}^n)\}$$

doğruyaoxşarlıq funksiyası tapılır. Burada $n(x)$, $t_\nu(x)$, $j_\nu(x)$ statistikaları aşağıdakı kimi təyin olunurlar: n , – $X(t)$ prosesinin $[0,\,T)$ intervalında sıçrayışları sayıdır, τ_ν , – n -ci sıçrayış anıdır, $t_\nu=\tau_{\nu+1}-\tau_\nu$, $z_\nu=X(\tau_\nu)$. Yuxarıdakı ifadələrdən q_{ij} parametri üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri alınır: $q_{ij}^*=m_{ij}/\mu_i$, burada m_{ij} , – $[0,\,T)$ intervalında i vəziyyətindən j vəziyyətinə keçidlərin sayıdır, μ_i , – $X(t)$ prosesinin i vəziyyətində olduğu müddətdir.

Misal 9. $X(t)$ – artım intensivliyi λ və ölüm intensivliyi μ sabit ədədləri olan *doğum və ölüm prosesi* olsun. Yəni $q_{i,\,i+1}=i\lambda$, $q_{i,\,i-1}=i\mu$, $q_{ij}=1-i(\lambda+m)$, əgər $|i-j|>1$ olarsa, $q_{ij}=0$. Bu misalda vəziyyətlər sayı sonsuzdur. $X(0)\equiv 1$ olsun. Doğruyaoxşarlıq nisbəti –

$$\frac{d\,\mathbf{P}_{\lambda\mu}^T}{d\,\mathbf{P}_{\lambda_0\mu_0}^T}(X)=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^B\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^D\exp\left\{-(\lambda+\mu-\lambda_0-\mu_0)\int_0^T X(s)\,ds\right\}.$$

Burada B – doğumların ümumi sayı ($+1$-ə bərabər sıçrayışların sayı), D – ölümlərin sayıdır (-1-ə bərabər sıçrayışların sayı). λ və μ üçün maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\lambda_T^*=\frac{1}{B}\int_0^T X(s)\,ds,\quad \mu_T=\frac{1}{D}\int_0^T X(s)\,ds$$

düsturları ilə təyin olunurlar. $X(t)$ – aparı əmsalı a və diffuziya əmsalı b olan diffuzion proses olsun; $X(t)$ aşağıdakı stoxastik differensial tənliyi ödəyir:

$$dX(t)=a(t,X(t))\,dt+b(t,X(t))\,d\boldsymbol{w}(t),\quad X(0)=X_0,$$

burada $\boldsymbol{w}(t)$ – Viner prosesidir. Onda müəyyən məhdudiyyətlərlə

$$\frac{d\,\mathbf{P}_{ab}^T}{d\,\mathbf{P}_{a_0b}^T}(X)=$$

$$\exp\left\{-\int_0^T(b(t,X(t))^{-1}(a(t,X(t))-a_0(t,X(t)))dX(t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T(b(t,X(t))^{-1}(a(t,X(t))-a_0(t,X(t))^2))dt\right\}$$

(burada a_0 – qeyd olunmuş əmsaldır).

Misal 10.

$$dX(t)=a(t,X(t);\boldsymbol{\theta})dt+d\boldsymbol{w}$$

olsun. a – məlum funksiyadır, $\boldsymbol{\theta}$ – naməlum həqiqi parametrdir.

Əgər μ ilə Viner ölçüsü işarə edilərsə, onda doğruyaoxşarlıq funksiyası

$$\frac{d\,\mathbf{P}_\theta^T}{d\,\mu}(X) =$$

$$= \exp\left\{\int_0^T a(t, X(t); \boldsymbol{\theta})\, d\,x - \frac{1}{2}\int_0^T a^2(t, X(t); \boldsymbol{\theta})\, dt\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur və requlyarlıq şərtləri daxilində Kramer–Rao bərabərsizliyi ödənilir: meyli $\Delta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}_\theta \tau - \boldsymbol{\theta}$ olan τ statistik qiyməti üçün

$$\mathbf{M}_\theta \left|\tau - \theta\right|^2 \geq \frac{\left(1 + \frac{d\,\Delta}{d\,\boldsymbol{\theta}}\right)^2}{\mathbf{M}_\theta \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial\theta} a(t, X(t); \boldsymbol{\theta})\right]^2 dt} + \Delta^2(\boldsymbol{\theta}).$$

Əgər $\boldsymbol{\theta}$-dan asılılıq xətti olarsa, maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətləri

$$\theta_T^* = \int_0^T a(t, X(t))\, dt \left(\int_0^T a^2(t, X(t))\, dt\right)^{-1}$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [3] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [4] Grenander U., Abstract inference, N. Y.– [a. o], 1981; [5] Розанов Ю. А., Гауссовские бесконечномерные распределения, М., 1968; [6] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [7] Бриллинджер Д., Временные ряды, пер. с англ., М., 1980; [8] Billingsley P., Statistical inference for Markov processes, Chi., 1961; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [10] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981; [11] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976.

STATİSTİK MODEL « статистическая модель; statistical model » – statistik məsələnin ilkin obyektlərini: təsadüfi xarakterli statistik verilənləri, bunlarla bağlı hadisələri və mümkün ehtimal paylanmalarını formalaşdıran riyazi obyektdir. Bir qayda olaraq, S. m. $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ üçlüyü ilə verilir, burada $\mathfrak{X}$ – elementləri statistik verilənlər çoxluğunun mümkün realizasiyalarından (seçimi nöqtələri) ibarət çoxluq, $\mathscr{A}$, – $\mathfrak{X}$-in müşahidə oluna bilinən hadisələri kimi interpretasiya olunan altçoxluqlarının σ – cəbri, $\mathbf{P}$ – seçimi $(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ fəzasında paylanmalar ailəsidir.

Məs., θ kəmiyyətinin n sayda ölçmələrdə xətalarla alınan nəticələrinin asılı olmayan, $N(0, \sigma^2)$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur; bu halda S. m.-də $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}^n$ ($\mathbb{R}^n$-də Borel σ – cəbri) və $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n = \{N(\theta\mathbf{1}, \sigma^2\mathbf{I}),\ \theta \in \mathbb{R}^1, \sigma^2 > 0\}$; $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{I}$, – $(n \times n)$ ölçülü vahidi matrisdir. Bu sxemdə ölçmələrin ardıcıl aparılması $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_t)$, $t = 1, \ldots, n$ ailəsi ilə təsvir olunur, $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{A}_n = \mathscr{B}^n$, burada $\mathscr{A}_t$ – $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n):$ $: (x_1, \ldots, x_n) \in B\}$, $B \in \mathscr{B}^t$ çoxluqlarının σ – cəbridir və bu cəbr t anından sonra müşahidə olunan hadisələri təyin edir, $\mathbf{P}_t$, – $\mathbf{P}^n$-dən olan paylanmaların $\mathscr{A}_t$-yə daralmaları ailəsidir.

S. m. ailələrinə baxılması təsadüfi proseslər statistikası məsələləri üçün səciyyəvidir. S. m.-in digər – analoji məzmunlu mənaya malik formalarına da ədəbiyyatda təsadüf edilir.

STATİSTİK MODELLƏŞDİRİLMƏ (si) xidmət sistemlərinin **« статистическое моделирование систем обслуживания; statistical simulation of queuing systems »** – *xidmət sistemindəki* prosesin gedişatının zaman üzrə EHM-nın köməyilə bərpasıdır. Bu halda istifadə olunan alqoritmlər belə sistemlərin təsvir edildiyi ehtimal modellərinin əsasında qurulur və bu alqoritmlər təsadüfi proseslərin *statistik modelləşdirilməsi* alqoritmləridir. Xidmət sistemlərinin S. m.-nin mühümlüyü texniki sistemlərin geniş siniflərinin analitik tədqiqinin praktiki cəhətdən qeyri – mümkünlüyü ilə təyin olunur (məs., rabitə, nəqliyyat sistemləri və s. kimi). Əsas məsələlər aşağıdakılardır.

1) Sistemin münasib formal təsviri məsələsi. Problemə olduqca ümumi yanaşma sistemin altsistemlərə – aqreqatlara bölünməsindən ibarətdir (bax, [1]). Xüsusi hallarda S. m.-ni daxil edilmiş Markov prosesinin köməyilə təsvir etmək mümkün olur. Təxmini təsvir geniş tətbiq olunur, bu halda sistem kiçik zaman intervallarından bir (Δt – prinsip) müşahidə edilir və hər bir zaman intervalında baş verən hadisələr qeyd olunur. Sonuncu halda, stasionar rejimə malik sistemlər üçün, onları vektor Markov prosesinin vasitəsilə təxmini təsvir etmək mümkündür. Kütləvi xidmət sistemlərinin münasib rahat formal təsviri üçün modelləşdirmənin çoxlu alqoritm dilləri yaranmışdır (simula, simskript, alqol–68 bazasında modelləşdirmənin xüsusi vasitələri və s.).

2) Statistik qiymətlərin qurulması və alqoritmlərin effektivliyinin artırılması (bax, [2], [3]). Xidmət sistemlərinin xarakteristikalarının qiymətləndirilməsi üçün riyazi statistikanın vasitələrindən və məsələnin xüsusiyyətlərinə əsaslanan xüsusi üsullardan istifadə olunur. T anına qədər keçid rejiminin xarakteristikalarını qiymətləndirdikdə sistem başlanğıc sıfır anından etibarən N dəfə modelləşdirilir, nəticədə isə statistik qiymət kimi uyğun orta qiymətlər götürülür. Stasionar rejimin xarakteristikaları olduqca uzun bir trayektoriya üzrə qiymətləndirilir, bu halda böyük ədədlər qanunu və asılı təsadüfi kəmiyyətlər üçün teoremlərdən istifadə olunur (bu halda alınan statistik qiymətlər asimptotik meylsiz statistik qiymətlər olur).

Sonuncu məsələyə güclü müsbət xətti operatorların öz ölçülərinin funksionallarının *Monte – Karlo metodu* ilə qiymətləndirilməsi məsələsi kimi baxmaq olar. Bu halda Monte – Karlo metodunun ümumi nəzəriyyəsilə inkişaf etmiş effektivliyin artırılması üsullarından istifadə etmək, dispersiyanın azaldılması və statistik qiymətlərin meyl məsələsinə eyni bir nöqteyi – nəzərdən baxmaq mümkün olur.

Əd.: [1] Бусленко Н. П., Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах, М., 1964; [2] Ермаков С. М., Мелас В. Б., Математический эксперимент с моделями сложных стохастических систем, СПб., 1993; [3] Коваленко И. Н., Кузнецов Ю. Н., Методы расчета высоконадежных систем, М., 1988.

STATİSTİK MODELLƏŞDİRİLMƏ (si) köçürtmə məsələlərinin **« статистическое моделирование задач переноса; statistical simulation of transport problems »** – köçürtmə nəzəriyyəsi

məsələlərinin ədədi həllinin hissəciklərin təsadüfi trayektoriyalarının, hətta ola bilər ki, ilkin köçürtmə məsələsində bunlardan fərqli trayektoriyaların *statistik modelləşdirilməsi* yolu ilə həyata keçirilməsidir. Tətbiqlərlə bağlı olaraq, stasionar xətti *kinetik köçürtmə tənliyi* $Af = g$ və ya onun stasionar analoqu ilə təsvir olunan hissəciklərin az qarışıqlı mühitində (məs., neytronların, fotonların, elektronların) köçürtmənin statistik modelləşdirilməsi daha çox inkişaf etdirilmişdir. Adətən, təsadüfi modelləşdirmədə prosesin stoxastik differensial təsvirini təyin edən A operatorunu parçalayırlar, yəni $\mathbb{R}^n$ fəzasında $x(t)$ Markov prosesi xalis köçürtməyə (və ola bilər ki, kəsilməz diffuziyaya) və mühitin hissəciklərində diskret səpələnməyə bölünür, ayrılır.

Qiymətləndirilən fiziki kəmiyyətlərə (məs., inteqral axınlarına, detektorların göstəricilərinə) köçürtmə məsələsinin həllinin xətti funksionalları kimi baxmaq, onları ardıcıl modelləşdirilə bilinən asılı olmayan təsadüfi Markov trayektoriyalarının ansamblı üzrə uyğun xarakteristikaların orta qiymətləri kimi hesablamaq olar. Qarışığın hissəciklərinin öz aralarında və ya onların təsirindən dəyişən mühitin vasitəsilə bilavasitə qarşılıqlı təsirini nəzərə almamaq mümkün olarsa, belə xətti yanaşma doğru olur. Ümumi halda isə trayektoriyalar ansamblını paralel surətdə modelləşdirmək olar.

Xətti məsələlərin həlli üçün hesablamaları sürətləndirən modelləri çevirmə metodlarının geniş arsenalı işlənilmişdir (bax, *Statistik modelləşdirmə*). Əsas üsul çəkili fiktiv hissəciklərin (bu hissəciklər üçün axtarılan axın kütlə axınının mənasını daşıyır) Markov trayektoriyalarının statistik modelləşdirilməsinə keçməkdən ibarətdir (bax, *Xətti tənlik*; Monte – Karlo metodu ilə həll). Faza fəzasının $\mathbb{R}^n$-dən $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^+$ fəzasına qədər genişləndirilməsi imkan verir ki (məs., təsadüfi udulma əvəzinə hissəciklərin kütləsini azaltmaq), ν hissəcikdən ibarət kaskadın modelləşdirilməsi əvəzinə kütləsi $\mathbf{M}\nu$ olan bir hissəciyin köçürülməsinə baxmaq olar. Bu ideyadan *dəyər funksiyası*, yəni *qoşma köçürtmə məsələsinin həlli* nəzərə alınmaqla təsadüfi modelləşdirmə üsulunda istifadə olunur, məsələn, trayektoriyanın təsadüfi uzunluğunun *eksponensial çevirməsində.* Çəkilərin daxil olunması sayəsində $\mathbb{R}^n$-də yeganə Markov prosesinə baxaraq statistik modelləşdirmədə $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^+$-də verilmiş bir neçə Markov prosesinin asılı sınaqlarını almaq olur ki, bu Markov prosesləri $\mathbb{R}^n$-də köçürtmə prosesləri ailəsinə müvafiq olur. Çəkiləri ailənin parametri üzrə differensiallayaraq, köçürtmə məsələsinin parametri üzrə axtarılan funksionalların uyğun törəmələrinin effektiv statistik qiymətlərini qurmaq olur. f axınının qiymətləndirilməsi üçün, yalnız oblast üzrə ortalanmış axın təyin edən *toqquşmalar metodundan* başqa, f-in lokal statistik qiymətlərindən də istifadə olunur. Mürəkkəb mühitlərdə hissəciklərin trayektoriyalarının S. m.-nin alqoritmi «maksimal kəsmə» metodu ilə olduqca sadələşir, bu halda fiktiv elə «eyniliklə bərabər səpələnmə» daxil olunur ki, nəticədə hissəciyin sürət vektoru dəyişməz qalır, fiziki və fiktiv səpələnmələrinin kəsikləri cəmi isə fəza üzrə sabit seçilir.

Bölünən hissəciklərin köçürtmə məsələləri üçün, mənbələri $Af = g$ olan məsələlər istisna olunmaqla, $Af = \varkappa f$-in maksimal məxsusi qiymətinin axtarılması, sistemin kritik ölçülərinin, yəni $\varkappa = 1$ qiymətinə uyğun ölçülərinin təyin olunması və s. kimi məsələlər də maraqlıdır. Bu məqsədlə, məs., nüvə reaktorlarının neytron – fiziki hesablamalarında hissəciklərin nəsillər metodunun xüsusi modifikasiyaları istifadə olunur (bax, [1]).

Əd.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Марчук Г. И., [и др.], Метод Монте – Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [3] Елепов Б. С., [и др.], Решение краевых задач методом Монте – Карло, Новосиб., 1980; [4] Франк-Каменецкий А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте – Карло, М., 1978, [5] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., в кн.: Метод Монте – Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967, с. 25–52.

STATİSTİK MODELLƏŞDİRİLMƏ (si) Markov zəncirlərinin **« статистическое моделирование** цепей Маркова; **statistical simulation** of Markov chains **»** – *statistik modelləşdirmə* nəzəriyyəsinin bölməsidir; bu bölməyə Markov sınaqları ardıcıllıqlarının imitasiya metodları, Markov trayektoriyaları fəzası üzrə inteqralların çevrilmə prinsipləri və s. daxildir. Prosesin vəziyyətinin tamqiymətli və ya kəsilməz koordinatı X üçün keçid ehtimalları paylanması $Q(x; dy)$ olan biraddımlı Markov keçidlərinin – $\{X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n \to \ldots\}$ ardıcıllığının – qurulması asılı olmayan, müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi və ya psevdotəsadüfi ədədlərin ardıcıllığı üzrə, paylanması $Q(X_{n-1}; dy)$ olan $Y = X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin modelləşdirilməsi ilə həyata keçirilir. Belə modelləşdirmənin tutarlılığı psevdotəsadüfi ədədlərin tamamilə müntəzəm paylandığı halda təmin olunur. Markov trayektoriyaları $X(t)$ ya t zamanının $t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k \in \mathbb{N}$ zaman anlarının hər hansı ardıcıllığı üçün modelləşdirilir və ya da ki, bu trayektoriyaların dayaq nöqtələri, məs., köçürtmə məsələlərində səpələnmə vəziyyətləri qurulur (bax, *Dolaşmalar metodu*, *kürələr üzrə* Braun trayektoriyaları üçün). Markov meydanlarının modelləşdirilməsi daha çətin olur. Xətti tənliklərin Monte – Karlo metodu ilə həlli üçün (bax, [3]), statistik fizikanın məsələləri üçün (bax, [4]), kvant meydanlar nəzəriyyəsi, elementar hissəciklər nəzəriyyəsi, o cümlədən, kontinual inteqralların hesablanması üçün müxtəlif Markov modelləri tətbiq olunur (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] Ченцов Н. Н., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, с. 632–43; [2] Кертисс Д., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 149–74; [3] Ермаков С. М., Некрутькин В. В., Сипин А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [4] Методы Монте – Карло в статистической физике, пер. с англ., М., 1982; [5] Гельфанд И. М., Ченцов Н. Н., «Ж. эксперим. и теоретич. физики», 1956, т. 31, с. 1106–07; [6] Applications of the Monte – Carlo method in statistical physics, 2 ed., B. – [a. o.], 1987.

STATİSTİK MODELLƏŞDİRMƏ « статистическое моделирование; statistical modelling » – təsadüfi hadisə və ya prosesin riyazi imitasiyalarının qurulmasıdır. S. m. riyazi statistikada, statistik oyunlarda, kriptoqrafiya və kodlamada randomizasiya üçün istifadə olunur, yəni qeyri – determinik alqoritmlərin konkret realizasiyası üçün və prosesin nə cür cərəyan edəcəyini yalnız «orta hesabla» qurmaq məqsədilə istifadə olunur. S. m.-nin imkanlarından *Monte – Karlo metodu* (statistik sınaqlar metodu) üzrə hesablamalar üçün tətbiqi və hesablama riyaziyyatında istifadə olunur. Statistik sınaqlar metodu ondan ibarətdir ki, axtarılan naməlum kəmiyyətlər uyğun təsadüfi Φ təzahürünün xarakteristikaları kimi interpretasiya olunur; bu təsadüfi təzahür ədədi olaraq modelləşdirilir, sonra isə axtarılan kəmiyyətlər təsadüfi Φ təzahürünün imitasiyalarına əsasən qiymətləndirilir (bax, *İmitasiyası təsadüfi təzahürün*; *Ədədi simulyasiyası* təsadüfi təzahürün). Bu metod stoxastik sistemlərin öyrənilməsi üçün geniş tətbiq olunur və bu halda bu sistemlərin ədədi imitasiyaları üzərində «eksperimentlərdən» istifadə olunur (bax, məs., *Statistik modelləşdirilmə* (si) xidmət sistemlərinin, *Statistik modelləşdirilmə* (si) Markov zəncirlərinin).

Əksər hallarda hesablamalarda real təzahürün sadələşdirilmiş modellərinə baxılır (bax, *Statistik modelləşdirilmə*(s i) k ö - ç ü r t m ə m ə s ə l ə l ə r i n i n). Qeyri – ehtimali təbiətli məsələlərin həlli üçün (məs., elastiklik nəzəriyyəsi məsələlərinin) Monte – Karlo metodunu istifadə etməyə imkan yaradan stoxastik modellər də işlənilmişdir (bax, *Xətti tənlik*; M o n t e – K a r l o m e t o d u i l ə h ə l l, *Elliptik tənlik*; M o n t e – K a r l o m e t o d u i l ə h ə l l).

Adətən, hər hansı bir təsadüfi təzahürün S. m.-si üçün Lebeq ölçüsü $dV = \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$ olan, tilinin uzunluğu vahidə bərabər hesabi – ölçülü $H = \sum_{k=1}^{\infty} \{ x_k : 0 \le x_k \le 1 \}$ kubunun, az və ya çox dərəcədə, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasına təbii inikası f qurulur; $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası bu təsadüfi təzahürün riyazi sxemidir, $\Omega = f(H)$, $\mathbf{P} = V f^{-1}$. Onda təsadüfi təzahürün nəticəsi ω, – $\omega = f(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ düsturu ilə təsadüfi kəmiyyətlər və ya psevdotəsadüfi kəmiyyətlərin (TK) ardıcıllığı üzrə qurulur. Skalyar təsadüfi kəmiyyəti modelləşdirmək üçün ya bir, nadir halda iki TK istifadə olunur. S. m.-nin bütün məsələlərində TK imitasiyası kütləvi problem hesab edilir: fərz olunur ki, alınan «yaxşı nəticə» müəyyən ehtimalla «tipik» ω nəticəsinə gətirə bilər. S. m.-nin çətinliyi, dəqiqliyi və etibarlılığına, məsələn, istifadə olunan ξ_k -ların tipikliyinə tətbiq edilən tələblər oblastından asılı olaraq TK -lar dəyişilə bilinər. Məs., riyazi statistikada qeyri – determinik strategiya (stoxastik həlledici qayda), situasiyanın ω elementar nəticələrinin $(\Omega, \mathscr{A})$ fəzasından δ nəticələrinin ölçülən fəzası $(\Delta, \mathscr{B})$ -yə Markov keçid ehtimalları $\Pi(\omega, d\delta)$ ilə təsvir olunur. Burada, ilk növbədə, tezliklərin $\Pi(\omega, B)$ ehtimallarına yaxın olması mühümdür. Əgər nəticə bir TK ardıcıllığı üzrə qurulursa, onda ξ_k ədədlərinin $[0, 1]$ parçasında müntəzəm yerləşməsi vacibdir. Statistik oyunlarda ξ_k nöqtələrinin $[0, 1]$ parçasının müxtəlif hissələrində olması tələbi də qoyula bilinir.

Monte – Karlo metodunda, bir qayda olaraq, naməlum z üçün $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, baxılan təsadüfi Φ təzahürünü təsvir edən hər hansı $Z(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin $z = \mathbf{M} Z(\omega)$ riyazi gözləməsi şəklində ifadəsi axtarılır və Φ -in asılı olmayan müşahidələri imitasiya olunur. Onda böyük ədədlər qanununa əsasən

$$z \approx \zeta_n = [Z(\omega^{(1)}) + \dots + Z(\omega^{(N)})] / N \qquad (*)$$

götürmək olar.

Yuxarıda şərh olunmuş standart S. m. sxemində bu məsələ formal olaraq

$$z = \int_H Z(f(x))\, dV = \mathbf{M} Z(\omega)$$

inteqralının bərabər çəkilərli və təsadüfi $x^{(n)}$ absislərli olduqca sadə (*) kvadratur düsturu üzrə hesablanılmasına gətirilir.

$\mathbf{M}|Z(\omega)|^2 < \infty$ olduqda bu düsturun xətası «kobud» şəkildə Çebışev bərabərsizliyinin köməyilə ehtimala görə və ya asimptotik olaraq mərkəzi limit teoreminə əsasən qiymətləndirilir, yəni

$$\mathbf{P}\{ |z - \zeta_n| < a\sigma(Z) N^{-1/2} \} \approx \operatorname{erf}(a),$$

$$\sigma^2(Z) = \mathbf{M}|Z(\omega)|^2 - |\mathbf{M} Z(\omega)|^2.$$

$\mathbf{M}|Z(\omega)|^2$ riyazi gözləməsini də «eksperimentlərdən» qiymətləndirmək olar, bu halda hesablama dəqiqliyinin aposterior etibarlı statistik qiymətini vermək olur (bax, *Etibarlı qiymətləndirmə*). z -in hesablanmasında verilən dəqiqliyin alınması üçün zəruri olan hesablama işinin həcmi (bax, *Monte – Karlo metodu*; z ə - r u r i i ş i n h ə c m i) etibarlılıq səddi $\operatorname{erf}(a)$ qeyd olunduqda

$$N\tau = \varepsilon^{-2} a^2 \sigma^2(Z) \tau(Z)$$

hasili ilə təyin olunur, burada $\tau(Z)$, – $Z(\omega)$ -nın bir realizasiyasının qurulması üzrə hesablama işi həcminin riyazi gözləməsidir. Bu riyazi gözləmə ε azaldıqca sürətlə artır; buna görə də, $\sigma^2 \tau$ olduqca kiçik olan modelin uğurlu seçilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır. Məsələn, ilkin inteqral yazılışda əvvəlcə x_i dəyişənlərini hissə-hissə analitik inteqrallamaq, digər dəyişənləri əvəz etmək, inteqrallanma kubunu oblastlara bölmək, inteqralın baş hissəsini ayırmaq, funksiyaların hər hansı sinfi üçün dəqiq kvadratur düstur verən asılı düyünlərin qrupunu istifadə etmək və s. lazımdır.

İmitasiya «eksperimentindən» nadir bir hadisənin ehtimalını qiymətləndirmək istədikdə və ya daha ümumi, yalnız kiçik oblastda sıfırdan olduqca fərqlənən funksiyanın inteqralını hesabladıqda xüsusilə ehtiyatla davranmaq tələb olunur. Burada, demək olar ki, həmişə imitasiya olunan təzahürün çevirməsi aparılmalıdır, bundan sonra araşdırılan hadisə nadir hadisə olmur.

Əd.: [1] Е р м а к о в С. М., М и х а й л о в Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Ф р а н к - К а м е н е ц - к и й А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте – Карло, М., 1978; [3] Методы Монте – Карлов статистической физике, пер. с англ., М., 1982; [4] Е р м а - к о в С. М., Н е к р у т к и н В. В., С и п и н А. С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики, М., 1984; [5] М и х а й л о в Г. А., С а б е л ь ф е л ь д К. К., Ч е н ц о в Н. Н., в кн.: Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования, Новосиб., 1982, с. 69–82; [6] F o r s y t h e G., L e i b l e r R., «Math. Tables and Other Aids Comp.», 1950, v. 4, p. 127–29; [7] Б ё р д Г., Молекулярная газовая динамика, пер. с англ., М., 1981; [8] Е р м а к о в С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [9] П о л л я к Ю. Г., Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, М., 1971; [10] M u l l e r M., «Ann. Math. Statist.», 1956, v.27, № 3, p.569–89; [11] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972.

STATİSTİK NƏZARƏT, KEYFİYYƏTƏ « статистический контроль качества; statistical quality control » – riyazi statistikanın bölməsidir; metodlarından sənayedə keyfiyyətin faktiki alınan səddini təyin etmək üçün, keyfiyyətin dəyişikliklərindəki təmayülləri və texnoloji prosesə olan əsaslandırılmış təkmilləşdirmələri müəyyənləşdirmək üçün istifadə olunur. Kütləvi sənaye məhsullarının keyfiyyəti ya ədədlər toplusu və ya funksiyalar şəklində ifadə edilən xassələr toplusu ilə xarakterizə olunur. Tələb olunan keyfiyyətin səddi dövlət standartları (rus. ГОСТ – государственный стандарт) ilə təyin olunur, bu standartlarda keyfiyyət göstəricilərinin faktiki sədlərini qiymətləndirmə qaydaları verilir. Dövlət standartlarından istifadə zəruridir, belə ki, nəzarət nəticələrinə görə qəbul edilən qərarlar real məsrəflərlə əlaqədar olub, istehsalat kollektivlərinin maraqlarına da təsir edir. K. s. n. metodları kütləvi sənaye məhsulu

istehsalında keyfiyyəti idarəetmə üzrə tədbirlərin ümumi sistemində mühüm rol oynayır. Bu ilk növbədə onunla əsaslandırılır ki, əsas keyfiyyət göstəricilərinin ədədi xarakteristikalarındakı dəyişikliklər təsadüfi xarakter daşıyır. Sistematik xətaları olmayan nəzarəti daha obyektiv etmək məqsədi randomizasiya metodlarının zəruriliyinə gətirir, bu da özlüyündə, ehtimali və statistik metodların istifadə olunması zəruriliyini əsaslandırır.

K. s. n.-də tətbiq olunan riyazi metodlar müxtəlifdir. İlkin materialların və komplektləyici məmulatların yararlılığını (rus. годность) qiymətləndirmək üçün giriş – *statistik qəbul nəzarəti* istifadə olunur. İcazə verilən dəqiqliklə dəzgahlarda detalların hazırlanma imkanının yoxlanılması məsələləri tipik məsələlərdir. Dəqiqliyin azalması səbəblərini aşkar etmək üçün *dispersion analiz* tətbiq olunur. Kütləvi məhsul istehsalının kəsilməz axınının cari K. s. n. metodlarından arzuolunmaz yayınmaların aşkar edilməsi və avadanlıqların lazımi işlək vəziyyətlərinin alınmasına nail olmaq zəruriliyi məqsədilə istifadə olunur.

$\{O_t\}$ – məmulatlar ardıcıllığı olsun, $t = 1, 2, \ldots$. Nəzarət nəticəsində O_t məmulatına ε_t ədədi qarşı qoyulur. Alternativ əlamətə görə nəzarət nəticəsində, əgər O_t qüsursuz olarsa, $\varepsilon_t = 0$, O_t qüsurlu (defektli) olarsa, $\varepsilon_t = 1$ götürülür. Qüsurlu məmulatlar xaric olunur. $\Pi(f, i)$ Dodc planları üzrə cari nəzarət aşağıdakı qaydalar sistemi ilə təsvir olunur. Nəzarətə $\{O_t\}$ ardıcıllığının məmulatlarının bir-bir yoxlanılması ilə başlanır və bu proses o vaxta qədər davam olunur ki, i sayda qüsursuz məmulat seriyası alınmış olsun. Sonra isə hər bir növbəti məmulat, nəzarət olunma üçün, f ehtimalı ilə $(0 < f < 1)$ təsadüfi seçilir. Qüsurlu məmulat ilk dəfə aşkar edilən kimi yenə də qalan məmulatlar bir-bir, i sayda qüsursuz məmulat seriyası alınana qədər nəzarət olunur. Sonra yenə də seçmə ehtimalı f ilə seçimi nəzarətə keçilir və s. ε_t – Bernulli ardıcıllığı olsun, $\mathbf{P}\{\varepsilon_t = 1\} = q$. Onda $\Pi(f, i)$ planı üzrə nəzarət olunan məmulatların orta qiyməti

$$f(q) = f\,[f + (1 - f)(1 - q)^i\,]^{-1}$$

olur. f, i-nin qiymətləri münasib seçildiyi halda, orta çıxış keyfiyyətinin limit qiymətinin səddi L^*-dan istifadə olunur:

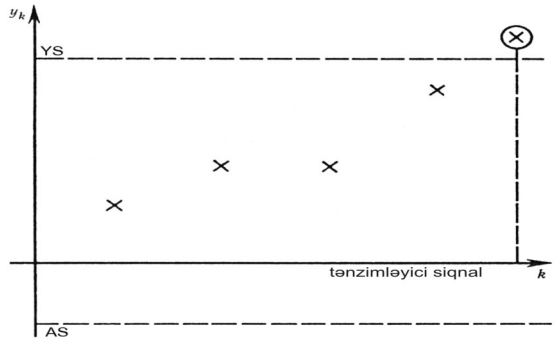
$$L^* = \max_{0 \le q \le 1} L(q);$$

$$L(q) = \frac{q[1 - f(q)]}{1 - q f(q)}$$

– məmulatın qüsurlu olacağının onun nəzarət olunmadığı şərtinə nəzərən şərti ehtimalıdır (bax, [1], [2]). f, i-nin qiymətləri elə seçilməlidir ki, L^* verilmiş qiyməti aşmasın.

Əgər məmulatların nizamlanmış ardıcıllığında qüsurlu məmulatlar seriyasının olacağı mümkündürsə, onda hər dəfə qüsurlu məmulat aşkar olunduqda, onunla qonşu məmulatlarda nəzarət aparılır.

$\{O_t\}$ məmulatlar ardıcıllığının nəzarəti kəmiyyət əlaməti üzrə aparıldığı hallarda nəzarətin nəticələrinin qiymətləri ε_t təsadüfi proses kimi anlaşılır. Müxtəlif tipli pozuntular mümkün ola bilir, məs., ε_t təsadüfi prosesinin parametrlərinin qiymətlərinin məqbul qiymətlər oblastından tədricən «yox olması» kimi. Pozuntu ε_t-nin parametrlərinin təsadüfi τ anında sıçrayışlarla dəyişməsi nəticəsində də ola bilir. Pozuntu aşkar olunan məsələlərdə Beyes metodlarından istifadə olunur (bax, [3]). Əsas dövlət standartlarında fərz olunur ki, pozuntu olmadığı halda $\{\varepsilon_t\}$-nin qiymətləri normal qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı əmələ gətirir. Kəmiyyət əlaməti üzrə nəzarətin effektiv istifadə olunması üçün zəruri ilkin şərt ε_t-nin paylanma qanununun tipi haqqında ilkin fərziyyələrin yoxlanılmasıdır. Pozuntuların olması ya trendin əmələ gəlməsinə – ε_t-nin orta qiymətlərinin sistematik artmasına (azalmasına) və ya ε_t-nin dispersiyasının artmasına və s. səbəb olur. Belə pozuntuların aşkar edilməsi məqsədilə, nəzarət kartlarından (rus. контрольные карты) istifadə edən K. s. n. metodları çox geniş tətbiq olunur. Bu kartlarda (şəkil) absis oxu üzrə nəzarət olunan $O_{t_{k+1}}, \ldots, O_{t_{k+n}}$ seçiminin nömrəsi k qeyd olunur, ordinat oxu üzrə, $\varepsilon_{t_k+1} = x_1, \ldots, \varepsilon_{t_k+n} = x_n$ qiymətlərilə təyin olunan y_k kəmiyyətinin qiyməti qeyd olunur. Adətən, n böyük olmur: $n = 3 \div 5$.



y_k göstəriciləri kimi aşağıdakı xarakteristikalardan tez-tez istifadə olunur:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

– orta qiymət, median,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

– dispersiyasının statistik qiyməti, seçimin açımı (dəyişmə boyu – genişliyi, rus. размах) –

$$R = \max_{1 \le i \le n} x_i - \min_{1 \le i \le n} x_i \quad \text{və s.}$$

Nəzarət kartında əvvəlcədən iki xətt çəkilir (şəkildə absis oxuna paralel qırıq xətlərlə göstərilən): tənzimləyici yuxarı sərhəd (TYS) və tənzimləyici aşağı sərhəd (TAS). Əgər y_k-nın qiyməti bu sərhədlərdən aşağı və yuxarı olarsa, onda texnoloji prosesə onun sabitləşdirilməsi məqsədilə təsir göstərilməsi tələb olunur.

Nəzarət kartları [4]-də təklif olunmuşdur. Hal-hazırda nəzarət kartlarının müxtəlif variantlarından istifadə olunur. Nəzarət kartlarının müxtəlif tiplərinin olması onunla əsaslandırılır ki, bunlar müxtəlif pozuntuların aşkarlanmasında eyni effektivliyə malik deyildirlər. Məs., ε_t-nin orta qiymətlərinin sıçrayışvari dəyişmələrini aşkar etmək üçün K. s. n.-də şəkildə göstərilənlərlə müqayisədə yığım cəmlərinin (rus. накопленная сумма) nəzarət kartları daha effektivdir. Müxtəlif tip nəzarət kartlarının tətbiqi haqqında bax,

[5] – [7]. Müxtəlif tip pozuntuların tez aşkar olunması üçün iki-qat nəzarət kartlarından istifadə etmək məsləhətdir; bu kartlar üzərində iki göstəricinin qiymətləri, məs., $\bar{x}$ və R-in qiymətləri qeyd olunur. Nəzarət kartlarının müxtəlif xarakteristikalarının, məs., müəyyən tip pozuntuların aşkarlanmasında orta gecikmə müddətinin dəqiq hesablanması, böyük həcmli hesablamalar tələb edən (yəqin ki, yalnız EHM-da) çətin məsələlərdən biridir.

Nəzarət olunan məhsul partiyalara bölündükdə statistik qəbuletmə nəzarətinin metodları geniş tətbiq olunur.

Əd.: [1] Dodge H. F., «Ann. Math. Statist.», 1943, v. 14, p. 264–79; [2] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [4] Shewhart W. A., Economic control of quality of manifactured product, N. Y., 1931; [5] Шиндовский Э., Шюрц О., Статистические методы управления качеством, пер. с нем., М., 1976; [6] Джонсон Н., Лион Ф., Статистика и планирование эксперимента в технике и науке, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1980; [7] Мердок Д., Контрольные карты, пер. с англ., М., 1986.

STATİSTİK NƏZƏRİYYƏSİ, QRUPLARIN « статистическая теория групп; statistical group theory » – ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının tətbiqi ilə qrupların araşdırılmasıdır. Bu nöqteyi – nəzərdən sonlu tərtib simmetrik qruplar əsas etibarilə P. Erdeşin (P. Erdös), P. Turanın (P. Turan), M. Salainin (M. Szalay) bir sıra işlərində mükəmməl araşdırılmışdır. Bu işlərdə qrup elementlərinin tərtiblərinin paylanmalarının asimptotik statistik qiymətləri alınmışdır, bu tərtiblərin bölənlərinin sayı, qrupun əlaqəli siniflərinin sayı qiymətləndirilir, qrupların təsvirlərinin xarakterlərinin paylanmaları araşdırılmışdır. Mərkəzi limit teoremi isbat olunmuşdur (bax, [1]): $n!$ – simmetrik qrupun tərtibi, $O(g)$ – qrupun g elementinin tərtibi olsun; onda

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\log O(g) - \log^2 n/2}{\log^{3/2} n\sqrt{3}/3} < y\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{y} e^{-v^2/2}\,dv$$

münasibəti doğrudur.

Əd: [1] Erdos P., Turan P., «Acta. Math. Acad. Sci. Hung.», 1967, t. 18, № 3–4, p. 309–20; [2] Szalay M., Turan P., «Acta. Math. Acad. Sci. Hung.», 1978, t. 32, № 1–2, p. 129–55.

STATİSTİK OYUN « статистическая игра; statistical game » – *iki şəxsin oyunu* anlayışına əsaslanan riyazi statistika məsələlərini təsvir edən riyazi modeldir.

Riyazi statistikanın bütün məsələlərini birləşdirən cəhət statistikin eksperimental verilənlər əsasında müəyyən qərar qəbul etməsidir. Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində bu qərarlar naməlum θ parametri üçün θ^* nöqtəvi statistik qiymətləri formasında ola bilər; statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələsində araşdırılan obyektin təbiəti haqqında hansı fərziyyələrin doğru olub-olmadığı haqqında mülahizələr formasında ola bilər. Bu qərarlar səhv olduğu halda, bir qayda olaraq, itkilərə səbəb olur. Bütün bunlara əsasən statistik məsələlərin oyun modelinin qurulması üçün təbii zərurət yaranır (bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*). Belə modelin elementlərindən aşağıdakıları qeyd etmək lazımdır.

1) Araşdırılan obyektin vəziyyətləri – θ-lar çoxluğu Θ olsun. Əgər θ məlumdursa, onda statistik həllin qurulması zəruriliyi yoxdur. Θ çoxluğu parametrlər çoxluğu kimi də adlanır, lakin Θ daha geniş anlam da daşıya bilər (məs., Θ çoxluğu çox geniş ola bilər və hər hansı $\mathscr{X}$ fəzasında bütün paylanmalar çoxluğu ilə üst-üstə düşə bilər).

2) Naməlum θ parametri haqqında informasiya əldə etmək üçün statistik eksperiment qoyaraq hər hansı təsadüfi kəmiyyət üzərində müşahidələr aparır, bu təsadüfi kəmiyyətin paylanması θ-dan asılıdır. Başqa sözlə, müşahidələr nəticəsində $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına malik X seçimini statistik təyin etmiş olur.

3) Statistika məsələlərində statistikin qəbul edə biləcəyi δ qərarlarının çoxluğu $D = \{\delta\}$ həmişə təyin olunmuş hesab edilir. Qiymətləndirmə nəzəriyyəsində D çoxluğu, adətən, Θ çoxluğu ilə üst-üstə düşür; hipotezləri yoxlama məsələlərində D çoxluğu sonludur, onun elementləri sayı yoxlanılan hipotezlərin sayına bərabərdir. Əgər θ məlumdursa, onda $\delta = \varphi(\theta)$ həlli birqiymətli təyin olunur. Əgər θ naməlum olarsa, δ həllini məlum mənada optimal seçmək məqsədəuyğundur. Həlləri müqayisə etmək məqsədilə itki funksiyası daxil olunur.

4) İtki funksiyası $w(\delta, \theta)$ $D \times \Theta$ fəzasında təyin olunur; əgər araşdırılan obyekt θ vəziyyətində olarsa, itki funksiyasına əsasən təyin etmək olur ki, δ qərarının qəbul edilməsi hansı itkilərə səbəb ola bilər. Fərz olunur ki, $\delta \neq \varphi(\theta)$ olduqda $w(\delta, \theta) > 0$; $w(\varphi(\theta), \theta) = 0$.

Əgər 1) – 4) elementlərindən θ-nın «küylənmiş» müşahidəsi haqqında 2) proseduru xaric olunarsa, onda adi – iki şəxsin oyunu modeli alınır və burada I oyunçu – statistik, II oyunçu – təbiət olur.

Beləliklə, S. o.-nun əsas elementləri iki şəxsin oyunu modelində baxılan (D, Θ, w) üçlüyü ilə təşkil olunur. Lakin burada aşağıdakı xüsusiyyətlər yaranır.

S. o.-da I oyunçu rolunda statistik (tədqiqatçı), II oyunçu rolunda təbiət (daha dəqiq, araşdırılan hadisə və ya prosesin təbiəti) olur. Sonuncu θ parametrini (strategiyasını) seçir, bu parametr statistik üçün naməlumdur və bu parametr araşdırılan obyektin vəziyyətini təyin edir. Riyazi statistikanın məsələlərinin əksəriyyəti bu və ya digər surətdə bu naməlum θ-nı dəqiq «tapan» belə δ həllərinin (qərarlarının) qəbul olunması ilə bağlıdır. Bu zaman «təbiət» öz strategiyalarını məqsədyönlü seçmir, buna görə də, ümumiliyi pozmadan yalnız sıfırla nəticələnən oyunlara baxmaq olar.

S. o.-da statistikin imkanı olur ki, eksperimentlərin köməyilə «təbiətin» strategiyasını müəyyən etsin, bunlar isə naməlum θ haqqında θ parametrindən asılı $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına malik X seçimi kimi informasiya əldə etməyə imkan yaradır. δ qərarı bu şərtlərdə X-dən asılı olaraq seçilməlidir. Seçimi $\mathscr{X}$ fəzasını D-yə inikas etdirən bütün $\delta(X)$ funksiyaları statistikin strategiyalarıdır. Bu $\delta(X)$ funksiyaları həlledici funksiyalar və ya həlledici qərarlar adlanır, bəzən isə bunlar sadəcə həllər (qərarlar) də adlandırılır. Adətən, D çoxluğu ölçülən fəza strukturlu olur və yalnız $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$-nin $(D, \mathscr{F}_D)$-yə ölçülən inikaslarına baxılır, burada $\mathscr{B}$, $\mathscr{F}_D$ seçim və həllər fəzalarında münasib σ – cəbrlərdir. Belə funksiyalar çoxluğu aşağıda $\mathscr{D}$ ilə işarə olunmuşdur. II oyunçunun (təbiətin) strategiyaları çoxluğu Θ olduğu kimi qalır.

δ strategiyasında itkilər

$$W(\delta(\cdot), \theta) = \mathbf{M}_\theta\, w(\delta(X), \theta) = \int w(\delta(x), \theta)\, \mathbf{P}_\theta(dx) \quad (*)$$

risk funksiyasına bərabər götürülür, burada w – ilkin itki funksiyasıdır.

$(\mathscr{D}, \Theta, W)$ üçlüyünə **statistik oyun** deyilir, Θ – təbiətin strategiyaları çoxluğu, $\mathscr{D}$, – $\mathscr{X}$ fəzasının D çoxluğuna bütün ölçülən inikasları çoxluğu, W isə (*) bərabərliyi ilə təyin olunur. S. o.-nun tam xarakterizasiyası üçün $(\mathscr{D}, \Theta, W)$ üçlüyü ilə $(X, \mathbf{P}_\theta)$ cütünün də verildiyini hesab etmək olar, X $\mathbf{P}_\theta$ paylanmasına malik seçimdir. S. o.-nun verilmiş tərifindən aydındır ki, sonuncudakı strategiyalar çoxluğu ilkin – iki şəxsin oyunu (D, Θ, w) ilə müqayisədə daha genişdir.

İki şəxsin oyununun adi halında olduğu kimi $(\mathscr{D}, \Theta, W)$ oyunu ilə yanaşı (bu oyunda strategiyalar **xalis strategiyalar** adlanır), **randomlanmış** və ya **qarışıq**, $(\widetilde{\mathscr{D}}, \widetilde{\Theta}, \widetilde{W})$ oyunlarına baxılır. Burada həllər çoxluğu $\widetilde{\mathscr{D}}$ $\pi(X)$ paylanmalarının çoxluğudur, yəni $\mathscr{X} \to \widetilde{\mathscr{D}}$ inikaslarının çoxluğudur; $\widetilde{D}$, $\widetilde{\Theta}$ – $(D, \mathscr{F}_D)$, $(\Theta, \mathscr{F}_\Theta)$-da bütün paylanmaların çoxluqlarıdır. $\pi \in \widetilde{\mathscr{D}}$ paylanması elə seçilir ki,

$$\widetilde{w}(\pi(X), \theta) = \int_D w(u, \theta)\, \pi(X, du)$$

qiymətləri $(\Theta, \mathscr{F}_\Theta)$-da təsadüfi kəmiyyətlər olsun ($\pi(X, A)$, – π həlledici qaydasına uyğun $A \subset D$ çoxluğunun ehtimalıdır). $\mathbf{Q} \in \widetilde{\Theta}$ təbiətinin strategiyasında risk

$$\widetilde{W}(\pi(\cdot), \mathbf{Q}) = \int_\Theta \int_{\mathscr{X}} \int_D w(u, t)\, \pi(x, du)\, \mathbf{P}_t(dx)\, Q(dt)$$

funksiyasına bərabər götürülür.

$\pi(X)$ strategiyası – **randomlanmış həlledici qayda**, $\mathbf{Q}$ – **təbiətin randomlanmış (qarışıq) strategiyası** adlanır.

Strategiyalararası müəyyən bir qaydalı münasibətlər, altsiniflərdə müntəzəm ən yaxşı strategiyalar, Beyes və minimaks strategiyalar, S. o. üçün strategiyaların tam sinifləri iki şəxsin oyununda olduğu kimi təyin olunur (D çoxluğu $\mathscr{D}$ ilə, w, $\overline{w}$ funksiyaları W , $\overline{W}$ ilə əvəz olunur). Məs., əgər

$$\widetilde{W}(\pi_{\mathbf{Q}}(\cdot), \mathbf{Q}) = \inf_{\pi \in \widetilde{\mathscr{D}}} W(\pi(\cdot), \mathbf{Q})$$

olarsa, $\pi_{\mathbf{Q}}$ strategiyası aprior $\mathbf{Q}$ paylanması üçün **Beyes strategiyası** adlandırılır. Əgər

$$\sup_{\mathbf{Q}} \widetilde{W}(\overline{\pi}(\cdot), \mathbf{Q}) = \inf_{\pi \in \widetilde{\mathscr{D}}} \sup_{\mathbf{Q}} \widetilde{W}(\pi(\cdot), \mathbf{Q})$$

olarsa, $\overline{\pi}(\cdot)$ – **minimaks strategiyadır**.

D çoxluğunun təbiəti ilə əlaqəli olmayan adi oyunlar nəzəriyyəsinin müddəaları S. o.-larda da ifadə olunur. D və Θ çoxluqlarının təbiəti S. o.-nun əsas növlərini ayırd edən aşağıdakı təsnif ilə bağlıdır.

1) əgər $\Theta = A$, $D = A$ olarsa, burada $A \subset \mathbb{R}^k$ daxili nöqtələrə malik çoxluq, $t \neq u$ olduqda $w(t, t) = 0$, $w(t, u) > 0$ olarsa, onda naməlum θ parametrinin nöqtəvi qiymətləndirilmə nəzəriyyəsinin məsələləri alınır.

2) Əgər $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$, $D = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ – sonlu, eyni saylı elementləri olan çoxluqlar, $i \neq j$ olduqda $w(\delta_i, \theta_i) = 0$, $w(\delta_i, \theta_j) > 0$ olarsa, onda sonlu sayda sadə hipotezin yoxlanılması məsələsi alınır.

3) Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ daxili nöqtələrli oblast, $D = \{\delta_1, \delta_2\}$ – iki elementli çoxluq, $\theta \in \Theta_1$ olduqda $w(\delta_1, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta_2$ olduqda $w(\delta_2, \theta) = 0$ ($\Theta_1 \bigcap \Theta_2$ boş çoxluqdur) və digər hallarda $w(\delta_i, \theta) > 0$ olarsa, onda oyun mürəkkəb $\{\theta \in \Theta_1\}$ və $\{\theta \in \Theta_2\}$ hipotezlərinin yoxlanılması məsələsini ifadə edir.

Məsələlərin digər sinifləri də mümkündür. 1) – 3) məsələləri daha çox öyrənilmiş və yayılmışdır. Qeyd etmək lazımdır ki, məsələlərin birinci qrupunda itkilər əksər hallarda kvadratik orta yayınma ilə təyin olunurlar ki, bu da

$$w(\delta, \theta) = c(\delta - \theta)^2, \quad c = \text{const}$$

itki funksiyasına uyğundur. Məsələlərin ikinci qrupunda itkilər səhv etmək ehtimalı ilə təyin olunur, bu isə

$$w(\delta_i, \theta_j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

funksiyasına uyğundur. Bu elə üçüncü qrup məsələlərə də aiddir ki, bunlarda əksərən

$$w(\delta_1, \theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in \Theta_1, \\ 1, & \theta \in \Theta_2, \end{cases} \qquad w(\delta_2, \theta) = \begin{cases} 1, & \theta \in \Theta_1, \\ 0, & \theta \in \Theta_2, \end{cases}$$

itki funksiyası istifadə olunur.

Qeyd olunmuş təsnifat onun göstərir ki, qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin məsələləri ilə statistik hipotezlərin yoxlanılması arasında prinsipial fərq yoxdur. Hər şey Θ və D çoxluqlarının təbiəti və itki funksiyalarının şəklindən asılıdır.

Aşağıda S. o. nəzəriyyəsinin ən ümumi olmasa da, kifayət qədər geniş fərziyyələrdə, iki fundamental müddəası şərh olunur.

A **şərti**. Θ və D çoxluqlarından hər biri ya sonludur və ya $\mathbb{R}^k$-da kompakt qabarıq çoxluqdur.

B **şərti**. 1) Əgər $D \subset \mathbb{R}^k$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ olarsa, onda $w(\delta, \theta)$ itki funksiyası $D \times \Theta$ fəzasında kəsilməzdir. 2) Əgər $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $D = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ sonludursa, onda r sayda $w(\delta_i, \theta)$, $i = 1, \ldots, r$ funksiyalarından hər biri Θ-da kəsilməzdir. 3) Əgər $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ və $D = \{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ sonlu çoxluqlar olarsa, onda $w(\delta_i, \theta_j)$ funksiyaları ixtiyari qiymətlər ala bilər.

C **şərti**. $\mathbf{P}_\theta$ paylanması θ-ya nəzərən variasiya üzrə kəsilməzdir, yəni $\theta_1 \to \theta$ olduqda

$$\sup_{B \in \mathscr{B}} \left| \mathbf{P}_{\theta_1}(B) - \mathbf{P}_\theta(B) \right| \to 0$$

olur.

Birinci fundamental teorem: əgər A , B , C şərtləri ödənilərsə, onda $(\widetilde{\mathscr{D}}, \Theta, \widetilde{W})$ ortalanmış oyununun $\overline{\pi}(X)$ və $\overline{\mathbf{Q}}$ dəyəri (qiyməti) və minimaks strategiyası vardır və:

$$\widetilde{W}(\overline{\pi}(\cdot), \uparrow) = \inf_{\pi} \sup_{\mathbf{Q}} \widetilde{W}(\pi(\cdot), \mathbf{Q}),$$

$$\widetilde{W}(\downarrow, \overline{\mathbf{Q}}) = \sup_{\mathbf{Q}} \inf_{\pi} \widetilde{W}(\pi(\cdot), \mathbf{Q}).$$

Adi oyunlar nəzəriyyəsindən məlumdur ki, $\overline{\mathbf{Q}}$ ən əlverişsiz paylanmadır,

$$\widetilde{W}(\pi_{\overline{\mathbf{Q}}}(\cdot), \overline{\mathbf{Q}}) = \sup_{\mathbf{Q}} \widetilde{W}(\pi_{\mathbf{Q}}(\cdot), \mathbf{Q}) = \sup_{\mathbf{Q}} \widetilde{W}(\downarrow, \mathbf{Q})$$

və $\overline{\pi}(X) = \pi_{\overline{\mathbf{Q}}}(X)$, – $\overline{\mathbf{Q}}$ -yə uyğun Beyes strategiyasıdır. Həmçinin məlumdur ki, $\overline{\pi}(X)$ -in minimaks strategiya olması üçün onun Beyes strategiyası olması ($\overline{\pi}(X) = \pi_{\mathbf{Q}}(X)$ bərabərliyinin hər hansı aprior $\mathbf{Q}$ paylanması üçün ödənilməsi) və $\widetilde{W}(\overline{\pi}(\cdot), \theta) = c = \text{const}$ münasibətinin $\mathbf{Q}$, $\widetilde{W}(\overline{\pi}(\cdot), \theta) \le c$ şərtinə nəzərən sanki hər yerdə ödənilməsi zəruri və kafidir.

İkinci fundamental teorem: A, B, C şərtləri ödənildikdə bütün Beyes strategiyalar sinfi tam sinifdir.

S. o. üçün Beyes strategiyalarının axtarılması məsələsi (deməli, tam sinif və minimaks strategiyaların axtarılması məsələsi) iki şəxsin adi oyunu (D, Θ, w) üçün məlum mənada eyni məsələyə gətirilə bilinir (bax, *Beyes prinsipi*).

Əd.: [1] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958; [2] Боровков А. А., Математическая статистика. (Дополнительные главы), М., 1984; [3] Вальд А., Статистические решающие функции, в кн.: Позиционные игры, пер. с англ., М., 1967, с. 300–522; [4] Маккинси Дж., Введение в теорию игр, пер. с англ., М., 1960; [5] Ferguson T. S., Mathematical statistics. A decision theoretic approach, N. Y. – L., 1967.

STATİSTİK OYUN; invariantlıq prinsipi **« статистическая игра;** принцип инвариантности; invariance principle for **statistical game »** – bax, *İnvariantlıq* statistik oyunlar nəzəriyyəsində.

STATİSTİK OYUN; kafilik prinsipi **« статистическая игра;** принцип достаточности; sufficiency principle for **statistical game »** – bax, *Kafilik* statistik oyunlar nəzəriyyəsində.

STATİSTİK OYUN; meylsizlik prinsipi **« статистическая игра;** принцип несмещенности; unbiasedness principle for **statistical game »** – bax, *Meylsizlik* statistik oyunlar nəzəriyyəsində.

STATİSTİK PLAN « статистический план; statistical design » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin.*

STATİSTİK PROQNOZU, HAVANIN « статистический прогноз погоды; statistical weather forecast » – hidrometeoroloji müşahidələrdən məlum olan verilənlərin yenidən işlənilməsi ilə empirik olaraq müəyyən olunan atmosfer proseslərinin dəyişmələrinin statistik qanunauyğunluqlarından istifadə olunmasına əsaslanan hava proqnozudur. Hava proqnozunun statistik metodları bəzən empirik və ya fiziki – statistik (*prediktorların* seçilməsi fiziki mülahizələrə əsaslandıqda) adlandırılır. H. s. p.-da hava hər bir zaman anında çoxkomponentli (vektor) təsadüfi meydan kimi (yəni üç fəza koordinatının təsadüfi funksiyalarının toplusu kimi) interpretasiya olunur. Bu meydanın komponentləri atmosfer havasının vəziyyətinin fiziki xarakteristikaları (temperatur, təzyiq, külək sürəti vektorunun komponentləri və s.) və havadakı rütubətdir (bulud, yağıntı və s.).

Proqnozlar ənənəvi olaraq: qısamüddətli – bir neçə saatdan 1 – 2 günə qədər, ortamüddətli (vaxtından bir az əvvəl) – 3 – 10 günlük, uzunmüddətli (vaxtından çox əvvəl) – ay və mövsüm üçün proqnozlara ayrılır. Bir çox hallarda havanın bir illik və daha çox müddətli, uzunmüddətlidən də artıq, hava proqnozlarına da baxılır. Son illərdə biraylıq və mövsüm üçün uzunmüddətli proqnozları iqlim dəyişmələrinin qısaperiodlu proqnozlar adlandırmaq tendensiyaları nəzərə çarpır. Hava proqnozu ərazi üçün (adətən, siyasi – administrativ bölgü oblastı və ya hər hansı fiziki – coğrafi oblast üçün), ayrı-ayrı məntəqələr (şəhər, aeroport) və ya magistrallar üçün (aviatras, avtomobil və dəmir yolları) üçün tərtib olunur. Xüsusiləşdirilmiş proqnozlar, o cümlədən, xalq təsərrüfatının konkret sahələri üçün təsis edilmiş, ümumi istifadə üçün, əhali və xalq təsərrüfatı üçün, sahə konkretləşdirmədən tərtib olunmuş proqnozlar da vardır.

Meteoroloji proqnozun ixtiyari metodu istifadə olunan X prediktorunun (ümumiyyətlə, çoxölçülü) və hər hansı P operatorunun (qayda, düstur, alqoritm, həlledici funksiyanın) göstərilməsindən ibarətdir və P operatou X vektorunun ixtiyari realizasiyası x -ə proqnozun mümkün ifadələrindən birini qarşı qoyur [yəni baxılan Y *prediktantının* müəyyən bir $y = P(x)$ qiymətini]. H. s. p. halında X və Y təsadüfi vektorlar hesab olunur, yəni $P(x)$ də təsadüfi vektordur və $Y = P(x) + \delta$, δ – proqnozun təsadüfi xətasıdır.

Əgər proqnoz metodu yalnız ümumi fizika qanunlarını ifadə edən tənliklərə istinadlanırsa, onda proqnoz dinamik proqnoz adlanır. Əgər proqnoz metodu seçilərkən prediktorlar və prediktantlar üzərində müşahidələrin verilənlərinin yenidən statistik işlənilməsindən alınan nəticələr istifadə olunursa, onda uyğun proqnoz ya sadəcə statistik proqnoz, ya da fiziki–statistik proqnoz (fizika qanunlarından istifadə olunduqda), başqa sözlə, dinamik – stoxastik proqnoz adlanır.

Hal-hazırda H. s. p.-nun rolu müxtəlif növ vaxtından əvvəl proqnozlar üçün olduqca fərqlidir. Qısamüddətli və ya ortamüddətli proqnozlar, əksər hallarda, hidrotermodinamik atmosferin xüsusi törəmələrli, başlanğıc şərtləri və sərhəd şərtlərilə verilən qeyri – xətti tənliklər sisteminin ədədi həllinə əsaslanır (son zamanlar, yalnız *təsirin empirik funksiyaları* metoduna əsaslanan xəttiləşdirilmiş tənliklərə baxılmaqla kifayətlənmirlər). Bununla bağlı olaraq, burada statistik metodlar – birincisi, meteoroloji sahələrin obyektiv analizində istifadə olunur [yəni dinamik tənliklərin ədədi həlli üçün stansiyaların qeyri – requlyar şəbəkəsində olan müşahidələrin şəbəkənin requlyar nöqtələrinə (düyünlərinə) optimal interpolyasiyası üçün], ikincisi, bu metodlar verilənlərin inisiallaşdırılması üçün istifadə olunur, yəni verilənlərin elə çevirməsi (məs., hamarlama və s.) üçün ki, o, proqnozların keyfiyyətinin statistik qiymətini optimallaşdırır (bax, *Hava proqnozu*; keyfiyyət statistik qiyməti).

Nəhayət, ən geniş yayılmış metodlar verilənlərin statistik olaraq optimal surətdə kəsilməz yadda saxlanılması metodlarıdır və bu metodlar, obyektiv analiz üçün, dinamik tənlikərin hər addımda zaman üzrə inteqrallanmasından, müvafiq andakı müşahidə verilənlərindən və bu müddət üçün proqnoz nəticələrindən də istifadə edir. Bütün qeyd olunan məsələlərin həlli üçün meteoroloji sahələrin statistik strukturu haqqında bilgi tələb olunur.

Qısamüddətli və ortamüddətli hava proqnozlarının müasir praktikasında statistik metodların istifadəsində digər bir metod dinamik proqnozların nəticələrinin statistik interpretasiyasından istifadə olunmaqla bağlıdır. Bu halda dinamik tənliklərin həllində alınan verilənlər, maraq prediktantı Y -in statistik proqnoz sxemində, X prediktoru kimi istifadə olunur. Burada X -in qiymətləri müəyyən dinamik model əsasında hesablanmış Y perdiktantının özünün

$\hat{Y}$ qiymətləri olduğu kimi (baxılan modelin qeyri – dəqiqliyinə, modelin həllinin təqribi xarakterli olması və müşahidə xətalarının olmasına görə əsl y qiymətindən fərqlənən), atmosferin Y -dən fərqli hansısa xarakteristikalarının hesablamış qiymətləri də ola bilər (məs., maraq sahəsinin lazımi nöqtədən fərqli olan nöqtələrində X qiymətləri və ya verilən hündürlükdə atmosfer təzyiqinin qiymətləri X , Y -in bu halda, hava şəraitinin bilavasitə xarakteristikası olmasına baxmayaraq). X ilə Y arasında statistik əlaqələri (və X üzrə Y -in proqnozu metodu) müəyyənləşdirən müşahidələr arxivi kimi seçilmiş dinamik modelin köməyilə toplanılmış nəticələrdən istifadə olunduğu kimi, X -in faktiki verilmiş müşahidə qiymətlərindən də istifadə oluna bilər (bu şərtlə ki, X və Y üst-üstə düşməsin). Birinci halda, X -in qiyməti üzrə Y kəmiyyətinin proqnozu ədədi modelləşdirmə nəticələrinin statistik analizinə əsaslanır (MOS və ya MOC metodu adlanır). İkinci halda, X -in hesablanan sahələrinin və Y prediktantının faktiki qiymətləri arasında sinxron əlaqələr istifadə olunur (yəni aşkar olmayaraq hesab olunur ki, X -in qiymətlərinin dinamik proqnozu ideal proqnozdur).

H. s. p. statistik əlaqələrin tətbiqinə əsaslanır. Bu əlaqələr hər hansı qeyd olunmuş seçim üzrə empirik təyin oluna bilinir və sonradan bunların qeyd olunduqlarını hesab edərək, bu ana qədər yığılmış bütün informasiya əsasında hər bir verilən proqnoz üçün onları yenidən istifadə etmək olar, bu da H. s. p.-nun adaptiv sxeminin istifadəsinə uyğundur. Uzunmüddətli və uzunmüddətlidən daha çox müddətli hava proqnozları halında dinamik tənliklərdən istifadə etməyən xalis statistik proqnoz metodları tətbiq olunur. Bu halda meteorologiyada uzaq əlaqələr böyük rol oynaya bilər, bu əlaqələrə mühüm dərəcəli zaman intervalları ilə ayrılmış asinxron dəyişənlər daxildir. Məhz buna görə də, uzaq zaman əlaqələri tədqiqatçıların böyük diqqətini daha çox cəlb edir, lakin bunların öyrənilməsi hələ ki, inkişafın başlanğıc mərhələsini yaşayır. $\mathscr{P}$ həlledici qaydası, adətən, funksiyaların hər hansı sinfindən elə seçilir ki, arxiv verilənlərinin əsasında onu proqnozların keyfiyyət statistik qiymətinin bu və ya digər qiymətinə nəzərən optimal hesab etmək mümkün olsun (məs., xətanın kvadratik ortasının minimumu mənasında, itki minimumu və faydalılıq maksimumu mənasında). Buna görə axtarılan funksiyaya naməlum parametrlər daxil olunur və bunların empirik verilənlər üzrə qəbul edilən optimallıq kriterisinə müvafiq olaraq qiymətləndirilməsi $\mathscr{P}$ həlledici qaydasının qurulması məsələsini təşkil edir. Göstərilən parametrləri modelə aşkar şəkildə, $Y = \mathscr{P}'(X, A) + \delta'$ götürərək daxil etmək olar (burada A , məs., toplam reqressiya əmsalları vektoru ola bilər; bax, *Empirik funksiya*(s ı) t ə s i r i n).

H. s. p.-nun praktiki realizasiyası üçün proqnozun bütün məlum statistik metodları və EHM-də böyük həcmli verilənlərin yenidən işlənilməsinin müasir metodları tətbiq edilir. Prediktorlar və prediktantlar, adətən, çoxölçülü kəmiyyətlər olduğundan çoxölçülü statistik analizin qaydalarından geniş istifadə olunur (əsasən də, reqression və diskriminant analizin). Kəsilməz meydanlar əvəzinə əksər hallarda onların bazis funksiyaların müxtəlif sistemləri üzrə ayrılışlarının əmsallarına baxılır, bazis funksiyaları arasında *empirik ortoqonal funksiyalar* böyük populyarlıq qazanmışdır. Belə ayrılışlar prediktorlar və prediktantların ölçülərini olduqca azaltmağa imkan yaradır.

Əd.: [1] Г р у з а Г. В., «Труды Среднеазиатского научноисследовательского гидрометеорологического института», 1967, в. 29 (44), с. 3–41; [2] Руководство по долгосрочным прогнозам погоды на 3–10 дней, Л., 1968; [3] Руководство по месячным прогнозам погоды, Л., 1972; [4] The global climate, Camb., 1984.

STATİSTİK PROSEDUR « статистическая процедура; statistical procedure » – müşahidələr nəticələrinin əsasında statistik nəticələrin alınması prosedurudur. Müasir riyazi statistikada statistik nəticələr [A. Valdın (A. Wald) işlədiyi statistik həlledici qaydalar nəzəriyyəsi çərçivəsində] müşahidə olunan təsadüfi elementin realizasiyalar fəzasını mümkün həllər fəzasına inikas etdirən *həlledici qayda* əsasında alınır. Riyazi statistikanın əsas məsələsi elə S. p.-un qurulmasından ibarətdir ki, bu prosedur hər hansı müəyyən mənada optimal həlledici qaydanın seçilməsinə səbəb olsun.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

STATİSTİK PROSEDUR; d a y a n ı q l ı l ı q **« статистическая процедура;** у с т о й ч и в о с т ь; s t a b i l i t y o f a **statistical procedure »** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğ ı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; e f f e k t i v l i k **« статистическая процедура;** э ф ф е к т и в н о с т ь; e f f i c i e n c y o f a **statistical procedure »** – bax, *Effektivlik*(y i) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; i n v a r i a n t l ı q **« статистическая процедура;** и н в а р и а н т н о с т ь; i n v a r i a n c e o f a **statistical procedure »** – bax, *İnvariantlıq*(ğ ı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; m e y l s i z l i k **« статистическая процедура;** н е с м е щ е н н о с т ь; u n b i a s e d n e s s o f a **statistical procedure »** – bax, *Meylsizlik*(y i) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; m ə q b u l l u q **« статистическая процедура;** д о п у с т и м о с т ь; a d m i s s i b i l i t y o f a **statistical procedure »** – bax, *Məqbulluq*(ğ u) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; m i n i m a k s l ı q **« статистическая процедура;** м и н и м а к с н о с т ь; m i n i m a x i t y o f a **statistical procedure »** – bax, *Minimakslıq*(ğ ı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; o p t i m a l l ı q **« статистическая процедура;** о п т и м а л ь н о с т ь; o p t i m a l i t y o f a **statistical procedure »** – bax, *Optimallıq*(ğ ı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; r o b a s t l ı q **« статистическая процедура;** р о б а с т н о с т ь; r o b u s t n e s s o f a **statistical procedure »** – bax, *Robastlıq*(ğ ı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

STATİSTİK PROSEDUR; t a m s i n i f **« статистическая процедура;** п о л н ы й к л а с с; c o m p l e t e c l a s s o f a **statistical procedures »** – s t a t i s t i k p r o s e d u r l a r ı n v e r i l m i ş ç o x l u ğ u n d a tam sinif – verilən çoxluqdan olan *statistik prosedurların* elə çoxluğudur ki, bu sinifdən olan prosedurlar statistik problemdə qəbul edilən qərarların keyfiyyətinin itkisiz olması üçün kifayət edir. Ümumi halda statistik həllər nəzəriyyəsində S. p.-un tam sinfi araşdırılan obyekti xarakterizə edən və aşağıdakı xassəyə malik olan naməlum $\theta \in \Theta$ parametri haqqında həllər (qərarlar) qəbul etmək üçün istifadə edilən S. p.-lar çoxluğunu təşkil edir: ixtiyari S. p. üçün S. p.-ların tam sinfindən elə S. p. tapılır ki, $\theta \in \Theta$ parametrinin bütün qiymətlərində onun ən yaxşı keyfiyyət göstəriciləri olur (verilən statistik problem üçün baxılan S. p.-ların keyfiyyət göstəriciləri toplusundan); məs., ardıcıl müşahidələr sxemində seçim həcminin orta qiyməti, həlledici funksiyanın risk funksiyası kimi göstəricilər və s. Lakin S. p.-ların tam sinfi haqqında

nəticələrin əksəriyyəti daha dar – həlledici funksiyaların tam sinfi anlayışına aiddir. Əgər baxılan statistik problemdə S. p. və həlledici funksiya anlayışı üst-üstə düşərsə, onda həlledici funksiyaların tam sinfi və S. p.-ların tam sinfi anlayışları da üst-üstə düşür.

Əgər bütün $\theta \in \Theta$ üçün $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$ bərabərsizliyi ödənilərsə, δ_1 həlledici funksiyası δ_2 funksiyasından üstündür (δ_1 – dominar həlledici funksiyadır) (rus. доминирует) deyilir; bu halda, əgər hər hansı $\theta_0 \in \Theta$ üçün ciddi bərabərsizlik ödənilərsə, onda δ_1 həlledici funksiyası δ_2 funksiyasından ciddi üstündür, deyilir [burada $R(\theta, \delta)$, – δ həlledici funksiyasının risk funksiyasıdır]. K – həlledici funksiyaların hər hansı sinfi olsun. Əgər ixtiyari $\delta \in K$ həlledici funksiyası üçün ondan ciddi üstün (üstün) $\delta^* \in K^*$, $K^* \subset K$ həlledici funksiyası tapılarsa, $K^* \subset K$ sinfi K sinfində tam sinif (mahiyyətcə tam sinif – rus. существенно полный) adlanır. K^* sinfinin özünün heç bir altçoxluğu tam (mahiyyətcə tam) sinif olmazsa, K^* tam (mahiyyətcə tam) sinfi minimal tam (mahiyyətcə tam) sinif adlanır.

Əgər K sinfi bütün həlledici funksiyalar sinfi olarsa, yuxarıda verilən təriflərdəki «bütün həlledici funksiyalar sinfində» sözləri, adətən, yazılmır.

Bir qayda olaraq, yalnız həlledici funksiyaların tam sinfindən olan həlledici funksiyalara baxıldıqda, araşdırılan statistik problem olduqca sadələşir, belə ki, bu halda ilkin verilənlərin həcmi onlardakı informasiya itkisiz qalmaqla azalır və bütün həlledici funksiyalar sinfində optimal həlledici funksiyanın axtarışı problemi belə prosedurun yalnız tam sinif çərçivəsində axtarışına gətirilə bilinir (əgər tam sinifdən olan prosedurlara hər hansı parametrlə, ola bilər ki, sonsuzölçülü parametrlə, baxılarsa, onda ilkin problem bu parametr üzrə riskin optimizasiya məsələsinə gətirilir). Tam sinifdən olan prosedurlar, bəzən, müəyyən requlyarlıq xassələrinə malik olur, onda bu hal prosedurların xassələrinin analizinin sadələşməsinə səbəb olur. Buna görə də, həlledici funksiyaların tam sinfinin müəyyənləşdirilməsi və effektiv təsviri statistik həllər nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biridir və məs., müntəzəm ən yaxşı həlledici funksiyanın tapılması (əgər varsa) da bu problemə aiddir: bu halda S. p.-ların minimal tam sinfi yeganə həlledici funksiyadan ibarət olur.

Olduqca ümumi şərtlərdə həlledici funksiyaların minimal, mahiyyətcə tam sinfi həlledici funksiyalar çoxluğunu əmələ gətirir. Öyrənilən problemdə ən mühüm ümumi nəticə A. Valdın [1]-də aldığı *Beyes həlledici funksiyalar* sinfinin tamlığı haqqında nəticədir: Beyes həlledici funksiyaları və onların limitlərinin (həlledici funksiyaların hər hansı təbii zəif yığılma topologiyasında), yəni ümumiləşmiş həlledici funksiyaların çoxluğu mahiyyətcə tam sinif əmələ gətirir. Buna görə də, riyazi statistika məsələlərinin geniş sinfində optimal prosedurları ümumiləşmiş Beyes həlledici funksiyalar sinfində axtarmaq kifayətdir.

Bu nəticə qeyri – Beyes yanaşmasında da tez-tez istifadə olunur, bu halda aprior paylanmalar həlledici funksiyaların tam sinfindən olan həlledici funksiyanı parametrləşdirən kəmiyyət kimi götürülür.

Həlledici funksiyaların tam sinfi haqqında olduqca ümumi nəticələr bu və ya digər monotonluq xassələrinə malik olan paylanmalar ailəsi üçün ifadə olunmuş, riyazi statistika məsələlərinin (qiymətləndirmə nəzəriyyəsi, statistik hipotezlərin yoxlanılması) geniş sinfi üçün alınmışdır (bax, məs., *Monoton doğruyaoxşarlıq nisbəti*), – burada həlledici funksiyaların mahiyyətcə tam sinfi monoton prosedurlar çoxluğu adlandırılan çoxluq əmələ gətirir (bax, [4] – [6]). Həlledici funksiyaların tam sinfinin digər ümumi xüsusiyyəti kafilik anlayışı ilə bağlıdır: bir çox statistik problemlərdə (qiymətləndirmə nəzəriyyəsi, statistik hipotezlərin yoxlanılması və s.) seçimdən yalnız seçim üzrə qurulmuş kafi statistikanın qiyməti vasitəsilə asılı olan prosedurlarla (uyğun olaraq, statistik qiymətlərlə, kriterilərlə və s.) kifayətlənmək olur. Riyazi statistikanın konkret məsələlərində baxılan problemlər üçün S. p.-ların tam sinifləri haqqında digər nəticələr də məlumdur.

Riyazi statistikanın asimptotik məsələlərində seçim həcmi n və ya müşahidə müddəti T qeyri – məhdud artdığı halda S. p.-un effektivlik xarakteristikaları kimi sonlu n və ya T üçün hesablanan uyğun xarakteristikaların limitləri ($n \to \infty$ və ya $T \to \infty$ olduqda) götürülür və təbii olaraq, S. p.-ların asimptotik tam sinfi anlayışı daxil olunur. Məs., həlledici funksiyaların tam sinfinin qeyri – asimptotik tərifində həlledici funksiyaların tam sinfinin tərifindəki $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2)$ münasibəti $n \to \infty$ olduqda (və ya $T \to \infty$) $R(\theta, \delta_1) \leq R(\theta, \delta_2) + o(1)$ münasibətilə əvəz olunur.

Əd.: [1] Вальд А., в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300–522; [2] Le Cam L., «Ann. Math. Statist.», 1955, v. 26, № 1, p. 69–81; [3] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистический решений, пер. с англ., М., 1958; [4] Karlin S., Rubin H., «Ann. Math. Statist.», 1956, v. 27, № 2, p. 272–99; [5] Brown L., Cohen A., Strawderman W., «Ann. Statist.», 1976, v. 4, № 4, p. 712–22; [6] Ruschendorf L., «Math. Operations forsch. und Statist. Ser. Statist.», 1983, Bd 14, № 2, S. 243–50.

STATİSTİK PROYEKSİYASI, PLANIN « статистическая проекция плана; projection of a design » – bax, *Ardıcıl planlaşdırılması*, *eksperimentin.*

STATİSTİK SEÇİM « статистическая выборка; statistical sample » – bax, *Seçim*.

STATİSTİK SINAQLAR METODU « статистических испытаний метод; statistical simulation method » – bax, *Monte – Karlo metodu.*

STATİSTİK STRUKTUR « статистическая структура; statistical structure » müşahidə olunan nizamsız dəyişən $x(t, \mathbf{r})$ meydanının və ya $x(t)$ zaman sırasının strukturu – realizasiyası verilmiş meydan və ya sıra qəbul edilən $X(t, \mathbf{r})$ [uyğun olaraq $X(t)$] təsadüfi funksiyasının *statistik xarakteristikaları* çoxluğudur.

S. s. termini bir çox tətbiqi araşdırmalarda: xüsusilə də, meteorologiya, okeanologiya və geofizikanın digər bölmələrində geniş istifadə olunur; belə ki, bu sahələrdə qeyri – requlyar dəyişən müşahidələrlə əlaqədar olaraq onların interpretasiyası və tədqiqinə statistik yanaşmadan istifadə olunur.

S. s.-un ən mühüm elementləri: moment funksiyaları – $\mathbf{M}X(t, \mathbf{r}) = m(t, \mathbf{r})$ və $\mathbf{M}[X(t_1, \mathbf{r}_1)\, X(t_2, \mathbf{r}_2)] = B(t_1, \mathbf{r}_1, t_2, \mathbf{r}_2)$ və ya $D(t_1, \mathbf{r}_1, t_2, \mathbf{r}_2) = \mathbf{M}[X(t_2, \mathbf{r}_2) - X(t_1, \mathbf{r}_1)]^2$ struktur funksiyasıdır.

Çoxölçülü $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ meydanı halında $\mathbf{m}$ orta qiyməti – özünün arqumentlərinin vektor funksiyası, ikinci moment $\mathbf{B}$ isə matris funksiyadır. Fəza koordinatları $\mathbf{r}$ və zaman dəyişəni t -dən asılı $X(t, \mathbf{r})$ meydanı üçün $\mathbf{m}(t, \mathbf{r})$ və $B(t, \mathbf{r})$ xarakteristikaları ümumi fəza – zaman S. s.-nu təsvir edir. Fəza S. s. (qeyd olunmuş zaman anında meydanın qiymətlərinə uyğun) və zaman S. s. (qeyd olunmuş nöqtədə meydanın zaman üzrə gedişinə müvafiq) S. s.-un xüsusi hallarıdır.

$X(t, \mathbf{r})$ təsadüfi meydanı fəza üzrə bircins və zaman üzrə stasionar meydan olduğu xüsusi hal mühüm hal hesab olunur. Onda $B(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ korrelyasion funksiyası və $D(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ struktur funksiyası ilə yanaşı, S. s. uyğun spektral sıxlığı (spektri) vasitəsilə eynilə təsvir olunur. Praktikada yalnız S. s. elementlərinin müşahidələrdən alınmış statistik qiymətləri məlum olur; bu qiymətlər müşahidə xətaları və istifadə olunan seçimin məhdudluğu ilə əlaqədar, qaçılmaz xətalara malik statisik qiymətlər olur. Bu xətalar qiymətləndirilir, onların təsirinin azaldılması yolları araşdırılır. Qiymətləndirmə dəqiqliyini artırmaq və yuxarıda qeyd olunan funksiyalardan istifadə etmək üçün, bunlar bəzən az sayda parametrlərdən asılı sadə analitik ifadələrlə approksimasiya olunur.

Əd.: [1] Гандин Л. С., Каран Р. Л., Статистические методы интерпретации метеорологических данных, Л., 1976; [2] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.

STATİSTİK TEST « статистический тест; statistical test » – bax, *Statistik kriteri.*

STATİSTİK VƏZİYYƏT « статистическое состояние; statistical state » – bax, *Vəziyyət.*

STATİSTİKA « статистика; statistic » – müşahidələrin nəticələrinin funksiyasıdır.

Misal 1. $X = (X_1, \dots, X_n)$ – komponentləri asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olan təsadüfi vektor, $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$, – X vektorunun realizasiyaları fəzasında verilmiş ixtiyari funksiya olsun. Onda $T(X)$ S.-dır. Məs.,

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

S.-sı, X -in müşahidələri vektoru üzrə qurulmuş empirik paylanmanın k-cı tərtib momentidir.

Misal 2. θ – naməlum parametr, $\theta \in \mathbb{R}^1$, $X(t)$ – korrelyasion funksiyası

$$r(t, s) = \mathbf{M} X(t) X(s) = e^{-\alpha|t-s|}, \quad \mathbf{M} X(t) = 0$$

ifadəsilə verilən təsadüfi proses olsun.

$$x(t) = \theta + X(t), \quad t \in [0, T]$$

funksiyası müşahidə olunur. Onda

$$\hat{\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt \quad \text{və} \quad \hat{\hat{\theta}} = \frac{1}{2 + \alpha T} [x(0) + x(T) + \alpha T]$$

statistikaları θ parametrinin nöqtəvi statistik qiymətləridir.

Bax, *Müşahidələrin yenidən işlənilməsi*.

Əd.: [1] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [2] Voinov V. G., Nikulin M. S., Unbiased estimators and their applications, v. 1 – Unvariate case, Dordtrecht, 1993.

STATİSTİKA(sı) binar münasibətlərin **« статистика** бинарных отношений; binary relations **statistics »** – bax, *Binar münasibətlər statistikası.*

STATİSTİKA bölünən / ayrılan **« статистика** разделимая; decomposable/separable **statistic »** – bax, *Bölünən statistika*, *Seçimi tezlik.*

STATİSTİKA(sı) interval verilənlərinin **« статистика** интервальных данных; interval data **statistics »** – bax, *İnterval verilənlərinin statistikası.*

STATİSTİKA invariant **« статистика** инвариантная; invariant **statistic »** – bax, *İnvariant statistika*.

STATİSTİKA kafi **« статистика** достаточная; sufficient **statistic »** – bax, *Kafi statistika*.

STATİSTİKA(sı) kriterinin **« статистика** критерия; test **statistic »** – kritik funksiyası

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > C_0 \ (< C_0), \\ 0, & T(x) < C_0 \ (> C_0), \end{cases} \tag{1}$$

və ya $\{x : T(x) = C_i\}$, $i = 0, 1, 2$ çoxluqlarında mümkün randomizasiya ilə

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < C_1 \text{ və ya } T(x) > C_2, \\ 0, & C_1 < T(x) < C_2, \end{cases} \tag{2}$$

münasibətlərilə ifadə olunan statistik kriterinin təyin olunması üçün istifadə olunan T *statistikasıdır.*

Praktiki tətbiqlərdə kritik oblastları

$$\{T(x) \geq C_0\} \qquad (\ \{T(x) \leq C_0\}\ ) \tag{3}$$

və ya

$$\{T(x) \leq C_1\} \bigcup \{T(x) \geq C_2\} \tag{4}$$

şəklində olan (yaxud ciddi bərabərsizlik işarələrilə razılaşdırılaraq) randomlanmamış kriterilər istifadə olunur.

«T statistikasının böyük (kiçik) qiymətlərində H_0 hipotezini qəbul etməyən kriteri» ifadəsi (1) və ya (3) şəklində kriteri kimi anlaşılır və bu halda nəzərdə tutulur ki, C_0 kritik qiyməti və zəruri randomizasiya verilən mühümlük ölçüsü üzrə təyin olunur. (2) və ya (4) kriterilərinin analoji təsvirində əlavə tələblər daxil edilir, məs., simmetriya, meylsizlik və s. Hipotezlərin yoxlanılması məsələlərinin həlli, bir qayda olaraq, münasib statistikanın müəyyənləşdirilməsinə gətirilir və bu statistika ilə də sonra (1) və ya (2) şəklində kriterilər qurulur. Kriterinin S.-nın istifadəsi onunla şərtləndirilir ki, onun vasitəsilə seçimi fəzanın bölgüsü təyin olunur və bu da hipotezlərin fərqləndirilməsinin verilmiş məsələsi üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bax, *Statistik hipotezlərin yoxlanılması.*

STATİSTİKA kvaziməqbul **« статистика** квази–достаточная; quasi–sufficient **statistic »** – bax, *Yardımçı statistika.*

STATİSTİKA(sı) qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin **« статистика** объектов нечисловой природы; **statistics** of non–numerical type objects **»** – riyazi statistikanın elə bölməsidir ki, statistik verilənlər (müşahidələrin nəticələri) qeyri – ədədi təbiətli obyektlərdir, yəni vektor fəzaları olmayan çoxluqların elementləridir. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin S. birölçülü statistikanı (müşahidələr nəticəsi həqiqi ədəddir), çoxölçülü statistik analizi (müşahidələr nəticəsi sonluölçülü vektordur), təsadüfi proseslər və zaman sıraları statistikasını (müşahidələr nəticəsi funksiyadır) tamamlayan statistikadır. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərə misallara aid müxtəlif

şkalalarda ölçmə nəticələrini (*ölçmə nəzəriyyəsində* seçilmiş olan şkalalarda), binar münasibətləri (ranqlanmaları, bölgüləri, tolerantlığı), *qeyri – səlis çoxluqları*, intervalları, cüt-cüt və toplam müqayisələrin nəticələrini qeyd etmək olar. Müşahidənin nəticəsi – ixtiyari təbiətli fəzada *təsadüfi element* olduğu hal ən ümumi model hesab edilir. Elmi və praktik fəaliyyətin bir çox oblastlarında qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin tətbiqinin zəruriliyi yaranır: məs., texniki, sosial – iqtisadi, tibbi – bioloji, psixoloji, geoloji, kimyəvi və digər tədqiqatlarda; qiymətləndirmədə, məmulatın keyfiyyətinə nəzarət və idarəetmədə; təşkilati və texnoloji sistemlərin öyrənilməsində (xüsusən də, ekspert statistik qiymətlər metodu ilə) və s.

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-da riyazi statistika məsələləri – verilənlərin təsviri, qiymətləndirilmə, hipotezlərin yoxlanılması – qeyri – ədədi təbiətli verilənlər üçün baxılır və bu isə məsələlərin özünəməxsus qoyuluşu və bunların həlli metodlarına gətirilir. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin hər bir ayrıca götürülmüş növü üçün xüsusi nəzəriyyələrlə (ölçmə nəzəriyyəsi, *binar münasibətlər statistikası*, *qeyri – səlis çoxluqlar statistikası*, *təsadüfi çoxluqlar statistikası*, cüt-cüt müqayisələrin *lyusianlar* nəzəriyyəsi və s. xüsusi nəzəriyyələrlə) yanaşı ümumi təbiətli fəzalarda verilənlər üzərində yenidən işlənilmə nəzəriyyəsi də vardır ki, bu nəzəriyyənin nəticələri bütün xüsusi nəzəriyyələrdə, hətta riyazi statistikanın klassik oblastlarında, məs., çoxölçülü statistik analizdə də tətbiq olunur.

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S. riyazi statistika və tətbiqi riyaziyyatın klassik və son vaxtlarda yaranan bir sıra istiqamətlərini birləşdirir (bax, [1]). Qradiasiyaları sayı sonlu olan qaydalı və nominal şkalalar üzrə ölçmə nəticələrinə riyazi statistikanın qoşmalıq cədvəllərinin analizi və ranq korrelyasiyası nəzəriyyəsi kimi klassik istiqamətlərində baxılmışdır. Ölçmə nəzəriyyəsində göstərilmişdir ki, qaydalı və nominal şkalalarda ölçmələr uyğun olaraq ranqlanma və bölgülərin analizinə gətirir; qaydalı şkalada ölçülmüş verilənlər üzərində riyazi statistikanın ranq metodları ilə yeni-dən işlənilməlidir. Ranqlanma, bölgülər və digər binar münasibətlər dekart kvadrat çoxluğunun baxılan münasibətlər təyin olunan altçoxluqlarına uyğundur və buna görə də, bunların ehtimali nəzəriyyəsi *sonlu təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsi ilə sıx bağlıdır. Statistik metodlar, o cümlədən, təsadüfi tolerantlıq nəzəriyyəsi qeyri – səlis çoxluqların mənsubluq funksiyaları və münasibətlərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur. Öz növbəsində, qeyri – səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi müəyyən mənada (bax, [1]) təsadüfi çoxluğun proyeksiyalarının köməyilə təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinə gətirilə bilinir. Cüt-cüt müqayisələnmələr təsadüfi ranqlanma və digər binar münasibətlərin alınması üçün istifadə olunur. Asılı olmayan elementlərli sonlu təsadüfi çoxluqların asılı olmayan cüt-cüt müqayisələnmələri, təsadüfi tolerantlıqlar nəzəriyyələri – Lyusianlar (asılı olmayan Bernulli sınaqlarının sonlu ardıcıllıqlarının) nəzəriyyəsinin xüsusi hallarıdır. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin müxtəlif növləri arasında qeyd olunan əlaqələr 1970-in sonunda isbat olunmuşdur (bax, [1] – [3]).

Verilənlər fəzasının xətti strukturunun olmaması səbəbindən qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-sında təsadüfi X elementinin orta qiyməti (başqa sözlə, nəzəri orta) təsadüfi elementin qiyməti və fəzanın qeyd olunmuş elementi arasında *yaxınlıq ölçüsünün* riyazi gözləməsi olan funksiyanın minimizasiyası məsələsinin həlli kimi, yəni müəyyən *ekstremal statistik məsələnin* həlli kimi təyin olunur. Bu tərifin klassik riyazi statistikadakı analoqu belədir: $X \in \mathbb{R}^1$ təsadüfi kəmiyyəti üçün $\mathbf{M}(X-a)^2$ riyazi gözləməsi minimumunu $a = \mathbf{M}(X)$ qiymətində alır, $\mathbf{M}\left|X-a\right|$-nın minimumu $a-X$ təsadüfi kəmiyyətinin medianı olduqda alınır. Seçimi orta empirik paylanmaya uyğun orta qiymət kimi təyin olunur. Ekstremal məsələnin həlli kimi orta kəmiyyət element deyil, çoxluqdur və ola bilər ki, bu çoxluq ya boş və ya bir elementdən çox elementi olan çoxluqdur. Ümumi təbiətli fəzalarda böyük ədədlər qanununun analoqları alınmışdır, bu qanunlara görə asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi elementlərin seçimi ortası seçimin həcmi artdıqca onların nəzəri orta qiymətinə yığılır (yığılma anlayışının uyğun dəqiqləşdirilməsi şərtilə bax, [4]). Eyni bir təsadüfi element üçün, müxtəlif yaxınlıq ölçülərində orta kəmiyyətlər, ümumiyyətlə, müxtəlifdir, necə ki, $X \in \mathbb{R}^1$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, moda və medianı üst-üstə düşməyə bilir. $\mathbb{R}^1$-də unimodal simmetrik paylanmaların analoqu izotrop fəzalarda *monoton paylanmalardır* ki, bu paylanmalar üçün nəzəri orta qiymətlər paylanmanın mərkəzi ilə üst-üstə düşür. Belə paylanmalar üçün yaxınlıq ölçüsü seçildiyi halda paylanma mərkəzinin statistik qiymətini tapmaq üçün seçimin elementləri ilə fəzanın elementləri arasında yaxınlıq ölçülərinin *Kolmoqorov orta kəmiyyətlərini* minimallaşdırmaq məqsədəuyğundur, belə ki, ölçmə nəzəriyyəsi nəticələrindən belə alınır ki, yalnız müəyyən tərtiblə götürülən orta qiymətləri istifadə etmək olar (bax, [1]).

Ümumi təbiətli fəzalar üçün asılılıqların approksimasiyası və reqression analizin, diskriminant və klaster analizin metodlarının analoqları işlənilmişdir (bax, [3], [4]). Ş ə r t i o r t a, yəni şərti paylanma üzrə orta qiymət uyğun ekstremal məsələnin həlli kimi təyin olunur. Reqression asılılığı parametrik ailənin elementi ilə approksimasiya etdikdə də ən kiçik kvadratlar, ən kiçik modullar, robast reqressiya metodlarında analoji istifadə olunan ekstremal statistik məsələlər həll olunur (bax, [5]). Ümumi təbiətli fəzalarda qeyri – parametrik nəzəriyyə təsadüfi elementin hər hansı ölçüyə görə paylanma sıxlığının qeyri – parametrik statistik qiymətləri, ən əvvəl sıxlığın nüvə statistik qiymətləri əsasında qurulur. Nüvə statistik qiymətləri təsnif məsələlərində şərti sıxlığın qiymətləndirilməsi və reqressiyanın qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Hipotezlərin yoxlanılması üçün, məs., inteqral tipli statistikalardan istifadə olunur (bax, [6]).

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nın bir çox metodlarında yaxınlıq ölçülərindən istifadə olunur. Yaxınlıq ölçüsünün aksiomatik daxil edilməsinə misal: $\mathfrak{A}$ – vahidə malik çoxluqlar cəbri olsun, d funksiyası isə elə olsun ki, $d : \mathfrak{A}^2 \to \mathbb{R}^1$ və a) $d(A, B) \geq 0$; b) $d(A, B) = d(B, A)$; c) əgər $A \cap C = B \cap C = \varnothing$ olarsa, onda $\mathfrak{A}$-ya daxil olan ixtiyari A, B və C üçün $d(A, B) = d(A \cup C, B \cup C)$; ç) əgər $A \cap C \subseteq B \subseteq A \cup C$ olarsa, onda $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ şərtləri ödənilsin. Onda yaxınlıq ölçüsü $d(A, B)$ üçün $\mathfrak{A}$-da elə (yeganə) μ ölçüsü vardır ki, $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$, burada $A \Delta B$, – A və B-nin simmetrik fərqidir (bax, ətraflı, [1]). Yaxınlıq ölçüsü tarixən ilk dəfə *Kemeni məsafəsi* ilə aksiomatik olaraq daxil olmuşdur (bax, [7], [8]).

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nın bölməsi kimi ölçmə nəzəriyyəsi ölçmə şkalalarının mümkün çevrilmələrinə nəzərən statistik nəticələrin invariantlığını öyrənir (bax, [1], [3]). Tətbiqi riyaziyyatın bu bölməsi psixoloji ölçmə nəzəriyyəsi (bax, [9]) kimi inkişaf edirdi və bu bölməyə yalnız XX əsrin 70-ci illərində müstəqil bölmə kimi baxılmışdır. Münasibətlərlə verilən empirik sistemin münasibətlərli ədədi sistemə homomorfizmini öyrənən klassik yanaşmadan fərqli olaraq, qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-sında «tətbiqi ölçmə nəzəriyyəsi» istifadə olunur ki (bax, [1]), burada əsas anlayış ölçmə şkalasının mümkün çevrilmələrinin qrupu anlayışıdır. Çoxölçülü şkallanma metodları (bax, [3]) ölçmə nəzəriyyəsi ilə birgə öyrənilən fəzanın dim. – ölçüsünü, xüsusilə də, onun vizualizasiyası məqsədilə, ölçüsünü azaltmağa imkan verir.

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nın bölməsi kimi binar münasibətlər statistikasında *Kemeni medianı* və Kemeni məsafəsi ilə bağlı metodlar mərkəzi yer tutur. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nın yaxın bölmələri cüt-cüt müqayisələmələr (bax, [11]) və lyusianlar da alternativ əlamətə görə statistik nəzarət nəzəriyyəsi ilə əlaqədardırlar (bax, [12]). Lyusianlar nəzəriyyəsi məsələlərinin əsas qoyuluşlarında naməlum parametrlərin sayı verilənlərin həcminə proporsional artır.

Qeyri – səlis çoxluqlar statistikası qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nın bölməsi kimi qeyri – səlislik nəzəriyyəsi (bax, [14]), təsadüfi çoxluqlar statistikası və ümumi təbiətli fəzalarda statistikanın sintezidir.

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S.-nın nəticələri riyazi statistikanın klassik bölmələrində də tətbiq olunur. Məs., reqression və diskriminant analizlərdə əlamətlərin informativ altçoxluqlarının seçilməsində məqsəd altçoxluğun qiymətləndirilməsidir və qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S. terminlərində əlamətlərin seçilmə metodunun tutarlılıq anlayışı da formalaşır. Müşahidə xətalarının nəzərə alınması, yəni müşahidə nəticələrinin ədədlərlə deyil, qeyri – səlis çoxluqlar və ya intervallarla təsviri klassik nəticələrdən fərqli nəticələrin alınmasına səbəb olur. Məs., qamma – paylanma parametrlərinin qiymətləndirilməsində momentlər metodunun statistik qiymətləri geniş parametrlər oblastında maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərindən daha yaxşı hesab olunur (bax, [15], [16], *İnterval verilənlərinin statistikası*).

Qeyri – ədədi təbiətli obyektlər S. texniki, tibbi, sosioloji araşdırmalarla sıx əlaqədar olub, bu sahələrin müxtəlif məsələlərini tədqiq edərək, bu sahələrdə elmi və praktiki fəaliyyətdə tətbiq olunur.

Əd.: [1] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Орлов А. И., в кн.: Вопросы кибернетики, М., 1979, в. 58, с. 17–33; [3] Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985; [4] Орлов А. И., в кн.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях, М., 1982, с. 4–12; [5] Демиденко Е. З., Линейная и нелинейная регрессия, М., 1981; [6] Орлов А. И., Вероятностные процессы и их приложения, М., 1989, с. 118–23; [7] Кемени Дж., Снелл Дж., Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения, пер. с англ., М., 1972; [8] Раушенбах Г. Б., в кн.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985, с. 169–203; [9] Суппес П., Зинес Дж., в кн.: Психологические измерения, пер. с англ., М., 1967, с. 9–110; [10] Пфанцагль И., Теория измерений, пер. с англ., М., 1976; [11] Дэвид Г., Метод парных сравнений, пер. с англ., М., 1978; [12] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [13] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980; [14] Заде Л., Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений, пер. с англ., М., 1976; [15] ГОСТ 11.011-83. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма–распределения, М., 1985; [16] Орлов А. И., в кн.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвуз. сб. науч. тр., Пермь, 1988, с. 45–55; [17] Орлов А. И., «Заводская лаборатория», 1990, т. 56, № 3, с. 76–83; 1995, т. 61, № 3, с. 43–52; 1995, т. 61, № 5, с. 43–51; 1996, т. 62, № 1, с. 54–60.

STATİSTİKA(sı) qeyri – səlis çoxluqların **« статистика** нечетких множеств; **statistics** of fuzzy sets **»** – bax, *Qeyri – səlis çoxluqlar statistikası.*

STATİSTİKA oxşar **« статистика** подобная; ancillary **statistic »** – bax, *Oxşar statistika.*

STATİSTİKA(sı) ranq **« статистика** ранговая; rank **statistic »** – bax, *Ranq statistikası.*

STATİSTİKA tabe **« статистика** подчиненная; subordinate **statistic »** – bax, *Tabe statistika.*

STATİSTİKA tam **« статистика** полная; complete **statistic »** – bax, *Tam statistika*.

STATİSTİKA(sı) təsadüfi çoxluqların **« статистика** случайных множеств; **statistics** of random sets **»** – riyazi statistikanın elə bölməsidir ki, burada statistik verilənlər çoxluqlardır. Təsadüfi çoxluqlar S.-ında verilənlərin təsviri üçün təsadüfi çoxluğun orta qiymət*i* tətbiq olunur. Təsadüfi çoxluqların S.-nın qiymətləndirilməsinin parametrik məsələlərinin əksəriyyətində statistik qiymətlər ekstremal məsələlərin həlli kimi ifadə olunur, bunların xassələri isə qeyri–ədədi təbiətli obyektlərin *statistikasının* metodları ilə təyin olunur (bax, [1]). Modanın, reqression asılılığın, obrazların tanınması və s.-nin qeyri – parametrik qiymətləndirilməsi təsadüfi çoxluqlar S.-ında paylanma sıxlıqlarının qeyri – parametrik statistik qiymətlərinin müxtəlif tiplərinin köməyilə aparılır (bax, [1]). Riyazi statistikanın klassik məsələlərində istifadə olunan etibarlı çoxluq – təsadüfi çoxluqdur.

Təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsinin müxtəlif oblastlarında təsadüfi çoxluqların S.-nın metodları və məsələlərin spesifik qoyuluşları istifadə olunur. Məs., sonluölçülü Evklid fəzasının təsadüfi altçoxluqlarının S. üçün əsas öyrənmə obyektləri ixtiyari ehtimal fəzasının Hausdorf metrikası ilə verilmiş boş olmayan kompaktlar çoxluğuna ölçülən inikaslarıdır (bax, [2]). Bu halda təsadüfi çoxluqların Minkovski toplanmasından (bax, *Minkovski əməlləri*), böyük ədədlər qanunları və mərkəzi limit teoremlərinin analoqlarından istifadə olunur (bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün).

μ ölçüsü ilə verilən fəzalarda təsadüfi çoxluqların S., adətən, çoxluqların yaxınlıq ölçülərinin daxil olunmasına əsaslanır. Bu yaxınlıq ölçüləri aşağıdakı düsturlarla təyin olunur: əgər

$$d_1(A, B) = \mu(A \Delta B); \quad \mu(A \cup B) > 0,$$

$$d_2(A, B) = \mu(A \Delta B)/\mu(A \cup B),$$

və əks halda isə $d_2(A, B) = 0$. Burada $A \Delta B$, – A və B çoxluqlarının simmetrik fərqidir. Belə yaxınlıq ölçüləri psevdometrikalardır (bunların asimptotik təsviri haqqında bax, [3], [1]).

Təsadüfi çoxluqların S.-nın inteqral həndəsə ilə bağlı məsələlərində müvafiq statistik problemlərin müxtəlif parametrizasiya qaydaları ilə klassik problemə gətirilməsi böyük rol oynayır (bax, [4]). Sonlu təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsində və xüsusilə də, asılı olmayan elementlərli təsadüfi çoxluqlar (bax, *Lyusian*) nəzəriyyəsində ehtimal modelini təsvir edən qoyuluşlarda parametrlərin sayı verilənlərin həcminə mütənasib olaraq artdığı halda, hipotezlərin yoxlanılması metodları böyük yer tutur.

Tətbiq üçün bir çox mühüm statistik xarakterli problemlər qeyri – səlis çoxluqlar terminlərində təbii surətdə ifadə olunur. Belə məsələlər təsadüfi çoxluğun proyeksiyasının köməyilə təsadüfi çoxluqların S.-na gətirilir.

Əd.: [1] Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях, М., 1985; [2] Лященко Н. Н., в кн.: Прикладная статистика, М., 1983, с. 40–59; [3] Лященко Н. Н., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [4] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [5] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., 1980.

STATİSTİKA yardımçı **« статистика** вспомогательная; auxiliary **statistic »** – bax, *Yardımçı statistika*.

STATİSTİKA zəruri « **статистика** необходимая; minimal sufficient **statistic** » – bax, *Minimal kafi statistika.*

R/S **– STATİSTİKA** « R/S **– статистика;** R/S **– statistic** » – bax, *Hörst fenomeni.*

T^2 **– STATİSTİKA** « T^2 **– статистика;** T^2 **– statistic** » – normal qanunla paylanmış iki seçim üzrə orta qiymətlər vektorlarının (ikiseçimli T^2 – s.) bərabərliyi haqqında hipotezin və ya orta qiymətlər vektorunun verilmiş Hotellinq (bax, [1]) T^2 – s. (birseçimli T^2 – s.) vektoruna bərabərliyi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün istifadə olunan *statistikadır*, məlum t^2 statistikasının birölçülü hal üçün ümumiləşməsidir.

Fərz olunur ki, p – ölçülü $N_p(\mu_i, \Xi)$ normal paylanmalara malik n_i $(i = 1, 2)$ həcmli seçim vardır; X_i və S_i, – $N_p(\mu_i, \Xi)$ paylanmasının orta qiymətlər vektorunun və kovariasiyalar matrisinin uyğun seçimi qiymətləri olsun. Onda ikiseçimli T^2 – s.

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \; d^{\mathsf{T}} S^{-1} d$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $d = \overline{X}_2 - \overline{X}_1$,

$$S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ümumi kovariasion Ξ matrisinin statistik qiymətidir.

$\hat{v}^2 = d^{\mathsf{T}} S^{-1} d$ – *Mahalanobis məsafəsinin* seçimi statistik qiymətidir. Birseçimli T^2 – s. $N_p(\mu_i, \Xi)$ paylanmasına malik n həcmli seçim üzrə qiymətləndirilən orta qiymətlər vektoru naməlum μ-nün verilmiş μ_0 vektoruna bərabərliyi haqqında hipotez yoxlanıldıqda istifadə olunur, bu halda

$$T^2 = n(\overline{X} - \mu_0)\; S^{-1}(\overline{X} - \mu_0).$$

Yoxlanılan hipotez düzgün seçildiyi halda T^2 – s. *Hotellinq* T^2 *– paylanma* adlanan paylanma qanununa tabe olur. T^2 – s. paylanması normallıqdan yayınmalara dayanıqlı paylanmadır..

Əd.: [1] Hotelling H., «Ann. Math. Statist.», 1931, v. 2, p. 360–78; [2] Андерсон T., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., M., 1963.

STEK – ALQORİTM « стек – алгоритм; stack – algorithm » – bax, *Ardıcıl dekodla*(n)*ma.*

STEK – YADDAŞ « стек – память; stack – memory » – bax, *Ardıcıl dekodla*(n)*ma.*

STEYN EFFEKTİ « Стейна явление; Stein effect » – bax, *Ceyms – Steyn statistik qiyməti.*

STİLTYES – MİNKOVSKİ İNTEQRALI « Стилтьеса – Минковского интеграл; Stieltjes – Minkowski integral » – adi Stiltyes inteqralının *təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsində baxılan analoqudur, bu inteqral Stiltyes inteqralının konstruksiyasını qiymətləri Evklid fəzasının kompaktları olan funksiyalara ümumiləşdirir. $A(x)$, $a \le x \le b$, – Evklid fəzasının boş

olmayan (qabarıq olması hökm deyildir) kompaktlarının Hausdorf metrikasında kəsilməz birparametrli ailəsi, X – qiymətləri $[a, b]$-dən olan təsadüfi kəmiyyət, F – bu təsadüfi kəmiyyətin paylanması olsun. F paylanmasına nəzərən $A(x)$-in S. – M. i. $[a, b]$ seqmentinin Δ_k intervallarına bölgülərinin filtri üzrə götürülən kompaktların

$$\oplus_k F(\Delta_k) A(x_k), \qquad x_k \in \Delta_k$$

– vektor cəminin Hausdorf limiti kimi təyin olunur (bax, *Minkovski əməlləri*) və bu inteqral $A(x)$ təsadüfi çoxluğunun *riyazi gözləməsi* ilə üst-üstə düşür. F – qeyri–atomik paylanma olduqda, yəni ixtiyari $x \in [a, b]$ qiymətində $\mathbf{P}\{X = x\} = 0$ olduqda, S. – M. i.-nın qiymətlərinin qabarıq olması zəruridir.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., M., 1978; [2] Aumann R. J., «J. Math. Analysis and Appl.», 1965, v. 12, № 1, p. 1–12.

STİRLİNQ ƏDƏDLƏRİ « Стирлинга числа; Stirling numbers » – $S(n, k)$ və $\sigma(n, k)$ *kombinator ədədləridir* (uyğun olaraq birinci və ikinci növ) və aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunurlar:

$$A_x^n \equiv (x)_n \equiv x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) x^k, \; n \ge 1$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \sigma(n, k)(x)_k, \; n \ge 1.$$

[1]-də J. Stirlinq tərəfindən daxil olunmuşdur. S. ə. qiymətləri

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) - (n-1)\, S(n-1, k), \quad n \ge 1,$$

$$\sigma(n, k) = \sigma(n-1,\, k-1) + k\sigma(n-1,\, k), \quad n \ge 1,$$

rekurrent münasibətləri, $S(0, 0) = \sigma(0, 0) = 1$, $S(0, k) = \sigma(0, k) = 0$, $k \ne 0$ başlanğıc şərtləri ilə hesablanılır. S. ə. üçün

$$\sum_{j=k}^{n} S(n, j)\, \sigma(j, k) = \sum_{j=k}^{n} \sigma(n, j)\, S(j, k) = \delta_{nk}$$

– ortoqonallıq münasibəti ödənilir, burada δ_{nk} – Kroneker simvoludur. Müxtəlif məsələlərdə

$$\sum_{k=0}^{\infty} S(n, k)\, \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \ln^k(1 + t),$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k)\, \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^t - 1)^k$$

– doğuran funksiyalarından və aşağıdakı aşkar ifadələrdən istifadə olunur:

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \Delta^k 0^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j\, j^n,$$

burada Δ – fərq operatorudur: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$,

$$S(n, k) = (-1)^{n+k} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k} \le n-1} i_1\, i_2 \ldots i_{n-k}.$$

S. ə.-nin kombinator və nəzəri – ehtimali interpretasiyası: $(-1)^{n+k}S(n,k)$ – tsikli k, qüvvət üstü n olan əvəzləmələrin sayı, $\sigma(n,k)$ n elementli çoxluğun k sayda boş olmayan altçoxluqlara bölgülərinin sayı və ya n sayda müxtəlif əşyaların k sayda bir-birindən fərqlənməyən oyuqlarda, bütün oyuqların dolu olması şərtilə, yerləşmələri sayıdır. S. ə. $\sigma(n,k)$ ilə yerləşmə haqqında klassik məsələdə boş oyuqların sayının paylanması da ifadə olunur, daha dəqiqliklə, n sayda müxtəlif hissəciyin N sayda müxtəlif oyuqlarda təsadüfi və eyniehtimallı yerləşmə sxemində boş oyuqların sayının m-ə bərabər olması ehtimalı

$$\frac{N!}{m!\,N^n}\,\sigma(n,\,N-m)$$

olur.

S. ə.-nin yerləşmələr məsələsi ilə bağlı ümumiləşmələrindən biri

$$k!\,\sigma(n,m,k)=\Delta^k(m-k)^n$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan ədəddir və bu ədəd n müxtəlif əşyanın m müxtəlif oyuqda yerləşmələrində, k sayda qeyd olunmuş oyuqlardan heç birinin boş olmaması şərtilə, mümkün ola bilən halların sayıdır.

Asimptotik hesablamalarda S. ə. üçün müxtəlif təqribi düsturlardan istifadə olunur (bax, [4]), məs., əgər $n,k\to\infty$, $\frac{n}{k}=\alpha=\text{const}>1$ olarsa, onda

$$\sigma(n,\,k)=$$

$$=\frac{k^n}{n!}\left(1-\frac{\alpha b}{1+b}\right)^{-1/2}(b^b(1+b)^{\alpha-1-b})^k(1+O(1/\sqrt[3]{n}))$$

düsturu doğrudur, burada $b>0$, $-1+b=be^{\alpha/(1+b)}$ tənliyinin köküdür.

Əd.: [1] S t i r l i n g J., Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, L., 1730; [2] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения, М., 1982; [4] М е д в е д е в Ю. И., И в ч е н к о Г. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 151–56.

STOXASTİK AXIN(ı) d i f f e o m o r f i z m l ə r i n **« стохастический поток** д и ф ф е о м о р ф и з м о в; **stochastic flow** o f d i f f e o m o r p h i s m s **»**, *stoxastik differensial tənliyin* doğurduğu, – $\mathcal{M}$ hamar çoxobrazlısının $\mathcal{N}$ hamar çoxobrazlısına $X(t,\cdot)$ inikaslarının ailəsidir və bu axın aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) ixtiyari $x\in\mathcal{M}$ üçün $X(t,x)$ ilkin stoxastik differensial tənliyin həllidir;

b) ixtiyari t üçün $X(t,\cdot)$ $\mathcal{M}$-in $\mathcal{N}$-ə diffeomorfizmidir (sanki yəqin).

STOXASTİK ANALİZ « стохастический анализ; stochastic analysis » – bax, *Stoxastik hesab.*

STOXASTİK APPROKSİMASİYA « стохастическая аппроксимация; stochastic approximation » – parametrik və qeyri – parametrik qiymətləndirmə məsələlərinin geniş sinfinin, müşahidələr sayı artdıqca, statistik qiymətlərin ardıcıl (rekurrent) dəqiqləşməsinə əsaslanan həll metodudur. Parametrik məsələlərə tətbiq olunduğu halda S. a. əksər hallarda *rekurrent qiymətləndirmə* adlandırılır. S. a.-nın ilk proseduru

$$X_{n+1}=X_n+a_n(Y_n(X_n)-\alpha)\qquad(1)$$

şəklində *Robbins – Monro proseduru* olmuşdur; bu prosedurla reqressiya funksiyası $R(x)$-in X_n nöqtələrindəki $Y_n(X_n)$ müşahidələri üzrə riyazi gözləmələri sıfra bərabər, asılı olmayan xətalarla $R(x)=\alpha$ tənliyinin kökü – x_* qiymətləndirilir. $R(x)$ funksiyasının maksimum nöqtəsi $x_{\max}$-u təyin etmək üçün S. a.-nın ilk proseduru

$$X_{n+1}=X_n+a_n[(Y_n(X_n+c)-Y_n(X_n-c_n))/2c_n]$$

şəklində *Kifer – Volfovits proseduru* olmuşdur, burada $c_n\to 0$ olduqda kvadrat mötərizədəki ifadə $R'(X_n)$ kəmiyyətinin approksimasiyasıdır.

S. a. metodunun problemləri dairəsi, əsas etibarilə, 20-ci əsrin 60-cı illərinin ortalarında formalaşmışdı. S. a. prosedurlarının öyrənilməsində iki əsas məsələyə baxılır: yığılma şərtlərini müəyyənləşdirmək və approksimasiya prosedurunun yığılma sürətini araşdırmaq. Əgər $(x-x_*)(R(x)-\alpha)$ mənfi olarsa və x_* nöqtəsinin olduqca kiçik ətrafından kənarda sıfırdan aralıdırsa və $d>0$ olduqda, $\mathbf{M}[Y(x)]^2\le d(1+x^2)$ şərti ödənilərsə, onda (1) prosedurunun sanki yəqin və kvadratik orta mənada yığılması üçün

$$a_n>0,\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty,\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$$

şərtlərinin ödənilməsi kafidir. (2) prosedurunun yığılması üçün $R(x)$ funksiyası üzərinə qoyulan kafi şərtlər:

$$n\to\infty\text{ olduqda }a_n,c_n\to 0,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$$

$$\sum a_nc_n<\infty,\quad\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/c_n)^2<\infty$$

münasibətləri ilə ifadə olunur və $n\to\infty$ olduqda $X_n\to x_{\max}$ – sanki yəqin və kvadratik orta yığılmasını təmin edir.

(1) prosedurunun asimptotikasına aid ən səciyyəvi xüsusiyyət aşağıdakı kimi ifadə olunur. Bəzi şərtlər ödənildikdə $\sqrt{n}(X_n-x_*)$ təsadüfi kəmiyyətləri riyazi gözləmələri sıfra bərabər və dispersiyası – $\sigma^2A^2/(1+2AR'(x_*))$ olan asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətlərdir; bu şərtlərdən ən əsasları $a_n=A/n$, $x\to x_*$ olduqda $\mathbf{M}[Y(x)]^2\to\sigma^2$, $1+2AR'(x_*)<0$ münasibətlərilə ifadə olunan fərziyyələrdir. Bu halda limit dispersiya minimal qiymətini $A=-1/R'(x_*)$ olduqda alır. Yığılma şərtlərinin və asimptotikanın araşdırılmasından başqa, (1) və (2) prosedurları çoxölçülü hal üçün ümumiləşdirilmişdir, kəsilməz zaman halı üçün bu prosedurların analoqları qurulmuşdur, yığılma sürətinin üsulları, çoxaddımlı prosedurlar araşdırılmışdır, dispersiyanın qeyri – asimptotik statistik qiymətləri alınmışdır və s. (bax, [1], [2]).

S. a. metodunun inkişafında S. a.-nın

$$X_{n+1}=T_n(X_1,\dots,X_n)+\xi_n\qquad(3)$$

şəklində ümumiləşmiş proseduru (D v o r e t s k i p r o s e d u r u) böyük rol oynamışdır, burada ξ_n , – $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_n^2 < \infty$ şərtini ödəyən martinqalfərqdir. $T_n(x_1, \dots, x_n)$ i n i k a s ı n ı n s ı x ı l a n olması fərziyyəsində, yəni

$$\left|T_n(x_1, \dots, x_n) - x_*\right| \le \max\left[a_n; (1+b_n)\left|x_n - x_*\right| - c_n\right]$$

olarsa,

$$n \to \infty \text{ olduqda } a_n \to 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \text{ və } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$$

şərtlərinin ödənilməsi Dvoretski prosedurunun yığılmasını təmin edir (bax, [1]).

20-ci əsrin 60-cı illərindən etibarən S. a.-nın araşdırılması vasitələrindən biri martinqallar nəzəriyyəsi texnikası olmuşdur (bax, [3]).

$$dX(t) = \alpha(t)[R(X(t)) + \psi(t, X(t))]\,dt + \\ + \beta(t)\sigma(t, X(t))\,d\xi(t) \qquad (4)$$

münasibətilə təyin olunan Markov prosesinin (diskret zaman halında Markov zəncirinin) xüsusi sinfinin S. a. prosedurlarının öyrənilməsinə yanaşma səmərəli olmuşdur, burada $R(x)$, $\psi(t, x) \in \mathbb{R}^d$; $\sigma(t, x)$, – $(d \times d)$ matris; $\psi(t, x)$, – $R(x)$ -in ölçülməsindən yaranan determinik meyl olub, $t \to \infty$ olduqda yox olan kiçik kəmiyyətdir. Diskret zaman halında, (4)-də, $dX(t) = X(t+1) - X(t)$. $dt = 1$ yazmaq lazımdır, $d\xi(t)$ isə $\mathbb{R}^d$ -də asılı olmayan təsadüfi vektorlar ardıcıllığıdır. Kəsilməz zaman halında (4) asılı olmayan artımlarlı, kvadratik inteqrallanan d – ölçülü $\xi(t)$ prosesi üzrə stoxastik differensial İto tənliyi kimi anlaşılır. $\alpha(t) = \beta(t) = a(t)$ olduqda (4) proseduru (1) şəklində, $\alpha(t) = a(t)$ və $\beta(t) = a(t)/c(t)$ olduqda isə (2) şəklində olur. (4) prosedurunun yığılma şərtlərinin

$$\dot{x}_s = R(x_s) \qquad (5)$$

dinamik sistemi üçün Lyapunov funksiyalarının varlığı və dinamik sistemlərin bütünlüklə dayanıqlılığı, eksponensial dayanıqlılığı kimi anlayışları ilə sıx əlaqəli olduğu aşkar edilmişdir. Kəsilməz zaman halında (4) proseduru, $\xi(t)$ -nin Viner prosesi olduğu hal üçün ətraflı öyrənilmişdir. Əgər bu halda $V(x)$ – (5) sisteminin Lyapunov funksiyasıdırsa, yəni: $V(x) > 0$ və $x \ne x_*$ olduqda $((R(x), \text{ grad } V(x)) < 0, \quad V(x_*) = 0; \quad |x| \to \infty$ olduqda $V(x) \to \infty; \quad |\sigma(t, x) \text{ grad } V(x)|^2 \le (C(1 + V(x))$ olarsa, onda (4) prosedurunun sanki yəqin yığılması üçün

$$\int_0^{\infty} a(t)\,dt = \infty \quad \text{və} \quad \int_0^{\infty} a^2(t)\,dt < \infty$$

şərtlərinin ödənilməsi kafidir. (5) sistemi müntəzəm eksponensial dayanıqlı sistem olduqda (4) prosedurunun kvadratik orta mənada yığılması üçün birinci inteqralın dağılması və $t \to \infty$ olduqda $a(t) \to 0$ şərtinin ödənilməsi kafi şərtlərdir. (5) dinamik sisteminin bəzi tarazlıq vəziyyətləri halı – (1)-də $R(x) = \alpha$ tənliyinə uyğun olan haldır və bu halda $R(x) = \alpha$ tənliyinin bir neçə kökü və ya $R(x)$ funksiyasının (2)-də bir neçə ekstremumu vardır. (4) prosedurunun trayektoriyalarının (5) sisteminin tarazlığının qeyri – dayanıqlı vəziyyətlərinə sanki yəqin yığılmayacağının bir sıra kafi şərtləri alınmışdır (bax, [3]).

Əgər (4) prosedurunda $\alpha(t) = \beta(t) = a/t$ seçilərsə; $\psi(t, x) = 0$ və $t \to \infty$ olduqda

$$\sigma(t, x_*)\,\mathbf{M}[d\xi(t)(d\xi(t))^{\mathrm{T}}]\,\sigma^{\mathrm{T}}(t, x_*) \to S_0\,dt,$$

$A = a \operatorname{grad} R(x_*) + \mathbf{I}/2$ dayanıqlı matris olarsa ($\mathbf{I}$ – vahidi matrisdir), onda bəzi əlavə şərtlər ödənildikdə $\sqrt{t}\,(X(t) - x_*)$ təsadüfi vektoru $t \to \infty$ olduqda riyazi gözləməsi sıfra bərabər və dispersion matrisi –

$$S = a^2 \int_0^{\infty} \exp(At)\, S_0 \exp(A^{\mathrm{T}} t)\,dt$$

$AS + SA^{\mathrm{T}} = -a^2 S_0$ matris tənliyinin həlli olan asimptotik normal təsadüfi vektordur. Bundan başqa, funksional mənada asimptotik normallıq haqqında nəticə də doğrudur, yəni: $\exp(t/2)(X(e^t) - x_*)$ təsadüfi prosesi $t \to \infty$ olduqda

$$dZ(t) = AZ(t)dt + aS_0^{1/2}\,dw(t)$$

stoxastik differensial İto tənliyinin həlli olan stasionar Qauss $Z(t)$ təsadüfi prosesinə yığılır (bax, [3]).

S. a. prosedurlarının limit yaxınlaşmaları ilə bağlı araşdırmalarda prosedurun asimptotik optimal parametrləri haqqında məsələ yaranır. (1) prosedurunda $a_n = A/n$ seçildiyi halda, A parametrinin limit dispersiyanı minimallaşdıran optimal qiyməti $1/R'(x_*)$ -ya bərabərdir. Lakin $R'(x_*)$ kəmiyyəti məlum deyildir. Bu kəmiyyəti müşahidələr üzrə alınan statistik qiymətlə əvəz etmək üçün prosedur təklif olunmuşdur. Bu proseduru iki rekurrent münasibətlə yazmaq olar:

$$X_{n+1} = X_n - (2nW_n)^{-1}[Y_n(X_n + c_n) + Y_n(X_n - c_n)],$$

$$W_{n+1} = n^{-1}(n-1)W_n + (2n\,c_n)^{-1}[Y_n(X_n + c_n) - Y_n(X_n - c_n)].$$

Bu prosedur çoxölçülü hal üçün də alınmışdır. Belə prosedurlar S. a.-nın a d a p t i v p r o s e d u r l a r ı kimi adlandırılmışdır. Adaptiv rekurrent prosedurların qurulması (sintezi) üsulları kibernetikanın müstəqil oblastı – adaptiv sistemlər nəzəriyyəsində öyrənilir (bax, [4]).

S. a. ümumi prosedurlarının mühüm tətbiqlərindən biri asılı olmayan $Y_1, Y_2, \dots$ müşahidələri üzrə $f(y|x)$ sıxlığının x parametrinin qiymətləndirilməsi üçün

$$X_{n+1} = X_n + (n\mathbf{I}(X_n))^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \ln f(Y_n | X_n) \qquad (6)$$

rekurrent prosedurudur. (6) prosedurunda $\mathbf{I}(x)$, – $f(y|x)$ sıxlığının Fişer informasiya miqdarıdır. $f(y|x)$ üzərinə bəzi şərtlər qoyulduqda (6) proseduru x parametrinin tutarlı və asimptotik effektiv statistik qiymətini təyin edir. (6) prosedurunun

ifadəsindən X_n statistik qiyməti ilə x parametrinin maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinin dərin əlaqəsi olduğu aydın görünür.

S. a. metodunun inkişafı bir neçə istiqamətlə təyin olunur: ümumi statistik metodlarda yeni ideyalar qiymətləndirmənin rekurrent metodlarına köçürülür, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi və təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənməsi nəzəriyyəsinin aparatı S. a. prosedurlarının trayektoriyalarının incə xassələrini öyrənmək məqsədilə bir vasitə kimi istifadə olunur. Statistika məsələlərində robast statistik qiymətlərin öyrənilməsi ənənəsi ilə S. a.-nın robast prosedurları inkişaf etmişdir və bu prosedurlar təsadüfi xətaların paylanmalarının apriori verilən sinfinə nəzərən minimaks mənada optimal prosedurlardır (bax, [6]). Asimptotik minimaks mənada effektiv statistik qiymətlərin qurulması ideyaları da S. a. metodlarında əks olunmuşdur və burada belə effektiv statistik qiymətlər rekurrent qurulur. S. a. metodunun filtrasiya nəzəriyyəsi ilə, məsələn, Kalman – Byusi xətti filtrasiyası ilə əlaqəsi aydın surətdə aşkar edilmişdir (bax, *Kalman filtri*, həm də [4]).

S. a. prosedurlarının lokal xassələri, yəni limit nöqtələri ətrafında trayektoriyaların xassələri araşdırılır. Əgər (4) proseduru üçün $d s = \alpha(t)\, d t$ bərabərliyi ilə təyin olunan zaman əvəzetməsi daxil edilərsə, onda $X(t(s))$ proseduruna s zamanının sonlu parçalarında (5) dinamik sisteminin kükrəntisi kimi baxmaq olar. (5) sistemində asimptotik dayanıqlı, cazibə oblastı D olan x_* tarazlıq vəziyyətinin varlığını fərz edərək, (4) prosedurunun x_* nöqtəsinə yığılmasının tədqiqini prosedurun trayektoriyalarının D və $\xi(t)$ prosesi ilə doğurulan kükrəntilərin kiçik olduğu oblasta qayıdışlarının yoxlanılmasına gətirmək olur. (4)-də təsadüfi kükrəntilərin kiçik olması şərtlərinin aydınlaşdırılması üçün klassik ehtimal nəzəriyyəsi aparatından istifadə olunur. Bu halda S. a. prosedurlarının yığılma şərtləri böyük ədədlər qanunu tipli teoremlər olur, asimptotik normallıq isə mərkəzi limit teoremi ilə əlaqəlidir. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmləri üçün və Markov prosesləri üçün böyük yayınmalar nəzəriyyəsinin tətbiqi ilə, bir sıra hallarda, S. a. prosedurlarının sanki yəqin yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır. Məs., əgər $d\xi(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma funksiyası qüvvət üstlü asimptotikaya malik olarsa, yəni

$$\mathbf{P}\{|d\xi(t)| > x\} = O(|x|^{-\nu}), \quad x \to +\infty, \ \nu > 2,$$

$$\alpha(t) \to 0, \ \beta(t) \to 0, \ \beta^2(t)/\alpha(t) \to 0 \ (t \to \infty),$$

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, d t = \infty$$

olarsa, onda bəzi fərziyyələrlə (4) prosedurunun yığılması üçün $\int_0^\infty \beta^\nu(t)\, d t < \infty$ şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir. $d\xi(t)$ kəmiyyətlərinin eksponensial momentinin varlığı halında bu şərt ixtiyari $\lambda > 0$ üçün

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, \exp(-\lambda\beta^2(t)/\alpha(t))\, d t$$

inteqralının yığılması tələbi ilə əvəz olunur. S. a. prosedurlarının sanki yəqin ödənilən asimptotik xassələri də öyrənilir. S. a. prosedurları üçün klassik təkrar loqarifm qanununu ümumiləşdirən nəticələr alınmış, yuxarı və aşağı funksiyalar tapılmışdır.

Asılı müşahidələrlə bağlı sxemlərdə S. a. prosedurları, bir qayda olaraq, xətaların stasionar olması haqqında fərziyyələrlə öyrənilir.

Belə tip proseslərdən tarixən ilk prosedurlar kəsilməz zamanlı prosedurlar olmuşdur.

$$d X(t) = a(t)\,(R(X(t)) + h(t))\, d t$$

şəklində prosedura baxılmışdır, burada $h(t)$ – orta qiyməti sıfra bərabər erqodik prosesdir. Asılı kükrəntilərli S. a. prosedurlarının yığılması və yığılma sürətinin tədqiqində böyük ədədlər qanununun və stasionar təsadüfi proseslər üçün mərkəzi limit teoreminin nəticələrindən istifadə olunur; güclü və müntəzəm güclü qarışma əmsalları terminlərində kükrəntilərin asılılığının azalma sürəti üçün şərtlər öyrənilmişdir, dinamik sistemlərdə stoxastik ortalama prinsipinin metodları və ideyalarından istifadə olunmuşdur. Nisbətən geniş fərziyyələrlə yığılma üçün kafi şərtlərin çıxarılmasında şərti riyazi gözləmələr texnikası tətbiq olunmuşdur. Kükrəntilər avtoreqressiya – sürüşən orta prosesi əmələ gətirdiyi halda, asılı kükrəntilərli S. a. prosedurları ətraflı öyrənilmişdir (bax, [4], [5]).

S. a., mahiyyət etibarilə, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin bölməsidir və bu bölmədə trayektoriyaları faza fəzasının ayrı-ayrı nöqtələrinə yığılan proseslərin xüsusi sinfi öyrənilir.

Əd.: [1] Вазан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [2] Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968; [3] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [4] Фомин В. Н., Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация, М., 1984; [5] Коростелев А. П., Стохастические рекуррентные процедуры, М., 1984; [6] Цыпкин Я. З., Основы информационной теории идентификации, М., 1984.

STOXASTİK APPROKSİMASİYA kəsilməz zamanda « **стохастическая аппроксимация** в непрерывном времени; **stochastic approximation** in continuous time » – kəsilməz müşahidələr üzrə naməlum *reqressiya* funksiyasının sıfır və ya ekstremum nöqtələrinin tapılması metodudur.

$$Y(t, x) = R(x) + G(t, x), \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}$$

kəsilməz ölçmələri üzrə $R(x) = 0$ reqressiya tənliyinin kökünü tapmaq tələb olunur, burada hər bir $t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}$ qiymətlərində $G(t, x)$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sıfra bərabərdir. *Robbins – Monro proseduruna* analoji olaraq x_0 kəmiyyətinin statistik qiyməti $X(t)$ kimi

$$X(t) = -a(t) Y(t, X(t)) \tag{1}$$

differensial tənliyinin həllini götürmək olar, burada $a(t)$ kəsilməz funksiyası

$$\int_0^\infty a(t)\, d t = \infty, \quad \int_0^\infty a^2(t)\, d t < \infty \tag{2}$$

şərtlərini ödəyir. Belə prosedur üçün, məs., aşağıdakı nəticə alınmışdır: əgər $a(t) = 1/t$ olarsa, $R(x)$ funksiyası monoton artarsa və ixtiyari $x \in \mathbb{R}$ üçün

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t G(u, x)\, d u = 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, onda $t \to \infty$ olduqda $X(t) \to x_0$ münasibəti sanki yəqin ödənilir.

Ölçmə xətaları $G(t, x)$ Qauss bəyaz küy tipli xətalar olduğu, yəni

$$G(t, x) = \sigma(x)\, \xi(t) \qquad (3)$$

olduğu və $\xi(t)$ standart Viner prosesi olduğu hal öyrənilmişdir. Bu halda (1) tənliyi İto stoxastik differensial tənliyi kimi anlaşılmışdır. Baxılan halda aşağıdakı nəticə doğrudur: əgər ölçmə xətaları (3) şəklində olarsa, (2) münasibətləri ödənilərsə, $R(x)$ və $\sigma(x)$ kəsilməz funksiyalar olub, Lipşits lokal şərtini ödəyərsə və $x \neq x_0$ olduqda $R(x)(x - x_0) > 0$, hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_{t \geq 0,\ |x - x_0| < \delta} \sigma^2(t, x) < \infty$$

olarsa, onda (1) proseduru $t \to \infty$ olduqda x_0 nöqtəsinə sanki yəqin yığılır.

Robbins – Monro proseduru və (3) şəklində ölçmələr üçün diskret haldakı kimi $\sqrt{t}\,(X(t) - x_0)$ kəmiyyətinin paylanması, $R(x)$ və $\sigma(x)$ üzərinə bəzi əlavə şərtlər qoyulmaqla, $t \to \infty$ olduqda Qauss paylanmasına yığılır (bax, [3]). Kifer – Volfovits kəsilməz proseduru üçün də yığılma və asimptotik normallıq haqqında analoji nəticələr vardır (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Driml M., Nedoma J., в кн.: Transactions of the second Prague conference on information theory, Prague, 1960, p. 145–58; [2] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущуниях их параметров, М., 1969; [3] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [4] Хасьминский Р. З., «Проблемы передачи информации», 1972, т. 8, № 1, с. 81–91.

STOXASTİK APPROKSİMASİYA; modifikasiyalar « **стохастическая аппроксимация;** модификации; modifications of **stochastic approximation »** – *Robbins – Monro proseduru* və *Kifer – Volfovits prosedurunun* xassələrini yaxşılaşdıran, bu prosedurların dəyişilmiş modifikasiyaları üçün stoxastik approksimasiyadır. S. a.-nın ilk modifikasiyası Robbins – Monro prosedurunda $X(n)$-in modifikasiyasıdır və bu modifikasiya sürətləndirilmiş yığılma proseduru adlandırılmışdır (bax, [1]). Bu modifikasiyanın ideyası ondan ibarətdir ki, əgər $X(n) - X(n-1)$ fərqi işarəsini saxlayırsa, onda addım vuruğu $a(n)$, Robbins – Monro prosedurunda olduğu kimi azalmır və o vaxta qədər sabit qalır ki, bu fərq öz işarəsini dəyişsin. Bu növ prosedurların $R(x) = 0$ reqressiya tənliyinin kökü x_0-a sanki yəqin yığılması isbat olunmuşdur.

Robbins – Monro prosedurunun digər modifikasiyası trend olduğu hal üçündür, yəni reqressiya funksiyasının zamandan asılı olduğu və bu funksiyanın sıfrı $x_0(n)$-in $n \to \infty$ olduqda

$$x_0(n+1) - (1 + 1/n)\, x_0(n) = O(n^{-b})$$

tənliyi ilə təyin olunduğu haldır, burada b – hər hansı müsbət sabitdir.

Robbins – Monro prosedurunun daha bir modifikasiyası

$$X(n+1) - X(n) = -\frac{a}{n}\, Y(n+1, X(n)), \quad a > 0 \qquad (1)$$

proseduru ilə bağlıdır. Məlumdur ki, belə prosedur üçün, müəyyən şərtlər ödənildikdə, $\sqrt{n}\,(X(n) - x_0)$ kəmiyyəti riyazi gözləməsi sıfra bərabər, dispersiyası

$$\sigma^2(a) = a^2 S_0 (2a\alpha - 1)$$

olan asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətdir, burada $\alpha = R'(x_0)$, $S_0 = \lim_{n \to \infty,\ x \to x_0} \mathbf{M} G^2(n, x)$. $a = 1/\alpha$ olduqda $\sigma^2(a)$ funksiyası özünün S_0/α^2-na bərabər minimal qiymətini alır. Bununla əlaqədar olaraq, (1) əvəzinə, onun aşağıdakı

$$X(n+1) - X(n) =$$

$$= \frac{1}{n\, W(n)}\, \frac{Y(n+1, X(n) + c(n)) - Y(n, X(n) - c(n))}{2} \qquad (2)$$

düsturu ilə ifadə olunan modifikasiyasına baxmaq təklif olunmuşdur, burada $c(n)$, – n artdıqca sıfra yaxınlaşan hər hansı müsbət ardıcıllıqdır, $W(n)$ – naməlum α kəmiyyətinin $\alpha \neq 0$ olduqda

$$W(n) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(i+1, X(i) + c(i)) - Y(i+1, X(i) - c(i))}{2c(i)}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan statistik qiymətidir, $\alpha = 0$ olduqda isə $W(n) = 1$. İsbat olunmuşdur ki, bəzi şərtlər ödənildikdə (2) proseduru üçün $\sqrt{n}\,(X(n) - x_0)$ kəmiyyəti riyazi gözləməsi sıfra bərabər, dispersiyası $S_0 \alpha^{-2}$ olan asimptotik normal təsadüfi kəmiyyətin (2) prosedurunun təkmilləşdirilmiş formaları da vardır (bax, [4]).

Robbins – Monro prosedurunun modifikasiyalarının elə sinfi məlumdur ki, bu modifikasiyalar $|x| \to \infty$ olduqda $R(x)$ reqressiya funksiyası üzərinə qoyulan şərtləri zəiflətmək məqsədinə xidmət edir (bax, [6] – [8]).

Kifer – Volfovits prosedurunun modifikasiyasına, $R(x)$ reqressiya funksiyasının x_0 maksimum nöqtəsi ətrafında sonlu s sayda törəmələrinin olduğu hal üçün baxılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, s böyük olduqca, bu modifikasiyanın yığılma sürəti böyük olur. Bundan başqa, Kifer – Volfovits prosedurunda $a(n)$ və $c(n)$ ardıcıllıqlarına analoji, addım vuruqlarının optimal seçilməsi haqqında məsələ də öyrənilmişdir (bax, [5]).

Əd.: [1] Kesten H., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, № 1, p. 41–59; [2] Dupac V., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, № 6, p. 1695–1702; [3] Venter J. H., «Ann. Math. Statist.», 1967, v. 38, № 1, p. 181–90; [4] Fabian V., «Ann. Math. Statist.», 1968, v. 39, № 4, p. 1327–32; [5] Robbins H., Siegmund D., в кн.: Optimizing methods in statistics, N. Y. – L., 1971, p. 233–57; [6] Komlos J., Revesz P., «Stud. sci. math. Hung.», 1973, v. 8, p. 329–40; [7] Невельсон М. Б., «Теория вероятн. и ее примен.», 1978, т. 23, в. 2, с. 383–88; [8] Fabian V., в кн.: Optimizing methods in statistics, N. Y. – L., 1971, p. 439–70.

STOXASTİK ARDICILLIQ « стохастическая последовательность; stochastic / adapted sequence » – ölçülən $(\Omega, \mathscr{A})$-da verilmiş elə $X = (X_n)_{n\geq 1}$ *təsadüfi kəmiyyətlər* ardıcıllığıdır ki, X_n hər bir $n \geq 1$ üçün $\mathscr{A}_n$ – ölçüləndir, yəni X_n təsadüfi kəmiyyətləri uyğun uzlaşma xassəsinə (rus. – адаптированности свойство) malikdirlər, burada $\mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{A}$, $(\mathscr{A}_n)_{n\geq 1}$, – σ – cəbrlərin azalmayan ailəsidir. Belə ardıcıllıqların simvolik yazılışı üçün, əksər hallarda, $X = (X_n, \mathscr{A})_{n\geq 1}$ işarələməsindən istifadə olunur və bu isə X_n-in $\mathscr{A}_n$-ə ölçülən olduğunu nəzərə çatdırmaq məqsədilə edilir. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən S. a.-a tipik misallar Markov ardıcıllıqları, martinqallar, semimartinqallar və başqalarıdır. Kəsilməz zaman halında (diskret zaman $n \geq 1$, kəsilməz $t \geq 0$ zamanı ilə əvəz olunduğu halda) uyğun $X = (X_t, \mathscr{A}_t)_{t\geq 1}$ obyektlər çoxluğu stoxastik proses adlanır.

STOXASTİK ASILI OLMAMAZLIQ « стохастическая независимость; stochastic independence » – bax, *Asılı olmamazlıq.*

STOXASTİK ATTRAKTOR « стохастический аттрактор; stochastic attractor » – aşağıdakı xassələri ödəyən, $\{S^t\}$ dinamik sisteminə nəzərən invariant, hamar çoxobrazlının diffeomorfizmlərinin birparametrli qrupu olan qapalı A çoxluğudur: 1) elə $U_0 \supset A$ ətrafı vardır ki, $t > t_1$ olduqda $U_{t_1} = S^{t_1} U_0 \supset U_t$ və $\bigcap_t U_t = A$; 2) U_0-da mütləq kəsilməz ixtiyari μ_0 ölçüsü üçün $\mu_t = S_X^t \mu_0$ ölçülər ailəsi μ_0-dan asılı olmayan invariant, A-da topalanmış λ ölçüsünə yığılır; 3) $(A, \lambda, \{S^t\})$ dinamik sistemini qarışdırıcı (bax, *Qarışma*) sistemdir (bax, [1]).

S. a.-un cazibə oblastında Lebeq ölçüsünə nəzərən tipik trayektoriyaların statistikası limit ölçüsü λ ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Синай Я. Г., в кн.: Нелинейные волны, М., 1979, с. 192–212.

STOXASTİK AYRILIŞ(ı) statistik qiymətlərin **« стохастическое разложение** оценок; **stochastic expansion** of estimators **»** – bax, *Asimptotik ayrılış*(ı) statistik qiymətlərin.

STOXASTİK BAZİS « стохастический базис; stochastic basis » – $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ filtrasiyası ilə təmin olunmuş, yəni azalmayan $(\mathscr{A}_s \subseteq \mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A},\ s \leq t)$ və sağdan kəsilməz $(\mathscr{A}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{A}_s,\ t \geq 0)$, $\mathscr{A}$-nın σ – altcəbrlərinin ailəsi ilə verilmiş $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasıdır; simvolik olaraq aşağıdakı kimi yazılır:

$$\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P}).$$

Əgər $\mathscr{A}$ σ – cəbri $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən tam σ – cəbr olarsa və hər bir $\mathscr{A}_t$ σ – cəbri $\mathscr{A}$-nın sıfır $\mathbf{P}$ – ölçülü çoxluqlarını özündə saxlayarsa, $\mathscr{B}$ S. b.-i tam stoxastik bazis və ya adi şərtləri ödəyən S. b. adlanır. $\mathscr{B}$ S. b., tam olarsa, adətən, $\mathscr{B}_{\mathbf{P}}$ kimi işarə olunur və indeks $\mathbf{P}$ ölçüsü üzrə tamamlanmanı göstərir.

Əd.: [1] Dellacherie C., Meyer P.-A., Probabilitiés et potentiel. Théorie des martingales, t. 2, P., 1980; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986, с. 512; [3] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXASTİK DİFFERENSİAL « стохастический дифференциал; stochastic differential » – dX intervalının *təsadüfi funksiyasıdır* və $\{\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P}\}$ stoxastik bazisində baxılan, *semimartinqallar* sinfindən olan hər bir $X = (X_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P})$ prosesi üçün

$$(dX)I = X_t - X_s,\ \ I = (s, t]$$

düsturu ilə təyin olunur. $ds = \{dX : X \in S\}$ S. d.-lar ailəsində additiv (A), multiplikativ (M) əməllər və vurma əməli (P) uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla daxil edilir:

$$\text{(A)} \qquad dX + dY = d(X + Y),$$

$$\text{(M)} \qquad (\Phi\, dX)(s, t) = \int_s^t \Phi\, dX$$

[– stoxastik inteqraldır, Φ isə $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ axını ilə uzlaşmış lokal məhdud prosesdir],

$$\text{(P)} \qquad dX \cdot dY = d(XY) - X\,dY - Y\,dX\,.$$

$\Delta = (s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t)$, – $(s, t]$ intervalının ixtiyari bölgüsü, l.i.p. – ehtimala görə limit, $|\Delta| = \max |t_i - t_{i-1}|$ olduqda,

$$(dX \cdot dY)(s, t] = \underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.p.}} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$$

olur.

Stoxastik hesabda təsadüfi funksiyaların «differensiallanma» qaydası və ya İto düsturu mühüm yer tutur: əgər $X^1, \ldots, X^n \in S$ və $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^2$ şərtilə verilən funksiya olarsa, onda Y prosesi

$$Y = f(X^1, \ldots, X^n) \in S$$

şərtini ödəyir və

$$df(X^1, \ldots, X^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \cdot \partial X^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f \cdot dX^i\, dX^j \qquad (1)$$

düsturu doğrudur, burada ∂_i, – i-ci koordinat üzrə xüsusi törəmədir. Məs., əgər $X \in S$ olarsa, onda (1)-dən

$$f(X_t) =$$

$$f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s^-})\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s^-})\, d\langle X \rangle^c +$$

$$+ \sum_{0\leq s\leq t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})\Delta X_s] \qquad (2)$$

düsturu alınır, burada X^c, – X -in ayrılışında kəsilməz martinqal komponentdir, $\Delta X_s = X_s - X_{s^-}$.

(2) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s^-})dX_s +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s^-})\, d[X, X]_s + \sum_{0<s\le t} [f(X_s) - f(X_{s^-}) -$$

$$- f'(X_{s^-})\Delta X_s - \frac{1}{2}f''(X_{s^-})(\Delta X_s)^2],$$

burada $[X, X]$, – X -in kvadratik variasiyasıdır.

Əd.: [1] İ t o K., W a t a n a b e S h., в кн.: Proceedings of the İnternational Symp. SDE Kyoto. 1976, N. Y. – [a. o.], 1978, p. 1–30; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

STOXASTİK DİFFERENSİAL HƏNDƏSƏ « стохастическая дифференциальная геометрия; stochastic differential geometry » – *təsadüfi proseslərin* zaman üzrə cərəyanını hamar çoxobrazlılarda öyrənən və analizin qarışıq məsələlərini tədqiq edən riyazi fəndir. Hamar çoxobrazlıda xarakteristikaları öz strukturu ilə bağlı təsadüfi proseslərə baxmaq təbiidir; ilk əvvəl diffuzion proseslər və onların ümumiləşmələri nəzərdə tutulur. Hamar çoxobrazlılarda diffuzion proseslərin ilk konstruksiyaları K. İosida tərəfindən [1]-də semiqruplar nəzəriyyəsinin metodları ilə, K. İto tərəfindən [2]-də stoxastik differensial tənliklərin köməyilə verilmişdir. Stoxastik differensial tənliklər metodu Q. Mak-kin tərəfindən [3]-də inkişaf etdirilmişdir. S. d. h.-nin problematikası, əsas etibarilə (M. Kasın, [4]-dəki işlərindən başlayaraq, bax, həm də [5]), çoxobrazlı həndəsənin diffuzion proseslərin asimptotikası və bu proseslərin uyğun differensial operatorlarının spektral xassələri ilə əlaqəsinə əsaslanmışdır. S. d. h.-nin inkişafına diffuzion proseslərin keçid ehtimallarının hamarlılığının öyrənilməsinə yeni yanaşma (və «S. d. h.» terminini) təklif etmiş Mallyavenin işləri təkan vermiş oldu (bax, [6]). Sonsuzölçülü hamar çoxobrazlılarda analizin inkişafı ilə əlaqədar olaraq S. d. h. metodları sonsuzölçülü hala keçirilir (bax, [7] – [9]). Bu halda bu metodlar hamar ölçülərin və differensial tənliklərin həllərinin qurulmasında xüsusi rol oynayır, belə ki, sonsuzölçülü halda Lebeq ölçüsü kimi ölçünün olmaması səbəbindən klassik metodlar yaramır.

Sonra diffuzion təsadüfi proseslər, stoxastik differensial tənliklər və hamar çoxobrazlılarda differensial operatorlarla əlaqədar əsas konstruksiyalar təsvir olunur. Bu təsvirdə hamar çoxobrazlıların differensial həndəsəsinin koordinatsız müasir dili istifadə olunur, bu dil isə özünün kompaktlığı və dim. – ölçüdən asılı olmamazlığına görə çox münasibdir (bax, [10]).

I. Hamar çoxobrazlıların differensial həndəsəsinin əsas anlayışları.

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ – həqiqi Banax (sonluölçülü və ya sonsuzölçülü) fəzaları, $L_k(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$, – $\mathfrak{B}_1$-dən $\mathfrak{B}_2$-yə kəsilməz k – xətti inikasların fəzası, $\mathfrak{B}^* = L_1(\mathfrak{B}, \mathbb{R})$, $\langle x, \varphi\rangle$, – $x \in \mathfrak{B}$, $\varphi \in \mathfrak{B}^*$ elementlərinin kanonik cütləşməsidir (rus. спаривание).

G, – $\mathfrak{B}_1$-də oblast olsun. Əgər $f: G \to \mathfrak{B}_2$ inikasının $\|h\| \to 0$ olduqda $f(x+h) - f(x) - f'(x)h = o(\|h\|)$ xassəsini ödəyən törəməsi – $f'(x) \in L_1(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ varsa, f inikası $x \in G$ nöqtəsində differensiallanandır, deyilir. Yüksək tərtib törəmələr

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x) \in L_k(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$$

düsturu ilə ardıcıl təyin olunur. f inikasının G-də k – tərtib $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ kəsilməz törəmələri varsa, $f \in C_n(G, \mathfrak{B}_2)$ münasibəti doğrudur, deyilir; $n \ge 2$ olduqda C_n sinfinin inikasları, qısaca, h a m a r i n i k a s l a r adlanır.

H a m a r (h ə q i q i) X ç o x o b r a z l ı s ı hamar struktur təyin olunmuş, yəni təbii xassələrə malik olan hamar funksiyalar ehtiyatı göstərilmiş ayrılan topoloji fəzadır, Bu struktur $\mathfrak{B}$ Banax fəzasının $G_\alpha^\varphi \subset \mathfrak{B}$, $\varphi_\alpha : G_\alpha \to G_\alpha^\varphi$ ətraflarına homeomorf olan açıq çoxluqların (kartların) $X = \bigcup_\alpha G_\alpha$ sistemini örtən $\{G_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlası vasitəsilə daxil olunur və bu atlas m o d e l a t l a s adlanır. X -in dim. – ölçüsü tərifə görə $\mathfrak{B}$ -nin dim. – ölçüsüdür. $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^n$ olduqda, X hamar çoxobrazlısı sonluölçülüdür. $\varphi_\alpha : x \to x_\alpha$ homeomorfizmlərinin (koordinat inikasları) uzlaşmış olduğu fərz olunur, bu isə o mənada anlaşılır ki, calayan $F_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : G_\beta^\varphi \to G_\alpha^\varphi$ $(G_\alpha \cap G_\beta = \varnothing)$ inikasları hamar inikaslardır. Əgər $\widetilde{X}$ atlası $(\widetilde{C}_{\tilde\alpha}, \widetilde{\varphi}_{\tilde\alpha})$ və modeli $\widetilde{\mathfrak{B}}$ olan hamar çoxobrazlıdırsa,

$$\widetilde{\varphi}_{\tilde\alpha} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : G_\alpha^\varphi \to G_{\tilde\alpha}^{\widetilde{\varphi}} f(G_\alpha) \cap \widetilde{G}_{\tilde\alpha} \ne \Phi$$

inikasları hamarlılıq xassəsinə malik olarlarsa, onda $f: X \to \widetilde{X}$ inikası h a m a r i n i k a s adlanır.

Sonluölçülü halda, model fəzada bazis seçərək, hər bir G_α kartında koordinat inikası φ_α-nın köməyilə əyrixətli koordinatlar daxil edərək, kartların kəsişmələrində calayan inikasların köməyilə müxtəlif koordinat sistemləri arasında əlaqəni göstərmək mümkündür.

V e k t o r l a y l a ş m a s ı $\pi = (\pi, X, \varepsilon)$ hamar X çoxobrazlısı ilə (vektor laylaşmasının bazası ilə), ε vektor laylarının total fəzası və hamar $\pi : \varepsilon \to X$ inikası (proyeksiyası) ilə təyin olunur. Əgər $\varepsilon = X \times E$ və $\pi : x \times E \mapsto x$ olarsa, vektor laylaşması t r i v i a l v e k t o r l a y l a ş m a s ı (lay ilə – Banax fəzası E ilə) adlanır. Ümumi halda vektor laylaşmasında l o k a l t r i v i a l l ı q t ə l ə b i qoyulur: X bazası kartları üçün $\pi_\alpha = \pi | G_\alpha,\ G_\alpha,\ \varepsilon = \pi^{-1}(G_\alpha)$ layları triviallaşa bilinən atlasa malikdir (triviallaşma o mənada anlaşılır ki, laylar üzrə təsir edən triviallayıcı $\Phi_\alpha : \varepsilon_\alpha \to G_\alpha^\varphi \times E$ homeomorfizmləri (trivializasiyaları) təyin olunmuşdur: $\Phi_\alpha(x) = \Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)} : \varepsilon_x = \pi^{-1}(x) \to \varphi(x) \times E$). Bu halda fərz olunur ki, calayıcı $S_{\alpha\beta}(x_\beta) = \Phi_\alpha(x)\, \Phi_\beta^{-1}(x) : E \to E$ inikasları xətti inikaslardır və ε_x laylarına uzlaşdırılmış surətdə E Banax fəzasının strukturunu (vektor laylaşmasının tipik layını) daxil edirlər. V e k t o r l a y l a ş m a s ı n ı n $f: \pi \to \widetilde{\pi}$ i n i k a s ı hər bir layda xətti olan və hər bir lay üzrə təsir edən $\Phi : \varepsilon_x \to \widetilde{\varepsilon}_{\varphi}(x)$, $\varphi : X \to \widetilde{X}$, $\Phi : \varepsilon \to \widetilde{\varepsilon}$ hamar inikaslarının (φ, Φ) cütüdür.

Hər bir hamar X çoxobrazlısına onun t o x u n a n l a y ı $\tau_X = (\tau_X, X, TX)$ uyğundur və onun tipik layı üçün $\mathfrak{B}$, – X-in modelidir və $S_{\alpha\beta} = F'_{\alpha\beta}$ isə calayıcı inikaslardır. Bu halda çoxobrazlıların hamar $f: X \to X$ inikasına toxunan layların törəmə inikası $Tf: TX \to T\widetilde{X}$, $Tf = (f, f')$, $Tf|_{T_xX} = f'(x): T_xX \to T_{f(x)}X$ uyğun olur. Tipik layı $\mathfrak{B}^*$, calayan inikasları $F^*_{\alpha\beta}$ olan $\tau^*_X = (\tau^*_X, X, T^*X)$ laylaşmasına k o t o x u n a n laylaşma deyilir; tipik layları $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ fəzalarının yarıxətti inikasları ilə yaranan laylaşmalara t e n z o r laylaşmalar deyilir.

(π, X, ε) v e k t o r l a y l a ş m a s ı n ı n k ə s i y i – elə $z: X \to \varepsilon$ hamar inikasıdır ki, $z(x) \in \varepsilon_x$. Trivial $(\pi, X, X \times E)$ laylaşmasının kəsiyi özünün baş hissəsi $\hat{z}: X \to E$, $z(x) = x \times \hat{z}(x)$ ilə təyin olunur. Lokal trivial vektor laylaşmasının kəsiyi z özünün $z_\alpha = z|_{G_\alpha}$ lokalizasiyalarına baxılmaqla və Φ_α-nın trivializasiyasının köməyilə, $\hat{z}_\alpha \circ F_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}\, \hat{z}_\beta$ əlaqələri ilə (çevirmələrin tenzor qanunu) onun $\hat{z}_\alpha : G^\varphi_\alpha \to E$ baş hissələrinə keçilməklə öyrənilir. Vektor laylaşmanın kəsikləri m e y d a n l a r: toxunan üçün v e k t o r m e y d a n l a r; tenzorlar üçün t e n z o r m e y d a n l a r adlanır. π vektor laylaşmalarının kəsiklərinin fəzası $\sigma(\pi)$ ilə işarə olunur.

Əgər hamar X çoxobrazlısında Riman tenzoru – $T_xX: (\varphi, \psi)_x = \langle \varphi, g(x)\psi \rangle$ toxunanlar fəzasında bixətti formanın müsbətliyi mənasında cırlaşmayan xətti $g(x): T_xX \to T^*_xX$ inikaslarının meydanı təyin olunmuşdursa, X Riman h a m a r ç o x o b r a z l ı s ı adlanır. Bu forma T_xX toxunanlar fəzalarında Evklid strukturunu (sonsuzölçülü halda Hilbert strukturu) və X çoxobrazlısının metrikasını təyin edir. Qeyd etmək lazımdır ki, sonluölçülü Riman çoxobrazlısında standart ölçü – v həcmi mövcuddur.

V e k t o r l a y l a ş m a s ı π-nin ə l a q ə l i l i y i vektor meydanları $z \in \sigma(z)$ boyunca kəsiklərin kovariant differensiallanma xətti əməli – $\nabla_z : \sigma(\pi) \to \sigma(\pi)$ ilə təyin olunur. τ_X toxunan laylaşmasının əlaqəliliyi (X-in xətti əlaqəliliyi) tenzor laylaşmalarının əlaqəliliyini birqiymətli olaraq elə təyin edir ki, ∇_z əməli tenzor vurma əməlinə nəzərən differensiallanma əməli olur. Vektor laylaşmalarının əlaqəliliyini lokal əmsallar sisteminin köməyilə təsvir etmək olur, bu halda da əmsallar kalibrləyici

$$\Gamma^\beta_{x_\beta}(F'_{\beta\alpha}(x_\alpha)h,\ S_{\beta\alpha}(x_\alpha)\, e) =$$

$$= S_{\beta\alpha}(x_\alpha)\, \Gamma^\alpha_{x_\alpha}(h, e) - S'_{\beta\alpha}(x_\alpha)\,(h, e)$$

çevirmələri ilə əlaqəli olan $\Gamma^\alpha_{x_\alpha} : \mathfrak{B} \times E \to E$ bixətti inikaslarının ayrı-ayrı trivializasiyalarına uyğun əmsallardır.

e meydanının kovariant törəməsinin baş hissəsi

$$(\nabla_z \hat{e})_\alpha = \hat{e}'_\alpha \hat{z}_\alpha + \Gamma^\alpha(\hat{z}_\alpha,\ \hat{e}_\alpha)$$

düsturu ilə hesablanır.

Əgər $\nabla_{x'} e = 0$ olarsa, e meydanı $x: [0,1] \to X$ əyrisi boyunca p a r a l e l m e y d a n adlanır. Hər bir e_α lokalizasiyası üçün paralel meydanın baş hissəsi

$$\frac{d}{dt}\, \hat{e}_\alpha(x_\alpha(t)) + \Gamma^\alpha_{x_\alpha(t)}(x'(t),\ \hat{e}_\alpha(x(t))) = 0$$

xətti differensial tənliyini ödəyir. Bu tənliklərdən əyri boyunca tenzorların paralel köçürməsinin xətti operatorlarının ailəsi $\tau_x(t, s): \varepsilon_{x(s)} \to \varepsilon_{x(t)}$ təyin olunur, bu ailə $\tau_x(t_1, t_2) = \tau_x(t_1, t)\tau_x(t_1, t_2)$ evolyusionluq xassəsinə malik olub, tenzor münasibətlərini dəyişmir.

Çoxobrazlıda əlaqəliliyə malik x əyrisi boyunca X' toxunanları meydanı paralel meydan olarsa, x g e o d e j i ə y r i adlanır. Hər bir $x_0 \in X$ nöqtəsi və $z_0 \in T_{x_0}X$ istiqaməti heç olmasa bir lokal geodeji əyrini birqiymətli təyin edir, bu əyrini ixtiyari $G_\alpha \ni x_0$ kartı üçün

$$x''_\alpha(t) + \Gamma^\alpha_{x_\alpha(t)}(x'_\alpha(t),\ x'_\alpha(t)) = 0\,,$$

$$x_\alpha(0) = x_{0\alpha} : x'_\alpha(0) = z_{0\alpha}$$

Koşi məsələsini həll edərək hesablamaq olur.

Riman çoxobrazlısında Riman tenzoru ixtiyari əyri boyunca paralel olan əlaqəlilik (Levi – Çivita əlaqəliliyi) birqiymətli təyin olunur. Bu əlaqəlilik üçün iki nöqtəni birləşdirən ən qısa əyrilər geodeji əyrilərdir.

Sıfrın hər hansı $Q_x \subset T_xX$ ətrafında təyin olunmuş və qarşılıqlı birqiymətli $\exp_x : Q_x \to X$, $x_0 \mapsto x(1)$ inikası e k s p o n e n s i a l i n i k a s adlanır. Bu inikas T_xX toxunun fəzasının sıfırdan çıxan şüalarının parçalarını $x \in X$ nöqtəsindən çıxan geodeji parçalara çevirir.

Skalyar hamar $u: X \to \mathbb{R}^1$ funksiyası üçün d i f f e r e n s i a l ə m ə l l ə r aşağıdakı kimi təyin olunur. $u'(x) \in T_xX$ olduğundan, hər bir $a \in \sigma(\tau_x)$ vektor meydanına 1-ci tərtib differensiallama əməli uyğun olur, yəni $\nabla_a u(x) = \langle a(x),\ u'(x) \rangle = \langle a(x), \nabla \rangle u(x)$, burada ∇ – differensiallama əməlidir və $T^*_x X$ elementinin formal xassələrinə malikdir. $X = \mathfrak{B}$ vektor fəza, $u''(x) \in L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ olduğu halda, 2-ci tərtib elliptik differensiallama əməlini aşağıdakı kimi təyin etmək olur: H – Hilbert fəzası (sonsuzölçülü halda $H = \mathbb{R}^n$), $A(x) \in L(H, \mathfrak{B})$, $B(x) = A(x)A^*(x) \in L(\mathfrak{B}^*, \mathfrak{B})$ olsun, onda

$$l_{\mathfrak{B}}(B,\ u)(x) = \langle B(x)\nabla,\ \nabla \rangle u(x) = \operatorname{tr} A^*(x) u''(x)\, A(x)$$

($\operatorname{tr} K = \sum_j \langle K e_j, e_j \rangle$, burada $\{e_j\}$, – H-da ortobazisdir).

Xətti əlaqəliliyə malik hamar X çoxobrazlıları üçün ikinci törəmələr meydanı $\nabla^2 u(x) \in L(T_xX, T^*_xX)$ təyin olunur, bu meydanın baş hissəsi hər hansı trivializasiyada

$$\left\langle \varphi, \widehat{(\nabla^2 u)}_\alpha (x_\alpha)\,\psi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \varphi,\ u''(x_\alpha)\psi \right\rangle - \left\langle u'(x_\alpha), \Gamma^\alpha_{x_\alpha}(\varphi, \psi) \right\rangle$$

düsturu ilə verilir.

2-ci tərtib elliptik operatorun kovariant analoqu $B(x) = A(x)A^*(x)$, $A(x) \in L(H, T_x X)$ olduqda aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$l_X(B, u) = \operatorname{tr} B(x)\,\nabla^2 u(x),$$

$$l_X(B,\ u)x_\alpha = \operatorname{tr} A^*_\alpha(x_\alpha)\,u''(x_\alpha)\hat{A}'_\alpha(x_\alpha) -$$

$$-\left\langle u'(x_\alpha),\ \operatorname{tr} \Gamma^\alpha_{x_\alpha}(\hat{A}'(x_\alpha)\cdot, \hat{A}(x_\alpha))\cdot \right\rangle.$$

Əgər X Riman çoxobrazlısıdırsa və toxunan laya Hilbert fəzası H-ın strukturu Riman metrikası vasitəsilə daxil olmuşdursa, onda $A = I$ götürmək olar. Bu halda alınan

$$\nabla_X u = L_X(I, u) = \operatorname{tr} \nabla^2 u$$

operatoru Laplas–Beltrami operatoru adlanır.

II. Diffuzion proseslər və differensial tənliklər. $\zeta(t)$ – hamar X çoxobrazlısında kəsilməz bircins Markov prosesi olsun. Bu prosesin xarakteristik operatoru

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{G \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x f(\zeta(\tau_G)) - f(x)}{\mathbf{M}_x \tau_G}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada τ_G, – $\zeta(t)$-nin $x = \zeta(0)$ nöqtəsini özündə saxlayan G ətrafından birinci dəfə kənara çıxdığı andır. $C_2(X)$ prosesin təyin olunma oblastı $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}$-ya daxil olarsa, proses diffuzion proses adlanır (bax, [11]). Bu halda

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(B, a, c) = l_X(B)/2 + \langle a, \nabla \rangle + c$$

– diffuziya əmsalı $B(x) \in L(T_x X, T_x^* X)$, aparı əmsalı $a(x) \in T_x X$, qırılma əmsalı $c(x) \le 0$ olan ikinci tərtib elliptik operatordur. Bu operator $C_2(X)$-də $\widetilde{\mathfrak{A}}$ doğuran operatorunun daralmasıdır, $\widetilde{\mathfrak{A}}$, – $C(X)$ fəzasında $U_t : f \mapsto$ $\mapsto \int\limits_X f(y)\,P(t, x, dy)$ daraldıcı semiqrupunun Markov prosesi $\zeta(t)$ ilə doğurduğu operatordur. Qeyri – bircins $\zeta(t)$ prosesi üçün xarakteristik operatorun əmsalları t zaman parametrindən asılıdırlar. Bu proses $C(X)$ fəzasında xətti inikasların ikiparametrli evolyusion ailəsini, yəni

$$U(t, \tau) f(x) = \mathbf{M}\{f(\zeta(\tau)) \mid \zeta(t) = x\} =$$

$$= \int\limits_X f(y)\,P(t, \tau, x, dy)$$

inikaslar ailəsini doğurur;

$$U(t, \tau) = U(t, s)\,U(s, \tau),\quad t < s < \tau.$$

Bu halda $u(t, x) = U(t, \tau) f(x)$ düsturu

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathfrak{A}(t) u(t, x) = 0,\ \ u(\tau, x) = f(x),\ t \le \tau \quad (1)$$

parabolik tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllini ifadə edir; (1) tənliyi verilən diffuzion prosesin Kolmoqorov tərs düsturu adlanır (ümumiyyətlə, bu həll ümumiləşmiş həldir, belə ki, onun hamarlılığı haqqında əlavə fərziyyələr edilməlidir). 2-ci tərtib differensial tənliklər üçün bir sıra digər məsələlərin həlləri diffuzion proseslərin bəzi funksionallarının orta qiymətləri ilə ifadə olunur. Məs, φ potensialı haqqında bəzi fərziyyələrlə

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)\,u(t, x) + \varphi(x)\,u(t, x) = 0,$$

$$u(\tau, x) = f(x)$$

– Koşi məsələsinin həlli

$$u(t, x) = \mathbf{M}\left\{ e^{\int_t^\tau \varphi(\zeta(s))ds} f(\zeta(\tau)) \mid \zeta(t) = x \right\}$$

Feynman – Kas düsturu ilə verilir. Bu düstur $\mathfrak{A} + \varphi(x)$ operatorunun spektral xassələrinin (bax, [5]), həm də parabolik məsələnin həllərinin asimptotik xassələrinin araşdırılmasında mühüm rol oynayır. Elliptik və parabolik sərhəd məsələlərinin həlləri üçün də düsturlar vardır.

Əksinə, əgər $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{A}(t)\,u = 0$ tənliyi üçün Koşi məsələsi $C_2(X)$ sinfində korrekt olarsa, onda bu məsələ

$$U(t, \tau) : f \mapsto \int\limits_X f(y)\ P(t, \tau, x, dy)$$

xətti operatorlarının evolyusion ailəsini doğurur, burada $P(t, \tau, x, \cdot)$ funksiyası X-də Markov prosesinin keçid ehtimallarının xassələrinə malikdir. Sonluölçülü halda əmsalların hamarlılığı üçün müəyyən tələblər qoyulduqda və diffuziya əmsalının cırlaşmayan olduğu halında baxılan məsələnin korrektliyi klassik analitik metodlarla müəyyən olunur (bax, [1]). Diffuzion prosesin asılı olmadan qurulması cırlaşmayanlıq və sonluölçülülük şərtlərindən istifadə etmədən differensial tənliklərin həllinə gətirir.

III. Stoxastik differensial tənliklər hamar çoxobrazlılarda.

Diffuzion proseslərin geniş sinfinin birbaşa qurulması İto stoxastik differensial tənliklərinin köməyilə həyata keçirilir. $w(t)$ $(t \ge 0)$ – separabel həqiqi Hilbert fəzası H (sonluölçülü halda $\mathbb{R}^n$ fəzası ilə) ilə kanonik əlaqəli Viner prosesi, yəni parametrləri $\mathbf{M}\,w(t) = 0$, $\mathbf{M}\left|w(t+\tau) - w(t),\ \varphi\right|^2 = \tau \left\|\varphi\right\|^2$ olan və asılı olmayan artımlarlı Qauss təsadüfi prosesi olsun [$\dim H = \infty$ olduqda $w(t)$-nin trayektoriyaları hər hansı genişlənmiş $H_ \supset H$ fəzasında sanki yəqin yerləşən proses]. $\mathscr{B}$ Hilbert fəzasında (məsələn, $\mathbb{R}^n$-də) stoxastik differensial tənliklər $a(t, x) \in \mathfrak{B}$, $A(t, x) \in L_{12}(H, \mathfrak{B})$ meydanları ilə (ümumiyyətlə, zamandan asılı meydanlarla) təyin olunur, burada $L_{12}(H, \mathfrak{B})$ – Hilbert – Şmidt operatorları fəzasıdır. Bu tənliklər

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))\,dt + A(t, \zeta(t))\,dw(t)$$

şəklində və ekvivalent inteqral formada –

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, \zeta(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} A(s, \zeta(s))\,d\boldsymbol{w}(s)$$

şəklində yazılır, burada ikinci toplanan – İto stoxastik inteqralıdır. x üzrə əmsallar klassik kəsilməzlik və Lipşits şərtlərini ödədiyi halda, bu stoxastik differensial tənliyin başlanğıc qiyməti qeyri – antisipativ ζ_0 üçün stoxastik ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganə qeyri – antisipativ həll – $\mathfrak{B}$ -də diffuzion proses olan $\zeta(t)$ həlli vardır ($\dim\mathfrak{B} = \infty$ halında bax, [12]); bu prosesin aparı əmsalı $a(t, x)$, diffuziya əmsalı $B(t, x) = A(t, x)\,A^*(t, x)$ -dir.

Modeli Hilbert fəzası $\mathfrak{B}$ olan əlaqəli hamar X çoxobrazlısında stoxastik differensial tənliklər aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$d\zeta(t) = \exp_{\zeta(t)}\{a(t, \zeta(t))\,dt + A(t, \zeta(t))\,d\boldsymbol{w}(t)\},$$

burada $a(t, x) \in T_x X,\ A(t, x) \in L_{12}(H, T_x X)$ – aparı və diffuziya əmsallarının hamar meydanlarıdır. Əmsalların daşıyıcıları qeyd olunmuş G kartında olarlarsa, tənlik lokal tənlik olur. Bu halda $\zeta_\alpha(t) = \varphi_\alpha(\zeta(t))$ prosesi $C_\alpha^\varphi \subset \mathfrak{B}$ ətrafından kənara çıxmır və

$$d\zeta_a(t) = \{\hat{a}_\alpha(t, \zeta_a(t)) -$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\Gamma^\alpha_{\zeta_\alpha(t)}(\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot, \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot)\}dt +$$
$$+ \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\,d\boldsymbol{w}(t))$$

stoxastik differensial tənliyini ödəyir.

Bu tənlik calaqlanan çevirmələrə nəzərən invariant olur, bu şərtlə ki, stoxastik differensiallar İto düsturu üzrə çevrilsinlər, əlaqə əmsalları isə kalibrləmə çevirmələri üzrə çevrilsinlər. Beləliklə, lokal stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsi vektor fəzada uyğun nəzəriyyəyə ekvivalentdir. Ümumi halda tənliyin həllinin qurulması – kiçik zaman intervallarında ardıcıl lokalizasiya yolu ilə, alınmış lokal tənliklərin həllərinin calaqlanması və zaman intervalının sıxlaşan bölgüləri üzrə limitə keçid vasitəsi ilə aparılır. Bu halda X çoxobrazlısında stoxastik axın, yəni $V_\zeta(\tau, t) = V_\zeta(\tau, s)V_\zeta(s, t),\ t < s < \tau$ evolyusion xassəsinə sanki yəqin malik olan $V_\zeta(\tau, t) : \zeta(t) \to \zeta(\tau)$ inikaslar ailəsi yaranır. Bu ailənin başlanğıc qiymətlərinə və ya hər hansı parametrlərə nəzərən hamarlılığının öyrənilməsi üçün ilkin differensial tənlikdən ardıcıl formal differensiallanma yolu ilə alınan – onun differensial davam olunmaları yolu ilə – stoxastik differensial tənliklərinə baxılır. Bu tənliklər artıq ilkin X çoxobrazlısındakı tənliklər deyil, onun toxunan TX laylaşmasının total fəzalarında tənliklərdir və bunların iterasiyalarıdır.

V stoxastik axını funksiyalar fəzası $C(X)$ -də xətti inikasların evolyusion ailəsini doğurur. Onun doğuran operatoru

$$\mathfrak{A}(AA^*, a, 0)\,u = l_X(AA^*, u)/2 + \langle a, \nabla\rangle u$$

düsturu ilə ifadə olunur.

IV. Stoxastik tənliklər laylaşmalarda. Tenzorların diffuziyası.

Əgər hamar çoxobrazlıda əlavə struktur vardırsa, onda bu strukturla uzlaşan konstruksiyalara baxmaq təbiidir. Stoxastik differensial tənliklər üçün belə uzlaşma əmsalların uyğun xassələri ilə təyin olunur. Bu mənada vektor laylaşmalarının total fəzasında əmsalları laylarda xətti olan və proyeksiyası ilə bazaya kommutasiya olunan stoxastik differensial tənliklərə baxılır. Hamar çoxobrazlılarda stoxastik differensial tənliklərin differensial davamları, məs., iterasiya olunmuş toxunan laylaşmalarda, bu xassələrə malikdirlər. Bu xassələrə malik olan stoxastik differensial tənlik, X bazasında proyeksiyası diffuzion $\zeta(t) = \pi\eta(t)$ prosesi olan, total ε fəzasında $\eta(t)$ diffuzion prosesini doğurur. Uyğun $V_\eta(\tau, t) : \eta(t) \to \eta(\tau)$ təsadüfi axını laylarda xəttidir və $\zeta(t)$ prosesi üçün operator multiplikativ funksionalının xassələrinə malikdir. Bu axının $\eta_0 \in \varepsilon_{\zeta(t_0)}$ tenzoruna təsiri $\eta(t) = V_\eta(t, t_0)\eta_0$ təsadüfi evolyusiyasını – tenzorların diffuziyası adlanan evolyusiyanı – doğurur (bax, [13], [14], [7]). Tenzorların diffuziyasının xüsusi halı laylaşma bazası üzərində $\zeta(t)$ diffuzion prosesinin trayektoriyası boyunca tenzorları paralel köçürtmə prosesidir. Konkret trivializasiyanın seçilməsi ilə bağlı lokalizasiya olduqda, bu proses elə sistemlə təsvir olunur ki, baza üzərində yuxarıda qeyd olunmuş tənlik aşağıdakı tənliklə tamamlanır:

$$d\zeta_a(t) = [\,\hat{a}_\alpha(t, \zeta_a(t)) -$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\Gamma^\alpha_{\zeta_\alpha(t)}(\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot, \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t)))]dt +$$
$$+ \hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))d\boldsymbol{w}(t);$$

$$d\hat{\eta}_a(t) + \Gamma^\alpha_{\zeta_\alpha(t)}(d\zeta_\alpha(t), \hat{\eta}_\alpha(t)) =$$
$$= \mathrm{tr}\,\{\Gamma^\alpha_{\zeta_\alpha(t)}(\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot, \Gamma^\alpha_{\zeta_\alpha(t)}(\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot, \hat{\eta}_\alpha(t)) -$$
$$-\Gamma^{\alpha'}_{\zeta_\alpha(t)}(\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot)(\hat{A}_\alpha(t, \zeta_\alpha(t))\cdot, \hat{\eta}_\alpha(t))\}$$

və $A = 0$ olduqda vektor meydanı ilə təyin olunan trayektoriya boyunca paralel köçürtməyə gətirilir.

Tenzorların diffuziya prosesinə uyğun vektor laylarının kəsiklər fəzasında xətti evolyusion ailəsi müvafiqdir, bu ailə vektor laylarının kəsiklərində parabolik tənliklərin həlləri üçün Feynman – Kas düsturunun ümumiləşmiş forması olan düsturla təyin olunur və bu həllər parabolik sistemin lokalizasiyaları üçün kovariant törəmələrə çevrilir.

Üzərində hamar strukturla uzlaşdırılmış qrup strukturu təyin olunmuş hamar çoxobrazlı Li qrupu adlanır. Li qrupunda əmsalları qruplarla yerinidəyişmələrə nəzərən invariant stoxastik differensial tənliklərə baxılır. Belə tənliklərin həlləri stoxastik multiplikativ inteqralın xüsusi konstruksiyası vasitəsilə ifadə olunur (bax, [3], [8]).

V. Hamar ölçülər. Kolmoqorov düz düsturu.

$\mathfrak{M}(X)$ – hamar X çoxobrazlısı üzərində həqiqi sonlu ölçülərin vektor fəzası olsun. Bu fəzanın elementləri hamar funksiyalar fəzası $C_n(X)$ -də xətti kəsilməz $\langle\varphi, \mu\rangle = \int_X \varphi(x)\,\mu(dx)$ funksionallarını doğurur. Bu isə funksiyalar üzərində müxtəlif əməlləri ölçülər üçün də təyin etməyə imkan yaradır, məs., $\langle\nabla_z\varphi, \mu\rangle = -\langle\varphi, \nabla_z\mu\rangle$ vektor meydanı boyunca kovariant differensiallama: $\mu \mapsto \nabla_z\mu$ əməlini. Əgər $\nabla_z\mu$ ölçüsü vardırsa və μ -yə nəzərən mütləq kəsilməzdirsə, onda $\rho(\mu, z, x) = (\nabla_z\mu)(dx)/\mu(dx)$ sıxlığı μ -nün z boyunca loqarifmik törəməsi adlanır. Hamar loqarifmik törəməsi olan

ölçüyə h a m a r ö l ç ü deyilir. Sonluölçülü Riman çoxobrazlısında hamar ölçü Riman ölçüsünə nəzərən hamar $\rho(x) = \mu(dx)/\upsilon(dx)$ sıxlığına malik ölçüdür.

Hamar ölçülər çoxluğu vektor fəzalarında Qauss ölçülərini özündə saxlayır və bu çoxluq bəzi hamar inikaslıq şərtlərinin ödənilməsinə nəzərən və hamar sıxlıqla inteqrallanmaya nəzərən invariantdır.

Markov prosesi $\zeta(t)$ ölçülər fəzası $\mathfrak{M}(X)$ -də

$$U^*(t,\tau):\mu \mapsto \int_X \mu(dx)\,P(t,\tau,x)$$

inikaslarının xətti evolyusion ailəsini doğurur və bu ailə funksiyalar fəzasında evolyusion $U(t,\tau)$ ailəsinə nəzərən qoşma ailədir. Diffuzion proses üçün bu ailənin doğuran operatoru $\widetilde{\mathfrak{A}}$ -ya nəzərən qoşma operatordur və hamar ölçülər üzərində daralma xüsusiyyəti kimi 2-ci tərtib differensial $\mathfrak{A}^*$ operatoruna malikdir. Bu halda $\mu(t) = U^*(t_0,t)\,\mu_0$ ölçüsü

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mathfrak{A}^*(t)\mu, \quad \mu(t_0) = \mu_0 \qquad (2)$$

tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllidir; (2) baxılan diffuzion prosesin K o l m o q o r o v d ü z t ə n l i y i (və ya F o k k e r – P l a n k t ə n l i y i), $P(t_0,t,x,\cdot)$ uyğun olaraq, bu tənliyin fundamental həlli adlanır. Sonluölçülü halda baxılan tənliyi ehtimalın keçid sıxlığı terminləri vasitəsilə yazmaq olar:

$$p(t_0,t,x,y) = P(t_0,t,x,dy)/\upsilon(dy).$$

Göstərilən həllər, ümumiyyətlə, ümumiləşmiş həllərdir və bunların hamarlılıq şərtlərini aydınlaşdırmaq da tələb olunur. Keçid ehtimallarının hamarlılığının tədqiqinə ehtimali yanaşmanı P. Mallyaven [6]-da göstərmişdir. Bu yanaşma sonradan tədqiqatların geniş axınına səbəb oldu, bu yanaşma ona əsaslanır ki, stoxastik tənlik Qauss ölçülü fəzanın bu tənliyin həllinin aid olduğu çoxobrazlıya inikasını doğurur; bu inikas müəyyən mənada hamardır və buna görə də, Qauss ölçüsünün obrazı hamar ölçüdür.

VI. Stoxastik differensial həndəsəyə N. N. Çentsov və S. Amarinin inkişaf etdirmiş olduqları statistik nəticələr nəzəriyyəsində differensial həndəsə metodlarının tətbiqi üzrə araşdırmaları da aid etmək təbiidir (bax, [18], [19]).

Əd.: [1] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] İ t o K., «Nagoya Math. J.», 1950, v. 1, p. 35–47; [3] М а к к и н Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972; [4] К а с М., «Amer. Math. Mon.», 1966, v. 73, p. 1–23; [5] М о л ч а н о в С. А., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 1, с. 3–59; [6] M a l l i a v i n P., Géometrie differentielle stochastique, Montreal, 1978; [7] Б е л о п о л ь с к а я Я. И., Д а л е ц к и й Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 3, с. 95–142; [8] Д а л е ц к и й Ю. Л., Б е л о п о л ь с к а я Я. И., Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия, К., 1989; [9] E l w o r t h y K. D., Stochastic differential equations on manifolds, Camb. – [a. o], 1982; [10] Л е н г С., Введение в теорию дифференциальных многообразий, пер. с англ., М., 1967; [11] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [12] Д а л е ц к и й Ю. Л., Ф о м и н С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М., 1983; [13] İ t o K., в кн.: Proceedings International Congress of Mathematicians, [Uppsala], 1963, p. 536–39; [14] Д ы н к и н Е. Б., «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, № 6, с. 1264–67; [15] B i s m u t J.-M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 56, S. 469–505; [16] В а т а н а б э С., И к э д а Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [17] Д а л е ц к и й Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3, с. 87–111; [18] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [19] A m a r i S., «Lect. Notes in Statist.», 1985, v. 28, p. 1–290.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK « стохастическое дифференциальное уравнение; stochastic differential equation, SDE » – *stoxastik differensial* və *stoxastik inteqrallardan* istifadə edən, *təsadüfi proseslərin* seçimi funksiyaları üçün tənlikdir. Ən sadə S. d. t.-lər Viner prosesi üzrə stoxastik differensiallardan istifadə edir. $X(t)$, – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında $t \in \mathbb{R}_+$ qiymətlərində təyin olunmuş, $\mathbb{R}^m$ faza fəzasında təsadüfi proses, $\mathcal{A}_t$, – $X(s)$, $s \le t$ -in doğurduğu σ – cəbr, $(\mathcal{A}_t)_{t\ge 0}$ – axın olsun. Fərz olunur ki, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ -dən $\mathbb{R}^m$ -ə $a(t,x)$ və $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ -dən $L(\mathbb{R}^m)$ -ə $\mathcal{B}(t,x)$ funksiyaları, elə ölçülən və $(\mathcal{A}_t)$ ilə uzlaşdırılmış, $\mathbb{R}^m$ -də verilən elə $w(t)$ Viner prosesi vardır ki, $t_0 < t$ olduqda

$$X(t) - X(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \mathcal{B}(s, X(s))\,dw(s) \qquad (1)$$

bərabərliyi doğrudur. Onda $X(t)$ prosesi

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \mathcal{B}(t, X(t))\,dw(t) \qquad (2)$$

s t o x a s t i k d i f f e r e n s i a l t ə n l i y i n i ödəyir, deyilir. Adətən, Viner prosesi $w(t)$-nin və $a(t,x)$ və $\mathcal{B}(t,x)$ funksiyalarının verildiyi fərz olunur; (2) tənliyinin həllinin varlığı üçün şərtlər, belə həllin başlanğıc şərt ödənildikdə yeganəliyi öyrənilir.

T e o r e m 1. Fərz olunur ki, $a(t,x)$ və $\mathcal{B}(t,x)$ ölçülən funksiyalardır və l o k a l L i p ş i t s ş ə r t i n i ödəyirlər, yəni: hər bir $c > 0$ üçün elə l_c sabiti vardır ki, $|x| \le c$, $|y| \le c$, $t \le c$ olduqda

$$|a(t,x) - a(t,y)| + \|\mathcal{B}(t,x) - \mathcal{B}(t,y)\| \le l_c |x - y|.$$

Onda $X(0) = X_0$ başlanğıc şərtini ödəyən (2) tənliyinin həlli, X_0 $w(t)$-dən asılı olmadığı halda, stoxastik ekvivalentlik dəqiqliyi ilə yeganədir, yəni iki həll bir-birilə stoxastik ekvivalentdirlər. Əgər hər hansı k üçün $|a(t,x)| + \|\mathcal{B}(t,x)\| \le k(1+|x|)$ – xətti məhdudluq şərti ödənilərsə, onda $w(t)$-dən asılı olmayan ixtiyari $X(0) = X_0$ üçün (2) tənliyinin aşağıdakı şərtləri ödəyən həlli $X(t)$ vardır: a) $X(t)$ sanki yəqin kəsilməzdir; b) $k \in Z_+$ üçün elə $c_k > 0$ və $\alpha_k > 0$ sabitləri vardır ki,

$$\mathbf{M}\left(|X(t)|^k |X(0)|\right) \le c_k e^{\alpha k t}\left(1 + |X(0)|\right)^k;$$

c) $X_{t_0 x}(t)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^m$ ilə $X(t_0) = x$ başlanğıc şərtini ödəyən (2) tənliyinin $[t_0, \infty)$ intervalında həlli işarə olunarsa, onda $0 \le t_0 < t$ olduqda $X(t) = X_{t_0 X(t_0)}(t)$ olur. ç) $X(t)$ keçid ehtimalı

$$P(t_0, x, t, B) = P\{X_{t_0 x}(t) \in B\}$$

olan Markov təsadüfi funksiyasıdır;

d) əgər əlavə olaraq, $a(t,x)$ və $\mathscr{B}(t,x)$ t üzrə kəsilməz olarsa, onda $X(t)$ diffuzion prosesdir, $a(t,x)$ isə onun aparı əmsalı, $\mathscr{B}(t,x)\mathscr{B}^*(t,x)$ diffuziya operatorudur.

Q e y d. Varlığı teorem 1-də hökm olunan həll X_0 və $w(t)$ prosesinin doğurduğu $\mathscr{A}_t(X_0, w)$ axınına nəzərən ölçülən prosesdir. Belə həll g ü c l ü h ə l l adlanır. Əgər $\mathscr{B}(t,x)$ operatoru cırlaşmırsa, onda hər bir güclü həll yeganədir.

T e o r e m 1-in şərtlərində (2) tənliyinin həllini ardıcıl yaxınlaşmalar metodu ilə və

$$X_0(t) = X_0,$$

$$X_n(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t \mathscr{B}(s, X_{n-1}(s))\, d\,w(s),\ n \geq 1$$

olduğunu fərz edərək almaq olar. Bu ardıcıl yaxınlaşmalar $X(0) = X_0$ başlanğıc şərtilə (2) tənliyinin həllinə kvadratik orta mənada yığılır. Əgər $a(t,x)$ və $\mathscr{B}(t,x)$ kəsilməz olarlarsa, onda differensial tənliyi sonlu fərqlər tənliyi ilə əvəz etməklə həlli tapmaq olar: fərz olunur ki,

$$X^h(t) = X^h(kh),\ kh \leq t < (k+1)h,\ X^h(0) = X_0,$$

$$X^h((k+1)h) = X^h(kh) + a(kh, X^h(kh))h + \mathscr{B}(kh, X^h(kh))[w((k+1)h) - w(kh)],\ k \geq 0, \quad (3)$$

onda $h \to 0$ olduqda $X^h(kh)$ kvadratik orta mənada $X(t)$-yə yığılır (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; s o n l u f ə r q l i a p p r o k s i m a s i y a).

(2) tənliyinin güclü olmayan həlləri, ümumiyyətlə, z ə i f h ə l l ə r adlanır (belə həllər üçün $\mathscr{A}_t^{X_0, w}$ – ölçülənlik haqqında müzakirə aparılmır). Qeyd etmək lazımdır ki, əgər (2) tənliyinin iki ixtiyari $X_1(t)$ və $X_2(t)$ həllərinin paylanmaları eyni olarsa, onda (2)-nin həlli z ə i f y e g a n ə h ə l l adlanır.

T e o r e m 2. $a(t,x)$ və $\mathscr{B}(t,x)$ funksiyalarının dəyişənləri toplusu üzrə kəsilməzliyi və $\det \mathscr{B}(t,x) \neq 0$ fərz olunur, onda (2) tənliyinin həlli zəif yeganə həldir; əgər xətti məhdudluq şərti ödənilərsə, (2) tənliyinin həlli vardır və bu həll teorem 1-in a), b), ç), d) şərtlərini ödəyir.

Zəif həllərə baxıldıqda (2) tənliyinin həlli, təbii olaraq, həllə uyğun olan ölçü kimi anlaşılır. Belə ölçü, teorem 2-nin şərtləri ödənildiyi halda, (3) düsturu ilə qurulmuş $X^h(t)$ proseslərinə uyğun μ_h ölçülərinin zəif limiti kimi alınır.

Bax: *Stoxastik differensial tənlik*; g ü c l ü h ə l l, *Stoxastik differensial tənlik*; h ə l l ə r i n g ü c l ü y e g a n ə l i y i, *Stoxastik differensial tənlik*; z ə i f h ə l l, *Stoxastik differensial tənlik*; h ə l l ə r i n z ə i f y e g a n ə l i y i.

(2) tipli tənliklərə aid olan məsələlər arasında həllin parametr–dən asılılıq xarakterinə də baxılır, bu şərtlə ki, tənliyin əmsalları və başlanğıc şərt bu parametrdən asılı olsun. Məs., həllin başlanğıc verilənlərdən asılılığı da öyrənilir.

T e o r e m 3. $a(\theta,t,x)$, $\mathscr{B}(\theta,t,x)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ funksiyalarının aşağıdakı şərtləri ödədiyi fərz olunur:

1) elə k sabiti vardır ki,

$$|a(\theta,t,x)| + \|\mathscr{B}(\theta,t,x)\| \leq k(1+|x|)$$

2) bütün $c > 0$ üçün elə $l_c > 0$ vardır ki, $|x| \leq l_c$, $|y| \leq l_c$, $t \leq c$ olduqda

$$|a(\theta,t,x) - a(\theta,t,y)| + \|\mathscr{B}(\theta,t,x) - \mathscr{B}(\theta,t,y)\| \leq l_c|x-y|,$$

3) t, x üzrə lokal məhdud funksiyalar olan

$$\frac{\partial}{\partial\theta} a(\theta,t,x),\ \frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{B}(\theta,t,x),\ a'_x(\theta,t,x),\ \mathscr{B}'_x(\theta,t,x)$$

törəmələri vardır.

$X_\theta(t)$ kvadratik orta törəməsi $\frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(0)$-nın varlığı fərz olunan, başlanğıc qiyməti $X_\theta(0)$ ilə verilən

$$d\,X_\theta(t) = a(\theta,t,X_\theta(t))dt + \mathscr{B}(\theta,t,X_\theta(t))d\,w(t) \quad (4)$$

S. d. t.-nin həlli olsun. Onda ehtimal görə yığılma mənasında $\frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(t)$ törəməsi vardır və o,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(t) = \frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(0) + \int_0^t a'_\theta(\theta,s,X_\theta(s))\,ds + \int_0^t \mathscr{B}'_\theta(\theta,s,X_\theta(s))d\,w(s) + \int_0^t a'_x(\theta,s,X_\theta(s))\frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(s)ds + \int_0^t \mathscr{B}'_x(\theta,s,X_\theta(s))\left[\frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(s), d\,w(s)\right] \quad (5)$$

xətti stoxastik inteqral tənliyini ödəyir ($[\cdot,\cdot]$ – qiymətləri $\mathbb{R}^m$-dən olan bixətti formadır).

Q e y d. $\frac{\partial}{\partial\theta} X_\theta(t)$ üçün (5) tənliyi təsadüfi əmsallarlı xətti tənlik olub, (2) tənliyindən daha ümumidir. (4) tənliyini (1)-ə oxşar, inteqral formada yazıb, sonra onu θ üzrə formal differensiallamaqla (5) tənliyini almaq olar. (5)-i sonra yenidən formal olaraq θ üzrə differensialladıqda və bu halda $X_\theta(0)$, $a(\theta,s,x)$, $\mathscr{B}(\theta,s,x)$ funksiyalarından alınan bütün törəmələrin s, x üzrə lokal məhdudluğunun varlığını tələb kimi qoyduqda, $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} X_\theta(t)$ ehtimala görə yığılma mənada vardır və o, alınan tənliyi ödəyir. Bu differensiallama prosesini lazım olan törəmələrin olduğu və onların lokal məhdudluğu ödənildiyi ana qədər davam etdirmək olar.

$A(t)$ və $\mathscr{B}(t)$ $L(\mathbb{R}^m)$ faza fəzası ilə, $(\mathscr{A}_t)$ axını ilə uzlaşdırılmış təsadüfi proseslər, $\boldsymbol{w}(t)$ bu axına nəzərən Viner prosesi olarsa, təsadüfi əmsallarlı, $\mathbb{R}^m$-də ümumi xətti tənlik aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$d\,Y(t) = A(t)Y(t)\,dt + \mathscr{B}(t)Y(t)\,d\,\boldsymbol{w}(t). \qquad (6)$$

$\mathscr{A}_0$ – ölçülən $Y(0) = Y_0$ başlanğıc şərtini və (6) tənliyini ödəyən, $(\mathscr{A}_t)$ – uzlaşdırılmış, $\mathbb{R}^m$ – qiymətli $Y(t)$ prosesini tapmaq tələb olunur.

$$Z(t) = \int_0^t A(s)\,ds + \int_0^t B(s)\,d\,\boldsymbol{w}(s)$$

olsun və fərz olunur ki, $A(s)$ və $B(s)$-ə görə inteqrallar vardır. Onda (6) tənliyinin həllini aşağıdakı çoxqat inteqrallar vasitəsilə yazmaq olar:

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t dZ(s)Y_0 + \iint\limits_{0<s_1<s_2<t} dZ(s_1)\,dZ(s_2)\,Y_0 + \ldots + \int\limits_{0<s_1<\ldots<s_n<t} \ldots \int dZ(s_1)\ \ldots\ dZ(s_n)Y_0 + \ldots .$$

(2) tənliyinin bilavasitə ümumiləşməsi diffuzion tipli tənliklərdir. $C_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^m)$, – $\mathbb{R}_+$-da $\mathbb{R}^m$ – qiymətli kəsilməz funksiyaların lokal müntəzəm yığılma topologiyası və Borel çoxluqlarının σ – cəbri C ilə verilmiş fəza olsun. $C_t \subset C$, – $\{x(\cdot) : x(s) \in B\}$, $s \le t$, $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$ çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbr olsun. $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} \otimes C$-yə nəzərən ölçülən $f(t, x(\cdot))$ funksiyası bütün $t > 0$ üçün C_t – ölçülən olarsa, bu funksiya qeyri–antisipativ funksiya adlanır. $a(t, x(\cdot))$ və $\mathscr{B}(t, x(\cdot))$ – qiymətləri $\mathbb{R}^m$ və $L(\mathbb{R}^m)$-dən olan qeyri – antisipativ funksiyalar olsun. Qiymətləri $\mathbb{R}^m$-dən olan $X(t)$ kəsilməz prosesi üçün

$$d\,X(t) = a(t, X(\cdot))\,dt + \mathscr{B}(t, X(\cdot))\,d\,\boldsymbol{w}(t) \qquad (7)$$

tənliyinə baxılır. (7) tənliyinin həlli $X(0) = X_0$-ın $\boldsymbol{w}(t)$-dən asılı olmayan verilmiş başlanğıc qiymətində axtarılır.

Teorem 4. Fərz olunur ki, $a(t, x(\cdot))$ və $\mathscr{B}(t, x(\cdot))$ aşağıdakı şərti ödəyirlər: bütün $c > 0$ üçün elə $l_c > 0$ vardır ki,

1) bütün $x(\cdot), y(\cdot) \in C_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^m)$ üçün $\|x(\cdot)\|_c \le c$, $\|y(\cdot)\|_c \le c$ olduqda,

$$\|a(\cdot, x(\cdot)) - a(\cdot, y(\cdot))\|_c + \|B(\cdot, x(\cdot)) - B(\cdot, y(\cdot))\|_c \le \le \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_c$$

münasibəti ödənilir, burada $\|f\|_c = \sup\limits_{t \le c} \|f_t\|$;

2) $\|a(\cdot, x(\cdot))\|_c + \|B(\cdot, x(\cdot))\|_c \le l_c\left(\|x(\cdot)\| + 1\right)$ münasibəti bütün $x(\cdot) \in C_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^m)$ üçün ödənilir.

Onda (7) tənliyinin həlli vardır və bu həll yeganədir.

Q e y d. Bu həll güclü həll olacaqdır. 1) şərti əvəzinə əmsalların bütün dəyişənlər toplusu üzrə kəsilməzliyini tələb edərək, 2) şərtini saxladıqda həllin varlığını isbat etmək olar. (7) şəklində tənlik üçün momentlərin statistik qiymətlərini almaq, parametrdən asılı (7) tənliklərinə baxmaq və teorem 3-ün analoqunu müəyyən etmək olar.

(2) tənliyinin digər ümumiləşmələri təsadüfi ölçülər üzrə stoxastik inteqrallarla əlaqədar olan yeni stoxastik differensialların əlavə edilməsilə bağlıdır; belə tənliklərlə kəsilən təsadüfi proseslərin trayektoriyalarını almaq olur. $(U, \mathscr{U})$ – hər hansı köməkçi ölçülən fəza olsun. $(\mathbb{R}_+ \times U,\ \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathscr{U})$ fəzasında $\mathbf{M}\,p_i(dt \times du) = m_i(dt \times du)$ şərtini ödəyən iki asılı olmayan $p_i(dt \times du),\ i = 1, 2$ Puasson ölçülərinə baxılır, burada m_i – bütün $t > 0$ üçün $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathscr{U}$-da $m_i([0, t] \times U) < \infty$ şərtini ödəyən, σ – sonlu ölçülərdir, $q_i = p_i - m_i$. $f_i(t, x, u)$, $i = 1, 2$ isə $\mathbb{R}^m$-də $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U$-dan olan ölçülən funksiyalar olsun. Fərz olunur ki, $a(t, x)$ və $\mathscr{B}(t, x)$ (2) tənliyindəki kimi funksiyalardır, $\mathbb{R}^m$-də verilən Viner prosesi $\boldsymbol{w}(t)$ isə p_i, $i = 1, 2$ ölçülərindən asılı deyildir. $t_1 < t_2$ olduqda

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s, X(s))\,ds + \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{B}(s, X(s)\,d\,\boldsymbol{w}(s)) + + \int_{t_1}^{t_2} \int_U f_1(s, X(s), u)\,q_1(ds \times du) + + \int_{t_1}^{t_2} \int_U f_2(s, X(s), u)\,p_2(ds \times du) \qquad (8)$$

münasibətini ödəyən, sağdan kəsilməz və 2-ci növ kəsilməsi olmayan, $\mathbb{R}^m$-də təyin olunan $X(t)$ prosesi axtarılır. (8) münasibəti differensial formada aşağıdakı şəkildə olur:

$$d\,X(t) = a(t, X(t))\,dt + \mathscr{B}(t, X(t))\,d\,\boldsymbol{w}(t) + + \int_U f_1(t, X(t), u)\,q_1(dt \times du) + + \int_U f_2(t, X(t), u)\,p_2(dt \times du). \qquad (9)$$

(9) tənliyinin həlli verilmiş $X(0)$ başlanğıc şərtində axtarılır və bu həll elə olmalıdır ki, $X(s)$, $s \le t$ ilə doğurulan $\mathscr{A}_t^X$ σ – cəbrləri $s > t$ olduqda $\boldsymbol{w}(s) - \boldsymbol{w}(t)$ fərqindən və $[t, \infty) \times U$-da p_1, p_2 ölçülərindən asılı olmasın.

Teorem 5. Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

1) hər bir $c > 0$ üçün elə $l_c > 0$ vardır ki, $|x| \le c$, $|y| \le c$ olduqda

$$|a(t, x) - a(t, y)| + \|\mathscr{B}(t, x) - \mathscr{B}(t, y)\| + + \left(\int_U |f_1(t, x, u) - f_1(t, y, u)|^2\,m_1(du)\right)^{1/2} \le l_c|x - y|;$$

2) $f_2(t,x,u)$ t,x-ə üzrə $m_2(du)$ ölçüsünə nəzərən kəsilməzdir, onda verilmiş $X(0)$ başlanğıc şərtində (9) tənliyinin həlli yeganədir.

3) əgər, bundan əlavə, hər hansı $k>0$ qiymətində bütün x-lər üçün

$$|a(t,x)|+\|\mathscr{B}(t,x)\|+$$
$$+\left(\int_U |f_1(t,x,u)|^2\, m_1(du)\right)^{1/2} \le k(1+|x|)$$

olarsa, onda (9) tənliyinin həlli vardır. Bu həll keçid ehtimalı

$$P(t_0,x,t,B)=P\{X_{t_0x}(t)\in B\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan Markov təsadüfi funksiyasıdır, burada $X_{t_0x}(t)$ – başlanğıc şərti $X_{t_0x}(t_0)=x$ olan (9) tənliyinin $[t_0,\infty)$-da həllidir.

Q e y d l ə r. Teorem 5-in şərtlərində həll güclü həll olacaqdır, yəni $X(t)$ $w(s)$, $s\le t$ və $[0,t]\times U$-da p_i-lərin qiymətlərilə ilə doğurulan $\mathscr{A}_t$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən prosesdir. $f_2\equiv 0$ olduğu halda həlli ardıcıl yaxınlaşmalar metodu ilə qurmaq olur. (8)-in sağ tərəfini $F(X(\cdot),t_1,t_2)$ ilə işarə edərək, $X_0(t)=X(0)$, $X_n(t)=X(0)+F(X_{n-1}(\cdot),0,t)$ götürdükdə, $n\to\infty$ olduqda, $X_n(t)$ (9) tənliyinin həlli $X(t)$-yə yığılır ($f_2=0$ olduqda). Əgər $f_2\ne 0$ olarsa, həll aşağıdakı qaydada qurulur. $f_2=0$ olduğu halda başlanğıc şərti $\hat{X}(t_0,x,t)=x$ olan (9) tənliyinin $[t_0,\infty)$-da həlli $\hat{X}(t_0,x,t)$ ilə işarə olunur. $p_2([0,t]\times U)$ – parametri $m_2([0,t]\times U)$ olan Puasson prosesidir. $\tau_1<\tau_2<\dots$ – bu prosesin bütün sıçrayış anları olsun. Onda

$$X(t)=\hat{X}(0,X(0),t),\quad t<\tau_1,$$
$$X(\tau_1)=\hat{X}(0,X(0),\tau_1)+f_2(\tau_1,\hat{X}(0,X(0),\tau_1)u_1),\dots,$$
$$X(t)=\hat{X}(\tau_k,X(\tau_k),t),\quad \tau_k\le t<\tau_{k+1},$$
$$X(\tau_{k+1})=\hat{X}(\tau_k,X(\tau_k),\tau_{k+1})+$$
$$+f_2(\tau_{k+1},\hat{X}(\tau_k,X(\tau_k),\tau_{k+1}),u_{k+1})$$

münasibətləri doğrudur, burada $u_1,u_2,\dots,$ – U-dan olan elə təsadüfi nöqtələrdir ki,

$$p_2(B)=\sum I_{\{(\tau_k,u_k)\in B\}},\ B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}\otimes U.$$

(2) tənliyi üçün olduğu kimi (9) tənliyi üçün də zəif həllərə baxmaq olar.

T e o r e m 6. Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

a) $a(s,x)$, $\mathscr{B}(s,x)$ – ölçülən, lokal məhdud, x üzrə kəsilməz funksiyalardır;

b) bütün s-lər üçün

$$\lim_{y\to x}\int |f_1(s,x,u)-f_2(s,y,u)|^2\, m_1(du)=0$$

münasibəti ödənilir;

c) teorem 5-in 2) və 3) şərtləri ödənilir. Onda $X(0)$ verildiyi halda (9) tənliyinin həlli vardır.

(9) tənliyinin həllinin zəif yeganəlik şərtləri aşağıdakı kimidir. $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$-də

$$n_k(t,x,B)=m_k(\{u: f_k(t,x,u)\in B\}),\quad B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m},$$
$$\tilde{n}(t,x,B)=$$
$$=\int |y-x|^2\left(1+|y-x|^2\right)^{-1} n_1(t,x,dy)+n_2(t,x,dy)$$

ölçüləri daxil olunmuşdur.

T e o r e m 7. Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

a) $a(t,x)$ və $\mathscr{B}(t,x)$ və $\mathscr{B}^{-1}(t,x)$ kəsilməz funksiyalardır;

b) teorem 5-in 3) şərti ödənilir;

c) $\mathbb{R}^m$-də elə $n_1(dz)$ və $n_2(dz)$ ölçüləri vardır ki,

$$n_i(t,x,\cdot)<<n_i(\cdot)\quad \text{və}\quad \int |z|^2\, n_1(dz)+n_2(\mathbb{R}^m)<\infty,$$

$$\int\left(\frac{dn_1(t,x,\cdot)}{dn_1(\cdot)}(z)\right)^2|z|^2 n_1(dz)+\int\left(\frac{dn_2(t,x,\cdot)}{dn_2(\cdot)}(z)\right)^2 n_2(dz)$$

– lokal məhdud funksiyadır;

ç) bütün $T>0$, $r>0$ üçün

$$\int_0^T\int_{|x|\le r}\tilde{n}(t,x,A-x)\,dt\,dx$$

– A-nın funksiyası kimi Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz funksiyadır. Onda $X(0)$ verildiyi halda (9) tənliyinin həlli vardır və bu həll zəif yeganə həldir; bu həll keçid ehtimalı teorem 5-də təyin olunduğu kimi təyin olunan Markov təsadüfi funksiyasıdır.

Q e y d. (9) tənliyinin əmsallarının t-dən asılı olmadığı fərz olunur. Onda müvafiq keçid ehtimalı bircins olacaqdır. Əgər $T_t f$ bu keçid ehtimalı ilə verilən bircins Markov prosesinə uyğun semi – qrup olarsa, onda bu semi – qrupun doğuran operatoru A $\mathbb{R}^m$-də verilən ikiqat kəsilməz differensiallanan bütün funksiyalarda

$$A\varphi(x)=(a(x),\varphi'(x))+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathscr{B}(x)\mathscr{B}^*(x)\varphi''(x)+$$
$$+\int[\varphi(x+f_1(x,u))-\varphi(x)-(\varphi'(x+f_1(x,u))]\,m_1(du)+$$
$$+\int[\varphi(x+f_2(x,u))-\varphi(x)]\,m_2(du)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Belə Markov prosesləri l o k a l s o n s u z b ö l ü n ə n M a r k o v p r o s e s l ə r i adlanır. (9) tənliyinin əmsalları qeyri – antisipativ funksiyalar olduqda (9) tənliyinin ümumiləşdirilməsi mümkündür. Bu halda sağdan kəsilməz, 2-ci növ kəsilməsi olmayan $x(t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^m$ funksiyalarının fəzası – $D_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^m)$ fəzasına baxılır. Bu fəzada I – yığılmanın doğurduğu topologiya daxil etmək olar. Bu topologiya belə təyin olunur: əgər elə ciddi artan $\lambda_n(t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,

$\lambda_n(0)=0$ funksiyaları ardıcıllığı varsa ki, $|\lambda_n(t)-t|+$ $+|x_n(t)-x_n(\lambda(t))|\to 0$ lokal müntəzəm yığılma olsun, onda $x_n(t)\xrightarrow{I}x(t)$ münasibəti doğrudur. D, – $D_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R}^m)$-də Borel çoxluqlarının σ – cəbri, $D_t\in D$, – $\{x(\cdot):x(s)\in B\}$ çoxluqları ilə doğurulmuş σ – cəbr olsun, $s\le t$, $B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. (9) tənliyinə $a(t,x(\cdot))$, $\mathscr{B}(t,x(\cdot))$, $f_i(t,x(\cdot),u)$ şəklində əmsalları yazmaq olar. Güclü və zəif həllərin varlığı şərtlərini 5, 6, 7 teoremlərinin şərtlərinin kombinasiyası ilə almaq olar.

Ən ümumi S. d. t., stoxastik inteqrallara kəsilməz martinqallar, martinqal ölçülər və mənfi olmayan uzlaşdırılmış ölçülər üzrə baxıldıqda alınır. Bu halda tənliyin əmsalları təsadüfən asılı olur. $\{\Omega,\mathscr{A},\mathscr{A}_t,\mathbf{P}\}$ – filtrasiyası $(\mathscr{A}_t)$ olan ehtimal fəzası olsun. $\mathscr{W}$ və $\mathscr{P}$ ilə $\mathbb{R}_+\times\Omega$-da tamamilə ölçülən və öngörül çoxluqlar σ – cəbrləri işarə olunur. Aşağıdakıların verildiyi fərz olunur:

1) $\mathbb{R}^m$-də kəsilməz, məhdud variasiyalı, uzlaşdırılmış (deməli, $\mathscr{P}$ – ölçülən) $\alpha(t,\omega)$ prosesi;

2) operator xarakteristikası $\mathscr{B}(t)$ olan, $\mathbb{R}^m$ – qiymətli kəsilməz $\beta(t,\omega)$ martinqalı (bu $\mathscr{P}$ – ölçülən, $L(\mathbb{R}^m)$-də artan prosesdir);

3) $\mathbb{R}_+\times U$-da ortoqonal qiymətləri $\gamma(t,B)$ olan ədədi martinqal ölçüsü $g(t,B)$; bu ölçünün kvadratik xarakteristikasının t üzrə kəsilməz olduğu fərz olunur;

4) $\mathbb{R}_+\times U$-da elə sonlu nöqtəvi $\delta(C)$ ölçüsü ki, $\delta([0,t]\times C)$ – sıçrayışları 1-ə bərabər, sağdan kəsilməz, tamqiymətli, $\mathscr{A}_t$ – uzlaşdırılmış prosesdir; $g(t,B)$ və $\delta([0,t]\times C)$ eyni zamanda sıçrayış almır;

5) $a(t,\omega,x)$, – $\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^m$-dən $\mathbb{R}^m$-ə $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$ – ölçülən funksiya;

6) $A(t,\omega,x)$, – $\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^m$-dən $L(\mathbb{R}^m)$-ə $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$ – δ – ölçülən funksiya;

7) $\varphi(t,\omega,x,u)$ və $\psi(t,\omega,x,u)$, – $\mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}^m\times U$-dan $\mathbb{R}^m$-ə $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}\otimes U$ – ölçülən funksiyaları;

8) $\mathscr{W}$ – ölçülən $\mathbb{R}^m$ – qiymətli $Z(t)$ funksiyası.

$$X(t)=Z(t)+\int_0^t a(s,\omega,X(s))\,d\alpha(s,\omega)+$$
$$+\int_0^t A(s,\omega,X(s))\,d\beta(s)+$$
$$+\int_0^t\int\varphi(s,\omega,X(s),u)\,\gamma(ds\times du)+$$
$$+\int_0^t\psi(s,\omega,X(s),u)\,\delta(ds\times du) \qquad (10)$$

münasibətini ödəyən $\mathscr{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ funksiyasını tapmaq tələb olunur. $\rho(t)=|\alpha|(t)+\operatorname{tr}B(t,\omega)+\int\varphi(u)g(t,du)$ işarələməsində $\varphi>0$ elə funksiyadır ki, $\rho(t)$ sonludur. Onda $X(t)$ kəsilməz artan prosesdir.

$$G(s,B)=\frac{dg(s,B)}{d\rho(s)}$$

olsun.

T e o r e m 8. Aşağıdakı şərtlərin ödənildiyi fərz olunur:

1) $Z(t)$ lokal məhduddur,

2) bütün $c>0$ üçün elə $\mathscr{P}$ – ölçülən artan $\lambda_r(t)$ funksiyası vardır ki, $|x|\le r$, $|y|\le r$ olduqda

$$|a(t,\omega,x)-a(t,\omega,y)|^2+\|B(t,\omega,x)-\mathscr{B}(t,\omega,y)\|^2+$$
$$+\int|\varphi(t,\omega,x,u)-\varphi(t,\omega,y,u)|^2\,G(t,du)\le$$
$$\le\lambda_r(t)|x-y|^2.$$

Onda (10)-un lokal məhdud $\mathscr{W}$ – ölçülən həlli yeganədir. Hətta, əgər:

3) elə $\mathscr{P}$ – ölçülən artan $\varkappa(t)$ funksiyası olarsa ki,

$$|a(t,\omega,x)|^2+\|B(t,\omega,x)\|^2+$$
$$+\int|\varphi(t,\omega,x,u)|^2\,G(t,du)\le\varkappa(t)(1+|x|^2)$$

şərti ödənilsin, onda (10)-un lokal məhdud $\mathscr{W}$ – ölçülən həlli vardır.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, K., 1982; [2] F r i e d m a n A., Stochastic differential equations and applications, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1975-76; [3] S t r o o c k D. W., V a r a d h a n S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [4] I k e d a N., W a t a n a b e S., Stochastic differential equations and diffusion processes, Amst. – [a. o], 1981.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; d i f f u z i o n p r o s e s d o ğ u r a n « **стохастическое дифференциальное уравнение;** п о р о ж д а ю щ е е о б о б щ е н н ы й д и ф ф у з и о н н ы й п р о ц е с с; **stochastic differential equation** g e n e r a t i n g g e n e r a l i z e d d i f f u s i o n p r o c e s s », – həlli ümumiləşmiş diffuzion proses olan *stoxastik differensial tənlikdir.* Bu halda zaman üzrə bircins ü m u m i l ə ş m i ş d i f f u z i o n p r o s e s – keçid ehtimalı $P(t,x,\Gamma)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ olan (Γ, – $\mathbb{R}^d$-nin Borel altçoxluğudur), aşağıdakı şərtləri ödəyən Markov prosesinə deyilir:

1) ixtiyari $\varepsilon>0$ və ixtiyari $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^d)$ üçün [$C_0(\mathbb{R}^d)$, – $\mathbb{R}^d$-də verilmiş bütün həqiqi kəsilməz finit funksiyalar çoxluğudur]

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{\{y:|y-x|>\varepsilon\}}P(\Delta t,x,dy)\right]\varphi(x)\,dx=0$$

münasibəti ödənilir;

2) hər hansı $\varepsilon>0$, bütün $\theta\in\mathbb{R}^d$ və ixtiyari $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^d)$ üçün aşağıdakı limitlər mövcuddur:

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{\{y:|y-x|\le\varepsilon\}}(y-x,\theta)\,P(\Delta t,x,dy)\right]\varphi(x)\,dx,$$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\{y:|y-x|\le\varepsilon\}}(y-x,\theta)^2\,P(\Delta t,x,dy)\right]\varphi(x)\,dx.$$

Aydındır ki, əgər $1)$ şərti ödənilərsə və $2)$-dəki limitlər hər hansı $\varepsilon>0$ üçün mövcud olarsa, onda bu limitlər bütün $\varepsilon>0$ üçün mövcuddur və ε-dan asılı deyildirlər. Bu limitlərdən birincisini $(A(\varphi),\theta)$ şəklində yazmaq olar, burada $A(\varphi)$, – $C_0(\mathbb{R}^d)$-də vektor (d – ölçülü) xətti funksionaldır; ikinci limiti $(B(\varphi)\theta,\theta)$ şəklində yazmaq olar, burada $B(\varphi)$, – $C_0(\mathbb{R}^d)$-də operator xətti funksionaldır ($B(\varphi)$, – $\mathbb{R}^d$-dən $\mathbb{R}^d$-yə operatordur), hətta aydındır ki, əgər $\varphi\ge 0$ olarsa, $B(\varphi)$ mənfi olmayan müəyyən operatordur.

Ümumiyyətlə, adi diffuzion proseslər olmayan və uyğun S. d. t.-nin həlləri olan, ümumiləşmiş diffuzion proseslərə aid m i s a l l a r.

A. Fərz olunur ki: a) qiymətləri $\mathbb{R}^d$-dən $\mathbb{R}^d$-yə xətti operatorlar olan, x üzrə Hölder şərtini ödəyən, bütün $\theta\in\mathbb{R}^d$, $x\in\mathbb{R}^d$ üçün c_1 və c_2 hər hansı sabitlər olduqda $c_1|\theta|^2\le$ $\le(b(x)\theta,\theta)\le c_2|\theta|^2$ bərabərsizliklərini ödəyən $b(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ funksiyası;

b) qiymətləri $\mathbb{R}^d$-dən olan, hər hansı $p>d$ üçün

$$\|a\|_p=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|a(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty$$

şərtini ödəyən $a(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ funksiyası verilmişdir. Onda elə ümumiləşmiş diffuzion proses vardır ki, bu proses üçün

$$A(\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}a(x)\varphi(x)\,dx,\quad B(\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(x)\varphi(x)\,dx$$

olur, ümumiləşmiş diffuzion prosesin tərifində $1)$ şərti əvəzinə $t\downarrow 0$ olduqda ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün

$$1')\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int\limits_{\{y:|y-x|>\varepsilon\}}P(t,x,dy)=o(t)$$

şərti ödənilir. Bu prosesin trayektoriyaları

$$dx(t)=a(x(t))dt+b^{1/2}(x(t))dw(t)$$

S. d. t.-nin həlləri olur, burada $w(t)$, – d – ölçülü Viner prosesi, $b^{1/2}$, – b operatorunun müsbət kvadrat köküdür.

B. **A** bəndindəki kimi $b(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ funksiyasının və $\mathbb{R}^d$-ni iki: daxili və xarici hissələrə ayıran, olduqca hamar qapalı S hipermüstəvisinin verildiyi fərz olunur. $\nu(x)$ ilə S səthinə $x\in S$ nöqtəsinə xarici normalın vahidi vektoru işarə olunmuşdur. $N(x)=$ $=b(x)\nu(x)$ vektoru $x\in S$ nöqtəsində səthə k o n o r m a l adlanır. S-də $|q(x)|\le 1$ şərtini bütün $x\in S$ üçün ödəyən, kəsilməz $q(x)$ funksiyasının verildiyi fərz olunur. Elə ümumiləşmiş diffuzion proses vardır ki, bu proses və bütün $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^d)$ üçün

$$A(\varphi)=\int\limits_S N(x)q(x)\varphi(x)\,d\sigma,\ B(\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(x)\varphi(x)\,dx$$

olur, burada birinci inteqral səth üzrə inteqraldır. Bu halda, **A** bəndində olduğu kimi bu proses $1')$ şərtini ödəyir və odur ki, onun trayektoriyalarını kəsilməz hesab etmək olar. Bundan başqa, bu trayektoriyalar

$$dx(t)=Nx(t)q(x(t))\delta_S(x(t))dt+b^{1/2}(x(t))dw(t)$$

S. d. t.-nin həlləridir, burada $\delta_S(x)$, – $\mathbb{R}^d$-də ümumiləşmiş funksiyadır və onun «sınanılan» funksiyaya təsiri bu funksiyanın S səthi üzrə inteqrallanmasına gətirilir.

C. Ümumiləşmiş diffuzion prosesi, xüsusilə də sadəcə olaraq, $b(x)\equiv\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ – vahidi operatordur), $S=\{x\in\mathbb{R}^d:(x,\nu)=0\}$, – $\mathbb{R}^d$-də hipersəth və bu hipersəth $\nu\in\mathbb{R}^d$ vahidi vektora ortoqonal olduqda, $q(x)$ isə $|q(x)|\le 1$ şərtini ödəyən, S-də kəsilməz funksiya olduğu halda vermək mümkündür. Belə prosesə uyğun funksiyalar fəzasında operatorların semi – qrupu

$$T_t\varphi(x)=T_t^0\varphi(x)+\int_0^t d\tau\int_s g(t-\tau,x,y)\,\frac{\partial T_\tau^0(y)}{\partial\nu}\,q(y)d\sigma$$

düsturu ilə təyin olunur, burada daxildəki inteqral y dəyişəni üzrə səth inteqralıdır, $\partial/\partial\nu$, – ν istiqaməti üzrə törəmədir,

$$g(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\},$$

$$T_t^0\varphi(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}g(t,x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Bu semi – qrup $\mathbb{R}^d$-də kəsilməz ümumiləşmiş diffuzion proses təyin edir və bu proses üçün

$$A(\varphi)=\nu\int\limits_{\mathbb{R}^d}q(x)\,\varphi(x)\,d\sigma,\quad B(\varphi)=\mathbf{I}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,dx$$

olur, $x(t)$-nin trayektoriyaları isə

$$dx(t)=\nu\,q(x(t))\delta_S(x(t))\,dt+dw(t)$$

S. d. t.-nin həlləridir.

$d=1$ olduqda $S=\{0\}$ olur. $q(0)=c$ ($|c|\le 1$) olduğunu fərz edərək T_t semi – qrupunu aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$T_t\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-x)^2/2t}\,\varphi(y)\,dy+$$

$$+\frac{c}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-(y+|x|)^2/2t}[\varphi(y)-\varphi(-y)]\,dy.$$

Bu prosesin keçid ehtimalının sıxlığı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$G(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-(y-x)^2/2t}+c\ \operatorname{sign}\ y\cdot e^{-(|y|+|x|)^2/2t}\right).$$

Bu prosesin trayektoriyaları aşağıdakı S. d. t.-yi ödəyirlər:

$$d x(t) = c\delta(x(t))dt + d w(t);$$

burada $\delta(x)$ – Dirak δ – funksiyasıdır. $c = +1$ $(c = -1)$ olduqda, bu proses $x = 0$ nöqtəsində sağa (sola) ani əksetməyə malik Viner prosesidir. $|c| < 1$ olduqda bu çəp Braun hərəkətidir (bax, [1]).

Əd.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Портенко Н. И., Обобщенные диффузионные процессы, К., 1982.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; genişləndirilmiş stoxastik inteqral anlayışı istifadə edən « **стохастическое дифференциальное уравнение;** использующее понятие расширенного стохастического интеграла; **stochastic differential equation** with extended stochastic integral », –

$$X = J(QX) + AX + \varphi$$

şəklində *stoxastik differensial tənlikdir*, burada $X, \varphi \in H = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, A, – H-da operator, Q, – H-dan $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+^2)$-na təsir edən operatordur. Hitsuda – Skoroxod və ya Oqava mənada genişləndirilmiş inteqral (ω, s, t) dəyişənlərinin funksiyasına (ω, s) dəyişənləri üzrə təsir edir.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; güclü həll « **стохастическое дифференциальное уравнение;** сильное решение; strong solution of a **stochastic differential equation** »:

$$d X_t = \sigma(t, X_t)\, d w_t + b(t, X_t) dt, \;\; X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin güclü həlli

$$\mathbf{P}\left\{ X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_t) d w_s + \int_0^t b(s, X_t) ds, t \geq 0 \right\} = 1$$

şərtini ödəyən, kəsilməz $\mathcal{A}_t^w$ – uzlaşdırılmış X_t prosesinə deyilir.

Güclü həllin varlığı üçün σ və b üzərinə Lipşits inteqral şərtinin qoyulması kafidir. Həllin varlığı (zəif həllin varlığı) şərtindən güclü həllin varlığı güclü yeganəlikdən alınır (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; həllərin güclü yeganəliyi).

$\mathbb{R}^d$-də məhdud ölçülən σ və b və σ – cırlaşmayan matrisi ilə verilən

$$d X_t = \sigma(t, X_t) d w_t + b(t, X_t) dt, \;\; X_0 = x$$

tənliyinin həlli – σ martisi x üzrə Lipşits şərtini, $d = 1$ olduqda isə $\alpha = 1/2$ üstlü Hölder şərtini ödəyərsə, onda güclü həll olur. $\alpha < 1/2$ olduqda isə, ümumiyyətlə, güclü həll yoxdur.

Əd.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [2] Yamada T., Watanabe S., «J. Math. Kyoto Univ.», 1971, v. 11, p. 155–67; [3] Звонкин А. К., «Матем. сб.», 1974, т. 93, № 1, с. 129–49; [4] Веретенников А. Ю., «Матем. сб.», 1980, т. 111, № 3, с. 434–52; [5] Клепцына М. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1984, т. 29, в. 2, с. 392–96; [6] Barlow M. T., «J. London Math. Soc.», 1982, v. 26, pt 2, p. 335–47; [7] Цирельсон Б. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, с. 427–30.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllər üçün aşkar düsturlar « **стохастическое дифференциальное уравнение;** явные формулы для решений; explicit formulae for solution of a **stochastic differential equation** » – *stoxastik differensial tənliklərin* həllərini idarəedici təsadüfi proseslərlə (semimartinqallarla) ifadə edən düsturlardır. Məs., Stratonoviç formada birölçülü

$$d X = a(X_t) dt + b(X_t) \circ d Z_t, \;\; X_0 = x$$

S. d. t.-nin həlli $X_t = u(D_t, Z_t)$ bərabərliyi ilə verilir, burada $u = u(t, z)$, –

$$\frac{\partial u}{\partial z}(t, z) = b(u(t, z)), \;\; u(t, 0) = t$$

tənliyinin həlli, $D = D_t$ isə

$$D_t' = \exp\left\{ -\int_0^{Z_t} b'(u(D_t, s)) d s \right\} a(u(D_t, X_t)), \; D_0 = x$$

tənliyinin həllidir.

Digər bir misal Z semimartinqalının

$$X_t = \exp\left\{ Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}\left\langle Z^c \right\rangle_t \right\} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta Z_s) e^{-\Delta Z_s}, \;\; t \geq 0$$

bərabərliyi ilə verilən, stoxastik eksponent adlanan $X = \varepsilon(Z)$ eksponentidir və o, $d X_t = X_t - d Z_t$, $X_0 = 1$ xətti S. d. t.-nin həllidir.

Əd.: [1] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin dayanıqlılığı « **стохастическое дифференциальное уравнение;** устойчивость решений; stability of solution of a **stochastic differential equation** » – *stoxastik differensial tənliklərin* həllərinin $t \to \infty$ olduqda S. d. t.-in hər hansı seçilmiş həlli ilə yaxınlaşma xassəsidir.

$\mathbb{R}^n$-də

$$d X(t) = b(t, X(t)) dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X(t)) d w_r(t) \qquad (*)$$

İto S. d. t.-nin, $b(t, 0) = \sigma_r(t, 0) \equiv 0$ şərti ödənildikdə trivial $X(t) \equiv 0$ həlli vardır. (*) tənliyinin $X(s) = x$ şəklində başlanğıc şərti ilə həlli $X^{s,x}(t)$ kimi işarə olunur (fərz olunur ki, bu həllin yeganəliyini təmin edən şərtlər ödənilir). (*) tənliyinin həlli $X(t) \equiv 0$: –

a) $t \geq 0$ olduqda ixtiyari $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$ üçün $x \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t \geq s} \left| X^{s,x}(t) \right| > \varepsilon \right\} \to 0$$

münasibəti ödənilərsə, ehtimala görə dayanıqlı həll; b) əgər həll ehtimala görə dayanıqlı və bundan başqa $x \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{t\to\infty} X^{s,x}(t) = 0 \right\} \to 1$$

münasibətini də ödəyərsə, ehtimala görə asimptotik dayanıqlı həll;

c) əgər həll ehtimala görə dayanıqlı və bundan başqa $\lim\limits_{t\to\infty} X^{(s,x)}(t) = 0$ münasibəti bütün $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ üçün sanki yəqin ödənilərsə, tam dayanıqlı (asimptotik) həll adlanır.

Bu təriflər mənasında *Lyapunov stoxastik funksiyaları* terminlərində dayanıqlılıq şərtləri məlumdur. Bu halda Lyapunov operatorunun – determinik sistemin trayektoriyası boyunca törəmənin rolunu (*) tənliyi üçün doğuran differensial L operatoru, yəni

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(b(t,x), \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} \left(\sigma_2(t,x), \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

operatoru ifadə edir. Məs., $X(t) \equiv 0$ həllinin ehtimala görə dayanıqlılığı üçün $x = 0$ nöqtəsi ətrafında $LV(t,x) \leq 0$ şərtini ödəyən və bu nöqtə ətrafında müsbət müəyyən funksiyanın varlığı kafidir.

Xətti stoxastik tənliyin dayanıqlılığının ilk yaxınlaşma üzrə dayanıqlılığın tədqiqində və digər məsələlər üçün aşağıdakı anlayış faydalıdır. Əgər hər hansı sabit $\alpha > 0$ üçün

$$\mathbf{M}\left| X^{s,x}(t) \right|^p \leq A|x|^p \exp(-\alpha(t-s))$$

şərti ödənilərsə, (*) tənliyinin həlli $X(t) \equiv 0$ eksponensial p – dayanıqlı həll adlanır. Lyapunov stoxastik funksiyalar terminlərində eksponensial p – dayanıqlılıq şərtləri məlumdur. S. d. t. üçün ilk yaxınlaşma üzrə dayanıqlılıq haqqında teoremlər məlumdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [2] Кушнер Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin güclü yeganəliyi « **стохастическое дифференциальное уравнение;** сильная единственность решенией; strong/pathwise uniqueness of solutions of a **stochastic differential equation** »: – əgər

$$d X_t = \sigma(t, X)\, d\boldsymbol{w}_t + b(t, X)\, dt, \quad X_0 = x \qquad (*)$$

stoxastik differensial tənliyinin ixtiyari ehtimal fəzasında və eyni bir ixtiyari Viner prosesi ilə iki ixtiyari həlli üst-üstə düşərsə, (*) stoxastik differensial tənliyinin həlli güclü yeganədir və ya trayektoriyalar üzrə yeganədir, deyilir (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; həllərin zəif yeganəliyi).

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllərin zəif yeganəliyi « **стохастическое дифференциальное уравнение;** слабая единственность решений; weak uniqueness of solution of a **stochastic differential equation** » –

$$d X_t = \sigma(t, X)\, d\boldsymbol{w}_t + b(t, X)\, dt, \quad X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin paylanma qanunu yeganədirsə, bu həll zəif yeganə həldir. Əgər bu həll güclü yeganədirsə, onda o, zəif yeganə həldir (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; həllərin güclü yeganəliyi). Tərsi doğru deyildir. σ və b ölçülən məhdud olduqda, $\mathbb{R}^d$ -də

$$d X_t = \sigma(t, X_t)\, d\boldsymbol{w}_t + b(t, X_t)\, dt, \quad X_0 = x$$

tənliyinin həllinin zəif yeganəliyi üçün $\sigma\sigma^*$ -nun cırlaşmayan və $\sigma\sigma^*$ -nun x üzrə müntəzəm kəsilməzliyi, $d = 1$ olduqda isə yalnız $\sigma\sigma^*$ -nun cırlaşmayan olması kafidir. Həllin zəif yeganəliyi problemi əmsalları ölçülən 2-ci tərtib parabolik tənliklərin həlli problemi və Markov həlləri problemi ilə sıx bağlıdır.

Əd.: [1] Гирсанов И. В., «Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике», Вильнюс, 1962, с. 77–84; [2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [3] Krylov N. V., в сб.: Statistics and control of stochastic processes. Steklov seminar, 1984, N. Y., 1985, p. 214–29.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllin çevirməsi « **стохастическое дифференциальное уравнение;** обращение решения; reversed solution of a **stochastic differential equation** » – ilkin *stoxastik differensial tənliyin* ($\mathscr{U}$-da) doğurduğu $X(t, \cdot)$ -nin diffeomorfizmlərinin stoxastik axınına tərs inikaslar ailəsidir (hamar çoxobrazlıların $\mathscr{N} \to \mathscr{U}$ inikaslarının).

Əgər $X(t,x)$

$$d X_i(t,x) = b_i(t, X(t,x))\, dt + \sum_l \sigma_{il}(t, X(t,x))\, d\boldsymbol{w}_l(t),$$

$$t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad X_i(0,x) = x_i, \quad i = 1, \ldots, d$$

S. d. t.-in həllidirsə ($\boldsymbol{w}$ – Viner prosesidir), onda bu həllin çevirməsinin i-ci koordinatı aşağıdakı xüsusi törəməli S. d. t.-in həllidir:

$$d v(s,x) = \left(\sum_l \mathscr{M}^l \mathscr{M}^l - \mathscr{L} \right)(s,x)\, v(s,x)\, ds -$$

$$- \mathscr{M}^l(s,x)\, v(s,x)\, d\boldsymbol{w}^l(s), \quad s, x \in (0,T] \times \mathbb{R}^d, \quad v(0,x) = x_i,$$

burada

$$\mathscr{L}(s,x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} \sigma_{il}(s,x)\, \sigma_{jl}(s,x)\, \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_i b_i(s,x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\mathscr{M}^l(s,x) = \sum \sigma_{il}(s,x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Əd.: [1] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические дифференциальные уравнения, М., 1983.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllin momentləri « **стохастическое дифференциальное уравнение;** моменты решения; moments of the solution of a **stochastic differential equation** »:

$$d X_t = \sigma(t, X_t)\, d\boldsymbol{w}_t + b(t, X_t)\, dt, \quad X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin momentləri üçün

$$\|\sigma(t, X_t)\|^2 \le \lambda^2(t)\left(1+\|X_t\|^2\, c[0,t]\right),$$

$$|b(t, X_t)| \le \lambda(t)\left(1+\|X_t\|\, c[0,t]\right),\ t \ge 0$$

şərtləri daxilində və $\tau_N = \inf\ (t \ge 0 : \lambda(t) > N)$ olduqda

$$\mathbf{M}\left|X_{t\wedge\tau_N}\right|^{2r} = C(N^2+|x|^{2r}+N^2\,|x|^{2r})\exp(CN^2t),$$

$$C>0,\quad r=1,2,\ldots$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; həllin varlığı haqqında lokal teoremlər « **стохастическое дифференциальное уравнение;** локальные теоремы существование решения; local existence theorems for a **stochastic differential equation** » – S. d. t.-in həllinin hər hansı oblastı tərk etməsi anına qədər və ya onun partlayış anına qədər (ξ) (yəni $t \uparrow \xi$ olduğu halda sonlu limitin yoxluğu) varlığı haqqında teoremlərdir. Belə teoremlər o halda doğru olur ki, varlıq şərtləri (məs., əmsalların məhdudluğu) yalnız lokal surətdə ödənilir və proses sonlu müddət ərzində partlayışa məruz qala bilər (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; partlayış kriterisi).

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK xüsusi törəmələrli « **стохастическое дифференциальное уравнение** с частными производными; **stochastic partial differential equation** » –

$$A(u, \omega) = 0$$

şəklində tənlikdir; $A(\cdot, \omega)$ – xüsusi törəməli inteqro – differensial tənlik, ω – təsadüfiliyi simvolik ifadə edən dəyişəndir. Belə tənliklərin iki əsas tipini qeyd etmək olar.

I. Xüsusi törəməli evolyusion S. d. t.-lər –

$$du(t,x) = \mathscr{L}u(t,x)\,dt + \mathscr{M}u(t_-,x)\,dM(t) \qquad (1)$$

şəklində tənliklərdir, burada $\mathscr{L}$ və $\mathscr{M}$, – x üzrə inteqro – differensial operatorlar, M – hər hansı vektor fəzasında semimartinqaldır, (1) bərabərliyi isə stoxastik differensial hesabı mənasında anlaşılır.

II. Xüsusi törəməli stasionar S. d. t.-lər –

$$\mathscr{L}u = \dot{M}$$

şəklində tənliklərdir, burada $\mathscr{L}$ – elliptik tip operator, $\dot{M}$ – stasionar təsadüfi meydandır (bir qayda olaraq, çoxparametrli bəyaz küy).

Təbiətşünaslığın müxtəlif oblastlarının bir çox məsələləri, o cümlədən, təsadüfi proseslər və meydanlar nəzəriyyəsinin bəzi mühüm «daxili» problemləri xüsusi törəməli S. d. t.-lərə gətirilir, məs.,

1) $u(t,x,s)$ diffuzion prosesi

$$du(t) = b(u(t))dt + \sigma(u(t))\,dw(t),$$
$$t>s,\quad u(s)=x$$

adi S. d. t.-in həlli olsun; $w(t)$ – Viner prosesidir. Onda əmsallar haqqında bəzi təbii fərziyyələrlə $u(t,x,s)$ t-nin qeyd olunmuş qiymətində x, s-in funksiyası kimi aşağıdakı tənliyin həllidir:

$$-du(t,x,s) =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sigma^2(x)\,u_{xx}(t,x,s) + b(x)\,u_x(t,x,s)\right]ds +$$
$$+\sigma(x)\,u_x(t,x,s) * dw(s),\quad s<t, \qquad (2)$$

$$u(t,x,t) = x. \qquad (3)$$

$dw(s)$-in qarşısındakı $*$ işarəsi stoxastik inteqralın tərs İto inteqralı kimi anlaşılmasını ifadə edir. (2) – (3) tənliyi, adətən, tərs diffuziya tənliyi adlandırılır.

2) Relyativist kvant mexanikasının sadə obyektlərindən biri – sərbəst (bozon) meydandır. Bu meydan

$$du(t,x) = -\sqrt{m^2 - \Delta u(t,x)}\,dt + dw(t,x)$$

tənliyinin stasionar həllidir, burada Δ – Laplas operatoru, $w(t,\cdot)$, – L_2-də Viner prosesi, m^2 – hər hansı fiziki sabitdir (bax, [1]).

3) Coğrafi strukturlu populyasion genetikanın modelləri

$$du(t,x) = \alpha\Delta u(t,x)dt + \sqrt{u(t,x)(1-u(t,x))}\,dw(t,x)$$

tip tənliklərə gətirir (bax, [2]), işarələmələr əvvəlki misaldakı kimidir.

Xüsusi törəməli S. d. t.-lərə aid mühüm və maraqlı misallar: diffuzion prosesin filtrasion sıxlığı üçün *filtrasiya tənlikləri*, diffuzion prosesin həllinin çevirməsi üçün düz tənlik, *Navye – Stoks stoxastik differensial tənliyi* və s.

Adi S. d. t.-lər nəzəriyyəsində olduğu kimi xüsusi törəməli evolyusion S. d. t. üçün də güclü və zəif həllər anlayışları daxil olunur. Güclü həll kimi, bir qədər kobud alınsa da, verilmiş $M(t,\omega)$ semimartinqalı üçün verilən ehtimal fəzasında qurulmuş həll, zəif həll kimi isə hər hansı ehtimal fəzası və bu fəzada hər hansı semimartinqal üçün mövcud olan həll anlaşılır. Başqa sözlə, sonuncu halda, ehtimal fəzası və bu fəzada semimartinqal verilmir, əksinə onları təyin etmək tələb olunur. Xüsusi törəməli tənliklərin deterministik nəzəriyyəsindən xüsusi törəməli S. d. t.-ə keçən mühüm anlayışlardan biri ümumiləşmiş həll anlayışıdır: bütün «sınanılan» funksiyalar üçün müəyyən inteqral eyniliyi anlamında S. d. t.-yi ödəyən həllə ümumiləşmiş həll deyilir. Bu anlayış deterministik nəzəriyyədə olduğu kimi, klassik mənada həlli olmayan tənlikləri öyrənməyə imkan yaradır.

Xüsusi törəməli S. d. t. nəzəriyyəsində xətti tənliklər daha ətraflı surətdə öyrənilmişdir (bax, məs., [3] – [5]). Bu onunla əlaqədardır ki, diffuzion prosesin filtrasion sıxlığı üçün tənliklər, tərs diffuziya tənlikləri və digər xüsusi törəməli S. d. t. nəzəriyyəsinin inkişafına səbəb olmuş mühüm tənliklər məhz bu sinfə mənsubdurlar.

Xətti evolyusion tənliklər anlamında xüsusi törəməli S. d. t.-lər nəzəriyyəsinin bəzi əsas problemləri aşağıda illüstrasiya olunur, o cümlədən, ümumiləşmiş həllər və klassik həllər arasında münasibətlər, güclü həllərin varlığı üçün şərtlər, «cırlaşma» effekti və s. Baş həddi özü-özünə qoşma olan 2-ci tərtib xətti evolyusion tənlik aşağıdakı kimi verilmiş olsun:

$$du(t,x) = \left[\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}(t,x)\,u_{x_j}(t,x))_{x_i} +\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\,u_{x_i}(t,x) + c(t,x)\,u(t,x)\Big]\,dt +$$

$$+\sum_{l}\left[\sum_{i=1}^{d}\sigma_{il}(t,x)\,u_{x_i}(t,x) + h^l(t,x)\,u(t,x)\right]d\boldsymbol{w}^l(t),\ t\le T.$$

Sadəlik üçün fərz olunur ki, $\boldsymbol{w}$ – standart Viner prosesidir və (4) tənliyinin əmsalları məhduddurlar, bu zaman onların təsadüfdən asılı ola biləcəkləri də (öngörül təsadüfdən) fərz olunur.

(4) tənliyi üçün Koşi məsələsinin və əsas sərhəd məsələlərinin güclü ümumiləşmiş həllinin varlığını təmin edən şərt superparaboliklik (SP) şərtidir: yəni elə $\delta>0$ konstantı vardır ki,

$$\sum_{i,j} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{l}\left|\sum_{i}\sigma_{il}\,\xi_i\right|^2 \ge \delta\sum|\xi_i|^2,\quad \xi\in\mathbb{R}^d.$$

Güclü klassik həllin varlığı üçün əmsalların müəyyən hamarlığı tələb olunur. Həllərin hamarlığının yüksəldilməsi haqqında nəticələr doğrudur və bu nəticələr deterministik nəzəriyyədəki nəticələrə analojidir. Əmsalların və başlanğıc şərtlərin müəyyən hamarlığı şərtlərində ümumiləşmiş həll hamar modifikasiyaya malik olur və modifikasiya isə klassik mənada həll olur. (4) tənliyi üçün Koşi məsələsinə əmsalların və başlanğıc şərtini müəyyən əlavə hamarlığı şərtində baxdıqda, yeganə güclü ümumiləşmiş həllin varlığını isbat etmək olar, bu halda SP şərti əvəzinə yalnız $A_{ij}=a_{ij}+\sum_l \sigma_{il}\sigma_{jl}/2$ matrisinin mənfi olmayan müəyyən matris olması tələb olunur.

Sonuncu şərt, adətən, cəbri parabolik (P) şərti adlanır. P şərti, demək olar ki, L_2-dən güclü həllin varlığı üçün zəruri şərtlə yaxındır. SP şərtli tənliklərdən P şərtli tənliyə keçdikdə deterministik parabolik tənliyin cırlaşması effektinə analoji effekt yaranır. Buna görə də, P şərtini ödəyən (4) tipli tənliklərə bəzən, cırlaşmış parabolik S. d. t.-lər deyilir. Əmsalların hamarlığı haqqında təbii fərziyyələrlə SP şərti (4) tipli tənliyin fundamental həllinin varlığını təmin edir, amma P şərti bu hal üçün kifayət etmir və bu halda Hermander şərtləri tipli əlavə şərtlərin qoyulması tələb olunur. P və SP şərtləri ixtiyari (cüt) tərtib xüsusi törəməli S. d. t.-lər, o cümlədən, qeyri – xətti tənliklər üçün də ümumiləşdirilir (bax, [6]).

Əgər $\mathscr{L}$ və $\mathscr{M}$ operatorlarının konkret təbiətini nəzərə almadan (1) tənliyinə hər hansı vektor fəzasında evolyusion stoxastik tənlik kimi baxılarsa (yəni bu fəzada adi stoxastik tənlik kimi), onda hökm etmək olar ki, güclü həllin varlığı və yeganəliyi üçün $\mathscr{L}+1/2\mathscr{M}^2$ operatorunun monotonluq şərti tipli şərt əsas şərtdir. Zəif həllin varlığı üçün bu operatorların yalnız kəsilməzliyi kafidir (bax, [2]). P və SP tipli şərtlər uyğun evolyusion stoxastik tənlik üçün monotonluq və koersitivlik şərtlərinin ödənilməsini təmin edən cəbri şərtlərdir.

Xüsusi törəməli stasionar S. d. t.-in həll olunanlığı nəzəriyyəsi, əsas etibarilə, stasionar sərhəd məsələlərinin deterministik nəzəriyyəsinə paraleldir. Lakin bu nəzəriyyədə həllərin Markov xarakterli olmasına aid mühüm və dərin nəticələrin alınması mümkün olmuşdur (bax, [4]). Evolyusion hal üçün belə nəticələr fraqmentar xarakter daşıyır.

Əd.: [1] Hida T., Streit L., «Nagoya Math. J.», 1977, v. 68, № 12, p. 21–34; [2] Viot M., Solutions faibles déquations aux dérivées partielles stochastiques nonlinéaires; Thése doct. sci. Univ. Pierre et Marie Curie, P., 1976; [3] Grigelionis B., Mikelevicius R., «Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.», 1983, v. 49, p. 49–88; [4] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [5] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов, М., 1983; [6] Крылов Н. В., Розовский Б. Л., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 14, М., 1979, с. 71–146.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; xüsusi törəmələrli determinik tənliklərlə əlaqə **« стохастическое дифференциальное уравнение;** связь с детерминированными уравнениями с частными производными; **stochastic differential equation;** connection with deterministic partial differential equations **»** – *stoxastik differensial tənliklərin həlləri* ilə parabolik və elliptik tip 2-ci tərtib törəmələrli tənliklərin həlləri arasında əlaqədir. Məs., əgər $X_{s,x}(t)$

$$dX_{s,x}(t)=a(t,X_{s,x}(t))\,dt+\sigma(t,X_{s,x}(t))\,d\boldsymbol{w}(t),$$
$$X_{s,x}(s)=x$$

başlanğıc şərtilə verilən S. d. t.-in həlli olarsa, onda bəzi şərtlər ödənildikdə

$$u(s,x)=\mathbf{M}[\varphi(X_{s,x}(t)+\int_s^t f(X_{s,x}(\tau))d\tau]$$

funksiyası $(s,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}^d$ oblastında aşağıdakı Koşi məsələsinin həllidir:

$$\frac{\partial u}{\partial s}+(a(s,x),u'_x(s,x))+$$

$$+\frac{1}{2}tr(\sigma(s,x)\sigma^*(s,x)\,u''_{xx}(s,x))=-f(s,x),$$

$$\lim_{s\uparrow t}u(s,x)=\varphi(x);$$

burada $a(t,x)$ və $\sigma(t,x)$ – uyğun olaraq, $\mathbb{R}^d$ – qiymətli və $L(\mathbb{R}^{d_1},\mathbb{R}^d)$ – qiymətli, $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$-də təyin olunmuş funksiyalar, $\boldsymbol{w}(t)$, – d_1 – ölçülü Viner prosesidir.

Göstərilən əlaqə ikitərəfli xarakter daşıyır: əgər S. d. t.-in əmsalları həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremin şərtlərini ödəyirlərsə və bu halda həm də olduqca hamar olarlarsa, onda başlanğıc verilənləri üzrə S. d. t. həllinin differensiallananlıq xassəsinin köməyilə isbat olunur ki, $u(s,x)$ funksiyası olduqca hamar funksiyadır və yuxarıdakı Koşi məsələsinin həllidir. Bu zaman xüsusilə qeyd olunmalıdır ki, $\sigma\sigma^*$ operatoru cırlaşa bilər. Əksinə, əgər göstərilən Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem varsa (məs., hər hansı Sobolev fəzasından), onda bu teorem əsasında uyğun S. d. t. həllinin varlığı və zəif yeganəliyi haqqında faktı isbat etmək olar.

Əd.: [1] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK ixtiyari meydanlarda **« стохастическое дифференциальное уравнение;** в произвольных полях; **stochastic differential equation** in arbitraty fields **»** –

$$dX(t)=A_t(X,dt)\qquad(1)$$

şəklində *stoxastik differensial tənlikdir*, burada $A_t(\varphi, h)$ – təsadüfi meydandır. Təsadüfi meydanların elə sinfini seçmək olar ki, bu meydanlar üçün (1) tənliyinə ciddi məna vermək olar. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{A}_t, \mathbf{P})$, $t \geq 0$ – stoxastik bazis; $D_T(\mathbb{R}^n)$, – $(-\infty, T]$-də təyin olunmuş, sağdan kəsilməz, T nöqtəsində soldan kəsilməz, 2-ci növ kəsilməsi olmayan $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası, $D(\mathbb{R}^n)$, – $(-\infty, \infty)$-da təyin olunmuş, 2-ci növ kəsilməsi olmayan, sağdan kəsilməz $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası olsun. $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ funksiyaları üçün θ_t operatorunun

$$(\theta_t \varphi)(s) = \begin{cases} \varphi(t+s), & s < 0, \\ \varphi(t-s), & s = 0 \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunduğu fərz olunur.

$$\|\varphi\| = \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|, \quad \|\varphi\|_*^2 = \int_{-\infty}^{0} |\varphi(s)|^2 \, dK(s)$$

olsun; K, – $(-\infty, 0]$ yarımoxunun Borel çoxluqlarında təyin olunmuş hər hansı sonlu ölçüdür və $K((-\infty, 0]) < \infty$.

$$a_t(\varphi, h) = a(\varphi, t+h) - a(\varphi, t),$$
$$\beta_t(\varphi, h) = \beta(\varphi, t+h) - \beta(\varphi, t),$$
$$\gamma_t(\varphi, h) = \gamma(\varphi, t+h) - \gamma(\varphi, t)$$

– $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times D_0(\mathbb{R}^n) \times [0, h_0]$ fəzasında təyin olunmuş, $\mathbb{R}^n$-dən qiymətlər alan, Borel σ – cəbrlərinin hasilinə nəzərən ölçülən, $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ qeyd olunduğu halda tamamilə ölçülən fərz olunur və φ qeyd olunduqda $a(\varphi, t)$ – məhdud variasiyalı kəsilməz meydan, $\beta(\varphi, t)$ – $\mathscr{A}_t$ axınına nəzərən lokal kvadratik inteqrallanan martinqal, $\gamma(\varphi, t)$ – qeyd olunmuş kəsilmələri olmayan öngörül pilləvari təsadüfi meydandır. Bundan başqa, fərz olunur ki, $D_T(\mathbb{R}^n)$-dən olan ixtiyari $\mathscr{A}_t$ – ölçülən $Y(t)$ prosesi boyunca $\int_0^T a_t(\theta_t Y, dt)$, $\int_0^T \beta_t(\theta_t Y, dt)$, $\int_0^T \gamma_t(\theta_t Y, dt)$ – stoxastik ayrixətli inteqralları mövcuddur.

Tərifə görə,

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t Y, dt) =$$
$$= \int_0^T a_t(\theta_t Y, dt) + \int_0^T \beta_t(\theta_t Y, dt) + \int_0^T \gamma_t(\theta_t Y, dt).$$

$A_t(\varphi, h) = \alpha_t(\theta_t \varphi, h)$ təsadüfi meydanlı (1) tənliyinə baxılır. $X(t) = X_0(t)$, $t \leq 0$, $X_0(t) \in D_0(\mathbb{R}^n)$ (sanki yəqin) – «başlanğıc şərtini» ödəyən

$$dX(t) = \alpha_t(\theta_t X, dt) \qquad (2)$$

tənliyinin həlli elə $\mathscr{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ prosesi anlaşılır ki, bu proses sanki yəqin

$$X(t) = X_0(t), \quad t \leq 0$$
$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha_s(\theta_s X, ds), \quad t \geq 0$$

münasibətlərilə təyin olunur.

Aşağıdakı şərtlərin daxil olunduğu fərz olunur:

1) $B_t(\varphi, \psi, h)$, – $\beta_t(\varphi, h)$, $\beta_t(\psi, h)$ martinqallarının qarşılıqlı xarakteristikası, $|||\cdot|||$ – operator norma olsun; elə kəsilməz artan öngörül $\varkappa(t)$ funksiyası vardır ki, bütün $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$|a_t(\varphi, h)| \leq |\varkappa(t+h) - \varkappa(t)| \, (1 + \|\varphi\|),$$
$$|||B_t(\varphi, \psi, h)||| \leq |\varkappa(t+h) - \varkappa(t)| \left(1 + \|\varphi\|^2\right)$$

bərabərsizlikləri doğrudur;

2) ixtiyari $R > 0$ üçün elə artan kəsilməz öngörül $\lambda_R(t)$ funksiyası vardır ki, $\varphi, \psi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ üçün $\|\varphi\| \leq R$, $\|\psi\| \leq R$, $t + h \leq R$ olduqda

$$|a_t(\varphi, h) - a_t(\psi, h)| \leq [\lambda_R(t+h) - \lambda_R(t)] \|\varphi - \psi\|,$$
$$|||B_t(\varphi, \psi, h) - B_t(\varphi, \varphi, h)||| \leq [\lambda_R(t+h) - \lambda_R(t)] \|\varphi - \psi\|^2$$

bərabərsizlikləri doğrudur;

3) elə öngörül $\mu(t)$ funksiyası vardır ki, bütün $\varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ və ixtiyari $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ bölgüsü üçün

$$\sum_k \hat{Z}_{t_k}(\theta_{t_k} \varphi, \Delta t_k) \leq \mu(t)$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada $\hat{Z}(\varphi, t)$, – $Z(\varphi, t)$ prosesinin $[0, t]$ intervalında sıçrayışları sayıdır.

Əgər 1) – 3) şərtləri ödənilərsə və $\|X_0\| < \infty$ olarsa, onda (2) tənliyinin yeganə həlli vardır (bax, [1]).

(2) tənliyinə $a_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} a(\varphi, s) \, dt$, $\gamma = 0$ olduğu fərz olunaraq baxılır. 1), 2) şərtləri ödənildikdə həllin varlığı və yeganəliyi üçün $\|\varphi\|$-ni $\|\varphi\|_*$ ilə əvəz etmək olar (bax, [2]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; inteqro–differensial operator « **стохастическое дифференциальное уравнение;** интегро–дифференциальный оператор; **stochastic differential equation;** integro–differential operator » –

$$dX_t = a(t, X_t)dt + B(t, X_t)dw_t +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} f(t, X_{t-}, u)(\mu^{(1)}(dt, du) -$$
$$- \nu^{(1)}(t, du)dt) + \int_{\mathbb{R}^d} h(t, X_{t-}, u) \, \mu^{(2)}(dt, du) \qquad (*)$$

tənliyi üçün aşağıdakı düsturla təyin olunan L operatorudur:

$$L\upsilon(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\upsilon(t,x) + (\upsilon'_x(t,x), a(t,x)) + \\ + \operatorname{tr}\upsilon''_{xx} B(t,x)\,B^*(t,x)/2 + \\ + \int_{\mathbb{R}^d} [(\upsilon(t, x + f(t,x,u)) - \upsilon(t,x) - \\ - (\upsilon'_x(t, x), f(t, x, u))]\,\nu^{(1)}(t, du) + \\ + \int_{\mathbb{R}^d} [\upsilon(t, x + h(t,x,u)) - \upsilon(t,x)]\,\nu^{(2)}(t, du);$$

burada $a(t,x)$, – $(n\times 1)$ – ölçülü, $B(t,x)$, – $(n\times m)$ – ölçülü $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ fəzasında funksiyalar, $f(t,x,u)$, $h(t,x,u)$, – $(n\times 1)$ – ölçülü $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d$ fəzasında funksiyalar, w, – $(m\times 1)$ – ölçülü Viner prosesi, $\mu^{(i)}$, $i=1,2$, – $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-də kəsişməyən daşıyıcılara malik Puasson ölçüləri, $\mathbf{M}\mu^{(i)}(dt, du) = \nu^{(i)}(t, du)dt$, υ, – x-ə görə iki tərtib kəsilməz törəməsi və t-yə görə bir tərtib törəməsi olan funksiya, $*$ – transpozisiya işarəsidir, (*) tənliyinin əmsallarının inteqrallananlığı üçün bəzi şərtlər ödənildikdə onun həlli X üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir:

$$\mathbf{M}\upsilon(t, X_t) = \mathbf{M}\upsilon(0, X_0) + \mathbf{M}\int_0^t L\upsilon(s, X_s)\,ds.$$

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, K., 1982.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK k e ç i r i c i s ə r h ə d l i **« стохастическое дифференциальное уравнение** с проницаемой границей; **stochastic differential equation** w i t h a (s e m i –) p e r m e a b l e b o u n d a r y **»** – bax, *Stoxastik differensial tənlik* s ə r h ə d l ə r l i.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; k i ç i k p a r a m e t r ü z r ə a y r ı l ı ş l a r **« стохастическое дифференциальное уравнение;** р а з л о ж е н и я п о м а л о м у п а р а м е т р у; **stochastic differential equation;** e x p a n s i o n w i t h r e s p e c t t o a s m a l l p a r a m e t e r **»**: birölçülü

$$dX(t,\varepsilon) = a(t, X(t,\varepsilon))dt + \varepsilon b(t, X(t,\varepsilon))dw(t)$$

diffuzion tənliyi üçün ayrılış – $a(x,t,x)$, $b(t,x)$ funksiyalarının uyğun olaraq, X üzrə m və $m-1$ tərtib törəmələri varsa və bu törəmələr Lipşits şərtini ödəyirlərsə,

$$X(t,\varepsilon) = Y_0(t) + \varepsilon Y_1(t) + \ldots + \varepsilon^m Y_m(t)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$, $w(t)$ – standart Viner prosesidir. Y_0 prosesi $Y_0(t) = a(t, Y_0(t))$ tənliyinin həllidir, $Y_1, \ldots, Y_m$ prosesləri isə diffuzion proseslərin həlləridir (bax, [1]).

Bu ayrılış yüksək tərtib törəmə olduqda kiçik parametrli parabolik tənliyin həllinin asimptotikası ilə sıx əlaqəlidir (bax, [2]).

Sıçrayışvari kiçik əlavəli tənlik (bax, [3]) və ikiölçülü zamanlı diffuzion təniklər üçün ayrılışların ümumiləşmələri vardır.

Əd.: [1] Б л а г о в е щ е н с к и й Ю. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1962, т. 7, в. 2, с. 135–52; [2] Б л а г о в е щ е н с к и й Ю. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 2, с. 378–82; [3] Б р о д с к и й Я. С., «Теория случайных процесссов», 1973, в. 1, с. 35–43.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK(y i) k v a n t **« стохастическое дифференциальное уравнение** квантовое; q u a n t u m **stochastic differential equation »** – bax, *Kvant stoxastik hesabı*.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; l i m i t t e o r e m l ə r i **« стохастическое дифференциальное уравнение;** предельные теоремы; l i m i t t h e o r e m s f o r **stochastic differential equation »** – bax, *Limit teoremləri* s t o x a s t i k d i f f e r e n s i a l t ə n l i k l ə r ü ç ü n.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK(y i) L i u v i l l **« стохастическое дифференциальное уравнение** Лиувилля; L i o u v i l l e **stochastic differential equation »** – bax, *Liuvill stoxastik differensial tənliyi*.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; M a r k o v h ə l l ə r i **« стохастическое дифференциальное уравнение;** марковские решения; M a r k o v s o l u t i o n s o f a **stochastic differential equation »**: məhdud kəsilməz əmsallarlı və ya ölçülən məhdud əmsallarlı və cırlaşmayan diffuziyalı

$$dX_t = \sigma(X_t)dw_t + b(X_t)dt, \quad X_0 = X$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin zəif yeganəliyindən alınan Markov xassəsidir (bax, *Stoxastik differensial tənlik*; h ə l l ə r i n z ə i f y e g a n ə l i y i). Hər iki halda zəif yeganəlik olmadıqda həllərin bütün çoxluğundan Markov həllini seçmək olar (Markov həllinin «seleksiyası» haqqında Krılov teoremi). Belə həll kvaziinfinitezimal operatoru

$$L = \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j} + \sum_{i=1}^d b_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}$$

olan kvazidiffuzion prosesdir.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 3, M., 1975; [2] К р ы л о в Н. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 3, с. 691–708; [3] К р ы л о в Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, M., 1977; [4] S t r o o c k D. W., V a r a d h a n S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; m ü q a y i s ə t e o r e m l ə r i **« стохастическое дифференциальное уравнение;** т е о р е м ы с р а в н е н и я; c o m p a r i s o n t h e o r e m s f o r **stochastic differential equation »** – *stoxastik differensial tənliklərin* həllərinin onların əmsallarından asılılığı haqqında teoremlərdir. X^i, $i=1,2$, –

$$X_t^i(\omega) = X_0^i(\omega) + \int_0^t f^i(\omega, s, X_{s-}^i(\omega))\,da_s(\omega) + \\ + \int_0^t g(\omega, s, X_{s-}^i(\omega))\,dm_s(\omega) +$$

$$+\int_0^t \int_{\{|u|\le 1\}} h(\omega, s, u, X^i_{s-}(\omega))\,(\mu-\nu)(ds, du) +$$

$$+\int_0^t \int_{\{|u|>1\}} h^i(\omega, s, u, X^i_{s-}(\omega))\,\mu(ds, du) +$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}} [k^i(\omega, s, u, X^i_{s-}(\omega)) + l^i(\omega, s, u, X^i_{s-}(\omega))]\,p(ds, du)$$

tənliklərinin həlləri olsun, burada a, m – kəsilməz proseslər, a – artan, m – lokal martinqal; μ, p – hər hansı semimartinqalın sıçrayışlarının doğurduğu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ fəzasında tamqiymətli təsadüfi ölçülər, μ (uyğun olaraq p) – sıçrayışları ilə tamamilə çatılmaz (uyğun olaraq öngörül) anlar, ν, – μ ölçüsünün kompensatorudur; $\int g\,dm$, $\iint h(\mu-\nu)$, $\iint k^i\,p$ stoxastik inteqralları lokal martinqallar, $\int f^i\,da$, $\iint l^i\,p$ inteqralları lokal inteqrallanan variasiyalı proseslər, $\iint h^i\,\mu$ sonlu variasiyalı prosesdir. Fərz olunur ki, bütün inteqralların təyin olunması üçün şərtlər və həm də aşağıdakı şərtlər ödənilir.

1) $X_0^2 > X_0^1$;

2) $f^i(s, x)$; $(k^i + l^i)(s, u, x)$ funksiyaları uyğun olaraq (s, x), (s, u, x) üzrə kəsilməzdirlər və

$$f^2(s, x) > f^1(s, x),$$

$$(k^2 + l^2)(s, u, x) > (k^1 + l^1)(s, u, x);$$

3) $$|g(s, x) - g(s, y)| \le \rho(|x - y|)G(s),$$

$$|h(s, u, x) - h(s, u, y)| \le \rho(|x - y|)H(s, u),$$

burada (sadəlik üçün) ρ, – $\alpha > 1/2$ üstlü Hölder metrikasıdır, ixtiyari t üçün

$$\int_0^t G(s)\,d\langle m\rangle_s < \infty,\quad \int_0^t \int H^2(s, u)\nu(ds, du) < \infty;$$

4) $y \ge x$ üçün

$$h(s, u, y) \ge h(s, u, x),$$

$$y + h^2(s, u, y)I_{|u|>1} \ge x + h^1(s, u, x)I_{|u|>1},$$

$$y + h(s, u, y)I_{|u|\le 1} + (k^2 + l^2)(s, u, y) \ge$$

$$\ge x + h(s, u, x)I_{|u|\le 1} + (k^1 + l^1)(s, u, x).$$

Onda $X^2 \ge X^1$ (bax, [3]).

Bu müqayisə teoremini differensial tənliklər üçün ilk dəfə A. V. Skoroxod ifadə etmişdir (bax, [1]); İto tənlikləri üçün bu teorem ümumi şəkildə [2]-də verilmişdir.

Qauss prosesləri nəzəriyyəsində də Slepian müqayisə teoremi vardır (bax, [4]). T – separabel metrik kompakt, $X^i(t)$, $t\in T$, $i = 1, 2$ – kovariasion funksiyaları $\Gamma_i(t, s) = \mathbf{M}X^i(t)X^i(s)$ olan separabel Qauss prosesləri; $\Gamma_2(t, t) = \Gamma_1(t, t)$ və $\Gamma_2(t, s) \le \Gamma_1(t, s)$, $t, s \in T$ olsun. Onda ixtiyari həqiqi m üçün

$$\mathbf{P}\{X^2(t, \omega) \le m,\ t \in T\} \le \mathbf{P}\{X^1(t, \omega) \le m, t \in T\}$$

münasibəti doğrudur.

Əd.: [1] Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, К., 1961; [2] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [3] Гальчук Л. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 3, с. 425–33; [4] Фернике К., в сб.: Случайные процессы, М., 1978.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK (yi) Navye–Stoks **« стохастическое дифференциальное уравнение** Навье–Стокса; Navier–Stokes **stochastic differential equation »** – bax, *Navye – Stoks stoxastik differensial tənliyi*.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK operator **« стохастическое дифференциальное уравнение** операторное; operator **stochastic differential equation »** – bax, *Operator stoxastik differensial tənlik.*

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; parametr üzrə differensiallanma **« стохастическое дифференциальное уравнение;** дифференцируемость по параметру; **stochastic differential equation;** differentiability with respect to parameter **»** –

$$dX_\alpha(t) = a_\alpha(t, X_\alpha(t))\,dt + B_\alpha(t, X_\alpha(t))\,dw(t) +$$

$$+\int_\Theta f_\alpha(t, X_\alpha(t), \theta)\,\mu(d\theta\times dt) +$$

$$+\int_\Theta g_\alpha(t, X_\alpha(t), \theta)\,\nu(d\theta\times dt),\ X_\alpha(\theta) = X_\alpha$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin α parametri üzrə differensiallanmasıdır. (*) tənliyində $w(t)$ m – ölçülü Viner prosesidir, $\mu(d\theta\times dt)$ $\Theta\times\mathbb{R}_+$-da mərkəzlənmiş Puasson ölçüsüdür və $\mathbf{M}\mu^2(d\theta\times dt) = m_1(d\theta)dt$, $m_1(d\theta)$ $\mathbb{C}$-də σ – sonlu ölçü, $\nu(d\theta\times dt)$ – asılı olmayan artımlarlı Puasson ölçüsüdür və $\mathbf{M}\nu(d\theta\times dt) = m_2(d\theta)dt$, $m_2(d\theta)$ $\mathbb{C}$-də sonlu ölçüdür, $(\Theta, \mathbb{C})$ hər hansı ölçülən fəzadır. Viner prosesi $w(t)$, mərkəzlənmiş Puasson ölçüsü μ və Puasson ölçüsü ν öz aralarında asılı deyildirlər. α parametri birölçülü hər hansı $[a, b]$ intervalındandır. $a_\alpha(t, x)$, $B_\alpha(t, x)$ ölçülən funksiyaları hər bir α qiymətində $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$-də təyin olunmuşlar və $\mathbb{R}^n$ və $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$-dən ($\mathbb{R}^m$-dən $\mathbb{R}^n$-ə xətti operatorlar fəzası) qiymətlər alırlar, uyğun olaraq, hər bir α qiymətində $f_\alpha(t, x, \theta)$ və $g_\alpha(t, x, \theta)$ ölçülən funksiyaları $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\Theta$ fəzasında təyin olunmuşlar və $\mathbb{R}^n$-dən qiymətlər alırlar.

$\partial X_\alpha(t)/\partial\alpha$ törəməsi $h \to 0$ olduqda $(X_{\alpha+h}(t) - X_\alpha(t))/h$ nisbətinin ehtimala görə yığıldığı təsadüfi proses kimi anlaşılır. $\partial X_\alpha(t)/\partial\alpha$ törəməsi, yalnız və

yalnız, o halda təyin olunmuş sayılır ki, qeyd olunan limit mövcud olsun.

Aşağıdakı şərtlərin daxil olunduğu fərz olunur:

1) hər bir $r>0$ üçün elə lokal məhdud $k_r(\alpha)$ funksiyası vardır ki, $t\le r$ olduqda bu funksiya üçün

$$|a_\alpha(t,x)|^2+\|B_\alpha(t,x)\|^2+$$
$$+\int_\Theta |f_\alpha(t,x,\theta)|^2 m_1(d\theta)\le k_r(\alpha)\left(1+|x|^2\right)$$

bərabərsizliyi ödənilir, $\|\cdot\|$ – operator normasıdır;

2) uyğun olaraq $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^m,L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n))$ fəzalarından qiymətlər alan, dəyişənləri toplusu üzrə lokal məhdud funksiyalar olan

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}a_\alpha(t,x),\ \frac{\partial}{\partial\alpha}B_\alpha(t,x),\ \frac{\partial}{\partial x}a_\alpha(t,x),\ \frac{\partial}{\partial x}B_\alpha(t,x)$$

törəmələri vardır;

3) uyğun olaraq $\mathbb{R}^n$, $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$-dən qiymətlər alan

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f_\alpha(t,x,\theta),\ \frac{\partial}{\partial\alpha}g_\alpha(t,x,\theta),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}f_\alpha(t,x,\theta),\ \frac{\partial}{\partial x}g_\alpha(t,x,\theta)$$

törəmələri vardır,

$$\int_\Theta\left[\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}f_\alpha(t,x,\theta)\right|^2+\left\|\frac{\partial}{\partial x}f_\alpha(t,x,\theta)\right\|^2\right]m_1(d\theta)$$

funksiyası α, t, x üzrə lokal məhdud funksiyadır;

4) $r>0$ üçün

$$\lim_{\substack{\alpha\to\bar\alpha\\ \delta\to0}}\sup_{\substack{|x|\le r\\ t\le r}}\sup_{|x-y|<\delta}\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial x}a_\alpha(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}a_{\bar\alpha}(t,y)\right\|+\right.$$
$$+\left\|\frac{\partial}{\partial x}B_\alpha(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}B_{\bar\alpha}(t,y)\right\|+$$
$$+\int_\Theta\left\|\frac{\partial}{\partial x}f_\alpha(t,x,\theta)-\frac{\partial}{\partial x}f_{\bar\alpha}(t,y,\theta)\right\|^2 m_1(d\theta)+$$
$$\left.+\int_\Theta \operatorname{arctg}\left\|\frac{\partial}{\partial x}g_\alpha(t,x,\theta)-\frac{\partial}{\partial x}g_{\bar\alpha}(t,y,\theta)\right\|m_2(d\theta)\right\}=0$$

münasibəti ödənilir;

5) X_α təsadüfi kəmiyyəti α üzrə differensiallanandır.

Əgər 1) – 5) şərtləri ödənilərsə, onda bütün $t>0$ üçün $\partial X_\alpha(t)/\partial\alpha=Y_\alpha(t)$ törəməsi vardır və bu törəmə aşağıdakı xətti tənliyin həllidir (bax, [1]):

$$Y_\alpha(t)=Y_\alpha(0)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial\alpha}a_\alpha(s,X_\alpha(s))\,ds+$$
$$+\int_0^t\frac{\partial}{\partial\alpha}B_\alpha(s,X_\alpha(s))\,d\boldsymbol{w}(s)+$$
$$+\int_0^t\int_\Theta\frac{\partial}{\partial\alpha}f_\alpha(s,X_\alpha(s),\theta)\mu(d\theta\times ds)+$$
$$+\int_0^t\int_\Theta\frac{\partial}{\partial\alpha}g_\alpha(s,X_\alpha(s),\theta)\nu(d\theta\times ds)+$$
$$+\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}a_\alpha(s,X_\alpha(s))\,Y_\alpha(s)ds+$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial x}B_\alpha(s,X_\alpha(s))\,Y_\alpha(s)\right]d\boldsymbol{w}(s)+$$
$$+\int_0^t\int_\Theta\frac{\partial}{\partial x}f_\alpha(s,X_\alpha(s),\theta)\,Y_\alpha(s)\mu(d\theta\times ds))+$$
$$+\int_0^t\int_\Theta\frac{\partial}{\partial x}g_\alpha(s,X_\alpha(s),\theta)\,Y_\alpha(s)\nu(d\theta\times ds)).$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; partlayış kriterisi « **стохастическое дифференциальное уравнение;** критерий взрыва; explosion criterion for a **stochastic differential equation** »:

$$dX_t=\sigma(X_t)d\boldsymbol{w}_t+b(X_t)dt,\ X_0=X$$

birölçülü stoxastik differensial tənliyinin həllinin partlayış anı ξ üçün (yəni $t\uparrow\xi$ olduqda sonlu limitin yoxluğu) $\sigma,b\in C_{\text{loc}}$, $\sigma\ne0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\xi=\infty\}=1$$

Feller kriterisi, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki,

$$\int_{-\infty}^0\frac{y(x)-y(-\infty)}{|y'(x)\sigma(x)|^2}\,dy(x)=\int_0^\infty\frac{y(\infty)-y(x)}{|y'(x)\sigma(x)|^2}\,dy(x)=\infty$$

bərabərlikləri ödənilsin, burada

$$y(x)=\int_0^\infty\exp\left(-\int_0^z\frac{2b(u)}{\sigma^2(u)du}\right)dz.$$

Çoxölçülü analoq da müəyyən olunmuşdur (bax, [2]).

Əd.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468–519; [2] Хасьминский Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 196–214; [3] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK sərhədlərli « **стохастическое дифференциальное уравнение** с границами; **stochastic differential equation** with boundaries » – 1) Sonlu fəza intervalında S. d. t. (bax, [1], fəs. 5). $\sigma(x)$ və $b(x)$ ədədi

funksiyalarının $(0,1)$-də təyin olunduğu fərz olunur. Fərz olunur ki, ixtiyari $\varepsilon \in (0,1)$ üçün $\mathbb{R}^+$-də elə σ^ε və b^ε ədədi funksiyaları vardır ki, σ^ε və σ, b^ε və b funksiyalarının $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$-də daralmaları üst-üstə düşür və

$$d X_t^\varepsilon = \sigma^\varepsilon(X_t^\varepsilon)\, d\boldsymbol{w}_t + b^\varepsilon(X_t^\varepsilon)\, dt$$

S. d. t.-nin yeganə həlli vardır. $\varepsilon \to 0$ olduqda hər hansı limit prosesi X alınır. X prosesinin 0 və 1 sərhəd nöqtələrinə çatmasını təyin edən σ və b funksiyaları üzərinə qoyulası şərtləri müəyyən şəkildə ifadə etmək olar. Sərhəd nöqtəsinə çatmış prosesi aşağıdakı üsullarla davam etdirmək olar: onu bu nöqtədə saxlamaq (u d u c u s ə r h ə d); onu $(0,1)$ intervalına sıçrayışla qaytarmaq; onu $(0,1)$-ə ya kəsilməz surətdə bir anda qaytarmaq (a n i ə k s e d i c i s ə r h ə d – rus. мгновенно отражающая граница) və ya sərhəd nöqtəsində müsbət zaman müddətində olaraq $(0,1)$ intervalına qaytarmaqla (l ə n g i d i c i s ə r h ə d – rus. задерживающая граница).

σ və b funksiyaları terminlərində [1]-də davamolunma üsulunun mümkün üsulu təyin olunur və müxtəlif üsullar üçün müvafiq Kolmoqorov tərs tənlikləri yazılır.

2) 0 n ö q t ə s i n d ə k e ç i r i c i s ə r h ə d ə malik (rus. с проницаемой границей в точке 0) S. d. t.:

$$d X_t = \sigma(X_t)\, d\boldsymbol{w}_t + b(X_t)\, dt + a\, \varphi_t(X_t)$$

tənliyində a sərhədin keçiricilik xassəsini xarakterizə edən ədəd, φ – naməlum X semimartinqalının 0 nöqtəsində simmetrik lokal zamandır. Əgər $|a| \le 1$, σ və b ölçülən və məhdud olarlarsa, σ müntəzəm müsbət və məhdud variasiyalı olarsa, onda S. d. t.-in yeganə həlli vardır (bax, [2], [3]). $a = 1$ (-1) olduqda proses $(0,\infty)$-da ($(-\infty,0)$-da) tamamilə əks olunur, $|a| < 1$ olduqda isə aralıq hallar olur.

3) $\mathbb{R}^d$-də ə k s e d i c i s ə r h ə d l ə S. d. t.. d – ölçülü $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A}, \mathbf{P}; \boldsymbol{w})$-də Viner prosesi və: $D = \{x \in \mathbb{R}^d : x^d > 0\}$ $> 0\}$-də σ, – $(d \times d)$ – matrisi, b, – d – ölçülü vektorunun, $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^d : x^d = 0\}$-da γ, – d – ölçülü vektoru, $\gamma^d \ge 0$ Borel funksiyalarının verildiyi və $\rho \in \mathbb{R}_+$ fərz olunur. Əksedici sərhədə malik

$$d X_t = I_D(X_t)\, \sigma(X_t)\, d\boldsymbol{w}_t + \\ + I_D(X_t)\, b(X_t)\, dt + I_{\partial D}(X_t)\, \gamma(X_t)\, d\varphi_t$$

S. d. t.-in həlli qiymətləri uyğun olaraq, $\overline{D}$ və $\mathbb{R}_+$-dan olan $\mathbf{P}$ – sanki yəqin kəsilməz $\mathbb{A}$ – uzlaşmış elə X, φ proseslər cütünə deyilir ki, φ artan prosesdir, $d\varphi_t = I_{\partial D}(X_t)\, d\varphi_t$, $I_{\partial D}(X_t)\, dt = \rho(X_t)\, d\varphi_t$ və bu həll $\mathbf{P}$ – sanki yəqin aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$X_t = X_0 + \int_0^t I_D(X_t)\, \sigma(X_t)\, d\boldsymbol{w}_t + \\ + \int_0^t I_D(X_t)\, b(X_t)\, d\boldsymbol{w}_t + \int_0^t I_{\partial D}(X_t)\, \gamma(X_t)\, d\varphi_t,\ t \ge 0.$$

Əgər σ və b Lipşits şərtini ödəyərlərsə, γ^d müsbət müəyyəndirsə, $\gamma \in C_b^2(\partial D)$, onda S. d. t.-in həlli vardır və bu həll yeganədir (bax, [4]). Uyğun zəif həllər [5]-də öyrənilmişdir.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения, К., 1968; [2] L e G a l l J. F., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1095, p. 51–82; [3] В е р е т е н н и к о в А. Ю., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, в. 4, с. 685–701; [4] L i o n s P. L., S z n i t m a n A. S., «Communs Pure and Appl. Math.», 1984, v. 37, № 4, p. 511–37; [5] В а т а н а б э С., И к э д а Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [6] П о р т е н к о Н. И., Обобщенные диффузионные процессы, К., 1982.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK s i m m e t r i k **« стохастическое дифференциальное уравнение** с и м м е т р и ч е с к о е; s y m m e t r i c **stochastic differential equation »** – bax, *Stoxastik differensial tənlik* S t r a t o n o v i ç f o r m a d a.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; s o n l u f ə r q l i a p p r o k s i m a s i y a **« стохастическое дифференциальное уравнение;** к о н е ч н о р а з н о с т н а я а п п р о к с и м а ц и я; f i n i t e d i f f e r e n c e a p p r o x i m a t i o n t o a **stochastic differential equation »** – *stoxastik differensial tənliyin* həllinin təsadüfi ardıcıllıq və ya təsadüfi proseslə zamanın diskretləşdirilməsinə əsaslanan approksimasiyasıdır. Sonlufərqli approksimasiyalardan ən sadəsi adi differensial tənliyin həllinin approksimasiyası üçün Eyler metodunun stoxastik variantı olan Maruyama approksimasiyasıdır (bax, [1]).

$$d X_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, d\boldsymbol{w}_t,\ \ t \in [0,T],\ X_0 = x$$

S. d. t. verilmişdir, $\boldsymbol{w}(t)$, $t \in [0,T]$ – Viner prosesidir. $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$, – $[0,T]$ intervalının bölgüsü, $|\Delta| = \max |t_{i+1} - t_i|$ olsun. X_t, $t \in [0,T]$ təsadüfi prosesinin (və ya X_t, $t \in \Delta$ təsadüfi ardıcıllığının) rekurrent şəkildə aşağıdakı kimi təyin olunduğu fərz olunur:

$$X_0^\Delta = x,\ \ X_t^\Delta = X_{t_i}^\Delta + a_i(t - t_i) + b_i(\boldsymbol{w}_t - \boldsymbol{w}_{t_i}),$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}],\ \ a_i = a(t_i, X_{t_i}),\ \ b_i = b(t_i, X_{t_i}).$$

Onda «yaxşı» a və b-lər üçün

$$\mathbf{M} \sup_{t \le T} \left| X_t - X_t^\Delta \right|^2 \le c|\Delta|$$

bərabərsizliyi doğrudur, məs., $|\Delta| \to 0$ olduqda $X^\Delta \to X$ kvadratik orta mənada yığılması ödənilir.

Teylor stoxastik düsturundan istifadə edərək, daha dəqiq sonlufərqli approksimasiyalar almaq olur və bunlar üçün hər hansı müsbət k qiymətində

$$\mathbf{M} \sup_{t \in \Delta} \left| X_t - X_t^\Delta \right|^2 \le c\, |\Delta|^k$$

bərabərsizliyi doğrudur; K – a p p r o k s i m a s i y a t ə r t i b i adlanır. Məs., 2-ci tərtib sonlufərqli approksimasiya –

$$X_0^{\Delta} = x,$$

$$X_{t_{i+1}}^{\Delta} = X_{t_i}^{\Delta} + a_i \Delta t_i + b_i \Delta \boldsymbol{w}_i + \frac{1}{2} b_i b_i' (\Delta \boldsymbol{w}_i^2 - \Delta t_i),$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \ \Delta \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_{t_{i+1}} - \boldsymbol{w}_{t_i},$$

$$b_i' = b_x'(t_i, X_{t_i}).$$

Sonlufərqli approksimasiya metodu ixtiyari idarəolunan semimartinqallarlı və təsadüfi ölçülərli S. d. t.-lərin çoxölçülü halı üçün də ümumiləşdirilir. EHM-da Monte – Karlo metodu ilə realizasiya üçün sonlufərqli approksimasiya münasib hesab olunur.

Əd.: [1] M a r u y a m a G., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1955, v. 4, p. 48–90; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] P l a t e n E., «Lect. Notes Cont. and Inf. Sci.», 1987, v. 96, p. 187–93; [4] G a r d T. C., Introduction to stochastic differential equations, N. Y., 1988.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK s o n l u f ə z a i n t e r v a l ı n d a « **стохастическое дифференциальное уравнение** н а к о н е ч н о м п р о с т р а н с т в е н н о м и н т е р в а л е; **stochastic differential equation** o n a b o u n d e d s p a c e i n t e r v a l » – bax, *Stoxastik differensial tənlik* s ə r h ə d l ə r l i.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; S. d. t.-in h ə l l ə r i n ə u y ğ u n ö l ç ü l ə r i n m ü t l ə q k ə s i l m ə z l i y i « **стохастическое дифференциальное уравнение;** а б с о л ю т н а я н е п р е р ы в н о с т ь м е р, с о о т в е т с т в у ю щ а я р е ш е н и я м С. д. у.; **stochastic differential equation;** a b s o l u t e c o n t i n u i t y o f m e a s u r e s c o r r e s p o n d i n g t o s o l u t i o n s » $[0, T] \times \mathbb{R}^d$-də qiymətləri uyğun olaraq $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d$, $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$-dən olan $a_1(t, x)$, $a_2(t, x)$, $\sigma(t, x)$ funksiyalarının verildiyi fərz olunur. $\boldsymbol{w}(t)$, – d – ölçülü Viner prosesi, X_i^0 – Viner prosesi $\boldsymbol{w}(\cdot)$-dən asılı olmayan təsadüfi vektor olsun. μ_i Borel çoxluqları $\boldsymbol{\Lambda} \subset \mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$ üçün $\mu_i(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{P}\{X_i(\cdot) \in \boldsymbol{\Lambda}\}$ düsturu ilə təyin olunan ölçü olsun. $\mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$ fəzasında μ_i, $i = 1, 2$ ölçüsü, başlanğıc şərti $X_i(0) = X_i^0$ olan

$$d X_i(t) = a_i(t, X_i(t))\, dt + \sigma(t, X_i(t))\, d\boldsymbol{w}(t), \quad t \in [0, T]$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinə müvafiq ölçü olsun ($\mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$, – $t \in [0, T]$-də verilmiş və $\mathbb{R}^d$-dən qiymətlər alan kəsilməz funksiyalar fəzasıdır). μ_1 və μ_2 ölçüləri bəzi şərtlərlə bir-birilə ekvivalentdirlər və

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x(\cdot)) = \rho(x(0)) \exp\{R_T(x(\cdot))\}.$$

$\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, – $\mathbf{P}\{X_2^0 \in dx\}$ paylanmasının $\mathbf{P}\{X_1^0 \in dx\}$ paylanmasına nəzərən sıxlıq funksiyası (bu paylanmaların ekvivalent olduğu fərz olunur), $R_T(x(\cdot))$ isə aşağıdakı düsturla təyin olunan funksional olsun:

$$R_T(x(\cdot)) = \int_0^T (b^{-1}(t, x(t))[a_2(t, x(t)) - a_1(t, x(t))], dx(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T [b^{-1}(t, x(t))\, a_1(t, x(t)), a_1(t, x(t))) -$$

$$- b^{-1}(t, x(t)) a_2(t, x(t)), a_2(t, x(t)))] dt,$$

$R_T(x(\cdot))$-in ifadəsində b^{-1} operatoru $b = \sigma\sigma^*$ operatoruna tərs operatordur, sağ tərəfdəki inteqrallardan birincisi aşağıdakı kimi təyin olunur. $x(t)$ prosesini μ_1 ölçüsünə nəzərən

$$x(t) = \int_0^t a_1(s, x(s))\, ds + \eta(t)$$

şəklində yazmaq olar və burada $\eta(t)$ – xarakteristikası $\langle \eta \rangle_t = \int_0^t b(s, x(s))\, ds$ olan, $\mathbb{R}^d$-də kvadratik inteqrallanan martinqaldır. Buna görə də, qeyd olunan inteqral iki inteqralın cəmi kimi anlaşılmalıdır, adi inteqral –

$$\int_0^T (b^{-1}(t, x(t))[a_2(t, x(t)) - a_1(t, x(t))], a_1(t, x(t)))dt$$

və $\eta(t)$ martinqalı üzrə kvadratik inteqrallanan stoxastik –

$$\int_0^T (b^{-1}(t, x(t))[a_2(t, x(t)) - a_1(t, x(t))]) d\eta(t)$$

inteqralının cəmi kimi. ($\eta(0)$ vektorunun μ_1 ölçüsünə nəzərən paylanması X_1^0 vektorunun paylanması kimidir.)

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK S t r a t o n o v i ç f o r m a d a; k ü k r ə n t i l ə r ə n ə z ə r ə n d a y a n ı q l ı l ı q « **стохастическое дифференциальное уравнение** в ф о р м е С т р а т о н о в и ч а; у с т о й ч и в о с т ь п о о т н о ш е н и ю к в о з м у щ е н и я м; **stochastic differential equation** i n t h e S t r a t o n o v i c h f o r m; s t a b i l i t y w i t h r e s p e c t t o p e r t u r b a t i o n » –

$$d X_t = b(X_t) \circ d Z_t, \quad X_0 = x \qquad (*)$$

stoxastik differensial tənliyinin həllinin idarəedici kəsilməz $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^d)$ semi – martinqalının simmetrik müntəzəm approksimasiyalar adlanan approksimasiyalarına nəzərən kəsilməz asılılığını xarakterizə edən xassəsidir. Burada $b = \|b_{ij}\|$ – «olduqca yaxşı» $b_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$, $x \in \mathbb{R}^n$ funksiyaları matrisidir. Əgər

$$\sup_{t \in I} \left| Z_t^{\delta} - Z_t \right| \to 0, \quad \delta \to 0$$

münasibəti hər hansı mənada ödənilərsə (sanki yəqin, ehtimala görə və ya L^p mənada), $\{Z^{\delta}, \delta > 0\}$ d – ölçülü kəsilməz semimartinqallar ailəsi Z s e m i m a r t i n q a l ı n ı n

$I=[0,T]$ $(T\le+\infty)$ intervalında müntəzəm approksimasiyası adlanır. Əgər

$$d X_t^\delta = b(X_t^\delta)\circ d Z_t^\delta, \quad t\in I,$$

$X_0^\delta = x$ tənliklərinin «approksimaedici» X^δ, $\delta>0$ həlləri uyğun mənada X-ə yığılarsa, belə approksimasiya (verilən tənlik üçün) simmetrik approksimasiya adlanır.

Birölçülü halda $(d=1)$

$$d X_t = a(t, X_t)\,dt + b(t, X_t)\circ d Z_t,\ t\ge 0,\ X_0 = x$$

tənliyi üçün ixtiyari müntəzəm approksimasiya simmetrik approksimasiyadır. Bu fakt ilk dəfə 1965-də E. Uonq (E. Wong) və M. Zakai (M. Zakai) tərəfindən Viner prosesi üçün isbat olunmuşdur. Eyni zamanda İto formasında S. d. t.-in həllinin qeyri – dayanıqlılığı qeyd olunmuşdur. Buna görə də, oxşar tipli dayanıqlılıq məsələlərinə, bir qayda olaraq, Stratonoviç formada S. d. t. üçün baxılır.

Çoxölçülü halda $(d>1)$ analoji xassə (ixtiyari müntəzəm approksimasiyanın simmetrikliyi) yalnız (*) tənliyinin əmsallarının tam inteqrallananlığı şərti (Frobenius şərti), yəni

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\,b_{kl} - \frac{\partial b_{il}}{\partial x_k}\,b_{kj}\right) = 0,\ i=1,\dots,n,\quad j,l=1,\dots,d$$

ödənildiyi halda yerinə yetir. Ümumi halda (bəzi texniki məhdudiyyətlərlə) Z semimartinqalının müntəzəm approksimasiyası $\{Z^\delta=(Z^{\delta_1},Z^{\delta_2},\dots,Z^{\delta_d}),\ \delta>0\}$, əgər, məs.,

$$Z^{\delta_i}\circ Z^{\delta_j} - Z^i\circ Z^j \to 0,\ \delta\to 0,\ i,j=1,\dots,d$$

münasibəti ödənilərsə, simmetrik approksimasiya olur. Burada $X\circ Y_t = \int_0^t X_s\circ d Y_s$ *Stratonoviç stoxastik inteqralıdır.* Simmetrik approksimasiyaya mühüm misal

$$Z_t^\delta = Z*\varphi_t = \int_{t-\delta}^{t} Z_s\,\varphi^\delta(t-s)\,ds,\ t\ge 0$$

kompozisiya tipli approksimasiyadır, burada

$$\varphi\in L^2[0,1],\ \int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1,\ \varphi^\delta(t)=\delta^{-1}\varphi(t\delta^{-1}),$$
$$t\in[0,\delta].$$

Qeyri – simmetrik approksimasiyaların mühüm sinfini də qeyd etmək lazımdır, belə ki, bu approksimasiyalar üçün

$$Z^{\delta_i}\circ Z^{\delta_j} - Z^i\circ Z^j \to A_{ij},\ \delta\to 0,\ i,j=1,\dots,d$$

münasibəti ödənilir, burada A_{ij} – məhdud variasiyalı proseslərdir. Belə approksimasiyalar üçün approksimasiya olunan tənliklərin həlləri X^δ Stratonoviç formada S. d. t.-in həllinə yığılırlar, bu həll isə (*)-dan «düzəlişlərlə» fərqlənir, bu düzəlişlər isə A_{ij} prosesləri üzrə inteqrallarla ifadə olunur. Qeyri – simmetrik approksimasiyaya misal: $Z^\delta = Z + (Z-\hat Z)^\delta$, $\delta>0$, burada $\hat Z$ – qeyd olunmuş semimartinqal, $\{(Z-\hat Z)^\delta,\ \delta>0\}$, – $(Z-\hat Z)$ semimartinqalının simmetrik approksimasiyasıdır. Bu halda $A_{ij} = \left(\left\langle \hat Z^j, Z^i\right\rangle - \left\langle Z^j, \hat Z^i\right\rangle\right)\Big/2$ prosesləri, ümumiyyətlə, sıfra bərabər deyildirlər. Digər misallar, məs., [1]-də verilir.

Əd.: [1] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [2] Мацкявичюс В., «Литов. матем. сб.», 1985, т. 25, № 4, с. 72–84; [3] Picard J., «Probab. Th. Rel. Fields», 1989, v. 81, № 3, p. 383–452.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK Stratonoviç formasında, simmetrik stoxastik differensial tənlik **« стохастическое дифференциальное уравнение** в форме Стратоновича, симметрическое стохастическое дифференциальное уравнение; **stochastic differential equation** in the Stratonovich form **»**, –

$$d X_t = b(X_s)\circ d Z_s,\quad X_0 = x \qquad (1)$$

şəklində *stoxastik differensial tənlikdir*, $d Z_s$-in qarşısında $\circ$ simvolu *Stratonoviç stoxastik inteqralının* işarəsidir, $b=\|b_{ij}\|$ – $b_{ij}\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,d$ funksiyalarından ibarət matrisdir, $Z=(Z^1,Z^2,\dots,Z^d)$ – hər hansı stoxastik bazisdə baxılan d – ölçülü kəsilməz semimartinqaldır, $x\in\mathbb{R}^n$. (1) tənliyinin həlli elə $X=(X^1,X^2,\dots,X^n)$ təsadüfi prosesinə (semimartinqala) deyilir ki, bu proses üçün

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\circ d Z_s,\quad t\ge 0$$

və ya açıq şəkildə

$$X_t^i = x_i + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t b_{ij}(X_s)\circ d Z_s^j,\quad t\ge 0,\quad i=1,\dots,n,$$

sanki yəqin ödənilsin. (2) tənliyi aşağıdakı İto S. d. t.-nə ekvivalentdir:

$$X_t^i = x_i + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t b_{ij}(X_s)\,d Z_s^j +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d}\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kl}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\right)(X_s)\,d\left\langle Z^j, Z^l\right\rangle_s. \qquad (3)$$

Məs., (1) tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi (3) tənliyi üçün də bu məsələyə gətirilir. Buna görə, məs., b_{ij}-lərin 1-ci və 2-ci tərtib məhdud törəmələrinin varlığı kifayətdir. Əgər hər hansı j üçün Z^j məhdud variasiyalı proses olarsa (məs., $Z_s^j = t$), onda uyğun əmsalların yalnız 1-ci tərtib kəsilməz məhdud törəmələrinin varlığını tələb etmək kifayətdir.

Stratonoviç stoxastik inteqralı adi inteqrallara xas olan analoji xassələrə malik olduğundan, Stratonoviç formada S. d. t. də adi differensial tənliklərə xas olan (belə tənliklər üçün idarəolunan Z^i martinqalları məhdud variasiyalı proseslər olur) analoji xassələrə malikdir. Buna görə də, Stratonoviç formada S. d. t.-lərini elə məsələlərdə istifadə əlverişlidir ki, bu məsələlərdə problemin qoyuluşuna görə adi və stoxastik differensial tənliklərə eyni

zamanda baxılır və ya daha ümumi halda, ola bilər ki, müxtəlif martinqal hissələrli idarəedici semimartinqallarlı stoxastik differensial tənliklərə baxılır (məs., stoxastik differensial tənliklərin approksimasiyası, sağ tərəfi təsadüfi olan adi differensial tənliklər üçün limit teoremləri, stoxastik həndəsə, stoxastik variasiya hesabı, stoxastik mexanikada). Stratonoviç formada S. d. t. korrelyasiya müddəti az olan və bəyaz küyə yaxın olan real küylü fiziki sistemlərin yaxşı adekvat modeli kimi tez-tez istifadə olunur (bax, məs., [3]).

Z semimartinqalı kəsilən aşağıdakı tip tənliklərə də baxılır:

$$d X_t = b(X_{t-}) \circ d Z_t .$$

Əd.: [1] Стратонович Р. Л., «Вестник Моск. ун.-та. Сер. матем., мех.», 1964, т. 1, с. 3–12; [2] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986; [3] Хорстхемке В., Лефевр Р., Индуцированные шумом переходы, пер. с англ., М., 1987.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; təkrar loqarifm qanunu **« стохастическое дифференциальное уравнение;** закон повторного логарифма; law of the iterated logarithm for a **stochastic differential equation »**: əgər X_t məhdud σ, b əmsallarlı $(\sigma \in C(\mathbb{R}^1))$, birölçülü

$$dX_t = \sigma(X_t)d\boldsymbol{w}_t + b(X_t)dt, \; X_0 = X$$

stoxastik differensial tənliyinin həllidirsə, onda təkrar loqarifm qanunu doğrudur və

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{|X_t - X_0|}{\sqrt{2t \ln\ln 1/t}} = \left|\sigma(X_0)\right| \right\} = 1 .$$

Kəsilməz diffuziyalı və məhdud aparılı İto prosesləri üçün analoji bərabərlik doğrudur.

Əd.: [1] Маккин Г., Стохастические интегралы, пер. с англ., М., 1972.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK tərs **« стохастическое дифференциальное уравнение** обратное; reverse **stochastic differential equation »** – bax, *Tərs stoxastik differensial tənlik*.

STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK; zəif həll **« стохастическое дифференциальное уравнение;** слабое решение; weak solution of a **stochastic differential equation »**: – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{A}$ -ya daxil olunmuş $(\mathcal{A}_t)$ σ – cəbrlərinin artan axını, $\mathcal{A}_t$ -yə nəzərən Viner prosesi $\boldsymbol{w}(t)$ və

$$\mathbf{P}\left\{ X_t = x + \int_0^t b(s, X)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X)\, d\boldsymbol{w}_s, \, t \geq 0 \right\} = 1$$

münasibətini ödəyən $(\mathcal{A}_t)$ – uzlaşdırılmış X_t prosesindən ibarət $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{A}_t, \boldsymbol{w}(t), X_t, t \geq 0)$ toplusuna

$$d X_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)d\boldsymbol{w}_t, \quad X_0 = x$$

stoxastik differensial tənliyinin zəif həlli deyilir. Adətən, qısa şəkildə X_t prosesinin özünə zəif həll deyilir və bu halda ehtimal fəzası və Viner prosesinin qeyd olunmadığı fərz olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [3] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., Multidimensional diffusion processes, B. – [a. o.], 1979; [4] Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., [и др.] в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 45. Теория вероятностей – 3, М., 1989.

STOXASTİK DİNAMİK PROQRAMLAŞDIRMA « стохастическое динамическое программирование; stochastic dynamic programming » – stoxastik optimal idarəetmə məsələlərinin ardıcıl, mərhələli qərarlar qəbuletmə yolu ilə (idarəedici parametrləri seçmə) həlli metodudur. S. d. p. metodunun əsas ideyasını Bellmanın optimallıq prinsipi təşkil edir (bax, [1]); bu prinsipə görə hər bir addımda bu addımın sanki sonuncu addım olduğu qəbul edilib, optimal surətdə davranılmalıdır ki, məqsəd funksionalı bütün mümkün növbəti idarələr üzrə özünün optimumuna bərabər olsun. n – addımlı S. d. p.-nın tipik məsələsi şərti riyazi gözləmələr terminlərilə ifadə oluna bilinir (bax, [7]); digər operator (ümumi) yanaşması [6]-da işlənilmişdir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}_{n-1} \subseteq \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$, – σ – cəbrlər axını, A – idarələrin (həllərin) ölçülən fəzası, $\Phi(\omega, a_1, \ldots, a_n)$, – $\Omega \times A^n$-də ölçülən funksional (sadəlik üçün məhdud) olsun. Burada a_t, – t addımında seçilən idarə kimi, $\mathcal{A}_{t-1}$, – a_t -nin seçildiyi anda informasiya kimi interpretasiya olunur. α_t ilə Ω -nın A -ya ixtiyari $\mathcal{A}_{t-1}$ – ölçülən inikası işarə olunmuşdur. Bütün $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ inikasları üzrə $\mathbf{M}[\Phi(\omega, \alpha_1(\omega), \ldots, \alpha_n(\omega)) | \mathcal{A}_0)]$ kəmiyyətini maksimallaşdırmaq tələb olunur. $\sup_{\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n} \mathbf{M}[\Phi | \mathcal{A}_t] = w_t(\omega)$ olsun. Fərz olunarsa ki, supremum götürülməsi ölçülənliyə təsir etmir, ω_t $\mathcal{A}_t$ – ölçüləndir; onda optimallıq prinsipi–

$$w_{t-1}(\omega) = \sup_{\alpha_t} \mathbf{M}[w_t(\omega) | \mathcal{A}_{t-1}], \quad t = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

optimallıq tənliyi və belə bir hökmlə ifadə olunur, əgər $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ funksiyaları (*)-da supremum təmin edərsə, onda

$$w_0(\omega) = \mathbf{M}[\Phi(\omega, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^* | \mathcal{A}_0]$$

bərabərliyi doğrudur. Məsələnin qoyuluşu və optimallıq prinsipi bəzi əlavələrlə sonsuzaddımlı sxemlər üçün və α_t funksiyalarının seçilməsi məhdudiyyətli sxemlər üçün ümumiləşdirilir; xüsusi hallarda, metod kəsilməz dəyişən t halı üçün də tətbiq olunur.

«S. d. p.»-nın adı tarixən ən dar sinif məsələlər üçün özünə vəsiqə almışdır ki, bu məsələlərdə $\{\mathcal{A}_t\}$ axını, adətən, Markov prosesi olan diskret zamanlı idarəolunan təsadüfi proseslə doğurulur, Φ funksionalı isə bu prosesdən additiv asılıdır.

Bax, *İdarəolunan Markov zənciri.*

Əd.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [2] Ховард Р.–А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964; [3] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [4] Флеминг У., Ришел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, пер. с англ., М., 1978; [5] Bertsekas D. P., Dynamic

programming and stochastic control, N. Y., 1976; [6] Бертсекас Д., Шрив С., Стохастическое оптимальное управление, пер. с англ., M., 1985; [7] Whittle P., Optimization over time, v. 1–2, N. Y., 1983.

STOXASTİK EKSPERİMENT « стохастический эксперимент; stochastic experiment » – mümkün olan nəticələrindən hansı birinin baş verəcəyi əvvəlcədən məlum olmayan eksperimentə deyilir.

Ehtimal nəzəriyyəsində hər bir stoxastik eksperimentə uyğun müəyyən bir Ω çoxluğu qarşı qoyulur. Bu çoxluğun elementləri baxılan eksperimentin mümkün ola bilən nəticələrini doldun və tam mənası ilə ifadə edir. Ω çoxluğu *elementar hadisələr fəzası*, onun elementləri isə *elementar hadisələr* adlanır. Elementar hadisələr, adətən, ω ilə işarə olunur. Baxılan stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən hər bir hadisə Ω çoxluğunun müəyyən bir altçoxluğudur.

Ehtimal nəzəriyyəsində müəyyən σ – şərtlər kompleksi ödənilməklə təkrarlana bilinən stoxastik eksperimentlər və bu eksperimentlərdə baş verəcək və ya baş verməyəcək təsadüfi hadisələr araşdırılır.

Misallar.

1) Üzərində gerb və şəbəkə qeyd olunmuş «düzgün» metal pul bir dəfə atılır. Bu misalda S. e. metal pulun atılması, σ – şərtlər kompleksi isə metal pulun «düzgün» olması və bir metal pulun bir dəfə atılmasından ibarətdir. Elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{G, Ş\}$ kimi işarə edilir, burada $\{G\}$ – pulun gerb üzünün, $\{Ş\}$ isə şəbəkə üzünün yuxarı olmaqla düşməsi nəticələri – elementar hadisələrdir.

2) Görüş məsələsi. İki şəxs – A və B, $[0, T]$ müddəti ərzində görüşməyi şərtləşmişlər. Bu halda S. e. $[0, T] \times [0, T]$ kvadratının nöqtələri çoxluğu olacaqdır. x ilə A-nın, y ilə B-nin görüş yerinə gəlmə anları işarə olunarsa, elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le T,\ 0 \le y \le T\}$ çoxluğu olacaqdır.

3) Braun xaotik hərəkəti edən zərrəcik maye, yaxud qaz molekulları ilə toqquşma nəticəsində vəziyyətini dəyişir. Bu halda zərrəciyin Braun xaotik hərəkəti S. e.-dir. Müəyyən müddət ərzində müşahidə apararaq, onun hərəkət trayektoriyasını çəkmək olar. Zərrəciyin bütün mümkün ola bilən trayektoriyaları çoxluğu elementar hadisələr fəzası, bir-birilə üst-üstə düşməyən trayektoriyalardan hər biri elementar hadisədir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, 1979.

STOXASTİK EKSPONENT « стохастическая экспонента; stochastic exponential » – *təsadüfi prosesdir* və

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s - dX_s, \quad t \ge 0$$

– xətti stoxastik tənliyinin həllidir; X_t – hər hansı $\{\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t), \mathbf{P}\}$ stoxastik bazisində verilmiş semimartinqaldır. Bu tənliyin həlli

$$e_t(X) = \exp\left\{ X_t - X_0 - (1/2)\left\langle X^C \right\rangle_t \right\} \times$$

$$\times \prod_{s \le t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s)$$

prosesidir, $\left\langle X^C \right\rangle_t$, – X_t prosesinin kəsilməz martinqal komponentinin (ayrılışın kəsilməz martinqal toplanan həddi) kvadratik xarakteristikasıdır, $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$. Bu həll semimartinqallar sinfində yeganədir (sanki yəqin fərqlənməmə dəqiqliyilə) (bax, [1]). Əgər X_t və Y_t semimartinqallar olarsa, onda $e_t(X)\, e_t(Y) = e_t(X + Y + [X, Y])$, burada $[X, Y]$ – bu proseslərin kvadratik kovariasiyasıdır. Ehtimal ölçülərinin mütləq kəsilməzliyi və semimartinqalların sonluölçülü paylanmalarının asılı olmayan artımlarlı proseslərin paylanmalarına zəif yığılması məsələlərinin öyrənilməsində S. e. mühüm rol oynayır (bax, [2]). X_t kəsilməz martinqal olduğu halda, bütün $t \ge 0$ qiymətlərində $e_t(X)$ prosesinin martinqal olması üçün kafi şərt $\mathbf{M} \exp\{(1/2)\langle X \rangle_\infty\} < \infty$ şərtinin ödənilməsidir. Bu istiqamətdə bir sıra sonrakı nəticələr [3]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Doleans-Dade C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1970, Bd 16, S. 181–94; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, M., 1986; [3] Новиков А. А., «Матем. заметки», 1984, т. 35, в. 3, с. 455–71.

STOXASTİK EKVİVALENT TƏSADÜFİ PROSESLƏR « стохастически эквивалентные случайные процессы; stochastically equivalent random processes » – qiymətləri $(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ fəzasından olan, eyni bir parametrik T çoxluğunda, eyni bir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş, ixtiyari $t \in T$ qiymətində $\mathbf{P}\{\zeta_1(t) \ne \zeta_2(t)\} = 0$ şərtini ödəyən $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$ *təsadüfi prosesləridir* (bəzən belə də deyilir ki, bunlardan biri digərinin modifikasiyasıdır). Əgər $\mathbf{P}\left\{ \bigcup_{t \in T} \{\zeta_1(t) \ne \zeta_2(t)\} \right\} = 0$ olarsa, onda bu iki proses fərqlənməyən proseslər adlanır.

Bu terminlə yanaşı «geniş mənada stoxastik ekvivalentlik» termini də istifadə olunur: müxtəlif ehtimal fəzalarında, lakin eyni bir parametrik çoxluq və eyni bir faza fəzasında verilmiş, bütün sonluölçülü paylanmaları üst-üstə düşən təsadüfi proseslər cütü geniş mənada stoxastik ekvivalent proseslər adlanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., M., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., M., 1985.

STOXASTİK EKVİVALENTLİK « стохастическая эквивалентность; stochastic equivalence » – yalnız sıfır ehtimallı çoxluqda fərqlənən təsadüfi kəmiyyətlər arasında ekvivalentlik münasibətidir. Eyni ehtimal fəzası $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-də verilən $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ və $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətləri $\mathbf{P}\{\omega : \xi_1(\omega) = \xi_2(\omega)\} = 1$ şərtini ödəyərsə, onlar stoxastik ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

Eyni ehtimal fəzasında təyin olunmuş $\zeta_1(\omega; t)$ və $\zeta_2(\omega; t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesləri ixtiyari $t \in T$ qiymətində $\mathbf{P}\{\omega : \zeta_1(\omega; t) = \zeta_2(\omega; t)\} = 1$ şərtini ödəyərsə, onlar stoxastik ekvivalent təsadüfi proseslər adlanır. Əgər $\zeta_1(t)$ və $\zeta_2(t)$, $t \in T$ təsadüfi proseslərinin uyğun sonluölçülü paylanmaları üst-üstə düşərsə, bu halda «geniş mənada S. e.» termini də işlədilir.

STOXASTİK FƏRQLƏNMƏMƏZLİK « стохастическая неразличимость; stochastic indistinguishability » – $\zeta = (\zeta_t(\omega))_{t\geq 0}$ və $\zeta^* = (\zeta_t^*(\omega))_{t\geq 0}$ təsadüfi proseslərinin xassəsidir və bu xassə belə ifadə olunur: $\{\zeta \neq \zeta^*\} = \{(\omega, t) : \zeta_t(\omega) \neq \zeta_t^*(\omega)\}$ *təsadüfi çoxluğu* əhəmiyyətsiz çoxluqdur, yəni $\mathbf{P}\{\omega :$ elə $t \geq 0$ vardır ki, $(\omega, t) \in \{\zeta \neq \zeta^*\}\} = 0$. Əgər ζ və ζ^* stoxastik fərqli olmayan proseslərdirsə, onda bütün $t \geq 0$ qiymətlərində $\zeta_t = \zeta_t^*$ olur, yəni ζ və ζ^* stoxastik ekvivalent proseslərdir. Lakin tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyildir, amma sağdan (soldan) kəsilməz proseslər üçün stoxastik ekvivalentlikdən S. f. o. alınır.

Əd.: [1] Д е л л а ш е р и К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

STOXASTİK HESAB « стохастическое исчисление; stochastic calcules », s t o x a s t i k a n a l i z, – $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0})$ filtrlənmiş ehtimal fəzasında (stoxastik bazisində) verilmiş modellərin ehtimali analizidir. S. h. bütün araşdırmaların əsasında *stoxastik bazis* anlayışının olduğunu aksiomlaşdırır. Stoxastik bazis onunla səciyyəvidir ki, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ standart ehtimal fəzasında əlavə strukturlu azalmayan σ – cəbrlərin (filtrasiyanın) $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$, $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}_s \subseteq \mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A}$, $s < t$ axını daxil olunur, burada $\mathscr{A}_t$, adətən, t anına qədər müşahidə olunan hadisələrin σ – cəbri kimi interpretasiya olunur.

S. h.-ın əsas anlayışları Markov anları (dayanma anları), opsional və öngörül σ – cəbrlər və proseslər, martinqallar və lokal martinqallar, semimartinqallar və onların lokal xarakteristikaları kimi obyektlərdir. S. h.-da *stoxastik inteqral nəzəriyyəsi* və *İto dəyişənləri əvəzetmə düsturu* mərkəzi yer tutur.

Təsadüfi hadisə və ya prosesin evolyusiyasının dinamikasını təsvir edən bir obyekt kimi filtrasiyanın daxil olunması təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərinə eyni bir nöqteyi – nəzərdən baxmağa imkan verir. Bu fakt təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və bu nəzəriyyənin çoxşaxəli tətbiqlərində səmərəli istifadə olunmuşdur: təsadüfi proseslərin filtrasiyası və idarəolunmasında, stoxastik approksimasiyada, təsadüfi proseslərin statistikasında, maliyyə riyaziyyatında. Bu tətbiqlər isə öz növbəsində S. h.-ın inkişafına mühüm təsir göstərmiş və göstərməkdədir.

S. h.-ın əsasları A. N. Kolmoqorovun diffuzion Markov prosesləri nəzəriyyəsi və bu nəzəriyyənin xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi üzrə, K. İtonun (K. Ito) stoxastik inteqrallama nəzəriyyəsi üzrə, Braun hərəkəti və mərkəzlənmiş Puasson ölçüsü üzrə, C. Dubun (J. Doob) martinqallar nəzəriyyəsi üzrə əsərləri zəminində formalaşmışdır. S. h.-ın sonrakı inkişafı martinqallar nəzəriyyəsinin, tənliklərin stoxastik inteqrallanması və stoxastik differensiallanması ilə paralel olmuşdur. Müasir S. h. nəzəriyyəsi 20-ci əsrin 70-ci illərinin sonunda, təsadüfi proseslərin ümumi nəzəriyyəsi və kəsilməz və kəsilən təsadüfi proseslər üzrə (diskret zaman halı da daxil olmaqla) stoxastik inteqrallanmanın vahid nəzəriyyəsi yarandığı dövrdə formalaşmışdır.

Əd.: [1] А н у л о в а С. В. [и др.], Стохастическое исчисление, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 45, М., 1989; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [4] Ж а к о д Ж., Ш и р я е в А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., т. 1–2, М., 1994; [5] J a c o d J., Calcul stochastique et problems de martingales., B., 1979 (Lecture Notes in Math., v. 714) .

STOXASTİK HESABLAMA ALQORİTMİ « стохастический вычислительный алгоритм; stochastic computational algorithm » – təsadüfi ədədlər üzərində əməliyyatlarla qurulan hesablama alqoritmidir ki, sonda hesablama nəticəsi təsadüfi olur. Təsadüfi proseslər və təzahürlərin ədədi tədqiqində istifadə olunan *statistik modelləşdirmə* alqoritmləri, inteqralların hesablanması, inteqral tənliklərin həlli, sərhəd məsələləri kimi determinik məsələlərin həlli üçün istifadə olunan *Monte – Karlo metodu* alqoritmləri stoxastik alqoritmlərdir.

S. h. a.-lərinin əsas sinfini təsadüfi düyünlərli interpolyasion və kvadratur düsturların randomlanmış hesablama prosedurları təşkil edir. Burada randomizasiya, adətən, elə aparılır ki, S. h. a. ilə hesablanma nəticəsinin riyazi gözləməsi axtarılan kəmiyyətə bərabər olsun. Son nəticədə statistik qiymət S. h. a.-nin bir neçə realizasiyalarının orta qiyməti kimi götürülür. Böyük dim. – ölçülü məsələlər üçün randomizasiyadan istifadə etməklə EHM vaxt yaddaşının nəzərə çarpan dərəcədə qənaətinə nail olunur (bax, [1] – [4]). Bu isə 2-ci növ inteqral tənliklərin həlli üçün sonlu cəmlərin randomlanmış metodunun statistik qiymətlərinin çətinliklə qurulduğunu göstərir (bax, [4]). Eyni zamanda alqoritmin bir neçə realizasiyasını qurmağa imkan verən çox prosessorlu hesablama sistemlərindən istifadə edildikdə belə, S. h. a.-ləri xüsusilə effektiv olur.

Çoxdəyişənli funksiyanın qlobal ekstremumunun təsadüfi axtarışının realizasiyasında xüsusi S. h. a.-ləri qurulur. Belə alqoritmlər funksiyanın qiyməti təsadüfi xəta ilə təyin olunduğu halda olduqca effektivdir.

Əd.: [1] Б а х в а л о в Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] Е р м а к о в С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] С о б о л ь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973; [4] М и х а й л о в Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте – Карло, Новосиб., 1974; [5] Р а с т р и г и н Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

STOXASTİK HƏNDƏSƏ « стохастическая геометрия; stochastic geometry » – həndəsə və ehtimal nəzəriyyəsinin qovuşmasında özünə yer tutmuş tətbiqi riyazi fəndir. S. h.-nin riyazi apparatı *inteqral həndəsə və həndəsi ehtimallar* haqqında məsələləri əhatə edir; *təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi metodları*, xüsusilə də, *nöqtəvi təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsi metodlarının və ideyalarının S. h.-yə daxil olunması S. h.-nin səciyyəvi xüsusiyyətidir.

S. h.-də çoxelementli həndəsi obyektlərin stoxastik modelləşdirilmə yolu ilə araşdırılmasında statistik metodlar tətbiq olunur. Bu halda fərz olunur ki, araşdırılan obyekt seçilmiş təsadüfi *həndəsi prosesin* realizasiyasıdır (və ya realizasiyanın bir hissəsidir). Obyektlər olduqca mürəkkəb ola bilər, məs., bioloji liflər, geoloji parçalanmalar, metalların səpələnməsi və s. strukturlu. Bu obyektlərin koordinat təsviri ədədi verilənlərin «ağlasığmaz» çoxluğunun üzərində işləmə tələb edir, bu halda isə hər hansı bir qanunauyğunluğu aşkar etmək çətindir. Bununla belə, stoxastik modelləşdirmə nəzəriyyədən məlum olan qanunauyğunluqları aşkar etməyə, baxılan strukturları az sayda parametrlərlə təsvir etməyə imkan verir; məs., nöqtələrin, düzxətlərin, müstəvilərin və s. stasionar Puasson prosesi halında bir parametrin – intensivliyin olması kifayətdir. Özünün sadəliyinə görə S. h.-nin əsas modelləri kimi Puasson prosesləri və ikinci dərəcəli proseslər, yəni Puasson prosesinin doğurduğu proseslər, məs., *təsadüfi mozaikalar*, *Bul modelləri* hesab edilir.

S. h.-nin əsas xüsusiyyəti «əsas» fəzada təsir edən qruplara nəzərən invariant paylanmalara malik həndəsi proseslərə maraqdır. Paralel yerinidəyişmələr qrupu, Evklid hərəkətləri qrupu və $\mathbb{R}^n$ fəzasının affin çevirmələri qrupu ən çox baxılan qruplardır.

S. h.-nin üç əsas inkişaf istiqamətini qeyd etmək olar: 1) həndəsi prosesləri öyrənən nəzəri istiqamət; 2) verilən stoxastik modellə baxılan realizasiyanın uzlaşma kriterisini və həmçinin modelin parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi metodlarını öyrənən statistik istiqamət (bax, [3]); 3) S. h.-nin nəticələrinin astrofizika, arxeologiya, biologiya və s. məsələlərində tətbiqi ilə məşğul olan tətbiqi istiqamət (bax, [4]). Sonuncu istiqamətdə alınmış işlərdən C. Kendallın və b. araşdırmalarında, *təsadüfi şeyp* anlayışı Lends – Enddə (İngiltərə) sanki xətti yerləşmiş üç qədim daşın, yüksək faizlə, olması haqqında məsələnin həllində tətbiq olunur.

S. h. *riyazi steorologiya*, həndəsi statistika (bax, [6]), *təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsi* (bax, [1]), məs., kəsri dim. – ölçülü təsadüfi çoxluqlar nəzəriyyəsi (bax, [7]), çoxobrazlılar prosesləri (bax, [8]), riyazi morfologiya və təsvirlər analizi (bax, [9]) kimi sahələrlə çuğlaşır.

Əd.: [1] Материон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., M., 1978; [2] Stoyan D., Kendall W., Mecke J., Stochastic geometry and its applications, B., 1987; [3] Geometrical probability and biological structures, B. – [a. o.], 1978; [4] Kendall D. G, Kendall W. S, «Advances Appl. Probab.», 1980, v. 12, p. 380-424; [5] Ripley B. D., Spatial statistics, N. Y. – [a. o.], 1981; [6] Mandelbrot B. B., Fractals. From, chance dimension, S. F., 1977; [7] Mecke J., «Probab and Math. Statist.», 1981, v. 2, p. 31–35; [9] Serra J., Image analysis and mathematical morphology, N. Y., 1982.

STOXASTİK XƏTTİ CƏBR « стохастическая линейная алгебра; stochastic linear algebra » – xətti cəbrin əməlləri ilə uzlaşdırılmış, yəni cəbr elementlərinin toplama və vurma əməlləri və cəbr elementinin meydan elementinə vurulma əməli ilə uzlaşdırılmış ehtimal strukturlu, xətti cəbrdir (meydan üzərində).

S. x. c. anlayışı qiymətlərini xətti cəbrdən alan təsadüfi kəmiyyətlərlə əlaqədar olaraq təbii surətdə yaranır. Bu anlayışa ilk dəfə [1]-də U. Qrenanderin kitabında təsadüf edilir.

S. x. c.-in mühüm halı

$$\Xi = \{m_{ij}\},\ i = 1, \dots, k,\quad j = 1, \dots, k$$

təsadüfi kvadrat matrislər cəbri halıdır. Əgər belə matrislər üçün norma

$$\|\Xi\| = \max_i \sum_j |m_{ij}|$$

düsturu ilə təyin olunarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{M} \log \| \Xi_1 \Xi_2 \dots \Xi_n \|$$

limiti vardır (bax, [2]) və limit sonlu olarsa, o,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \| \Xi_1 \Xi_2 \dots \Xi_n \|$$

limitinə bərabərdir. Təsadüfi xətti tənliklər nəzəriyyəsi (bax, *Cəbri təsadüfi tənlik*) S. x. c.-in bir hissəsidir.

Xətti cəbrdə iki binar əməl – toplama və vurma əməlləri olduğundan, ehtimal ölçülərinin kompozisiyasının iki tipinə baxmaq olar: bunlardan birincisi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəminə, ikincisi onların hasilinə uyğundur. Xətti cəbr üzərinə qoyulan müəyyən məhdudiyyətlərlə additiv və multiplikativ hallara uyğun limit qanunları arasında əlaqə müəyyənləşdirilmişdir.

Əd.: [1] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., M., 1965; [2] Furstenberg H., Kesten H., «Ann. Math. Statist.», 1960, v. 31, № 2, p. 457–69.

STOXASTİK XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİK ikinci tərtib **« стохастическое линейное параболическое уравнение** второго порядка; **stochastic linear parabolic equation** of second order **»** – bax, *Xətti stoxastik parabolik tənlik* ikinci tərtib.

STOXASTİK XƏTTİ REQULYATOR « стохастический линейный регулятор; stochastic linear controller » – $w = (w_t)_{t\geq 0}$ vektor Viner prosesinə nəzərən

$$d X_t = (a(t) X_t + c(t) U_t) d t + b(t) d w_t$$

İto differensialı ilə $X = (X_t)_{t\geq 0}$ vektor diffuzion prosesinin idarəolunma məsələsində $U_t = L(t) X_t$ olan $U = (U_t)_{t\geq 0}$ idarəetmə prosesi ilə təsvir olunan anlayışdır.

$$h > 0,\ H(t) \geq 0,\ R(t) > 0,$$

$$V_T(U) = \mathbf{M}\left(X_t^* h X_T + \int_0^T (X_t^* H(t) X_t + U_t^* R(t) U_t)\, d t \right)$$

keyfiyyət funksionalı olarsa ($*$ – transponirəetmə işarəsidir), S. x. r.-un optimal güclənmə əmsalı $L^0(t)$

$$L^0(t) = - R^{-1}(t) c^*(t) P(t)$$

düsturu ilə verilir, burada $P(t)$ –

$$-\frac{dP(t)}{dt} = a^*(t) P(t) + P(t) a(t) + H(t) -$$
$$- P(t) c(t) R^{-1}(t) c^*(t) P(t),\ P(t) = h$$

Rikkati matris tənliyinin həllidir.

Əd.: [1] Meditch J. S., Stochastic optimal linear estimation and control, N. Y., 1970; [2] Красовский Н. Н., Лидский Э., «Автоматика и телемеханика», 1961, т. 22, № 11, с. 1425–31.

STOXASTİK İNTEQRAL « стохастический интеграл; stochastic integral » – elə inteqraldır ki, ən ümumi halda, semimartinqal olan proseslər üçün «yaxşı» təyin olunur. Fərz olunur ki, $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A}(\mathscr{A}_t), \mathbf{P})$ stoxastik bazisində $H = (H_t, \mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ *təsadüfi prosesi* və $X = (X_t, \mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ *semimartinqalı* verilmişdir. H təsadüfi prosesinin X semimartinqalı üzrə stoxastik inteqralı

$$\int_0^{\circ} H_s\, d X_s = \left(\int_0^t H_s\, d X_s \right)_{t\geq 0}$$

və ya

$$H \cdot X = (H \cdot X_t)_{t\geq 0}$$

şəklində işarə olunan və aşağıdakı kimi konstruksiya olunan prosesə deyilir. H prosesi $H = Y I_{[[0]]}$ şəklində sadə proses (burada Y, – $\mathscr{A}_0$ – ölçülən məhdud funksiyadır) və ya $H = Y I_{]]r, s[[}$, $r < s$ (burada Y, – $\mathscr{A}_r$ – ölçülən məhdud təsadüfi kəmiyyətdir) olsun; $[[0]] = \{(\omega, t) : t = 0\}$, $]]r, s]] = \{(\omega, t) : r < t \leq s\}$. Onda $\mathscr{B}$ stoxastik bazisində verilmiş $X = (X_t)_{t\geq 0}$ semimartinqalı üçün $H \cdot X$ S. i.-ı

$$H \cdot X_t = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad H = Y I_{[[0]]} \\ Y(X_{s\wedge t} - X_{z\wedge t}), & \text{əgər} \quad H = Y_{]]r,s]]} \end{cases} \text{ olarsa,} \qquad (*)$$

düsturu ilə təyin olunur. Sadə təsadüfi H funksiyası üçün (*) düsturu ilə təyin olunan $H \to H \cdot X$ inikası aşağıdakı xassələrə malik olan, bütün lokal məhdud öngörül H prosesləri üçün genişləndirilə bilinir (yenə də $H \cdot X$ kimi işarə olunan və H -ın X üzrə S. i.-ı adlanan) :

1) $H \cdot X$ – trayektoriyaları D fəzasından olan (sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan trayektoriyalar fəzası) uzlaşdırılmış prosesdir;

2) $H \to H \cdot X$ xətti inikasdır, yəni $(aH + K) \cdot X$ və $aH \cdot X + K \cdot X$ prosesləri bir-birindən fərqlənməyən proseslərdir;

3) əgər $(H^n)_{n\geq 1}$ H prosesinə nöqtəvi yığılan öngörül proseslər ardıcıllığı, K lokal məhdud öngörül proses olduqda $|H^n| \leq K$ olarsa, onda bütün $t \in \mathbb{R}_+$ üçün $H^n \cdot X_t \to H \cdot X_t$ ehtimala görə yığılması və hətta $\sup_{s\leq t} |H^n \cdot X_s - H \cdot X_s| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ münasibəti də ödənilir;

4) $H \to H \cdot X$ inikası stoxastik əhəmiyyətsizlik dəqiqliyi ilə yeganədir, yalnız o halda ki, $H \to \alpha(H)$ əvvəlki xassələri ödəyən digər, genişləndirilmiş S. i. olduqda, $\alpha(H)$ və $H \cdot X$ S. i.-ları bir-birindən fərqlənməsinlər.

X – lokal martinqal olduğu halda verilən tərif lokal martinqal üzrə *stoxastik inteqralın* tərifi ilə üst-üstə düşür. Əgər X lokal məhdud variasiyalı proses olarsa, onda $H \cdot X$ stoxastik əhəmiyyətsizlik dəqiqliyi ilə, ayrı-ayrı trayektoriyalar üzrə $\int_0^{\circ} H_s \, d X_s$ Stiltyes inteqralı ilə üst-üstə düşür.

H -dan X semimartinqalı üzrə $H \cdot X$ S. i.-ı da semimartinqaldır; $(H \cdot X)_0 = 0$, $H \cdot X = H \cdot (X - X_0)$, $\Delta(H \cdot X) = H \Delta X$; əgər $X^T = X_0 + I_{[[0,T]]} \cdot X$ olarsa, onda bütün dayanma anları T üçün $(H \cdot X)^T = (H I_{[[0,T]]}) \cdot X$ olur; $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$; əgər T öngörül an, Y $\mathscr{A}_t$ – ölçülən təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda $(Y I_{[[T]]}) \cdot X = Y \Delta X_T I_{[[T,\infty]]}$; əgər $X = X_0 + M + A$ semimartinqalın lokal məhdud variasiyalı A prosesi və lokal kvadratik inteqrallanan M martinqalı ilə ayrılışı olarsa, onda ixtiyari lokal məhdud öngörül H prosesi üçün $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$ bərabərliyi doğrudur.

Təbiidir ki, konkret X prosesləri üçün $H \cdot X$ S. i.-ı təyin olunmuş H proseslərinin sinfi lokal məhdud öngörül proseslər sinfindən daha geniş ola bilər. Məs., $w = (w_t)_{t\geq 0}$ – Viner prosesi halında $\int_0^t H_s \, d w_s$, $t \geq 0$ S. i.-ı **İto stoxastik inteqralı** adlanır və bu inteqral hər bir $t > 0$ üçün: $\mathbf{P}\left\{ \int_0^t H_s^2 \, d s < \infty \right\} = 1$ şərtini ödəyən adaptasiya olunmuş $H = (H_t, \mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ prosesləri üçün təyin olunmuşdur. Əgər $M = (M_t, \mathscr{A}_t)$ lokal kvadratik inteqrallanan martinqal olarsa, onda $\int_0^t H_s \, d M_s$, $t \geq 0$ S. i.-ı elə öngörül $H = (H_t, \mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ prosesləri üçün təyin olunur ki, bunlar üçün $\int_0^t H_s^2 \, d \langle M \rangle_s$, $t \geq 0$ prosesi lokal inteqrallanan proses olur.

$X_0 = 0$, $\mathbf{M} X_t = 0$ şərtini ödəyən kvadratik inteqrallanan təsadüfi $X = (X_t)_{t\geq 0}$ prosesləri halında asılı olmayan artımlarlı proseslər $(AOAP)$ sinfi, $\mathscr{M}^2$ martinqalları və ortoqonal artımlarlı proseslər (OAP) sinfi arasında belə əlaqə vardır: $(AOAP) \subseteq \mathscr{M}^2 \subseteq (OAP)$. Təbiidir ki, $X \in (OAP)$ prosesi üzrə $H \cdot X$ S. i.-nı təyin etdikdə H üzərinə $X \in \mathscr{M}^2$ üçün qoyulan şərtlərlə müqayisədə daha ciddi şərtlər qoyulmalıdır. Məs., geniş mənada stoxastik proseslərin L^2 – nəzəriyyəsində $H \cdot X$ S. i. elə determinik $H = H(t)$, $t \geq 0$ funksiyaları üçün təyin olunur ki [$X \in (OAP)$ halında], $\int_0^t H^2(s) \, F(d s) < \infty$ şərtini ödəmiş olsun; $F(s,t] = \mathbf{M}[X_t - X_s]^2$.

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ – semimartinqalları halında İto dəyişənləri əvəzetmə düsturu mühüm rol oynayır; bu düstur $Y_t = f(X_t)$ ($f = f(x)$ ikiqat kəsilməz differensiallanan funksiyadır) olan $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ prosesi üçün ifadə almağa imkan verir. Bax, *Semimartinqal*.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [3] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXASTİK İNTEQRAL çoxqat **« стохастический интеграл** кратный; multiple **stochastic integral »** – bax, *Çoxqat Viner inteqralı.*

STOXASTİK İNTEQRAL əyrixətli **« стохастический интеграл** криволинейный; **stochastic line integral »** – bax, *Stoxastik inteqral* təsadüfi meydanda əyri üzrə.

STOXASTİK İNTEQRAL genişləndirilmiş **« стохастический интеграл** расширенный; extended **stochastic integral »** – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı.*

STOXASTİK İNTEQRAL Hilbert fəzasında **« стохастический интеграл** в гильбертовом пространстве; **stochastic integral** in Hilbert space **»** – qiymətləri $\mathfrak{X}$ Hilbert fəzasında olan X

semi – martinqalı üzrə H öngörül prosesinin $\int H_s\, dX_s$ inteqralıdır; H, – $\mathfrak{X}$-dən $\mathscr{I}$-ya xətti kəsilməz operatorların $\mathscr{L}(\mathfrak{X}, \mathscr{I})$ fəzasından qiymətlər alır. Əgər $\|H_s\|$ prosesi lokal məhdud proses olarsa, S. i. Hilbert fəzasında təyin olunmuşdur. Hilbert fəzasında S. i. skalyar haldakı kimi qurulur və onun xassələri skalyar stoxastik inteqralın xassələrinə analojidir.

Hilbert fəzasında S. i.-ın mühüm xüsusi halı kvadratik inteqrallanan martinqal üzrə Hilbert fəzasında izometrik S. i.-dır. Əgər X $\mathfrak{X}$-də martinqaldırsa və ixtiyari t qiymətində $\mathbf{M}\|X_t\|^2 < \infty$ olarsa, onda elə artan öngörül $\lhd X \rhd_t$ prosesi təyin olunmuşdur ki, bu proses üçün $\|X_t\|^2$, – $\lhd X \rhd_t$ – martinqaldır. Bundan başqa, qiymətləri nüvə operatorları fəzasından olan elə öngörül Q_t prosesi vardır ki, ixtiyari $x, y \in \mathfrak{X}$ üçün kvadratik variasiya aşağıdakı düsturla sanki yəqin təyin olunur:

$$\big\langle (X, x), (X, y) \big\rangle_t = \int\limits_{[0,t]} (Q_s\, x,\ y)\, d \lhd X \rhd_s,$$

Q_t mənfi deyildir və bütün t qiymətlərində öz-özünə qoşmadır.

$\mathscr{L}_{Q_t}$ – bütün xətti B operatorlarının çoxluğu olsun; bu operatorlar $Q_t^{1/2}$ $\mathfrak{X}$-də təyin olunmuşlar və $Q_t^{1/2}$ $\mathfrak{X}$-i $\mathscr{I}$-ya köçürən elə operatorlardır ki, $BQ_t^{1/2}$ Hilbert – Şmidt operatorudur. $|||\cdot|||$ Hilbert – Şmidt operatorları fəzasında norma olsun. Əgər ixtiyari t üçün $H_t \in \mathscr{L}_{Q_t}$ və ixtiyari t üçün

$$\mathbf{M} \int\limits_{[0,t]} \left\| \left| H_s\, Q_s^{1/2} \right| \right\|^2 d \lhd X \rhd_s \ < \infty$$

olarsa, onda Hilbert fəzasında S. i. $\mathscr{I}$-də kvadratik inteqrallanan martinqaldır və o, ixtiyari t üçün

$$\int H_s\, d \lhd X_s \rhd_t \ = \int\limits_{[0,t]} \left\| \left| H_s\, Q_s^{1/2} \right| \right\|^2 d \lhd X \rhd_s$$

«izometriya» xassəsini (sanki yəqin) ödəyir.

Əd.: [1] Metivier M., Semimartingales. A course on stochastic processes, B. – N. Y., 1982.

STOXASTİK İNTEQRAL lokal martinqal üzrə **« стохастический интеграл** по локальному мартингалу; **stochastic integral** with respect to local martingale **»** – aşağıdakı kimi təyin olunan *təsadüfi prosesdir.* $(\Omega, \mathscr{A}|\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisinin qeyd olunduğu fərz olunur. $H = (H(t))_{t\geq 0}$ öngörül funksiyasının $M = (M_t)_{t\geq 0}$ lokal martinqalı üzrə

$$H \cdot M_t = \int H(s)\, d M_s$$

stoxastik inteqralı – lokal martinqal olan, H və M-in xassələrindən asılı olaraq müxtəlif qaydalarla təyin olunan $H \cdot M = (H \cdot M_t)_{t\geq 0}$ təsadüfi prosesinə deyilir.

a) Əgər M-in lokal inteqrallanan variasiyalı trayektoriyaları olarsa və

$$\mathbf{M} \int\limits_0^\infty \big|H(s)\big|\, d\ \mathrm{var}\,(M)_s < \infty$$

şərti ödənilərsə, onda $H \cdot M_t$ S. i. $\int\limits_0^t H(s)\, d M_s$ Lebeq – Stiltyes inteqralı ilə üst-üstə düşür. Bu halda $H \cdot M$ trayektoriyaları inteqrallanan variasiyaya malik müntəzəm inteqrallanan martinqaldır və

$$\mathbf{M} \sup_{t\geq 0} \big|H \cdot M_t\big| \leq \mathbf{M}\, \mathrm{var}(H \cdot M)_\infty \leq \mathbf{M} \int\limits_0^\infty \big|H(s)\big|\, d\ \mathrm{var}\,(M)_s$$

münasibəti doğrudur. Bu tərif

$$\left(\int\limits_0^t \big|H(s)\big|\ d\ \mathrm{var}\,(M)_s \right)_{t\geq 0}$$

– artan prosesinin lokal inteqrallanan olduğu halında doğrudur. Bu halda $H \cdot M$ trayektoriyaları lokal inteqrallanan variasiyaya malik lokal martinqaldır.

b) əgər M lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldırsa, $\big\langle M \big\rangle$ onun kvadratik xarakteristikası və H sadə funksiyadırsa, yəni $0 < t_1 < t_2 \ \ldots$ olduqda λ_i elə $\mathscr{A}_{t_i}$ – ölçülən funksiyalar olarsa ki,

$$\mathbf{M} \int\limits_0^\infty H^2(s)\ d\big\langle M \big\rangle_s < \infty$$

şərti ödənilsin və bu halda

$$H(t) = \lambda_0\, \mathbf{I}_{[[0]]}(t) + \sum_i\ \lambda_i\, \mathbf{I}_{]]t_i,\, t_{i+1}]]}(t)$$

olarsa, onda $H \cdot M$ müntəzəm kvadratik inteqrallanan martinqaldır və bu martinqal üçün

$$H \cdot M_t = \sum_i\ \lambda_i\, (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}) \quad \text{və}$$

$$H \cdot M_\infty = \sum_i\ \lambda_i\, (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

düsturları doğrudur (bərabərliyin sağ tərəfindəki cəm kvadratik orta mənada yığılır). Əgər H öngörül funksiya və

$$\mathbf{M} \int\limits_0^\infty H^2(s)\ d\big\langle M \big\rangle_s < \infty$$

olarsa, onda

$$\mathbf{M} \int\limits_0^\infty (H^n(s))^2\ d\big\langle M \big\rangle_s < \infty, \quad n \geq 1,$$

$$\lim_n \mathbf{M} \int\limits_0^\infty (H(s) - H^n(s))^2\ d\big\langle M \big\rangle_s = 0$$

şərtlərini ödəyən $H^n,\ n \geq 1$ sadə funksiyalar ardıcıllığını göstərmək olar və yalnız H -dan asılı olan və approksimaedici $H^n,$ $n \geq 1$ ardıcıllığından asılı olmayan

$$(H \cdot M)_\infty = \text{l.i.m.}_n\ H^n \cdot M_\infty$$

təsadüfi kəmiyyətini təyin etmək mümkündür.

Onda

$$H \cdot M = (H \cdot M_t)_{t \geq 0}$$

S. i. –

$$H \cdot M_t = \mathbf{M}((H \cdot M)_\infty \,|\, \mathscr{A}_t)$$

S. i. ilə müntəzəm kvadratik inteqrallanan martinqal kimi təyin olunur. Belə təyin olun S. i. aşağıdakı xassəyə malikdir.

$$\lim_n \mathbf{M} \sup_{t \geq 0} (H \cdot M_t - H^n \cdot M_t) = 0;$$

bu xassəyə əsasən isbat olunur ki, ixtiyari Markov momenti T üçün $H \cdot M^T = (H \cdot M)^T$ bərabərliyi doğrudur, burada X^T, – $(X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ prosesinin işarəsidir. Bu sonuncu xassəyə əsasən

$$\left(\int_0^t H^2(s)\, d \left\langle M \right\rangle_s \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi yalnız lokal inteqrallanan proses olduğu halda, $H \cdot M$ S. i.-nı təyin etmək olur. Bu halda $H \cdot M$ kvadratik xarakteristikası

$$\left\langle H \cdot M \right\rangle_t = \int_0^t H^2(s)\, d \left\langle M \right\rangle_s,\ t \geq 0$$

olan lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır.

c) əgər M trayektoriyaları lokal inteqrallanan variasiyası olan lokal kvadratik inteqrallanan martinqal və H elə öngörül funksiya olarsa ki,

$$\left(\int_0^t H^2(s)\, d \left\langle M \right\rangle_s + \int_0^t \left| H(s) \right| d\ \text{var}(M)_s \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi lokal inteqrallanan proses olsun, onda a) və b)-də təyin olunmuş S. i.-lar üst-üstə düşür.

ç) Əgər M lokal kvadratik inteqrallanan martinqal, $[M, M]$ onun kvadratik variasiyası, H öngörül funksiya və

$$\mathbf{M} \left(\int_0^\infty H^2(s)\, d[M, M]_s \right)^{1/2} < \infty$$

olarsa, onda

$$\mathbf{M} \int_0^\infty (H^n(s))^2\, d \left\langle M \right\rangle_s < \infty, \quad n \geq 1$$

və

$$\lim_n \mathbf{M} \left(\int_0^\infty (H(s) - H^n(s))^2\, d[M, M]_s \right)^{1/2} = 0$$

şərtlərini ödəyən $H^n,\ n \geq 1$ öngörül funksiyalar ardıcıllığını göstərmək mümkündür.

Hər bir $n \geq 1$ qiymətində $H^n \cdot M$ S. i.-ı təyin olunmuşdur və bu S. i. müntəzəm kvadratik inteqrallanan martinqaldır və deməli, $H^n \cdot M_\infty = \lim_{t \to \infty} H^n \cdot M_t$ limiti vardır. $H^n \cdot M_\infty,\ n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı H -dan asılı, approksimaedici $H^n,\ n \geq 1$ ardıcıllığından isə asılı olmayan $(H \cdot M)_\infty$ təsadüfi kəmiyyətinə orta mənada yığılır. $H \cdot M$ S. i. $H \cdot M_t = \mathbf{M}((H \cdot M)_\infty \,|\, \mathscr{A}_t)$ ilə verilən müntəzəm inteqrallanan martinqal kimi anlaşılır. Belə təyin olunan S. i. aşağıdakı xassəyə malikdir:

$$\lim_n \mathbf{M} \sup_{t \geq 0} \left| H \cdot M_t - H^n \cdot M_t \right| = 0;$$

bu xassəyə əsasən isbat olunur ki, ixtiyari Markov momenti T üçün $H \cdot M^T = (H \cdot M)^T$ bərabərliyi ödənilir. Bu xassəyə görə

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s)\ d\,[M, M]_s \right)^{1/2} \right)_{t \geq 0}$$

artan prosesi lokal inteqrallanan proses olduğu halda $H \cdot M$ S. i.-nı təyin etmək olur. Bu halda $H \cdot M$ lokal martinqaldır.

d) Əgər M trayektoriyaları lokal inteqrallanan variasiyalı lokal martinqal olarsa, $[M, M]$ onun kvadratik variasiyası və H elə öngörül funksiya olarsa ki,

$$\mathbf{M} \left(\int_0^\infty (H^2(s)\ d\,[M, M]_s \right)^{1/2} < \infty$$

şərtini ödəsin, onda öngörül funksiyaların

$$\mathbf{M} \int_0^\infty \left| H^n(s) \right| d\ \text{var}\, d(M)_s < \infty,\ n \geq 1,$$

$$\lim_n \mathbf{M} \left(\int_0^\infty (H(s) - H^n(s))^2\ d\,[M, M]_s \right)^{1/2} = 0$$

şərtlərini ödəyən $H^n,\ n \geq 1$ ardıcıllığını göstərmək olar. Hər bir $n \geq 1$ qiymətində $H^n \cdot M$ S. i. təyin olunmuşdur və o, müntəzəm inteqrallanan martinqaldır və deməli, $H^n \cdot M_\infty = \lim_{t \to \infty} H^n \cdot M_t$ limiti vardır. $H \cdot M$ S. i. bu halda ç) halındakı kimi təyin olunur.

e) Əgər M lokal martinqaldırsa, onda $M = M^1 + M^2$ ayrılışı doğrudur, burada M^1 – trayektoriyaları lokal inteqrallanan variasiyaya malik lokal martinqal, M^2 – lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır. Bu halda $H \cdot M$ S. i. elə öngörül H funksiyaları üçün təyin olunur ki,

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s)\ d\,[M, M]_s \right)^{1/2} \right)_{t\geq 0}$$

artan prosesi $H \cdot M = H \cdot M^1 + H \cdot M^2$ qaydası ilə lokal inteqrallanan proses olur. Belə tərif iki fakta əsaslanır:

1) H -ın göstərilən xassəsində

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s)\ d\,[M^i, M^i]_s \right)^{1/2} \right)_{t\geq 0}, \quad i = 1, 2$$

artan prosesləri lokal inteqrallanan proseslərdir;

2) $H \cdot M$ prosesi $M = M^1 + M^2$ ayrılışının şəklindən asılı deyildir, yəni digər $M = \widetilde{M}^1 + \widetilde{M}^2$ ayrılışında

$$H \cdot M^1 + H \cdot M^2 = H \cdot \widetilde{M}^1 + H \cdot \widetilde{M}^2$$

bərabərliyi doğrudur.

ə) Əgər M lokal martinqaldırsa, onda $M = M^c + M^d$ ayrılışı vardır, burada M^c – kəsilməz trayektoriyalarlı lokal kvadratik inteqrallanan martinqal, M^d – sırf kəsilən lokal martinqaldır. $H \cdot M$ S. i. bu halda elə öngörül H funksiyaları üçün təyin olunur ki,

$$\left(\left(\int_0^t H^2(s)\ d\,[M, M]_s \right)^{1/2} \right)_{t\geq 0}$$

artan prosesi

$$H \cdot M = H \cdot M^c + H \cdot M^d$$

qaydası ilə lokal inteqrallanan prosesdir, bu halda $H \cdot M^d$ -ni elə sırf kəsilən lokal martinqal kimi təyin etmək olar ki,

$$\Delta(H \cdot M^d)_t = H(t)\Delta M_t, \quad t > 0$$

şərtini ödəsin; $\Delta X_t = X_t - \lim\limits_{s\uparrow t} X_s$.

Bu tərif və e)-dəki tərif eyni S. i. təyin edir.

$H \cdot M$ lokal martinqalı öngörül H funksiyasının lokal M martinqalı üzrə S. i. adlanır və o, aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $H \cdot M^T = (H \cdot M)^T$,

2) $\Delta(H \cdot M)_t = H(t)\Delta M_t$,

3) M və $H \cdot M$ – lokal kvadratik inteqrallanan martinqallar olduğu halda

$$\langle H \cdot M \rangle_t = \int_0^t H^2(s)\, d\langle M \rangle_s, \quad t > 0,$$

4) $H \cdot M = (H \cdot M)^c + (H \cdot M)^d$ ayrılışında kəsilməz $(H \cdot M)^c$ və sırf kəsilən $(H \cdot M)^d$ komponentləri aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$(H \cdot M)^c = H \cdot M^c, \quad (H \cdot M)^d = H \cdot M^d$$

5) Əgər M, N lokal martinqallardırsa və bunlar üçün $H \cdot M$ və $H \cdot N$ S. i.-ları təyin olunmuşdursa, onda

$$H \cdot M + H \cdot N = H \cdot (M + N),$$

6) $$[H \cdot M,\ H \cdot M]_t = \int_0^t H^2(s)\, d[M, M]_s, \quad t > 0.$$

Əd.: [1] Ito K., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1944, v. 20, p. 519–24; [2] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [3] Meyer P.-A., «Lect. Notes in Math.», 1967, № 39, p. 72–162; [4] Courrege Ph., «C. r. Acad. Sci.», 1963, t. 256, p. 867–70; [5] Kunita H., Watanabe S., «Nagoya Math. J.», 1967, v. 30, p. 209–45; [6] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [7] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, K., 1982; [8] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, M., 1986; [9] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., M., 1994.

STOXASTİK İNTEQRAL martinqal ölçüsü üzrə «**стохастический интеграл** по мартингальной мере; **stochastic integral** with respect to martingale measure» – aşağıdakı kimi təyin olunan *təsadüfi prosesdir.* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ – stoxastik bazis, $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathbb{A})$, – $\Omega \times \mathbb{R}_+$ -da öngörül σ – cəbr, $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, – $\mathbb{R}_+$ -da Borel σ – cəbri, $(E, \mathscr{E})$ – Luzin fəzası (kompakt metrik fəzanın Borel altçoxluğu E, $\mathscr{E}$ – Borel σ – cəbri ilə), $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R} \times E$, $\widetilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$ və $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ -də

$$\mathbf{M} \int_{\widetilde{\Omega}^n} \mu(\omega; dt, dx) < \infty, \quad \widetilde{\Omega}^n \in \widetilde{\mathscr{P}}, \quad n \geq 1$$

xassəsinə malik $\mu = \mu(\omega; dt, dx)$ tamqiymətli təsadüfi ölçüsü verilmişdir və $\widetilde{\Omega}^n \uparrow \widetilde{\Omega}$. Belə μ ölçüsünün kompensatoru $\nu = \nu(\omega; dt, dx)$ $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ -də öngörül təsadüfi ölçüdür. $\mu - \nu = (\mu - \nu)(\omega; dt, dx)$ təsadüfi ölçüsü martinqal ölçü adlanır.

Sırf kəsilən lokal martinqal olan

$$U^*(\mu - \nu) = (U^*(\mu - \nu)_t)_{t\geq 0}$$

təsadüfi prosesinə $\mu - \nu$ martinqal ölçüsü üzrə $\mathscr{P}$ – ölçülən $U = U(\omega; t, x)$ funksiyasının $U^*(\mu - \nu)$ stoxastik inteqralı deyilir. Əgər

$$\int_E |U(\omega, t, x)|\ \nu(\omega; \{t\}, dx) < \infty$$

olarsa, sırf kəsilən lokal martinqal $U^*(\mu - \nu)$ özünün sıçrayışları –

$$\Delta(U^*(\mu - \nu))_t = \int_E U(\omega, t, x)(\mu - \nu)(\omega; \{t\}, dx)$$

üzrə, artan proses $\left(\sum\limits_{0<s\leq t} (\Delta(U^*(\mu - \nu))_s)^2)_{t\geq 0} \right)$ lokal

inteqrallanan olduğu halda qurulur. Bu sonuncu şərt $G(U)=(G_t(U))_{t\geq 0}$ artan prosesində (ω simvolu sadəlik üçün qeyd olunmamışdır)

$$G_t(U)=\int_0^t\int_E \frac{(U(s,x)-\hat{U}(s))^2}{1-\left|U(s,x)-\hat{U}(s)\right|}\,\nu(ds,dx)+$$

$$+\sum_{0<s\leq t}\frac{\hat{U}^2(s)}{1+\left|\hat{U}(s)\right|}(1-\nu(\{s\},E))$$

olarsa, ödənilir, burada $\hat{U}(s)=\int_E U(s,x)\,\nu(\{s\},dx)$. $G(U)$ ilə yanaşı

$$G^i(U)=(G_t^i(U))_{t\geq 0}$$

artan proseslərinə də baxılır,

$$G_t^i(U)=\int_0^t\int_E \left|U(s,x)-\hat{U}(s)\right|^i\nu(ds,dx)+$$

$$+\sum_{0<s\leq t}\left|\hat{U}(s)\right|^i(1-\nu(\{s\},E)),$$

bu proseslərin lokal inteqrallananlığı $G(U)$-nun lokal inteqrallananlığını doğurur.

Sırf kəsilən lokal martinqal $U^*(\mu-\nu)$ aşağıdakı xassələrə malikdir.

1)

$$[U^*(\mu-\nu),U^*(\mu-\nu)]_t=$$

$$=\int_0^t\int_E (U(s,x)-\hat{U}(s))^2\mu(ds,dx)+$$

$$+\sum_{0<s\leq t}\hat{U}^2(s)(1-\mu(\{s\},E)),$$

2) ixtiyari T Markov anı üçün

$$(U^*(\mu-\nu))^T=U\mathbf{I}_{[[0,T]]^*}(\mu-\nu),$$

$[[\cdot,\cdot]]$ – stoxastik intervaldır,

3) əgər $G^1(U)$ lokal inteqrallanan proses olarsa, $U^*(\mu-\upsilon)$ lokal martinqalının lokal inteqrallanan variasiyası olan trayektoriyaları vardır.

4) əgər $G^2(U)$ lokal inteqrallanan proses olarsa, onda $U*(\mu-\nu)$ lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır və $\langle U*(\mu-\nu)\rangle=G^2(U)$ onun kvadratik xarakteristikasıdır.

Əd.: [1] Jacod J., «Lect. Notes in Math.», 1979, № 714; [2] Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., «Матем. сб.», 1978, т. 107, с. 364–415; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [4] Жакод Ж., Ширяев А. Н., Предельные теоремы для случайных процессов, пер. с англ., М., 1994.

STOXASTİK İNTEQRAL martinqal üzrə **« стохастический интеграл** по мартингалу; **stochastic integral** with respect to martingale**»** – bax, *Martinqal.*

STOXASTİK İNTEQRAL; paylanmanın qiymətləri **« стохастический интеграл;** оценки распределения; distribution estimators for a **stochastic integral »**:

$$\|\sigma_s\|+|b_s|\leq K,\quad \inf_{w,s}\lambda^*\sigma_s\sigma_s^*\lambda\geq\nu|\lambda|^2,\quad(\nu>0)$$

şərtlərli d – ölçülü İto prosesi

$$X_t=X_0+\int_0^t\sigma_s\,dw_s+\int_0^t b_s\,ds$$

üçün və ixtiyari ölçülən $f(t,x)$, $0\leq t\leq t$, $x\in\mathbb{R}^d$ və $g(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ funksiyaları üçün aşağıdakı Krılov statistik qiymətləri doğrudur:

$$M\int_0^\tau g(X_s)\,ds\leq N\|g\|_{L_d}(\mathscr{D}),\qquad(1)$$

$$M\int_0^\tau f(s,X_s)\,ds\leq N\|f\|L_{d+1}([0,T]\times\mathbb{R}^d),$$

$$N=\mathbf{N}(\nu,d,K,T)>0,\qquad(2)$$

burada $\mathscr{D}$, – $\mathbb{R}^d$-də oblast, $\tau=\inf(t\geq 0:X_t\notin\mathscr{D})$. (2) statistik qiymətindən sanki bütün $t>0$ qiymətlərində X_t prosesinin

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^T p(t,y)^{(d+1)/d}\,dy\,dt\right)^{d/(d+1)}\leq N$$

qiymətləndirmə ödəyən paylanma sıxlığının varlığı alınır.

Diffuziyası cırlaşan və yox olmağa məruz proseslər üçün daha ümumi statistik qiymətlər, həm də sıçrayışlarlı proseslər üçün analoji statistik qiymətlər doğrudur (bax, [2]). (1), (2) şəklində statistik qiymətləri xüsusi törəməli tənliklər terminlərində A. D. Aleksandrov statistik qiymətlərinə ekvivalentdirlər (bax, [3]).

Əd.: [1] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [2] Анулова С., Прагараускас Г., «Литов. матем. сб.», 1977, т. 17, № 2, с. 5–26; [3] Крылов Н. В., Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка, М., 1985.

STOXASTİK İNTEQRAL semimartinqal üzrə **« стохастический интеграл** по семимартингалу; **stochastic integral** with respect to semimartingale **»** – bax, *Semimartinqal*.

STOXASTİK İNTEQRAL simmetrik **« стохастический интеграл** симметрический; symmetric **stochastic integral »** – bax, *Semimartinqal*.

STOXASTİK İNTEQRAL(ı) Stratonoviç **« стохастический интеграл** Стратоновича; Stratonovich **stochastic integral »** – bax, *Stratonoviç stoxastik inteqralı*.

STOXASTİK İNTEQRAL təsadüfi meydanda əyri üzrə « **стохастический интеграл** вдоль линии в случайном поле; **stochastic line integral** » – inteqrallanma əyrisi – $X(t)$ *təsadüfi prosesi* inteqrallanma əyrisi və inteqrallanan $\alpha_t(\varphi, h)$ funksiyası – təsadüfi meydan ilə verilən, qiymətləri inteqrallanma əyrisi boyunca baxılan *stoxastik inteqraldır.*

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, \mathbf{P})$, $t \geq 0$ – stoxastik bazis, Φ – funksional fəza olsun. Trayektoriyaları Φ-dən olan n – ölçülü $X(t)$ təsadüfi prosesinin $\mathcal{A}_t$ – ölçülən proses olduğu fərz olunur. $\alpha_t(\varphi, h)$ təsadüfi meydanı $\Omega \times \Phi \times \mathbb{R}_+ \times [0, h_0]$ fəzasında təyin olunmuşdur və $\mathbb{R}^n$-dən qiymətlər alır, dəyişənlərin toplusuna görə ölçülən meydandır (Φ fəzasında σ – cəbr təyin olunmuşdur). $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$ olduqda

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{t_k}(X, \Delta t_k)$$

inteqral cəmlərinin ehtimala görə limiti varsa, bu limitə təsadüfi meydanda əyri üzrə stoxastik inteqral (stoxastik əyrixətli inteqral) deyilir və bu inteqral

$$\int_0^T \alpha_t(X, dt)$$

kimi yazılır. $D_T(\mathbb{R}^n)$, – $(-\infty, T]$-də təyin olunmuş, 2-ci növ kəsilməsi olmayan, sağdan kəsilməz, T nöqtəsində isə soldan kəsilməz, $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası, $D(\mathbb{R}^n)$, – $(-\infty, \infty)$-da təyin olunmuş, 2-ci növ kəsilməsi olmayan sağdan kəsilməz, T nöqtəsində soldan kəsilməz, $\mathbb{R}^n$ – qiymətli funksiyalar fəzası, D_s – oturacaqları $[0, s]$ üzərində olan silindrik çoxluqların doğurduğu, D-də σ – cəbr, $\lambda(t)$ – kəsilməz $\mathcal{A}_t$ – ölçülən kəsilməz artan funksiya, $\Lambda(\varphi, \psi)$, – $D_0^2(\mathbb{R}^n)$-də təyin olunmuş, mənfi olmayan, dəyişənləri toplusu üzrə $D_0(\mathbb{R}^n)$ topologiyasında kəsilməz funksiya və $\Lambda(\varphi, \varphi) = 0$ olsun. $\varphi \in D$ üçün θ_t operatoru aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$(\theta_t \varphi)(s) = \begin{cases} \varphi(t+s), & s < 0, \\ \varphi(t-0), & s = 0. \end{cases}$$

θ_t operatoru $\varphi \in D$ funksiyasını $\theta_t \varphi \in D_0(\mathbb{R}^n)$ funksiyasına çevirir. Belə hesab olunur ki, $\Phi = D_0(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_t(\varphi, h)$ meydanı φ qeyd olunduqda tamamilə ölçülən meydandır və $\alpha_t(\varphi, h) = \alpha(\varphi, t+h) - \alpha(\varphi, h)$.

Stoxastik əyrixətli inteqral təsadüfi proseslər və meydanların aşağıdakı sinifləri üçün mövcuddur.

I. Məhdud variasiyalı kəsilməz meydan. Əgər φ qeyd olunduqda $\alpha(\varphi, t)$ meydanı məhdud variasiyalı kəsilməz proses olarsa və bütün $t > 0$ qiymətlərində

$$\left|\alpha_t(\varphi, h) - \alpha_t(\psi, h)\right| \leq (\lambda(t+h) - \lambda(t))\Lambda(\varphi, \psi)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda qiymətləri $D_T(\mathbb{R}^n)$-dən olan ixtiyari $\mathcal{A}_t$ – ölçülən proses üçün $\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt)$ əyrixətli inteqralı mövcuddur (bax, [1]).

$D_T(\mathbb{R}^n)$-dən olan, $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$, $Y(t)$ prosesləri üçün

$$\left| \int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt) - \int_0^T \alpha_t(\theta_t Y, dt) \right| \leq \int_0^T \Lambda(\theta_t X, \theta_t Y)\, d\lambda(t)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Misal kimi

$$\alpha_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} a(s, \theta_{-s}\varphi)\, dK(s)$$

meydanına baxmaq olar. Burada $K(s)$ məhdud variasiyalı kəsilməz funksiyadır. $a(s, \varphi)$ funksiyası $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times D$ fəzasında təyin olunmuşdur, ölçüləndir, qeyd olunmuş $\varphi \in D$ halında öngörül funksiyadır, s qeyd olunduqda $\mathcal{A}_s \times \mathcal{D}_s$-ə nəzərən ölçüləndir, D topologiyasında s-ə nəzərən φ üzrə müntəzəm kəsilməzdir. Bu meydan üçün

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt) = \int_0^T a(t, X(\cdot))\, dK(t)$$

– əyrixətli inteqralı vardır.

II. Kəsilməz xarakteristikaya malik lokal kvadratik inteqrallanan təsadüfi meydan.

$\alpha_t(\varphi, h)$, – h-ın funksiyası kimi $\mathcal{A}_{t+h}$ axınına nəzərən lokal kvadratik inteqrallanan martinqal olsun. $B_t(\varphi, \psi, h)$, – $\alpha_t(\varphi, h)$ və $\alpha_t(\psi, h)$-ın qarşılıqlı xarakteristikası olsun. Əgər

$$\left\| B_t(\varphi, \psi, h) - B_t(\varphi, \varphi, h) \right\| \leq (\lambda(t+h) - \lambda(t))\Lambda(\varphi, \psi)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $D_T(\mathbb{R}^n)$-dən olan ixtiyari $\mathcal{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ prosesi üzrə $\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt)$ əyrixətli inteqralı mövcuddur; $\|\cdot\|$ – xətti operator normasıdır. Yuxarı limit funksiyası kimi bu inteqral kəsilməz xarakteristikaya malik lokal kvadratik inteqrallanan martinqaldır (bax, [1]).

Məs.,

$$\alpha_t(\varphi, h) = \int_t^{t+h} \sigma(s, \theta_{-s}\varphi)\, d\beta(s) +$$

$$+\int_t^{t+h}\int_Y c(s,\theta_{-s}\varphi,y)\,\gamma(dy\times ds)$$

meydanı üçün $\gamma(dy\times ds)$, – $Y\times\mathbb{R}_+$ fəzalar hasilində martinqal ölçü, $\beta(s)$ – kəsilməz martinqal olduğu halda, $\sigma(s,\varphi)$ və $c(s,\varphi,y)$ ($y\in Y$ qeyd olunduqda) ölçülən funksiyaları isə $a(s,\varphi)$ funksiyasının əvvəlki bənddə ödədiyi xassələrə malikdirlərsə, onda

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt) = \int_0^T \sigma(t, X(\cdot))\,d\beta(t) + \int_0^T\int_Y c(t, X(\cdot), y)\,\gamma(dy\times dt)$$

əyrixətli inteqralı mövcuddur.

III. Qeyd olunan kəsilmələri olmayan öngörül pilləvari meydanlar.

$\alpha(\varphi,h)$ meydanının hər birinin bir sıçrayışı olan meydanlar cəmi olduğu fərz olunur:

$$\alpha(\varphi,h)=\sum_n \alpha^{(n)}(\varphi,h),$$

$\tau_n(\varphi)$ – sıçrayış anları olsun. Aşağıdakı şərtlər daxil olunur.

1) $V_n(t)=\{(\omega,\varphi):\sup_{t\ge T}\alpha^{(n)}(\theta_t\varphi,T)=0\}$ çoxluğu üçün bütün $T>0$ qiymətlərində $\mathbf{P}\left\{(\omega,X)\subset\bigcup_n V_n(T)\right\}=1$.

2) $\tau_n(\varphi)$ funksiyası bütün n qiymətlərində aşağıdakı xassələrə malikdir. İxtiyari $\varphi\in D$, $T>0$ üçün elə $\varepsilon>0$ göstərmək olar ki, bütün $t\le T$ üçün $\sup_{t\le T}|\varphi(t)-\psi(t)|\le\varepsilon$ olduqda $\tau_n(\theta_t\varphi)=\tau_n(\theta_t\psi)$; əgər $\varphi_m\in D_0(\mathbb{R}^n)$ və $\varphi_m\to\varphi$ D-də ödənilərsə, onda hər hansı m-dən başlayaraq,

$$\tau_n(\varphi_m)=\tau_n(\varphi)$$

bərabərliyi ödənilir.

3) $X(\cdot)$-in ixtiyari stoxastik kəsilmə nöqtəsi s və bütün $\varphi\in D_0(\mathbb{R}^n)$ üçün

$$\lim_{h\downarrow 0}\mathbf{P}\{s\le\tau_n(\varphi)<s+h\,|\,\mathscr{A}_s\}=0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir.

1) – 3) şərtləri ödənildikdə

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt)$$

əyrixətli inteqralı D-yə aid olan ixtiyari $\mathscr{A}_t$ – ölçülən $X(t)$ prosesi üzrə mövcuddur. Yuxarı limitin funksiyası kimi bu inteqral sağdan kəsilməz öngörül pilləvari prosesdir (bax, [1]).

$$\alpha_t(\varphi,h)=\int_t^{t+h}\int_Y f(s,\theta_{-s}\varphi,y)\,\delta(dy\times ds)$$

meydanı, $f(s,\varphi,y)$ funksiyası $c(s,\varphi,y)$-in xassələrinə malik olduğu halda, $\delta(dy\times ds)$ hər bir t üçün $Y\times[0,t]$-də sonlu sayda atomları olan, $(Y,\mathbb{R}_+)$-da nöqtəvi ölçü olarsa, bu bənddə qeyd olunmuş şərtləri ödəyir və

$$\int_0^T \alpha_t(\theta_t X, dt)=\int_0^T\int_Y f(s,X(\cdot),y)\,\delta(dy\times ds).$$

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

STOXASTİK İNTEQRAL təsadüfi ölçü üzrə « **стохастический интеграл** по случайной мере; **stochastic integral** with respect to random measure » – $(X,\mathscr{B})$ ölçülən fəzasında ortoqonal qiymətlərli *təsadüfi* μ *ölçüsü* üzrə təsadüfi olmayan $f(x)$ funksiyasının inteqralıdır. $F(\Delta)$, $\Delta\in\mathscr{B}$ – struktur μ ölçüsü, $L^2(dF)$, – X-də F ölçüsü üzrə kvadratı ilə inteqrallanan funksiyaların Hilbert fəzası olsun. Təsadüfi ölçü üzrə S. i. əvvəlcə $L^2(dF)$-dən olan

$$f(x)=\sum_k c_k I_{A_k}(x),\ A_k\in\mathscr{B}$$

sadə funksiyası üçün

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\sum_k c_k\mu(A_k)$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin olunur; sağ tərəfdəki cəm kvadratik orta mənada yığılır (bax, [1]). $L^2(dF)$-dən olan ixtiyari funksiyalar üçün $L^2(dF)$-dən olan elə $f_n(x)$ sadə funksiyalar ardıcıllığı vardır ki, $n\to\infty$ olduqda

$$\int_X [f(x)-f_n(x)]^2 F(dx)\to 0.$$

Onda $f_n(x)\mu(dx)$ $(x\in X)$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının kvadratik orta limiti vardır və bu limit $\{f_n(x)\}$-in seçilməsindən asılı deyildir. Tərifə görə

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\text{l.i.m.}\int_X f_n(x)\mu(dx).$$

Belə təyin olunmuş S. i. adi additivlik və xəttilik xassələrindən başqa,

$$\mathbf{M}\int_X f_1(x)\mu(dx)\int_X f_2(x)\mu(dx)=\int_X f_1(x)f_2(x)F(dx)$$

xassəsinə də malikdir. $f(x)$ funksiyasının μ təsadüfi ölçüsü üzrə inteqrallanması üçün $f(x)$ və μ üçün xüsusi fərziyyələr tələb olunur; bu halda S. i.-ın konstruksiyası olduqca çətinləşir (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, М., 1985; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [3] Protter Ph., Stochastic integration and differential equations, B., etc., 1990; [4] Nualart D., Malliavin P., Calcul and related topics, B., etc., 1995; [5] Malliavin P., Stochastic Analysis, B., etc., 1997.

STOXASTİK İNTEQRAL TƏNLİK; martinqal və təsadüfi ölçü üzrə **« стохастическое интегральное уравнение** по мартингалу и случайной мере; **stochastic integral equation** with respect to a martingale and a random measure**»**:

$$X_t(\omega) = N_t(\omega) + \int_0^t a(\omega, s, X_{s-}(\omega))\, dK_s(\omega) +$$

$$+ \int_0^t b(\omega, s, X_{s-}(\omega))\, dM_s(\omega) +$$

$$+ \int_0^t \int_{|u|\le 1} f(\omega, s, u, X_{s-}(\omega))(\mu - \nu)(\omega, ds, du) +$$

$$+ \int_0^t \int_{|u|>1} g(\omega, s, u, X_{s-}(\omega))\, \mu(\omega, ds, du)$$

şəklində tənlikdir, burada N – verilmiş uzlaşdırılmış proses, K – sonlu variasiyalı öngörül proses, M – kəsilməz lokal martinqal, μ – tamqiymətli təsadüfi ölçü, ν , – μ ölçüsünün kompleksatorudur. M və $\mu - \nu$ üzrə inteqrallar stoxastik inteqrallar, K və μ üzrə inteqrallar Lebeq – Stiltyes inteqrallarıdır. Əgər $a(\omega, s, x)$, $b(\omega, s, x)$, $f(\omega, s, u, x)$ əmsalları x dəyişəni üzrə Lipşits şərtini ödəyərlərsə, onda həll (güclü) vardır və yeganədir. Bu nəticə əmsallar «öngörül» surətdə keçmişdən asılı olduqda da [məs., $a = a(\omega, s, X(\omega))$] doğrudur.

Bu şəkildə tənliklərə (təsadüfi μ və ν ölçülərsiz və əmsalların ω-dan asılı olmadığı halda) ilk dəfə [1] – [2]-də, təsadüfi ölçülərli və ω-dan asılı əmsallar halında [3]-də baxılmışdır. «Keçmişdən» asılı əmsallar halı [4] – [5]-də araşdırılmışdır. Zəif həllər [6]-da daxil olunmuşdur. Belə tənliklər hilbertqiymətli martinqallar üçün [7]-də araşdırılmışdır.

Əd.: [1] Doleans-Dade C., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1976, Bd 36, № 2; [2] Protter P., «Ann. Probab.», 1977, v. 5, № 2; [3] Гальчук Л. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 5; [4] Мельников А. В., «Матем. сб.», 1979, т. 110 (152), № 3 (II) ; [5] Jacod J., «Lect. Notes Math.», 1979, v. 714; [6] Jacod J., «Lect. Notes Math.», 1981, v. 851; [7] Metivier M., Semimartingales, B. – N. Y., 1982.

STOXASTİK İNTERVAL « стохастический интервал; stochastic interval » – aşağıdakı şəkildə verilən intervallardan biridir:

$$[[\sigma, \tau]] = \{(\omega, t) : t \ge 0,\ \sigma(\omega) \le t \le \tau(\omega)\},$$
$$[[\sigma, \tau[[= \{(\omega, t) : t \ge 0,\ \sigma(\omega) \le t < \tau(\omega)\},$$
$$]]\sigma, \tau]] = \{(\omega, t) : t \ge 0,\ \sigma(\omega) < t \le \tau(\omega)\},$$
$$]]\sigma, \tau[[= \{(\omega, t) : t \ge 0,\ \sigma(\omega) < t < \tau(\omega)\};$$

burada $\sigma = \sigma(\omega)$ və $\tau = \tau(\omega)$ iki Markov anı olub, $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında təyin olunmuşlar, $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\ge 0}$ azalmayan ailəsi isə bu fəzada $\mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A}$ alt σ – cəbrləri üzrə təşkil olunmuşdur.

Əd.: [1] Делларшери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

STOXASTİK KƏSİLMƏZ KEÇİD FUNKSİYASI « стохастически непрерывная переходная функция; stochastically continuous transition function » – bax, *Keçid funksiyası* Markov prosesi üçün.

STOXASTİK KƏSİLMƏZ TƏSADÜFİ PROSES « стохастически непрерывный случайный процесс; stochastically continuous random process » – parametrik T çoxluğu və faza fəzası $(\mathscr{M}, \mathscr{B})$ ilə $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş elə $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir* ki, $\zeta(t)$-nin təsadüfi elementləri $t \to t_0$ olduqda $\zeta(t_0)$ təsadüfi elementinə ehtimala görə yığılırlar. Fərz olunur ki, T və $\mathscr{M}$ metrik fəzalardır. $\mathscr{B}$, – $\mathscr{M}$ -in Borel altçoxluqlarının σ – cəbridir. Bu tərif S. k. t. p.-in t_0 nöqtəsində kəsilməzliyi tərifidir.

Başqa sözlə, əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ üçün elə $\gamma > 0$ tapılarsa ki, $\rho(t, t_0) < \gamma$ (r və ρ – uyğun olaraq, $\mathscr{M}$ və T -də metrika işarələmələridir) şərtini ödəyən bütün $t \in T$ üçün

$$\mathbf{P}\{r(\zeta(t), \zeta(t_0)) > \delta\} < \varepsilon$$

münasibəti ödənilsin, onda $\zeta(t)$ prosesi $t_0 \in T$ nöqtəsində stoxastik kəsilməz təsadüfi prosesdir, deyilir.

Əgər proses $T' \subseteq T$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində stoxastik kəsilməz olarsa, onda bu proses T' çoxluğunda stoxastik kəsilməz proses adlanır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

STOXASTİK KONVOLYUSİON ümumiləşmiş **« стохастическая свертка** обобщенная; generalized **stochastic convolution »** – bax, *Ümumiləşmiş stoxastik konvolyusiya.*

STOXASTİK MATRİS « стохастическая матрица; stochastic matrix » – elementləri mənfi olmayan elə kvadrat matrisdir ki, onun hər bir sətir elementlərinin cəmi 1-ə bərabərdir. $n \times n$ – ölçülü ixtiyari P S. m. n sayda vəziyyətlər çoxluğu ilə verilən hər hansı $X(t)$ Markov zəncirinin keçid ehtimalları matrisidir. S. m.-in bir çox cəbri xarakteristikaları ehtimali interpretasiyada ifadə olunur.

P S. m.-nin bütün məxsusi qiymətləri $\{|z| \le 1\}$ dairəsində yerləşir; vahid ixtiyari P S. m.-nin məxsusi qiymətidir; 1 məxsusi qiymətinin tam bölünmə ədədi $X(t)$ Markov zəncirinin final siniflərinin sayı ilə üst-üstə düşür. Əgər $X(t)$ Markov zəncirinin bütün vəziyyətləri periodu $d \ge 1$ olan əlaqəli vəziyyətlərin yeganə sinfini təşkil edirsə, onda P S. m.-nin bütün xarakteristik ədədlərinin çoxluğu $e^{2\pi i/d}$-yə vurulmaya nəzərən invariantdır.

1 məxsusi qiymətinə uyğun $P = \| p_{ij} \|$ S. m.-nin hər bir sol məxsusi mənfi və sıfır olmayan $\pi = \{\pi_i\}$ vektoru, yəni bütün j -lər üçün

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \qquad (*)$$

şərtilə verilən π vektoru $X(t)$ Markov zəncirinin stasionar ölçüsünü təyin edir. 1 məxsusi qiymətinə uyğun P S. m.-nin hər bir sağ məxsusi mənfi və sıfır olmayan π vektoru, yəni bütün i-lər üçün

$$\pi_i = \sum_j p_{ij} \pi_j$$

şərtilə verilən π vektoru $X(t)$ Markov zəncirinin harmonik funksiyasını təyin edir.

Əgər Markov zənciri $X(t)$ erqodikdirsə, onda 1 məxsusi qiymətinin tam bölünmə ədədi 1-ə bərabərdir, $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$ limiti vardır, burada Π – bütün sətirləri π vektoru ilə üst-üstə düşən, (*) və $\sum_i \pi_i = 1$ şərtlərini ödəyən matrisdir. Qeyd olunan yığılmanın sürətini məxrəci ixtiyari ρ olan və bu ρ-nun isə P S. m.-nin 1-dən fərqli bütün məxsusi qiymətlərinin modullarından böyük olması şərtilə, həndəsi silsilə ilə yuxarıdan qiymətləndirmək mümkündür.

Hər bir sətir elementlərinin cəmi 1-i aşmayan, kvadrat mənfi olmayan P^* matrisi substoxastik və ya semi–stoxastik matris adlanır. Belə matrisi elə kvadrat P stoxastik matrisinə qədər tamamlamaq olar ki, o, uducu E vəziyyəti olan $X(t)$ Markov zəncirinə uyğun olsun, P^* matrisinə isə, bu halda, qırılan $X(t)$ Markov zəncirinin keçid ehtimallarının matrisi kimi baxmaq olar ki, bu zəncir $X(t)$ zənciri ilə onun E vəziyyətinə düşdüyü ana qədər üst-üstə düşür.

Bax, *İkiqat stoxastik matris*.

Əd.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [2] Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., М., 1969; [3] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972; [4] Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, М. – Л., 1949.

STOXASTİK MƏHDUDLUQ « стохастическая ограниченность; stochastic boundedness » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilən təsadüfi kəmiyyətlərin $\mathscr{M}$ çoxluğunun, – ehtimala görə yığılma topologiyası ilə verilən, bütün təsadüfi kəmiyyətlərin topoloji vektor fəzası $L_0(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$-də $\mathscr{M}$-in məhdudluğudur. Başqa sözlə, əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $\beta > 0$ tapılarsa ki, bütün $X \in \mathscr{M}$ üçün

$$\mathbf{P}\{\omega : \Omega : |X(\omega)| > \beta\} < \varepsilon$$

ödənilsin, onda $\mathscr{M}$ çoxluğu stoxastik məhdud və ya ehtimala görə məhdud çoxluq adlanır.

STOXASTİK MODEL; dayanıqlılıq **« стохастическая модель;** устойчивость; stability of a **stochastic model »** – bax, *Dayanıqlılıq*(ğı) stoxastik modelin.

STOXASTİK MODELLƏR « стохастические модели; stochastic models » hidrologiyada – hidroloji təzahürlərin elə modelləridir ki, bunları bəzi *təsadüfi proseslər* formasında ifadə edir. Ola bilsin ki, hidrologiyada ilk S. m. çay axarındakı illərarası dəyişmələri təsvir etmək üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]). Hidravlik proseslər zaman üzrə bir ildən bir addımla, əksər hallarda, avtoreqressiv – sürüşən orta (çox böyük olmayan tərtiblə) qarışıq prosesləri kimi (əksər hallarda) təsvir olunur (bax, [2] – [4]). Belə hidravlik proseslərin spektrləri, adətən, tezlik artdıqca yavaş-yavaş azalır və əksər hallarda mühüm əhəmiyyət kəsb edən maksimumlara malik olmur (bax, [5], [6]). Hidrologiyada S. m. kimi sonsuz yaddaşlı proseslər (bax, *Hörst fenomeni*) və sədd avtoreqressiyası (rus. пороговой авторегрессии) tipli təsadüfi proseslərin qeyri – xətti modelləri tətbiq olunur (bax, [7]).

Hidroloji proseslər, bir qayda olaraq, Qauss prosesləri olmadığından, əksər hallarda bu proseslərin özlərinin modelləri deyil, onların bəzi funksiyaları, məs., loqarifmi və ya təminliyi üçün modellər qurulur (bax, *Təminlik ehtimalı* hidrologiyada); bu funksiyaların ehtimal paylanmaları isə Qauss paylanmalarına çox yaxındır. Rus ədəbiyyatında «ümumiləşdirilmiş modellər» adlandırılan modellərdə bunların ümumi şəkli əvvəlcədən verilir, parametrlərin qiymətləri isə ya müşahidədən alınan verilənlər üzrə və ya digər mülahizələr əsasında təyin olunur (bax, məs., [8], [9]).

Bir çox hidroloji proseslər, məs., çay axarı kəmiyyətlərinin variasiyaları, nəzərə çarpan mövsüm gedişinin olması ilə xarakterizə olunur, bunun hesabatında isə Boks və Cenkins multiplikativ modellərinin (bax, [10]) və ya onların modifikasiyalarının istifadəsi tələb olunur (bax, [2], [11]).

Əd.: [1] Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Расчеты реечного стока, М. – Л., 1934; [2] Applied modelling of hydrologic time series, Littleton (Colo.), 1980; [3] Bras R., Rodriguez-Iturbe I., Random functions and hydrology, Reading (Mass.) , 1985; [4] Mc Neil I., Umphrey G., (eds.) , «Adv. Statist. Sci.», 1987, v. 4; [5] Yevjevich V., «Hydrology Papers», 1977, № 94; [6] Привальский В. Е., Климатическая изменчивость, М., 1985; [7] Tong H., Thanoon B., Gudmundsson G., «Water Research Bull.», 1985, v. 21, № 4, p. 651–61; [8] Раткович Д. Я., Многлетние колевания речного стока, Л., 1976; [9] Музылев С. В., Привальский В. Е., Раткович Д. Я., Стохастические модели в инженерной гидрологии, М., 1982; [10] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, М., 1974; [11] Ванидзе Г. Г., Математическое моделирование гидрологических рядов, Л., 1977.

STOXASTİK MODELLƏR(i) iqlimin **« стохастические модели** климата; climatic **stochastic models » – r** fəza koordinatları və t zaman parametrindən asılı hər hansı $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t) = \{Y_i(\mathbf{r}, t)),\ i = 1, \ldots, m\}$ iqlim xarakteristikaları üzrə differensial tənliklər və ya sistem tənliklər (adi və ya xüsusi törəməli) vasitəsilə, bu tənliklərin isə bəzi əmsalları (deməli, onların həlləri) *təsadüfi funksiyalar* olduğu halda, təsvir edildiyi fiziki – riyazi modellər sinfidir. Tənliklərə daxil olan iqlim xarakteristikaları kimi okean və atmosferin temperaturu, atmosfer təzyiqi, yağıntı miqdarı, buz örtüyünün sahəsi və s. kimi kəmiyyətlərin, fəzanın böyük bir oblastı üzrə (məs., bütün yer kürəsi üzrə və ya müəyyən en zonaları üzrə) və zaman üzrə (məs., ay üzrə, mövsüm və ya il üzrə) orta qiymətlərinə baxılır. Bu xarakteristikaların zaman üzrə dəyişilmələri həm xarici faktorlardan (Günəşin şüa saçmasından, Yerin orbitinin parametrlərinin fluktuasiyalarından, vulkan püskürmələrindən), həm də hava şəraitindən, yəni zaman üzrə və fəzada sürətlə dəyişən və «küy» rolunu ifadə edən meteoroloji, okeanoloji və hidroloji $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \{X_j(\mathbf{r}, t)),\ j = 1, \ldots, n\}$ xarakteristikalarından asılıdır. İqlimin S. m.-inə baxılması bu və ya digər, olduqca sadə fiziki modellərdən istifadəyə əsaslanır, belə ki, bu modellər $\mathbf{Y}$ iqlim

dəyişənlərinin $\mathbf{X}$ «hava» dəyişənlərindən asılılığını təqribən təsvir etməyə imkan verir. Bu halda, mühüm bir faktdan istifadə olunur: $\mathbf{X}$ – «hava» dəyişənlərinin səciyyəvi zaman miqyasları $\tau_{\mathbf{X}}$ $\mathbf{Y}$ – iqlim dəyişənlərinin zaman miqyasları $\tau_{\mathbf{Y}}$ -dən olduqca kiçik olur, yəni $\tau_{\mathbf{X}} << \tau_{\mathbf{Y}}$. Buna görə də, fərz etmək olur ki, $\mathbf{Y}$ vektoru $\mathbf{X}$ vektorunun konkret realizasiyasından o qədər də asılı olmayıb, $\mathbf{X}$ -in zaman üzrə ortalanmış hər hansı xarakteristikalarından asılı olur (orta qiymətin hesablandığı T müddəti elə seçilir ki, $\tau_{\mathbf{X}} \le T \le \tau_{\mathbf{Y}}$ şərti ödənilsin) (bax, [3]). Orta qiymətləri ilə götürülən qeyd olunan xarakteristikalar $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ vektorunun ehtimal paylanması üzrə təyin olunmuş uyğun ehtimali orta qiymətlərin statistik qiymətləridir (T uzunluğunun realizasiyası üzrə qurulmuş). Çox vaxt $\tau_{\mathbf{X}} << \tau_{\mathbf{Y}}$ bərabərsizliyinə əsaslanaraq sadələşdirmə aparılır və bu sadələşdirmə nəticəsində $\tau_{\mathbf{Y}}$ -in tərtibinin zaman miqyasları üçün $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ -nin «sürətli» dəyişənləri t -nin funksiyası kimi bəyaz küy olur (ehtimal paylanması, ümumiyyətlə, $\mathbf{r}$ və t -dən asılı ola bilən) . $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ -nin bu növ «sürətli» dəyişənləri (təsadüfi qüvvələr) $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$ üçün makroskopik «dinamik tənliyə» daxil olur. Hava fluktuasiyalarının təsirini imitasiya edən təsadüfi qüvvələrin parametrləri, müşahidə verilənləri əsasında, bəzi doğruyaxşar hipotezlər əlavə edilərək qiymətləndirilir. Müəyyən şərtlərlə alınan S. m.-in həlli $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$ vektor Markov prosesi olur, bu prosesin çoxölçülü ehtimal sıxlığı $\{ p_i(\mathbf{r}, t),\ i = 1, \dots, m \}$ isə *Kolmoqorov tənliklərini* (düz və tərs) ödəyir.

İqlim S. m.-nə ən sadə misal

$$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda Y(t) + X(t) \qquad (1)$$

– sadələşdirilmiş, istilik balans tənliyinə əsaslanır, burada Y , məs., okean səthinin temperaturu, X – havanın dəyişikliklərindən tez-tez fluktuasiyaya uğrayan isti hava axınını təsvir edən, orta qiyməti sıfra bərabər olan təsadüfi funksiyadır. Mənfi tərs əlaqəni xarakterizə edən sabit $\lambda > 0$ parametri verilən sistemin xarici mühütlə istilik mübadiləsi əmsalının effektiv istilik tutumuna nisbəti mənasını daşıyır. Əgər $X(t)$ stasionar təsadüfi prosesdirsə, onda $Y(t)$ də spektral sıxlığı $f_Y(\omega) = f_X(\omega) / (\lambda^2 + \omega^2)$ olan stasionar təsadüfi prosesdir. Burada $f_X(\omega)$, – $X(t)$ prosesinin spektral sıxlığıdır və əgər $X(t)$ bəyaz küy olarsa, o sabitə bərabər olur (bax, [1], [3], [4]).

Daha mürəkkəb xətti enerqobalans modellər

$$\frac{dY_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} Y_j + X_i, \qquad i = 1, \dots, n \qquad (2)$$

tənliklər sistemləri ilə təsvir olunurlar, burada $Y_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$, – i -ci zona üçün temperaturun qiyməti (və ya temperaturun qlobal meydanının hər hansı bazis üzrə ayrılışının i -ci həddi), λ_{ij} – sistemin müxtəlif komponentləri arasında istilik mübadiləsini xarakterizə edən əmsallar, $X_i(t)$ – fluktuasiya edən isti hava axınlarıdır (bunlar, adətən, i -dən asılı intensivliyə malik bəyaz küylər hesab edilir) (bax, [4]).

(1) və (2) tipli modellərdən, bəzən, nəzərə çarpacaq dərəcədə kiçik miqyaslı kükrəntilərin təsirilə geniş miqyaslı axınların kiçik fluktuasiyalarının analizində istifadə olunur (məs., küləyin sürətindən yaranan dəyişikliklərin yaratdığı güclü okean axınlarının fluktuasiyaları; bax, [2], [4]) . (2) tipli xətti S. m.-lərə dəniz buzları sahəsinin evolyusiyası modeli də aid olunur, bu sahələrə buzlaşma və ya ərimə sürətinin fluktuasiyaları təsir edir (bax, [5]).

İqlim xarakteristikalarının onların müasir qiymətlərindən böyük təsadüfi yayınmalarının analizində qeyri – xətti S. m.-lər tətbiq olunur. Məs., Şimal yarımkürəsinin energetik balansının modeli aşağıdakı stoxastik differensial tənliklər sistemi ilə təsvir oluna bilinir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT_\Sigma(t)}{dt} &= \upsilon_1(T_\Sigma, T_\Delta) + f_\Sigma(t), \\ \frac{dT_\Delta(t)}{dt} &= \upsilon_2(T_\Sigma, T_\Delta) + f_\Delta(t), \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

burada T_Σ – yer yarımkürəsi səthinin temperaturu, T_Δ – ekvator-qütb temperaturları fərqi, υ_1 , υ_2 , – T_Σ, T_Δ dəyişənlərinin bəzi qeyri – xətti funksiyaları, f_Σ, f_Δ – istilik axınlarının sinoptik pulsasiyalarını təsvir edən «təsadüfi qüvvələrdir». Bu model üçün müasir iqlimə müvafiq bir tarazlıq vəziyyətinin ətrafından kükrəntisiz (3) tənliklərinin digər mümkün stasionar həllərinin ətafına təsadüfi keçid müddətinin riyazi gözləməsinin statistik qiyməti alınmışdır. Bu tipli modellərdə kobud statistik qiymətlərin alınması üçün dinamik sistemlərin böyük fluktuasiyaları nəzəriyyəsinin asimptotik metodları tətbiq olunur. Digər analoji qeyri – xətti modellərlə tanışlıq üçün bax, [6], [7].

Əd.: [1] С в и р к у н о в Н. П., Статистические модели климата Земли. Обзор. Сер. Метеорология, в. 4, Обнинск, 1982; [2] Д е м ч е н к о П. Ф., «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1983, т. 19, № 12, с. 1259–66; [3] H a s s e l m a n n K., «Tellus», 1976, v. 28, № 6, p. 473–85; [4] F r a n k i g n o u l C., «Dynamics of Atmosfere and Oceans», 1979, v. 3, № 2–4, p. 465–79; [5] L e m k e P., T r i n k l E. W., H a s s e l m a n n K., «J. of Physical Oceano-graphy», 1980, v. 10, № 12, p. 2100–20; [6] S a l t z m a n B., S u t e r a A., E v e n s o n A., «J. of Atmospheric Sci.», 1981, v. 38, № 3, p. 494–503; [7] E g g e r J., «J. of Atmospheric Sci.», 1981, v. 37, № 12, p. 2606–18.

STOXASTİK MÜƏYYƏN PROSES « стохастически определенный процесс; stochastically defined process » – bax, *Markov prosesi* v ə z i y y ə t l ə r i ç o x l u ğ u s o n l u.

STOXASTİK / EHTİMALİ NÜVƏ « стохастическое ядро; stochastic kernel » – x nöqtəsi və B çoxluğunun elə $K(x, B)$ funksiyasıdır ki, x qeyd olunduqda $K(x, B)$ B üzrə ehtimal paylanmasıdır və qeyd olunmuş ixtiyari B intervalı üçün $K(x, B)$ x -ə görə Ber funksiyasıdır (bax, [1], səh. 188, 240). Bu tərif hətta ümumi fəzalar üçün də doğrudur. K nüvəsinin bütün fəzada təyin olunması sərt deyildir. Əgər x və B Ω çoxluğunun altçoxluqları olarsa, onda K Ω -da t o p l a n m ı ş - d ı r, deyilir. Bəzən qeyri – məxsusi (defektli) paylanmalar olduğu zəruriliyi fərz olunarsa, bu halda S. n. s u b s t o x a s t i k n ü v ə adlanır. S. n. bəzən

$$K(x, B) = \int_B k(x, y)\, dy \qquad (1)$$

inteqralı ilə də ifadə olunur; bu halda (1) inteqralındakı $K(x, y)$ funksiyası s t o x a s t i k n ü v ə n i n s ı x l ı ğ ı adlanır

(ciddi deyilişdə, k Lebeq ölçüsünə və ya uzunluğa nəzərən sıxlıqdır); μ ixtiyari ölçü olarsa, $K(x, dy) = k(x, y)\mu\{dy\}$ götürülür. Dekart vəziyyətlər fəzaları (və ya daha ümumi) hallarında diskret Markov zəncirləri üçün keçid ehtimalı sətirləri ehtimal paylanmaları, elementləri p_{ij} olan *stoxastik matris* ilə verilir. Bu halda x nöqtəsindən hər hansı interval və ya B çoxluğuna keçidə $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında baxılır. Məs., Ω çoxluğu ya bütün fəzanın özü və ya K nüvəsinin topalandığı çoxluq ilə üst-üstə düşərsə, x nöqtəsindən B çoxluğuna iki addıma keçid ehtimalını tərifə əsasən

$$K^{(2)}(x, B) = \int_{\Omega} K(x, dy)\, K(y, B) \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə ifadə etmək olar. (2) münasibəti birinci addımda x nöqtəsindən hər hansı y nöqtəsinə keçid, ikinci addımda isə y nöqtəsindən B çoxluğuna keçid olduğunu ifadə edir. Burada əsas fərziyyə ondan ibarətdir ki, aralıq y nöqtəsi verildikdə keçmişin gələcək keçidləri təsiri yoxdur. n addımda keçid ehtimalı $K^{(n)}$ haqqında analoji mühakimə etmək olar. Əgər $K^{(1)} = K$ götürülərsə, onda m və n -in ixtiyari tam qiymətlərində

$$K^{(m+n)}(x, B) = \int_{\Omega} K^{(m)}(x, dy)\, K^{(n)}(y, B) \qquad (3)$$

düsturu doğrudur. $m = n = 1$ olduqda (3) düsturu (2) düsturu olur. $m = 1$ və $n = 1, 2, \ldots$ olduqda keçid ehtimalları $K^{(n)}$ -lər (3) düsturu ilə ardıcıl təyin olunur. x nöqtəsində topalanmış ehtimal paylanmasını $K^{(0)}$ ilə işarə etdikdə (3) düsturu bütün $m \geq 0$, $n \geq 0$ tam qiymətlərində doğrudur; $K^{(0)}$ K r o n e k e r n ü v ə s i adlanır. Nüvələr üzərində (3) əməli (ehtimal nəzəriyyəsindən fərqli digər nəzəriyyələrdə də təsadüf olunan) nüvələrin kompozisiyası adlanır. Bu əməl bütün cəhətlərilə matrislərin vurulmasına oxşardır.

$K^{(n)}$ S. n.-lərdir. Əgər K nüvələrinin də sıxlıqları vardırsa, onda bütün $K^{(n)}$ nüvələrinin də sıxlıqları vardır və

$$k^{(m+n)}(x, z) = \int_{\Omega} k^{(m)}(x, y)\, k^{(n)}(y, z)\, dy .$$

Bax, *Ehtimal*; *keçid ehtimalı*, *Markov zənciri.*

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Теория вероятностей и ее приложения, т. 2, пер. с англ., М., 1984; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

STOXASTİK OPTİMAL İDARƏETMƏ d i s k r e t z a m a n l ı **« стохастическое оптимальное управление** с дискретным временем; discrete time **optimal stochastic control »** – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* d i s k r e t z a m a n l ı.

STOXASTİK ÖLÇÜ « стохастическая мера; stochastic measure » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

STOXASTİK PROSES « стохастический процесс; stochastic process » – bax, *Təsadüfi proses*, *Stoxastik ardıcıllıq.*

STOXASTİK SEMİ – QRUP « стохастическая полугруппа; stochastic semigroup » – $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, hər hansı topoloji G semi – qrupundan qiymətlər alan və

$$0 \leq s \leq \tau \leq t \leq T < \infty : X_s^{\tau} X_{\tau}^{t} = X_s^{t}, \;\; X_{\tau}^{\tau} = I (\mathrm{mod}\, \mathbf{P}) \qquad (1)$$

təyinedici evolyusional tənliyini ödəyən, ikiparametrli X_s^t, $0 \leq s \leq t \leq T < \infty$ *təsadüfi kəmiyyətlər* sistemidir, burada I, – G semi – qrupunun vahididir. S. s. [1]-də daxil olunmuş və təsadüfi operatorların stoxastik semi – qrupu kimi öyrənilmişdir. S. s.-un əsas xassələri [1]-də, $0 \leq s = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t \leq T$, $\delta_n = \max(t_k - t_{k-1})$ olduqda

$$D(X)_s^t = Y_s^t = \lim \sum_{k=1}^{n} (X_{t_{k-1}}^{t_k} - I), \; \delta_n \to 0$$

münasibətilə təyin olunan, bu semi – qrupun özünün infinitezimal semi – qrupu vasitəsilə öyrənilmişdir.

X_s^t S. s.

$$X_s^t = I + \int_s^t X_s^{\tau}\, dY_0^{\tau} \qquad (2)$$

evolyusional stoxastik inteqral tənliyinin həlli kimi də təyin oluna bilinər.

Bu halda mühüm məsələ (2) tənliyinin həllinin $Y_s^t = V_s^t + W_s^t$ kükrəntili halında ifadə olunması haqqında məsələdir, yəni o halda ki, təyinedici infinitezimal V_s^t semi – qrupu digər, ondan asılı olmayan infinitezimal W_s^t semi – qrupu ilə kükrəntiyə məruz qalır. Bu halda (2) tənliyinin ümumi həlli uyğun olaraq, V_s^t və W_s^t üçün onun xüsusi – U_s^t və Z_s^t həllərinin qarışıq hasili şəklində alınır,

$$X_s^t = (U \boxtimes Z)_s^t = \lim \prod_{k=1}^{n} U_{t_{k-1}}^{t_k} Z_{t_{k-1}}^{t_k}, \; \delta_n \to 0 .$$

S. s. terminlərilə asılı olmayan artımları $X^{-1}(t_{k-1}) \times$ $\times X(t_k) = X_{t_{k-1}}^{t_k}$ olan $X(t)$ multiplikativ təsadüfi prosesinin ümumi nəzəriyyəsini, bu prosesin klassik haldakı Levi – Xinçin ifadəsinə uyğun ayrılışının alınmasına qədər, lakin uyğun komponentlərin qarışıq hasilləri terminləri ilə qurmaq olar. (1) tənliyində vurma əməlini operatorların ardıcıl tətbiqi kimi qəbul edərək, S. s. anlayışını evolyusion tipli qeyri – xətti stoxastik tənliklərin həlli üçün istifadə etmək olar (bax, [3], [4]).

Əgər kəsilməzlik şərti ödənilmirsə və ya U_s^t və Z_s^t semi-qrupları asılı ola bilərlərsə, sıçrayışlar və ya onların asılılığı üzərinə bəzi əlavə şərtlərlə $(U \boxtimes Z)_s^t$ qarışıq hasili də mövcuddur. Bu halda infinitezimal semi – qrup üçün düstur

$$Y_s^t = D(U \boxtimes Z)_s^t = V_s^t + W_s^t + (V \boxplus W)_s^t$$

şəklində olur, burada

$$(V \boxplus W)_s^t = \lim \sum_{k=1}^{n} V_{t_{k-1}}^{t_k} W_{t_{k-1}}^{t_k}, \; \delta_n \to 0 , \qquad (*)$$

tərifə görə (*) V_s^t və W_s^t semi – qruplarının qarışıq cəmi adlanır.

Əd.: [1] Буцан Г. П., Стохастические полугруппы, К., 1977; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [3] Далецкий Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1962, т. 15, в. 5, с. 3–115; [4] Скороход А. В., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 157–83.

STOXASTİK TÖRƏMƏ « стохастическая производная; stochastic derivative » – *Viner prosesi* w-nin funksionalları fəzasının $H = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ fəzasına hamar funksionallarda adi differensiallama ilə üst-üstə düşən xətti inikasıdır. *Genişlənmiş stoxastik inteqral* nəzəriyyəsi və *Mallyavin hesabında* mühüm rola malikdir.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathcal{A}$, – $\sigma\{w\}$, $\eta \in L^2(\Omega)$ olsun. I_n – *çoxqat Viner inteqralları*, f_n, – $L^2(\mathbb{R}_+^n, \|\cdot\|)$ fəzasından olan simmetrik funksiyalar olduqda, İto teoreminə əsasən (bax, [1])

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(t_1, \dots, t_n)).$$

Stoxastik Skoroxod törəməsi – təyin olunma oblastı

$$\mathcal{D}(D) = \{ : \sum (n-1)!\, n^2 \| f_n \|_n^2 < \infty \}$$

olan,

$$D\eta(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, \cdot))$$

ifadəsilə təyin olunan, $L^2(\Omega)$-dan H-a qapalı xətti D operatorudur (bax, [2], [3]).

Əgər $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $L^2(\mathbb{R}_+)$-da skalyar hasildirsə, onda $D_h \eta = \langle D\eta, h \rangle$ $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ elementində $D\eta$ təsadüfi xətti funksionalının qiymətidir. $D_h\eta$ kəmiyyəti (Mallyavin stoxastik törəməsi adlanan; bax, [4])

$$\sum n\, I_{n-1}(\langle f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, \cdot), h(\cdot) \rangle)$$

sırası yığılan bütün η-lar üçün də təyin oluna bilər. Mallyavin S. t.-si istiqamət üzrə differensiallama ilə aşağıdakı qaydada bağlıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – Viner ölçülü kəsilməz funksiyalar fəzası, $w(\omega) = \omega$, $x_t = \int_0^t h_s\, ds$ olsun, $\varepsilon \to 0$ olduqda $\varepsilon^{-1}(\eta(\omega + \varepsilon x) - \eta(\omega))$ limiti $L^2(\Omega)$ mənada vardır və ξ-yə bərabərdir. Onda Mallyavin S. t.-si vardır və o, ξ ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Ito K., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, p. 157–69; [2] Скороход А. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 2, с. 223–37; [3] Кабанов Ю. М., Скороход А. В., в сб.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов. (Друскининкай, 25–30 ноября 1974) , ч. 1, Вильнюс, 1975, с. 123–67; [4] Nualart D., Zakai M., «Probab. Th. Rel. Fields», 1986, v. 73, № 2, p. 255–80.

STRATEGİYA « стратегия; strategy / policy » – oyunlar nəzəriyyəsi, optimal idarəetmə nəzəriyyəsi, əməliyyatların tədqiqində əsas terminlərdən və fundamental anlayışlardan biridir. Plan, proqramlar, atılacaq addımlar ardıcıllığı, atılacaq addımlar üçün qaydalar, dayanma, idarəetmə, qərar qaydaları kimi anlayışlar, xüsusilə də, çoxaddımlı (dinamik) proseslər üçün geniş mənada sinonim kimi istifadə olunur.

S. üçün dəqiq təriflər riyazi nəzəriyyənin uyğun bölməsi kontekstində verilir. Məs., oyunlar nəzəriyyəsində S., strateji oyunun qaydalarına uyğun olaraq, oyunçunun atacağı addımın və ya atacağı addımlar koalisiyasının mümkün davranış qaydasıdır. S. anlayışının istifadə olunduğu sahələrə aid mühüm misal idarəolunan Markov zəncirləri nəzəriyyəsidir (qərarlar qəbuletmənin Markov prosesləri nəzəriyyəsi). Bunlar üçün S. $h = (x_0, a_1, x_1, \dots, a_n, x_n)$ tarixlərindən asılı, idarəetmələr fəzası A-da $\pi_n(da\,|\,h)$ ehtimal ölçüləri ardıcıllığıdır, burada x_i – idarəolunan Markov zəncirinin vəziyyəti, a_i, – i anında istifadə olunan idarəetmədir.

Bu və ya digər kriteriyə nəzərən optimal və sanki optimal S.-ların varlığı; əsas etibarilə, *optimallıq tənlikləri* (Bellman tənlikləri) və uduş funksiyaları (dəyər) terminlərilə zəruri və kafi optimallıq şərtləri; optimal və sanki optimal və o cümlədən, ədədi S.-ların qurulması; müxtəlif S.-lar siniflərinə baxılması – S.-nın öyrənilməsi ilə bağlı əsas məsələlərdir.

Bir qayda olaraq, n anında sistemin bu andan sonrakı vəziyyətləri haqqında informasiyadan istifadə etməyən qeyri–antisipativ funksiya S.-lara baxılır. Ən çox baxılan strategiyalar sinifləri aşağıdakılardır: randomlanmamış [idarəolunan Markov zəncirləri üçün S. – hər bir n və h üçün uyğun $\pi_n(da\,|\,h)$ ölçüləri cırlaşan olduğu halda randomlanmamış strategiya adlanır] strategiyalar sinfi; oyunlar nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan *randomlanmış strategiyalar* sinfi; idarəedici təsirin seçilməsi yalnız baxılan an və cari vəziyyətdən asılı olan və sistemin keçmişindən asılı olmayan Markov strategiyalar sinfi; idarəedici təsirin seçilməsi yalnız sistemin cari vəziyyətindən asılı stasionar strategiyalar sinfi; bu və ya digər çoxluqda stasionar strategiyalar sinfi.

Ənənəvi olaraq, ekstremumu bütün mümkün olan S.-lar üzrə ekstremumla üst-üstə düşən S. sinifləri öyrənilir. Məs., müsbət dinamik proqramlamada, yəni additiv mənfi olmayan funksionalın maksimizasiyası məsələlərində stasionar S.-lar sinfi belə xassəyə malikdir. Son zamanlar bu və ya digər üstünlükləri olan daha dar S.-lar siniflərini araşdırmağa maraq artmışdır. Bu və ya digər sinifdə bütün başlanğıc nöqtələri və ya hətta bütün aradakı nöqtələr üzrə müntəzəm optimal (sanki optimal) S.-ların varlığı da mühüm bir məsələdir. Belə S.-ların varlığı baxılan S. sinfi üzrə ekstremum kimi anlaşılan uduş funksiyası üçün optimallıq tənliyinin doğruluğunu təmin edir.

Görülən işlərin əksəriyyəti S.-nın konstruktiv qurulması məsələlərinə, onların optimal strategiyalara yaxınlığının qiymətləndirilməsinə və s.-yə həsr olunmuşdur (bax, məs., [3]). Prinsipial yeni S.-lar sinifləri adaptiv idarəetmə nəzəriyyəsində öyrənilir ki, burada optimallıq baxılan sistemlərin sinifləri üçün öyrənilir. İqtisadi dinamika modellərində bu və ya digər mənada stasionar və effektiv trayektoriyalara (magistrallara) gətirən S.-ların varlığına böyük diqqət yetirilir.

Əd.: [1] Юшкевич А. А., Читашвили Р. Я., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6, с. 213–42; [2] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [3] Federgruen A., Markovian control problems, Amst., 1983.

STRATEGİYA; tam sinif **« стратегия;** полный класс; complete class of **strategies »** – strategiyaların (həlledici funksiyaların) elə sinfidir ki, bu sinfə aid olmayan ixtiyari strategiya üçün elə strategiya tapmaq olar ki, o,

bu sinifdən olsun və ilkin strategiyadan heç də pis olmasın (bax, *Oyunu*, *iki şəxsin*, *Statistik oyun*).

STRATONOVİÇ STOXASTİK İNTEQRALI « Стратоновича стохастический интеграл; Stratonovich stochastic integral », simmetrik stoxastik inteqral, – H *semimartinqalının* X semimartinqalı üzrə $\int H \circ dX$ inteqralıdır və bu inteqral üçün adi differensiallama qaydaları doğrudur.

$$\int_0^t H_{s-} \circ dH_s$$

(və ya $H \circ H_t$ və ya $\int_{(0,t)} H_{s-} \circ dX_s$) – Stratonoviç stoxastik inteqralı, tərifə görə,

$$\int_0^t H_{s-}\, dX_s + \frac{1}{2}[H^c, X^c]_t \qquad (1)$$

cəminə bərabərdir. Bu cəmin sağ tərəfindəki toplanan İto stoxastik inteqralıdır, $[H^c, X^c] = \langle H^c, X^c \rangle$, – H və X semimartinqallarının uyğun olaraq, kəsilməz martinqal hissələrinin (qarşılıqlı kvadratik xarakteristikası) kvadratik kovariasiyasıdır. Kəsilməz H və X semimartinqalları üçün S. s. i. –

$$\int_0^t H_{s-} \circ dX_s = \int_0^t H_s \circ dX_s$$

aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.p.}} \sum_i H_{s_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) =$$

$$= \underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.p.}} \sum_i \frac{1}{2}(H_{t_i} + H_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), \qquad (2)$$

burada $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$, – $(0, t]$ intervalının ixtiyari bölgüsü, l.i.p. – ehtimal üzrə limit, $|\Delta| = \max |t_{i+1} - t_i|$, $s_i = (t_i + t_{i+1})/2$ [$\int_0^t H_s\, dX_s$ adi stoxastik inteqralı $\underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.p.}} \sum H_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ kimi ifadə olunur, müqayisə et]. (2)-də ikinci limit, bəzən, kəsilən H və X semimartinqalları üçün simmetrik stoxastik inteqral adlandırılır. Belə tərif verildikdə bu inteqral

$$\int_0^t H_{s-}\, dX_s + \frac{1}{2}[H, X]_t$$

kimi ifadə olunur.

Əgər $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $X_t = (X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^n)$ n – ölçülü semimartinqallar olarsa, onda

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^n \int_0^t D_k f(X_{s-}) \circ dX_s^k +$$

$$+ \sum_{0<s\le t} \left(f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{k=1}^n D_k f(X_{s-})\, \Delta X_s^k \right)$$

bərabərliyi (S. s. i. üçün İto düsturu) doğrudur, məs., $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$, $D_k f(x) = \partial f(x)/\partial x_k$ olduqda

$$\int_0^t X_{s-} \circ dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \circ dX_{s-} - \sum_{0<s\le t} \Delta X_s \Delta Y_s$$

olur, yəni S. s. i. üçün, məhdud variasiyalı proseslər üçün olduğu kimi, differensiallama və hissə-hissə inteqrallama düsturları doğrudur.

(2)-də S. s. i.-nın tərifi birici limit kimi xüsusi hallarda R. L. Stratonoviç və D. Fisk (D. Fisk) tərəfindən bir-birindən asılı olmadan verilmişdir. Buna görə də, S. s. i. bəzən Fisk inteqralı və ya Fisk–Stratonoviç inteqralı da adlandırılır. Yuxarıda verilən formal tərif P. Meyerə (P. Meyer) və kəsilməz semimartinqallar üçün K. İtoya (K. Itô) məxsusdur.

S. s. i.-nı H funksiyalarının daha geniş sinfi üçün də təyin etmək olur. Məs., əgər $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ olduqda, $H_t = f(Y_t^1, Y_t^2, \ldots, Y_t^n)$, Y^k semimartinqallar olarsa, onda kvadratik kovariasiya $[H^c, X^c]$ təyin oluna bilinir və (1) cəmi də «yaxşı» xassələrin ödənilməsi ilə S. s. i.-nın təyin olunması üçün yenə də tətbiq oluna bilinir (bax, [2]). S. s. i.-nın əsas çatışmayan cəhəti Stratonoviç mənada inteqrallanan proseslər sinfinin İto mənada inteqrallanan proseslər sinfindən dar olmasındadır. Lakin bəzi hallarda S. s. i. daha təbiidir və daha üstün hesab edilir. Ümumiyyətlə isə, İto və ya Stratonoviç inteqrallarından hansına üstünlük verilməsi konkret məsələ üçün konkret fərziyyələrə görə belə məna daşıyır. Əksər hallarda hər iki inteqraldan eyni zamanda istifadə olunur, bu isə onunla əlaqədar olur ki, baxılan anda S. s. i.-nın həndəsi və ya analitik xassələrindən və İto inteqralının ümumiliyindən hansına üstünlük verilir.

Əd.: [1] Стратонович Р. Л., «Вестн. Моск. ун-та», 1964, № 1, с. 3–19; [2] Meyer P. A., «Lect. Notes in Math.», 1967, v. 511, p. 245–400; [3] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., M., 1986.

λ – STRUKTUR(u) ehtimali metrikanın « λ – **структура** вероятностной метрики; λ – **structure** of a probabilistic metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

ξ – STRUKTUR(u) ehtimali metrikanın « ξ – **структура** вероятностной метрики; ξ – **structure** of a probabilistic metric » – bax, *Ehtimal metrikası*; struktur.

STRUKTUR FUNKSİYA(sı) **« структурная функция; srtucture function »** $X(t)$ həqiqi təsadüfi prosesinin və ya meydanının – $X(t)$-nin iki nöqtədəki qiymətləri fərqinin kvadratının orta qiymətidir, yəni

$$D(t, s) = \mathbf{M}[X(t) - X(s)]^2$$

funksiyasıdır ($t \in \mathbb{R}^1$ və ya $t \in \mathbb{R}^k$, $k > 1$). Əgər bütün t-lər üçün $\mathbf{M}[X(t)]^2 < \infty$ olarsa, onda

$$D(t,s) = B(t,t) + B(s,s) - 2B(t,s)$$

bərabərliyi doğrudur, burada $B(t,s) = \mathbf{M}\,X(t)\,X(s)$, – $X(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyasıdır. S. f. birinci tərtib stasionar artımlarlı təsadüfi proseslərin və lokal bircins təsadüfi meydanların (yəni bircins artımlarlı təsadüfi meydanların) öyrənilməsində tez-tez istifadə olunur; bunlar üçün $D(t,s) = D(t-s)$. Geniş mənada stasionar artımlarlı təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində və geniş mənada lokal bircins təsadüfi meydanların korrelyasion nəzəriyyəsində $X(t)$ təsadüfi funksiyasının əsas statistik xarakteristikası – onun $\Delta_u X(t) = X(t+u) - X(t)$ artımlarının korrelyasion funksiyası

$$\mathbf{M}\,\Delta_u X(t)\Delta_v X(s) = D(t-s;u,v)$$

bəzən $X(t)$ funksiyasının ümumi struktur funksiyası da adlandırılan funksiyadır. Bu funksiya

$$D(t;u,v) = [D(t+u) + D(t-v) - D(t+u-v) - D(t)]/2 \quad (1)$$

şəklində ifadə oluna bilinir, odur ki, burada yalnız ən sadə $D(t)$ S. f.-na baxmaq kifayətdir.

Stasionar artımlarlı proseslərin S. f.-ları $D(t)$-lər sinfi aşağıdakı şəkildə spektral ayrılışı mümkün olan funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür:

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos t\lambda)\; dF(\lambda) + at^2, \qquad (2)$$

burada $a \geq 0$, $F(\lambda)$, – λ-nın monoton azalmayan elə funksiyasıdır ki, ixtiyari $\lambda_0 > 0$ üçün

$$\int_{-\infty}^{-\lambda_0} dF(\lambda) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \lambda^2 dF(\lambda) + \int_{\lambda_0}^{\infty} dF(\lambda) < \infty. \quad (3)$$

(1) və (2)-dəki təsadüfi funksiyaların ortoqonal ifadə olunması haqqında Karunen teoreminin köməyilə stasionar artımlarlı prosesin özünün spektral ayrılışı çıxarılır. $\mathbb{R}^k$ fəzasında lokal bircins təsadüfi meydanların S. f.-ları üçün (2) və (3)-ə analoji düsturlar doğrudur [lakin skalyar dəyişən λ üzrə inteqrallama vektor dəyişən $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ üzrə inteqrallama ilə əvəz olunmalıdır] (bax, [6], [7]).

Stasionar artımlarlı çoxölçülü proses və ya lokal bircins meydan $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ üçün S. f. $D(t)$ rolunu qarşılıqlı struktur funksiyalar matrisi (başqa sözlə, struktur matris) ifadə edir, yəni

$$D(t) = \left\| D_{jk}(t) \right\|_1^n =$$

$$= \left\| \mathbf{M}[X_j(t+s) - X_j(s)][X_k(t+s) - X_k(t)] \right\|_1^n.$$

$D_{jk}(t)$ – qarşılıqlı S. f.-ları da (2) ayrılışına yaxın spektral ayrılışla ifadə oluna bilinir. Lakin çoxölçülü halda ümumi qarşılıqlı struktur funksiya –

$$D_{jk}(t;u,v) =$$

$$= \mathbf{M}[X_j(t+s+u) - X_j(t+s)][X_k(s+v) - X_k(s)]$$

bu halda artıq daha sadə $D_{jk}(t)$ funksiyaları ilə ifadə oluna bilinir, yalnız əlavə bir şərtlə: $D_{jk}(t;u,v) = D_{kj}(t;u,v)$ şərti ödənilməlidir, bu şərt isə tətbiqdə əksər hallarda ödənilir (bax, məs., [6], [7]).

S. f. anlayışı A. N. Kolmoqorov tərəfindən 1940-da daxil olunmuşdur (bax, [1]); stasionar artımlarlı təsadüfi prosesin S. f.-nın spektral ayrılışı – (2), (3) düsturlarını da o almışdır. Başqa bir əlavəliklə bu nəticə 1941-də C. Neyman və İ. Şönberq tərəfindən [3]-də tapılmışdır. A. N. Kolmoqorov [2]-də 1941-də vektor lokal bircins təsadüfi meydanların S. f.-larını özünün inkişaf etdirdiyi lokal *izotrop turbulentlik nəzəriyyəsində* geniş istifadə etmişdir. «S. f.» terminini A. M. Obuxov daxil etmişdir (bax, [4], [6]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Математика и механика. Избранные труды, М., 1985, с. 269–73, 274–77; [2] Колмогоров А. Н., Математика и механика. Избранные труды, М., 1985, с. 281–87, 290–93; [3] Neumann J., Schoenberg I. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 50, № 2, p. 226–51; [4] Обухов А. М., «Изв. АН СССР. Сер. геогр и геофиз.», 1949, т. 13, № 1, с. 58–69; [5] Обухов А. М., «Докл. АН СССР», 1949, т. 67, № 4, с. 643–46; [6] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–337; [6] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967, § 13.

STRUKTUR FUNKSİYA(sı) sistemin **« структурная функция** системы; **structural function** of system **»** – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

STRUKTUR MATRİS « структурная матрица; parastophic / structure matrix » – ixtiyari $t_1, t_2 \in T$ üçün $\mathbf{M}\left|\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right|^2 < \infty$ şərtini ödəyən $\{\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_r(t);\ t \in T \subseteq \mathbb{R}^1\}$ çoxölçülü kompleks-qiymətli təsadüfi prosesinin artımlarının cüt-cüt kovariasiyalarından təşkil olunmuş matrisdir; daha dəqiq,

$$D(t_1,t_2,t_3,t_4) = \left\| D_{ik}(t_1,t_2,t_3,t_4) \right\|_{i,k=1}^r$$

struktur matris adlanır, burada

$$D_{ik}(t_1,t_2,t_3,t_4) = \mathbf{M}\{[\zeta_i(t_2) - \zeta_i(t_1) - m_i(t_1,t_2)] \times$$

$$\times \overline{[\zeta_k(t_4) - \zeta_k(t_3) - m_k(t_3,t_4)]}\},$$

$$m(t,s) = \mathbf{M}[\zeta(s) - \zeta(t)] = [m_1(t,s), \dots, m_r(t,s)].$$

Stasionar artımlarlı təsadüfi proseslər üçün $D(t_1,t_2,t_3,t_4)$ və $m(t_1,t_2)$ funksiyaları arqumentlərin yerinidəyişməsindən asılı deyildir. Həqiqi təsadüfi proseslər üçün $D(t_1,t_2,t_3,t_4)$ funksiyası $D(t_1,t_2) = D(t_1,t_2,t_1,t_2)$ funksiyası ilə ifadə oluna bilir.

Əgər $\mu(\Delta) = (\mu_1(\Delta), \dots, \mu_r(\Delta))$ hər hansı T çoxluğunun altçoxluqlarının semi – halqası $\mathfrak{M}$ -də təyin olunmuş elə elementar vektor ortoqonal təsadüfi ölçüdürsə ki,

1) $\mathbf{M}\left|\mu(\Delta)\right|^2 = \mathbf{M}\sum_{k=1}^{r} \left|\mu_k(\Delta)\right|^2 < \infty$, $\mu(\varnothing) = 0$;

2) əgər $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M}$ olarsa,

$$\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2) \pmod P;$$

3) $\mathbf{M}\mu_j(\Delta)\mu_k(\Delta) = m_{jk}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M}$, $j, k = 1, \dots, r$,

şərtlərini ödəmiş olsun, onda

$$m(\Delta) = \left\| m_{jk}(\Delta) \right\|_{j,k=1}^{r} = \mathbf{M}\mu(\Delta)\mu^*(\Delta)$$

matrisi də S. m. adlanır.

Bax, *Struktur funksiya.*

Əd.: [1] Я г л о м А. М., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 5, с. 3–168; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

STRUKTUR MÜNASİBƏTLƏR ANALİZİ « структурный соотношений анализ; structure relation analysis » – *çoxölçülü statistik analizin* bölməsidir, burada aşağıdakı tip modellərin qurulması ilə bağlı məsələlərin həllərinin statistik metodları cəmlənmişdir. Fərz olunur ki, iki təsadüfi $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^{\mathrm{T}}$ və $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_1, \dots, \upsilon_m)^{\mathrm{T}}$ vektorları $\mathbf{w} = \lambda_0 + \Lambda\boldsymbol{\upsilon}$ xətti münasibətilə əlaqələdirlər, burada λ_0 və Λ uyğun olaraq, $(n+1)$ – vektor və naməlum əmsalların $(n \times m)$ – matrisidir. $\mathbf{w}$ və $\boldsymbol{\upsilon}$ vektorlarının qiymətləri əvəzinə $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$ və $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^{\mathrm{T}}$ təsadüfi vektorlarının qiymətləri müşahidə olunur və bu vektorlar aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\upsilon} + \mathbf{e}_x,$$

burada $\mathbf{e}_y = (e_{y_1}, \dots, e_{y_n})^{\mathrm{T}}$ və $\mathbf{e}_x = (e_{x_1}, \dots, e_{x_m})^{\mathrm{T}}$ – ölçmə xətalarının təsadüfi vektorlarıdır. Fərz olunur ki, xətaların təsadüfi vektoru $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_y^{\mathrm{T}}, \mathbf{e}_x^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ riyazi gözləməsi sıfra bərabər olan, naməlum diaqonal kovarians $(n+m) \times (n+m)$ – matrisi Ψ^2 ilə verilən çoxölçülü normal paylanmaya malikdir və bu paylanma $\boldsymbol{\upsilon}$-dən asılı deyildir, yəni $\mathbf{M}(\mathbf{e}\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}) = 0$. Xətaların dispersiyalarının sonlu fərqli olduqları fərz olunur, lakin xüsusi hallarda dispersiyaların bəzilərinin bərabər olması və ya sıfra bərabər olması mümkündür. Bütün mişahidələr üçün ümumi hesab edilən λ_0, Λ və Ψ^2 parametrləri struktur parametrləri, $\boldsymbol{\upsilon}$ vektorunun $\mathbf{x}$ və $\mathbf{y}$ vektorlarının müşahidələrinin ayrı-ayrı qiymətlərilə əlaqədar «əsl» qiymətləri təsadüfi parametrlər adlanır.

Struktur münasibətlərinin modelinin qurulması ilə bağlı əsas məsələlərə modelin varlığı və identifikasiyası (yeganəliyi), naməlum parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi və onların alqoritmik təyini, modelin müşahidə olunan verilənlərə adekvatlığı haqqında hipotezlərin statistik yoxlanılması, struktur parametrlərinin qiymətləri və s. kimi məsələlər aiddir.

$n < m$ şərti ödənildikdə struktur münasibətlər modeli identifikasiya olunur. Modelin identifikasiyası üzrə nəticələr (modelin yeganəliyi üçün zəruri və kafi şərtlər) alınmışdır (bax, [1]).

$(y_1', x_1'), \dots, (y_N', x_N')$ – seçimi verilənləri və ya seçimi ifadə edən asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi vektorlar ardıcıllığı olsun. μ_x, λ_0 üçün statistik qiymətlər kimi uyğun olaraq, $\bar{x} = (1/N)\sum_{i=1}^{N} x_i$ və $\bar{y} = \hat{\Lambda}\bar{x}$ statistikalarını seçmək olar.

Λ və Ψ^2 struktur parametrlərinin matrislərinin qiymətləndirilməsi müəyyən şəkildə tam ümumiləşmiş problemin məxsusi qiymətlərinə optimizasiya məsələlərinin həllinə gətirilir. İsbat olunmuşdur ki, belə həll nəticəsində alınan $\hat{\Lambda}$ və $\hat{\Psi}^2$ statistik qiymətləri ciddi tutarlılıq xassəsinə malik olurlar (yəni $N \to \infty$ olduqda uyğun olaraq, Λ və Ψ^2 parametrlərinə vahid ehtimalla yığılırlar), bu şərtlə ki, bəzi zəif fərziyyələr tələb olunur (məs., $(\mathbf{y}', \mathbf{x}')^{\mathrm{T}}$-nin paylanması haqqında fərziyyə irəli sürülmür). Modelin təsadüfi parametrləri üçün tutarlı statistik qiymətlər də vardır (bax, [1]).

Əd.: [1] Б а н н и к о в В. А., в кн.: Статистика. Вероятность. Экономика, М., 1985, с. 20–31.

STRUKTUR ÖLÇÜ « структурная мера; structure measure » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

STRUKTUR PARAMETR « структурный параметр; structure parameter » – bax, *Struktur munasibətlər analizi*, *Faktor analiz.*

STYUDENT KRİTERİSİ « Стьюдента критерий; Student's test », t – k r i t e r i – normal paylanmaların dispersiyaları naməlum olduğu halda, paylanmaların orta qiymətləri haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün *statistik kriteridir*. Birseçimli və ikiseçimli S. k.-lərindən birseçimli S. k. normal paylanmalı ümumi çoxluqdan təsadüfi seçimin orta qiyməti haqqında hipotezin yoxlanılması üçün kriteridir. İkiseçimli S. k. eyni dispersiyalı normal paylanmalarlı ümumi çoxluqdan iki seçimin orta qiymətlərinin fərqi haqqında hipotezin yoxlanılması üçün kriteridir.

Birseçimli S. k. n həcmli $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ seçimi hər biri normal qanunla paylanmış, riyazi gözləməsi μ və dispersiyası σ^2 olan n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətdən ibarət olsun.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n, \quad s_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})/(n-1),$$

$$t(X) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/s_X$$

və $C_l(\alpha)$ – sərbəstlik dərəcəsi sayı l-ə bərabər Styudent paylanmasının $1-\alpha$ səviyyəli kvantili olsun.

$H_1 : \mu > \mu_0$ alternativinə qarşı $H_0 : \mu \le \mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün S. k.-nin α – ölçülü kritik oblastı

$$t(X) > C_{n-1}(\alpha) \qquad (1)$$

münasibətilə təyin olunur.

$H_1' : \mu \ne \mu_0$ alternativinə qarşı $H_0' : \mu = \mu_0$ hipotezinin yoxlanılması üçün S. k.-nin α – ölçülü kritik oblastı

$$|t(X)| > C_{n-1}(\alpha/2) \qquad (2)$$

münasibətilə təyin olunur, burada $t(X) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/s_X$. (1) münasibətilə ifadə olunan kriteri b i r t ə r ə f l i S. k., (2) münasibətilə ifalə olunan kriteri i k i t ə r ə f l i S. k. adlanır. Hər iki kriteri $(x_1, \dots, x_n) \to (cx_1, \dots, cx_n)$, $0 < c < \infty$ çevirməsinə nəzərən müntəzəm ən güclü invariant kriterilərdir və müntəzəm ən güclü meylsiz kriterilər, ən ciddi kriterilərdir. $\alpha \ge 1/2$ olduqda birtərəfli S. k. müntəzəm ən güclü kriteridir.

İkiseçimli S. k. $X = (X_1, \dots, X_n)$ və $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ – normal paylanmalarlı ümumi çoxluqdan dispersiyaları naməlum

seçimlər, X_i və Y_i – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $\mathbf{M}X_i = \xi$, $\mathbf{M}Y_j = \eta$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ və

$$t(X, Y) = \frac{(\overline{Y} - \overline{X})\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}\ \sqrt{1/n + 1/m}}$$

olsun.

$H_1 : \eta - \xi > 0$ $(H_1' : \eta - \xi \neq 0)$ alternativinə qarşı $H_0 : \eta - \xi \leq 0$ $(H_0' : \eta - \xi = 0)$ hipotezinin yoxlanılması üçün S. k.-nin α – ölçülü kritik oblastı

$$t(X, Y) > C_{n+m-2}(\alpha) \quad (\,|t(X, Y)| > C_{n+m-2}(\alpha/2)\,)$$

münasibətilə təyin olunur. Hər iki kriteri müntəzəm ən güclü meylsiz kriterilərdir və

$$(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) \to$$
$$\to (a x_1 + b, \dots, a x_n + b;\ a y_1 + b, \dots, a y_m + b),$$
$$0 < a < \infty, \quad -\infty < b < \infty$$

çevirməsinə nəzərən invariant kriterilərdir.

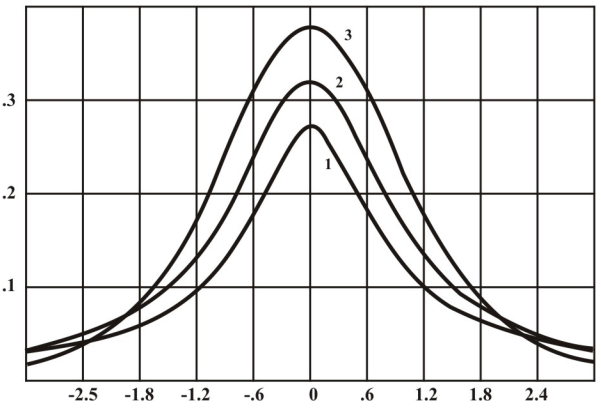
«S. k.» adı onunla bağlıdır ki, U. S. Qosset (W. S. Gosset) Styudent (Student) təxəllüsü ilə ilk dəfə $X_1, \dots, X_n$ asılı olmayan, riyazi gözləməsi sıfra bərabər və dispersiyaları σ^2 olan normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda $\sqrt{n}\ \overline{X}/s_X$ statistikası üçün paylanma almışdır.

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] «Biometrika», 1908, v. 6, p. 1–25.

STYUDENT PAYLANMASI « Стьюдента распределение; Student's distribution », s ə r b ə s t l i k d ə r ə c ə s i s a y ı n-ə b ə r a b ə r S t y u d e n t p a y l a n m a s ı, t – paylanma – paylanmasının sıxlıq funksiyası (bax, şəkil)

$$p(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\ (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$$

düsturu ilə ifadə olunan, $(-\infty, \infty)$-da topalanmış kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*.



Styudent paylanmasının sıxlıq funksiyaları : (1) $n = 0{,}5$; (2) $n = 1$; $n = 5$.

S. p. –

$$t_n = \xi \Big/ \sqrt{\chi_n^2/n}$$

təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanmasıdır, burada ξ, – $(0, 1)$ parametrlərli standart normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət, χ_n^2, – ξ-dən asılı olmayan, sərbəstlik dərəcəsi sayı n-ə bərabər *xi – kvadrat paylanmaya* tabe təsadüfi kəmiyyətdir. t_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası

$$\mathbf{P}\{t_n \leq x\} = S_n(x) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^{x} (1 + \xi^2/n)^{-(n+1)/2} d\xi$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Xüsusi halda, $n = 1$ olarsa, onda

$$S_1(x) = 1/2 + \pi^{-1} \operatorname{arctg} x$$

– Koşi paylanmasının paylanma funksiyasıdır. S. p.-nın sıxlıq funksiyası sıfra görə simmetrikdir, buna görə də, ixtiyari $t \in R$ üçün $S_n(t) + S_n(-t) = 1$ olur. S. p.-nın momentləri $m_c = \mathbf{M}\,t_n\,r$ yalnız $r < n$ qiymətlərində mövcuddur, bu halda təktərtib momentlər sıfra bərabərdir; t_n-in riyazi gözləməsi sıfra bərabərdir.

Cüttərtib momentlər aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$m_{2r} = n^r\,\frac{\Gamma(r/2 + 1/2)\Gamma(n/2 - r)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)}, \qquad 2 \leq 2r < n;$$

məs., t_n-in dispersiyası $n/(n-2)$-yə bərabərdir. t_n təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası $S_n(x)$ beta – paylanma funksiyası terminlərilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$S_n(x) = 1 - B_{n/2,\,1/2}\,(n/(n^2 + x^2))/2,$$

burada $B_{a,b}(z)$, $0 \leq z \leq 1$ – natamam beta – funksiyadır.

S. p. – *Pirson paylanmaları* ailəsinin xüsusi – VII tip halıdır. Əgər $n \to \infty$ olarsa, S. p. standart normal qanuna yığılır, yəni

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt\,.$$

M i s a l. $X_1, \dots, X_m$, – a, σ parametrlərli normal qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; a və σ naməlumdur. Onda

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i\,, \quad s^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2$$

statistikaları uyğun olaraq, a və σ parametrləri üçün ən yaxşı meylsiz statistik qiymətlərdir və $\overline{X}$ ilə s^2 stoxastik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\sqrt{m}\,(\overline{X} - a)/\sigma$ normalanmış təsadüfi kəmiyyəti standart normal qanuna tabe olduğundan,

$$\frac{m-1}{\sigma^2}\,s^2 = \chi_{m-1}^2$$

təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcəsi sayı $n = m - 1$-ə bərabər xi – kvadrat qanunu ilə paylandığından və bu təsadüfi kəmiyyətlər asılı olmadıqlarından,

$$\frac{\sqrt{m}\,(\overline{X} - a)/\sigma}{\sqrt{\chi_m^2/(m-1)}} = \frac{\sqrt{m}\,(\overline{X} - a)}{s}$$

kəsri sərbəstlik dərəcəsi sayı $n = m - 1$ olan S. p.-na tabedir. $t_n(P)$ və $t_n(1-P) = -t_n(P)$

$$S_{m-1}\left(\frac{\sqrt{m}\,(\overline{X} - a)}{s}\right) = \begin{cases} P, & 0{,}5 < P < 1 \\ 1 - P, & n = m - 1 \end{cases}.$$

tənliklərinin həlləri olsun. Onda $\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{m}}\, t_n(P)$ və $\overline{X} + \frac{s}{\sqrt{m}}\, t_n(P)$ statistikaları $N(a, \sigma^2)$ normal qanununun naməlum riyazi gözləməsi üçün etibarlı çoxluğun məhz aşağı və yuxarı sərhədləridir; bu etibarlı çoxluğun etibarlılıq əmsalı $2P - 1$-ə bərabərdir, yəni

$$\mathbf{P}\left\{\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{m}}\, t_n(P) < a < \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{m}}\, t_n(P)\right\} = 2P - 1.$$

S. p. ilk dəfə 1908-də Styudent (Student) təxəllüsü ilə yazan U. S. Qosset (W. S. Gosset) tərəfindən istifadə olunmuşdur.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] «Student» (Gosset W.) , «Biometrika», 1908, v. 6, p. 1–25.

STYUDENTLƏNDİRİLMİŞ QALIQ « стьюдентизированный остаток; studentized residual » – reqression eksperimentin qalığının onun dispersiyasının meylsiz statistik qiymətinin kvadrat kökünə nisbətidir. S. q.-a görə seçiləsi (ayırd olunası) ölçmələrin varlığı haqqında nəticə çıxarılır.

SUBADDİTİV ERQODİK TEOREM « субаддитивная эргодическая теорема; subadditive ergodic theorem » – diskret zamanlı subadditiv təsadüfi proses təşkil edən, həqiqiqiymətli təsadüfi kəmiyyətlərin ailəsi – $\{X_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$ üçün asimptotik müddəadır, burada X_{ij} təsadüfi kəmiyyətləri aşağıdakı kimi təyin olunur (bax, [1]):

1) $X_{ij} \le X_{ik} + X_{kj}$, $i \le k \le j$;

2) $\{X_{ij}\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ixtiyari sonlu toplusunun çoxölçülü (birgə) paylanması $\{X'_{ij}\}$ toplusunun paylanması ilə üst-üstə düşür, burada $X'_{ij} = X_{i+1,\,j+1}$;

3) $\mathbf{m}_j = \mathbf{M}(X_{ij})$ riyazi gözləməsi vardır və $\inf\, j^{-1}\mathbf{m}_j = C > -\infty$. Onda $X = \lim\limits_{j\to\infty} j^{-1} X_{0j}$ limiti sanki yəqin vardır və $\mathbf{M}X = C$. C. Kinqmenin [2]-də isbat etdiyi bu teorem, xüsusi halda, individual erqodik teoremi (Birkhof – Xinçin teoremini) ümumiləşdirir. Subadditiv proseslər sızma nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərində, kombinatorikada, təsadüfi operatorların hasillərinin asimptotikasında təsadüf olunur. Kəsilməz zamanlı proseslərə, təsadüfi meydanlara və s. aid olan ümumiləşdirilmiş S. e. t.-lər mövcuddur (bax, [5]).

Əd.: [1] H a m m e r s l e y J., «Ann. Probab.», 1974, v. 2, № 4, p. 652–80; [2] K i n g m a n J., «Ann. Probab.», 1973, v. 1, № 6, p. 883–909; [3] D e r r i e n n i c G., «C. r. Acad. sci.», 1975, t. 281 A, p. 985–88; [4] K a t z n e l s o n G., W e i s s B., «Isr, J. of Math.», 1982, v. 42, № 4, p. 291–96; [5] A k c o g h u M., K r e n g e l U., «J. für reine und angew. Math.», 1981, Bd. 323, S. 53–67; [6] K r e n g e l U., Ergodic theorems, B. – N. Y., 1985.

SUB–MARKOV İNİKASI « субмарковское отображение; sub–Markov mapping » – bax, *Markov inikası*.

SUB–MARKOV KEÇİD FUNKSİYASI « субмарковская переходная функция; sub–Markov transition function » – bax, *Keçid funksiyası* M a r k o v p r o s e s i üçün.

SUB–MARKOV SEMİ – QRUPU « субмарковская полугруппа; sub–Markov semigroup » – bax, *Markov semi – qrupu*.

SUBMARTİNQAL « субмартингал; submartingale » – $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində təyin olunmuş həqiqiqiymətli $\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$, $T = \{0, 1, ...\}$ və ya $T = \mathbb{R}_+$ *təsadüfi prosesidir*. $\mathscr{B}$ stoxastik bazisi aşağıdakı kimi təyin olunur; $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $\mathbb{A} = (\mathscr{A}_t)$, $t \in T$, $\mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A}$, $\mathscr{A}_s \subseteq \mathscr{A}_t$, $s \le t$, – σ – cəbrlərin azalmayan seçilmiş elə ailəsidir ki ($\mathbb{A}$ əksər hallarda f i l t r a s i y a və a x ı n kimi də adlandırılır), ζ prosesi $\mathbb{A}$ – uzlaşan prosesdir (yəni ζ_t, – $\mathscr{A}_t$ – ölçüləndir, $t \in T$);

$$\mathbf{M}\,|\zeta_t| < \infty,\ t \in T;$$
$$\mathbf{M}\,[\zeta_t \,|\, \mathscr{A}_s] \ge \zeta_s \quad (\ \mathbf{P}\ \text{– sanki yəqin}\ ), \quad s \le t \qquad (*).$$

$\zeta = (\zeta_t)$, $t \in T$ təsadüfi prosesi s u b m a r t i n q a l ($\mathbb{A}$ axını və $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən) adlanır.

Martinqal və supermartinqal anlayışlarının tərifləri (*) münasibətində $\ge$ işarəsinin uyğun olaraq $=$ və $\le$ işarələrilə əvəz olunması ilə alınır.

Əd.: [1] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] М е й е р П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986.

SUBSTOXASTİK MATRİS « полустохастическая / субстохастическая матрица; substochastic matrix » – bax, *Stoxastik matris*.

SUBSTOXASTİK NÜVƏ « субстохастическое ядро; substochastic kernel » – bax, *Stoxastik / ehtimali nüvə*.

SUDAKOV – DADLİ TEOREMİ « Судакова – Дадли теорема; Sudakov – Dudley theorem » – bax, *Təsadüfi proses*; t r a y e k t o r i y a n ı n r e q u l y a r l ı ğ ı.

SUPEREFFEKTİV STATİSTİK QİYMƏT « сверхэффективная / суперэффективная оценка; superefficient estimator » – dəqiqliyi statistik qiymətlərin hər hansı $\mathscr{G}$ sinfində effektiv statistik qiymətin dəqiqliyindən az olmayan, parametrin bəzi qiymətlərində isə effektiv statistik qiymətin

dəqiqliyindən də üstün *statistik qiymətdir*. Qiymətləndirmə dəqiqliyi, adətən, keyfiyyət kriterisi $R(\hat{\theta}, \theta)$ ilə ölçülür. Bu funksiya qiymətləndirilən θ parametrinin qiymətlərinə və ixtiyari $\hat{\theta}$ statistik qiymətinə qarşı $\geq$ münasibəti qaydası ilə təyin olunmuş hissəvi nizamlanmış hər hansı çoxluqda bir qiymət qoyur. Fərz olunur ki, statistik qiymətlərin hər hansı bir $\mathcal{G}$ sinfi üçün $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinin qurşayıcısı, yəni $R(\theta) = \inf \{R(\hat{\theta}, \theta) / \tilde{\theta} \in \mathcal{G}\}$ funksiyası vardır. Əgər $R(\hat{\theta}, \theta) \equiv R(\theta)$ olarsa, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $\mathcal{G}$ sinfində $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən effektiv statistik qiymətdir. Əgər $R(\hat{\theta}, \theta) \leq R(\theta)$ bərabərsizliyi bütün θ-lar üçün ödənilərsə, $R(\hat{\theta}, \theta) < R(\theta)$ bərabərsizliyi isə θ qiymətlərinin boş olmayan çoxluqda, $\hat{\theta}$ statistik qiymətinin s u p e r e f f e k t i v l i k ç o x l u ğ u adlandırılan çoxluqda ödənilərsə, $\hat{\theta}$ statistik qiyməti $\mathcal{G}$ statistik qiymətlər sinfi və $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən s u p e r e f f e k t i v s t a t i s t i k q i y m ə t adlanır.

$X_1, \ldots, X_n$ – sıxlığı $R(x, \theta)$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $R(x, \theta)$, – $\theta \in \Theta$ (Θ, – $\mathbb{R}^p$-də oblastdır) parametrindən olduqca hamar asılı funksiya və $R_n(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbf{M}_\theta\, w(\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta))$, – θ parametrinin ixtiyari statistik qiyməti $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ üçün risk funksiyası olsun; w mərkəzi-simmetrik mənfi olmayan kvaziqabarıq funksiyadır. Asimptotik qiymətləndirmə nəzəriyyəsində θ-nın statistik qiyməti kimi ixtiyari $\hat{\theta}_n = \{\hat{\theta}_n\}$ ardıcıllığı, keyfiyyət kriterisi kimi isə

$$R(\hat{\theta}, \theta) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\; R_n(\hat{\theta}_n, \theta)$$

limit risk funksiyası istifadə olunur.

$\xi(\theta)$, – $\mathbb{R}^p$-də verilmiş, orta qiyməti sıfra bərabər, kovariasion matrisi

$$\mathbf{I}(\theta) = \left\| \mathbf{I}_{ij}(\theta) \right\| = \left\| \mathbf{M}\, \frac{\partial f(X, \theta)/\partial \theta_i \;\; \partial f(X, \theta)/\partial \theta_j}{f^2} \right\|$$

– Fişer informasion matrisinə tərs kovariasion matris olan Qauss təsadüfi kəmiyyəti olsun. Statistik qiymətlərin müxtəlif təbii sinifləri üçün [məs., $f(x, \theta)$ sıxlığının doğurduğu $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ kəmiyyətinin paylanmasının limit paylanmasına yığılması θ üzrə lokal müntəzəm olan statistik qiymətlər sinfi üçün, yaxud $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ vektorunun hər bir komponentinin limit paylanmasının medianı və ya orta qiyməti sıfra bərabər statistik qiymətlər sinfi üçün] $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinin qurşayıcısı $R(\theta) = \mathbf{M}\, w(\xi, \theta)$ funksiyasıdır. Baxılan halda ixtiyari statistik qiymətin $(\hat{\theta})$ supereffektivlik çoxluğunun ölçüsü sıfra bərabərdir (bax, [1]).

$R(\theta)$ funksiyası modifikasiya olunmuş

$$r(\hat{\theta}, \theta) = \overline{\lim_{\delta \to 0}}\; \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|\theta' - \theta| < \delta} R_n(\hat{\theta}_n, \theta')$$

kriterisi üçün də qurşayıcıdır. $r(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən S. s. q., ümumiyyətlə, mövcud deyildir. Bundan başqa, hər bir komponenti $r(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən θ vektorunun uyğun komponentinin effektiv statistik qiyməti olan statistik qiymətlər sinfində $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən də S. s. q. yoxdur (bax, [2]).

S. s. q.-ə aid ilk misal Hodcesə (Hodges, bax, [1]) məxsusdur. X_i – riyazi gözləmələri θ olan, dispersiyaları 1-ə bərabər Qauss təsadüfi kəmiyyətləri olsun, $\overline{X}_n = n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n)$.

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \overline{X}, & \text{əgər} \quad |\overline{X}| > n^{-1/4}, \\ \alpha \overline{X}, & \text{əgər} \quad |\overline{X}| \leq n^{-1/4}, \quad |\alpha| < 1 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

münasibətilə təyin olunan H o d c e s s t a t i s t i k q i y m ə t i $\theta = 0$ nöqtəsində $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən supereffektiv kriteridir [lakin $r(\hat{\theta}, \theta)$-ya nəzərən effektiv deyildir].

Əgər X_i orta qiymətləri θ, kovariasion matrisi cırlaşmayan matris olan, $\mathbb{R}^p$-də verilmiş Qauss təsadüfi vektorları olarsa, onda $p > 2$ olduqda $r(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən effektiv, eyni zamanda da $R(\hat{\theta}, \theta)$ kriterisinə nəzərən supereffektiv kriterilər vardır. Belə statistik qiymətlərə misal *Ceyms – Steyn statistik qiymətidir*.

Əd.: [1] L e C a m L., «Univ. California Publ. Statist.», 1953, v. 1, p. 277–330; [2] И б р а г и м о в И. А., Х а с ь м и н с к и й Р. З., Асимптотическая теория оценивания, M., 1979.

SUPERMARTİNQAL « супермартингал; supermartingale » – $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in T}, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində təyin olunmuş, həqiqiqiymətli $\zeta = (\zeta_t),\ t \in T$ *təsadüfi prosesidir*. (T – elementlərinin arasında $\leq$ qaydası ilə nizamlanmış zaman anları çoxluğudur); $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t),\ t \in T,\ \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t,\ s \leq t$, – σ – cəbrlərin azalmayan seçilmiş ailəsidir (bəzən f i l t r a s i y a və a x ı n kimi də adlandırılan) ($T = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ və ya $T = \mathbb{R}_+$).

Əgər ζ prosesi $\mathbb{A}$ – uzlaşan proses (yəni ζ_t, – $\mathcal{A}_t$ – ölçüləndirsə, $t \in T$);

$\mathbf{M}|\zeta_t| < \infty,\ t \in T$;

$$\mathbf{M}[\,\zeta_t \,|\, \mathcal{A}_s\,] \geq \zeta_s \quad (\ \mathbf{P} \text{ – sanki yəqin }), \quad s \leq t \qquad (*)$$

olarsa, $\zeta = (\zeta_t),\ t \in T$ təsadüfi prosesinə s u p e r m a r t i n q a l ($\mathbb{A}$ axını və $\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən) deyilir.

Martinqal və submartinqal anlayışlarının tərifləri (*) münasibətində $\leq$ işarəsinin uyğun olaraq, $=$ və $\geq$ işarələrilə əvəz olunması ilə alınır.

Əd.: [1] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [2] М е й е р П. А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., M., 1973; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, M., 1986.

SUPERPOZİSİYA METODU « суперпозиции метод; randomization method » – bax, *Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*.

SUPPORT(u) ölçünün « **суппорт** меры; **support** of a measure » – bax, *Daşıyıcı*(sı) ölçünün.

SUSLİN FƏZASI « суслинское пространство; Suslin space » – bax, *Ölçü*.

SÜRƏT; kod sürəti « **скорость** кода; **code rate** » – bax, *Blok kod*, *Konvolyusion kod.*

SÜRƏTLİ FURYE ÇEVİRMƏSİ « быстрое преобразование Фурье; fast Fourier transform » –

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, W_N^{nj}, \quad n = 0, \dots, N-1 \qquad (*)$$

diskret Furye çevirməsinin effektiv hesablanılması üçün alqoritmlər seriyasıdır, burada $x(j),\ j = 0, 1, \dots, N-1,$ – kompleks və ya həqiqi ardıcıllıqdır, $W_N = \exp\{-2\pi i/N\}$ (bax, [1]). [2]-nin dərcindən sonra S. F. ç. alqoritmlərinə böyük maraq yarandı.

(*) düsturu ilə S. F. ç.-nin hesablanması çox sayda əməliyyat aparılmasını – kompleks ədədlər üzərində təxminən N^2 sayda toplama və vurma əməllərinin aparılmasını tələb edir və bu, N-in böyük qiymətlərində çətin həyata keçirilə bilinər. S. F. ç. alqoritmlərinin meydana gəlməsi bu əməliyyatların sayını kəskin surətdə azaltmağa imkan yaratdı.

S. F. ç. alqoritmlərinin müxtəlif formaları mövcuddur və bunların hamısı N uzunluqlu çevirmələrin hesablanılmasının qısa uzunluqlu çevirmələrin hesablanılmasına gətirilməsi mümkünlüyü ilə bağlıdırlar. Ən populyar arqoritmlər 2 əsası üzrə S. F. ç. alqoritmləridir, yəni hər hansı tam l qiyməti üçün $N = 2^l$ olduqda,

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j)\ W_{N/2}^{nj} + W_N^n \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j+1)\, W_{N/2}^{nj},$$

$$n = 0, \dots, N-1$$

(zaman üzrə seyrəklənən alqoritm) və

$$a(2n) = \sum_{j=0}^{N/2-1} [x_1(j) + x_2(j)]\, W_{N/2}^{nj},$$

$$a(2n+1) = \sum_{j=0}^{N/2-1} \{[x_1(j) - x_2(j)]\, W_N^j\}\ W_{N/2}^{nj},$$

$$n = 0, \dots, N/2-1$$

(tezlik üzrə alqoritm) münasibətlərinə əsaslanan alqoritmlərdir, burada $x_1(j) = x(j),\ x_2(j) = x(j + N/2),\ j = 0, \dots, N/2-1.$ Bu hallarda N uzunluqlu çevirmənin hesablanması $N/2$ uzunluqlu iki çevirmənin hesablanmasına gətirilir ki, bunlardan hər birini $N/4$ – nöqtəvi çevirmələrlə ifadə etmək olur və s., beləliklə, nəticədə diskret Furye çevirməsinin hesablanması üçün tələb olunan əməliyyatlar sayı N/l dəfə azalır.

Ümumi halda S. F. ç. alqoritmlərinin əsas hissəsi diskret Furye çevirməsinin aşağıdakı iki ifadəsinə əsaslanır:

$$a(n_1 N_2 + n_2) = \sum_{j_1=0}^{N-1} W_{N_1}^{pn_1 j_1} W_N^{n_2 j_2} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{n_2 j_2}\, x(j_1 + j_2 N_1),$$

burada $0 \le n_1 \le N_1 - 1,\ 0 \le n_2 \le N_2 - 1,\ N = N_1 + N_2$ və

$$a(n) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{j_n=0}^{N_n-1} W_{N1}^{n_1 j_1} \dots\ W_{N_k}^{n_k j_k}\, \hat{x}\left(j_1 \frac{N}{N_j} + \dots + j_k \frac{N}{N_k} \right),$$

burada $n = n_l \pmod{N_l},\quad 0 \le n_l \le N_l - 1,\quad l = 1, \dots, k,$ $N = N_1, \dots, N_k$ – qarşılıqlı sadə ədədlərdir və $\hat{x}(j)$, – $x(j)$-un N periodlu periodik davamıdır. Bu düsturlarla hesablamalar aparmaq üçün təxminən $(N_1 + \dots + N_N)/N$ sayda vurma əməlini aparmaq zəruridir, burada $N = N_1 \cdot \dots \cdot N_k$.

S. F. ç.-ni aparan proqramlar, adətən, kiçik uzunluqlu baza çevirmələrinin seriyasına (məs., 2, 3, 4, 5, 7, 8, 16 uzunluqlu) gətirilir və bunlardan hər biri maksimal effektiv surətdə reallaşır.

Çevirmənin uzunluğu N üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər S. F. ç. alqoritmlərinin tətbiq olunma oblastını olduqca daraldır; cüt N-lər üçün (*) münasibətini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$a(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, W_N^{nj} = \sum_{j=0}^{nj} x(j)\, W_{N/2}^{2nj} =$$

$$= W_{N/2}^{n^2} \sum_{j=0}^{N-1} W_{N/2}^{j^2}\, x(j)\, W_{N/2}^{(j-n)^2},$$

bu ifadə isə $W_{N/2}^{j^2}\, x(j)$ və $W_{N/2}^{j^2}$ ardıcıllıqlarının kompozisiyasıdır və onu 2 əsasına görə S. F. ç.-nin köməyilə hesablamaq olur (bax, [3]). [1], [2]-də Fortran – IV-də faydalı proqramlar verilmişdir.

Əd.: [1] Нуссбаумер Г., Быстрое преобразование Фурье и алгоритм вычисления сверток, пер. с англ., М., 1985; [2] Monro D., «Applied Statist.», 1975, v. 24, № 1, p. 153–60; 1976, v. 25, № 2, p. 166–72; [3] Monro D., Branch J., «Applied Statist.», 1977, v. 26, № 3, p. 351–61.

SÜRÜŞƏN / QEYD OLUNMUŞ EHTİYATDA SAXLAMA « скользящее / фиксированное резервирование; sliding / fixed redundancy » – bax, *Ehtiyatda saxlama.*

SÜRÜŞƏN ORTA METODU « скользящего среднего метод; moving average method », trendin ayırd olunması, – zaman sıralarının statistik analizində *trendin* ayırd olunma metodudur. Bu metodun ideyası ondan ibarətdir ki, müşahidə olunan zaman sırasının qiymətlərinin hər hansı $Y_t, \dots, Y_{t+2m+1}$ qrupu çoxhədli ilə hamarlanır və bu qrupun orta $t+m+1$ nöqtəsində trendin qiyməti kimi çoxhədlinin qiyməti götürülür. Sonra bu prosedur, eynilə, $Y_{t+1}, \dots, Y_{t+m+2}$ qrupu üçün təkrarlanır. t nöqtəsində trendin faktiki təyini

$$\sum_{i=t-m}^{t+m} a_i\, Y_i$$

– sürüşən ortanın hesablanmasına gətirilir, burada a_i əmsalları yalnız m-dən və hamarlayıcı çoxhədlinin seçilmiş dərəcəsindən asılı olur və birdəfəlik hesablanıla bilinir. Məs., 3 – tərtib hamarlayıcı çoxhədli və yeddi nöqtə üzrə sürüşən orta üçün a_i əmsallarının qiymətləri aşağıdakı kimi alınır.

$$-\frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{6}{21}, \frac{7}{21}, \frac{6}{21}, \frac{3}{21}, -\frac{2}{21}.$$

S. o. m. ilə trendin ayırd olunması ilkin sıranın təhriflərinə səbəb olur (bax, *Slutski – Yul effekti*). Məsələn, S. o. m.-nun tətbiqi nəticəsində trendə aşağı tezlikli təsadüfi rəqslər əlavə olunur. Buna görə də, trendi xaric etdikdə spektral sıxlığın kiçik tezliklərinə uyğun komponentləri kiçilir.

Əd.: [1] К е н д а л л M., С т ь ю а р т A., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., M., 1976; [2] К е н д э л M., Временные ряды, пер. с англ., M., 1981.

SÜRÜŞƏN ORTA MODELİ « скользящего среднего модель; moving average model » – ümumi halda skalyar kompleksqiymətli, $X(t) = b_0 Z(t-1) + ... + b_q Z(t-q)$ tənliyini ödəyən $\{X(t),\ t \in T\},\ T = \{0, \pm 1, ...\}$ *təsadüfi prosesinin* modelidir, burada $b_0, b_1, ..., b_q$ – həqiqi ədədlər, $\{Z(t),\ t \in T\}$ – standart, ümumi halda kompleksqiymətli qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır, yəni elə kəmiyyətlər ardıcıllığıdır ki, $\mathbf{M} Z(t) = 0,\ \mathbf{M} Z(s)\overline{Z(t)} = \delta_{s,t},\ s, t \in T.$ q – S. o. m.-in tərtibi adlanır.

S. o. m. *avtoreqressiv model* və *qarışıq avtoreqressiv* – sürüşən orta (ARSO) modeli ilə birlikdə diskret zamanlı və kəsri-rasional spektral sıxlığa malik stasionar skalyar kompleksqiymətli modellər sinfini tam əhatə edir. S. o. m. praktikada təsadüf olunan bir çox proseslərin adekvat stoxastik modelidir.

Əd.: [1] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., M., 1985; [2] Б о к с Д ж., Д ж е н к и н с Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1, M., 1974; [3] К е н д а л л M., С т ь ю а р т A., Многомерный статисческий анализ и временные ряды, пер. с англ., M., 1976.

SÜRÜŞƏN ORTA PROSESİ « скользящего среднего процесс; moving average process / MA-process », SO – p r o s e s – qeyri – korrelyar qiymətlərli prosesə (yəni bəyaz küy prosesinə) hər hansı xətti çevirmənin tətbiqindən sonra alına bilinən *stasionar təsadüfi prosesdir* (geniş mənada). $t = 0, \pm 1, ...$ diskret zamanlı,

$$X(t) = Y(t) + b_1 Y(t-1) + ... + b_q Y(t-q) \qquad (1)$$

şəklində ifadə olunan, daha xüsusi olan $X(t)$ prosesi də çox vaxt S. o. p. adlandırılır, burada $\mathbf{M} Y(t) = 0,\ \mathbf{M} Y(t)\, Y(s) = \sigma^2 \delta_{ts},$ δ_{ts} – Kroneker simvoludur [$Y(t)$ – spektral sıxlığı $\sigma^2/2\pi$ olan bəyaz küy prosesidir], q – hər hansı tam müsbət ədəd, $b_1, ..., b_q$ – sabit əmsallardır. Belə S. o. p.-in skalyar sıxlığı $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = (\sigma^2/2\pi)\left|\Psi(e^{i\lambda})\right|^2,$$

$$\Psi(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_q z^q,\ b_0 = 1$$

düsturu ilə təyin olunur, onun korrelyasion funksiyası $r(k) = \mathbf{M} X(t) X(t-k)$ isə aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur:

$$r(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|k|} b_j b_{j+|k|},\quad |k| \le q \quad \text{olduqda,}$$

$$r(k) = 0,\quad |k| > q \quad \text{olarsa.}$$

Əksinə, diskret t zamanlı stasionar $X(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası belə bir xassəyə malik olarsa ki, hər hansı tam müsbət q üçün $|k| > q$ olduqda $r(k) = 0$ olsun, onda $X(t)$, – q tərtib S. o. p.-dir, yəni o, (1) şəklində ifadə oluna bilinər və bu halda $Y(t)$ bəyaz küydür (bax, məs., [1], §5, 7) .

(1) şəklində ifadə olunan sonlu q tərtib S. o. p. ilə yanaşı diskret zamanlı sonsuz tərtib iki tip S. o. p. də vardır: $Y(t)$ bəyaz küy olduqda

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y(t-j) \qquad (2)$$

şəklində ifadə oluna bilinən birtərəfli S. o. p., bu halda (2)-nin sağ tərəfindəki sıra kvadratik orta mənada yığılır (və deməli, $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 < \infty$); daha ümumi, ikitərəfli S. o. p.-ləri ki, bu proseslər

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j) \qquad (3)$$

şəklində ifadə olunur, burada $Y(t)$ – bəyaz küy, $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j|^2 < \infty$. İkitərəfli S. o. p.-lər sinfi spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan $X(t)$ stasionar proseslər sinfi ilə, birtərəfli S. o. p.-lər isə spektral sıxlığı $f(\lambda)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

şərtini ödəyən proseslər sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [1] – [3]).

Kəsilməz zamanlı birtərəfli və ya ikitərəfli S. o. p. uyğun olaraq,

$$X(t) = \int_0^{\infty} b(s)\, d\, Y(t-s),\quad \int_0^{\infty} |b(s)|^2\, ds < \infty$$

və ya

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(s)\, dY(t-s),\ \int_{-\infty}^{\infty} |b(s)|^2\, ds < \infty$$

şəklində ifadə olunan stasionar $X(t)$, $-\infty < t < \infty$ prosesinə deyilir, burada $\mathbf{M}\,[dY(t)]^2 = \sigma^2 dt$, yəni $Y'(s)$ – ümumiləşmiş bəyaz küy prosesidir. Kəsilməz zamanlı ikitərfli S. o. p.-lər sinfi spektral sıxlığı $f(\lambda)$ olan stasionar $X(t)$ prosesləri sinfi ilə, kəsilməz zamanlı birtərəfli S. o. p.-lər sinfi spektral sıxlığı $f(\lambda)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{-1} \log f(s)\, d\lambda > -\infty$$

şərtini ödəyən proseslər sinfi ilə üst-üstə düşür (bax, [3] – [5]).

Bax, *Xətti filtr.*

Əd.: [1] А н д е р с о н T., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., M., 1976; [2] К о л м о г о р о в A. H., Теория вероятностей и математическая статистика, M., 1986, с. 215–55;

[3] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [4] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A, Math-Phys.», 1947, № 37, p. 3–79; [5] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

SÜZGƏCLƏYİCİ EKSPERİMENTLƏRİN PLANLAŞDIRILMASI « отсеивающих экспериментов планирование; design of screening experiment » – ölçmələrin paylanmaları haqqında çox saylı hipotezlərin fərqləndirilmə (diskriminasiyası) xətasının ehtimalının minimizasiyası metodlarını öyrənən, *eksperimentlərin planlaşdırılmasının* bölməsidir.

S. e. p.-nın aşağıdakı modeli daha çox öyrənilmiş modeldir. Fərz olunur ki, $\mathscr{X}$ planı – $\mathbf{x}=(x(1), \dots, x(t))$ vektorunun məqbul qiymətlərinin toplusu $(x_1, \dots, x_N)$ qeyd olunmuşdur; $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ $1 \le \lambda_1 < \dots < \lambda_s \le t$ şərtini ödəyən natural ədədlər toplusu, $\mathbf{x}(\lambda)=(x(\lambda_1), \dots, x(\lambda_s))$, $f(\cdot)$ ya məlum və ya hər hansı F çoxluğuna aid funksiya, Y isə $\eta(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}(\lambda))$ şəklində bütün funksiyaların sinfi olarsa, $\eta(x_i)$, $i=1, \dots, N$ funksiyasının z_i qiyməti (ola bilər ki, təsadüfi xətalarla) ölçülür. Xəta üçün əvvəlcədən verilmiş ehtimalla $\boldsymbol{\lambda}$ s – toplusunun və $f(\cdot)$ funksiyasının (əgər o naməlumdursa), ölçmələr sayı N-in mümkün olduqca az olması şərtilə tapılması tələb olunur. Bu aşağıdakı səmərəli fərziyyənin bir ifadəsidir; araşdırılan hadisə və ya prosesə təsiredən çoxsaylı faktorlardan yalnız azsaylı «mühüm» hissə olduqca təsir edir, digər faktorların təsiri isə ölçmə xətaları ilə müqayisə olunur.

M i s a l. t sayda donorun (t böyük ədəddir) qanını fərdi surətdə müayinə etmək əvəzinə donorların müəyyən qruplarının birgə qanı çox nadir bir xəstəliyi aşkar etmək məqsədilə yoxlanılır. Bu müayinə nəticəsində qrupda heç olmasa bir xəstənin olması aşkar oluna bilər. Əgər xəstəlik aşkar olunarsa, yalnız bu xəstəlik aşkar olunan qruplardan olan donorların qanı tam müayinə olunur. t böyük ədəd, xəstələrin sayı s isə nisbətən çox olmazsa, bu plan qənaətli olur. Bu halda S. e. p. aşağıdakı qaydada aparılır.

Donorların 1-dən t-yə qədər, qan yoxlamalarının 1-dən N-ə qədər nömrələndiyi, yoxlama nəticələrinin isə əgər xəstəlik aşkar olunmuşsa 1, əks halda 0 ədədləri ilə işarələndiyi fərz olunur. Bu misalda $\mathscr{X}_t$ planı $x_i(j)$ elementlərindən təşkil olunmuş $(N \times t)$ – matrisdir: əgər j-ci donorun qanı i-ci yoxlamada iştirak etmişsə, $x_i(j)=1$, əks halda isə $x_i(j)=0$ götürülür. Əgər i-ci x_i sətri $\boldsymbol{\eta}_1^{(i-1)}=(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})$-dən asılı olarsa, plan ardıcıl plan, əks halda (yəni asılı olmazsa), statik plan olur (bax, *Planlaşdırılması*, *eksperimentin*). Xəstə donorlar $\lambda_1 < \dots < \lambda_s$ nömrələri ilə işarələnərsə, onda

$$\eta_i = \operatorname{sign} \sum_{j=1}^{s} x_i(\lambda_j),$$

və ya η_i $x_i(\lambda_j)$-lərin ($j=1, \dots, s$) dizyunksiyası olur. Belə model dizyunkt model adlanır. X_t planının sürəti $R(\mathscr{X})=\ln t/N$ nisbətilə təyin olunur. Əgər $\boldsymbol{\lambda}$ toplularının çoxluğu A qeyd olunarsa və əgər müxtəlif $\boldsymbol{\lambda} \in A$ toplularına elə müxtəlif $\boldsymbol{\eta}_1^N$ topluları uyğun olarsa ki, $\boldsymbol{\eta}_1^N$ məlum olduqda $\boldsymbol{\lambda} \in A$ toplusunu bərpa etmək mümkün olsun, onda $\mathscr{X}$ A – ayırıcı plan adlanır. Adətən, $A=\boldsymbol{\Lambda}(s,t)$ – ya s – toplular çoxluğu və ya $A=T(s,t)=\bigcup_{i=1}^{s} \boldsymbol{\Lambda}(u,t)$ olur. Arzu olunur ki, A – ayırıcı planın sürəti ən böyük olsun. $R \le 1/s$ sürətli ardıcıl $T(s,t)$ – ayırıcı planı olduqca asan qurulur (məs., $t=10^3$, $s=10$, $N \le 10^2$ olduqda). Baxılan məsələnin çox faydalı ümumiləşməsi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

Simmetrik şərti paylanması (yəni sonlu Z çoxluğunda yalnız $\sum_{j=1}^{s} x_i(\lambda_j)$ cəmindən asılı) verilmiş $\mathbf{P}\{z_i \mid x_i(\boldsymbol{\lambda})\}$ olan, asılı olmayan y_i kəmiyyətləri ölçülür, $x_i(j) \in B=\{0,1\}$, $\Lambda=\Lambda(s,t)$-də isə aprior $\mathbf{Q}$ paylanmasının verildiyi fərz olunur. $\mathscr{X}$ planı və ixtiyari $d: Z_1^N \to \Lambda$ həllinə xəta ehtimalının orta qiyməti –

$$\mathbf{P}\{\mathscr{X}, d, \mathbf{Q}\} = \sum_{\lambda \in \Lambda, \mathbf{z} \in \varepsilon(\lambda)} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda}) \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{z_i \mid x_i(\boldsymbol{\lambda})\}$$

uyğun olur, burada $\varepsilon(\boldsymbol{\lambda})=\{\mathbf{z}_1^N : d(\mathbf{z}_1^N) \ne \boldsymbol{\lambda}\}$. Onda

$$\left|\mathbf{P}\{\mathscr{X}, d, \mathbf{Q}\} - \mathbf{P}\{\mathscr{X}, d, \widetilde{\mathbf{Q}}\}\right| \le \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \left|\widetilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}) - Q(\boldsymbol{\lambda})\right|$$

$$\min \mathbf{P}\{\mathscr{X}, d, \mathbf{Q}\} = \mathbf{P}\{\mathscr{X}, \delta, \mathbf{Q}\},$$

burada δ – ən böyük aposterior ehtimalı olan həldir (qərardır). Ən böyük asimptotik sürət elə $C(s)$ ədədidir ki, ixtiyari $\mathbf{Q}_t$ və $R < C(s)$ üçün ixtiyari, olduqca böyük t qiyməti, $R(\mathscr{X}_t) \le R$ və hər hansı $\alpha=\alpha(R)>0$ üçün $\mathbf{P}\{\mathscr{X}_t, \delta, Q_t\} \le t^{-\alpha}$ olan $\mathscr{X}_t$ planları mövcuddur, lakin $R(\mathscr{X}_t) > C(s)$ olduqda və olduqca böyük t qiymətində $\mathbf{P}\{\mathscr{X}_t, \delta, U_t\} > \gamma > 0$ olur, burada U_t – Λ-da müntəzəm paylanmadır.

n-ci ölçmə nəticəsi ζ və təsadüfi ξ sətrinin birgə paylanmasının $B^t \times Z$ hasilində təyin olunduğu fərz olunur:

$$\mathbf{P}_\beta\{\xi=\mathbf{x},\ \zeta=\mathbf{z}\} = P_\beta(\mathbf{x})\mathbf{P}\{\mathbf{z}|\mathbf{x}(\mathbf{s})\},$$

burada $P_\beta(\mathbf{x})=\prod_j p(\mathbf{x}(j)), \qquad p(1)=1-p(0)=\beta,$

$\mathbf{s}=(1, \dots, s)$ və

$$\mathbf{I}_\beta = \mathbf{I}_\beta(\zeta \wedge \xi(\mathbf{s})) = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_\beta} \ln[\mathbf{P}_\beta\{\zeta \mid \xi(\mathbf{s})\}/P_\beta\{\zeta\}]$$

Şennon informasiyası olsun. Onda $C(s)=\max_{0<\beta<1} \mathbf{I}_\beta$.

Şərti Şennon informasiyası vasitəsilə maksimal asimptotik sürət üçün sonlu daşıyıcıya malik naməlum $\mathbf{P}\{\cdot \mid \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})\}$ ehtimalları halında da qeyri – simmetrik modellər, $\mathbf{s}$-in paylanmaları üçün daha mürəkkəb ifadələr tapılmışdır. Bu nəticələr çoxgirişli rabitə kanalının ötürücülük qabiliyyəti oblastının tapılmasına yaxın olur (bax, [2]).

δ həlli (qərarı) bütün $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(s,t)$ üçün $\mathbf{P}\{\cdot \mid \mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})\}$ ehtimallarının müqayisəsindən təqribən $\text{const} \cdot t^s \ln t$ sayda əməliyyat aparılmasını tələb edir, bu halda t-nin böyük, s-in nisbətən böyük olmayan qiymətlərində EHM-dan heç istifadə etmək belə olmur. Hər bir faktor üzrə f həlli üçün $\text{const} \cdot t \ln t$ sayda əməliyyatın az tərtiblə seçilməsi tələb olunur; hər bir faktor üzrə həll – hər bir faktorun ölçmə nəticəsinə təsirinin mühümlüyünü, digər faktorların təsirinin isə təsadüfi fon olduğunu fərz etməklə, yoxlayır (bax, [1], [3]). $t \to \infty$ olduqda ehtimal xətasının sıfra yaxınlaşmasını təmin edən statistik planların maksimal sürəti

$$\max_{\mu \in [0,1]^*} \max_{\mathbf{k} \in \mathbf{s}} \int \mathbf{I}_{\mathbf{P}_\beta}(\zeta \wedge \xi(\mathbf{k}))\, \mu(d\beta)$$

ilə ifadə olunur, $[0,1]^*$, – $[0,1]$ üzərində ölçülər fəzasıdır. Bəzən mühüm faktor prinsipial olaraq bu metodla ayırd oluna bilinmir və ya digər mühüm faktordan fərqlənə bilinmir. Bu hallar üçün $\mathbf{P}\{\cdot \mid \cdot\}$ ehtimalı terminlərində ekvivalent şərtlər alınmışdır.

Sürəti və $\mathbf{P}\{\mathscr{X}_t, \delta, \mathbf{Q}\}$ verilmiş olan planların varlığı haqqında teoremlər t ə s a d ü f i p l a n l a n l a ş d ı r m a m e t o d u ilə isbat olunur: bu teoremlər xəta ehtimalının orta qiymətinin (planların lazım olan ansamblı üzrə) müəyyən edilmiş statistik qiymətindən alınır. $R(\mathscr{X})$ üçün yuxarı nəzəri – informasion sərhədlər asılı olmayan ölçmələr üçün və $\mathbf{P}\{\mathscr{X}_t, \delta, U_t\}$ üçün *Fano bərabərsizliyinin* variantları üçün Şennon informasiyasının additivliyindən alınır.

Aşağıdakı xüsusi nəticələri də qeyd etmək düzgün olardı. $\mathscr{X}$ A – ayırıcı planları üçün $\mathbf{P}\{\mathscr{X}_t, \delta, \cdot\} \equiv 0$ təsadüfi planlaşdırma metodu ilə tapılmış statistik qiymət kobud olur. Burada maksimal asimptotik sürətin ifadəsi tapılmamışdır və yalnız informasiya nəzəriyyəsindən məlum olan

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{x}(\lambda_i) (\text{mod } p), \quad p - \text{sadə ədəddir},$$

halı istisna olunmaqla.

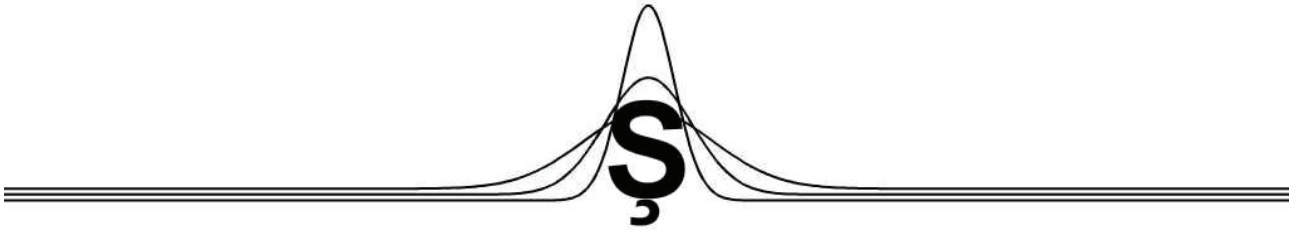
A – ayırıcı planların sürəti üçün yuxarı sərhədlər bəzi modellər üçün xüsusi kombinator metodlarla tapılmışdır. Məs., dizyunkt modeldə $T(s,t)$ – ayırıcı $\mathscr{X}_t$ planları üçün (bax, misal) $\overline{\lim}\, R(\mathscr{X}_t) \le K_s \le 2(\ln s)/(s-1)^2$, additiv modelin ($\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{x}(\lambda_i)$) $T(2,t)$ – ayırıcı planı üçün $\overline{\lim}_{t \to \infty} R(\mathscr{X}_t) \le 3/5$ olur.

S. e. p. nəzəriyyəsi daha elementar kombinator axtarış nəzəriyyəsinin inkişafına səbəb olur, bu nəzəriyyədə, məs., bir mühüm faktor axtarışında mümkün ola bilən strategiyaların bircins sinifləri öyrənilirdi. Bu nəzəriyyənin nəticələrindən biri ikilik $(N \times t)$ – matrisinin bütün sütunlarının müxtəlif olduğu halında, hər bir sətrində K-dan çox vahidi olmayan sətirlərin minimal sayı N axtarılır.

$(\ln 2)/s$-ə bərabər maksimal asimptotik sürətdən asimptotik əhəmiyyətsiz kəmiyyət qədər fərqlənən sürətli dizyunkt model üçün ardıcıl $T(s,t)$ – ayırıcı planları qurulmuşdur. Hər bir elementi digərlərindən asılı olmadan verilən ehtimalla qüsurlu olan t sayda elementin qruplu yoxlanılması üçün qruplu yoxlanma sayının orta qiyməti haqqında bir sıra teoremlər vardır (bax, [1]).

$z_i = \theta^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_i)$ xətti reqression eksperimenti üçün (θ komponentlərindən sıfırdan fərqli olanların sayı s-dən çox deyildir) $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ statik planının iki xassəsi ekvivalentdir: 1) $(f(\mathbf{x}_1), \ldots, f(\mathbf{x}_N))$ matrisinin ixtiyari $2s$ sətrinin ranqı $2s$-ə bərabərdir və 2) θ-nın mühüm komponentlərinin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nömrələrinin müxtəlif toplularına müxtəlif $(z_1, \ldots, z_N)$ topluları uyğun olur. 1) və 2) xassələrinə malik olan bəzi reqression eksperimentlərin planlarının maksimal asimptotik sürətləri üçün yuxarı və aşağı statistik qiymətlər alınmışdır (bax, [1]).

Əd.: [1] Математическая теория планирования экспериментов, М., 1983, гл.15; [2] Ч и с а р И., К е р н е р Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [3] М а л ю т о в М. Б., М а т е е в П. С., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 1, с. 109–27.



ŞAXƏLƏNƏN PROSES « ветвящийся процесс; branching process » – təbiətdə baş verən bir çox real təsadüfi prosesləri təsvir edən hər hansı obyektlərin (məs., fizikada hissəciklərin, kimyada molekulların, hər hansı populyasiyada fərdlərin, genetikada genlərin) artması, «ölümü», çevrilməsini ifadə edən *təsadüfi prosesdir.* Təsadüfi proseslərin ümumi anlayışından Ş. p. sinfini fərqləndirən əsas riyazi fərziyyə hissəciklərin bir-birindən asılı olmayaraq artmasıdır.

Ş. p.-in ən ümumi modeli *Bellman – Harris prosesidir*; γ hissəciklərindən (hər hansı bir nömrələmədəki) hər biri paylanma funksiyası $G(t) = \mathbf{P}\{\tau_\gamma \le t\}$, $G(-0)=0$, $G(\infty)=1$ olan τ_γ təsadüfi zaman ərzində yaşayaraq, sonda doğuran funksiyası $h(s)=\mathbf{M}\,s^{N_\gamma}$ olan N_γ təsadüfi kəmiyyəti sayda yeni hissəciklər yaradır. Fərz olunur ki, τ_γ və N_γ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və (τ_γ, N_γ) küllüyyatca asılı olmayan cütlərdir. Yeni yaranmış hissəciklər də eyni ehtimal qanunu ilə çoxalır. $\zeta(t)$ – Bellman – Harris prosesinin t anındakı hissəciklərinin sayı olsun. $\zeta(0)=1$ olduğu halda və $t=0$ anında mövcud olan hissəciyin yaşama müddəti (yaşı) sıfra bərabərdirsə, $\zeta(t)$ prosesinin doğuran funksiyası $\Psi(t,s) = \mathbf{M}s^{\zeta(t)}$

$$\Psi(t,s) =$$

$$= \int_0^t h(\Psi(t-u;s)\,dG(u) + s(1-G(t)), |s|\le 1,\ t\ge 0 \quad (1)$$

qeyri – xətti inteqral tənliyini ödəyir.

Bellman – Harris prosesi (G,h) – prosesi adlanır. Əgər $G(t) = M_\lambda(t) = (1-e^{-t}),\ t\ge 0$ olarsa, onda (M_λ, h) – prosesi Markov prosesidir; bu proses kəsilməz zamanlı şaxələnən proses adlanır. Bu halda, (1) tənliyi başlanğıc şərti $\Psi(0;s)=s$ olan

$$\frac{\partial\Psi(t,s)}{\partial t} = \lambda[h(\Psi(t;s)) - \Psi(t,s)],\ |s|\le 1,\ t\ge 0$$

differensial tənliyi ilə eynigüclüdür. Əgər

$$G(t) = E(t) = \begin{cases} 0, & t<1, \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$$

olarsa, onda (E,h) prosesi $\zeta(t)$ – *Qalton – Vatson prosesi* adlanır. $\zeta_n = \zeta(n)$ ardıcıllığı Markov zənciri təşkil edir; bu halda $\Psi(n;s)$ doğuran funksiyaları $\Psi(s)=\Psi(1;s)$ funksiyasının iterasiyaları kimi ifadə olunur:

$$\Psi(n+1;s) = \Psi(\Psi(n;s)),\ \Psi(0;s)=s.$$

Ümumi halda (G,h) – prosesi Markov prosesi deyildir.

(E,h) – prosesinə ilk dəfə F. Qalton (F. Galton) və G. Vatson (G. Watson) 1873-də baxmışlar. A. N. Kolmoqorov və N. A. Dmitriyev 1947-də (M_λ, h) – prosesinin modelini vermişlər (bax, [1]). Ş. p.-in qeyri – Markov modelini R. Bellman və T. Harris 1948-də qurmuşlar (bax, [3]).

Bellman – Harris prosesində hissəciklərin riyazi gözləməsi – $A(t) = \mathbf{M}\zeta(t)$

$$A(t) = A\int_0^t A(t-u)\,dG(u) + 1 - G(t)$$

bərpa tip tənliyini ödəyir, burada $A = h'(1)$.

Əgər $A<\infty$ olarsa, onda t -nin böyük qiymətlərində

$$A(t) \sim C_0 e^{\alpha t}$$

olur, burada α

$$1 = A\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,dG(u) \quad (2)$$

tənliyinin köküdür. Bu tənlik $A\ge 1$ olduqda həmişə $\alpha\ge 0$ kökünə malikdir; $\alpha=0$ olanda $A=1$. $A<1$ olduqda, əgər $1-G(t)$ funksiyası t artdıqca eksponensial olaraq azalarsa, onda (2) tənliyinin həlli vardır. Bu halda $\alpha<0$. Beləliklə, t -nin böyük qiymətlərində Ş. p.-in nə şəkildə cərəyan etməsi A parametrinin qiymətindən olduqca asılı olur. (M,h) və (E,h) – prosesləri üçün (2) tənliyi aşkar şəkildə həll olunur. Birinci halda $\alpha=\lambda(A-1)$, ikinci halda $\alpha=\ln A$ olur. Ş. p.: əgər $A<1$ olarsa, *kritikaltı şaxələnən proses*, $A>1$ olarsa, *kritiküstü şaxələnən proses*, $A=1$ və $h(s)\not\equiv s$ olarsa, *kritik şaxələnən proses* adlanır.

Əgər $A<\infty$ olarsa, (1) tənliyinin yeganə həlli vardır. Əgər $A=\infty$ olarsa, (1) tənliyinin həllinin yeganəliyi müəyyən şərtlər daxilində – sıfır ətrafında $G(t)$ üzərinə qoyulan şərtlər və vahid ətrafında $h(s)$ üzərinə qoyulan şərtlər daxilində mümkündür; bu şərtlər Ş. p.-in *requlyarlıq şərtləri* adlanır (bax, *Şaxələnən proses*, requlyarlıq). Requlyar Ş. p.-lər üçün $\mathbf{P}\{\zeta(t)<\infty\}\equiv 1$ eyniliyi bütün $t\ge 0$ qiymətləri üçün ödənilir; qeyri – requlyar Ş. p.-lər üçün bütün $t>0$ qiymətlərində $\mathbf{P}\{\zeta(t)<\infty\}<1$ bərabərsizliyi ödənilir.

Bu halda, sonlu t müddəti ərzində hissəciklərin sayı $\zeta(t)$ müsbət ehtimalla sonsuzluğa bərabər olur, yəni «partlayış» baş verir.

Kritikaltı və kritik Ş. p.-lər vahid ehtimalla cırlaşan proseslər olur, yəni bu proseslər üçün $q = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) = 0\} = 1$. Kritiküstü Ş. p.-in cırlaşma ehtimalı $q < 1$ olur. Markov kritikaltı Ş. p.-ində Ş. p.-in davam olunması ehtimalı $Q(t) = \mathbf{P}\{\zeta(t) > 0\}$, əlavə – $\mathbf{M}\zeta \log \zeta_t < \infty$ şərti daxilində asimptotik olaraq eksponensial azalır:

$$Q(t) \sim Ke^{\alpha t}, \qquad (3)$$

burada α, – (2) tənliyinin köküdür.

Markov kritik Ş. p.-ində $\mathbf{D}\zeta_t < \infty$ olduqda

$$Q \sim 2/\mathbf{D}\zeta_t, \quad t \to \infty \qquad (4)$$

olur, bu halda (E, h) – prosesində $\mathbf{D}\zeta_t = Bt$, $B = h''(1)$ və (M, h) – prosesində $B = \lambda h''(1)$ olur.

$\zeta(t)$ Markov Ş. p.-nin $t \to \infty$ olduqda asimptotik evolyusiyası daha ətraflı öyrənildikdə aydın olur ki,

$$S_t(x) = \mathbf{P}\left\{ \frac{\zeta(t)}{\mathbf{M}\{\zeta(t) \mid \zeta(t) > 0\}} \le x \mid \zeta(t) > 0 \right\}$$

şərti paylanma qanunu $t \to \infty$ olduqda limit paylanması $S(x)$-ə zəif yığılır:

$$S_t(x) \to S(x), \qquad (5)$$

bu şərtlə ki, $\zeta(t)$-nin bəzi momentləri sonludur.

Kritikaltı Ş. p.-də limit paylanması $S(x)$ diskret paylanmadır, digər hallarda isə mütləq kəsilməz paylanmadır. Limit paylanması $S(x)$ üstlü paylanma, yəni

$$S(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \ge 0 \qquad (6)$$

olan kritik Ş. p. xüsusilə seçilir. (6) paylanması kritik Ş. p.-lərə yaxın Ş. p.-lər üçün də limit paylanmasıdır. $t \to \infty$ olduqda yaranan kritik Ş. p.-lərə yaxın fenomenlər keçid fenomenləri adlanır (bax, *Şaxələnən proses*; keçid fenomenləri).

(3) – (6) nəticələri bir neçə istiqamətdə ümumiləşdirilir.

$\zeta(t)$ Markov Ş. p.-nin N_γ anları daha zəif məhdudiyyətlərlə götürüldükdə və $t \to \infty$ olduqda $Q(t)$ və $S_t(x)$ üçün asimptotik düsturlar alınmışdır. Xüsusi halda, $0 < \alpha \le 1$ və $L(u)$ $u \downarrow 0$ olduqda asta dəyişən funksiyadırsa (yəni $L(tx)/L(t) \to 1$ münasibəti $t \to \infty$ və ixtiyari $x > 0$ üçün ödənilirsə, bax, [7]) və kritik Markov Ş. p. üçün $h(1-u) = 1 - u + u^{1+\alpha}L(u)$ olarsa, onda $Q(t) \sim t^{-1/\alpha}L_1(t)$, $t \to \infty$ olur, burada $L_1(t)$, $t \to \infty$ olduqda asta dəyişən funksiyadır, $S(x)$ limit paylanmasının Laplas çevirməsi isə $1 - \lambda(1 + \lambda^\alpha)^{1/\alpha}$-dır.

Bellman – Harris Ş. p. halında bu nəticələrin digər ümumiləşməsi alınır. Əgər $1 - G(t)$ funksiyası $t \to \infty$ olduqda olduqca sürətlə azalırsa, onda Ş. p.-in limit halı Markov Ş. p. halındakı xarakterli olur. Lakin $1 - G(t)$ «qalıq» paylanmasının asta azalmasında yeni hallar yaranır. Məs., kritik Ş. p.-lərdə bəzi hallarda sıfırdan fərqli

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) = K \mid \zeta(t) > 0\}$$

limit ehtimalları yalnız kritikaltı Ş. p.-lər üçün Markov Ş. p.-lərində olduğu kimi $\zeta(t)$-nin artan normalanması olmadan alınır.

Ş. p.-in aşağıdakı ümumiləşmiş modelində n sayda müxtəlif $T_1, T_2, ..., T_n$ tipli hissəciklərin artım və ölüm prosesi araşdırılır. Bu halda eynitipli hissəciklər eyni bir qanunla evolyusiya edir. Fərz olunur ki, i-ci tip hissəciyin yaşama müddətinin paylanma funksiyası $G_i(t)$-dir və i-ci tip hissəciyin ömrünün sonunda $T_1, T_2, ..., T_n$ tipli hissəciklərə çevrilməsi çoxölçülü doğuran funksiya $h_i(s_1, s_2, ..., s_n)$ ilə təyin olunur. Əgər ixtiyari T_i tipli hissəciyin yaratdığı nəsildə müsbət ehtimalla digər T_j tipli hissəcik olarsa, onda Ş. p. *ayrılmayan şaxələnən proses* adlanır. Ayrılmayan şaxələnən proseslər məlum dərəcədə özlərini eynitipli hissəciklərli Ş. p.-lərə anoloji cərəyan edir. *Ayrılan şaxələnən proseslər* ümumi halda bir qədər az araşdırılmışdır, lakin *immiqrasiyalı şaxələnən proseslər* istisna olunur; bu halda hissəciklərin artması ilə yanaşı müəyyən asılı olmayan təsadüfi mexanizm nəticəsində kənardan hissəciklər immiqrasiya olunur. Nəticədə bir çox yeni asimptotik proseslər yaranır.

Ş. p.-in belə bir modelinə də baxılır ki, bu modeldə (τ_δ, N_γ) cütündə hissəciklərin sayı N_γ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu «ana» hissəcik τ_γ-nın yaşama müddətindən asılıdır. *Ümumi şaxələnən proseslərdə* (bunlar Kramp – Mod – Yagers və ya N – proseslər adlanır) hissəcik özünün yaşama müddəti ərzində bir neçə nəsil yaradır. Bu model bioloji artım proseslərinin qanunauyğunluqlarını ən yaxşı əks etdirən modeldir.

Ş. p.-in digər mürəkkəb forması hissəciklərin fəzada vəziyyətlərindən asılılığı ilə əlaqədar alınır. Məs., fərz olunur ki, hissəciklər bir-birindən asılı olmadan sərhədi uducu ∂G olan r – ölçülü G oblastında Braun hərəkəti edirlər. G oblastı daxilindəki hissəcik $\Delta t \to 0$ müddəti ərzində $p_n \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimalı ilə n, $n \ne 1$ hissəyə çevrilərək, bir-birindən asılı olmayaraq bu hissəciklər hərəkətini başladığı nöqtədən Braun trayektoriyaları üzrə dolaşmağa başlayırlar. Əgər hər hansı bir hissəcik 0 başlanğıc anında $x \in G$ nöqtəsində olubsa, onun t anında yaratdığı, A çoxluğundan olan hissəciklərin sayı $\mu_{xt}(A)$ olsun. Bu halda

$$\Psi(t, x, s(\cdot)) = \mathbf{M} \exp\left[\int_G \ln s(y) \mu_{xt}(dy) \right]$$

doğuran funksionalı başlanğıc şərti $\Psi(0, x, s(\cdot)) = s(x)$ və sərhəd şərti $\Psi(t, x, s(\cdot))|_{x\to\partial G} = 0$ olan

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta\Psi + f(\Psi)$$

kvazixətti parabolik tənliyini ödəyir, burada $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ –

Laplas operatoru, $f(s)=\sum_{n\neq 1} p_n(s^n-s)$. Ş. p.-in ümumi modelində fərz olunur ki, yeni yaranan hissəciklər hansısa parametrlərilə xarakterizə olunurlar, bunları isə hissəciyin yaşı, onun fəzadakı vəziyyəti və s. kimi interpretasiya etmək olar. Belə proseslər doğuran funksiyalar və ya doğuran funksionallar vasitəsilə öyrənilir. Bunlar üçün isə qeyri – xətti differensial və inteqral tənliklər daxil olunur. Ş. p.-in belə modellərinin olduqca ümumi təsviri aşağıdakı kimi verilir.

Hissəciklərin bir-birindən asılı olmadan hər hansı X faza fəzasında Markov prosesi qanunu ilə dolaşması (hərəkəti) fərz olunur. Hər bir hissəciyin təsadüfi yaşama müddətinin Markov anı olduğu da fərz olunur. Hissəcik ömrünün sonunda yeni hissəciklər yaradır və bu hissəciklər X faza fəzasında müəyyən bir ehtimal qanunu ilə paylanır. Yeni yaranan hissəciklər analoji qaydada bir-birindən asılı olmayaraq evolyusiya edir. X-in altçoxluqlarında hissəciklərin sayları ilə təyin olunan tamqiymətli ölçülər fəzasında bu qayda ilə verilən Ş. p. Markov prosesidir. Lakin Ş. p.-lərə bir çox hallarda daha sadə redüslənmiş fəzalarda baxılır. Belə hallarda bu proseslərin bir çoxu Markov prosesi olmur. Bax, *Şaxələnən təsadüfi dolaşma*, *Şaxələnən təsadüfi meydan*, *Şaxələnən proses* dolaşmalı.

Yuxarıda qeyd olunan modellərin əksəriyyəti proseslərin kritikaltı, kritik və kritiküstü bölmələri üçün öz mənasını itirmir. Bu halda daha mürəkkəb şəraitdə belə sadə Ş. p. üçün müəyyən olunmuş bir çox xassələr öz qüvvəsində qalır. Məs., kritik Ş. p.-də limit paylanması kimi üstlü paylanma yaranır.

Ş. p.-lər müxtəlif real: bioloji, genetik, fiziki, kimyəvi proseslərin araşdırılmasında tətbiq olunur. Məs., genetikada Ş. p.-in köməyilə mutasiya ilə bağlı proseslər araşdırılır. Sonlu sayda hissəcikli *şaxələnən proses* zəncirvari reaksiyaların tədqiqində bir model kimi istifadə olunur; *diffuzion – şaxələnən proses* nüvə reaktorlarında neytron proseslərin modelidir və s.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 1, с. 7–10; [2] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [3] Bellman R., Harris T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, № 12, p. 601–04; [4] Athreya K. B., Ney P. E., Branching Processes; B. – Hdlb. – N. Y., 1972; [5] Ватутин В. А., «Матем. сб.», 1979, т. 109, № 3, с. 440–52; [6] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–45, ч. I I – «J. Sov. Math.», 1993, v. 67, № 6, p. 3407–85; [7] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., М., 1967.

φ – ŞAXƏLƏNƏN PROSES « **φ – ветвящийся процесс; φ – branching process** » – bax, *Fi – şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES ayrılan « **ветвящийся процесс** разложимый; decomposable **branching process** » – bax, *Ayrılan şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES ayrılmayan « **ветвящийся процесс** неразложимый; non–decomposable **branching process** » – bax, *Ayrılmayan şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES binar « **ветвящийся процесс** бинарный; binary **branching process** » – bax, *Binar şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES cırlaşan « **ветвящийся процесс** вырождающийся; degenerating **branching process** » – t anındakı hissəciklərinin sayı $\zeta(t)$ sıfra bərabər olan *şaxələnən prosesdir.* $\zeta(t)=0$ olduqda şaxələnən proses t anı üçün cırlaşmışdır, deyilir. Ümumiyyətlə, prosesin cırlaşması hər hansı t anından sonrakı bütün anlarda $\zeta_{t+1}=\zeta_{t+2}=...=0$ olduğu kimi nəzərdə tutulur, çünki,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{t+1}=0\mid\zeta(t)=0\}=1;$$

burada $\zeta_t=\zeta(t)$,

$$\zeta_0=1,\ \zeta_{t+1}=\begin{cases}\xi_1(t)+\xi_2(t)+...+\xi_{\zeta_t}(t), & \zeta_t>0;\\ 0, & \zeta_t=0.\end{cases}\qquad(1)$$

(1) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\{\zeta_t,\ t=0,1,...\}$ *təsadüfi prosesi* şaxələnən prosesdir; $\xi_k(t)$, $k=1,..,n,...,$ $t=0,1,...$ mənfi olmayan eyni qanunla paylanmış tamqiymətli asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır.

(1) düsturunun birinci bərabərliyindən aydındır ki, ixtiyari t anında $\zeta_t>0$ olarsa, şaxələnən prosesin $t+1$ anındakı ümumi hissəciklərinin sayı onun t anındakı ümumi hissəciklərinin sayı ζ_t ilə ifadə olunur, yəni

$$\zeta_{t+1}=\xi_1(t)+\xi_2(t)+...+\xi_{\zeta_t}(t).\qquad(2)$$

(2) bərabərliyi şaxələnmə şərti adlanır.

$\mathbf{P}\{\zeta_t=0\}$ və $q=\mathbf{P}\left\{\bigcup_{t=1}^{\infty}\{\zeta_t=0\}\right\}=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta_t=0\}$ cırlaşma ehtimalları adlanır. $q=1$ olduqda şaxələnən proses cırlaşmış şaxələnən proses adlanır; *Kritikaltı şaxələnən proseslər* ($\mathbf{M}\zeta_1=\psi'(1)<1$; ψ – prosesin doğuran funksiyasıdır) cırlaşmış proseslərdir. $\psi(s)$ bir hissəciyin yaratdığı nəslin doğuran funksiyasıdırsa, onda cırlaşma ehtimalı q, – $s=\psi(s)$ tənliyinin ən kiçik mənfi olmayan kökünə bərabərdir.

$q<1$ olduqda *şaxələnən proses* cırlaşmayan prosesdir.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; cırlaşma « **ветвящийся процесс;** вырождение; **branching process;** extinction of » – *şaxələnən prosesdə* hissəciklər sayı $Z(t)$-nin sıfra bərabər olması hadisəsidir. $\mathbf{P}\{Z(t)=0\}=P_0(t)$ ehtimalı $q=\lim_{t\to\infty}P_0(t)$ limitinin cırlaşma ehtimalları adlanır. Əgər $\varphi(s)$ bir hissəciyin varisləri sayının doğuran funksiyasıdırsa, onda cırlaşma ehtimalı q, – $s=\varphi(s)$ tənliyinin ən kiçik mənfi olmayan kökünə bərabərdir. $q=1$ olan Ş. p. cırlaşan Ş. p., $q<1$ şərtini ödəyən Ş. p. isə cırlaşmayan Ş. p. adlanır.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES daxiledilmiş « **ветвящийся процесс** вложенный; embedded **branching process** » – bax, *Daxil edilmiş şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES diffuzion « **ветвящийся процесс** диффузионный; diffuzion **branching process** » – bax, *Diffuzion proses* şaxələnən.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES dolaşmalı « **ветвящийся процесс** с блужданием; **branching process** with random walk » – *şaxələnən proses* (diskret zamanlı və ya kəsilməz zamanlı, bir və ya bir neçə tipli hissəciklərli) modelidir və bu prosesdə hissəciklər hər hansı oblast daxilində çoxalmaqla yanaşı yerlərini təsadüfi dəyişə bilir. Belə yerdəyişməni, *şaxələnən diffuzion prosesin* hissəciklərindən fərqli olaraq, dolaşmalı Ş. p.-in hissəciyi yalnız bir dəfə – yarandığı anda edir.

Əd.: [1] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, B. – Hdlb. – N. Y., 1972; [2] Biggirs I., Classical and Modern branching processes, IMA volumes in Math. and its Appl., v. 84, B., 1997, p. 19-40.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES emiqrasiyalı « **ветвящийся процесс** с эммиграцией; **branching process** with emigration » – *Fi – şaxələnən prosesin* xüsusi halıdır. Emiqrasiyalı Ş. p.-də fərz olunur ki, evolyusiya prosesində hissəciklərin müəyyən hissəsi prosesi ya yarandığı andan və ya təsadüfi zaman intervalından sonra tərk edə bilər.

Əd.:[1] Ватутин В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 3., с. 482–97; [2] Винокуров Г. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1987, т. 32, в. 2, с. 378–82.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES enerjili « **ветвящийся процесс** с энергией; **cascade process** » – hər bir hissəciyinə bu hissəciyin bilavasitə varisləri arasında təsadüfi qaydada paylanan müsbət kəmiyyət uyğun gələn *şaxələnən prosesdir*. Belə kəmiyyət, məs., hissəciyin ölçüsü, kütləsi, enerjisi və s. ola bilər. Kritiküstü şaxələnən proses halında enerji səviyyəsi verilən həddən böyük enerjili hissəciklər sayının paylanması loqarifmik normal paylanmaya yığılır.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 2, с. 99–101; [2] Филиппов А. Ф., «Теория вероятн. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 3, с. 299–318; [3] Севастьянов Б. А., Ветвящийся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; final ehtimalları « ветвящийся процесс; финальные вероятности; branching process; final probabilities » – hissəciklər tiplərinin sayı $n > 1$ olan *ayrılan şaxələnən prosesdə* final tipli hissəciklər sayının limit paylanmasıdır. (Hissəcik sanki yəqin özü tipli bir hissəcik doğurursa, belə hissəcik final tip hissəcikdir.) $\zeta_{ik}(t)$, – $t = 0$ anında mövcud olan T_i tip bir hissəciyin t anında doğurduğu T_k tip hissəciklərin sayı;

$$\Psi_i(s_1, ..., s_n) = \mathbf{M} s_1^{\zeta_{i1}(1)} ... s_n^{\zeta_{in}(1)}$$

T_i tip hissəciyin bilavasitə varisləri sayının paylanma funksiyasının doğuran funksiyası, $i = 1, ..., n$; $\varphi_i(s_1, ..., s_n)$ – final ehtimallarının, yəni T_i tip bir hissəciyin doğurduğu final tip hissəciklər sayının limit paylanmasının doğuran funksiyası olsun. $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ toplusu

$$\varphi_i(s_1, ..., s_n) =$$

$$= \Psi_i(\varphi_i(s_1, ..., s_n), ..., \varphi_n(s_1, ..., s_n)), \; i = 1, ..., n \qquad (*)$$

tənliklər sisteminin həllidir. Ş. p.-in trayektoriyalarının bəzi additiv funksionallarının limit paylanmalarını tapmaq üçün köməkçi final tip hissəciklər daxil etdikdə (*) tənliyindən istifadə etmək olur (məs., T_k tip hissəciklərə malik və ya bilavasitə varislərinin sayı verilmiş ədədə bərabər olan, cırlaşdığı ana qədər mövcud olduğu bütün müddətdə prosesdə əmələ gələn hissəciklər sayını).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящийся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES hissəcikləri qarşılıqlıtəsirli « **ветвящийся процесс** с взаимодействием частиц; **branching process** with interaction of particles » – *şaxələnən prosesin* elə modelidir ki, burada hissəciklər yalnız onların bölünməsi nəticəsində deyil, həmçinin hissəciklərin bəzi qruplarının qarşılıqlıtəsiri nəticəsində də yaranır. Zaman üzrə bircins, hissəcikləri qarşılıqlıtəsirli Ş. p. kəsilməz zamanlı, vəziyyətləri çoxluğu hesabi Markov prosesinin xüsusi halıdır. Prosesin vəziyyəti $\zeta(t) = (\zeta_1(t), ..., \zeta_n(t))$ təsadüfi vektoru ilə təsvir olunur; bu vektorun k-cı komponenti $\zeta_k(t)$ t anında T_k tipli hissəciklərin sayını göstərir. $P_{\alpha\beta}(t)$ keçid ehtimallarının sıxlıqları $a_{\alpha\beta} = \left.\dfrac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ aşağıdakı kimi təyin olunur. $A \in \{\varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{N}^n$ sonlu çoxluğu verilmişdir. Fərz olunur ki, ε_k üzrə T_k, $k = 1, ..., n$, $\varepsilon \in A$ tipli hissəcik daxil olan hissəciklərin ixtiyari toplusu $\Delta t \downarrow 0$ müddəti ərzində $\lambda_\varepsilon \Delta t + o(\Delta t)$ ehtimalı ilə bir-birinə qarşılıqlıtəsir göstərir, bir neçə belə qrup isə Δt müddəti ərzində bir-birilə $o(\Delta t)$ ehtimalı ilə qarşılıqlıtəsirdə ola bilər. Qarşılıqlı təsirdə olan hissəciklər əvəzinə β vektoruna uyğun hissəciklər qrupu $p_{\varepsilon\beta}$ ehtimalı ilə yaranır, $\sum_\beta p_{\varepsilon\beta} = 1$, $p_{\varepsilon\varepsilon} = 0$. Bu halda $\alpha \neq \beta$ olduqda

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\varepsilon \in A} C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} ... C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \lambda_\varepsilon p_{\varepsilon, \beta-\alpha+\varepsilon},$$

$$a_{\alpha\alpha} = -\sum_{\varepsilon \in A} C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} ... C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} \lambda_\varepsilon.$$

$$s = (s_1, ..., s_n), \quad |s_k| \leq 1,$$

$$k = 1, ..., n, \quad s^\beta = s_1^{\beta_1} ... s_n^{\beta_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! ... \alpha_n!$$

olsun.

$$\Psi_\alpha(t, s) = \sum_\beta P_{\alpha\beta}(t) s^\beta, \quad \varphi_\beta(t, s) = \sum_\alpha \frac{s^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t),$$

$$f_\varepsilon(s) = \lambda_\varepsilon \left(\sum_\beta p_{\varepsilon\beta} s^\beta - s^\varepsilon \right)$$

doğuran funksiyalarından istifadə edərək, hissəcikləri qarşılıqlıtəsirli Ş. p. üçün düz və tərs Kolmoqorov tənlikləri aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\frac{\partial \Psi_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{\varepsilon \in A} \frac{f_\varepsilon(s)}{\varepsilon!} \frac{\partial^\varepsilon \Psi_\alpha(t; s)}{\partial s^\varepsilon}, \quad \Psi_\alpha(0; s) = s^\alpha;$$

$$\frac{\partial \varphi_\beta(t; s)}{\partial t} = \sum_{\varepsilon \in A} \frac{s^\varepsilon}{\varepsilon!} f_\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \varphi_\beta(t; s), \quad \varphi_\beta(0; s) = \frac{s^\beta}{\beta!};$$

$$\frac{\partial^{\beta}}{\partial s^{\beta}} = \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n}}{\partial s_1^{\beta_1}\ldots\partial s_n^{\beta_n}},$$

$$f_{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \lambda_{\varepsilon}\left(\sum_{\beta} p_{\varepsilon\beta}\,\frac{\partial^{\beta}}{\partial s^{\beta}} - \frac{\partial^{\varepsilon}}{\partial s^{\varepsilon}}\right).$$

Hissəcikləri qarşılıqlıtəsirli Ş. p.-in bəzi modelləri üçün final hissəciklərin sayı üçün limit teoremləri vardır, bu teoremlər asılı olmayan hissəciklərli Ş. p.-lər üçün limit teoremlərinə analojidir (bax, [4]). Bax, *Epidemik proses.*

Əd.: [1] Леонтович М. А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1935, т. 5, № 3/4, с. 211–31; [2] Баруча – Рид К., Элементы теории марковских процессов и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Севастьянов Б. А., Калинкин А. В., «Докл. АН СССР», 1982, т. 264, № 2, с. 306–08; [4] Калинкин А. В., «Докл. АН СССР», 1983, т. 268, № 6, с. 1362–64; 1983, т. 269, № 6, с. 1309–12.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES hissəciklərinin tipləri sayı sonlu « **ветвящийся процесс** с конечным числом типов частиц; **branching process** with finite number of particle types » – hissəciklərinin çevrilmə qanunları aid olduğu tipindən asılı olan və hissəcikləri tiplərinə görə fərqlənən *şaxələnən proses* modelidir. Markov zənciri vəziyyətlərinin təsnifatı ilə analoji olaraq hissəciklər tiplərinin təsnifatı aparılır. Əgər i-ci tip hissəciyin varisinin j-ci tip ola bilməsi ehtimalı müsbət olarsa, j tipi i tipindən sonra yaranır $(i \to j)$. Hissəciklərin tipləri çoxluqları tiplərin kəsişməyən siniflərinə ayrılır (bax, [1], s. 133–43). Əgər i və j tipləri bir sinifdən olarsa, onda $i \to j$ və $j \to i$ olur. Əgər verilən sinfə aid olan tipin sanki yəqin hər bir hissəciyi özünün bilavasitə varisləri arasında öz sinfindən olan yalnız bir varisə malik olarsa, belə tiplərin sinfi final sinif adlanır. Hissəciklərinin tipləri sayı sonlu Ş. p.-in $t \to \infty$ olduqda asimptotikası *ayrılmayan şaxələnən proseslər* və *ayrılan şaxələnən proseslərlə* müqayisədə olduqca fərqlidir.

İmmiqrasiyalı *şaxələnən proseslərin* tədqiqi hissəciklərinin sayı sonlu Ş. p.-ə gətirilə bilinir. Hissəciklərinin tipləri sayı sonlu Ş. p. atmosferdə kaskad leysan yağışlarının araşdırılmasında (bax, [2], [5]), nüvə reaktorlarında baş verən prosesləri təsvir etdikdə tətbiq olunur (bax, [3], [5]).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Калмыков Н. Н., Чистяков В. П., «Изв. АН СССР. Сер. физич.», 1965, т. 29, № 9, с. 1702–05; [3] Золотухин В. Г., Могильнер А. И., «Атомная энергия», 1963, т. 15, № 1, с. 11–16; [4] Ватутин В. А., Телевинова Т. М., Чистяков В. П., Вероятностные методы в физических иследованиях, М., 1985; [5] Дорогов В. И., Чистяков В. П., Вероятностные модели превращения частиц, М.,1988.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES immiqrasiyalı « **ветвящийся процесс** с иммиграцией; **branching process** with immigration » – şaxələnən prosesdə yeni hissəcikləri yalnız hissəciklərin bölünməsi nəticəsində deyil, «xarici» mənbədən immiqrasiya nəticəsində də təzahür olunan *şaxələnən proses* modelidir. Məs., immiqrasiyalı şaxələnən *Qalton – Vatson prosesini*

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta(t+1) = \zeta_{t,1} + \ldots + \zeta_{t,\zeta(t)} + \xi_t, \quad t \geq 0$$

münasibətlərilə təyin etmək olar, burada $\zeta(t)$, – t anında hissəciklərin sayı, $\zeta_{t,i}$, – t-ci nəslin i-ci hissəciyinin varisləri sayı, ξ_t, – $(t+1)$-ci nəslə immiqrasiya etmiş hissəciklər sayıdır; $\zeta_{t,i}$ və ξ_t asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$\Psi(s) = \mathbf{M}s^{\zeta_{t,i}}, \quad \Psi^*(s) = \mathbf{M}s^{\zeta_t}, \quad t \geq 0, \quad i \geq 1$$

uyğun olaraq, bu təsadüfi kəmiyyətlərin doğuran funksiyalarıdır.

$$\widetilde{\Psi}_t(s) = \mathbf{M}\{\, s^{\xi(t)} / \xi(0) = 0\}$$

doğuran funksiyaları

$$\widetilde{\Psi}_0(s) \equiv 1, \quad \widetilde{\Psi}_{t+1}(s) = \Psi^*(s)\widetilde{\Psi}_t(\Psi(s))$$

rekurrent münasibətlərini ödəyirlər.

$\zeta(t)$ ardıcıllığı *Markov zənciridir*; əgər $\mathbf{M}\zeta_{t,i} < 1$ və $\mathbf{M}\ln(1+\xi_t) < \infty$ və ya $\mathbf{M}\zeta_{t,i} = 1$ və $B = \mathbf{D}\zeta_{t,i} > 2C = 2\mathbf{M}\xi_t$ olarsa, bu zəncir qayıdışlı zəncirdir və əgər $\mathbf{M}\xi_{t,i} = 1$ və $B < 2C$ və ya $\mathbf{M}\xi_{t,i} > 1$ olarsa, qayıdışsız zəncirdir. Əgər $\mathbf{M}\ln(1+\xi_t) < \infty$ olarsa, onda $A = \mathbf{M}\zeta_{t,i} < 1$ olduqda

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) = k\} = p_k, \quad p_0 + p_1 + \ldots = 1$$

limitləri vardır, $A = \mathbf{M}\zeta_{t,i} > 1$ olduqda isə elə W təsadüfi kəmiyyəti və elə c_t ədədlər ardıcıllığı vardır ki,

$$\mathbf{P}\{0 < W < \infty\} = 1, \quad c_t / c_{t+1} \to A,$$

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} c_t\,\zeta(t) = W\} = 1$$

münasibətləri ödənilir. Əgər $\mathbf{M}\xi_{t,i} = 1$, $B = \mathbf{D}\zeta_{t,i} > 0$, $C = \mathbf{M}\xi_t < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{2\zeta(t)}{Bt} \leq x\right\} = \frac{1}{\Gamma(2C/B)}\int_0^x y^{2(C/B)-1}e^{-y}dy, \quad x \geq 0$$

münasibəti doğrudur. Hissəciklərin sayı yenidən sıfra bərabər olan ən yaxın ana qədər hissəciklərin sayı müsbət olan andan keçən zaman müddətinə yaşama müddəti deyilir. Yaşama müddəti uzunluğu vahid ehtimalla, yalnız və yalnız, o halda sonludur ki, immiqrasiyalı Ş. p. qayıdışlı proses olsun. Yaşama müddəti uzunluğunun paylanma funksiyasının xassələri (bax, [4]), t anına qədər yaşama müddəti sona çatmadığı halda $t \to \infty$ olduqda hissəciklər sayı üçün limit paylanmaları öyrənilmişdir (bax, [5], [6]).

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching process, B. – Hldb. – N. Y., 1972; [3] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [4] Зубков А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 179–88; [5] Ватутин В. А., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 5, с. 727–36; [6] Ivanoff B. G., Seneta E., «J. Appl. Probab.», 1985, v. 22, № 1, p. 223–27.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; keçid fenomenləri **« ветвящийся процесс;** переходные явления; **branching process;** transient phenomena/heavy –traffic approximation **»** – kritik Ş. p.-lərə yaxın *şaxələnən proseslərin* asimptotik xassələridir. Bir hissəciyinin varisləri sayının dispersiyası sonlu b-yə bərabər kritik Ş. p. $\mu(t)$-nin şərti paylanması $\mu(t)/bt$, $t\to\infty$ və $\mu(t)>0$ olduqda üstlü paylanma olur (bax, *Kritik şaxələnən proses*). Kritikaltı və kritiküstü Ş. p.-lər üçün limit teoremləri hissəciklər sayının digər normalaşdırılmaları ilə bağlıdır, limit paylanmaları isə bir hissəciyin varisləri sayının paylanmasından olduqca asılı olur. Lakin, məs., $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots$ elə Ş. p.-lər ardıcıllığı olarsa ki, $\mu_n(t)$ prosesində bir hissəciyin varislərinin orta qiyməti $n\to\infty$ olduqda 1-ə yaxınlaşsın, $\mu_n(t)$ prosesinin bir hissəciyinin varisləri sayının dispersiyası isə b_n olsun, onda olduqca geniş şərtlərlə $\mu_n(t)/b_nt$-nin limit şərti paylanması da $t\to\infty$ və $n\to\infty$ və $\mu_n(t)>0$ şərtləri ödənildikdə üstlü paylanma olur.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES kritik **« ветвящийся процесс** критический; critical **branching process »** – bax, *Kritik şaxələnən proses.*

ŞAXƏLƏNƏN PROSES kritikaltı **« ветвящийся процесс** докритический; subcritical **branching process »** – bax, *Kritikaltı şaxələnən proses.*

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; kritiklik **« ветвящийся процесс;** критичность; **branching process;** criticality of **»** – *şaxələnən prosesdə* hissəciklərin artma intensivliyini təyin edən və hər hansı kritiklik parametrinin qiymətindən asılı olan bir xassədir. Məs., *Qalton – Vatson prosesində* $A=\mathbf{M}Z(t)$ belə parametrdir, burada $Z(t)$, – t anındakı hissəciklər sayıdır, bu parametrin kritik qiyməti $A_0=1$. $A<1$ olduqda proses kritikaltı prosesdir və $\mathbf{M}Z(t)\to 0$, $A>1$ olduqda proses kritiküstü prosesdir və $\mathbf{M}Z(t)\to\infty$ və $A=1$ olduqda proses kritik prosesdir və $\mathbf{M}Z(t)\equiv 1$.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES kritiküstü **« ветвящийся процесс** надкритический; supercritical **branching process »** – bax, *Kritiküstü şaxələnən proses.*

ŞAXƏLƏNƏN PROSES qeyri–requlyar **« ветвящийся процесс** нерегулярный; irregular **branching process »** – bax, *Şaxələnən proses*; requlyarlıq.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES məhdud **« ветвящийся процесс** ограниченный; bounded **branching process »** – bax, *Məhdud şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES miqrasiyalı **« ветвящийся процесс** с миграцией; **branching process** with migration **»** – *şaxələnən prosesin* (diskret və ya kəsilməz zamanlı, hissəciklərinin bir və ya bir neçə tipləri olan) elə bir modelidir ki, hər hansı «xarici» mənbədən daxil olan hissəciklərlə (bax, *Şaxələnən proses* immiqrasiyalı) və prosesdə artmaqda olan hissəciklərlə yanaşı hissəciklərin müəyyən hissəsinin xarici mühitə emiqrasiyası mümkündür.

Əd.: [1] Нагаев С. В., Хан Л. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 3., с. 523–34; [2] Янев Н. М., Митов К. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 3, с. 458–67; [3] Каверин С. В., «Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук», 1985, № 3, с. 22–27.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES redüslənmiş **« ветвящийся процесс** редуцированный; recuded **branching process »** – bax, *Redüslənmiş şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES requlyar **« ветвящийся процесс** регулярный; regular **branching process »** – bax, *Şaxələnən proses*; requlyarlıq.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES; requlyarlıq **« ветвящийся процесс;** регулярность; **branching process;** regularity of **»** – ixtiyari zaman anında hissəcikləri sayının 1 ehtimalla sonlu olmasını təmin edən, *şaxələnən proses* xassəsidir. *Bellman – Harris prosesində* t anında hissəciklər sayı $\zeta(t)$-nin doğuran funksiyası $\Psi(t;\,s)$ ixtiyari $|s|<1$ üçün

$$\Psi(t;\,s)=\int_0^t h\,\Psi(t-u;\,s)\,dG(u)+s(1-G(t))$$

qeyri – xətti inteqral tənliyinin yeganə həllidir, burada $G(t)$ – hissəciyin yaşama müddətinin paylanma funksiyasıdır, $h(s)$ – bir hissəciyin bilavasitə sayının doğuran funksiyasıdır. Requlyar şaxələnən proses üçün

$$\lim_{s\uparrow 1}\Psi(t;\,s)\equiv 1$$

münasibəti, qeyri – requlyar şaxələnən proses üçün

$$\lim_{s\uparrow 1}\Psi(t;\,s)<1,\ t>0$$

münasibəti doğrudur. Əgər hər hansı $t_0>0$, $\alpha>0$ üçün $0\le t\le t_0$ olduqda $G(t)\asymp t^{\alpha}$ olarsa, onda prosesin requlyarlığı üçün

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-1/\alpha}(1-h(1-x))^{1/\alpha}}$$

inteqralının dağılması zəruri və kafi şərtdir, bu prosesin requlyarlıq şərti adlanır.

Əd.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Ватутин В. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 230, № 1, с. 15–18.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES tənzimlənən **« ветвящийся процесс** регулируемый; controlled **branching process »** – bax, *Tənzimlənən şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES təsadüfi mühitdə **« ветвящийся процесс** в случайной среде; **branching process** in random environment **»** – artmaqda olan bir hissəciyin t anındakı varisləri sayının paylanması bu anda təsadüfi ζ_t «mühit» – prosesindən asılı olan *şaxələnən prosesdir*. $\{\zeta_t\}$-nin trayektoriyası qeyd olunduğu halda, təsadüfi mühitdə Ş. p. *zaman üzrə qeyri – bircins*

şaxələnən proses kimi inkişaf edir. Təsadüfi mühitdə $\{\zeta_t\}$ Ş. p.-i eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olduğu hal üçün daxil olunmuşdur (bax, [1]). Sonralar (bax, məs., [2]) kəsilməz zaman halı üçün erqodik $\{\zeta_t\}$ prosesi hallarına da baxılmışdır. Əgər $m(x)$ $\zeta_t = x$ olan anda artmağa başlayan hissəciyin varisləri sayının riyazi gözləməsidirsə, onda $\mathbf{M}\log m(\zeta_t) < 0$ olarsa, təsadüfi mühitdə Ş. p. kritikaltı, $\mathbf{M}\log m(\zeta_t) = 0$ olarsa – kritik, $\mathbf{M}\log m(\zeta_t) > 0$ olarsa – kritiküstü Ş. p. adlanır. Təsadüfi mühitdə Ş. p.-in hissəcikləri sayı $Z(t)$ üçün $t \to \infty$ anında limit teoremlərində, bir qayda olaraq, hökm olunur ki, $\{\zeta_t\}$ «mühit» – prosesinin hər bir trayektoriyası üçün uyğun qeyri – bircins Ş. p.-in limit teoreminin analoqu doğrudur (bax, məs., [2]). «Təsadüfi mühitin» qeyri – trivial təsiri, məs., təsadüfi mühitdə kritik cırlaşmayan şaxələnən prosesin olması ehtimalının xassələrində özünü biruzə verir (bax, [3], [4]): təsadüfi mühitdə kritik şaxələnən proses üçün elə $C_1, C_2, C_3 > 0$ ədədləri vardır ki, $Z(0) = 1$ olduqda

$$C_1 t^{-1/2} \leq \mathbf{P}\{Z(t) > 0\} \leq C_2 t^{-1/2},$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{C_3 t^{-1/2} \,|\, \ln \mathbf{P}\{Z(t) > 0\} \,|\, \{\zeta_t\}_{u=0}^{t}\} | < x\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-v^2/2} dv .$$

Əd.: [1] Smith W. L., «Ann. Math. Stat.», 1968, v. 39, № 6, p. 2136–2140; [2] Athreya K. B., Karlin S., «Ann. Math. Stat.», 1971, v. 42, № 5, p. 1499–1520; № 6, p. 1843–58; [3] Козлов M. B., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 4, с. 813–25; [4] Берестова Н. А., «Докл. АН СССР», 1982, т. 267, № 1, с. 18–22.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES ümumi « **ветвящийся процесс** общий; general **branching process** » – bax, *Ümumi şaxələnən proses*.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES yaşından asılı « **ветвящийся процесс** с зависимостью от возраста; age-dependent **branching process** », Sevastyanov prosesi, (G, h_n) – proses – elə *şaxələnən prosesdir* ki (eynitipli və ya bir neçə tip hissəciklərli), hissəciyin çevrilmə anındakı varislər sayının paylanması bu hissəciyin yaşından (ömründən) asılıdır. Yaşından asılı Ş. p. modeli [4]-də *Bellman – Harris prosesinin* ümumiləşməsi kimi təklif olunmuşdur. Eynitip hissəciklərli, yaşından asılı Ş. p.-də hər bir hissəcik yaşama müddəti τ təsadüfi kəmiyyəti və uyğun $G(t) = \mathbf{P}\{\tau \leq t\}$ paylanma funksiyasına malikdir. Baxılan hissəcik ömrünün sonunda yaşı sıfra bərabər ξ_τ sayda hissəciyə çevrilir. $h(u, s) = \mathbf{M}[s^{\xi_\tau} \,|\, \tau = u]$, $\zeta(t)$, – t anında prosesdə hissəciklərin sayı olsun; fərz olunur ki, proses $t = 0$ anında yaşı sıfra bərabər hissəcikdən başlanmışdır. $\Psi(t, s) = \mathbf{M}s^{\zeta(t)}$ doğuran funksiyası

$$\Psi(t, s) = \int_0^t h(u, \Psi(t-u; s)) dG(u) + s(1 - G(t))$$

inteqral tənliyini ödəyir. $A = \mathbf{M}\xi_\tau$, $B = \mathbf{M}\xi_\tau(\xi_\tau - 1)$ olsun. Əgər $A < 1$ olarsa, yaşından asılı Ş. p. kritikaltı, $A = 1$ və $B > 1$ olarsa, kritik, $A > 1$ olarsa, kritiküstü Ş. p. adlanır.

Əgər α prosesin Maltus parametri olarsa, yəni α $\mathbf{M}e^{-\alpha\tau}\xi_\tau = 1$ tənliyinin kökü olarsa və $\mathbf{M}e^{-\alpha\tau}\tau\xi_\tau < \infty$ şərti ödənilərsə, onda

$$\mathbf{M}\zeta(t) \sim ce^{\alpha t}, \quad c > 0, \quad t \to \infty \tag{1}$$

münasibəti doğrudur.

Yaşından asılı kritikaltı və kritiküstü Ş. p.-lər sanki yəqin cırlaşan proseslərdir və kritikaltı proses üçün (Maltus parametri olduğu halında) $Q(t) = \mathbf{P}\{\zeta(t) > 0\}$ kəmiyyətinin $t \to \infty$ olduqda eksponensial yığılma sürəti səciyyəvi xüsusiyyətdir, kritik halda isə

$$Q(t) \sim \frac{1}{Bt} \mathbf{M}\tau\xi_\tau . \tag{2}$$

Kritikaltı prosesdə $\zeta(t)$ kəmiyyətinin $t \to \infty$ olduqda və t anında prosesin cırlaşmayacağı şərtlərində limit paylanması diskret paylanmadır. Kritik proses halında, $t \to \infty$ olduqda, bir qayda olaraq,

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\zeta(t)}{\mathbf{M}[\zeta(t) \,|\, \zeta(t) > 0]} < x \,|\, \zeta(t) > 0 \right\} \to 1 - e^{-x}, \quad x > 0 \tag{3}$$

(bax, *Kritik şaxələnən proses*). Kritiküstü proseslərdə

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\zeta(t) \tag{4}$$

limiti sanki yəqin təyin olunmuşdur.

(1) – (4) müddəalarının analoqları bir neçə tipli hissəciklərli proseslər halında da doğrudur.

Əd.: [1] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, М., 1985, с. 3–67; [2] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К., 1983; [3] Севастьянов Б. А., «Вестн. Моск. ун-та», 1948, № 3, с. 13–34; [4] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

ŞAXƏLƏNƏN PROSES zaman üzrə qeyri-bircins « **ветвящийся процесс** неоднородный во времени; temporally non-homogeneous **branching process** » – bax, *Qeyri – bircins şaxələnən proses*, *zaman üzrə*.

ŞAXƏLƏNƏN TƏSADÜFİ DOLAŞMA « ветвящееся случайное блуждание; branching random walk » – hər bir hissəciyinin vəziyyəti verilmiş X fəzasından olan *şaxələnən prosesdir*; bu prosesdə çevrilmə nəticəsində yaranan nəsil – hissəciklərin tutduğu vəziyyətlərin valideyn – hissəciyə görə yerdəyişməsinin paylanması verilir. Ş. t. d.-nın asimptotik xassələri araşdırılarkən, $t \to \infty$ anında $A_t \subset X$ oblastında hissəciklər sayının paylanması, empirik paylanma funksiyasının $t \to \infty$ olduğu hal, $t \to \infty$ anındakı hissəciklərin vəziyyətlərinin xətti örtüyünün müəyyənləşdirilməsi və s. tədqiq olunur.

Əd.: [1] Biggins J. D., «Lect. Notes in Biomath.», 1980, v. 38, p. 57–67; [2] Erickson K. B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1984, Bd 66, H. 1, S. 129–40.

ŞAXƏLƏNƏN TƏSADÜFİ MEYDAN « ветвящееся случайное поле; branching random field » – bir-birindən asılı olmayaraq *şaxələnən təsadüfi dolaşma* doğuran, hər biri vəziyyəti verilmiş S fəzasından olan sonsuz sayda hissəciklər toplusunun evolyusiyasını təsvir edən *təsadüfi prosesdir*. Verilən $A_t \subset S$ çoxluğundan olan hissəciklərin sayı üçün $t \to \infty$ olduqda limit teoremlərinin ifadələri bir hissəciyin bilavasitə varislərinin paylanması, valideyn – hissəciyə nəzərən varis – hissəciklərin yerdəyişməsinin paylanması S fəzasının dim. – ölçüsü ilə A_t çoxluğunun dəyişmə xarakteri arasında münasibətlərdən asılıdır. Ümumi halda, stasionar Ş. t. m.-nın varlığı və ifadəsi haqqında sual qeyri – trivialdır (artım və yerdəyişmə qanunları verilmiş olduğu halda). Qalton – Vatson şaxələnən proseslərindən Jirina şaxələnən proseslərinə keçidə analoji keçid qiymətləri ölçülər fəzasından olan S fəzasında verilən şaxələnən proseslərə gətirir.

Əd.: [1] К е р с т а н Й., М а т т е с К., М е к к е Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ, М., 1982; [2] D a w s o n D. A., G o r o s t i z a L. G., «Math. Nachr.», 1984, Bd 118, S. 19–46; [3] F l e i s c h m a n J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 239, p. 353–89; [4] I v a n o f f B. G., «Lect. Notes. Math.», 1986, v. 1212, p. 187–94.

***ŞAXƏLƏNMƏ ŞƏRTİ « условие ветвления; branching condition »** – bax, *Şaxələnən proses* c ı r ı l a ş a n.

ŞAXƏLƏR VƏ EHTİMALİ SƏRHƏDLƏR METODU « ветвей и вероятностных границ метод; branch and probability bounds method » – bax, *Multiekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması.*

ŞARLYE PAYLANMASI « Шарлье распределение; Charliye distribution » – sıxlığı *Qram – Şarlye sırası* ilə verilən paylanmanın çox az istifadə olunan adıdır.

ŞENNON DÜSTURU « Шеннона формула; Shannon formula » – bax, *Siqnal / küy nisbət.*

ŞENNON ENTROPİYASI « Шеннона энтропия; Shannon entropy » – bax, *İnformasion ölçü.*

ŞENNON İNFORMASİYASI « Шеннона информация; Shannon information » – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması.*

ŞENNON TEOREMİ « Шеннона теорема; Shannon theorem » – *informasiya nəzəriyyəsinin* K. Şennon tərəfindən 1974-də alınmış əsas teoremidir (bax, [5]). Ş. t. verilmiş rabitə *kanalı* ilə və məlumatların bərpaolunma dəqiqliyi üçün verilmiş şərtlərlə verilmiş məlumatlar mənbəsindən hasil olunan məlumatların ötürülməsinin mümkün olub-olmaması şərtlərini müəyyən edir. Hal-hazırda Ş. t. bir çox müxtəlif məlumatlar mənbələri və rabitə kanalları sinifləri üçün məlumatların bərpaolunma dəqiqliyinin müxtəlif şərtlərində isbat olunmuşdur. Ş. t.-nin digər formaları *İnformasiya nəzəriyyəsi* məqaləsində şəhr olunmuşdur. *Təsadüfi dolaşma* q r u p d a məqaləsinə də bax.

Əd.: [1] В о л ь ф о в и ц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Г а л л а г е р Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Д о б р у ш и н Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [4] К о л е с н и к В. Д., П о л т ы р е в Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [5] Ш е н н о н К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

ŞEPPARD DÜZƏLİŞİ d i s k r e t i z a s i y a ü ç ü n **« Шеппарда поправка** н а д и с к р е т н о с т ь; **Sheppard's correction** f o r d i s c e r e t e n e s s **»** – momentlərin, semiinvariantların və faktorial momentlərin hesablanmasında yuvarlaqlaşdırma xətalarının təsirini azaltmaq məqsədilə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin diskerizasiyası üçün düzəlişdir. İlk dəfə [1]-də təklif olunmuşdur. X – paylanma sıxlığı $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ olan kəsilməz paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun; fərz olunur ki, $p(x)$-in $\mathbb{R}^1$-də m tərtib hər yerdə kəsilməz törəməsi $p^{(m)}(x)$ vardır və hər hansı $\delta > 0$ üçün $x \to \infty$ olduqda $p^{(m)}(x) = O\left(|x|^{-1-\delta}\right)$ və $m_k = \mathbf{M}X^k$ $(k \geq 2)$. Daha sonra fərz olunur ki, müşahidə nəticələrinin yuvarlaqlaşmaları sistemi (yəni başlanğıc y_0 və h addımı verilmişdir, $h > 0$) verilmişdir, bu sistemin seçilməsi ilə ilkin kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları əvəzinə əslində $Y = y_0 + h[(X - y_0)/h + 1/2]$ diskret təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyaları $y_n = y_0 + nh$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ müşahidə olunur, burada $[a]$, – a ədədinin tam hissəsidir. X təsadüfi kəmiyyətinin momenti $m_i^* = \mathbf{M}Y^i$ aşağıdakı düsturlarla hesablanır:

$$m_i^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n^i \, \mathbf{P}\{Y = y_n\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n^i \int_{y_n}^{y_n+1/2} p(x)\,dx,$$
$$i = 1, \ldots, k$$

Ümumiyyətlə, $m_i \neq m_i^*$ və deməli, X və Y-in uyğun mərkəzi momentləri $\mu_i = \mathbf{M}(X - m_i)^i$ və $\mu_i^* = \mathbf{M}(Y - m_i^*)^i$ bir-birindən fərqlənir. Bununla əlaqədar belə sual yaranır: μ_i^* momentlərini nə şəklə salmalı ki, bunlar μ_i momentləri üçün «yaxşı» yaxınlaşmalar versin? Analoji suallar X təsadüfi kəmiyyətinin semi – invariantları $\varkappa_i$ və faktorial momentləri $\mu_{[i]}$-lərin Y diskret təsadüfi kəmiyyətinin uyğun semi – invariantları və faktorial momentlərinin vasitəsilə hesablanmasında da yaranır və uyğun düzəlişlər d i s k r e t i z a s i y a ü ç ü n Ş e p p a r d d ü z ə l i ş l ə r i adlanır.

$g(t)$, – X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası, $f(t)$, – Y təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası və

$$\varphi(t) = \mathbf{M}e^{itY^*} = \frac{2}{th}\sin\frac{th}{2}$$

– Y^* təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyası olsun, Y^* – $[-h/2, h/2]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır və X-dən stoxastik asılı deyildir. Bu şərtlərlə kiçik h-lar üçün

$$f(t) = g(t)\varphi(t) + O(h^{m-1})$$

münasibəti doğrudur. Y diskret təsadüfi kəmiyyətinin momentləri $O(h^{m-1})$ dəqiqliyinə qədər $X + Y^*$ təsadüfi kəmiyyətinin momentləri ilə üst-üstə düşür və $O(h^{m-1})$ dəqiqliyinə qədər aşağıdakı bərabərliklər ödənilir:

$$\mu_1 = \mu_1^*, \qquad \mu_4 = \mu_4^* - \frac{1}{2}\mu_2^* h^2 + \frac{7}{240} h^4,$$

$$\mu_2 = \mu_2^* - \frac{1}{12}h^2, \qquad \mu_5 = \mu_5^* - \frac{5}{6}\mu_3^* h^2 + \frac{7}{48}\mu_1 h^4,$$

$$\mu_3 = \mu_3^* - \frac{1}{4}m_1 h^2,$$

$$\mu_6 = \mu_6^* - \frac{5}{4}\mu_4^* h^2 + \frac{7}{16}\mu_2^* h^4 - \frac{31}{1344}h^6,$$

Bu bərabərliklərdə Y təsadüfi kəmiyyətinin $\mu_1^*, \mu_2^*, ..., \mu_k^*$ momentlərinə diskretizasiya üçün Şeppard düzəlişləri vardır. Y təsadüfi kəmiyyətinin semi – invariantlarının və faktorial momentlərinin diskretizasiyası üçün Ş. d. analoji qaydada hesablanır.

Əd.: [1] Sheppard W. F., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1898, v. 29, p. 353–80; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

ŞEPPARD DÜZƏLİŞİ qruplaşdırma üçün **« Шеппарда поправка** на группировку; **Sheppard's correction** for grouping **»** – qruplaşdırılmış verilənlər üzrə hesablanmış *seçimi dispersiyanın* meylini aradan qaldıran düzəlişdir. $X_1, ..., X_n$ – eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun və fərz olunur ki, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{M}X_1$ və $\mathbf{m}_2 = \mathbf{M}X_1^2$ sonludur və $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1 = \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1^2$ X_1-in dispersiyasıdır. Onda

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{və} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

statistikaları X_1 təsadüfi kəmiyyətlərinin $\mathbf{m}_1$ meylsiz riyazi gözləməsi və σ^2 dispersiyasının meylsiz statistik qiymətləridir. Fərz olunur ki, $X_1, ..., X_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin realizasiyaları deyil, bu realizasiyaların əvvəlcədən verilmiş qruplaşdırılma intervalları – $[x_k - h/2, x_k + h/2]$ intervallarından olma tezlikləri – ν_k-lar ($k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ hər hansı müsbət sabitdir) müşahidə olunur.

Bu halda $\mathbf{m}_1$ və σ^2 üçün statistik qiymətlər kimi

$$\overline{\overline{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_k \nu_k x_k \quad \text{və} \quad s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum \nu_k (x_k - \overline{\overline{X}}_n)^2$$

statistik qiymətlərini götürmək olar. ν_k tezlikləri üzrə hesablanmış $\overline{\overline{X}}_n$ statistikası $\mathbf{m}_1$ üçün meylsiz statistik qiymət olur ($\overline{X}_n$ statistik qiyməti üçün olduğu kimi). s_0^2 statistik qiyməti isə σ^2 dispersiyası üçün meylli statistik qiymət olur. Bu halda

$$S_0^2 = s_0^2 - h^2/12$$

statistikası σ^2 üçün meylsiz statistik qiymət olur. $h^2/12$ müşahidələrin qruplaşdırılmasına Şeppard düzəlişi adlanır. Yüksək tərtibli momentlər, semiinvariantlar və faktorial momentlər üçün də qruplaşdırılmada Ş. d. analoji qurulur. Bax, *Şeppard düzəlişi* diskretizasiya üçün.

Əd.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

ŞERMAN PAYLANMASI « Шермана распределение; Sherman distribution » – vahid ölçülü parçanın asılı olmayan müntəzəm qanunla paylanmış nöqtələrlə bölgüsündən alınan parçaların uzunluqları ilə bağlı ehtimal *paylanmasıdır.* $Z_1, ..., Z_n$, – $[0, 1]$ parçasında eyni müntəzəm qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $Z_{(1)}, ..., Z_{(n)}$ – bu təsadüfi kəmiyyətlərdən təşkil olunmuş variasion sıra, $X_1 = Z_{(1)}$, $X_2 = Z_{(2)} - Z_{(1)}, ..., X_{n-1} = Z_{(n)} - Z_{n-1}$, $X_n = 1 - Z_{(n)}$ olsun. Onda

$$X = \sum_{j=1}^{n+1} \left| X_j - 1/(n+1) \right| \Big/ 2$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması sərbəstlik dərəcəsi sayı n-ə bərabər Şerman paylanması adlanır.

ŞEYP « шейп; shape » – bax, *Təsadüfi şeyp.*

ŞƏBƏKƏ(si) ölçülərin **« сеть** мер; **net** of measures **»** – istiqamətlənmiş çoxluğun *ölçülər* fəzasına inikasıdır. Θ çoxluğunun ixtiyari θ_1 və $\theta_2 \in \Theta$ cütü üçün elə $\theta \in \Theta$ olarsa ki, $\theta_1 \le \theta$ və $\theta_2 \le \theta$ şərtlərini ödəsin, yəni bu çoxluqda $\le$ münasibəti qismən elə qaydanı ödəsin ki, $\theta \in \Theta$ θ_1 və θ_2-dən sonra olsun, onda Θ istiqamətlənmiş çoxluq adlanır. Θ-dan ölçülər fəzasına inikas ölçülər şəbəkəsi adlanır və $(\mathbf{P}_\theta)_{\theta \le \Theta}$ və ya $(\mathbf{P}_\theta)$ simvolu ilə işarə olunur. Γ qismən $\le$ qaydası ilə istiqamətlənmiş çoxluq və φ Γ-dən Θ-ya elə inikas olarsa ki, bu inikas: hər bir $\theta \in \Theta$ üçün elə $\gamma \in \Gamma$ olarsa ki, $\gamma \le \gamma_1$ olduqda $\theta \le \varphi(\gamma_1)$ xassəsinə malik olsun, onda $(\mathbf{P}_{\varphi(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ şəbəkəsi $(\mathbf{P}_\theta)_{\theta \le \Theta}$ şəbəkəsinin alt şəbəkəsi adlanır.

Əgər $\Theta = \mathbb{N}$ natural ədədlər çoxluğu özünün təbii qaydasındakı kimi olarsa, onda $\mathbb{N}$-in ölçülər fəzasına inikası adi ölçülər ardıcıllığı olur. Paylanmalar üçün limit teoremləri ilə əlaqədar konkret məsələlərdə həmişə ölçülər ardıcıllığına baxmaq kifayətdir. Lakin ehtimal ölçülərinin və təsadüfi proseslərin zəif yığılmasının ümumi şərtlərinin öyrənilməsində əksər hallarda şəbəkələrin yığılmasına baxmaq münasibdir.

Əd.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Borovkov A. A., Pecerski E. A., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 28, № 1, S. 5–22; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ŞƏBƏKƏ(si) paylanmaların **« сеть** распределений; **net** of distributions **»** – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

ŞƏBƏKƏVARİ XƏTTİ KOD « решетчатый линейный код; linear trellis code » – bax, *Konvolyusion kod.*

ŞƏBƏKƏVARİ KOD « решетчатый код; trellis code » – bax, *Konvolyusion kod.*

ŞƏBƏKƏVARİ MODEL(i) statistik mexanikanın **« решетчатая модель** статистической механики; **lattice model** in a statistical mechanics **»** – bax, *Statistik mexanika.*

ŞƏBƏKƏVARİ PAYLANMA « решетчатое распределение; lattice distribution » – $h>0$, $-\infty<a<\infty$, $n=0,\pm1,\pm2,...$ olduqda $a+nh$ qiymətlərini alan ξ təsadüfi kəmiyyətinin diskret *ehtimal paylanmasıdır.* h ədədi Ş. p.-nın addımı adlanır. $a=0$ olduqda Ş. p. *arifmetik paylanmadır.* Puasson paylanması və binomial paylanma Ş. p.-lardır. Ş. p. *diskret paylanmaların* ən mühüm, çox təsadüf olunan və tətbiq olunan paylanmalarındandır. Əgər a_1 və $h_1>h$ kəmiyyətlərinin heç bir qiymətlərində Ş. p. a_1+nh_1, $n=0,\pm1,...$ şəkilli nöqtələr çoxluğunda topalanmamışdırsa, Ş. p.-nin addımı h maksimal addım adlanır. Ş. p.-lar sinfi xarakteristik funksiyalar terminlərilə də təsvir olunur: xarakteristik funksiyası $f(t)$ olan ehtimal paylanmasının Ş. p. olması üçün hər hansı $t_0\neq0$ üçün $|f(t_0)|=1$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir və h addımı, yalnız və yalnız, o halda maksimal addım olur ki, $|f(2\pi/h)|=1$ və $0<t<2\pi/h$ olduqda isə $|f(t)|<1$ münasibətləri ödənilsin. Ş. p. üçün çevirmə düsturu

$$p_n=\frac{h}{2\pi}\int\limits_{|t|<\pi/h} e^{-it(a+nh)}\,f(t)\,dt$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur, burada $p_n=\mathbf{P}\{\xi=a+nh\}$. İki Ş. p.-nın kompozisiyası, ümumiyyətlə, Ş. p. olmaya bilər, iki Ş. p.-nın kompozisiyası, yalnız və yalnız, o halda Ş. p.-dır ki, h_1/h_2 nisbəti rasional ədəd olsun, burada h_1 və h_2 – paylanmaların addımlarıdır.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; [2] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

***ŞƏBƏKƏVARİ PAYLANMA** unimodal **« решетчатое распределение** унимодальное; unimodal **lattice distribution »** – bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma*, *Puasson paylanması*, *Binomial paylanma*, *Həndəsi paylanma.*

ŞƏRTİ BEYES RİSKİ « условный бейесовский риск; conditional Bayesian risk » – bax, *Aposterior risk.*

ŞƏRTİ DOĞRUYAOXŞARLIQ FUNKSİYASI « условная функция правдоподобия; conditional likelihood function » – bax, *Doğruyaoxşarlıq funksiyası.*

ŞƏRTİ EHTİMAL « условная вероятность; conditional probability », aposterior ehtimal, – 1) hadisəyə nəzərən Ş. e. – iki hadisənin bir-birilə bağlılığı xarakteristikasıdır. Əgər A və B təsadüfi hadisələr və $\mathbf{P}(B)>0$ olarsa, A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən (və ya B şərtində) Ş. e. $\mathbf{P}(A\,|\,B)$ [və ya $\mathbf{P}_B(A)$] –

$$\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Asılı olmayan A və B hadisələri üçün $\mathbf{P}(A\,|\,B)$ Ş. e. ilə $\mathbf{P}(A)$ şərtsiz ehtimalı üst-üstə düşür.

Daha dəqiq, Ş. e.-ın tərifi aşağıdakı kimi verilir. $(\Omega,\mathfrak{B},\mathbf{P})$ ehtimal fəzası, $A,B\in\mathfrak{B}$, $\mathbf{P}(B)>0$ olsun. B hadisəsinin başverməsi şərtilə A hadisəsinin şərti ehtimalı $\mathbf{P}(A\cap B)/\mathbf{P}(B)$ nisbətinə deyilir.

Ş. e.-ın bu tərifi və ehtimalın xassələrindən Ş. e.-ın aşağıdakı xassələri bilavasitə alınır:

1) $\mathbf{P}(A/B)\geq0$;

2) $\mathbf{P}(\Omega/B)\equiv1$;

3) $\mathbf{P}(B/B)\equiv1$;

4) əgər $\{A_i\}$ cüt-cüt uyuşmayan ($i\neq j$, $i=1,2,...$ olduqda $A_i\cap A_j=\varnothing$) hadisələr ardıcıllığı olarsa, onda

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B\right)=\sum_i\mathbf{P}(A_i\,|\,B).$$

Bu xassələr asanlıqla isbat olunur.

$\mathfrak{B}_B$ ilə $A\cap B$ tipli $(A\in\mathfrak{B},\ B\in\mathfrak{B})$ bütün çoxluqlar cəbri işarə olunarsa, 1) – 4) xassələrindən aydındır ki, $(B,\mathfrak{B}_B,\mathbf{P}(\cdot\,|\,B))$ – ehtimal fəzasıdır. $B\in\mathfrak{B}$ qeyd olunarsa, $\mathbf{P}(A\,|\,B)$ $\mathfrak{B}_B$ σ – cəbrində təyin olunmuş çoxluq funksiyasıdır, bu halda $\mathbf{P}(A\,|\,B)$ -nin funksiya kimi arqumenti A coxluğudur. Hadisələrin şərti və şərtsiz ehtimalları haqqında *Beyes düsturu*, *Tam ehtimal düsturu* məq.-inə bax.

2) A hadisəsinin $\mathfrak{B}$ – cəbrinə nəzərən Ş. e. – ixtiyari $B\in\mathfrak{B}$ üçün

$$\int\limits_B\mathbf{P}(A\,|\,\mathfrak{B})\,\mathbf{P}(d\omega)=\mathbf{P}(A\cap B)$$

şərtini ödəyən, $\mathfrak{B}$ -ə nəzərən ölçülən $\mathbf{P}(A\,|\,\mathfrak{B})$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir. σ – cəbrə nəzərən Ş. e. ekvivalentlik dəqiqliyi ilə təyin olunur.

Əgər $\mathfrak{B}$ σ – cəbri müsbət ehtimallarlı, hesabi sayda, kəsişməyən və birləşməsi Ω -ya bərabər $B_1,B_2,...$ (tam qrup əmələ gətirən) hadisələrin doğurduğu σ – cəbr olarsa, onda

$$\mathbf{P}(A\,|\,\mathfrak{B})=\mathbf{P}(A\,|\,B_k),\quad\omega\in B_k,\quad k=1,2,...\,.$$

A hadisəsinin $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən Ş. e. A indikatorunun şərti riyazi gözləməsi $\mathbf{M}(\mathbf{I}_A\,|\,\mathfrak{B})$ kimi təyin oluna bilinər.

$(\Omega,\mathfrak{B},\mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathscr{A}$, – $\mathfrak{B}$ -nin alt σ – cəbri olsun. Əgər elə $p(\omega,A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathfrak{B}$ funksiyası varsa ki:

1) ω qeyd olunduqda $p(\omega,A)$ $\mathfrak{B}$ σ – cəbrində ehtimaldır,

2) $\mathbf{P}(A\,|\,\mathscr{A})=\mathbf{P}(\omega,A)$ bərabərliyi vahid ehtimalla doğrudur, onda $\mathbf{P}(A\,|\,\mathscr{A})$ Ş. e. requlyar şərti ehtimal adlanır.

Requlyar Ş. e.-lar üçün şərti riyazi gözləmələr Ş. e.-lı inteqrallarla ifadə olunur, bu halda şərti riyazi gözləmələr ölçü kimi anlaşılır.

ξ təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən Ş. e. ξ -nin doğurduğu σ – cəbrə nəzərən Ş. e. kimi təyin olunur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

***ŞƏRTİ EHTİMAL PAYLANMASI « условное распределение вероятностей; conditional probability distribution, a posteriori distribution »** – bax, *Aposterior paylanma.*

ŞƏRTİ ENTROPİYA « условная энтропия; conditional entropy », ξ təsadüfi kəmiyyətinin η təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti entropiyası, –

$$H(\xi|\eta) = -\sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{k|j} \log p_{k|j}$$

kəmiyyətinə deyilir, burada ξ və η, – $x_1, x_2, \ldots$ və $y_1, y_2, \ldots$ qiymətlərini alan diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\},\ q_j = \mathbf{P}\{\eta = y_j\},\ k = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots$$

$$p_{k|j} = \mathbf{P}\{\xi = x_k | \eta = y_j\},\ \sum p_{k|j} = 1.$$

ξ və η ixtiyari diskret təsadüfi kəmiyyətlər olarsa:

a) $H(\xi|\eta) \le H(\xi)$ münasibəti doğrudur və bərabərsizlik işarəsi, yalnız və yalnız, ξ və η asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduqda ödənilir;

b) $H(\xi\eta) = H(\xi|\eta) + H(\eta) + H(\eta|\xi) + H(\xi)$ xassələri doğrudur, burada

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k,$$

$$H(\eta) = -\sum_{j=1}^{\infty} q_j \log q_j.$$

Bax, *Entropiya*.

ŞƏRTİ ENTROPİYA(sı) bölgünün **« условная энтропия разбиения; conditional entropy of a partition »** –

$$H(\xi/\eta) = \int [-\ln \mu(C_\xi(x)|C_\eta(x))]\, d\mu(x)$$

ədədidir (və ya ∞-dur), burada ξ, η, – μ – ölçülü Lebeq fəzasının ölçülən bölgüləridir; $C_\xi(x), C_\eta(x)$, – ξ və η-nın x-i özündə saxlayan elementləridir. Bölgünün Ş. e.-sı

$$H(\xi|\eta) = \int H(\xi|C_\eta(x))\, d\mu(x)$$

şəklində də yazıla bilinər, burada $\xi|C_\eta(x)$, – η bölgüsünün $C_\eta(x)$ elementində ξ-nin doğurduğu bölgüdür.

ŞƏRTİ FAYDALILIQ « условная полезность; conditional utility » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

ŞƏRTİ İNFORMASİYA MİQDARI « условное количество информации; conditional information » – bax, *İnformasiya miqdarı.*

ŞƏRTİ KRİTERİ « условный критерий; conditional test » – hər hansı statistikanın verilmiş qiymətində seçimin şərti paylanmasının parametrləri haqqında hipotezlərin yoxlanılmasının köməkçi məsələsində *statistik kriteridir*. X naməlum $\omega \in \Omega$ parametrindən asılı paylanması $\mathbf{P}_\omega$ olan təsadüfi seçim olsun. X üzərində aparılmış müşahidə nəticəsi x-ə görə $H_1 : \omega \in \Omega_1$ alternativ hipotezinə qarşı $H_0 : \omega \in \Omega_0$ ilkin hipotezi yoxlanılır, Ω_0 və Ω_1 Ω-nın kəsişməyən, boş olmayan altçoxluqlarıdır. $T = T(X)$ hər hansı statistika və $\mathbf{P}_\omega^{X|T}(\cdot|t)$ T statistikasının verilmiş $T = t$ qiymətində X seçiminin şərti paylanması olsun. İlkin məsələ ilə yanaşı T statistikasının hər bir t qiymətində paylanması $\mathbf{P}_\omega^{X|T}(\cdot|t)$ olan X təsadüfi seçiminin x müşahidəsi üzrə H_0 və H_1 hipotezlərinin fərqlənməsi (şərti) köməkçi məsələsinə də baxmaq olar. Ümumi halda, t qiymətindən asılı olan $\varphi(x|t)$ kriterisi (bu məsələdə) **şərti kriteri** adlanır. Sonradan $\varphi(x|t)$ Ş. k.-nin köməyilə qurulan $\psi(x) = \varphi(x|T(x))$ ilkin məsələdə kriteri (şərtsiz) kimi istifadə oluna bilinər.

Ş. k.-dən ilkin məsələdə kriterilərin qurulması üsulu kimi istifadə olunması o hallarda məqsədəuyğundur ki, köməkçi şərti məsələ bu və ya başqa mənada ilkin məsələdən sadə olsun (məs., əngəlləyici parametrli məsələlərdə bu parametr üçün kafi T statistikası vardır, şərti məsələyə keçdikdə əngəlləyici parametri xaric etmək olar). Bəzən köməkçi məsələlərdə (t-nin hər bir qiymətində) ya arzuolunan və ya optimal xassələrli (məs., oxşar, meylsiz, müntəzəm ən güclü və s.) $\varphi(x|t)$ Ş. k.-ni seçmək olur və sonradan isə isbat etmək olur ki, $\varphi(x|t)$ Ş. k.-nin köməyilə qurulmuş şərtsiz $\varphi(x|T(x))$ kriterisi də analoji xassələrə malikdir.

M i s a l. $\mathbf{P}_\omega \equiv \mathbf{P}_{\xi,\theta}$ naməlum $\omega \equiv (\xi; \theta)$ parametrindən asılı, hər hansı $\mathbf{P}$ ehtimal paylanmasına görə

$$\frac{d\mathbf{P}_{\xi,\theta}}{d\mathbf{P}}(x) = B(\xi, \theta) \exp\{\xi' U(x) + \theta' T(x)\} \qquad (1)$$

sıxlığı ilə təyin olunan, paylanmaların eksponensial ailəsi olsun; burada $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^k$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ və $\Omega = \Xi \times \Theta$, – (1) ailəsinin natural parametrik fəzasının altçoxluğu olsun. H_0 və H_1 hipotezlərinin $\Omega_0 = \{(0, \theta); \theta \in \Theta\}$ və $\Omega_1 = \{(\xi, \theta) : \xi \in \Xi \setminus \{0\}; \theta \in \Theta\}$ çoxluqları ilə təyin olunduğu fərz olunur; θ parametri baxılan məsələdə əngəlləyici parametrdir. $T(x)$ statistikasına nəzərən $\mathbf{P}_\xi^{X|T}(\cdot|t)$ şərti paylanmalar ailəsi də eksponensial ailədir və ω parametrindən yalnız ξ komponenti vasitəsilə asılıdır (T statistikasının θ üçün kafi statistika olduğuna əsasən):

$$\frac{d\mathbf{P}_\xi^{X|T}(\cdot|t)}{d\mathbf{P}^{X|T}(\cdot|t)}(x) = B_t(\xi) \exp\{\xi' U(x)\}, \qquad (2)$$

burada

$$B_t(\xi) = \left(\int \exp\{\xi' U(x)\}\, \mathbf{P}^{X|T}(dx|t) \right)^{-1}.$$

Bununla da, şərti köməkçi məsələ (2) paylanması ilə x müşahidəsi üzrə $\overline{H}_0 : \xi = 0$ və $\overline{H}_1 : \xi \in \Xi \setminus \{0\}$ hipotezlərinin fərqləndirilməsindən ibarətdir; bu halda əngəlləyici θ parametri xaric olunmuş olur.

$k=1$ olduqda və birtərəfli alternativlərdə ($\Xi=\{\xi\geq 0\}$) köməkçi məsələdə α hüdudlu müntəzəm ən güclü $\varphi_1(x\,|\,t)$ Ş. k.-si vardır və bu kriteri aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\varphi_1(x\,|\,t)=\begin{cases}0, & \text{əgər } U(x)<C_0(t),\\ \gamma_0(t), & \text{əgər } U(x)=C_0(t),\\ 1, & \text{əgər } U(x)>C_0(t) \text{ olarsa,}\end{cases} \qquad (3)$$

burada $C_0(t)$ və $\gamma_0(t)$

$$\int \varphi_1(x\,|\,t)\,\mathbf{P}^{X|T}(dx\,|\,t)=\alpha$$

şərtindən təyin olunur.

İkitərəfli alternativlərdə ($\Xi=\mathbb{R}^1$) köməkçi məsələdə aşağıdakı şəkildə ifadə olunan, müntəzəm ən güclü meylsiz $\varphi_2(x\,|\,t)$ Ş. k.-si vardır:

$$\varphi_2(x\,|\,t)=\begin{cases}0, & \text{əgər } C_1(t)<U(x)<C_2(t),\\ \gamma_i(t), & \text{əgər } U(x)=C_i(t),\ i=1,2,\\ 1, & \text{əgər } U(x)<C_1(t) \text{ və } U(x)>C_2(t) \text{ olarsa}\end{cases} \qquad (4)$$

burada $C_i(t)$ və $\gamma_i(t)$, $i=1,2$ kəmiyyətləri

$$\int \varphi_2(x\,|\,t)\,\mathbf{P}^{X|T}(dx\,|\,t)=\alpha,$$

$$\int U(x)[\varphi_2(x\,|\,t)-\alpha]\,\mathbf{P}^{X|T}(dx\,|\,t)=0$$

şərtlərindən təyin olunur.

(3) və (4) Ş. k.-ləri vasitəsilə qurulan şərtsiz $\varphi_i(x\,|\,T(x))$, $i=1,2$ kriteriləri ilkin məsələdə, uyğun olaraq, müntəzəm ən güclü oxşar və müntəzəm ən güclü oxşar meylsiz kriterilərdir (bax, [1], [5], həm də *Neyman strukturu*, *Oxşar kriteri*).

$k\geq 1$ olduqda Ş. k.-yə keçid kriterilərin tam siniflərinin qurulmasından [6]-da istifadə olunmuşdur; daha ümumi halda, şərti köməkçi məsələlərdən istifadə edilməklə kriterilərin tam siniflərinin qurulması probleminə [7]-də baxılmışdır.

İxtiyari tip $\mathbf{P}_{\xi\theta}$ paylanmaları ailələrinin (məhz (1) şəklində eksponensial olmayanda) parametrləri haqqında hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində də Ş. k.-lərdən istifadə olunur. Məs., $k=1$ olduqda Ş. k.-nin köməyilə [8]-də birtərəfli alternativlərdə lokal ən güclü oxşar kriterilər və ikitərəfli alternativlərdə lokal ən güclü oxşar meylsiz kriterilər qurulur, [9]-da Ş. k.-yə kecid, ξ parametri ixtiyari dim. – ölçülü olduqda, kriterilərin asimptotik tam siniflərini almaq üçün istifadə olunmuşdur.

Mürəkkəb statistik hipotezlərin yoxlanılması məsələlərində Ş. k.-nin istifadə olunması statistik nəticənin çıxarılmasında ümumi şərtilik prinsipinin tətbiqinə konkret misaldır (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] К о к с Д., Х и н к л и Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; [5] Б а р р а Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [6] M a t t h e s T. K., T r u a x D. R., «Ann. Math. Statist.», 1978, v. 6, № 4, p. 820–27; [8] N e y m a n J., «Philos. Trans. Roy. Soc.», 1937, v. 236, № A 767, c. 333–80; [9] Б е р н ш т е й н А. В., «Изв. ВУЗов. Математика», 1983, № 11, c. 3–18.

ŞƏRTİ MARKOV PROSESİ « условный марковский процесс; conditional Markov process » – [1]-də aşağıdakı sxemlə bağlı daxil olunmuş termindir. Fəzalar hasilində (X_t, Y_t) *Markov prosesinə* baxılır; birinci koordinatı müşahidə etmək mümkündür; ikincisini isə yox. $\mathbf{P}\{Y_{t_1}\in C\,|\,X_s,\ t_0\leq s\leq t\}$, xüsusi halda, $\mathbf{P}\{Y_t\in C\,|\,X_s,\ t_0\leq s\leq t\}$ şərti paylanmalarına və $\mathbf{P}\{Y_{t_2}\in C\,|\,Y_{t_1}\,|\,X_s,\ t_0\leq s\leq t,\ t_0\leq t_1\leq t_2\leq t\}$ şərti keçid ehtimallarına baxılır. İkinci koordinat qeyd olunduğu halda birinci koordinatın şərti paylanmaları məlum olduqda, riyazi statistika ilə bağlı bir sıra optimal qiymətləndirmə və təsadüfi proseslərin qeyri – xətti filtrasiyası məsələlərini həll etmək mümkündür. Məs., naməlum parametrin qiymətləndirilməsinin klassik məsələsi üçün, müşahidə olunan koordinatın zamandan asılı olmadığı, yəni $Y_t\equiv Y$ və müəyyən aprior paylanmaya malik olduğu hala baxılır.

[1]-də diskret Markov zəncirləri halında şərti paylanmalar və şərti keçid ehtimalları üçün tənliklər verilmişdir, bunlar xətti tənliklər deyildirlər, lakin istisna hal müşahidə olunan koordinatın ayrıca Markov prosesi əmələ gətirdiyi haldır. Bu halda müşahidə intervalı t-nin ucu t_2-dən sağda olarsa, şərti keçid ehtimalları t-nin ucundan asılı olmur; lakin riyazi baxımdan ən sadə olan bu hal, praktiki cəhətdən mühüm halları əhatə edə bilmir (məs., müşahidəolunan parametr sabit olduqda). Kəsilməz zaman halı riyazi korrekt şəkildə [1], [2]-də araşdırılmamışdır; lakin alınmış düsturlardan aydın olur ki, əgər (X_t, Y_t) diffuzion proses olarsa, şərti keçid ehtimalları xüsusi törəməli (qeyri – xətti) stoxastik tənliklərin həlləri ola bilər.

R. Ş. Liptser və A. N. Şiryayevin işlərində (bax, [9]) kəsilməz zaman halında qeyri – xətti filtrasiya tənliklərinin riyazi korrekt çıxarılışı verilmişdir. Hər bir xüsusi halda, (X_t, Y_t) prosesi

$$dX_t=[A_0(t,x)+A_1(t,x)\,Y_1]\,dt+$$

$$+B_1(t,x)\,d\boldsymbol{w}_1(t)+B_2(t,x)\,d\boldsymbol{w}_2(t),$$

$$dY_t=[a_0(t,x)+a_1(t,x)Y_t]\,dt+$$

$$+b_1(t,x)\,d\boldsymbol{w}_1(t)+b_2(t,x)\,d\boldsymbol{w}_2(t)$$

şəkilli stoxastik tənliklərlə təsvir olunduğu halda optimal xətti filtrasiyanı (Kalman – Byusi filtrinin ümumiləşmiş halı) effektiv apara bilən metod verilir.

Əd.: [1] С т р а т о н о в и ч Р. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 172–95; [2] С т р а т о н о в и ч Р. Л., Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., 1966; [3] Л я н Ч ж и - ш у э н, «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 227–28; [4] Л я н Ч ж и - ш у э н, «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, в. 5, с. 694–707; [5] В е н т ц е л ь А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 2, с. 390–93; [6] Б е ж а е в а З. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 3, с. 437–45; [7] Б е ж а е в а З. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 4, с. 761–63; [8] Б е ж а е в а З. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 3, 547–57; 1982, т. 27, в. 1, с. 57–66; [9] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы, М., 1974.

ŞƏRTİ ORTA « условное среднее; conditional mean » – bax, *Statistika*(sı) qeyri–ədədi təbiətli obyektlərin.

ŞƏRTİ PAYLANMA « условное распределение; conditional distribution » – elementar hadisə və Borel çoxluğunun elə bir funksiyasıdır ki, hər bir qeyd olunmuş elementar hadisədə ehtimal *paylanması*, hər bir qeyd olunmuş Borel çoxluğunda *şərti ehtimaldır.* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathfrak{B}$ – ədəd oxunda Borel çoxluqlarının σ – cəbri, X, – $(\Omega, \mathscr{A})$ -da təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyət, $\mathfrak{F}$, – $\mathscr{A}$ -nın alt σ – cəbri olsun. Əgər:

a) qeyd olunmuş $B \in \mathfrak{B}$ üçün $Q(\omega, B)$ $\mathfrak{F}$ – ölçülən funksiya,

b) ω qeyd olunduqda $Q(\omega, B)$ funksiyası vahid ehtimalla $\mathfrak{B}$ -də ehtimal ölçüsü,

c) hər bir $F \in \mathfrak{F}$ üçün

$$\int_F Q(\omega, B)\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{P}\{(X \in B) \cap F\}$$

olarsa, $\Omega \times \mathfrak{B}$ fəzasında təyin olunan $Q(\omega, B)$ funksiyası X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən (r e q u l y a r) ş ə r t i p a y l a n m a s ı adlanır. İxtiyari $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasından qiymətləri alan, $\mathfrak{F}$ -in təsadüfi elementinin Ş. p.-sı analoji təyin olunur. Əgər $\mathfrak{X}$ tam separabel metrik fəza, $\mathfrak{B}$ Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olarsa, $\mathfrak{F}$ -in təsadüfi elementinin hər hansı $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ($\mathfrak{F} \subset \mathscr{A}$) Ş. p. vardır.

$F_x(x \mid \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$ funksiyasına X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən ş ə r t i p a y l a n m a f u n k s i y a s ı deyilir.

X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən Ş. p. (şərti paylanma funksiyası) X -in Y təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu σ – cəbrə nəzərən Ş. p. (şərti paylanma funksiyası) kimi təyin olunur.

X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən şərti paylanma funksiyası $F_X(x \mid Y)$ Y -in Borel funksiyasıdır; $Y = y$ olduqda onun $F_X(x \mid Y = y)$ qiyməti Y -in qeyd olunmuş qiymətində X -in ş ə r t i p a y l a n m a f u n k s i y a s ı adlanır. $f_Y(y)$ Y -in paylanma sıxlığı olarsa, onda

$$F_X(x \mid Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial}{\partial y} F_{XY}(x, y)$$

olur, burada $F_{XY}(x, y)$, – X və Y -in birgə paylanma funksiyasıdır.

Əd.: [1] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

ŞƏRTİ PAYLANMA FUNKSİYASI « условная функция распределения; conditional distribution function » – bax, *Şərti paylanma.*

ŞƏRTİ RİYAZİ GÖZLƏMƏ « условное математическое ожидание; conditional expectation », t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t i n ş ə r t i r i y a z i g ö z l ə m ə s i – hər hansı σ – cəbrə nəzərən təsadüfi kəmiyyəti xarakterizə edən, elementar hadisə funksiyasıdır. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, X – bu fəzada verilmiş sonlu riyazi gözləməyə malik təsadüfi kəmiyyət, $\mathfrak{B}$, – σ – cəbr, $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{A}$ olsun. X təsadüfi kəmiyyətinin $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən şərti riyazi gözləməsi $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən elə $\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B})$ təsadüfi kəmiyyətinə deyilir ki, hər bir $B \subseteq \mathfrak{B}$ üçün

$$\int_B X\,\mathbf{P}(d\omega) = \int_B \mathbf{M}(X \mid B)\mathbf{P}(d\omega) \qquad (*)$$

münasibətini ödəsin. Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sonsuzluqdursa (təyin olunmamışdırsa), yəni $\mathbf{M}X^+ = \mathbf{M}\max(0, X)$ və ya $\mathbf{M}X^- = -\mathbf{M}\min(0, X)$ kəmiyyətlərindən yalnız biri sonludursa, onda (*) vasitəsilə Ş. r. g.-nin tərifinin mənası vardır, lakin $\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B})$ sonsuz qiymətlər ala bilər.

Ş. r. g. ekvivalentlik dəqiqliyi ilə birqiymətli təyin olunur. Riyazi gözləmədən fərqli olaraq (ədədi qiymətlər alan) Ş. r. g. funksiyadır (təsadüfi kəmiyyətdir).

Ş. r. g.-nin xassələri riyazi gözləmənin xassələrinə analojidir:

1) əgər $X_1(\omega) \le X_2(\omega)$ sanki yəqin ödənilərsə,

$$\mathbf{M}(X_1 \mid \mathfrak{B}) \le \mathbf{M}(X_2 \mid \mathfrak{B})$$

bərabərsizliyi doğrudur;

2) ixtiyari həqiqi c üçün $\mathbf{M}(c \mid \mathfrak{B}) = c$;

3) ixtiyari həqiqi α və β üçün

$$\mathbf{M}(\alpha X_1 + \beta X_2 \mid \mathfrak{B}) = \alpha \mathbf{M}(X_1 \mid \mathfrak{B}) + \beta\, \mathbf{M}(X_2 \mid \mathfrak{B});$$

4) $\left|\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B})\right| \le \mathbf{M}(|X| \mid \mathfrak{B})$,

5) qabarıq $g(x)$ funksiyaları üçün

$$g(\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B})) \le \mathbf{M}(g(X) \mid \mathfrak{B}).$$

Ş. r. g. üçün aşağıdakı spesifik xassələr doğrudur:

6) əgər $\mathfrak{B} = \{\varnothing, \Omega\}$ trivial σ – cəbr olarsa, onda $\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B}) = \mathbf{M}X$;

7) $\mathbf{M}(X \mid \mathscr{A}) = X$;

8) $\mathbf{M}(\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B})) = \mathbf{M}X$;

9) əgər X, $\mathfrak{B}$ σ – cəbrindən asılı deyildirsə, onda $\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B}) = \mathbf{M}X$;

10) əgər Y $\mathfrak{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçüləndirsə, onda

$$\mathbf{M}(XY \mid \mathfrak{B}) = Y\,\mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B}).$$

Ş. r. g. işarəsi altında yığılma haqqında teorem belə ifadə olunur: əgər $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı $|X_n| \le Y$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathbf{M}Y < \infty$ olarsa və $X_n \to X$ münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, onda $\mathbf{M}(X_n \mid \mathfrak{B}) \to \mathbf{M}(X \mid \mathfrak{B})$ münasibəti sanki yəqin ödənilir.

X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinə nəzərən Ş. r. g. X təsadüfi kəmiyyətinin Y təsadüfi kəmiyyətinin doğurduğu σ – cəbrinə nəzərən Ş. r. g. kimi təyin olunur.

Ş. r. g.-nin xüsusi halı *şərti ehtimaldır.*

Bax, həm də, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М.,1987; [3] Н е в ё Ж.,

Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

ŞƏRTİ SIXLIQ « условная плотность; conditional density » – *şərti paylanmanın* sıxlığıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\mathfrak{B}$ – ədəd oxunun Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathfrak{F}$, – $\mathcal{A}$ -nın alt σ – cəbri,

$$Q(\omega, B) = \mathbf{P}\{X \in B \mid \mathfrak{F}\},\ \omega \in \Omega,\ B \in \mathfrak{B}$$

– X -in $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən şərti paylanması və

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$$

– X -in $\mathcal{F}$ -ə nəzərən şərti paylanma funksiyası olsun. Əgər

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y \mid \mathfrak{F})\, dy$$

olarsa, onda $F_X(x \mid \mathfrak{F})$ X -in paylanmasının $\mathfrak{F}$ σ – cəbrinə nəzərən şərti sıxlığı adlanır.

Əgər X və Y təsadüfi kəmiyyətlər, $f_Y(y)$ Y -in paylanma sıxlığı, $f_{XY}(x, y)$ isə X və Y -in birgə paylanma sıxlığıdırsa,

$$F_X(x \mid Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)}\ f_{XY}(x, y)$$

düsturu Y -in qeyd olunmuş qiymətində X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının Ş. s.-nı təyin edir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

ŞİBATA KRİTERİSİ « Шибаты критерий; Shibata criterion » – bax, *Parametrik model*; tərtibin seçilməsi.

ŞOKE TUTUMU « Шоке емкость; Choquet capacity » – təsadüfi çoxluğun *paylanmasını* verən funksiyadır. Ş. t. elə T tutumudur ki, o, separabel Hausdorf lokal kompakt topoloji E fəzasının bütün altçoxluqlarının çoxluğu $\mathcal{P}(E)$ -də verilmişdir və əlavə aşağıdakı xassəyə də malikdir: əgər $K, K_1, K_2, \ldots$ E -də ixtiyari kompaktlar və

$$S_1(K; K_1) = T(K \cup K_1) - T(K),$$

$$S_n(K; K_1, \ldots, K_n) =$$

$$= S_{n-1}(K; K_1, \ldots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \ldots, K_{n-1}),\ n \geq 2$$

olarsa, onda bütün n, K və K_1 üçün $S_n(K; K_1, \ldots, K_n)$ kəmiyyətləri mənfi deyildirlər. Ş. t. təsadüfi çoxluğun verilməsi üçün əsas vasitələrdən biridir, məs., təsadüfi qapalı çoxluğun *müşayiətedici funksionalı* Ş. t.-dur və o, təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının analoqudur. Əksinə, Ş. t. T $T(\varnothing) = 0$, $0 \leq T \leq 1$ xassəsinə malik olarsa, onda o, hər hansı təsadüfi qapalı çoxluğun müşayiətedici funksionalıdır. Əgər Ş. t. T $T(\varnothing) = 0$, $T(K) < \infty$ (bütün K kompaktları üçün) xassəsinə malik olarsa, onda $1 - \exp(-T)$ ifadəsi *sonsuz bölünən təsadüfi çoxluğun* müşayiətedici funksionalını təyin edir.

Bax, *Tutum.*

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

ŞOVENE KRİTERİSİ « Шовене критерий; Chauvenet test » – bax, *Ekstremal qiymətlər paylanması*, *Fərqli ölçmələrin xaric olunması.*

ŞÖNBERQ TEOREMİ « Шёнберга теорема; Schoenberg theorem » – 1) Hilbert fəzasında kəsilməz müsbət müəyyən, yalnız $\|\cdot\|$ normasından asılı funksiyaların ümumi şəklini təsvir edən teoremdir. $f : \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \to \mathbb{C}$, $f(0) = 1$ – hər hansı kəsilməz funksiya, H – Hilbert fəzası olsun. H – sonluölçülü, $\dim H = n$ olsun. Onda

$$f(\|h\|), \quad h \in H \qquad (*)$$

şəklində funksiyanın H -da müsbət müəyyən funksiya olması üçün f -in

$$f(t) = \Gamma(n/2) \int_{\mathbb{R}^+} \exp(2/ts)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(ts)\, d\nu(s),\ t \in \mathbb{R}^+$$

şəklində olması zəruri və kafidir, burada ν, – $\mathbb{R}^+$ -da hər hansı ehtimal ölçüsü, Γ – Eyler qamma – funksiyası, $J_{(n-2)/2}$, – $(n-2)/2$ tərtib Bessel funksiyasıdır. Əgər H sonsuzölçülən fəza olarsa, onda (*) şəklində funksiyanın H -da müsbət müəyyən funksiya olması üçün f -in

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp\{-t^2 s^2/2\}\, d\nu(s),\quad t \in \mathbb{R}^+$$

şəklində olması zəruri və kafidir, burada ν, – $\mathbb{R}^+$ -da hər hansı ehtimal ölçüsüdür.

2) Müsbət müəyyən və mənfi müəyyən funksiyalar arasında əlaqəni müəyyən edən teoremdir (bax, *Mənfi müəyyən funksiya*).

ŞRÖDİNGER TƏNLİYİ təsadüfi potensiallı **« Шредингера уравнение** со случайным потенциалом; **Schrödinger equation** with random potensial **»** – $L^2(\mathbb{R}^d)$ -də $\Delta + q(x)$ özü-özünə qoşma operatoru və ya onun diskret analoqu ilə təyin olunan tənlikdir; Δ – laplasian, q – erqodik təsadüfi meydandır. Burada əsas məsələ q -nün təsadüfiliyin dərəcəsi və xarakterindən asılı olaraq spektrin təbiəti, əsas yeni effekt özündə sıx nöqtəvi spektrin varlığı və məxsusi funksiyaların eksponensial azalmasıdır (vəziyyətlərin lokalizasiyası). Belə spektrin varlığı haqqında hipotezi fiziklər irəli sürmüşlər və onun varlığı $d = 1$ və hamar Markov potensialı halında isbat olunmuşdur (bax, [5]) (bütün spektr sırf nöqtəvidir), $d = 3$ olduqda diskret halda, asılı olmayan potensialla, hamar sıxlığa malik halda da isbat olunmuşdur.

Əd.: [1] Гольдшейд И. Я., Молчанов С. А., Пастур Л. А., «Функц. анализ и его прилож.», 1977, т. 11, в. 1, с. 1–10; [2] Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А., Введение в теорию неупорядоченных систем, М., 1982; [3] Пастур Л. А., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математич. статистика. Теоретич. кибернетика, т. 25, М., 1987, с. 3–67; [4] Frohlich J., Martinelli F., Scoppola E., Spencer T., «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 101, p. 21–46; [5] Martinelli F., Scoppolla E., «Rivista Nuovo Cimento», 1987, v. 10, № 10, p. 2–90.

ŞTEYNER SİNFİ « Штейнера класс; Steiner class » – *təsadüfi çoxluqlar* nəzəriyyəsində yaranan, Evklid fəzasının kompakt altçoxluqlarının elə xüsusi sinfidir ki, bu sinfin elementi hər bir qabarıq (sıfra nəzərən) simmetrik elə A kompaktıdır ki, onun dayaq funksiyası $f(x) = \sup_{a \in A} (x; a)$ vahid radiuslu Ω sferasında hər hansı müsbət $\mathbf{P}(d\omega)$ ölçüsü üzrə $|(x, \omega)|$-nın inteqralı şəklində göstərilə bilinir. Məs., Ω -nın elementləri ω_k -ların və müsbət p_k çəkilərinin ixtiyari toplusu üçün $\left\{ \sum_k t_k \omega_k : |t_k| \le p_k \right\}$ kompaktı (parçaların vektor cəmi) Ş. s.-nə daxildir, belə ki, onun dayaq funksiyası $\sum_k |(x, \omega_k)| p_k \quad \omega_k$ elementlərində topalanmış P atomar ölçüsü ilə tələb olunan şəkildə ifadə oluna bilinir. İsbat etmək olur ki, bu şəkildə kompaktlarla Ş. s.-nə aid ixtiyari kompaktlar müəyyən mənada yaxınlaşır.

Müstəvidə Ş. s. bütün qabarıq simmetrik kompaktlar sinfi ilə üst-üstə düşür, lakin $\mathbb{R}^3$ -də belə olmur. Kontrmisal: dayaq funksiyası $f(x) = \sup_k |x_k|$ olan $|a_1| + |a_2| + |a_3| \le 1$ oktaedridir.

Ş. s.-nin tərifindəki inteqral ifadənin yeganəliyi onun mühüm xassəsidir, onun ehtimali ifadəsi, məs., belə bir faktdır ki, üçölçülü fəzada düzxətlərin bircins Puasson ansamblı özlərinin ikiölçülü kəsiklərinin intensivliklərilə tamamilə təyin olunurlar.

J. Materonun daxil etdiyi (bax, [1]) Ş. s. qabarıq analizin klassiki Yi. Şteynerin (J. Steiner) adını daşıyır.

Əd.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978.

ŞTRASSEN İNVARİANTLIQ PRİNSİPİ « Штрассена принцип инвариантности; Strassen's strong invariance principle » – bax, *İnvariantlıq prinsipi* sanki yəqin.

ŞTRASSEN TEOREMİ « Штрассена теорема; Strassen theorem » – 1) *Levi – Proxorov metrikası Ki – Fan metrikası* üçün *minimal metrikadır.* Məğzinə görə verilən müddəaya ekvivalent, lakin formaca fərqli müddəa [1]-də F. Ştrassen tərəfindən isbat olunmuşdur.

2) Bax, *Bir ehtimal fəzası metodu*, *Kolmoqorov teoremi* seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında.

ŞTRASSEN TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « Штрассена закон повторного логарифма; Strassen's law of the iterated logarithm » – bax, *Təkrar loqarifm qanunu* empirik ölçülər üçün.

ŞUR İFADƏSİ MATRİSİN « Шура представление матрицы; Schur's representation of matrix » – bax, *Qeyri – simmetrik təsadüfi matris.*

ŞVARS BƏRABƏRSİZLİYİ « Шварца неравенство; Schwarz inequality » – bax, *Bunyakovski bərabərsizliyi.*

ŞVARS – RİSSANEN KRİTERİSİ « Шварца – Риссанена критерий; Schwarz – Rissanen criterion » – bax, *Parametrik model*; tərtibin seçilməsi.

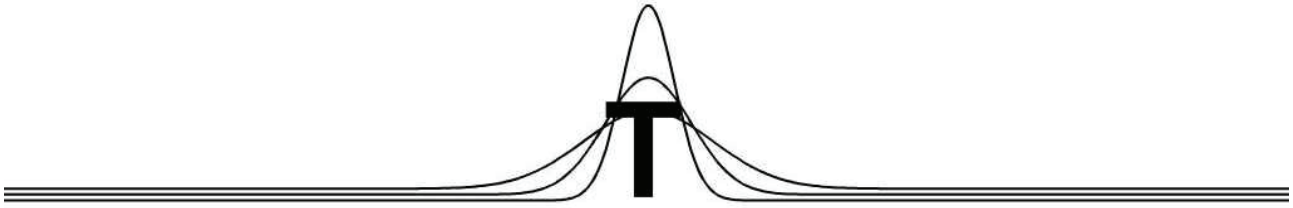
ŞVİNGER FUNKSİYASI « Швингера функция; Schwinger function » Evklid kvant meydan nəzəriyyəsində – fəzanın müxtəlif nöqtələrində meydanın qiymətlərinin orta qiymətidir. Daha dəqiq,

$$\left\langle \xi_{a_1}(\varphi_1) \cdot \ \dots \cdot \xi_{a_n}(\varphi_n) \right\rangle \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \int\limits_{(\mathbb{R}^4)^n} S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \varphi_1(x_1) \ \dots \ \varphi_n(x_n) d^4 x_1 \dots d^4 x_n$$

şəklində yarıxətti formalar nisbətən artan $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ ümumiləşmiş funksiyalarını təyin edir və bu funksiyalar $\{ \xi_\alpha(x), x = (x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \}$ Evklid fəzasının Şvinger funksiyaları adlanır, burada α – spinor və ya vektor indeksidir. Burada $\xi_\alpha(\varphi)$, – $\mathfrak{A}$ meydan cəbrinin (və ya supercəbrinin) doğuranıdır, $\varphi \in S(\mathbb{R}^4)$, $\langle \cdot \rangle$, – $\mathfrak{A}$ -da Evklid meydanını verən vəziyyətdir. Ş. f. $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n)$ -in $x_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$ dəyişənləri üzrə xəyali oxa davamı $\mathcal{M}^4$ Minkovski fəzasında uyğun kvant meydanının *Uaytman funksiyaları* ilə üst-üstə düşür.

Əd.: [1] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Глимм Дж., Джаффе А., Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов, пер. с англ., М., 1984.



TABE STATİSTİKA « подчиненная статистика; subordinate statistic » – digər statistikanın funksiyası olan *statistikadır*. T. s. həmin statistikaya tabedir. Məs., minimal kafi statistika ixtiyari kafi statistikaya nəzərən T. s.-dır.

T. s. termini olduqca az istifadə olunan termindir.

TAM AİLƏSİ, PAYLANMALARIN « полное семейство распределений; complete family of distributions » – elə *paylanmalar* ailəsidir ki, bu ailə üçün sıfrın qeyri – trivial meylsiz statistik qiyməti yoxdur. Paylanmaların məhdud T. a. elə paylanmalar ailəsidir ki, bu ailə üçün sıfrın qeyri – trivial məhdud meylsiz statistik qiyməti yoxdur.

Əgər $T:(\mathscr{X},\ \mathfrak{A})\to(\mathscr{T},\ \mathfrak{B})$ $(\mathscr{X},\mathfrak{A})$-da paylanmalar ailəsi $\mathscr{P}=\{\mathbf{P}_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ üçün kafi statistikadırsa və bu statistikanın doğurduğu, $(\mathscr{T},\ \mathfrak{B})$-də paylanmalar ailəsi $\mathscr{P}_T$ P. t. a.-dirsə, onda $\mathscr{P}$ ailəsi T-yə nəzərən paylanmaların tam ailəsi, T isə $\mathscr{P}$ ailəsi üçün tam statistikadır, deyilir. T-yə nəzərən P. t. a. üçün yalnız T-dən asılı statistik qiymətlər sinfində verilən parametrik funksiyanın ən böyük meylsiz statistik qiyməti birdən artıq deyildir, odur ki, belə ailə üçün Rao – Blekuell teoremi ən yaxşı meylsiz qiymətləndirmə məsələsini tamamilə həll edir. T-yə nəzərən məhdud P. t. a. üçün oxşar oblast Neyman strukturludur, yəni onun indikatoru kafi T statistikasından asılı deyildir (bax, [1]).

Kobud deyildikdə, T kafi statistikasının dim. – ölçüsü Θ parametrik çoxluğunun dim. – ölçüsünə bərabər olarsa, onda $\mathscr{P}$ T-yə nəzərən P. t. a.-dir, adətən, birinci dim. – ölçü böyük olur. P. t. a. konsepsiyası E. Leman və Q. Şeffe tərəfindən [2]-də daxil olunmuşdur.

Bax, *Eksponensial ailəsi, paylanmaların.*

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Lehmann E. L., Scheffe H., «Sankhya», 1950, v. 10, № 4, p. 305–40; 1955, v. 15, № 3, p. 219–36.

TAM BEYES YANAŞMASI « полный бейесовский подход; full Bayes approach » – bax, *Beyes kriterisi.*

TAM BLOK PLANI « полный блочный план; complete block design » – bax, *Dispersion analiz.*

TAM EHTİMAL DÜSTURU « полной вероятности формула; total probability formula » – hadisənin şərtsiz ehtimalını *bölgü* təşkil edən hadisələrə nəzərən hesablamaq üçün münasibətdir.

$(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, $H_1, H_2, \ldots, H_n\in\mathscr{A}$ – aşağıdakı şərtləri ödəyən hadisələr olsun:

1) $i\neq j$ olduqda $H_i\cap H_j\neq\varnothing$, $i, j=1, 2, \ldots, n$,

2) $\bigcup_{k=1}^{n} H_k=\Omega$ (yəqin hadisə) və bütün k-lar üçün $\mathbf{P}(H_k)>0$ olsun. Onda ixtiyari $A\in\mathscr{A}$ üçün

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A\,|\,H_k)\cdot\mathbf{P}(H_k)$$

düsturu tam ehtimal düsturu adlanır. T. e. d. $H_1, H_2, \ldots$ hadisələri sonsuz sayda olduqda da doğrudur.

Riyazi gözləmələr üçün də tam ehtimal düsturu vardır. $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$, $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathbf{P})$-də təsadüfi kəmiyyət olsun, $\mathbf{M}X$ – onun riyazi gözləməsi, $\mathbf{M}(X\,|\,H_k)$ – bölgü təşkil edən H_k hadisələrinə nəzərən şərti riyazi gözləmələr olsun. Onda

$$\mathbf{M}X=\sum_{k}\mathbf{M}(X\,|\,H_k)\mathbf{P}(H_k).$$

TAM EHTİMAL FƏZASI « полное вероятностное пространство; complete probability space » – bax, *Ehtimal fəzası.*

TAM FAKTOR EKSPERİMENT « полный факторный эксперимент; complete factorial experiment » – bax, *Faktor eksperiment.*

TAM FAKTOR PLAN « полный факторный план; complete factorial design » – bax, *Planlaşdırılması, eksperimentin.*

***TAM İŞLƏMƏ MÜDDƏTİ « полная суммарная наработка; complete working time »** – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

***TAM QƏRƏZSİZ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARDICILLIĞI « абсолютно беспристрастная последовательность случайных величин; absolutely impartial sequence of random variables »** – $\mathbf{M}\xi_1=0$ və ixtiyari $n=1, 2, \ldots$ qiymətləri üçün $\mathbf{M}(\xi_{n+1}\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$ şərtlərini ödəyən, $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığına deyilir. T. q. t. k. a.-nın xüsusi cəmləri $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ *martinqal* təşkil edir. $\{\xi_n\}$ və $\{S_n\}$ ardıcıllıqları arasında aşağıdakı qaydada əlaqə yaradılır: $\{\xi_n\}$ tam qərəzsiz ardıcıllıq olarsa, $\{S_n^*\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının elementləri isə, yalnız və yalnız, $S_n^*=\xi_1+\ldots+\xi_n+c$ ($n=1, 2, \ldots$ və $c=\mathbf{M}S_1^*$ – sabitdir) münasibətilə təyin olunarsa, $\{S_n^*\}$ ardıcıllığı martinqal təşkil edir. Beləliklə, bütün martinqallar müəyyən T. q. t. k. a.-larının xüsusi cəmləri ilə əlaqəlidir. Riyazi gözləməsi sıfır olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı T. q. t. k. a.-na sadə bir misaldır. Rus ədəbiyyatında

«беспристрастная» termini ilə yanaşı qərəzsiz oyunlarla bağlı «безобидная» termini də işlədilir.

Əd.: [1] Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977.

***TAM QƏRƏZSİZLİK « абсолютная беспристрастность; absolute impartiality »** – $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $\xi_1, \xi_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün $\mathbf{M}\xi_1 = 0$ və ixtiyari $n = 1, 2, \ldots$ qiymətlərində $\mathbf{M}(\xi_{n+1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ münasibətlərilə ifadə olunan xassəyə deyilir; bu halda, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tam qərəzsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı adlanır (bax, *Tam qərəzsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı*) .

TAM QRUPU, HADİSƏLƏRİN « полная группа событий; partition complete set of disjoint events » – elementar hadisələrin fəzasının *bölgüsüdür* (bax, *Uyuşmayan hadisələr*).

TAM LATIN KVADRATI « полный латинский квадрат; complete Latin square » – bax, *Latın kvadratı.*

TAM ÖLÇÜ « полная мера; complete measure » – bax, *Davamolunması, ölçünün.*

TAM p – PLAN « полный p – план; complete p – design » – bax, *Dispersion analiz.*

TAM RANDOMLANDIRILMIŞ PLAN « полный рандомизированный план; complete randomized design » – bax, *Blok planı.*

TAM RİSK « полный риск; total risk » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

TAM SİNİF(fi) kriterilərin « полный класс критериев; complete class of tests » – bax, *Statistik kriteri*; tam sinif.

TAM STATİSTİKA « полная статистика; complete statistic » – sıfrın trivial meylsiz statistik qiymətlərini doğuran *statistikadır*. Daha dəqiq, əgər $\theta \in \Theta$ olduqda $\mathbf{M}_\theta \psi(T) \equiv 0$ (və ψ-nin məhdud olduğu halında $\psi = 0$) bərabərliyi $\mathbf{P}_\theta$ – sanki yəqin ödənilərsə, T statistikası $\mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ paylanmalar ailəsi üçün tam statistikadır (məhdud tam statistika) deyilir. Həmçinin $\mathscr{P}$ T-yə nəzərən paylanmaların tam ailəsidir, deyilir.

T statistikasının tamlığı konsepsiyası T kafi statistika olduqda səmərəli olur. $\mathscr{P}$ ailəsinin tam (məhdud tam) kafi statistikaya malik olması bu ailə üçün iki mühüm məsələni həll etməyə imkan verir: 1) Rao – Blekuell teoreminin köməyilə verilən parametrik funksiyanın (əgər bu funksiyanın hər hansı meylsiz statistik qiyməti olarsa) ən yaxşı meylsiz statistik qiymətini qurmaq və 2) bütün oxşar oblastı təsvir etmək.

Əgər kafi statistika tam statistikadırsa, onda o, həm də minimal kafi statistikadır, odur ki, bu statistika vasitəsilə seçimi verilənlər maksimal mümkün olan surətdə reduksiya olunur (sadələşdirilir).

T. s. konsepsiyası E. Leman və H. Seffeyə məxsusdur (bax, [3]).

Əd.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Lehmann E. L., Theory of point estimation, v. 1–2, N. Y., 1983; [3] Lehmann E. L., Scheffe H., «Sankhya», 1950, v. 10, № 4, p. 305–40; 1955, v. 15, № 3, p. 219–36.

TAM STOXASTİK BAZİS « полный стохастический базис; complete stochastic basis » – bax, *Stoxastik bazis.*

TAM VARİASİYA « полная вариация; total variation » – bax, *Variasiya*(sı) ölçünün.

TAM VARİASİYA METRİKASI « полный вариации метрика; total variation metric » – sadə ehtimal metrikasıdır və

$$\sigma(X, Y) = \sup \{ \left| \mathbf{P}_X(A) - \mathbf{P}_Y(A) \right| : A \in \mathfrak{B} \}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\mathbf{P}_X$ – hər hansı separabel (U, d) metrik fəzasından qiymətlər alan X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması, $\mathfrak{B}$, – U-nun bütün Borel çoxluqlarının sistemidir. T. v. m.-nın ən mühüm xassələri:

1) T. v. m. təsadüfi kəmiyyətlərin eyni çoxluq üçün təyin olunmuş *indikator metrikasına* nəzərən *minimal metrikadır*.

2) ixtiyari ölçülən $\Psi : U \to U$ inikası və ixtiyari X, Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$\sigma(\Psi(X), \Psi(Y)) \le \sigma(X, Y) \qquad (*)$$

və Ψ qarşılıqlı birqiymətli inikas olduqda (*)-da bərabərsizlik işarəsi bərabərlik işarəsi ilə əvəz olunur.

3) T. v. m. Levi – Proxorov metrikası ilə $\pi \le \sigma$ bərabərsizliyi ilə əlaqəlidir.

4) $U = \mathbb{R}^n$ olduğu halda T. v. m.-nın

$$\sigma(X, Y) = \frac{1}{2} \int \left| dF_X(x) - F_Y(x) \right|$$

kimi ifadələri məlumdur, F_X, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır; $\sigma(X, Y) = \sup \{ \left| \mathbf{M}g(X) - \mathbf{M}g(Y) \right| : g$ – kəsilməzdir, $0 \le g \le 1 \}$; X təsadüfi kəmiyyətinin xarakteristik funksiyalar terminlərində yuxarı qiymətləri (Berlinq bərabərsizlikləri)

$$\sigma^2(X, Y) \le \int \left(\left| a(t) \right|^2 + \left| a'(t)^2 \right| \right) dt \ ,$$

$$\sigma(X, Y) \le \int_0^\infty t \left| da'(t) \right|$$

bərabərsizlikləri ilə təyin olunur, burada $a(t) = f_X(t) - f_Y(t)$.

T. v. m.-nın konstruksiyası müxtəlif güclü topologiyalar doğuran metrikaların geniş toplusunu almağa imkan verir. Bu $\mathfrak{B}$-nin çoxluqlarının o qədər də zəngin olmayan sistem ilə əvəz olunması sayəsində həyata keçirilir. Məs., $U = \mathbb{R}^1$ olduqda $\mathfrak{B}$-ni $\{t < x : x \in \mathbb{R}^1\}$ yarımoxlar sistemi ilə əvəz etdikdə *müntəzəm metrika* alınır.

Əd.: [1] Золотарев В. М., Современная теория суммирования случайных величин, М., 1986.

TAM YIĞILMA « полная сходимость; complete convergence » – bax, *Yığılma* tamamilə.

TAMAMİLƏ ADDİTİV ÇOXLUQLAR FUNKSİYASI « вполне аддитивная функция множеств; completely additive set function » – adətən, *hesabi – additiv çoxluqlar funksiyası* kimi təyin olunur. Lakin ölçü nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərində T. a. ç. f. anlayışına bəzən ayrı məna verilir. Daha dəqiq, α – ixtiyari sonsuz kardinal ədəd, μ – hər hansı (müsbət) σ – sonlu ölçü olsun. Əgər indekslərinin çoxluğunun gücü

α-nı aşmayan [yəni $\mathrm{card}(\mathbf{I}) \leq \alpha$] μ – ölçülən $(X_i)_{i\in\mathbf{I}}$ çoxluqlarının dizyunkt ailəsinin nə cür olmasından asılı olmayaraq

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbf{I}} X_i\right) = \sum_{i\in\mathbf{I}} \mu(X_i)$$

bərabərliyi doğru olarsa, onda μ α – additiv ölçü adlanır. Baxılan $(X_i)_{i\in\mathbf{I}}$ ailəsinin birləşməsinin μ – ölçülən çoxluq olduğu həmişə fərz olunur. Nəhayət, ixtiyari sonsuz kardinal α ədədi üçün μ ölçüsü (çoxluq funksiyası kimi baxılan) α – additiv ölçü olarsa, μ tamamilə additiv ölçü adlanır.

Tamamilə additiv ölçülərə (baxılan mənada) ən sadə misallar Dirak ölçüləridir. Bu ölçülər aşağıdakı kimi təyin olunur. X – boş olmayan əsas bazis fəzası, x , – X -in ixtiyari nöqtəsi olsun. X fəzasının bütün hissələrinin çoxluğunda

$$\delta_x(Y) = \begin{cases} 1, & \text{əgər } x\in Y, \\ 0, & \text{əgər } x\notin Y \end{cases} \qquad (Y\subset X)$$

münasibətilə δ_x funksionalı təyin olunur. Onda δ_x funksionalı tamamilə additiv ehtimal ölçüsüdür və δ_x , – $x\in X$ nöqtəsinə müvafiq Dirak ölçüsü adlanır.

T. a. ç. f. anlayışını Bul cəbrləri üçün də daxil etmək olar (bu anlayış tam Bul cəbrləri nəzəriyyəsində xüsusi əhəmiyyətə malik olur) .

TAMAMİLƏ ADDİTİV ÖLÇÜ « вполне аддитивная мера; completely additive measure » – bax, *Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası*.

TAMAMİLƏ KƏSİLƏN additiv funksional **« вполне разрывный** аддитивный функционал; **totally discontinuous** additive functional **»** – bax, *Markov prosesi*; additiv funksional.

TAMAMİLƏ MÜSBƏT İNİKAS « вполне положительное отображение; completely positive mapping » – C^* – cəbri $\mathfrak{A}$ -nun C^* – cəbri $\mathfrak{B}$ -yə, ixtiyari natural n və ixtiyari $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{A}$, $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{B}$ üçün

$$\sum_{i,j=1}^{n} Y_i^* \Phi(X_i^* X_j)\, Y_j \geq 0$$

şərtini ödəyən inikasıdır. Əgər $\mathfrak{A}$ və $\mathfrak{B}$ kommutativ cəbrlərdirsə, tamamilə müsbət inikas müsbət inikasa ekvivalentdir: əgər $X \geq 0$ olarsa, $\Phi(X) \geq 0$. Müsbət inikas olan, lakin T. m. i. olmayan inikasa misal: bütün kompleks kvadrat matrislərin * – cəbrində transponirlənmədən alınan inikasdır. T. m. i.-ın strukturu belə bir teoremlə aydın olur: hər bir T. m. i. * – homomorfizmi və şərti riyazi gözləmənin kompozisiyasıdır (bax, [1]). Bu fakt *kvant dinamik semi – qruplarının* qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsində genişləndirilmiş konstruksiyasının əsasını təşkil edir (bax, [2]) . Tamamilə müsbətlik anlayışı *kvant təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Stinespring W., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, p. 211–16; [2] Størmer E., «Acta math.», 1963, v. 110, № 3/4, p. 233–78.

TAMAMİLƏ NORMAL FƏZA « совершенно нормальное пространство; completely normal space » – elə $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ topoloji fəzasıdır ki, ixtiyari $G\in\mathfrak{G}$ açıq çoxluğu üçün $\mathscr{X}$ -də elə kəsilməz f funksiyası vardır ki, bu funksiya üçün $G = \{x : f(x) > 0\}$. Bu tərif «adi» topoloji fəzalar və σ – topoloji fəzalar üçün də eynidir. Aşağıdakı müddəa yalnız σ – topoloji fəzalar üçün doğrudur. Əgər $\mathscr{G}$ ixtiyari $\mathscr{X}$ çoxluğunda funksiyaların hər hansı sinfidirsə və $\mathfrak{G}$ $\mathscr{G}$ -dən olan bütün funksiyaların kəsilməz olduğu ən zəif σ – topologiyadırsa, onda $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ T. n. f.-dır.

Əd.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–628; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [3] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

TAMAMİLƏ ÖLÇÜLƏN PROSES « вполне измеримый процесс; well measurable / optional process », opsional proses, – tamamilə ölçülən çoxluqların σ – cəbrinə nəzərən ölçülənlik xassəsinə malik olan *təsadüfi prosesdir*. Bu proses aşağıdakı kimi təyin olunur. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – tam ehtimal fəzası, $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ – tam σ – cəbrlərin sağdan kəsilməz axını olsun. $A\in\mathscr{A}_0$ olduqda $\{0\}\times A$ şəkilli və $0\leq s<t$, $A\in\mathscr{A}_s$ olduqda $[s, t)\times A$ şəkilli bütün çoxluqları özündə saxlayan $\mathbb{R}_+\times\Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbri tamamilə ölçülən çoxluqların σ – cəbri adlanır və $\mathfrak{M}$ simvolu ilə işarə olunur. Bu σ – cəbr proqressiv ölçülən çoxluqların σ – cəbrinə daxildir və: 1) $[[\sigma, \tau[[$ tipli bütün stoxastik intervalları özündə saxlayan, $\mathbb{R}_+\times\Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbri ilə; 2) bütün həqiqi, uzlaşdırılmış sağdan kəsilməz və sol limitləri olan proseslərin ölçülənliyi $\mathbb{R}_+\times\Omega$ fəzasının altçoxluqlarının minimal σ – cəbrinə nəzərən təmin olunan σ – cəbr ilə üst-üstə düşür. $(\mathbb{R}_+\times\Omega, \mathfrak{M})$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikası $X(\cdot, \cdot)$ proses olarsa, $(M, \mathfrak{B})$ faza fəzasında $(X(t))_{t\geq 0}$ prosesi tamamilə ölçülən proses adlanır.

Bax, *Martinqal*.

Əd.: [1] Деллашери К., Емкость и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, М., 1985.

TAMAMİLƏ ÖLÇÜLƏN PROYEKSİYASI, PROSESİN « вполне измеримая проекция процесса; optional / well measurable projection of a process », $X(t)$ prosesinin (həqiqi, məhdud və ya mənfi olmayan, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ tam ehtimal fəzasında $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ tam σ – cəbrlərinin sağdan kəsilməz axını ilə verilən və bu axınla uzlaşmayan da ola bilən) tamamilə ölçülən proyeksiyası – $(\mathscr{A}_t)_{t\geq 0}$ axınına nəzərən tamamilə ölçülən elə $^0X(t)$ prosesidir ki, hər bir Markov momenti τ üçün

$$\mathbf{M}\, X(\tau)\, I_{\{\tau<+\infty\}} = \mathbf{M}^0 X(\tau) I_{\{\tau<+\infty\}}$$

bərabərliyi doğrudur.

Məhdud (və ya mənfi olmayan) P. t. ö. p. vardır və birqiymətli təyin olunur. Bu halda ixtiyari Markov momenti τ üçün

$$^{0}X(\tau)I_{\{\tau<+\infty\}} = \mathbf{M}\{X(\tau)I_{\{\tau<+\infty\}}\big|\mathscr{A}_{\tau}\}$$

bərabərliyi doğrudur.

Əd.: [1] Д е л л а ш е р и К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

TAMAMİLƏ TƏSADÜFİ ARDICILLIQ « абсолютно случайная последовательность; absolutely random sequence » – bax, *Diskret bəyaz küy.*

TAMAMLANMA « пополнение; completion » – bax, *Minkovski əməlləri.*

TAMAMLANMA(sı) ehtimal fəzasının **« пополнение** вероятностного пространства; **completion** of a probability space**»** – bax, *Ehtimal fəzası.*

TAMAMLANMA(sı) ölçünün **« пополнение** меры; **completion** of a measure **»** – əvvəlcədən verilmiş ixtiyari bir ölçünün təyin olunma oblastını genişləndirərək, genişləndirilmiş oblastda bu ölçünü tam ölçüyə qədər davam etdirmək üçün tətbiq edilən elə konstruktiv prosesdir ki, verilmiş ölçünün təyin olunma oblastının genişləndirilməsi hər birinin əvvəlki ölçüsü sıfra bərabər olan bütün çoxluqlar hesabına aparılır.

(X, S, μ) ölçülü fəza olsun; $\overline{S}$ isə əsas bazis çoxluğu X-in hissələrindən təşkil olunmuş elə sinifdir ki, onun elementləri $(A \cup A_1) \setminus A_2$ şəklindədir, belə ki, $A \in S$, A_1 və A_2 elə $N_1 \in S$ və $N_2 \in S$ çoxluqlarının hissələridir ki, bunlar üçün $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$. İxtiyari $(A \cup A_1) \setminus A_2$ şəklində çoxluğu həm $B \cup B_1$ və həmçinin $C \Delta C_1$ şəklində göstərmək mümkündür, burada $B \in S$, $C \in S$, B_1 və C_1 elə $N_3 \in S$ və $N_4 \in S$ çoxluqlarının altçoxluqlarıdır ki, bu çoxluqlar üçün $\mu(N_3) = \mu(N_4) = 0$. X əsas bazis çoxluğunun hissələrinin $\overline{S}$ sinfi σ – halqadır və ilkin S σ – halqasını özündə saxlayır. $\overline{S}$ σ – halqasında $\overline{\mu}[(A \cup A_1) \setminus A_2] = \mu(A)$ bərabərliyi vasitəsilə, korrekt surətdə, həqiqiqiymətli $\overline{\mu}$ funksionalı təyin olunur və $\overline{\mu}$ tam ölçü olub, ilkin μ ölçüsünün davamıdır. $\overline{\mu}$-nün tam ölçü olması belə anlaşılır ki, $Y \in \overline{S}$ & $\mu(Y) = 0$ & $Z \subset Y$ münasibətindən $Z \in S$ & $\overline{\mu}(Z) = 0$ münasibəti həmişə alınır.

$\overline{\mu}$ ölçüsü μ ölçüsünün tamamlanması, yuxarıda şərh olunmuş proses isə μ ölçüsünün standart tamamlanma prosesi adlanır.

Ehtimalın konstruksiyasına əsasən, ehtimal yalnız Borel çoxluqlarında təyin olunmuş ölçüdür. Hər bir Borel çoxluğunun isə, ümumiyyətlə, çoxlu sayda Borel çoxluğu olmayan altçoxluqları vardır. Ehtimalı sıfır olan çoxluğu – sıfır çoxluğu, adətən, nəzərə almamaq olar (sıfır çoxluqda bir-birindən fərqli təsadüfi kəmiyyətlər praktik olaraq «üst-üstə düşür» və bu təsadüfi kəmiyyətlər formal olaraq «ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər» adlanır). Deməli, sıfır çoxluğun elə altçoxluqları ola bilər ki, bu altçoxluqlarda ehtimallar təyin olunmamışdır və bu zaman təbiidir ki, sıfır çoxluğunun hər bir altçoxluğunun da sıfır çoxluq olduğunu gözləmək olar. Bu uyğunsuzluğu aradan qaldırmaq məqsədilə, belə bir postulat daxil etmək olar: əgər $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ və $\mathbf{P}\{\mathbb{B}\} = 0$ olarsa, onda $\mathbf{P}\{\mathbb{A}\} = 0$.

Verilmiş $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının *Lebeq tamamlanması* – Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathscr{F}$ σ – cəbrinin bütün çoxluqlarını və bu çoxluqların bütün sıfır altçoxluqlarını (heç olmazsa) özündə saxlayan minimal $\mathscr{F}_1$ σ – cəbrinə qədər genişləndirilməsidir; bu yuxarıda qeyd olunmuş postulata əsaslanır. Yəni A çoxluğu $\mathscr{F}_1$-ə, yalnız və yalnız, o vaxt daxildir ki, bu çoxluq hər hansı bir $\mathbb{A}^{\circ} \in \mathscr{F}$ olan $\mathbb{A}^{\circ}$ Borel çoxluğundan sıfır çoxluqla fərqlənsin. Başqa sözlə, $A \setminus (A \cap \mathbb{A}^{\circ})$ və $\mathbb{A}^{\circ} \setminus A \cap \mathbb{A}^{\circ}$ çoxluqlarının hər ikisi eyni bir sıfır çoxluğun tərkibində olsun. Bu halda ehtimalın təyin olunma oblastını $\mathscr{F}$-dən $\mathscr{F}_1$-ə qədər davam etdirmək olur: sadəcə olaraq, ixtiyari $A \in \mathscr{F}_1$ üçün $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\mathbb{A}^{\circ})$ qəbul edilir. Asanlıqla isbat olunur ki, bu qayda ilə alınmış ölçü $\mathscr{F}_1$-də yeganə və additiv ölçü olur. Beləliklə, klassik Lebeq ölçüsünə (l-ə) klassik Borel ölçüsünün (b-nin) tamamlanması kimi baxmaq olar. Məs., $\mathscr{B}$ həqiqi oxun bütün Borel çoxluqları sinfi, $\mathscr{L}$ həqiqi oxun Lebeq mənada ölçülən bütün çoxluqları sinfi olarsa, onda $\overline{\mathscr{B}} = \mathscr{L}$ və $\overline{b} = l$ yazmaq olar.

Bax, *Davamolunması*, *ölçünün.*

Əd.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1984.

TAMAMLANMA PRİNSİPİ « дополнительности принцип; complementarity principle » – bax, *Qeyri – müəyyənliklər münasibəti.*

TAMAMLAYICI HADİSƏ A hadisəsinə **« дополнительное событие** к событию A; **complement (negation)** of the event A **»** – yalnız və yalnız eksperimentdə müşahidə oluna bilən A hadisəsi baş verməlikdə baş verən hadisədir. A hadisəsinə T. h., A hadisəsinə əks olan hadisə kimi də adlanır və hadisə $\overline{A}$ kimi işarə olunur. $\overline{A}$ A-nın inkarı kimi oxunur. $A \subset \Omega$ olduqda $\overline{A} \subset \Omega$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ olduğundan

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$$

münasibəti həmişə doğrudur.

TAMGİRİŞLİ XİDMƏT SİSTEMİ « полнодоступная система обслуживания; fully accessible queueing system » – bax, *Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi.*

TAMLIĞI, FUNKSİYALAR SİNFİNİN Hausdorfa görə **« полнота класса функций** по Хаусдорфу; Hausdorff **completeness of a class of functions »** – funksiyalar sinfini müntəzəm yığılmaya nəzərən qapalı vektor cəbrinə və vektor şəbəkəsinə çevirən xassədir. X çoxluğunda verilən funksiyalar sinfi $\mathscr{G}$

1) $\text{const} \in \mathscr{G}$;

2) $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ olduqda, $g_1 + g_2 \in \mathscr{G}$, $g_1 g_2 \in \mathscr{G}$ və əgər bütün $x \in X$-lər üçün $g_2(x) \neq 0$ olarsa, onda $g_1/g_2 \in \mathscr{G}$;

3) $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ olduqda, $\max\{g_1(x), g_2(x)\} \in \mathscr{G}$;

4) əgər $g_n \in \mathscr{G}$ və $g_n \to g$ münasibəti X-də müntəzəm ödənilərsə, $g \in \mathscr{G}$;

şərtlərini ödəyərsə, $\mathcal{G}$ sinfi Hausdorfa görə tam sinif adlanır.

Hausdorfa görə tam siniflərin əsas xassəsi *Hausdorf teoremilə* təyin olunur.

Əd.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с англ., М. – Л., 1937; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук»,1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

TANINILMASI / MÜƏYYƏN OLUNMASI, OBRAZLARIN « распознование образов; pattern recognition » – tədqiq olunan obyektdə bilavasitə ölçülən xarakteristikaların (əlamətlərin, dəyişənlərin) qiymətləri toplusu üzrə verilən obyektin hər hansı siniflər (obrazlar) çoxluğundan hansı sinfə mənsub olmasını müəyyənləşdirmək üçün prosedurdur. O. t. *həlledici qayda* vasitəsilə aparılır, bu prosedur *çoxölçülü müşahidələrin* nömrələr çoxluğuna və ya siniflərin (obrazların) adları çoxluğuna inikasından ibarətdir.

TAUBER TEOREMLƏRİ « Тауберовы теоремы; Tauberian theorems », Tauber tipli teoremlər, – hər hansı bir funksiyanın Laplas çevirməsi üzrə onun asimptotikasının təyin olunması kimi interpretasiya oluna bilən müddəalar toplusudur. T. t. *Abel teoremlərinə* nəzərən tərs teoremlərdir. «T. t.» termini Q. Hardi (G. Hardy) və C. Litlvud (J. Littlewood) tərəfindən daxil olunmuşdur və bu növ ilk teorem A. Tauberə məxsusdur (bax, [1], həm də aşağıda misal 2).

Misal 1. $\alpha > 0,\ s > 0$ olsun. Onda

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha) \big/ s^\alpha$$

bərabərliyi doğrudur. $f(x)$ – mənfi olmayan, ixtiyari sonlu intervalda mütləq inteqrallanan, ixtiyari s qiymətində Laplas çevirməsi –

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

təyin olunmuş funksiya olsun. Məlumdur ki, $s \downarrow 0$ olduqda

$$L(s) \sim \Gamma(\alpha) \big/ s^\alpha \qquad (1)$$

münasibəti doğrudur. $x \to \infty$ olduqda $f(x)$ haqqında nə cür mülahizə yürütmək olar? sualını qoymaq olar.

f -in monoton olması haqqında əlavə fərziyyə edilərsə, onda (1)-dən

$$f(x) \sim x^{\alpha-1}, \quad x \to \infty \qquad (2)$$

münasibəti alınır. Bu əlavə fərziyyə yerinə yetirilməsə, onda yalnız hökm etmək olar ki, $x \to \infty$ olduqda

$$\int_0^x f(u)du \sim \int_0^x u^{\alpha-1} du = x^\alpha \big/ \alpha \qquad (3)$$

münasibəti doğrudur. Bu hökmlərin hər ikisi T. t.-nə misaldır.

Misal 2.

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

olsun, belə ki, bərabərliyin sağ tərəfindəki sıranın $|z| < 1$ olduqda yığıldığı fərz olunur. Məlumdur ki, $z \uparrow 1$ olduqda

$$g(z) \to A. \qquad (4)$$

Əgər a_n -lər mənfi olmazlarsa, onda (4)-dən alınır ki, $\sum a_n$ sırası yığılır və onun cəmi A -ya bərabərdir.

$$g(z) = 1/(1+z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^n$$

funksiyası bir misal olaraq onu göstərir ki, a_n əmsalları ardıcıllığına heç bir məhdudiyyət olmasa $\sum a_n$ sırasının yığılması mümkün olmaya bilər [T. t.-nin qüvvət üstlü sıralar haqqında ilkin variantında $n a_n = o(1)$ fərziyyəsindən istifadə edilmişdi].

Misal 2 ilə misal 1 arasında əlaqə aşağıdakı kimi müəyyən oluna bilər. $0 < z < 1$ olduqda $z = e^{-s}$ götürərək və $x \geq 0$ olduqda

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

bərabərliyi ilə $G(x)$ funksiyası daxil edərək, ilkin fərziyyəni aşağıdakı şəkildə yazmaq olar: $s \downarrow 0$ olduqda

$$f(e^{-s}) = s \int_0^\infty e^{-sx} G(x)\, dx \to A.$$

(1)-dəki mülahizəyə uyğun olaraq (a_n -lərin mənfi olmadıqları halında), $x \to \infty$ olduqda $G(x) \to A$ münasibəti ödənilir, bu isə $\sum a_n$ sırasının A -ya yığılmasını ifadə edir.

T. t. və onların ehtimal nəzəriyyəsində tətbiqi [2]-nin 13-cü fəslində ətraflı müzakirə olunur. Bu fəslə girişdə doğru olaraq qeyd olunmuşdur ki, əsas T. t.-nə «tam hüquqla» «riyazi analizin incisi» kimi baxmaq olar. Yeri gəlmişkən qeyd olunmalıdır ki, «sadə ədədlərin paylanmasının asimptotik qanunu» adlandırılan qanunun isbatı məhz T. t.-indən birinə əsaslanır (bax, [3]) .

T. t.-inin isbatı, adətən, olduqca çətindir. Bu halda aydınlıq gətirən mümkün variantlardan biri ölçülərin zəif yığılma anlayışının istifadə edilməsidir. Misal 1-in şərtlərində bunu aşağıdakı kimi etmək olar. İlkin fərziyyəni aşağıdakı kimi yazaraq; yəni $s \to 0$ olduqda

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \sim \int_0^\infty e^{-sx} x^{\alpha-1}\, dx \qquad (5)$$

və sonra bu münasibətdə $sx = (m+1)/n$ qəbul edərək (m – mənfi olmayan qeyd olunmuş tam ədəddir), $n \to \infty$ götürərək və x dəyişənini $e^{-x/n} = u$ qaydası ilə u dəyişəni ilə əvəz edərək (yəni $x = n \ln 1/u$ götürərək) nəticə kimi aşağıdakı müddəanı almaq olur: ixtiyari $m = 0, 1, 2, \ldots$ qiymətlərində və $n \to \infty$ olduqda

$$\int_0^1 u^m \mathbf{P}_n(du) \to \int_0^1 u^m \mathbf{P}(du), \qquad (6)$$

burada $\mathbf{P}_n$ və $\mathbf{P}$, – $[0, 1]$ parçasında sonlu ölçülərdir və bunların sıxlıqları uyğun olaraq, $(1/n^{\alpha-1}) f(n \ln 1/u)$ və $(\ln 1/u)^{\alpha-1}$ funksiyalarıdır. (6) momentlərinin yığılmasından $\mathbf{P}_n$ ölçülərinin

$\mathbf{P}$ -yə zəif yığılması, bu yığılmadan isə inteqralların yığılması, yəni

$$\int_0^1 g(u)\,\mathbf{P}_n(du) \to \int_0^1 g(u)\,\mathbf{P}(du) \qquad (7)$$

münasibəti – ixtiyari məhdud sanki kəsilməz $g(u)$ funksiyasına $\mathbf{P}$ ölçüsünə görə yığılma alınır. $0 \le u < 1/e$ olduqda $g(u) = 0$, $1/e \le u \le 1$ olduqda isə $g(u) = 1/u$ götürərək, x dəyişəninə qayıtdıqda, $n \to \infty$ olduqda

$$\int_0^n f(x)\,dx \sim \int_0^n x^{\alpha-1}\,dx = n^{\alpha}/\alpha$$

münasibəti alınır. Aydındır ki, bu sonuncu münasibəti n -in tam qiymətlərindən digər ixtiyari qiymətlər üçün də almaq olar.

Əd.: [1] T a u b e r A., «Monats. Math. und Physik», 1897, Bd 8, S. 273–77; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [3] В и н е р Н., Интеграл Фурье и некоторые ее приложения, пер. с англ., М., 1963.

TAY « двойник; alias » – bax, *Tezliklərin üst-üstə yüklənməsi / Tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzinq*.

TELEQRAF PROSESİ « телеграфный процесс; telegraph process » – bax, *Təsadüfi teleqraf siqnalı*.

TELEQRAF SİQNALI « телеграфный сигнал; telegraph signal » – iki: +1 və –1 qiymətlərini alan Markov *stasionar təsadüfi prosesidir*.

TERMODİNAMİK ENTROPİYA « термодинамическая энтропия; thermodynamical entropy » – tarazlıqlı statistik sistemdə istifadə olunan, xüsusi enerji və hissəciklərinin sıxlığının qeyd olunmuş qiymətlərilə «sistemin vəziyyətlərinin sayını» xarakterizə edən, termodinamik sistemlərdən biridir.

d – ölçülü $\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsinin sonlu Λ oblastında yerləşən N sayda hissəcikdən ibarət və qarşılıqlıtəsir enerjisi $H_{\Lambda,N}(x)$ ilə təsvir olunan klassik şəbəkəvari qaz halında

$$S(\Lambda, N, E) = \ln(\#\{x \in \Lambda : H_{\Lambda,N}(x) < E\}) \qquad (*)$$

kəmiyyəti belə qazın Λ-da e n t r o p i y a s ı adlanır, burada $H_{\Lambda,N}(x)$, $x \in \Lambda$, – N hissəciyin Λ-da konfiqurasiyasıdır, $\#B$ – sonlu B çoxluğunun elementlərinin sayıdır. Hissəciklərin qarşılıqlıtəsirinə nəzərən, bəzi olduqca ümumi fərziyyələrlə, sonsuz qazın T. e.-sı (x ü s u s i T. e. – rus. удельной) adlanan,

$$S(\rho, e) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d,\, N/|\Lambda| \to \rho,\, E/|\Lambda| \to e} \frac{1}{|\Lambda|}\, S(\Lambda, N, E)$$

termodinamik limiti mövcuddur ($|\Lambda| = \#\Lambda$). Klassik kəsilməz və həm də kvant qazları üçün T. e. analoji təyin olunur: birinci halda (*) tərifində konfiqurasiyaların sayını qazın faza fəzasının uyğun oblastının həcmi ilə, ikinci halda isə məxsusi qiymətləri E-ni aşmayan $\hat{H}_{\Lambda,N}$ enerji operatorunun xətti asılı olmayan məxsusi vektorlarının sayı ilə əvəz etmək lazımdır.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964.

TERMODİNAMİK LİMİT KEÇİDİ « термодинамический предельный переход; thermodynamical limit approach » – baxılan sistemin yerləşdiyi qabın tutumunun sonsuzluğa yaxınlaşması ilə bağlı olan, Gibbs təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində və statistik mexanikada əsas rol oynayan limit keçididir. Bu halda qabın tutumu – diskret arqumentli sistemlər üçün tutumun nöqtələrinin sayı və nöqtəvi sistemlər üçün Lebeq ölçüsü nəzərdə tutulur. Qeyd olunmuş althəcmlərdə Gibbs paylanması və sərbəst enerji ilə doğurulan sonluölçülü paylanmaların, korrelyasion funksiyaların limitlərinə baxılır. Qabların Λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ baxılan ardıcıllığı üzərinə, adətən, əlavə şərtlər qoyulur, bu isə onu ifadə edir ki, $n \to \infty$ olduqda, bu qabların sərhədləri, nəzərə çarpacaq qədər kəsik-kəsik olmur. Məs., Van – Hov teoremində Van – Hopf şərtləri belədir.

TEMPERATUR QRİN FUNKSİYASI « температурная функция Грина; temperature Green function » – bax, *Qrin funksiyası*.

TEST « тест; test » s t a t i s t i k – bax, *Statistik kriteri*.

TEYLOR STOXASTİK DÜSTURU « Тейлора стохастическая формула; stochastic Taylor formula » – *stoxastik differensial tənliyin* həllinin

$$X_t = X_s + P_n(X_s, s, t) + R_n(X(\cdot), s, t), \quad t > s \ge 0$$

cəmi şəklində ifadəsidir, burada P_n və R_n – idarəedici semimartinqallar üzrə (əksər hallarda Viner prosesi və zaman üzrə) tərtibi n -dən çox olmayan çoxqat stoxastik inteqralların sonlu cəmləridir. Bu halda P_n – baxılan $[s, t]$ zaman parçasının başlanğıc nöqtəsində yalnız X_s -in qiymətindən, R_n isə bütün X_u, $s \le u \le t$ trayektoriyasından asılıdır. P_n və R_n üçün rekurrent münasibətlər nisbətən böyükdürlər (bax, məs., [1]). T. s. d.-da qalıq həddi kimi interpretasiya olunan R_n nəzərə alınmadıqda (yəni R_n -siz) stoxastik differensial tənliklərin sonluferqlərli approksimasiyasını ixtiyari yığılma sürəti ilə qurmaq mümkündür.

Əd.: [1] P l a t e n E., W a g n e r W., «Probab. and Math. Statist.», 1982, v. 3, fasc 1, p. 37–51.

TEZLİK « частота; frequency » – *zaman sıralarının* spektral analizində istifadə olunan, rəqslərin perioduna tərs mütənasib kəmiyyətdir. Tezliklər oblastında stasionar təsadüfi proseslərin tədqiqi təsadüfi prosesin spektral sıxlığının öyrənilməsindən ibarətdir, spektral sıxlıq isə müxtəlif T.-lər üzrə prosesin dispersiyasının paylanmasını xarakterizə edir. Beləliklə, T. stasionar təsadüfi prosesin arqumenti kimi üzə çıxır. Normalanmadan asılı olaraq, tsiklik və bucaq tezlikləri anlayışları daxil edilmişdir. Vahid zaman ərzindəki tsikllərin sayını xarakterizə edən və rəqslərin perioduna tərs kəmiyyətə t s i k l i k t e z l i k deyilir. Əgər α tsiklik T.-dirsə, onda $2\pi\alpha$ kəmiyyəti b u c a q t e z l i y i adlanır.

TEZLİK; b l o k t e z l i y i **« частота** б л о к о в а я; b l o c k **frequency »** – bax, *Seçimi bloklar*.

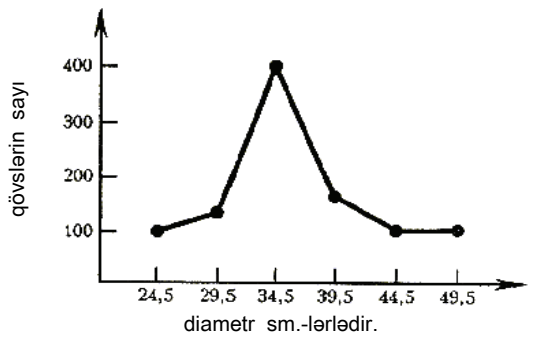
TEZLİK(y i) t ə s a d ü f i h a d i s ə n i n **« частота** с л у ч а й н о г о с о б ы т и я; **frequency** o f a r a n d o m e v e n t **»**, A h a d i s ə s i n i n t e z l i y i – eyni şərtlər yerinə yetirilməklə aparılan n sayda sınaqda A hadisəsinin baş vermə

sayı – m ədədinə deyilir. m/n nisbətinə A hadisəsinin n i s b i t e z l i y i deyilir. Asılı olmayan və bircins sınaqlar şərtlərində nisbi tezliklərin statistik dayanıqlılığı kimi qanunauyğunluq müşahidə olunur ki, bu zaman sınaqların müxtəlif seriyalarında nisbi tezlik m/n-in eyni bir ədəddən çox az fərqlənməsi ilə müşahidə olunur. Bu ədəd A hadisəsinin e h t i m a l ı adlanır və $\mathbf{P}(A)$ ilə işarə olunur.

Əd.: [1] С е в а с т ь я н о в Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

TEZLİK – ZAMAN SPEKTRAL SIXLIĞI « частотно – временная спектральная плотность; frequency – time spectral density » – bax, *Spektral nəzəriyyələri* q e y r i – s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n.

TEZLİKLƏR POLİQONU « частот полигон; frequency polygon » – eksperimental verilənlərin qrafik təsviri növlərindən biridir. *Histoqramın* qurulmasında olduğu kimi mütləq kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin bütün müşahidə olunmuş qiymətləri diapozonu k sayda $[x_i,\ x_{i+1})$ intervallarına bölünür $i = 1, \dots, k$, bu intervalların ortalarından $m_i/(x_{i+1} - x_i)$ və ya $h_i/(x_{i+1} - x_i)$ hündürlüklü perpendikulyarlar qaldırılır və bunların təpələri birləşdirilir. Şəkildə histoqramın qurulmasında alınmış T. p.-nun qrafiki verilir:



Diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün də T. p. qurulur. Bu halda intervalların orta nöqtələri əvəzinə absis oxu üzrə təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri qeyd olunaraq, bu nöqtələrdən verilmiş qiymətin alınmasının nisbi tezliyinə və ya mütləq tezliyinə bərabər olan hündürlüklü perpendikulyar qaldırılır və bu perpendikulyarların təpələri birləşdirilir. T. p.-nun qrafiki sıxlıq qrafikinin qeyri – parametrik statistik qiymətidir və o, histoqramdan yaxşı sayılır. Belə ki, qruplama intervallarının məqbul seçilməsi nəticəsində T. p.-nun sıxlıq qrafikindən yayınmasını, L^2 metrikasında, $n^{-2/5}$ tərtiblə almaq olur (bax, [1]). C metrikasında yığılma alınmışdır (bax, [2]).

Əd.: [1] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [2] С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., 1970.

TEZLİKLƏRİN DƏYİŞDİRİLMƏSİ / ELAYZİNQ « подмена частот; aliasing » – bax, *Tezliklərin üst-üstə düşməsi / Tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzinq*.

TEZLİKLƏRİN ÜST-ÜSTƏ DÜŞMƏSİ / TEZLİKLƏRİN DƏYİŞDİRİLMƏSİ / ELAYZİNQ « наложение частот, подмена частот, элайзинг; aliasing » – $t = \dots, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ nöqtələrinin diskret ardıcıllığında $\zeta(t)$, $-\infty < t < \infty$ *stasionar təsadüfi prosesinin* müşahidə olunduğu zaman yaranan təzahürdür. Stasionar təsadüfi prosesin spektral ifadəsinin aşağıdakı şəkildə olduğu məlumdur:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\varphi(\lambda)\,. \qquad (1)$$

$\zeta(t)$ prosesini Δ zaman intervalından bir müşahidə etdikdə (1) ifadəsi aşağıdakı kimi dəyişilir:

$$\zeta(k\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k\Delta}\, d\varphi(\lambda) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{i\lambda k\Delta + i\frac{2\pi}{n}k\Delta}\, d\varphi(\lambda + 2n\pi/\Delta). \qquad (2)$$

(2)-dən aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k\Delta}\, d\varphi(\lambda) = \int_{0}^{2\pi} e^{i\lambda k\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d\varphi(\lambda + 2n\pi/\Delta). \qquad (3)$$

$$d\varphi_1(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d\varphi(\lambda + 2\pi n/\Delta)\,, \quad \mathbf{M}\, d\varphi_1(\lambda) = 0$$

münasibətlərilə verilən ölçü elə ortoqonal təsadüfi ölçüdür ki, bu ölçü

$$\mathbf{M}\left|d\varphi_1(\lambda)\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left|\, d\varphi(\lambda + 2\pi n/\Delta)\,\right|^2$$

bərabərliyini ödəyir.

(3) bərabərliyi onu ifadə edir ki, $\zeta(t)$ prosesi üçün tezlikləri λ və $\lambda + 2n\pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ olan harmoniklər bir-birindən fərqlənmirlər. Əgər $\zeta(t)$ həqiqi stasionar prosesdirsə, onda tezlikləri $-\lambda$ və λ olan harmoniklər bir-birindən fərqlənmirlər və buna görə də, λ tezlikli harmoniki $\pm\lambda + 2n\pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ tezliklərli harmoniklərdən fərqləndirmək olmur. $-\lambda + 2n\pi/\Delta$ və $\lambda + 2n\pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ tezlikləri – m ü ş a y i ə t ç i t e z l i k l ə r adlanır. λ və $\lambda + 2n\pi/\Delta$, $0 \le \lambda \le \pi/\Delta$, $n = 0, \pm 1, \dots$ tezliklərinə t a y t e z l i k l ə r (rus. «двойник») deyilir, λ isə b a ş t a y t e z l i k adlanır.

E.-in effekti $F_\Delta(\lambda)$ ardıcıllığının spektral funksiyaları $F(\lambda)$ prosesi arasında aşağıdakı əlaqə düsturu ilə daha yaxşı təsvir olunur:

$$F_\Delta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\, F(\lambda + 2n\pi/\Delta) - F((2n-1)\pi/\Delta];$$

bu düstur $f(\lambda) = F'(\lambda)$ spektral sıxlığının varlığı halında aşağıdakı şəklində yazılır.

$$f_\Delta(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2n\pi/\Delta)$$

Əd.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1, М., 1971; [3] Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.

TEZLİKLİ – MODULYAR OSSİLYASİYA « частотно – модулированное колебание; frequency – modulated oscillation » –

$$X(t) = A \sin\left[\int_0^t \psi(s)ds\right] \qquad (*)$$

şəklində *təsadüfi prosesdir*, burada $\psi(s)$ – təsadüfi siqnaldır, adətən, stasionar fərz olunur. (*) şəklində T. – m. o. radiotexnikada geniş istifadə olunur, burada $\psi(s) = \omega_0 + a(s)$, ω_0 – yüksək aparıcı tezlik, $a(s)$ – T. – m. o.-nın keçirdiyi informasiyanı özündə daşıyan, aşağıtezlikli təsadüfi siqnaldır. Tezlikli modulyasiyada modulyasiyalanmış $X(t) = A\sin[\psi(t)]$ rəqsinin ani $\psi'(t)$ tezliyinin pulsasiyaları, modulyasiyalayıcı $a(t)$ siqnalının qiymətlərilə təyin olunduğu halda, bucaq modulyasiyasının formalarından biridir, yəni $\psi(t)$ funksiyasının pulsasiyalarının hər hansı bir modulyasiyalayıcı $a(t)$ siqnalının köməyilə idarə olunmasıdır; digər belə forma faza modulyasiyasıdır.

Əd.: [1] Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, т. 2, пер. с англ., М., 1962; [2] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., кн. 1, М., 1974; [3] Ван Трис Гарри Л., Теория обнаружения, оценок и модуляции, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [4] Papoulis A., Probability, random variables, and stochastic processes, 2 ed., N. Y. – [a. o.], 1984.

TEZLİKLİ MODULYASİYA « частотная модуляция; frequency modulation » – bax, *Tezlikli modulyar ossilyasiya.*

TƏBİİ SƏRHƏD « естественная граница; natural boundary » – bax, *Birölçülü diffuziya*; sərhədlərin təsnifatı.

TƏDQİQİ STATİSTİK ANALİZ(i) verilənlərin **« разведочный статистический анализ** данных; exploratory **data statistical analysis »** – verilənlər üzərində statistik yenidən işlənilmə mərhələsidir, bu analiz o halda tətbiq olunur ki, çoxölçülü verilənlər cədvəli tədqiqatçıya məlum olsun, digər tərəfdən isə bu verilənlərin generasiyasının fiziki (səbəb) mexanizmi haqqında apriori informasiya ya olmasın və ya tam olmasın. Bu halda T. s. a. tətqiqatçıya verilənlərin strukturunu kompakt və aydın təsvir etməyə (məs., bu strukturun vizual görüntüsü formasında və ya bu strukturdan yayınmalar formasında) yardımçı ola bilir. Belə təsvirə əsaslanan tədqiqatçı artıq «məqsədyönlü» şəkildə malik olduğu verilənlərin daha ətraflı araşdırılması məsələsini qarşısına qoya bilər və bu araşdırmada statistik analizin bu və ya digər bölməsindən istifadə edərək, statistik hipotezlərin yoxlanılması aparatının köməyilə verilənlərin alınmış strukturunu əsaslandıraraq, hətta verilənlərin səbəbiyyət modeli haqqında bəzi nəticələr də çıxara bilər. Bu mərhələ verilənlərin təsdiqedici analizi adlanır.

T. s. a. vasitəsilə verilənlərin strukturunun aşkar edilməsi bəzən, bu analizdə yekunlaşdırıcı mərhələ də ola bilir. Digər tərəfdən, T. s. a.-in bir sıra metodlarına verilənlərin növbəti statistik yenidən işlənilməsi üçün hazırlıq metodları kimi də baxmaq olar, bu halda növbəti mərhələlərdə verilənlər strukturu haqqında məlumat öyrənilməsi tələb olunmur. Bu halda T. s. a. mərhələsi verilənlərin yenidən kodlaşdırılması və çevrilməsi kimi müəyyən bir mərhələ rolunu oynayır (məs., dim. – ölçünün kiçildilməsi yolu ilə), bu da növbəti analiz üçün münasib formanın alınmasına səbəb olur.

T. s. a.-in metodlarının hansı hallarda tətbiq olunmasına baxmayaraq əsas məsələ, ilkin verilənlərdə olan informasiyanın mühüm aspektlərinin olduqca tam şəkildə qorunub saxlanılması şərtilə, verilənlərin kompakt təsvirinə keçiddir. Bu təsvirin isə istifadə edən üçün aydın olması da mühümdür.

TƏDRİCİ DONMA / FEYDİNQ « медленное замирание; slow fading » – bax, *Feydinq / donmalar* kanalda.

TƏDRİCİ MARKOV XASSƏSİ « умеренно марковское свойство; moderate Markov property » ikinci növ kəsilməsi olmayan, sağdan kəsilməz Markov prosesi üçün – qabaqcadan bildirilən ixtiyari τ anı üçün τ anında prosesin sol limitinin məlum X_τ qiymətində «keçmişin» və «gələcəyin» şərti asılı olmamazlığıdır. Daha dəqiq, fərz olunur ki, $X = (X_t, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ trayektoriyaları sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan bircins Markov prosesidir. Əgər $\tau_n < \tau_{n+1}$ və $\tau_n \uparrow \tau$ şərtlərini ödəyən τ_n Markov momentləri ardıcıllığı vardırsa, τ qabaqcadan bildirilən Markov momenti adlanır, bu halda fərz olunur ki, $\mathscr{A}_{\tau-} = \bigvee_n \mathscr{A}_{\tau_n}$ ($\mathscr{A}_{\tau_n}$ σ – cəbrinin tərifi üçün bax, «*Ciddi Markov xassəsi*» məq.-nə). Əgər ixtiyari qabaqcadan bildirilən Markov momenti τ və ixtiyari $h > 0$ üçün

$$\mathbf{P}_\mu\{X_{\tau+h} \in \Gamma \mid \mathscr{A}_{\tau-}\} = \mathbf{P}_{X_{\tau-}}\{X_h \in \Gamma\} \qquad \mathbf{P}_\mu \text{ – sanki yəqin}$$

ödənilərsə, X prosesi tədrici Markov xassəsinə malikdir, deyilir. T. M. x. [1]-də K. Çjun və J. Uolş tərəfindən daxil olunmuşdur. Rey prosesləri və Hant prosesləri T. M. x.-sinə malikdirlər. T. M. x. $r_\lambda(X_{t-}, \Gamma)$ təsadüfi proseslərinin soldan sanki yəqin kəsilməzlik xassəsi ilə əlaqəlidir, burada r_λ , – X prosesinin rezolventidir.

Əd.: [1] Chung K. L., Walsh J. B., «Acta Math.», 1969, № 3/4, p. 225–51; [2] Chung K. L., Glover J., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 49, S. 237–48; [3] Engelbert H. J., «Math. Nachr.», 1978, Bd 85, S. 111–30, 235–66; [4] Кузнецов С. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 20, М., 1982, с. 37–178.

TƏDRİCİ YAYINMALAR ZONALARI « умеренных уклонений зоны; zones of moderate deviations » – bax, *Normal yığılma zonası.*

TƏHRİF ÖLÇÜSÜ « искажения мера; distortion measure » – bax, *İnformasion dayanıqlılıq*, *Məlumatlar mənbəi.*

TƏKMİL EHTİMAL FƏZASI « совершенное вероятностное пространство; perfect probability space » – bax, *Ehtimal fəzası.*

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU « повторного логарифма закон; law of the iterated logarithm » – ehtimal nəzəriyyəsinin *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununun* dəqiqləşdirilməsi olan limit teoremidir. $X_1, X_2, \ldots$ – təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

olsun. $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ədədi ardıcıllıqlar olduğu halda, böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu haqqında teoremlərdə $n \to \infty$ olduqda $(S_n - a_n)/b_n \to 0$ münasibətlərinin sanki yəqin (yəni 1 ehtimalla) ödənilməsi üçün şərtlər verildiyi halda, T. l. q. haqqında teoremlərdə elə $\{a_n\}$ və $\{c_n\}$ ədədi ardıcıllıqları götürülür ki,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - a_n}{c_n} = 1 \qquad (1)$$

və ya

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - a_n|}{c_n} = 1 \qquad (2)$$

münasibətləri sanki yəqin ödənilsin. (1) münasibəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{S_n - a_n > (1+\varepsilon)\, c_n \text{ sonsuz dəfə}\} = 0$$

və ya

$$\mathbf{P}\{S_n - a_n > (1-\varepsilon)\, c_n \text{ sonsuz dəfə}\} = 0$$

bərabərlikləri ilə eynigüclüdür.

T. l. q.-nun effekti ilk dəfə 1924-də A. Ya. Xinçin tərəfindən, $\{X_n\}$ Bernulli qanununa tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halı araşdırarkən aşkar olunmuşdur (bax, [1]).

T. l. q. haqqında ümumi tip ilk teorem 1929-da A. N. Kolmoqorovun nəşr olunmuş aşağıdakı nəticəsidir (bax, [2]): $\{X_n\}$ – riyazi gözləmələri sıfra bərabər, sonlu dispersiyalara malik, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M} X_k^s$ olsun. Əgər $n \to \infty$ olduqda $B_n \to \infty$ olarsa və elə müsbət sabitlər ardıcıllığı $\{C_n\}$ olarsa ki,

$$|X_n| \le C_n \quad \text{və} \quad C_n = o((B_n / \ln\ln B_n)^{1/2})$$

münasibətləri ödənilsin, onda $a_n = 0$ və $c_n = (2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}$ olduqda (1) və (2) münasibətləri ödənilir.

Əgər $\{X_n\}$ elə asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olarsa ki, $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 < \infty$ şərtlərini ödəsin, onda $a_n = 0$, $c_n = (2nb \ln\ln n)^{1/2}$ olduqda, (1) və (2) münasibətləri doğrudur, burada $b = \mathbf{M}X_1^2$ (bax, [3]).

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının geniş sinfi üçün T. l. q.-nun ümumiləşmələrini U. Feller [4]-də, F. Ştrassen [5]-də, A. İ. Martikaynen [6]-da və b. (bax, [7]) almışlar. T. l. q. haqqında teoremlər T. l. q.-nun asılı təsadüfi kəmiyyətlər vektorlar ardıcıllıqları və təsadüfi proseslərə tətbiqi üçün çoxsaylı araşdırmalara zəmin olmuşdur.

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Избранные труды по теории вероятностей, М., 1955, с. 12–24; [2] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 34–44; [3] Hartman P., Wintner A., «Amer. J. Math.», 1941, v. 63, p. 169–76; [4] Feller W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, p. 373–402; [5] Strassen V., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 211–26; [6] Мартикайнен А. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1985, т. 30, в. 4, с. 694–705; [7] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU Banax fəzasında **«повторного логарифма закон** в банаховом пространстве; **law of the iterated logarithm** in Banach space» – Banax fəzasında qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər üçün (yəni təsadüfi elementlər üçün) *təkrar loqarifm qanununun* ümumiləşməsidir. Sonsuzölçülü fəza halında məhdud T. l. q. (MTLQ) və kompakt T. l. q. (KTLQ) qanunları fərqləndirilir. Skalyar və sonluölçülü hallarda T. l. q.-nun bu formaları üst-üstə düşür. Maraq doğuran hallardan birincisi $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ separabel Banax fəzası B-də eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi elementlər olduğu haldır.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ a_n = (2n \ln\ln n)^{1/2},\ n = 3, 4, \ldots$$

olsun. Əgər

$$\sup_n \|S_n\| / a_n < \infty$$

münasibəti sanki yəqin ödənilərsə, onda X təsadüfi elementi MTLQ-nu ödəyir, deyilir və $X \in \mathrm{MTLQ}(B)$ yazılır. Əgər S_n/a_n ardıcıllığı sanki yəqin B-də nisbi kompaktdırsa, X elementi KTLQ-nu ödəyir deyilir və $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$ yazılır.

1. Məhdud təkrar loqarifm qanunu. Əgər $B = \mathbb{R}^1$ olarsa, onda $X \in \mathrm{MTLQ}(B)$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\sigma^2 = \mathbf{M}X^2 < \infty$ və $\mathbf{M}X = 0$ olsun. Əgər bu şərtlər ödənilərsə, onda (S_n/a_n) ardıcıllığının limit nöqtələrinin çoxluğu sanki yəqin $[-\sigma, +\sigma]$ intervalı ilə üst-üstə düşür (Hartman–Vintner–Ştrassen teoremi). Bu teoremdən Banax fəzasında MTLQ-nun doğruluğu üçün zəruri şərtlər alınır. Doğrudan da, əgər $X \in \mathrm{MTLQ}(B)$ olarsa, onda

a) hər bir $b^* \in B^*$ kəsilməz xətti funksionalı üçün $\mathbf{M}[b^*(X)]^2 < \infty$ olur, yəni X zəif ikinci tərtibə malikdir və deməli, R_X kovariasion operatoru haqqında mülahizə yürütmək olar.

b) $\mathbf{M}X = 0$.

Bundan əlavə, əgər $X \in \mathrm{MTLQ}(B)$ olarsa, onda

c) $\mathbf{M}\|X\|^2 / LL(\|X\|) < \infty$, burada $L(t) = \max(1, \ln t)$, $t > 0$, xüsusi halda, $0 < p < 2$ şərtini ödəyən hər bir p üçün $\mathbf{M}\|X\|^p < \infty$. Lakin əgər B sonsuzölçülü olarsa, onda elə $X \in \mathrm{MTLQ}(B)$ vardır ki, $\mathbf{M}\|X\|^2 = \infty$.

a), b), c) şərtlərindən MTLQ alınmır. $C[0,1]$ fəzasının vahid radiuslu kürəsində topalanmış və Qauss kovariasiyasına malik X təsadüfi elementi MTLQ-na tabe deyildir. 2 tip fəza üçün (bax, *Banax fəzası* p tip) MTLQ məsələsi tamamilə həll olunmuşdur. Əgər X 2 tip fəzada təsadüfi elementdirsə, onda X MTLQ-na, yalnız və yalnız, o halda tabedir ki, a), b), c) şərtləri ödənilsin (bax, [2]). Ümumi Banax fəzaları üçün

aşağıdakı nəticə doğrudur: $X \in \mathrm{MTLQ}(B)$, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, a), b), c) şərtləri ödənilsin və $\{\|S_n\| / a_n\}$ ardıcıllığı stoxastik məhdud olsun (bax, [2]) .

2. Kompakt təkrar loqarifm qanunu. Aydındır ki, KTLQ MTLQ -nu doğurur. Əgər $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$ olarsa, a), b), c) şərtlərindən başqa, aşağıdakı şərtlər də ödənilir:

ç) kovariasion R_X operatoru kompaktdır, yəni $R_X\{b^* \in B^* : \|b^*\| \le 1\}$ çoxluğu B fəzasının nisbi kompakt altçoxluğudur;

d) $\|S_n\| / a_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

KTLQ -nda sanki hər bir (S_n/a_n) ardıcıllığı üçün konstruktiv olaraq elə $K \subset B$ kompaktını göstərmək olar ki, bu kompakt bu ardıcıllığın limit nöqtələrinin çoxluğu ilə üst-üstə düşsün. Doğrudan da, əgər $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$ olarsa, onda $K = A\{h \in H : \|h\| \le 1\}$, burada A – hər hansı Hilbert fəzası H -dan B -yə təsir edən və $R_X = AA^*$ faktorizasiyasında iştirak edən operatordur. Bundan əlavə, $n \to \infty$ olduqda

$$\rho(S_n/a_n, K) \to 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $\rho(x, K)$, – x nöqtəsindən K çoxluğuna qədər məsafədir.

MTLQ kimi KTLQ da 2 tip Banax fəzaları üçün kifayət qədər öyrənilmişdir. Belə B fəzasının X təsadüfi elementi üçün, $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, a), b), c), ç) şərtləri ödənilmiş olsun. Ümumi halda, bu şərtlərə d) şərtlərini də əlavə etmək lazımdır (bu şərt X -in paylanması terminlərində aşkar ifadə olunur) (bax, [2]) .

Əgər B 2 kotip Banax fəzası olarsa və əgər X a), b) şərtlərini ödəyərsə və Qauss kovariasiyasına malik olarsa, onda $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$ (bax, [1], [4]) .

Banax fəzasında mərkəzi limit teoremi (MLT) ilə KTLQ arasında əlaqə vardır. Əgər $X \in \mathrm{MLT}(B)$ olarsa və b) şərti ödənilərsə, onda $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$ ödənilir (bax, [3]). Məsələn, hər bir Qauss təsadüfi elementi üçün KTLQ ödənilir. Digər tərəfdən, ixtiyari sonsuzölçülü Banax fəzasında elə təsadüfi X elementi vardır ki, $X \in \mathrm{KTLQ}(B)$, lakin $X \notin \mathrm{MLT}(B)$.

Əd.: [1] Pisier G., «Seminaire Maurey - Schwartz», 1975–76, exp. 3, 4; [2] Ledoux M., Talagrand M., «Ann. Probab.», 1988, v. 16, № 3, p. 1242–64; [3] Heinkel B., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1979, Bd 49, № 2, S. 211–20.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU empirik ölçülər üçün **« повторного логарифма закон** для эмпирических мер; **law of the iterated logarithm** for empirical measures **»** – empirik ölçülər üçün *böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanununu* dəqiqləşdirən müddəadır. $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(C)$ – ölçülən $(\mathscr{X}, \mathfrak{A})$ fəzasında paylanması $\mathbf{P} = \mathbf{P}(C)$ olan n həcmli seçim üzrə qurulmuş empirik paylanma olsun, $C \in \mathfrak{A}$ və $\mu_n(C) = (\mathbf{P}_n(C) - \mathbf{P}(C))\sqrt{n}$. $\mathscr{B} \subseteq \mathfrak{A}$ – çoxluqların qeyd olunmuş sinfi, $D(\mathscr{B})$ – məhdud $\Psi = \Psi(C)$ funksiyalarının fəzası olsun, $C \in \mathscr{B}$.

Adətən, T. l. q.-nun iki tipi fərqləndirilir: Birinci tip (məhdud T. l. q. – MTLQ) :

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{C\in\mathscr{B}} \frac{|\mu_n(C)|}{\sqrt{\ln\ln n}} = A \qquad (*)$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada $A = A(\mathbf{P}, \mathscr{B}) < \infty$ – konstantdır. İkinci tip (T. l. q. Strassen formasında) : $\mu_n / \ln\ln n$ ardıcıllığının limit «nöqtələri» çoxluğu $K = K(\mathbf{P}, \mathscr{B})$, $\Psi \in D(\mathscr{B})$ funksiyalarının təsadüfi olmayan, kompakt çoxluğu ilə sanki yəqin üst-üstə düşür. Ştrassen formasında T. l. q.-ndan məhdud T. l. q. alınır və bu halda

$$A = \sup_{\Psi\in K} \sup_{C\in\mathscr{B}} |\Psi(C)| .$$

Məs., əgər P $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanma olarsa (bax, [2]), $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \equiv \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$ üçün Ştrassen formasında T. l. q. ödənilir; bu halda

$$K = \left\{ \Psi(C) \in D(\mathscr{B}_1) : \Psi(C) = \int_C h(t)\,dt, \ \frac{1}{2}\int_0^1 h^2(t)\,dt \le 1 \right\}$$

$\mathbb{R}^k$ -da kəsilməz paylanmalar üçün Ştrassen formasında T. l. q. analojidir şəkildədir (bax, [3]).

T. l. q.-nun hər iki variantı Banax fəzasında *təkrar loqarifm qanununun* xüsusi hallarıdır, burada toplananlar rolunu mərkəzlənmiş indikator funksiyalar oynayır.

Əgər bu $\mathscr{B}$ sinfinin müəyyən entropik xarakteristikaları olduqca böyük olarsa, onda

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{C\in\mathscr{B}} |\mu_n(C)| / \sqrt{\ln\ln n} = \infty$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir və (*) tip müddəanın doğruluğu üçün başqa normalayıcı ardıcıllıq götürmək lazımdır (bax, [4]) .

T. l. q. empirik proseslər üçün də araşdırılmışdır (bax, *Yığılma*(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin və [5]).

T. l. q. variantlarının isbatında empirik ölçülər üçün böyük yayınmalar ehtimallarının kobud (loqarifmik) asimptotikası əsas götürülür (bax, [6]).

T. l. q. -nun digər variantı (Çjun forması) :

$$\liminf_{n\to\infty} p(\mu_n)\sqrt{\ln\ln n} = B$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada p , – $D(\mathscr{B})$ -də semi – norma, B – konstantdır. Məs., $[0, 1]$ -də müntəzəm paylanma üçün $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$, $p(\Psi) = \sup_{c\in\mathscr{B}} |\Psi(C)|$ halında $B = \pi/\sqrt{8}$ olan T. l. q. Çjun formasında doğrudur (bax, [7]).

Əd.: [1] Kuelbs J., Dudley R., «Ann. Probab.», 1980, v. 8, № 3, p. 405–18; [2] Finkelstein H., «Ann. Math. Statist.», 1971, v. 42, p. 607–15; [3] Richter H., «Manuscripta Math.», 1974, v. 11, p. 291–303; [4] Борисов И. С., «Сиб. матем. ж.», 1985, т. 26, № 1, с. 12–22; [5] Колчинский В. И., «Теория вероятн. и матем. статист.», 1981, т. 25, с. 40–47; [6] Боровков А. А., Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12–26; [7] Могульский А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 2, с. 399–407.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU Markov zəncirləri üçün « **повторного логарифма закон** для цепи Маркова; **law of the iterated logarithm** for Markov chains »: X_n, $n = 0, 1, \ldots$ – müsbət olan vəziyyətlərinin çoxluğu hesabi olan, bircins Markov zənciri; f – həqiqi funksiya;

$$S_n = \sum_{j=1}^{n-1} f(X_j), \quad \pi_i = \mathbf{P}\{X_0 = i\};$$

$\tau_\nu(i)$, – i vəziyyətinə ν -cü çatım anı;

$$J_\nu(i) = [\tau_\nu(i),\ \tau_{\nu+1}(i)];$$

$$M = \pi_i \mathbf{M}\left\{ \sum_{j \in J_\nu(i)} f(X_j) \right\};$$

$$B = \pi_i \mathbf{M}\left\{ \sum_{j \in J_\nu(i)} f((X_j) - M)^2 \right\}$$

olsun. Əgər

$$\mathbf{M}\left\{ \sum_{j \in J_\nu(i)} \mathbf{1} \right\} < \infty, \quad \mathbf{M}\left\{ \sum_{j \in J_\gamma(i)} \left| f(X_j) \right|^2 \right\} < \infty \quad \text{və}$$

$B > 0$ olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda $(S_n - nM)/(2Bn \ln\ln n)$ ardıcıllığının limit nöqtələrinin çoxluğu $[-1, 1]$ ilə üst-üstə düşür (bax, [1]).

T. l. q. $\xi(t)/(2t \ln\ln t)^{1/2}$ üçün $t \to \infty$ olduqda isbat olunmuşdur, $\xi(t)$, $t \geq 0$ stoxastik differensial tənliyin həllidir (bax, [2]). Markov zəncirləri üçün T. l. q.-nun funksional variantı vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Сарымсаков Т. А., Основы теории процессов Маркова, М., 1954; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [3] Friedman A., «Trans. Amer. Math. Soc. verw. Geb.», 1972, v. 170, p. 359–84; [4] Bhattacharya R. N., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1982, Bd 60, S. 185–201.

TƏKRAR LOQARİFM QANUNU Viner prosesi üçün « **повторного логарифма закон** для винеровского процесса; **law of the iterated logarithm** for Wiener process » – $w(t)$, $t \geq 0$ standart Viner prosesinin sanki bütün trayektoriyalarının asmptotikasını təsvir edən bir sıra müddəaların ümumi adıdır. Adi T. l. q.-nun ən yayılmış forması (Xinçin forması) aşağıdakı kimi ifadə olunur: əgər

$$L(t) = \left(2t \ln \left| \ln t \right|\right)^{1/2}$$

olarsa,

$$\limsup_{n \to \infty} w(t)/L(t) = -\liminf_{n \to \infty} w(t)/L(t) = 1 \qquad (*)$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur. Lokal T. l. q.: $t\, w(t^{-1})$ prosesi də standart Viner prosesi olduğundan, (*) münasibəti $t \to 0$ olduqda da doğrudur. Belə ifadə olunmuş T. l. q. ümumi funksional T. l. q.-nun nəticəsidir (Ştrassen forması). K, – $C[0, 1]$-də, $f(0) = 0$ şərtini ödəyən mütləq kəsilməz $f(x)$ funksiyalarından ibarət çoxluq və

$$\alpha(f) = \int_0^1 (f'(x))^2\, dx \leq 1$$

olsun. [K – Hilbert fəzasında, özüdoğuran nüvəsi $\min(s, t)$ olan vahid radiuslu kürə, yəni $W_n(t) = w(nt)/L(t)$, $0 \leq t \leq 1$ Viner prosesinin kovariasiyası olsun]. Onda $\{W_n(t)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $C[0, 1]$-də nisbi kompaktdır və bu ardıcıllığın limit nöqtələri çoxluğu K kompaktı ilə üst-üstə düşür (n kəsilməz olaraq da dəyişə bilər). $W_n(t)$ -in $f \in K$ funksiyalarına necə «yaxın» ola biləcəyini göstərmək olur: əgər, məs., f' məhdud variasiyalı funksiya olarsa, onda $\alpha(f) < 1$ olduqda

$$\liminf_{n \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| W_n(t) - f(t) \right| \ln\ln n = \frac{\pi}{4} (1 - \alpha(f))^{-1/2}$$

münasibəti sanki yəqin doğrudur ($f = 0$ olduqda bu T. l. q.-nun Çjun formasıdır).

Viner prosesinin funksionallarının asimptotikası üçün T. l. q.-nun spesifik variantları mövcuddur. Məs., əgər $w^*(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left| w(s) \right|$ və $\nu(t)$ bu maksimuma çatım anıdırsa, yəni $w^*(t) = \left| w(\nu(t)) \right|$ olarsa, onda

$$(t^{-1}(\ln\ln t)^2\, \nu(t);\ t^{-1/2}(\ln\ln t)^{1/2}\, w^*(t)),\ t \to \infty$$

ailəsinin limit nöqtələrinin çoxluğu

$$\{(x,\ y) : x \geq \pi^2/4,\ y > 0,\ y^2/2x + \pi^2/8y^2 \leq 1\}$$

– genişlənən zolaqla üst-üstə düşür.

Qiymətləri ümumi fəzalardan olan və çoxölçülü zamanlı Viner prosesi halı üçün ümumiləşmələr mövcuddur (bax, [3], [5]).

Əd.: [1] Хинчин А. Я., «Fundam. Math.», 1924, t. 6, p. 9–20, (в кн.: Избранные труды по теории вероятностей, М., 1955, с. 12–24); [2] Levy P., Theorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [3] Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972; [4] Stout W. F., Almost sure convergence, N. Y. – [a. o.], 1974; [5] Bingham N. H., «Bull. London Math. und verg. Geb.», 1964, Bd 3, S. 211–26; [7] Csaki E., Foldes A., Revesz P., «Probab. Theory Relat. Fields», 1987, v. 76, № 4, p. 477–97.

TƏKRARLANMALAR təsadüfi ardıcıllıqlarda « **повторения** в случайных последовательностях; **matchings** in random sequences » – *təsadüfi ardıcıllıqlarda* ya tamamilə və ya qismən üst-üstə düşən elementlər toplularıdır. Təsadüfi $\{X_t\}_{t=1}^N$ ardıcıllıqlarında T.-a aid: s – zəncirlər T.-ını, yəni bəzi $0 \leq t < u \leq N - s$ qiymətlərində

$$X_{t+j} = X_{u+j}, \quad j = 1, \ldots, s \qquad (1)$$

şərtlərinin ödənilməsini; natamam s – zəncirlər T.-ını [(1) sistemində verilmiş $k < s$ ədədindən az olmamaqla bərabərlik ödənildiyi halda] və ya iki – $\{X_t\}_{t=1}^{N_1}$ və $\{Y_t\}_{t=1}^{M}$ ardıcıllıqlarının altardıcıllıqlarının T.-ını, yəni

$$X_{t_j} = Y_{u_j}, \quad j = 1, \dots, s \qquad (2)$$

şərtlərinin bəzi $1 \le t_1 < \dots < t_s \le N$; $1 \le u_1 < \dots < u_s \le M$ qiymətlərində ödənilməsini misal göstərmək olar.

$X_1, \dots, X_N$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $p_2 = \mathbf{P}\{X_1 = X_2\}$ olsun; $\sigma(N, s)$, – (1) şərtlərini ödəyən (t, u), $0 \le t < u \le N - s$ cütlərinin sayı, $\sigma^*(N, s)$ – (1) şərti və bu şərtdən başqa $X_t \ne X_u (t > 0)$ şərtini ödəyən belə cütlərin sayı olsun. Onda $N \to \infty$ olduqda, $C_N^2 p_2^s (1 - p_2) \to \lambda > 0$, $p_2 \to \rho \in [0, 1)$ olduqda

$$\mathbf{M} z^{\sigma^*(N, s)} \to e^{\lambda(z-1)},$$

$$\mathbf{M} z^{\sigma(N, s)} \to \exp\{\lambda(z-1)/(1 - pz)\}$$

münasibətləri doğrudur; əgər $\tau(s) = \min\{N : \sigma(N, s) > 0\}$ – ilk T. anıdırsa, onda $p_2^s \to 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \tau(s)\sqrt{(1 - p_2) p_2^s} < x \right\} \to 1 - e^{-x^2/2}, \quad x > 0;$$

əgər $\mu(N) = \max\{ s : \sigma(N, s) > 0 \}$ – təkrarlanan s – zəncirin maksimal uzunluğu olarsa, onda $N \to \infty$, $p_2 \to \rho \in (0, 1)$ olduqda

$$\mathbf{P}\{ \mu(N) - [2 \log_{1/p_2} N] < k \} \to$$

$$\to \exp\left\{ - \frac{1 - \rho}{2} \rho^{k - \{2 \log_{1/p_2} N\}} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

münasibəti doğrudur, burada $[x]$ və $\{x\}$ – uyğun olaraq, x ədədinin tam və kəsr hissələridir.

(1) və ya (2) şəklində hadisələrin indikatorlarının çoxluqları asılı təsadüfi kəmiyyətlər toplularına təbii, lakin qeyri – trivial misallardır, $\sigma(N, s)$ və $\sigma^*(N, s)$ tipli təsadüfi kəmiyyətlər isə U – statistikaların xüsusi hallarıdır.

Əd.: [1] З у б к о в А. М., М и х а й л о в В. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 173–81; 1979, т. 24, в. 2, с. 267–79; [2] М и х а й л о в В. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 4, с. 880–84; [3] C h v a t a l V., S a n k o f f D., «J. Appl. Probab.», 1975, v. 12, № 2, p. 306–15; [4] A r r a t i a R., W a t e r m a n M. S., «Adv. Math.», 1985, v. 55, № 1, p. 13–23.

TƏKZİRVƏLİ PAYLANMA « одновершинное распределение; unimodal distribution » – bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma.*

TƏMİNLİK EHTİMALI « обеспеченность; accumulated probability », t ə m i n l i k ə y r i s i, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı x kritik sərhədini aşması ehtimalına (bu ehtimal bəzən $G(x)$ ilə işarə olunur) x -in funksiyası kimi baxılan ehtimalın adlandırıldığı termindir. T. e. ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası (inteqral qanunu) ilə bəlli olan $G(x) = 1 - F(x)$ münasibəti ilə ifadə olunur. $G(x)$-ə müvafiq $G^*(x)$ empirik asılılığı sonlu sayda müşahidələr üzərində aparılan işlənmələr nəticəsində alınır və $G^*(x)$ e m p i r i k t ə m i n l i k f u n k s i y a s ı adlanır. T. e. anlayışı tətbiqi iqlimşünaslıq (klimotologiya) sahəsində, aqrometeorologiyada, hidrologiyada statistik araşdırmalarda geniş istifadə olunur (məs., temperatur və ya yağıntıların müəyyən cəmlərinin T. e., çay axarının miqdarı, məhsulun miqdarının T. e. kimi). Bəzi işlərdə T. e. $F(x)$ ilə eyniləşdirilir.

Əd.: [1] Б р у к с К., К а р у з е р с Н., Применение статистических методов в метеорологии, пер. с англ., Л., 1963; [2] Р о ж д е н с т в е н с к и й А. В., Ч е б о т а р е в А. И., Статистические методы в гидрологии, Л., 1974.

TƏMİNLİK EHTİMALI h i d r o l o g i y a d a **« обеспеченность** в г и д р о л о г и и; **accumulated probability** i n h y d r o l o g y **»** – paylanma funksiyasının vahidə tamamlayıcısıdır. Hidrotexniki qurğular siniflərinə görə, axarın (rus. сток) və digər hidroloji xarakteristikaların müxtəlif normativ T. qiymətləri üçün layihələşdirilir (bax, [1]). Hidrologiyada illik axarın təsviri üçün çox vaxt III tip Pirson paylanması (o cümlədən, iki- və üçparametrli qamma – paylanmalar) və üçparametrli Kritski və Menkelin [2] üstlü qamma – paylanması

$$p(x) = H^{\alpha/\beta} \frac{\widetilde{x}^{\alpha/p-1}}{\Gamma(\alpha)\left|\beta\right|\overline{x}} \exp\{ - (\widetilde{x}H)^{1/\beta} \}, \; x > 0$$

sıxlığı ilə istifadə olunur, burada $\overline{x}$ – paylanmanın orta qiyməti, $\widetilde{x} = x/\overline{x}$, $H = \Gamma(\alpha + \beta)/\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$ – qamma – funksiyadır. Qumbel, Conson, loqnormal və b. paylanmalardan da istifadə olunur (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] Гидротехнические сооружения, М., 1983; [2] К р и ц к и й С. Н., М е н к е л ь М. Ф., Гидрологические основы управления речным стоком, М., 1981; [3] Р а т к о в и ч Д. Я., Многолетние колебания речного стока, Л., 1976; [4] С в а н и д з е Г. Г., Математическое моделирование гидрологических рядов, Л., 1977.

TƏMİRƏYARARLILIQ « ремонтопригодность; repairability » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

***TƏMİRƏYARARLILIQ GÖSTƏRİCİLƏRİ, SİSTEMİN « ремонтопригодности показатели системы; indices of repairability of system »** – verilmiş müddət ərzində sistemin işəqabiliyyətli vəziyyətinin bərpa ehtimalı və işəqabiliyyətli vəziyyətinin bərpasına sərf olunan orta müddət kimi əsas göstəricilərdir. Bax, *Etibarlılıq göstəriciləri, sistemin*, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

TƏNZİMLƏNƏN ŞAXƏLƏNƏN PROSES « регулируемый ветвящийся процесс; controlled branching process » – hissəciklərinin çoxalma qanunları əvvəlcədən nəzərdə tutulan surətdə prosesin əvvəlcə nə cür cərəyan etməsindən və vəziyyətindən asılı olan, *şaxələnən proses* modifikasiyasıdır. T. ş. p.-lərə fi – şaxələnən prosesləri, idarəolunan şaxələnən prosesləri və s. misal göstərmək olar (bax, [1]) . T. ş. p.-lərin mümkün modifikasiyalarının müxtəlifliyində bu prosesləri əhatə edən ümumi nəzəriyyə yoxdur.

Əd.: [1] С е в а с т ь я н о в Б. А., З у б к о в А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1974, т. 19, в. 1, с. 15–25; [2] Л а б к о в с к и й В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 71–83; [3] Б о й к о Р. В., «Укр. матем. ж.», 1982, т. 34, № 6, с. 681–87.

TƏRS BƏRABƏRSİZLİYİ, KOLMOQOROVUN « обратное неравенство Колмогорова; reverse Kolmogorov inequality » – bax, *Kolmoqorov bərabərsizliyi.*

TƏRS FUNKSİYALAR METODU « обратных функций метод; invers distribution function method » – bax, *Modelləşdirilməsi*, *təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

TƏRS STOXASTİK DİFFERENSİAL TƏNLİK « обратное стохастическое дифференциальное уравнение; backward stochastic differential equation » – elə tənlikdir ki,

$$X_{x,s}(t) =$$

$$= x + \int\limits_{[s,\,t]} b(\tau, X_{x,s}(\tau))\, d\tau + \int\limits_{[s,\,t]} \sigma(\tau, X_{x,s}(\tau))\, dw(\tau)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli $X_{x,s}(t)$-nin hamar modifikasiyası bu tənliyi ödəyir, burada w – Viner prosesidir, w-ya t-nin qeyd olunmuş qiymətində x, s-in funksiyası kimi baxılarsa, T. s. d. t. aşağıdakı şəkildə, xüsusi törəmələrli stoxastik differensial tənlik üçün tərs Koşi məsələsidir:

$$-dv(s,x) = [\ \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}\ \sigma\sigma^*(s,x)\, \mathscr{D}_{xx} v(s,x) +$$

$$+ b(s,x)\, \mathscr{D}_x v(s,x)\ ]\, ds + \sigma(s,x)\, \mathscr{D}_x v(s,x)^*\, dw(s),$$

$$s < t; \quad v(t,\ x) = x,$$

burada uyğun stoxastik inteqral tərs İto inteqralı kimi anlaşılır.

Əd.: [1] Розовский Б. Л., Эволюционные стохастические системы, М., 1983.

TƏRS TƏNLİYİ, DİFFUZİYANIN « обратное уравнение диффузии; backward diffusion equation » – bax, *Stoxastik differensial tənlik* xüsusi törəmələrli.

TƏRS TƏNLİYİ, KOLMOQOROVUN « обратное уравнение Колмогорова; backward Kolmogorov equation » – bax, *Diffuzion proses*, *Kolmoqorov tənlikləri*, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı, *Stoxastik differensial həndəsə.*

TƏSADÜFİ AĞAC « случайное дерево; random tree » – ağacların hər hansı T çoxluğunun *təsadüfi elementidir* ki, T-də müntəzəm paylanma qanununa tabedir, yəni T-dən ixtiyari bir qiyməti eyni ehtimalla alır. T. a.-ın ədədi xarakteristikaları təsadüfi kəmiyyətlərdir.

T_n – kök adlanan təpəsinə görə seçilmiş bütün kök – ağacların və n sayda $1, 2, \ldots, n$ ədədləri ilə nömrələnmiş köksüz təpələrli ağacların çoxluğu olsun.

T-dən olan T. a.-ın ən təbii xarakteristikaları: $\mu_r(T_n)$, – r misilli təpələrin sayı, $\mu(t,\ T_n)$, – t hündürlüklü təpələrin sayı, ağacın hündürlüyü – $\tau(T_n) = \max\{t:\ \mu(t,\ T_n) > 0\}$ kimi kəmiyyətlərdir.

Əgər $n \to \infty$ olarsa, onda ixtiyari $r = 0, 1, \ldots$ qeyd olunmuş qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\ \mu_r(T_n) = k\ \} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi n}}\ e^{-u^2/2}\,(1 + o(1))$$

bərabərliyi $u = (k - np_r)/(\sigma_r \sqrt{n})$-nun ixtiyari sonlu intervalda yerləşməsini təmin edən tam K-lara görə müntəzəm ödənilir; burada $\sigma_r^2 = p_r(1 - p_r - (1-r)^2\, p_r)$ və $p_r = e^{-1}/r!$.

İxtiyari qeyd olunmuş müsbət tam $k_1, \ldots, k_t$ qiymətlərində $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\ \mu(1, T_n) = k_1, \ldots, \mu(t, T_n) = k_t\ \} \to \mathbf{P}\{1 + \xi_1 = k_1\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{1 + \xi_1 + \ldots + \xi_{k_1} = k_2\}\ \ldots\ \mathbf{P}\{1 + \xi_1 + \ldots + \xi_{k_{t-1}} = k_t\}$$

münasibəti doğrudur, burada $\xi_1, \xi_2, \ldots$, – $\mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = e^{-1}/r!$, $r = 0, 1, \ldots$ ehtimalları ilə verilən, asılı olmayan eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Əgər n və t $t/\sqrt{n} \to 0$ münasibətini $t \to \infty$ olduqda ödəyirlərsə, onda ixtiyari qeyd olunmuş $x > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\ 2\mu(t, T_n)/t \le x\ \} \to 1 - e^{-x} - xe^{-x}$$

münasibəti ödənilir.

Qeyd olunmuş ixtiyari $x > 0$ üçün $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\ \{\tau(T_n)/\sqrt{n}\ \le x\} \ \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2 x^2)\ e^{-k^2 x^2/2}$$

münasibəti doğrudur.

R, – $\{0, 1\}$ ilə üst-üstə düşməyən, 0 daxil olan tam mənfi olmayan ədədlər çoxluğu; $T_{n,R}$, – T_n çoxluğunun təpələrinin bölənləri R-dən qiymətlər alan bütün ağaclarının altçoxluğu, $\xi_R(\lambda)$ isə paylanma qanunu

$$\mathbf{P}\ \{\ \xi_R(\lambda) = k\ \} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!\, P(\lambda,\ R)}, \quad k \in R,$$

$$P(\lambda,\ R) = \sum_{k \in R} \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}$$

olan təsadüfi kəmiyyət olsun. Elə λ_R vardır ki, $\mathbf{M}\xi_R(\lambda_R) = 1$. $B_R = \mathbf{D}\xi_R(\lambda_R)$ olsun. Bölünmə əlaməti üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər T. a.-ın xassələrinin T-dən olan T. a.-larla müqayisədə mühüm dəyişkənliyinə səbəb olmur. Məs., $\tau(T_n)\sqrt{n}$ və $\tau(T_{n,R})\sqrt{B_R}/n$-in limit paylanmaları üst-üstə düşür, burada $\tau(T_{n,R})$, – $T_{n,R}$ çoxluğundan olan T. a.-in hündürlüyüdür.

$\mu_r(t,\ T_{n,R})$ – təpələrinin hündürlüyü t-yə bərabər, r misilli təpələrin sayı; $\mu(t, T)$ – bir hissəciklə başlayan $t = 0, 1, \ldots$, diskret zamanlı bircins Qalton – Vatson şaxələnən prosesi olsun, bu prosesdə bir hissəciyin varisləri sayının paylanması $\xi_R(\lambda)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə eynidir. $\mu_r(t,\ R)$ bu prosesdə t anında r sayda varisi olan hissəciklərin sayı, $\nu(R)$ prosesin evolyusiyası ərzindəki bütün hissəciklərin sayı olsun, $\|\mu_r(t, T_{n,R})\|$, $\|\mu_r(t,\ R)\|$, $t, r = 0, \ldots, n$ matrisləri üçün və bunlarla eyni ölçülü M matrisi üçün ixtiyari $\lambda > 0$ qiymətində

$$\mathbf{P}\{\ \|\mu_r(t, T_{n,R})\| = M\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\ \|\mu_r(t, R)\| = M \mid \nu(R) = n + 1\}$$

münasibəti ödənilir.

Bu münasibət $T_{n,R}$ -dən olan T. a.-ın bir sıra xarakteristikalarının paylanmasının öyrənilməsini $\mu(t, R)$ şaxələnən prosesin uyğun xarakteristikalarının şərti paylanmalarının öyrənilməsinə gətirir.

Digər çoxluqlarda olan T. a.-ların xassələri az öyrənilmişdir (məs., təpələri nömrələnmiş köksüz ağaclar çoxluğu, «yastı» ağaclar çoxluğu və s. kimi).

Əd.: [1] К о л ч и н В. Ф. Случайные отображения, М., 1984; [2] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978.

***TƏSADÜFİ AXIN « случайный поток; random flow »**, t ə s a d ü f i ç o x l u ğ u n d o ğ u r d u ğ u – *təsadüfi çoxluğun* doğurduğu *təsadüfi kəmiyyətlər* sistemidir. $\mathbf{T}$ – parametrik fəza, $\{\mathbf{T}, \mathscr{F}_{\mathbf{T}}\}$, – $t \in \mathbf{T}$ parametrinin qiymətlərinin ölçülən fəzası olsun; $\mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ – ölçülən çoxluqların σ – cəbridir. $(\Omega, \mathscr{B}_{\Omega}, \mathbf{P})$, $\omega \in \Omega$ – elementar hadisələrinin ilkin ehtimal fəzasıdır. Əgər ixtiyari $\Delta \in \mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ üçün $s_\alpha = s_\alpha(\omega) \in \mathbf{T}$ nöqtələrinin çoxluğu $\mathbf{S}_\omega = \{s_\alpha\}$ ilə Δ -nın kəsişməsi – $\mathbf{S}_\omega \bigcap \Delta$ çoxluğunun nöqtələri sayı $\eta(\Delta)$ təsadüfi kəmiyyət olarsa, $\mathbf{S}_\omega$ *təsadüfi* (*nöqtəvi*) *çoxluq* adlanır. $\eta(\Delta)$, $\Delta \in \mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ təsadüfi kəmiyyətləri $0, 1, \ldots, \infty$ tam qiymətlərini alır və əgər $i \neq j$, $\Delta_i \bigcap \Delta_j = \varnothing$ olarsa,

$$\eta\left(\bigcup_i \Delta_i\right) = \sum_i \eta(\Delta_i)$$

additivlik xassəsinə malikdirlər. $\eta(\Delta)$ təsadüfi kəmiyyətlər sisteminə $\mathbf{S}_\omega$ təsadüfi çoxluğunun doğurduğu *təsadüfi axın* deyilir. Məs., $N_u(s, t)$, – $\mathbf{S}_\omega = \{s : \xi(s) = u\} \bigcap (s, t)$ təsadüfi çoxluğunun nöqtələri sayı olsun. Təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin, fərqinin və limitinin (vahid ehtimalla yığılma mənasında) təsadüfi kəmiyyətlər olduğu faktına əsasən, göstərmək olar ki, ixtiyari Δ Borel çoxluğu üçün $\{s : \xi(s) = u\} \bigcap \Delta$ çoxluğunun nöqtələri sayı $N_u(\Delta)$ təsadüfi kəmiyyətdir.

Əgər $\eta(\Delta)$ $\{\mathbf{T}, \mathscr{F}_{\mathbf{T}}\}$ ölçülən fəzasında T. a.-dırsa, onda hər bir $\Delta \in \mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ çoxluğuna

$$\mu(\Delta) = \mathscr{E}\eta(\Delta) \tag{1}$$

funksiyasını qarşı qoymaq olar.

$\mu(\Delta) \geq 0$, $\Delta_i \bigcap \Delta_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\Delta i \in \mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ olduqda $\mu\left(\bigcup_i \Delta_i\right) = \sum_i \mu(\Delta_i)$ olduğundan, $\mu(\Delta)$ funksiyası ölçüdür. Əgər $\mu(\Delta)$ $\upsilon(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz σ – sonlu ölçü olarsa, onda Radon – Nikodim teoreminə əsasən,

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \mu(t)\, \upsilon(dt). \tag{2}$$

$\mu(\Delta)$ ölçüsü $\eta(\Delta)$ axınının *aparıcı ölçüsü* adlanır. $\mu(\Delta)$ σ – sonlu ölçü olarsa, $\eta(\Delta)$ *finit axın* adlanır. (2) bərabərliyini ödəyən $\mu(t)$ funksiyasına $\eta(\Delta)$ axınının $\upsilon(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən *intensivlik funksiyası* deyilir. $\mu(t)$-nin t nöqtəsində qiymətinə *axının t nöqtəsində intensivliyi* deyilir.

Aparıcı ölçü və ya intensivlik funksiyasının bilavasitə hesablanması bir çox hallarda böyük çətinliklə bağlı olur. Bu nöqteyi – nəzərdən, A. Ya. Xinçin (bax, [2]) tərəfindən verilmiş və parametr anlayışını ümumiləşdirən *axının parametrik ölçüsü* anlayışının daxil edilməsi faydalı olmuşdur.

$\mathscr{D}(\Delta)$, – $\Delta \in \mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ çoxluğunun bütün mümkün ola bilən *bölgülərinin* sinfi olsun. $\Delta \in \mathscr{F}_{\mathbf{T}}$ çoxluq funksiyasının

$$\lambda(\Delta) = \sup_{d(\Delta) \in \mathscr{D}(\Delta)} \sum_{\Delta_\alpha \in d(\Delta)} \mathbf{P}\{\eta(\Delta_\alpha) > 0\} \tag{3}$$

bərabərliyilə təyin olunduğu fərz olunur. İsbat etmək olar ki, $\lambda(\Delta)$, $F_{\mathbf{T}}$ -də təyin olunmuş ölçüdür və $\lambda(\Delta) \leq \mu(\Delta)$; burada $\mu(\Delta)$, – (1) bərabərliyi ilə təyin olunan aparıcı ölçüdür. Beləliklə, əgər axın finit axındırsa və $\mu(\Delta)$ ölçüsü $\upsilon(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdürsə, onda

$$\lambda(\Delta) = \int_\Delta \lambda(t)\, \upsilon(dt). \tag{4}$$

(3) düsturu ilə təyin olunan $\lambda(\Delta)$ ölçüsü $\eta(\Delta)$ T. a.-nın *parametrik ölçüsü* adlanır. (4) bərabərliyini ödəyən $\lambda(t)$ funksiyasına $\eta(\Delta)$ T. a.-nın $\upsilon(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən *parametrlər funksiyası* deyilir. $\lambda(t)$-nin t nöqtəsində qiyməti *axının t nöqtəsində parametri* adlanır.

$\mathbf{S}_\omega$ təsadüfi çoxluğunun $\{\mathbf{T}, \mathscr{F}_{\mathbf{T}}\}$-da doğurduğu təsadüfi axının $\upsilon(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən intensivlik funksiyası $\mu(t)$-nin varlığının zəruri və kafi şərti $\upsilon(\Delta)$ ölçüsünə nəzərən $\lambda(t)$ parametrlər funksiyasının varlığıdır.

Təsadüfi axınlar və ya digər terminologiyada nöqtəvi proseslər nəzəriyyəsi əsas etibarilə kütləvi xidmət nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələləri, sayğaclarla bağlı məsələlərlə əlaqədar olaraq inkişaf etmişdir. Daha ətraflı tanışlıq məqsədilə D. R. Koks və V. Smitin (bax, [3]) kitabına müraciət etmək olar.

Əd.: [1] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [2] Х и н ч и н А. Я., Работы по теории массового обслуживания, М., 1963; [3] К о к с Д. Р., С м и т В., Теория восстановления, М., 1967.

TƏSADÜFİ AXTARIŞ « случайный поиск; random search » – determinik və stoxastik təbiətli ekstremal məsələlərin elə həll metodudur ki, ekstremum nöqtəsinin təyin edilməsindəki iterasiya prosesi süni olaraq təsadüfilik daxil olunmasına (randomizasiyaya) əsaslanır. İterasiya prosesində n -ci yaxınlaşmadan $(n+1)$-ci yaxınlaşmaya keçdikdə təsadüfilik daxil etmə üçün hərəkət istiqaməti, addımın ölçüsü və s. kimi xarakteristikalar təsadüfi seçilə bilinər. T. a. *stoxastik approksimasiya* nəzəriyyəsi çərçivəsində nəzəri əsaslandırılmışdır.

Əd.: [1] Р а с т р и г и н Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

TƏSADÜFİ ARDICILLIQ « случайная последовательность; random sequence » d i s k r e t z a m a n l ı t ə s a d ü f i p r o s e s, z a m a n s ı r a s ı – faza fəzaları $(E_k, \mathscr{A}_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, ümumiyyətlə, müxtəlif olan, eyni $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş X_k, $k = 0, 1, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllığıdır.

Təsadüfi proseslərin ümumi nəzəriyyəsi üçün T. a. sinfinin mühümlüyü iki cəhəti ilə izah olunur: birincisi, nəzəri – ehtimali

məsələlərin bir çoxu bilavasitə T. a. anlayışına gətirir. İkincisi texniki cəhətdən diskret zaman kəsilməz zaman halından olduqca sadədir, odur ki, hər bir yeni problemi öyrəndikdə (təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi çərçivəsində), adətən, onun diskret analoquna baxılır.

$X_0, X_1, \ldots$ ardıcıllığının ehtimali xassələri $(E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_n, \mathscr{A}_0 \times \mathscr{A}_1 \times \ldots \times \mathscr{A}_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ fəzasında $\mathbf{P}_n$ ehtimal ölçülərinin ardıcıllığı ilə birqiymətli təyin olunur:

$$\mathbf{P}_n(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n) = \mathbf{P}\{X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n\}$$

burada $A_j \in \mathscr{A}_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Müxtəlif n-lər üçün $\mathbf{P}_n$ ehtimal ölçüləri, təbii olaraq, uzlaşma şərti:

$$\mathbf{P}_{n+1}(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n \times E_{n+1}) =$$

$$= \mathbf{P}_n\{A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n\}$$

bərabərliyi ilə əlaqəlidirlər.

Əgər bütün $(E_k, \mathscr{A}_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ faza fəzaları Borel fəzaları olarsa, onda Kolmoqorov teoremində hökm olunduğu kimi $(E_0 \times \ldots \times E_n, \mathscr{A}_0 \times \ldots \times \mathscr{A}_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ fəzasında təyin olunmuş, uzlaşma şərtini ödəyən $\mathbf{P}_n$ ehtimal ölçülərinin ixtiyari ardıcıllığı hər hansı X_n, $n = 0, 1, \ldots$ T. a.-na uyğun olur.

Əgər $\mathbf{P}_n$ ölçüləri şərti paylanmaların hasili kimi verilərsə, onda faza fəzalarının Borel fəzaları olması şərti bu son hökmdə nəzərən alınmaya bilinər. Dəqiq ifadə aşağıdakı hökmdən aydın olur.

İonesku Tulçi teoremi:

$$\mathbf{P}_n(dx_0 \times \ldots \times dx_n) = \mathbf{P}_0(dx_0) \prod_{k=1}^{n} Q(x_0, \ldots, x_{k-1}; dx_k)$$

olsun, burada $Q_k(x_0, \ldots, x_{k-1}; A)$ hər bir qeyd olunmuş $A \in \mathscr{A}_k$ üçün $E_0 \times \ldots \times E_{k-1}$ fəzasında $(\mathscr{A}_0 \times \ldots \times \mathscr{A}_{k-1})$ – ölçülən funksiyadır, bütün mümkün ola bilən qeyd olunmuş $x_0, \ldots, x_{k-1}$ qiymətlərində $(E_k, \mathscr{A}_k)$-da ehtimal ölçüsüdür. Onda elə $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası və X_k, $k = 0, 1, \ldots$ T. a. tapılar ki, bütün $n \geq 0$, $A_j \in \mathscr{A}_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ üçün

$$\mathbf{P}_n(A_0 \times \ldots \times A_n) = \mathbf{P}\{X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n\}$$

bərabərliyi doğrudur. Borel faza fəzaları üçün bu teorem Kolmoqorov teoremi ilə eyni olur, belə ki, Borel fəzalarının hasilində ixtiyari ehtimal ölçüsü şərti paylanmaların hasili kimi ifadə olunur.

TƏSADÜFİ AVTOMAT « случайный автомат; stochastic automaton » – bax, *Ehtimali avtomat.*

TƏSADÜFİ BÖLGÜ « случайное разбиение; random partition » – X_n çoxluğunun kəsişməyən altçoxluqlara bölgüləri çoxluğunda qiymətlər alan təsadüfi obyektdir. Sonlu gücə malik çoxluqların bölgüləri və natural ədədlərin bölgüləri bölgülərə misaldır.

n müxtəlif elementdən ibarət X_n çoxluğunun bölgüləri sayı T_n-ə bərabərdir, burada T_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ – Bell ədədləri adlanır və

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{t^n}{n!} = \exp\{e^t - 1\}$$

münasibətilə təyin olunurlar.

ξ_n, – X_n-in T. b.-dəki altçoxluqların (blokların) sayı, η_n – altçoxluqların müxtəlif ölçüləri sayı olsun. Əgər T. b.-lərin hamısı bərabərehtimallı olarsa, onda

$$\mathbf{M}x^{\xi_n} = \frac{1}{T_n} \sum_{j=0}^{n} \sigma(n, j)\, x^j$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\sigma(n, j)$ – ikinci növ Stirlinq ədədləridir. $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\xi_n \sim \frac{n}{\ln n}, \quad \mathbf{D}\,\xi_n \sim \frac{n}{(\ln n)^2}, \quad \mathbf{M}\eta_n \sim e \ln n$$

münasibətləri doğrudur,

$$(\mathbf{D}\xi_n)^{-1/2}\,[\xi_n - n/\ln n\,]$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanması standart normal paylanmaya yığılır və $\eta_n(\mathbf{M}\eta_n)^{-1} \to 1$ ehtimala görə yığılmadır.

Bloklarının ölçülərinə məhdudiyyətlər olmayan sonlu çoxluqların bərabərehtimallı T. b.-ləri – T. b.-nün ümumi ehtimali – kombinator sxeminin xüsusi halıdır (bax, [1]). Belə sxemdə bölgülərin bloklarının ölçüləri $A \subseteq \{1, 2, \ldots\}$ ardıcıllığının elementləri olmalıdır, bu şərti ödəyən hər bir bölgüyə isə $(T_n^A)^{-1}$ ehtimalı qarşı qoyulur, burada T_n^A, – X_n-in bölgülərinin ümumi sayıdır. Bu blokların ölçüləri A-da yerləşir.

Natural n ədədinin bölgüsü – $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$ cəmi şəklində n ədədinin ifadəsidir və bu cəmin bütün toplananları natural ədədlərdir və $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$. n ədədinin bölgüləri çoxluğu ilə müxtəlif elementlərdən ibarət X_n çoxluğunun bölgüləri çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq vardır. Əgər $p(n)$ n ədədinin bütün bölgülərinin sayıdırsa, onda

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-1}$$

bərabərliyi doğrudur.

ζ_n və θ_n – uyğun olaraq n ədədinin T. b.-dəki toplananların sayı və müxtəlif toplananların sayı olsun. Əgər bütün bölgülər bərabərehtimallı olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{M}\zeta_n \sim \frac{2}{3\pi}\sqrt{n}\,\ln n, \qquad \mathbf{M}\theta_n \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{6n}$$

münasibətləri doğrudur.

Əd.: [1] Сачков В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, M., 1978; [2] Erdos P., Lehner J., «Duke Math. J.», 1941, v. 8, № 2, p. 335–45; [3] Odlyzko A. M., Richmond L. B., «J. Comb. Theory», ser. A., 1985, v. 38, № 2, p. 170–81.

TƏSADÜFİ BUL FUNKSİYASI « случайная булева функция; random Boolean function » – $z = f(x_1, \ldots, x_n; \omega)$ şəklində funksiyadır, x_i, z – Bul dəyişənləridir, yəni 0 və 1 qiymətlərini alan dəyişənlərdir, ω –

elementar hadisələrdir. T. B. f. $(\mathbf{P}_f, f \in F)$ ehtimal paylanmaları vasitəsilə verilə bilinər; burada F, – n sayda dəyişəndən asılı 2^{2^n} sayda bütün Bul funksiyalarının çoxluğudur. T. B. f.-nın ehtimal xassələri kimi [məs., $|f| = \sum_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$ «çəkisinin» paylanması, x_i dəyişənləri üzrə f-in monotonluq ehtimalı], məntiqi sxemlərlə verilən T. B. f.-larının reallaşdırılması da öyrənilir. İsbat olunmuşdur ki, $(\mathbf{P}_f, f \in F)$ ehtimal paylanmalarının eyni olduğu halda ikidəyişənli Bul funksiyalarının superpozisiyaları sinfində $2^n/n$ nisbəti $n \to \infty$ olduqda ehtimala görə 1-ə yığılır. $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ təsadüfi vektoru hər hansı təsadüfi inikas təyin edir, burada f_i – T. B. f.-dır.

TƏSADÜFİ CƏM « случайная сумма; random sum » – təsadüfi sayda *təsadüfi kəmiyyətlər* cəmidir. N, $\xi_1, \xi_2, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin eyni ehtimal fəzasında verildiyi, N-in isə yalnız natural qiymətlər aldığı fərz olunur. Onda $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ təsadüfi cəmdir. T. c.-lər etibarlılıq nəzəriyyəsi, biologiyanın, sığortanın riyazi nəzəriyyəsində bir çox obyektlərin riyazi modelləridir.

T. c. - in momentləri. Əgər hər bir $n \geq 1$ qiymətində $\{N \leq n\}$ hadisəsi və $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbr asılı olmazlarsa və $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N \geq n\}\, \mathbf{M}|\xi_n| \leq \infty$ olarsa, onda

$$\mathbf{M} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N \geq n\}\, \mathbf{M}\xi_n$$

düsturu doğrudur. Əgər $N, \xi_1, \xi_2, \dots$ küllüyyatca asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $m_j = \mathbf{M}\xi_j$, $\sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j < \infty$, $j \geq 1$ olarsa, onda

$$\mathbf{D} S_N = \mathbf{M}(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_N^2) + \mathbf{D}(m_1 + \dots + m_N)$$

düsturu doğrudur.

T. c. üçün böyük ədədlər qanunu. $\xi_1, \xi_2, \dots$ – riyazi gözləmələri $\mathbf{M}\xi_1 = m \neq 0$ olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. Müəyyənlik üçün fərz olunur ki, $m > 0$. Fərz olunur ki, natural qiymətli $\{N_k\}_{k \geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətləri hər bir $k \geq 1$ qiymətində $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ ardıcıllığından asılı deyildir, $N_k \to \infty$ münasibəti ehtimala görə yığılmadır, $F(x)$ isə ixtiyari paylanma funksiyasıdır. Onda

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{1}{km} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j < x \right\} \to F(x)$$

yığılmasının ($k \to \infty$ olduqda zəif yığılma) ödənilməsi üçün

$$\mathbf{P}\{N_k < kx\} \to F(x) \text{ (} k \to \infty \text{ olduqda zəif yığılma)}$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

T. c. üçün mərkəzi limit teoremi: $\xi_1, \xi_2, \dots$ – riyazi gözləmələri $\mathbf{M}\xi_j = 0$, $j \geq 1$ olan, Lindeberq şərtini ödəyən, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun. $0 < \sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j < \infty$, $j \geq 1$ və $B_k^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_k^2$, $k \geq 1$, $\{d_k\}_{k \geq 1}$ – qeyri – məhdud artan müsbət ədədlər ardıcıllığı, $F(x)$ – ixtiyari paylanma funksiyası, $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyası olsun. Fərz olunur ki, $k \to \infty$ olduqda ehtimala görə $N_k \to \infty$ (ehtimala görə yığılma) .

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{1}{d_k} \sum_{j=1}^{N_k} \xi_j < x \right\} \to F(x)$$

($k \to \infty$ olduqda zəif yığılma)

münasibətinin ödənilməsi üçün elə mənfi olmayan U təsadüfi kəmiyyətinin varlığı zəruri və kafidir ki, bu təsadüfi kəmiyyət üçün $F(x) = \mathbf{M}\Phi(x/U)$, $x \in \mathbb{R}$ olsun və

$$B_{N_k}/d_k \to U \text{ (} k \to \infty \text{ olduqda zəif yığılma)}$$

münasibəti ödənsin.

Köçürtmə teoremi (теорема переноса). $\{\xi_{nj}\}_{j \geq 1}$, $n = 1, 2, \dots$ – hər bir seriyada eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin seriyalar ardıcıllığı, $\{N_n\}_{n \geq 1}$ – naturalqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun; hər bir $n \geq 1$ qiymətində $N_n, \xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər fərz olunur. $\{k_n\}_{n \geq 1}$ – natural ədədlər ardıcıllığı, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ və $\{c_n\}_{n \geq 1}$ – həqiqi ədədlər ardıcıllığı olsun. Fərz olunur ki, elə Y, U və V təsadüfi kəmiyyətləri vardır ki,

$$\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj} - a_n \to Y \text{ (} n \to \infty \text{ olduqda zəif yığılma)}$$

$N_n/k_n \to U$ və $a_n N_n/k_n - c_n \to V$ ($n \to \infty$ olduqda zəif yığılma) münasibətləri ödənilir. Onda

$$\sum_{j=1}^{N_n} \xi_{nj} - c_n \to Z \text{ (} n \to \infty \text{ olduqda zəif yığılma)}$$

münasibəti doğrudur, burada Z – xarakteristik funksiyası $f(t) = \mathbf{M}[h^U(t) \exp\{itV\}]$ olan təsadüfi kəmiyyətdir; $h(t) = \mathbf{M}e^{itY}$. Qeyd etmək lazımdır ki, U və ya V kəmiyyətlərinin heç olmasa biri cırlaşmaş təsadüfi kəmiyyət olmalı, ya da ki, müəyyən a və ya b həqiqi ədədləri üçün $\mathbf{P}\{V = aU + b\} = 1$ bərabərliyi ödənilməlidir.

Ədb.: [1] Mogyorodi J., «Acta Math. sci. hung.», 1966, t. 17, p. 401–09; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [3] Круглов В. М., Королев В. Ю., Предельные теоремы для случайных сумм, М., 1990; [4] Gnedenko B. V., Korolev V. Yu., Random summation: Limit theorems and applications, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

TƏSADÜFİ ÇOXGİRİŞLİLİK « случайный множественный доступ; random multiple access » – elə münaqişəli *çoxgirişlilikdir* ki, xidmət gözləyən tələblər, bu münaqişənin həllində, resursa təsadüfi zaman müddətlərindən bir daxil olmağa cəhd edirlər.

T. ç.-in tipik ehtimal məsələlərindən biri aşağıdakı kimidir. $[0, L]$ parçasında intensivliyi λ-ya bərabər X, $0 \le x^{(1)} \le x^{(2)} \le \ldots \le L$ – təsadüfi nöqtəvi Puasson prosesi verilir. $\mathbf{B}$, – $[0, L]$ parçasının bütün altcoxluqlarının çoxluğu olsun. $B_0, B_1, \ldots, B_{t-1}$, – $\mathbf{B}$-nin hər hansı elementləri, ω_i, – X prosesinin B_i-dən olan $x^{(j)}$ nöqtələrinin sayı,

$$\theta_i = \begin{cases} \omega_{i-1}, & \omega_{i-1} \le 1 \quad \text{olduqda}, \\ 2, & \omega_{i-1} \ge 2 \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

olsun. T_t, – $\theta(t) = (\theta_1, \ldots, \theta_t)$ təsadüfi vektorunun qiymətlər çoxluğu, f_t, – $f_t : T_t \to \mathbf{B}$ inikası olsun. $\theta(t)$-yə təsir edən f_t inikasının qiyməti $B_t \in \mathbf{B}$ təsadüfi çoxluğudur. B_0 və f_t, $t = 1, 2, \ldots$ toplusu f T. ç. alqoritmi adlanır. $A_t = \bigcup B_i$ (burada birləşmə – $\{i : 0 \le i \le t-1, \ \theta_{i+1} \le 1\}$ üzrə götürülür), – t anına kimi f alqoritmi ilə araşdırılmış çoxluq adlanır.

f alqoritminin gecikməsi (rus. задержка алгоритма)

$$D_f = \overline{\lim_{L \to \infty}} \ \mathbf{M}\Omega(L)$$

kəmiyyətinə deyilir, burada $\Omega(L) = \tau(L) - L$, $\tau(L) = \min\{t : [0, L] \subset A_t\}$ [$\tau(L)$ – araşdırmanın dayandığı andır].

$\lambda = 1$ olduqda f alqoritminin sürəti

$$R_f = \overline{\lim_{L \to \infty}} \, [L / \mathbf{M}\tau(L)]$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Əgər $R_f > 0$ olarsa, f alqoritmi dayanıqlı alqoritm adlanır.

Alqoritm sürəti

$$R_{f_0} = C = \max_f R_f$$

olan f_0 alqoritmi optimal alqoritm adlanır, burada maksimum bütün mümkün ola bilən f T. ç. alqoritmləri üzrə götürülür. T. ç. məsələsi optimal və ya bu alqoritmə yaxın alqoritmin axtarılmasından, bu alqoritm üçün alqoritm geçikməsi D_f-in, $R_f = C$ sürətinin və digər daha mürəkkəb xarakteristikaların hesablanmasından ibarətdir. T. ç. üçün məlum alqoritmlərin sürətlərindən $R_f = 0{,}375$ olan ağacvari alqoritm, $R_f = 0{,}409$ olan stek – alqoritm, $R_f = 0{,}487$ olan parçalama alqoritmi məlumdur. C sürəti üçün $0{,}487 \le C \le 0{,}568$ sərhədləri doğrudur.

Əd.: [1] Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями, пер. с англ., М., 1979; [2] Бертсекас Д., Галлагер Р., Сети передачи данных, пер. с англ., М., 1989; [3] Tsybakov B. S., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1985, v. 31, № 2, p. 143–65.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ « случайное множество; random set » – ixtiyari $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının elementar nəticələri ailəsinin, elementləri çoxluqlar olan, hər hansı $\mathscr{M}$ fəzasına ölçülən A inikasıdır. Məs., $\mathscr{M}$ topoloji fəzadırsa, ölçülənlik Borel mənada anlaşılır.

T. ç. $\mathscr{M}$-dən asılı olaraq müxtəlif surətdə təyin olunur:

1) $\mathscr{M} = \mathscr{T}$ hər hansı baza topoloji fəza S-in qapalı çoxluqlarının topoloji fəzasıdır, onda T. ç. *qapalı təsadüfi çoxluqdur*; 2) $\mathscr{M} = \mathscr{O}$ açıq çoxluqların topoloji fəzasıdır, onda T. ç. *açıq təsadüfi çoxluqdur*; 3) $\mathscr{M} = \mathscr{H} - (\overset{\circ}{D}, \overline{D})$ cütlərinin topoloji fəzasıdır, burada $D \subset S$, S – baza topoloji fəza, $\overset{\circ}{D}$ və $\overline{D}$ uyğun olaraq, D-nın daxili və tamamlayıcısıdır, bu halda *təsadüfi fiziki müxtəlif çoxluqlar* adlanan termin işlədilir (bax, [4]); 4) $\mathscr{M} = \mathscr{K}$ (və ya $\mathscr{K}'$) kompakt çoxluqların (uyğun olaraq boş olmayan kompakt) topoloji fəzasıdırsa, bu halda *təsadüfi* (boş olmayan) kompakt çoxluq alınır; 5) $\mathscr{M} = \mathrm{conv}(\mathscr{K})$ $\mathscr{K}$-nın (və ya $\mathscr{K}'$-in) qabarıq elementlərinin altfəzası olarsa, onda təsadüfi qabarıq çoxluq alınır.

Təsadüfi qapalı çoxluğun paylanmasının verilməsi üçün *müşayiətedici funksionaldan* istifadə olunur, bu terminlə T. ç.-un bir çox xassələrini ifadə etmək rahat olur. Açıq təsadüfi çoxluqlar və təsadüfi fiziki müxtəlif çoxluqlar nəzəriyyələri təsadüfi qapalı çoxluqlar nəzəriyyəsindən standart dəyişdirilmələr vasitəsilə alınır.

Bəzi məsələlərin həllində sonlu çoxluqlarda müşayiətedici funksionalın qiymətlərindən istifadə etmək kifayətdir; sonlu çoxluqlarda müşayiətedici funksionalın qiymətləri təsadüfi çoxluğun *nöqtəvi paylanma qanunu* adlanan paylanmanı təyin edir; bu qanun isə ümumi halda T. ç.-un paylanmasını birqiymətli təyin etmir. Lakin elə separabel T. ç.-lar sinfi vardır ki, bu çoxluqlar üçün nöqtəvi qanun paylanmanı tamamilə təyin edir: bu elə T. ç.-lardır ki, $A = \overline{A \cap D}$ xassəsini ödəyir, burada D çoxluğu S-də hesabi və hər yerdə sıx çoxluqdur.

T. ç.-ların mühüm olan xüsusi sinifləri: *sonsuz bölünən təsadüfi çoxluqlar*, *Qauss təsadüfi çoxluqları*, *izotrop təsadüfi çoxluqlar*, *semimarkov təsadüfi çoxluqlar*, *stasionar təsadüfi çoxluqlar*, *dayanıqlı təsadüfi çoxluqlar* sinifləridir.

T. ç.-un digər – əvvəlcədən topologiya (baza topologiyasının) verilməsini fərz etməyən üsullarla təyin edən halları mövcuddur; bunlardan ən mühümləri: Kendall üsulu (bax, [1]); təsadüfi funksiyalara gətirilmə üsulu (məs., qabarıq çoxluqlar halında dayaq funksiyalarına gətirilmə); Kolmoqorov – Hemminq metrikasını (çoxluqların simmetrik fərqlərinin ölçüsünü) istifadə edən üsulu qeyd etmək olar. *Sonlu təsadüfi çoxluq* xüsusi müxtəlif halları ilə seçilir.

T. ç. nəzəriyyəsinin ən inkişaf etmiş bölmələri təsadüfi çoxluqlar statistikası, təsadüfi çoxluqlar üçün limit teoremləri, paylanmaların müxtəlif xarakteristikalarının hesablanması üsulları (bax, *Riyazi gözləmə*(si) təsadüfi çoxluğun, *Dispersiya*(sı) təsadüfi çoxluğun, *Orta qiymət*(i) təsadüfi çoxluğun) kimi bölmələrdir.

Əd.: [1] Kendall D. G., в кн.: Stochastic geometry, N. Y., 1974; [2] Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1953–54, t. 5, p. 131–293; [3] Michael E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 71, p. 152–82; [4] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия., пер. с англ., М., 1978.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ açıq « **случайное множество** открытое; open **random set** » – bax, *Açıq təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; böyük ədədlər qanunu « **случайное множество;** закон больших чисел; law of large numbers for **random set** » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ dayanıqlı « **случайное множество** устойчивое; stable **random set** » – bax, *Dayanıqlı təsadüfi çoxluq.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; dispersiya « **случайное множество;** дисперсия; variance of a **random set** » – bax, *Dispersiya*(sı) təsadüfi çoxluğun.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ izotrop « **случайное множество** изотропное; isotropic **random set** » – bax, *İzotrop təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ qabarıq « **случайное множество** выпуклое; **random** convex **set** » – bax, *Təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ qapalı « **случайное множество** замкнутое; closed **random set** » – bax, *Qapalı təsadüfi çoxluq*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ(ğu) Qauss « **случайное множество** гауссовское; Gaussian **random set** » – bax, *Qauss təsadüfi çoxluğu.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; limit teoremləri « **случайное множество;** предельные теоремы; limit theorems for **random set** » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi çoxluqlar üçün.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ nöqtəvi « **случайное множество** точечное; **random** point **set** » – bax, *Təsadüfi axın.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; nöqtəvi paylanma qanunu « **случайное множество;** точечный закон распределения; point law of distribution of **random set** » – bax, *Nöqtəvi paylanma qanunu* təsadüfi çoxluğun.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; orta qiymət « **случайное множество;** среднее значение; mean value of a **random set** » – bax, *Orta qiymət*(i) təsadüfi çoxluğun.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; paylanma « **случайное множество;** распределение; distribution of a **random set** » – bax, *Müşayiətedici funksional.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; proyeksiya « **случайное множество;** проекция; projection of a **random set** » – bax, *Proyeksiya*(sı) təsadüfi çoxluğun.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; riyazi gözləmə « **случайное множество;** математическое ожидание; expectation of a **random set** » – bax, *Riyazi gözləmə*(si) təsadüfi çoxluğun.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ(ğu) semi–Markov « **случайное множество** полумарковское; semi–Markov **random set** » – bax, *Semi – Markov təsadüfi çoxluğu*.

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ sonlu « **случайное множество** конечное; finite **random set** » – bax, *Sonlu təsadüfi çoxluq.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ sonsuz bölünən « **случайное множество** безгранично делимое; infinitely divisible **random set** » – bax, *Sonsuz bölünən təsadüfi çoxluq.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ stasionar « **случайное множество;** стационарное; stationary **random set** » – bax, *Stasionar təsadüfi çoxluq.*

TƏSADÜFİ ÇOXLUQ; statistika « **случайное множество;** статистика; statistics of a **random set** » – bax, *Statistika*(sı) təsadüfi çoxluqların.

TƏSADÜFİ DETERMİNANT « **случайный детерминант; random determinant** » – n tərtib $\Xi = \left\| \xi_{ij} \right\|$ kvadrat *təsadüfi matrisinin* determinantıdır və $(-1)^t \xi_{1i_1} \dots \xi_{ni_n}$ şəklində bütün elementlərin cəminə bərabərdir, burada $(i_1, \dots, i_n)$, – $1, \dots, n$ ədədlərinin yerdəyişməsidir, t, – $(i_1, \dots, i_n)$ yerdəyişməsinin inversiyalarının sayıdır.

T. d. ilk dəfə çoxölçülü statistik analizdə öyrənilməyə başlanmışdı və burada belə bir müddəa alınmışdı: əgər x_k, $k = 1, \dots, n$, – $N(a, R)$ normal qanunu ilə paylanmış m – ölçülü ξ təsadüfi vektorunun asılı olmayan müşahidələri nəticələridirsə, $n > m$, onda

$$\det \hat{R} \approx \det R \prod_{i=n-m}^{n-1} \chi_i^2 (n-1)^{-m}$$

münasibəti doğrudur, burada $\hat{R}$ – empirik kovariasion matris, χ_i^2 – sərbəstlik dərəcəsi sayı i-yə bərabər χ^2 – paylanma qanununa tabe, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$\left\| \eta_i^j \right\|$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n-1$ təsadüfi matrisinin determinantına Vandermond təsadüfi determinantı deyilir. Aşağıdakı nəticələr isbat olunmuşdur:

Meta teoremi (Mehta M. L.,) : η_i, $i = 1, 2, \dots$, – $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; onda ixtiyari $n \geq 2$ və $k = 0, 1, 2, \dots$ üçün

$$\mathbf{M} \prod_{\substack{i>j; \\ i,j=1,\dots,n}} \left| \eta_i - \eta_j \right|^k = [\,\Gamma(1 + k/2)]^{-n} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 + kj/2)$$

bərabərliyi doğrudur.

θ_i, $i = 1, \dots, n$, – $(0, 2\pi)$ intervalında müntəzəm paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun; onda ixtiyari $k \geq 0$ tam ədədi üçün

$$\mathbf{M} \prod_{\substack{p \neq l; \\ p,l=1,\dots,n}} \left| e^{i\theta p} - e^{i\theta l} \right|^k = \Gamma(1+kn/2)[\Gamma(1+k/2)]^{-n}$$

bərabərliyi doğrudur.

T. d. təsadüfi matrisin elementlərinin funksiyası kimi, onun ehtimal nəzəriyyəsinin analitik metodları ilə araşdırılması baxımından, olduqca çətin olduğundan, T. d.-ın paylanmalarının öyrənilməsi üçün əksər hallarda

$$\pi^{n/2} \det A_n^{-1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(A_n \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)] \prod_{i=1}^{n} d\mathbf{x}^i \quad (*)$$

ifadəsindən istifadə olunur [A_n, – n tərtib müsbət müəyyən matris, $\mathbf{x}_n = (x^1, \dots, x^n)$ – vektordur]; (*) vasitəsilə bir çox limit teoremlərinin isbatları olduqca sadələşir. Ξ_n, – n tərtib həqiqi kvadrat təsadüfi matrislər ardıcıllığı olsun.

T. d. üçün **mərkəzi limit teoremi** aşağıdakı şəkildə ifadə olunan ixtiyari hökmə deyilir: a_n və b_n sabitlərinin hər hansı seçilmiş qiymətlərində və Ξ_n matrisinin elementləri üzərinə qoyulan bəzi şərtlərdə

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{b_n^{-1}[\ln|\det \Xi_n| - a_n] < x\} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$$

münasibəti doğrudur. Loqarifmik funksiyanın normalayıcı funksiya kimi seçilməsi ona əsaslanır ki, $\ln|\det \Xi_n|$ Ξ_n təsadüfi matrisinin məxsusi qiymətlərinin modullarının loqarifmlərinin cəminə bərabərdir və bu faktdan belə nəticə çıxarmaq olur ki, belə cəmlərin müvafiq normalaşmasından sonra mərkəzi limit teoremini almaq mümkündür.

T. d. üçün mərkəzi limit teoreminin isbatının üç metodu müəyyənləşdirilmişdir: kükrəntilər metodu (rus. метод возмущений), ortoqonalizasiya metodu, inteqral ifadələr metodu. **Kükrəntilər metodu**

$$\ln|\det A| - \ln|\det B| = \ln|\det[\mathbf{I} + B^{-1}(A-B)]|$$

düsturuna əsaslanır, burada A, B – kvadrat matrislərdir, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Bu düsturun köməyilə $\ln|\det \Xi_n|$-i bəzi hallarda, zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi kimi ifadə etmək olur ki, bunlara mərkəzi limit teoremini tətbiq etmək olur (bax, [1]).

Ortoqonalizasiya metodu aşağıdakı məlum nəticəyə əsaslanır: Əgər $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ təsadüfi matrisinin vektor sətirləri asılı olmayandırlarsa, onda bəzi ortoqonal çevirmələrlə $\ln\det \Xi_n^2$-nı n sayda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmi ilə ifadə etmək olur ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərə mərkəzi limit teoremi tətbiq olunur. Bu metodun köməyilə aşağıdakı hökm isbat olunmuşdur: fərz olunur ki, n -in hər bir qiymətində $\Xi_n = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ təsadüfi matrisinin elementləri **asılı olmayan təsadüfi elementlərdir**, $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(n)} = 0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)} = 1$, $\mathbf{M}[\xi_{ij}^{(n)}]^4 = 3$, $i, j = 1, \dots, n$ və hər hansı $\delta > 0$ üçün

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\dots,n} \mathbf{M}\left|\xi_{ij}^{(n)}\right|^{4+\delta} < \infty$$

bərabərsizliyi doğrudur, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\ln\det \Xi_n^2 - \ln(n-1)!}{\sqrt{2\ln n}} < x \right\} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

İnteqral ifadələr metodu (*) düsturuna əsaslanır. Bu düstur vasitəsilə $\ln|\det A|$-nı zəif asılı təsadüfi kəmiyyətlər cəmi kimi ifadə etmək olur, bu təsadüfi kəmiyyətlərə isə mərkəzi limit teoremini tətbiq etmək olur (bax, [1]).

Kükrəntilər metodunu $\mathbf{M}\Xi_n^2$, $n = 1, 2, \dots$ riyazi gözləməsinin varlığı halında tətbiq etmək münasibdir. Ortoqonalizasiya metodu o halda yaxşı nəticələr verir ki, Ξ_n təsadüfi matrislərinin elementləri asılı olmayan və $(0, 1)$ normal qanununun cazibə oblastına daxil olsunlar. İnteqral ifadələr metodu, əsas etibarilə, $(\mathbf{I} + \Xi_n)$ matrislərinin T. d.-ları üçün,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{|\det(\mathbf{I} + \Xi_n)| \geq h\} = 0$$

şərti ödənildikdə tətbiq olunur. Bu metodun köməyilə bəzi T. d.-ların paylanmalarının sonsuz bölünən qanuna zəif yığılması isbat olunmuşdur (bax, [1]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA « случайное блуждание; random walk » – xüsusi növ *təsadüfi prosesdir*, prosesi hər hansı təsadüfi mexanizmin təsiri ilə hər hansı faza fəzasında hissəciyin yerinidəyişməsinin riyazi modeli kimi interpretasiya etmək mümkündür. Faza fəzası kimi, adətən, d – ölçülü Evklid fəzası və ya bu fəzada tamqiymətli şəbəkə götürülür. Təsadüfi mexanizmlər müxtəlif ola bilir; əksər hallarda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənilməsi və ya Markov zəncirləri ilə doğurulmuş dolaşmalara baxılır. «T. d.» termini qruplarda Markov proseslərinin işarə edilməsi üçün də istifadə olunur.

T. d.-nın dəqiq ümumi qəbul edilmiş tərifi yoxdur.

$d = 1$ halında ən sadə T. d.-nın trayektoriyaları

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots \qquad (1)$$

cəmləri ardıcıllığı və başlanğıc vəziyyəti $S_0 = 0$ ilə təsvir olunur, bu halda X_i-lərin asılı olmayan və

$$\mathbf{P}\{X_i = 1\} = p, \quad \mathbf{P}\{X_i = -1\} = 1 - p = q, \quad p \in (0, 1)$$

ehtimalları ilə Bernulli paylanması ilə paylanan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu fərz olunur. S_n-in aldığı qiyməti n partiyadan ibarət oyunda iki oyunçudan birinin uduşu kimi interpretasiya etmək olar; udmuş oyunçunun hər partiyada p ehtimalı ilə udması, $q - 1 = p$ ehtimalı ilə uduzması fərz olunur.

Əgər oyun simmetrik pulun atılması ilə aparılırsa, onda $p = 1/2$ götürülür (simmetrik dolaşma). Fərz olunur ki, oyun başlayan anda birinci oyunçunun ilkin kapitalı b, ikinci oyunçunun ilkin kapitalı a -ya bərabərdir. Bu şərtlərlə oyun o halda sona çatmış hesab olunur ki, koordinatları $S_1, S_2, \dots$ olan «dolaşan hissəcik» ilk dəfə a və ya b səddinə çatmış olsun. Belə anda oyunçulardan biri iflas olur. Bu klassik *iflas məsələsidir* və bu

halda, a və b nöqtəsindəki baryerlərə uducu sərhədlər kimi baxmaq olar.

Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi ilə bağlı tətbiqlərdə hissəcik a və b sərhədləri yaxınlığında özünü başqa cür də apara bilər, məs., $a=\infty$, $b=0$ olarsa, onda dolaşan hissəciyin $n+1$ anında vəziyyəti Z_{n+1} olarsa, (1)-ə uyğun olaraq,

$$Z_{n+1} = \max(0, Z_n + X_{n+1}) \qquad (2)$$

münasibəti ilə təsvir olunur və 0 nöqtəsində baryeri gecikdirici sərhəd adlandırmaq olar. Baryerlərin yaxınlığında hissəciyin özünü aparmasının digər halları da vardır.

$a=\infty$ olduqda birsərhədli təsadüfi dolaşma, $a=b=\infty$ halında qeyri–məhdud təsadüfi dolaşma məsələləri alınır. Belə T. d.-ların öyrənilməsi, adətən, diskret Markov zəncirləri aparatı vasitəsilə, məs., sonlufərqlərlə uyğun tənlikləri araşdırmaq yolu ilə aparılır.

Birsərhədli T. d. ($a=\infty$) (2) münasibətləri ilə təsvir olunduqda, $p<q$ və $n\to\infty$ olduqda, Z_n təsadüfi kəmiyyətinin $S=\sup\limits_{k\ge 0} S_k$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması ilə üst-üstə düşən stasionar paylanması vardır; bu halda

$$\mathbf{P}\{S\ge k\} = (p/q)^k, \quad k=0,1,\ldots. \qquad (3)$$

Qeyri – məhdud T. d.-nı təsvir edən qanunlar S_n, $n=1,2,\ldots$ cəmlər ardıcıllığı üçün limit teoremlərindən alınır. Bu qanunların birində hökm olunur ki, simmetrik T. d. üçün ($p=1/2$) hissəcik qeyd olunmuş ixtiyari a nöqtəsinə sanki yəqin çatır (özü də ki, sonsuz dəfə). $p<1/2$ olduqda T. d. sanki yəqin sola istiqamətlənir, bu halda S təsadüfi kəmiyyəti [(3) düsturundan] sanki yəqin sonludur.

Simmetrik T. d. üçün hissəciyin müsbət yarımoxda keçirdiyi τ_n müddəti ($S_1,\ldots,S_n$ ardıcıllığındakı müsbət hədlərin sayı) böyük ehtimalla $n/2$-yə deyil, 0 və ya n-ə yaxın olacaqdır. Bu arksinus qanunu adlanan qanundan aydın olur; bu qanuna əsasən n-in böyük qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\tau_n/n<x\} \approx \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

münasibəti ödənilir (bax, [1]). Bu münasibətdən aydındır ki, məs.,

$$\mathbf{P}\{\,|\tau_n/n-1/2|<1/4\,\} = 1-2\mathbf{P}\{\tau_n<n/4\}\approx 1/3$$

və hissəcik bir tərəfdə, 0,2 ehtimalı ilə, bütün vaxtın 97, 6%-dən az olmayaraq olur.

Sərhədlər məlum olduqda T. d. ilə qeyri – məhdud T. d.-nı bir-birilə əlaqələndirən münasibətlər mövcuddur. Məs., əgər $Y(x)=\min\{k: S_k\ge x\}$ götürülərsə, onda

$$\mathbf{P}\{Y(x)=n\} = \frac{x}{n}\,\mathbf{P}\{S_n=x\}$$

bərabərliyi doğrudur (bax, [2]).

Qeyri – məhdud T. d. üçün dolaşan hissəciyin vəziyyəti S_n n-in böyük qiymətlərində böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi ilə ifadə olunur.

Əgər ± 1 qiymətini alan sıçrayış kəmiyyətlərini Δ kiçik olduğu halda $\pm\Delta$ ilə əvəz edib, $p=(1+\alpha\Delta)/2$ qəbul edilərsə, onda $n=t/\Delta^2$ sayda sıçrayışdan sonra hissəciyin vəziyyəti S_n, təqribi olaraq, ($\Delta\to 0$) t anında diffuziya prosesini – aparı əmsalı α, diffuziya əmsalı 1-ə bərabər olan və a və $-b$ sərhədlərində uyğun vəziyyətlərə malik (əgər S_n T. d.-sı üçün bunlar verilərsə) olan prosesi təsvir edir.

Baxılan T. d.-ların bir çox ümumiləşmələri vardır. $\mathbb{R}^d$, $d>1$ fəzasında ən sadə T. d.-lar aşağıdakı kimi təyin olunur. Hissəcik başlanğıc vəziyyətindən çıxaraq bir addımlı sıçrayışla, koordinat oxlarına paralel $2d$ sayda istiqamətdən biri ilə hərəkət edir. Beləliklə, dolaşan hissəciyin mümkün vəziyyətləri $\mathbb{R}^d$-nin tamqiymətli koordinatlara malik olan bütün nöqtələridir. T. d.-nı təyin etmək üçün, müxtəlif keçidlərə uyğun $2d$ sayda ehtimallardan hər biri 2^{-d}-yə bərabər olarsa, simmetrik T. d. alınır. Çoxölçülü halda, T. d. üçün sərhəd məsələləri olduqca mürəkkəb olur, belə ki, $d>1$ olduqda sərhədlərin forması olduqca mürəkkəbləşir (bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma*).

Ən sadə T. d.-ların digər mümkün ümumiləşməsi ondan ibarətdir ki, (1)-də baxılan asılı olmayan $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ixtiyari qanunla paylandığı fərz olunur. Bu halda qeyri – məhdud T. d.-lar və sərhədlərlə verilən dolaşmalar üçün əsas keyfiyyət qanunauyğunluqları dəyişmir. Məs., dolaşan hissəcik a və ya $-b$ sərhədlərindən birinə sanki yəqin çatır. Əgər $a=\infty$ və $\mathbf{M}X_i\le 0$ olarsa, hissəcik $-b$ sərhədinə sanki yəqin çatır. Əgər X_i-lər tamqiymətli və $\mathbf{M}X_i=0$ olarsa, onda hissəcik sanki yəqin başlanğıc vəziyyətinə qayıdır. $\mathbf{M}X_i=0$ olan ixtiyari paylanma qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər halında, bu müddəa, yalnız o halda doğrudur ki, hissəciyin qayıdışı nöqtəyə deyil, intervallara qayıdış olsun.

T. d.-nin $(-b, a)$ intervalının sərhədlərindən kənara çıxması ilə bağlı məsələlərin həlli ümumi halda olduqca çətin olur. Bununla belə, bu tip məsələlərin riyazi statistikada, sığorta işlərində, xidmət sistemləri nəzəriyyəsində çoxsaylı tətbiqləri (ardıcıl analiz) vardır. Bunların tədqiqatında əsas müəyyənləşdirici rolu təsadüfi dolaşmalar üçün *sərhəd məsələləri* metodları oynayır. Bu metodlardan əsas hesab olunanları *faktorizasion metodlarla* (bax, [3]), inteqral – fərqlər tənlikləri ilə, kiçik parametrli tənliklərin həllinin Vişik və Lüsternik metodları və s. ilə bağlı olan metodlardır (bax, [4]). Bu tənliklərin araşdırılması baxılan məsələlərin potensial nəzəriyyəsi ilə dərin əlaqəsini aşkar edir.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin doğurduğu T. d.-lar haqqında nəticələrin əksəriyyəti S_n təsadüfi kəmiyyətləri Markov zənciri ilə bağlı olduğu hal, sıçrayışları asılı təsadüfi kəmiyyətlər olan T. d., həm də $\mathbb{R}^d$, $d>1$-də çoxölçülü T. d. halları üçün də doğrudur (bax, [5]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [3] Боровков А. А, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Королюк В. С., Боровских Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981; [5] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA çoxölçülü **« случайное блуждание** многомерное; multidimensional **random walk »** – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma.*

TƏSADÜFİ DOLAŞMA; qayıdışlılıq « **случайное блуждание;** возвратность; persistence/recurrence of **random walk »** – faza fəzasından *təsadüfi dolaşma* hərəkətinə başlayan hissəciyin faza fəzasının müəyyən məhdud çoxluqlarına vahid ehtimalla, heç olmazsa bir dəfə qayıdışı xassəsidir. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ – ümumi paylanma funksiyası F olan eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $S_n = \xi_1, \dots, \xi_n$, $n \geq 1$ olsun. Fərz olunur ki, $\{S_n\}$ təsadüfi dolaşması $\mathbb{R}^1$-də S_n, $n \geq 1$ cəmlərinin doğurduğu dolaşmadır. Əgər

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_n \in I\} = \infty \qquad (*)$$

şərti F şəbəkəvari olmayan paylanma halında ixtiyari I intervalı üçün və 1 addımlı arifmetik paylanma halında k nöqtəsini (k – tam ədəddir) özündə saxlayan ixtiyari I intervalı üçün ödənilərsə, $\{S_n\}$ T. d. qayıdışlı təsadüfi dolaşma olur. $m = \mathbf{M}\xi_k$ riyazi gözləməsi olan paylanma üçün $m = 0$ olduqda paylanma qayıdışlı, $m \neq 0$ olduqda isə qayıdışsız paylanma olur. $\mathbb{R}^d$-də T. d.-nın qayıdışlılıq xarakteri analojidir. Riyazi gözləmələri sıfra bərabər, sonlu dispersiyalı ikiölçülü paylanma qayıdışlı paylanmadır. Hər bir üçölçülü cırlaşmayan T. d. qayıdışsız dolaşmadır. Əgər T. d. vəziyyətləri çoxluğu hesabi Markov zənciridirsə, onda T. d.-nın qayıdışlılığı zəncirin vəziyyətlərinin qayıdışlılığı ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984; [2] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA qrupda « **случайное блуждание** на группе; **random walk** on a group **»** – diskret və ya kəsilməz zamanlı elə xüsusi Markov prosesidir ki, onun Markov keçid operatoru vəziyyətlər fəzasında tranzitiv və sərbəst təsir edən qrupla kommutasiya edir. Diskret zaman halında qrupda sağ təsadüfi dolaşma elə bircins Markov prosesidir ki, onun vəziyyətləri fəzası G qrupudur, bir addıma keçid operatoru $\mathbf{P}(x, A) = \mathbf{P}(e, x^{-1}A) = \mu(x^{-1}A)$ düsturu ilə G-də μ ehtimal ölçüsü ilə verilir; e – qrupun vahidir. Əgər G diskret olarsa, onda $p(h|g) = \mu(g^{-1}h)$ olur. Qrupda sol təsadüfi dolaşma üçün, uyğun olaraq, $p(h|g) = \mu(hg^{-1})$ bərabərliyi doğrudur.

$\mathbb{Z}^d$ şəbəkəsində və ya $\mathbb{R}^d$ Evklid fəzasında adi T. d. yaxşı öyrənilmiş ən sadə Markov prosesi olub, qrupda T. d.-nın xüsusi halıdır. Daha ümumi hala (məs., matrislər qrupu halına) baxılması onunla bağlıdır ki, birincisi, bu halda müxtəlif tətbiqlərə (təsadüfi mühitlər, dalğa ötürücülər üçün təsadüfi potensiallı Şredinger tənliyi) baxılır, ikincisi, qruplarda ümumi harmonik analiz (potensial nəzəriyyəsi, istilikkeçirmə tənliyi və qruplarda və bircins fəzalarda diffuziya) aparılır və nəhayət, onunla bağlıdır ki, qruplarda T. d. ən ümumi şəkilli Markov proseslərində təsadüf olunan effektləri modelləşdirə bilir. Bundan başqa, aydın olmuşdur ki, qruplarda T. d.-nın öyrənilməsi bu qrupların özlərinin və onların cəbri invariantlarının öyrənilməsi üçün səmərəlidir.

Qruplarda T. d. nəzəriyyəsinin əsas məsələsi trayektoriyaların sonsuzluqda nə cür olacağı məsələsidir. Qeyri Abel halında qeyri – trivial sərhəd yarana bilər. G – diskret qrup, μ – bu qrupda ölçü, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – T. d., $y_0 = e$, $\mathfrak{A}_n^{\infty}$, – $\{y_k\}_n^{\infty}$ dolaşmasına nəzərən ölçülən hadisələr σ – cəbri, $\mathfrak{A} = \bigcap_n \mathfrak{A}_n^{\infty}$ – qalıq σ – cəbr olsun; ν realizasiyalar fəzasında ölçünün faktor ölçüsü olarsa, $\mathfrak{A}$ -ya uyğun (Γ, ν) fəzası sərhəd – çıxış adlanır. Əgər $\mathfrak{A}$ trivial σ – cəbr olarsa, onda Γ birnöqtəvi olur və trivial sərhəd adlanır. Əgər G Abel qrupudursa, nilpotentdirsə və ya sözlərin sayının subeksponensial artımına malikdirsə, onda Γ trivial sərhəddir. Əksinə, klassik semisadə qruplar, sərbəst qruplar və hətta bəzi lokal sonlu qruplar üçün sərhəd qeyri – trivialdır. Sərhəd – çıxış Puasson sərhədi ilə, Martin sərhədinin aktiv hissəsi ilə və bir sıra hallarda stasionar sərhədlə üst-üstə düşür. Bununla da sərhədin aşkar hesablanması bütün məhdud

$$\int_G f(gx)\, d\mu(x) = f(g), \quad |f(g)| \leq K$$

harmonik funksiyalarının tapılması, yəni Qrin funksiyasının sonsuzluqda asimptotikasının tapılması ilə eynigüclüdür. Klassik qruplar üçün sərhəd simmetrik fəzalar nəzəriyyəsi mənasında sərhədlə sıx əlaqədardır. Məs., $SL(2, \mathbb{R})$ qrupunun altqrupları-nın geniş sinfi üçün T. d.-nın sərhədi Lobaçevski müstəvisinin absolyutudur. Amenabel qrupunda T. d.-sı trivial sərhədə malik olan ölçü həmişə vardır, lakin elə ölçülər də vardır ki, onlar üçün T. d.-nın qeyri – trivial sərhədi vardır. Əksinə, qeyri – amenabel qruplarda cırlaşmayan ölçülü T. d.-nın sərhədi həmişə qeyri – trivialdır. Γ sərhədinin hər bir nöqtəsi zaman üzrə bircins, fəza üzrə isə bircins olmayan (yəni qrupda T. d. olmayan) şərti Markov prosesi doğurur. Onun sərhədi trivialdır və bu proses üçün mərkəzi limit teoreminin tətbiqi və onun dəqiqləşdirilmələri haqqında adi suallar qoymaq mümkündür.

Sərhədlərin öyrənilməsi üçün qrupda T. d.-nın entropiyası anlayışı faydalıdır. μ, – G-də sonlu entropiyaya malik ölçü; μ^n, – μ-nün n-ci konvolyusionu olsun, yəni y_n T. d.-nın paylanması olsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mu^n) = h_\mu$$

limiti vardır və bu limit qrupda təsadüfi dolaşmanın entropiyası adlanır. $h_\mu = 0$ şərti sərhədin trivial olması ilə eynigüclüdür. Sanki bütün trayektoriyalar üçün

$$\frac{1}{n} \ln \mu^n(y_n) \to h_\mu$$

münasibəti ödənilir, bu Şennon teoremidir. Sərhədin digər triviallıq şərti, müntəzəm paylanma terminlərilə, ixtiyari $g \in G$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu^{n-1}(g\, y_n)}{\mu^n(y_n)} = 1$$

münasibətinin ehtimala görə ödənilməsidir.

$GL(k, \mathbb{R})$ matrislər qrupunda T. d.-lar Lyapunov göstəriciləri ilə əlaqədardırlar: Oseledts teoremində hökm olunur ki, ixtiyari $x \in \mathbb{R}^k$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \| y_n x \| = \lambda(x)$$

limiti sanki yəqin vardır, burada $\{y_n\}$, – $GL(k, \mathbb{R})$-də T. d.-dır;

$\lambda(\cdot)$ qrupda T. d. üçün Lyapunov göstəricisi adlanır; bu göstəricilər dinamik sistem nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərində və s. tətbiq olunur. Fundamental qrupda T. d.-nın sərhədi örtük çoxobrazlıda diffuzion prosesin sərhədi ilə əlaqəlidir. Qruplarda T. d.-lar haqqında bir sıra məsələlər qruplar nəzəriyyəsi ilə bağlıdır. Məs., Kesten amenabellik kriterisi qruplarda T. d. terminlərilə ifadə olunur: simmetrik μ ölçülü T. d.-nın n -ci addımda vahidə qayıdış ehtimalı $\mu^n(e)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu^n(e) = 0$$

şərtini, yalnız və yalnız o halda ödəyir ki, qrup amenabel qrupu olsun.

Əd.: [1] Сазанов В. В., Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 1, с. 3–55; [2] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Теоремы и задачи о процессах Маркова, М., 1967; [3] Маргулис Г. А., «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, с. 1054–57; [4] Kesten H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, p. 336–54; [5] Furstenberg H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 108, p. 377–428; [6] Kaimanovich V., Vershik A., «Ann. Probab.», 1983, v. 11, № 3, p. 457–90.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA qrupda; lokal teoremlər « **случайное блуждание** на группе; локальные теоремы; local theorems for a **random walk** on a group» – *təsadüfi dolaşmanın* n addıma lokal kompakt qrupun qeyd olunmuş oblastına keçməsi ehtimalını qrupun xassələri, oblastın həndəsi xarakteristikaları və n ədədi terminlərilə ifadə edən müddəalardır.

Lokal teoremlər anlayışı əvvəlcə həqiqi ədədlərin additiv qrupu halı üçün, sonra isə $\mathbb{R}^d$ halı və inteqral teoremlərilə eyni zamanda yaranmışdır. Lakin $\mathbb{R}^1$ və $\mathbb{R}^d$ -də daha incə teoremlər bir qədər gec, xarakteristik funksiyalar nəzəriyyəsi metodlarının inkişafı və statistik mexanikada ədədlər nəzəriyyəsinin additiv məsələlərinin tətbiqi ilə alınmışdır.

Hal-hazırda lokal teoremlərin klassik nəzəriyyəsini əsasən başa çatmış hesab etmək olar (bax, [1]). Xüsusilə də, qeyd etmək lazımdır ki, kəsilməz və diskret paylanmalar halları, paylanma daşıyıcılarının arifmetik təbiətinin müxtəlifliyinə görə, bir-birindən asılı olmadan, lakin paralel inkişaf edirdi. Lakin bu iki halı birləşdirən çox gözəl bir nəticə alınmışdır: əgər F_1 paylanması $\mathbb{R}^d$ -də şəbəkəvari paylanma deyilsə, yəni $\theta \neq 0$,

$$\left| \int e^{i\theta x}\, dF_1(x) \right| < 1$$

olarsa, B_n və A_n konstantlar ardıcıllığı elə olarsa ki, $F_n(B_n(x + A_n)) \to F$ münasibəti ödənilsin, F_1 – sıxlığa malik və F -in cazibə oblastından olan paylanma, F_n, – F_1-in n – tərtib kompozisiyası və

$$P(x,\ h) = F(x+h) - F(x),\ \ P_n(x,\ h) = F_n(x+h) - F(x)$$

olarsa, onda

$$P_n(B_n(x + A_n),\ B_n h) = P(x,\ h) + o_n(1)(h^d + B_n^{-d})$$

münasibəti doğrudur (bax, [2]).

Qrup halı üçün lokal teoremlərin bir neçə tipinə baxılır:

1) klassik tip teoremlər, yəni paylanma sıxlıqları və ehtimallar (diskret hal) haqqında lokal teoremlər; 2) iki müxtəlif, lakin qeyd olunmuş oblasta keçmə ehtimallarının nisbətləri haqqında lokal teoremlər, belə ki, bu nisbətlər limitdə bu oblastların invariant ölçülərinin nisbətinə yaxınlaşır (bunlar nisbi invariant lokal teoremlər adlandırılır); 3) baxılan qrupun işlək olduğu bircins fəzalarda lokal teoremlər. Bunlar həm klassik, həm də nisbi lokal teoremlər ola bilər.

Kommutativ qruplar halında, məs., $\mathbb{R}^1$ və $\mathbb{R}^d$ üçün 1) və 3) tipli lokal teoremlər üst-üstə düşür, belə ki, bu hallarda bircins fəza qrup ilə üst-üstə düşür. Lokal teoremlərin spesifikası xüsusilə qeyri – kommutativ hallarda aşkar olur.

Qeyri – kommutativ halda lokal teoremlər əvvəlcə kompakt qruplar və belə qrupların bircins fəzaları üçün alınmışdır. Bu halda inteqral və lokal limit teoremləri faktiki olaraq ekvivalentdirlər və bunların lokal və inteqral hallarına ayrılması məsələnin qoyuluşu və yanaşmadan asılı olur. Nisbi lokal teoremlərə aid işlərin böyük əksəriyyəti diskret qruplara həsr olunmuşdur. Teoremlərin bu qrupunda əsas fakt diskret qrupun ixtiyari elementinin eyni ehtimallılığına aiddir (bax, [4]). Qeyri – kommutativ lokal kompakt qruplar üçün lokal teoremlər Evklid hərəkətləri qrupu misalında araşdırılmışdır. Bu istiqamətdə ilk nəticə: A – müstəvinin qeyd olunmuş nöqtəyə görə 2π ilə ölçülməyən bucaq qədər dönməsi, B – müstəvinin ixtiyari yerinidəyişməsi olduqda, A, B, A^{-1}, B^{-1} kimi sonlu və bərabərpaylanmalı daşıyıcıları olan eyni bir paylanmaların kompozisiyası üçün nisbi lokal invariant limit teoremidir (bax, [5]). Bir az sonra paylanmasının ifadəsi daha ümumi olan eyni ölçülərin kompozisiyası üçün d – ölçülü Evklid fəzasının hərəkətlərinin qrupu $M(d)$ üçün nisbi invariant lokal teorem alınmışdır (bax, [6]).

Evklid hərəkətləri qrupunda verilən, konvolyusiya olunan paylanmaların ikinci momentlərinin sonlu olduğu şərtində ən başa çatdırılmış lokal limit teoremi formasında nəticə [7]-də alınmışdır, bu teorem [2]-də Ç. Stoun tərəfindən təklif olunmuşdur. Bu teorem aşağıdakı kimi ifadə olunur. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – eyni ν paylanmasına tabe, $M(d)$ – qiymətlərli asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, υ, – $SO(d)$-dən olan dönmə paylanması, F_υ, – $\mathbb{R}^d$-də yerinidəyişmələr paylanması olsun. Əgər: a) ν-nin n-ci kompozisiyası ν^{*n}, $n \to \infty$ olduqda $SO(d)$-də müntəzəm paylanmaya zəif yığılarsa; b) $\mathbb{R}^d$-də F_υ paylanmasının sonlu ikinci tərtib momentləri varsa; c) elə $n_0 > 0$ tam ədədi və K, $K \subset SO(d)$ çoxluğu, $\upsilon(K) > 0$ ölçüləri varsa ki, hər bir $\alpha \in K$ üçün $\upsilon^*_{n_0}(\alpha)$ paylanmasının daşıyıcısı hipermüstəvilərin sonlu birləşməsindən deyildirsə [burada $\upsilon(\alpha)$, – $\alpha \in K$ qeyd olunduqda υ-nün şərti paylanmasıdır], onda ixtiyari məhdud Jordan – ölçülən $\mathscr{D} \in \mathbb{R}^d$ oblastı üçün

$$\mathbf{P}\{\mathscr{L}_n \in \mathscr{D}\} = c\,\mathrm{mes}(\mathscr{D})n^{-d/2} + o(n^{-d/2})$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\mathscr{L}_n$, – $X_1 X_2 \dots X_n$ hasilinin yerinidəyişməsinin təsadüfi komponenti, $\mathrm{mes}(\mathscr{D})$, – $\mathscr{D}$ oblastının Lebeq ölçüsü, c – oblastdan asılı olmayan və $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathscr{L}_n$ üçün limit paylanmasının sıxlığının sıfırdakı qiymətinə bərabər konstantdır.

Bu teoremdən sonlu dispersiyalı paylanmalar üçün $M(d)$ qrupunda bütün məlum nisbi invariant teoremlər alınır, məs., [5],

[6]-da şərh olunmuş nəticələr. İnteqral limit teoremində $M(d)$ qrupunda dayanıqlı paylanmaya yığılma olduğu hal üçün analoji nəticə alınmışdır (bax, [8]).

Əd.: [1] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, M., 1972; [2] Stone Ch. J., «Ann. Math. Statist.», 1965, v. 36, p. 546–51; [3] Арнольд В. И., Крылов А. Л., «Докл. АН СССР», 1963, т. 148, № 1, с. 9–12; [4] Guivarch Y., Keane M., Roynette B., «Lect. Notes in Math.», 1977, v. 624; [5] Каждан Д. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 299–305; [6] Baldi P., Bougerol Ph., Crepel P., «C. r. Acad. sci.», ser. A, 1976, t. 283, p. 53–55; [7] Maximov V. M., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1980, Bd 51, S. 27–38; [8] Хохлов Ю. С., «Докл. АН СССР», 1981, т. 260, № 2, с. 295–99.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA(sı) Markov **« случайное блуждание** марковское; **Markov random walk »** – bax, *Çoxölçülü təsadüfi dolaşma.*

TƏSADÜFİ DOLAŞMA özü-özünü kəsməyən **« случайное блуждание** без самопересечений; self-avoiding **random walk »** – trayektoriyaları şəbəkənin hər bir nöqtəsindən bir dəfədən artıq keçməyən *təsadüfi dolaşmadır*. n uzunluqlu özü-özünü kəsməyən T. d. – $\mathbb{Z}^d$, $d>1$ tamqiymətli şəbəkəsinin elə $X_n=\{x(0), x(1), \dots, x(n)\}$ nöqtələr ardıcıllığına deyilir ki, bu nöqtələr $x(0)=0$, $i\neq j$ olduqda $x(i)\neq x(j)$, $|x(i)-x(i+1)|=1$ şərtlərini ödəsin. $\nu(n)$, – n uzunluqlu belə müxtəlif T. d.-nın sayı olsun. Bütün X_n ardıcıllıqlarının ehtimalları eyni $1/\nu(n)$ ədədinə bərabər olarsa, onda özü-özünü kəsməyən bütün T. d.-lar çoxluğunda ehtimal ölçüsü təyin olunmuşdur. $\langle\cdot\rangle_n$ – bu ölçü üzrə ortalama simvolu və $d(n)=\langle x^2(n)\rangle_n$, $Y_n(t, X_n)=d_n^{-1/2}x([n, t])$, $t\in(0,1)$ olsun. Özü-özünü kəsməyən T. d.-lar nəzəriyyəsinin əsas məsələləri $n\to\infty$ olduqda $\nu(n)$ və $d(n)$ funksiyalarının asimptotikalarının araşdırılması və $n\to\infty$ olduqda $Y_n(t, X_n)$ təsadüfi prosesinin limit paylanmasının öyrənilməsidir.

Belə T. d.-larla bağlı problemlər fiziki ədəbiyyatda fiziki polimerlərin məsələləri ilə əlaqədar aktiv tədqiq olunur. Bu halda fərz olunur ki (bu ümumi qəbul edilmiş hal hesab edilir),

$$\nu(n)\sim \text{const}\cdot\beta(d)^n n^{\gamma(d)-1},\ d(n)\sim \text{const}\cdot n^{\tau(n)}.$$

$d>4$ olduqda kritik indekslər $\gamma(d), \tau(d)$ $\gamma(d)=\tau(d)=1$ şərtini ödəyir və $Y_n(t, X_n)$ -in paylanması $\mathbb{R}^d$ -də standart Viner ölçüsünə zəif yığılır, $d=4$ olduqda da Viner ölçüsünə yığılma vardır, lakin bu halda $\nu(n)$ və $d(n)$ -in asimptotikalarında loqarifmik düzəlişlər olur. $d=2, 3$ hallarında T. d. Qauss xüsusiyyətli olmur və Viner ölçüsünə yığılma da olmur. Hesablamalar nəticəsində $\tau(2)=1{,}5$, $\tau(3)=1{,}17$ olduğu alınmışdır.

Özü-özünü kəsməyən T. d. haqqında ciddi riyazi nəticələr çox deyildir. Məs., isbat olunmuşdur ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n)^{1/n}=\beta(d)$ limiti vardır (bax, [1]); olduqca böyük dim. – ölçülər üçün Viner ölçüsünə yığılma olur və kritik indekslər $\gamma(d)=\tau(d)=1$ şərtini ödəyir (bax, [2]); özü-özünü itələyən (rus. самооталкивающий) T. d. və ya özü-özünü kəsməyən T. d.-lar üçün Viner prosesinə zəif yığılma vardır (bax, [3]).

Əd.: [1] Kesten H., «J. Math. Phys.», 1964, v. 5, p. 1128–37; [2] Slade G., «Comm. Math. Phys.», 1987, v. 110, p. 661–83; [3] Brydges D., Spenser T., «Comm. Math. Phys.», 1985, v. 97, p. 125–48.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA; sərhəd funksionalı **« случайная блуждание;** граничный функционал; boundary functional of a **random walk »** – *təsadüfi dolaşma* trayektoriyasının elə funksionalıdır ki, bu funksional, bu trayektoriyanın hər hansı çoxluğun sərhədinə çatması ilə əlaqədardır. Birölçülü $X_0, X_1, X_2, \dots$ təsadüfi dolaşması üçün ən sadə sərhəd funksionalları aşağıdakılardır: x səddinə ilk çatma müddəti –

$$\eta(x)=\min\{k: X_k\geq x\},$$

T. d.-nın maksimal qiymətləri –

$$\overline{X}_n=\max_{k\leq n}X_k \quad \text{və} \quad X=\sup_{k<\infty}X_k,$$

dolaşmanın x səddindən eksses və defekt (çatım və ötüm) kəmiyyətləri –

$$\chi(x)=X_{\eta(x)}-x, \qquad \gamma(x)=x-X_{\eta(x)-1}$$

və s.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA təsadüfi mühitdə **« случайное блуждание** в случайной среде; **random walk** in random environment **»** – keçid ehtimalları (diskret zamanlı dolaşma halında) və keçid intensivlikləri (kəsilməz zamanlı dolaşma halında) hər hansı təsadüfi meydanın realizasiyaları olan təsadüfi dolaşmadır. Fiziki nöqteyi – nəzərdən təsadüfi mühitdə T. d. bircins olmayan mühitdə diffuziya prosesinə uyğundur. Ən sadə halda, $\mathbb{Z}^d$, $d\geq 1$ şəbəkəsi üzrə dolaşmada, şəbəkənin qonşu nöqtələrinə keçidlər mümkün olduğu halda, keçid ehtimalları $p(x, x\pm e_\alpha)=p_{\pm\alpha}(x)$ düsturu ilə, $\{p_{\pm\alpha}(x),\ x\in\mathbb{Z}^d,\ \alpha=1, \dots, d\}$ təsadüfi meydanı ilə təyin olunur; burada e_α, – α istiqamətinin vahidi vektorudur. Adətən, fərz olunur ki, $p_{\pm\alpha}(x)$ müxtəlif x -lər üçün asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və ya korrelyasiyaların azalması üçün müəyyən şərtlərin ödənilməsini təmin edir. $p_{\pm\alpha}(x)=1/2d+\varepsilon q_{\pm\alpha}(x)$ olduqda və ε kiçik olduğu halda, bir T. d.-nın kiçik təsadüfi kükrəntisi (rus. малое случайное возмущение) anlaşılır. Təsadüfi mühitdə T. d., adətən, ya mühitə və dolaşmaya uyğun ehtimal fəzalarının hasilində təyin olunmuş ümumi təsadüfi proses kimi öyrənilir və ya mühit qeyd olunduqda, yəni bu prosesin şərti ehtimalları keçid ehtimallarının qeyd olunmuş realizasiyası şərtində öyrənilir. Əgər mühitin sanki bütün realizasiyalarında T. d.-nın asimptotik xassələri dəyişmirsə, onda təsadüfi mühitdə T. d. özü-özünü ortalama xassəsinə (rus. свойство самоусреднения) malikdir, deyilir. Təsadüfi mühitdə simmetrik, qeyri – simmetrik (və ya ümumi) T. d. növləri vardır.

1. Təsadüfi mühitdə simmetrik T. d. elə T. d.-ya deyilir ki, bu dolaşma üçün $p(x, y)=p(y, x)$, $x, y\in\mathbb{Z}^d$ və ya $p_\alpha(x)=p_{-\alpha}(x+e_\alpha)$ şərti sanki yəqin ödənilsin. Bu halda mühitin sanki bütün realizasiyaları üçün bir addıma Markov keçid operatoru özü-özünə qoşma operatordur. Olduqca geniş şərtlər fərziyyələrində (bax, [1], [2]) təsadüfi mühitdə simmetrik T. d.

kovariasiyalar matrisi təsadüfi olmayan (özü-özünə ortalanan) asimptotik normal T. d. olur. Mahiyyət etibarilə, şərtlər elə müəyyənləşdirilir ki, keçid ehtimalları $p_{\pm\alpha}(x)$ sıfırdan seçilirlər. Əgər bu şərtlər ödənilərsə, onda təsadüfi mühitin sanki bütün realizasiyaları üçün $\frac{1}{\sqrt{n}}\, X([nt])$, $t \in [0,1]$ təsadüfi prosesi yığılan sıra şəklində ifadəsi alınmış, a kovariasiyalarının təsadüfi olmayan cırlaşmayan matrisi olan Viner prosesinə zəif yığılır, burada $X(\tau)$ – dolaşan hissəciyin τ anında vəziyyətidir. Simmetriklik şərti $p_\alpha(x) = p_{-\alpha}(x + e_\alpha)$ başqa şərtlərlə əvəz oluna bilər. Məs., $p_\alpha(x) = p_{-\alpha}(x)$ və ya $p_\alpha(x - e_\alpha) = p_{-\alpha}(x + e_\alpha)$ şərti ilə, yəni bir nöqtədən əks istiqamətlərə çıxış ehtimallarının bərabər olması və ya əks istiqamətlərdən nöqtəyə daxil olma ehtimallarının bərabər olması şərti ilə əvəz oluna bilər. Bu hallarda təsadüfi mühitdə T. d. kovariasion matrisi təsadüfi olmayan asimptotik normal dolaşma olur.

2. Təsadüfi mühitdə q e y r i – s i m m e t r i k T. d. $d = 1$ olduğu hal üçün olduqca tam şəkildə öyrənilmişdir. Ən sadə hallarda yalnız bir addıma keçidlərə baxılır və

$$p(x, x+1) = 1/2 + \varepsilon\, p(x), \quad p(x, x-1) = 1/2 - \varepsilon\, p(x)$$

götürülür, burada $p(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ – asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır. Dolaşmada aparılıq xassəsinin olmaması şərti $\mathbf{M} \ln \frac{1/2 + \varepsilon\, p(x)}{1/2 - \varepsilon\, p(x)} = 0$ şəklində ifadə olunur (bax, [3]). Bu hal [4]-də ətraflı öyrənilmişdir. Aydın olmuşdur ki, keçid ehtimallarının fluktuasiyası nəticəsində şəbəkədə, anomal olaraq, onların çox müddət qaldığı xüsusi qapalanan oblastlar (quyular) əmələ gəlir. Hissəcik uyğun quyu dibi yaxınlığında uzun müddət qalır, sonra tez sıçrayaraq digər quyuya keçib orda uzun müddət qalır və s. Bu halda n müddəti ərzində hissəcik $\log^2 n$ tərtib, lakin diffuziyada olduğu kimi $\sqrt{n}$ tərtib deyil, məsafə ilə yerini dəyişir. Quyuların vəziyyəti $p(x)$ təsadüfi prosesinin realizasiyasından asılı olduğundan, bu mənada özü-özünü ortalama baş vermir. Quyuların vəziyyəti ilə bağlı ehtimal paylanması öyrənilmişdir (bax, [5]); məs., aydın olmuşdur ki, quyu içərisində olan hissəciyin dispersiyası sabitdir. Əvvəlki nəticələr sonlu sayda addımlarla keçidlərə malik T. d. halı üçün ümumiləşdirilir.

$d > 1$ dim. – ölçülər halı üçün ümumi riyazi ciddi nəticələr yoxdur. Fiziki ədəbiyyatda hesab olunur ki, $d \geq 2$ olduqda bircins T. d.-nın olduqca kiçik təsadüfi kükrəntilərində qapalayıcı oblastlar diffuziyanın mühüm yavaşımasına səbəb olmur və $\frac{1}{\sqrt{n}}\, X_n([nt])$, $t \in [0,1]$ təsadüfi prosesi kovariasiyalar matrisi təsadüfi olmayan Viner prosesinə zəif yığılır. $d = 2$ olduqda $\sqrt{n}$ -lə normalanmada loqarifmik düzəlişlər mümkündür.

Əd.: [1] A n s h e l e v i c h V., K h a n i n K., S i n a i Y a., «Comm. Math. Phys.», 1982, v. 85, p. 449–70; [2] К о з л о в С. М., М о л ч а н о в С. А., «Докл. АН СССР», 1984, т. 278, № 3, с. 531–34; [3] K e s t e n H., K o z l o v S., S p i t z e r F., «Compos. Math.», 1975, v. 30, p. 145–68; [4] С и н а й Я. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, № 2, с. 247–58; [5] Г о л о с о в А. О., «Успехи матем. наук», 1986, т. 41, в. 2, с. 189–90.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA, AŞAĞIDAN KƏSİLMƏZ « непрерывное снизу случайное блуждание; random walk continuous from below » – bax, *Sərhəd məsələləri* t ə s a d ü f i d o l a ş m a l a r ü ç ü n.

TƏSADÜFİ DOLAŞMA, YUXARIDAN KƏSİLMƏZ « непрерывное сверху случайное блуждание; random walk continuous above » – bax, *Sərhəd məsələləri* t ə s a d ü f i d o l a ş m a l a r ü ç ü n.

TƏSADÜFİ EHTİMAL ÖLÇÜSÜ « случайная вероятностная мера; random probability measure » Ω elementar hadisələr fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbri $\mathscr{A}$ -da – $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında bütün ehtimal paylanmalarının çoxluğu $\mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$ -da *təsadüfi elementdir*, yəni $\mathscr{A}$ -da verilmiş bütün normalanmış mənfi olmayan hesabi – additiv çoxluq funksiyalarının koordinat fəzasına daxil olunmuş ($\mathrm{card}\,\mathscr{A} \geq \aleph$ olduqda hesabi ölçüsü olmayan fəzaya) ehtimal paylanmalarının çoxluğunda təsadüfi elementdir. Ehtimal paylanmaları ailəsinin $\mathscr{K}(\mathscr{A})$ – ölçülənlik nəzəriyyəsi [1] və [2]-də qurulmuşdur, burada $\mathscr{K}(\mathscr{A})$ σ – cəbri $\mathrm{cap}(\Omega, \mathscr{A})$ -nın $\mathbb{R}^{\mathscr{A}}$ -ya daxil edilməsi ilə doğurulan σ – cəbrdir. Əgər τ paylanması $\mathbf{P}_s(\cdot)$ olan seçim üzrə naməlum ehtimal paylanma qanunu $\mathbf{P}_s \in \mathscr{P} = \{\mathbf{P}_t,\ t \in T\}$, $\mathbf{P}_s$ -in parametrinin statistik qiymətidirsə, onda $\mathbf{P}_s(\cdot)$ qanununun özünün statistik qiyməti $\mathbf{P}_\tau(\cdot)$ qeyd olunan mənada T. e. ö.-dür.

Əd.: [1] П р о х о р о в Ю. В., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, с. 53–55; [2] Ч е н ц о в Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972, §31.

TƏSADÜFİ ELEMENT « случайный элемент; random element » – *təsadüfi kəmiyyət* anlayışının ümumiləşməsidir. Belə fərz olunur ki, «T. e.» termini [1]-də M. Freşe tərəfindən daxil olunmuşdur, o qeyd etmişdir ki, ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafı və onun tətbiq oblastının genişlənməsi – eksperimentin təsadüfi nəticələrinin ədədlə və ya ədədlərin sonlu toplusu ilə təsvir olunma sxemlərindən eksperimentin nəticələri, məs., sıralar, funksiyalar, əyrilər, çevirmələrlə və s. ilə təsvir olunduğu sxemlərə keçilməsi zərurətinə səbəb olmuşdur.

Sonradan «T. e.» termini, əsas etibarilə, hər hansı xətti topoloji fəzanın, ilk növbədə Hilbert və Banax fəzalarının «təsadüfi qaydada» seçilmiş elementləri üçün istifadə olunmağa başlanmışdır. Məs., Banax fəzası B -də ξ T. e.-nin dəqiq tərifi təsadüfi kəmiyyətin tərifini xatırladır. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – hər hansı ehtimal fəzası, B – Banax fəzası, B^*, – B fəzasına qoşma fəza olsun. Ω fəzanın ω elementar hadisələrinin B fəzasına $\xi = \xi(\omega)$ inikası (bu halda əgər ixtiyari xətti kəsilməz $x^*(\xi(\omega))$ funksionalı təsadüfi kəmiyyət, yəni $\mathscr{A}$ – ölçülən funksiya olarsa) t ə s a d ü f i e l e m e n t adlanır.

$\mathscr{L}$ elə minimal σ – cəbr olsun ki, bütün kəsilməz xətti funksionallar bu σ – cəbrə nəzərən ölçülən funksionallar olsun. $\mathscr{L}$ σ – cəbrinin bütün çoxluqlarının tam proobrazları, yalnız və yalnız, $\mathscr{A}$ – ölçülən olduğu halda, ξ təsadüfi elementdir. B separabel fəza olduqda, $\mathscr{L}$ σ – cəbri B -nin Borel altçoxluqlarının σ – cəbri ilə üst-üstə düşür.

Ehtimal nəzəriyyəsinin bütün əsas anlayışları, məs., xarakteristik funksiya, riyazi gözləmə, kovariasiya və s. kimi anlayışlar T. e. üçün də təyin olunur; əgər ixtiyari kəsilməz xətti $x^*(\xi)$ funksionalının ehtimal paylanması normal paylanma olarsa, ξ T. e. n o r m a l (Q a u s s) element adlanır. Asılı olmayan T. e.-lər ardıcıllığı üçün böyük ədədlər qanunu, böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu, təkrar loqarifm qanunu, mərkəzi limit teoremi və digər ehtimal müddəaları da təyin olunur. Bu teoremlərin öz klassik formasında Banax fəzaları halı üçün ifadə forması fəzanın həndəsəsi ilə sıx bağlıdır. Xüsusilə qeyd etmək lazımdır ki, bu bağlılıq qarşılıqlı xarakter dayışır, belə ki, ehtimali xassələr, əslində, ehtimali – həndəsi xassələr olur və onların Banax fəzasında doğruluğu yalnız fəzanın həndəsi xassələri ilə təyin olunmur, bu bağlılığın özü isə elə bu xassələri təyin edir. Məs., riyazi gözləmələri sıfra bərabər, $\mathbf{M}\,\|\xi_i\|^2 < \infty$ şərtini ödəyən, qiymətlərini B-dən alan asılı olmayan, eyni qanunla paylanmış $\xi_1, \xi_2, \ldots$ T. e.-nin ixtiyari ardıcıllığı üçün $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}$ normalanmış cəmlərinin paylanmasının normal qanunla paylanmış T. e.-in paylanmasına zəif yığılması üçün B Banax fəzasının 2 tip fəza olması zəruri və kafidir (bax, [4]).

Əd.: [1] F r e c h e t M., «Ann. Inst. H. Poincare», 1948, v. 10, p. 215–310; [2] M o u r i e r E., Elements aleatoires dans un espace de Banach (These), P., 1955; [3] H o f f m a n – J o r g e n s e n J., P i s i e r G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587–89.

TƏSADÜFİ ƏDƏD « случайное число; random number » – bax, *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər.*

TƏSADÜFİ ƏVƏZETMƏ « случайная подстановка; random / permutation substitution » – n dərəcəli bütün əvəzetmələrin çoxluğu S_n-in *təsadüfi elementi* σ-dır, yəni $X_n = \{1, \ldots, n\}$ çoxluğunun

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

cədvəli şəklində özünə təsadüfi qarşılıqlı birqiymətli inikasıdır, σ_k – təsadüfi σ inikasında k elementinin obrazıdır, $k = 1, \ldots, n$. Bu cədvəlin aşağı sətri X_n çoxluğunun *təsadüfi yerdəyişməsidir.* σ T. ə.-nə təpələri çoxluğu X_n olan, n sayda (k, σ_k), $k = 1, \ldots, n$ tilli Γ_n *təsadüfi qrafı* uyğundur. Γ_n qrafının əlaqəlilik komponentləri tsikllərdir. $S \subseteq S_n$ altçoxluğundan olan T. ə. kimi, adətən, ixtiyari $s \in S$ üçün $\mathbf{P}\{\sigma = s\} = |S|^{-1}$ bərabərliyi ödənilən σ T. ə.-si anlaşılır, burada $|S|$, – S çoxluğunun elementləri sayıdır.

$\alpha_r(S)$, – r uzunluqlu tsikllərin sayı, $\nu(S)$ – tsikllərin ümumi sayı, $\eta(S)$, – S-dən olan T. ə.-nin maksimal tsiklində təpələr sayı olsun, $O_n(S)$ isə S-dən olan T. ə.-nin tərtibi olub, S_n simmetrik qrupunun elementi kimi anlaşılır. S_n-dən olan T. ə. üçün bu xarakteristikalar ən tam surətdə araşdırılmışdır (bax, məs., [1]). Əgər tam mənfi olmayan $m_1, \ldots, m_n$ ədədləri $m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n$ münasibətini ödəyərlərsə, onda

$$\mathbf{P}\{\alpha_r(S_n) = m_r,\ r = 1, \ldots, n\} = \prod_{r=1}^{n} \frac{1}{m_r!\, r^{m_r}}$$

düsturu doğrudur; digər hallarda $\mathbf{P}\{\alpha_r(S_n) = m_r,\ r = 1, \ldots, n\} = 0$ olur. İxtiyari $N = 1, \ldots, n$ üçün

$$\mathbf{P}\{\nu(S_n) = N\} = \frac{1}{N!} \sum \frac{1}{k_1 \ldots k_N}$$

bərabərliyi doğrudur; cəmləmə $k_1 + \ldots + k_N = n$ şərtini ödəyən tam müsbət $k_1, \ldots, k_N$ ədədləri üzrə aparılır. $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\nu(S_n) = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}}\, e^{-u^2/2}(1 + o(1))$$

bərabərliyi $u = (N - \ln n)/\sqrt{\ln n}$ -nun ixtiyari sonlu intervala daxil olmasını təmin edən tam N-lər üzrə müntəzəm ödənilir; ixtiyari qeyd olunmuş $r = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$ qiymətlərində

$$\mathbf{P}\{\alpha_r(S_n) = k\} \to \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{r}\right)^k e^{-1/r}$$

münasibəti doğrudur; $\eta(S_n)/n$ təsadüfi kəmiyyətinin limit paylanması olduqca mürəkkəbdir;

$$\left(\ln O_n(S_n) - \frac{1}{2}\ln^2 n\right) \Big/ \sqrt{\frac{1}{3}\ln^3 n}$$

təsadüfi kəmiyyəti $n \to \infty$ olduqda asimptotik olaraq $(0, 1)$ parametrlərli normal qanunla paylanır (bax, [2]).

S_n-də müntəzəm paylanmadan fərqli olan, paylanması ilə təyin olunan T. ə.-nin analoji xarakteristikalarının tədqiqatı mühüm çətinliklərlə bağlıdır (bax, [3], [4]) (məs., tsikllərin uzunluğuna qoyulan məhdudiyyətlərli T. ə.-lər).

Əgər $\mathbf{P}_n$ S_n-dən olan τ_1 və τ_2 asılı olmayan T. ə.-lərinin doğurduğu qrupun ya S_n, ya da dəyişənişarəli A_n qrupu ilə üst-üstə düşməsi ehtimalıdırsa, onda $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}_n \to 1$ (bax, [5]).

S_n-dən olan T. ə.-lərin generarlanma alqoritmləri vardır.

Əd.: [1] Г о н ч а р о в В. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, № 1, с. 3–48; [2] E r d o s P., T u r a n P., «Acta. Math. Acad. sci. hung.», 1967, v. 18, № 3–4, p. 309–20; [3] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [4] П а в л о в А. И., «Матем. сб.», 1984, т. 124, № 4, с. 536–56; [5] D i x o n J. D., «Math. Z.», 1969, Bd 110, № 3, S. 199–205; [6] К н у т Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 3, М., 1978; [7] С т е п а н о в В. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 4, с. 639–53; [8] К о л ч и н В. Ф., Случайные отображения, М., 1984.

TƏSADÜFİ FENOMEN « случайное явление; random phenomenn » – t ə s a d ü f i h a d i s ə, p r o s e s, t ə z a h ü r, – spontan cərəyan edən, baş verən və ya eksperimentin gedişatında yarana bilən müşahidə olunan hadisə və ya prosesdir ki, onun nəticəsi onun müşahidəsi çərçivəsində (və ya eksperimentin qoyuluşunda) əvvəlcədən təyin olunmur.

Ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqlərində baxılan əsas obyekt – tezliklərin dayanıqlılıq xassəsi olan kütləvi hadisə və ya proseslər, təzahürlər üçün riyazi modeldir.

Hər bir T. f. Kolmoqorov üzrə özünün ehtimal fəzası $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ilə təsvir olunur; Ω – müşahidənin ağlabatan nəticələri ω -ların çoxluğudur, Ω elementar hadisələr fəzası adlanır, $\mathscr{A}$, – Ω -nın $A \subseteq \Omega$ altçoxluqlarının hər hansı hadisələr σ – cəbridir. Hər hansı ω elementar hadisəsi müşahidə olunduqda bütün $A \ni \omega$ hadisələri baş vermiş olur. Birnöqtəvi $\{\omega\}$ çoxluqlarının $\mathscr{A}$ -ya element kimi daxil olması postulatlaşdırılmır. T. f.-in kəmiyyət xarakteristikası – $(\Omega, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında təsadüfi hadisə və ya prosesin nəticələrinin ehtimal paylanması $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü ilə təyin olunur. $\mathbf{P}(A)$ ehtimalı n sayda asılı olmayan sınaqlar (T. f.-nin müşahidələri) ardıcıllığında təsadüfi A hadisəsinin baş vermə tezliyi $\nu(A)/n$ -i təqribi olaraq apriori təyin edir. $\nu(A)/n \approx \mathbf{P}(A)$ təqribi bərabərliyinin dəqiqliyi və etibarlılığı ciddi surətdə yalnız ehtimal dilində xarakterizə oluna bilər (bax, *Böyük ədədlər qanunu*).

TƏSADÜFİ FUNKSİYA « случайная функция; random function » – ixtiyari t arqumentinin elə funksiyasıdır ki (onun qiymətlərinin T çoxluğunda verilən, ya ədədi qiymətlər və ya hər hansı vektor fəzasından daha ümumi olan qiymətlər alan), onun qiymətləri hər hansı sınağın köməyilə təyin olunur, bu qiymətlər üçün isə müəyyən ehtimal *paylanması* vardır. Ehtimal nəzəriyyəsində əsas diqqət, adətən, ədədi $X(t)$ T. f.-na (yəni skalyar) verilir, $\mathbf{X}(t)$ vektor T. f.-na $X_\alpha(t)$ skalyar funksiyalarının toplusu kimi baxılır, burada α, – $\mathbf{X}$ vektorunun komponentlərinin sonlu və ya hesabi A çoxluğundan qiymətlər alır, yəni $\mathbf{X}(t)$ -yə $t \in T$, $\alpha \in A$. (t, α) cütlərinin yeni $T_1 = T \otimes A$ çoxluğunda verilən ədədi funksiya kimi baxılır.

Əgər T sonlu çoxluq olarsa, onda T -də verilən $X(t)$ T. f.-sı təsadüfi kəmiyyətlərin sonlu toplusudur, onu paylanma funksiyası ilə xarkterizə olunan bir çoxölçülü (vektor) təsadüfi kəmiyyətlər kimi hesab etmək olar. Sonsuz T -də verilən T. f.-lardan t ədədi (həqiqi) qiymətlər alan hal ən çox öyrənilmişdir, bu halda əksər hallarda t arqumenti zamandır, $X(t)$ T. f.-sı isə burada *təsadüfi proses* adlanır (əgər t zaman olaraq yalnız tam qiymətlər alarsa, onda T. f.. həm də *təsadüfi ardıcıllıq* və ya zaman sırası da adlandırılır).

Əgər t arqumentinin qiymətləri hər hansı çoxölçülü çoxobrazlının nöqtələri olarsa (məs., k – ölçülü $\mathbb{R}^k$ Evklid fəzasının), onda $X(t)$ T. f. -sı – *təsadüfi meydan* adlanır.

Sonsuz T çoxluğunda təyin olunmuş $X(t)$ T. f.-nın qiymətlərinin ehtimal paylanmasını T -nin elementlərinin bütün mümkün sonlu $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ altçoxluqlarına müvafiq $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ təsadüfi kəmiyyətlərin qrupları üçün sonluölçülü ehtimal paylanmalarının toplusu ilə, yəni

$$F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}}(x_1, \dots, x_n, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{n_i}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

uzlaşma şərtlərin ödəyən uyğun $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sonluölçülü paylanma funksiyalarının toplusu ilə xarakterizə etmək olar, burada $i_1, \dots, i_n$ – $1, \dots, n$ indekslərinin ixtiyari yerdəyişməsidir. $X(t)$ T. f.-nin ehtimal paylanmalarının bu şəkildə verilməsi yalnız t arqumentinin qiymətlərinin sonlu çoxluqlarında $X(t)$ -nin qiymətlərindən asılı hadisələrə baxıldığı bütün hallarda kifayət edir. Lakin T. f.-nın bu şəkildə verilməsi t tip qiymətlərin sonsuz çoxluğunda T. f.-nın qiymətlərindən asılı xassələrinin ehtimallarını təyin etməyə kifayət etmir, məs., T. f.-nın kəsilməzliyi və ya differensiallanan olması ehtimallarını, və ya $X(t)$ T. f.-nın t -nin qiymətlərinin kəsilməz çoxluğunda $X(t) < a$ bərabərsizliyini ödəməsi ehtimalları (bax, *Təsadüfi proses*, *Separabel proses*).

T. f.-nın daha ümumi şəkildə verilməsi – onun T çoxluğunun bütün mümkün nöqtələrində eyni $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $X = X(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusunun təsviri ilə vağlıdır (burada Ω, – ω nöqtələrinin boş olmayan çoxluğu, $\mathscr{A}$, – Ω -nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathbf{P}$, – $\mathscr{A}$ verilmiş ehtimal ölçüsüdür). Belə yanaşmada T çoxluğunda T. f. – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş, iki $t \in T$ və $\omega \in \Omega$ dəyişənlərinin $X(t, \omega)$ funksiyası anlaşılır, bu funksiya t -nin hər bir qeyd olunmuş qiymətlərində $\mathscr{A}$ – ölçülən funksiyadır [yəni t qeyd olunduqda $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtiaml fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətə çevrilən bir funksiya]. ω arqumentini qeyd etdikdə, yəni $\omega = \omega_0$, $X(t, \omega)$ funksiyasından T -də $X(t, \omega_0)$ ədədi funksiyası alınır, bu funksiya $X(t)$ T. f.-nın realizasiyası (və ya seçimi funksiyası) və ya t – zaman dəyişəni olarsa, T. f.-nın trayektoriyası adlanır; $\mathscr{A}$ σ – cəbri və $\mathbf{P}$ ölçüsü, bu halda, altçoxluqların σ – cəbrini və $x(t)$ realizasiyalarının $\mathbb{R}^T = \{x(t), t \in T\}$ funksional fəzasında bu σ – cəbrdə təyin olunmuş ehtimal ölçüsünü doğurur və bu ölçünün verilməsi ilə T. f.-nın verilməsinin ekvivalent olduğunu hesab etmək olar. T. f.-nın bütün mümkün $x(t)$ realizasiyaların $\mathbb{R}^T$ funksional fəzasının altçoxluqlarının σ – cəbrində təyin olunmuş ehtimal ölçüsü kimi verilməsinə ümumi şəkildə T. f.-nın verilməsinin ikidəyişənli $X(t, \omega)$ funksiyası kimi xüsusi halı kimi baxmaq olar [burada ω, – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasındandar], bu xüsusi hal $\Omega = \mathbb{R}^T$ şərtinə müvafiq haldır, yəni elementar hadisələr (ilkin ehtimal fəzasının ω nöqtələri) əvvəlcədən $X(t)$ T. f.-nın $x(t)$ realizasiyaları ilə eyniləşdirilir; digər tərəfdən, hətta göstərmək olar ki, $\mathbb{R}^T$ -də ehtimal ölçüsünün göstərilməsi ilə T. f.-nın bu şəkildə verilməsi $X(t)$ T. f.-nın verilməsinin bütün digər qaydaları da gətirilir. Məsələn, uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında Kolmoqorovun fundamental teoreminə əsasən (bax, *Ehtimal fəzası*), (1) və (2) uzlaşma şərtlərini ödəyən bütün mümkün sonluölçülü $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ paylanma funksiyalarının toplusunun verilməsi $\{x(t) : x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n) \in B^n\}$ şəklində silidirik çoxluqların toplusunun doğurduğu $\mathbb{R}^T = \{x(t), t \in T\}$ funksional çoxluğunun altçoxluqlarının σ – cəbrində ehtimal ölçüsü təyin edir, burada n – ixtiyari tam müsbət ədəd, B^n $[x(t_1), \dots, x(t_n)]$ – vektorlarının n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ fəzasının ixtiyari Borel çoxluğudur.

Əd.: bax, «*Təsadüfi proses*» məq-nə.

TƏSADÜFİ FUNKSİYA; dar mənada xassə **« случайная функция;** свойство в узком смысле; narrow sense property of a **random function »** – $\zeta(t)$, $t \in T$ *təsadüfi funksiyasının* xassəsidir, bu prosesin realizasiyalarının funksional fəzası ehtimal paylanmaları ilə təyin olunaraq və ona yaxın, lakin geniş mənada bir qədər az məhdudiyyətlə, yalnız ilk iki tərtib moment funksiyaları – $\mathbf{M}\zeta(t) = m(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ ilə təyin olunan xassəyə qarşı qoyulur.

TƏSADÜFİ FUNKSİYA; geniş mənada xassə **« случайная функция;** свойство в широком смысле; wide sense property of a **random function »** – $\zeta(t)$, $t \in T$ *təsadüfi funksiyasının* xassəsidir və $\zeta(t)$ ilk iki tərtib momentləri – $\mathbf{M}\zeta(t) = m(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ funksiyaları ilə təyin olunan (yəni təsadüfi funksiyaların koorelyasion nəzəriyyəsinə aid olan) ona yaxın xüsusi dar mənada, yəni $\zeta(t)$ kəmiyyətlərinin bütün çoxölçülü paylanmaları ilə təyin olunan xassəyə qarşı qoyulur. Məs., $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin geniş mənada stasionarlığı və $\mathbb{R}^k$-da təsadüfi $\zeta(t)$ meydanının geniş mənada birciinsliyi uyğun olaraq, $m(t+a) = m(t)$ və $B(t+s, s+a) = B(t, s)$ bərabərliklərinin ixtiyari həqiqi ədəd və ya a vektoru üçün ödənilməsidir; təsadüfi prosesin geniş mənada Markov xassəli olması – $t' \le s < t$, $\zeta(t')$ vektorları üzərinə çəkilmiş H_ζ fəzasının altçoxluğuna $\zeta(t)$ vektorunun proyeksiyası (bu barədə bax, *Korrelyasion nəzəriyyə*(si) təsadüfi funksiyaların) $\zeta(t)$-nin $\zeta(s)$-ə proyeksiyası ilə üst-üstə düşür və s. Adətən, geniş mənada hər hansı xassəyə malik $\zeta(t)$ Qauss T. f.-ları dar mənada uyğun xassəyə malik olur; buna görə də, geniş mənada sinfi hər hansı xassəyə malik T. f.-lar sinfinin öyrənilməsi dar mənada uyğun xassəyə malik T. f.-lar sinfinin öyrənilməsi ilə sıx əlaqəlidir.

TƏSADÜFİ FUNKSİYA; korrelyasion nəzəriyyə **« случайная функция;** корреляционная теория; correlation theory of **random function »** – bax, *Korrelyasion nəzəriyyə*(si) təsadüfi funksiyaların.

TƏSADÜFİ FUNKSİYA; modelləşdirmə **« случайная функция** моделирование; generation/simulation of a **random function »** – bax, *Modelləşdirilməsi*, *təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların.*

TƏSADÜFİ FUNKSİYA; spektral ayrılış **« случайная функция;** спектральное разложение; spectral decomposition/representation of a **random function »** – bax, *Spektral ayrılış.*

TƏSADÜFİ FUNKSİYA; spektral ölçü **« случайная функция;** спектральная мера; spectral measure of a **random function »** – bax, *Spektral ayrılış.*

TƏSADÜFİ FUNKSİYA(sı) zamanın **« случайная функция** времени; **random function** of time **»** – *təsadüfi prosesin* digər adıdır.

TƏSADÜFİ HADİSƏ « случайное событие; random event » – hər hansı *stoxastik eksperimentin* mümkün nəticələrinin (elementar hadisələrinin) ixtiyari elə kombinasiyasıdır ki, onun baş verməsi müəyyən ehtimala malikdir.

Misal 1. İki düzgün zərin bir dəfə atılması stoxastik eksperimentində mümkün ola bilən nəticələrdən hər birini (i, j) cütü ilə işarə etmək olar ki, i – «birinci» zərin üst üzündə düşən xallar sayı, j – «ikinci» zərin üst üzündə düşən xallar sayı olsun, $i, j = \overline{1,6}$. Bu halda stoxastik eksperimentə uyğun elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(i, j) : i, j = \overline{1,6}\}$ kimi ifadə oluna bilər, (i, j) elementar hadisədir, «Düşən xallar cəmi 8-ə bərabərdir» – təsadüfi hadisədir və bu T. h. – $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$ nəticələrinin kombinasiyasıdır, yəni bu hadisə A ilə işarə edilərsə, $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ çoxluğu olur.

Misal 2. İki nöqtənin $[0, 1]$ parçasına ixtiyari qaydada atılması stoxastik eksperimentində mümkün olan nəticələr çoxluğu, başqa sözlə elementar hadisələr fəzası $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ kvadratı olacaqdır, x – birinci nöqtənin koordinatı, y – ikinci nöqtənin koordinatıdır. «x və y-i birləşdirən parçanın uzunluğu α-dan kiçikdir, $0 < \alpha < 1$» hadisəsi – elementar hadisələr çoxluğu kimi – kvadratın bütün elə nöqtələrinin çoxluğudur ki, bunlar koordinat başlanğıcından keçən diaqonaldan $\alpha/\sqrt{2}$-dən az məsafədə yerləşən nöqtələrdir.

Ümumi qəbul olunmuş ehtimal nəzəriyyəsi aksiomatikası (Kolmoqorov aksiomatikası, bax, [1]) çərçivəsində ehtimal modelinin əsası *ehtimal fəzası* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ üçlüyüdür; burada Ω – elementar hadisələr fəzası, yəni stoxastik eksperimentin bütün mümkün olan yeganə mümkün, bir-birini inkar edən nəticələri çoxluğu, $\mathscr{A}$, – Ω-nın altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $\mathbf{P}$, – $\mathscr{A}$ sinfində təyin edilmiş ehtimal ölçüsüdür, təsadüfi hadisələr $\mathscr{A}$ sinfinə daxil olan çoxluqlardır (Ω-nın altçoxluqları).

Yuxarıda verilən misal 1-də $\mathscr{A}$ sinfindəki müşahidə oluna bilən bütün hadisələrin sayı $2^{N(\Omega)}$-ya bərabərdir, burada Ω, – 36 elementdən ibarət sonlu çoxluqdur. $\mathscr{A}$, – Ω-nın 2^{36} sayda bütün altçoxluqlarının sinfidir (Ω və $\varnothing$ – yəqin hadisə və qeyri – mümkün hadisə də daxil olmaqla), hər bir $A \in \mathscr{A}$ üçün $\mathbf{P}(A) = m/36$-ya bərabərdir, m, – A T. h. üçün əlverişli elementar hadisələrin sayı, başqa sözlə, A-nın elementlərinin sayıdır. Misal 2-də Ω – tərəfi vahid uzunluqlu kvadratın nöqtəri çoxluğudur, $\mathscr{A}$, – Ω-nın bütün Borel altçoxluqları sinfi, P, – $\mathscr{A}$-da adi Lebeq ölçüsüdür (sadə fiqurlar üçün onların sahəsi ilə üst-üstə düşən).

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası ilə bağlı hadisələr sinfi $\mathscr{A}$ simmetrik fərq $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ və kəsişmə $A \cap B$ əməllərinə görə vahidi Ω olan Bul halqasıdır, yəni Bul cəbridir $(A, B \in \mathscr{A})$. Bu Bul cəbrində təyin olunan $\mathbf{P}(A)$ funksiyası

normanın bütün xassələrinə, lakin $\mathbf{P}(A)=0$ bərabərliyinin $A=\varnothing$ hadisəsini doğurmadığı xassə istisna olunmaqla, malikdir. Bu halda hadisələrin simmetrik fərqinin ölçüsü $\mathbf{P}$ sıfra bərabər olarsa, bu hadisələri ekvivalent hadisələr kimi qəbul edərək, A hadisələri əvəzinə $\widetilde{A}$ ekvivalentlik siniflərinə baxaraq, $\widetilde{A}$ siniflərinin normalanmış Bul cəbri $\mathscr{A}$-nı almaq olur. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatikasına digər mümkün yanaşma, baxılan stoxastik eksperimentlə bağlı olaraq, ehtimal fəzası ilkin anlayış kimi götürülməyən, T. h.-lərin normalanmış Bul cəbrinə əsaslanır (bax, [2], [3]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, 1917–47, М. – Л., 1948; [3] Kolmogorov A. N., в кн.: VI Zyazd Mathematyvkow Polskich. Krakow (1948), 1950, p. 22–90; [4] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

TƏSADÜFİ XƏTA « случайная ошибка; random error » – sistematik xarakter daşımayan, müşahidə olunan kəmiyyətin orta qiymətindən sağa və ya sola yayınmalarla səciyyələnən, ən diqqətli ixtiyari ölçmələrdə belə müxtəlif və naməlum səbəblər nəticəsində yaranan, aradan qaldırılması heç bir vəchlə mümkün olmayan *xətalara* deyilir. Ehtimal nəzəriyyəsi baxımından bu xətalar riyazi gözləmələrinin sıfra bərabər olması ilə səciyyəvidir. Əgər hər hansı a kəmiyyətinin ölçülmə nəticəsinə hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası kimi baxılarsa, onda $X-a$ fərqinə eksperimentin xətası, $b=\mathbf{M}(X-a)$ kəmiyyətinə sistematik xəta deyilir. $\delta=X-a-b$ təsadüfi kəmiyyəti təsadüfi xəta adlanır. Aydındır ki, $\mathbf{M}\delta=0$. Baxılan sxemdə xəta X-in müşahidəsi ölçülən a kəmiyyətinin özü, sistematik xəta b və T. x. δ-nın cəmi – $X=a+b+\delta$ şəklində ifadə olunur.

Bax, *Müşahidə xətası*, *Ən kiçik kvadratlar metodu*, *Xətalar nəzəriyyəsi*, *Sistematik xəta*.

Əd.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR « случайный линейный оператор; random linear operator » – aşağıdakı kimi təyin olunan xətti operatordur. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, X – həqiqi ədədlər üzərində separabel Hilbert fəzası, $L(X)$, – X-dən X-ə məhdud xətti operatorların fəzası ($A\in L(X)$ olduqda $\|A\|=\sup|Ax|$) olsun. Ω-dan $L(X)$-ə $A(\omega)$ inikası bütün $x, y\in X$ $(A(\omega)x, y)$ üçün $\mathscr{A}$ – ölçülən olarsa, məhdud təsadüfi xətti operator adlanır. Belə inikaslar çoxluğu məhdud T. x. o.-lar çoxluğu adlanır və $L(\Omega, X)$ ilə işarə olunur. Lakin belə obyekt bir çox konkret hallarda istifadə üçün olduqca «kasıb»dır: $L(\Omega, X)$-də əlavə məhdudiyyətlər qoyulmadan, limitə keçmə əməlini aparmaq olmaz [məs., elə $A_n(\omega)\in L(\Omega, X)$ ardıcıllığı göstərmək olar ki, ixtiyari $x\in X$ üçün X – qiymətli $A_n(\omega)x$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllığı ehtimala görə yığılır, lakin limit obyekti $L(\Omega, X)$-ə «yerləşmir». Bununla əlaqədar olaraq, «ümumiləşmiş» (zəif və güclü) operatorlar çoxluqlarına baxmaq zərurəti yaranır.

$X(\Omega)$, – Ω-dan X-ə ölçülən funksiyalar çoxluğu olsun (X fəzasının Borel çoxluqlarının σ – cəbri ilə verildiyi fərz olunur) və X-dən $X(\Omega)$-ya $A(\omega)x$ inikasının aşağıdakı (s) şərtlərini ödədiyi fərz olunur:

1) $A(\omega)x$ – xətti inikasdır:

ixtiyari $x_1, x_2\in X$, $\alpha_1, \alpha_2\in\mathbb{R}$ üçün

$$\mathbf{P}\{A(\omega)(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1A(\omega)x_1+\alpha_2A(\omega)x_2\}=1.$$

2) $A(\omega)x$ X-də ehtimala görə kəsilməzdir:

ixtiyari $\varepsilon>0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\to x$ üçün

$$\lim_{x_n\to x}\mathbf{P}\{|A(\omega)x_n-A(\omega)x|>\varepsilon\}=0.$$

Belə inikaslar güclü təsadüfi xətti operatorlar adlanır və bu operatorların çoxluğu $L_s(\Omega, X)$ ilə işarə olunur.

Ümumiləşmiş təsadüfi operatorların daha geniş sinfi zəif təsadüfi operatorlardır [bunların çoxluğu $L_w(\Omega, X)$ ilə işarə olunur]. $R(\Omega)$ – həqiqi təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu olsun. $X\times X$-dən $R(\Omega)$-ya $(A(\omega)x, y)$ inikası aşağıdakı (ω) şərtlərini ödəyərsə, $(A(\omega)x, y)$ zəif təsadüfi xətti operator adlanır; (ω) şərtləri aşağıdakılardır:

1′) $(A(\omega)x, y)$ – xətti inikasdır:

ixtiyari $x_1, x_2, y_1, y_2\in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\in\mathbb{R}$ üçün

$$\mathbf{P}\{A(\omega)(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2),\ (\beta_1y_1+\beta_2y_2)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\alpha_i\beta_i(A(\omega)x_i, (y_j))\}=1.$$

2′) $(A(\omega)x, y)$, $X\times X$-də ehtimala görə kəsilməzdir:

ixtiyari $\varepsilon>0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(x_n\to x)$ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(y_n\to y)$ üçün

$$\lim_{\substack{x_n\to x\\ y_n\to y}}\mathbf{P}\{|(A(\omega)x_n, y_n)-(A(\omega)x, y)|>\varepsilon\}=0.$$

İxtiyari məhdud T. x. o. $A(\omega)$-ya güclü T. x. o. kimi baxmaq olar [$A(\omega)$-nın X-dən olan elementlərə təsirinə baxmaq lazımdır], ixtiyari güclü T. x. o. $A(\omega)x$-ə isə zəif T. x. o. kimi baxmaq olar [$A(\omega)x$ skalyar hasilinə $y\in X$ elementləri kimi baxmaq lazımdır, yəni $(A(\omega)x, y)$ kimi], odur ki, yuxarıda qeyd olunan mənada $L(\Omega, X)\subset L_s(\Omega, X)\subset L_w(\Omega, X)$ münasibətləri doğrudur, həm də bu daxilolmaların hamısı ciddidir.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные линейные операторы, К., 1978.

TƏSADÜFİ İNİKAS « случайное отображение; random mapping » – $X_n=\{1, \dots, n\}$ çoxluğunun özünə bütün birqiymətli inikasları çoxluğu Σ_n-in *təsadüfi elementi* σ-dır. Təpələri çoxluğu X_n olan, σ inikasında k təpəsi σ_k obrazı ilə qövslə birləşən Γ_n *təsadüfi qrafı* T. i.-a uyğun qrafdır;

$k = 1, \dots, n$. Γ_n təsadüfi qrafının hər bir realizasiyasının bağlılıq komponenti yalnız bir kontura malikdir; konturlara aid olan təpələr t s i k l i k t ə p ə l ə r adlanır. $\Sigma \subseteq \Sigma_n$-dən olan T. i. kimi, adətən, elə σ T. i. anlaşılır ki, bu σ üçün $\mathbf{P}\{\sigma = s\} = \left| \Sigma \right|^{-1}$ bərabərliyi ixtiyari $s \in \Sigma$ üçün ödənilir; $\left| \Sigma \right|$, – Σ-nın elementlərinin sayıdır. $\alpha_r(\Sigma)$, – r sayda təpəsi olan komponentlərin sayı, $\nu(\Sigma)$ – komponentlərin ümumi sayı, $\lambda(\Sigma)$, – Σ-dan olan T. i.-dakı tsiklik təpələrin sayıdır. Əgər Γ_n-də tsiklik təpələri birləşdirən qövslər götürülərsə, onda Γ_n «meşəyə» çevrilir. $\mu_r(\Sigma)$ – meşədə yalnız r sayda təpəli «ağacların» sayı, $\tau(\Sigma)$ – bu meşənin ağaclarının maksimal hündürlüyünə bərabər inikasın hündürlüyü olsun. Σ_n-dən olan T. i.-ların xarakteristikaları tam surətdə öyrənilmişdir. İxtiyari $N = 1, \dots, n$ tam qiyməti üçün

$$\mathbf{P}\{\lambda(\Sigma_n) = N\} = N(n-1)!/(n-N)!\, n^N$$

bərabərliyi doğrudur. Əgər $n \to \infty$ olarsa, onda $z = N/\sqrt{n}$-nin ixtiyari $0 < z \le c < \infty$ şəkilli intervalda yerləşməsini təmin edən bütün tam N qiymətləri üzrə, müntəzəm olaraq

$$\sqrt{n}\ \mathbf{P}\{\lambda(\Sigma_n)/\sqrt{n} = z\} = ze^{z^2/2}(1 + o(1))$$

bərabərliyi doğrudur.

Tsiklik təpələr Γ_n-də *təsadüfi əvəzetmə* təşkil edir, buna görə də, komponentlərin sayı $\nu(\Sigma_n)$, $n \to \infty$ olduqda, asimptotik olaraq, orta qiyməti və dispersiyası $\frac{1}{2}\ln n$-ə bərabər olan normal qanunla paylanır. İxtiyari qeyd olunmuş $r = 0, 1, \dots$ qiymətində $\alpha_r(\Sigma_n)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması limitdə $\lambda_r = \frac{e^{-r}}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r^k}{k!}$ parametrli Puasson paylanması olur. Əgər $n \to \infty$ olarsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş $r = 0, 1, \dots$ qiymətində $z = k/(p_r\sqrt{n})$-in ixtiyari $0 < z_0 \le z \le z_1 < \infty$ şəkilli intervalda yerləşməsini təmin edən bütün tam k qiymətləri üzrə, müntəzəm olaraq,

$$p_r\sqrt{n}\ \mathbf{P}\{\mu_r(\Sigma_n)/(p_r\sqrt{n}) = z\} = ze^{-z^2/2}(1 + o(1))$$

bərabərliyi doğrudur, burada $p_r = (r+1)^{r-1}e^{-r+1}/r!$. $n \to \infty$ olduqda, ixtiyari qeyd olunmuş $x > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\tau(\Sigma_n)}{\sqrt{n}} \le x \right\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2x^2/2}$$

münasibəti doğrudur.

R – özündə 0 saxlamayan və $\{0, 1\}$ ilə üst-üstə düşməyən tam mənfi olmayan ədədlər çoxluğu olsun. $\Sigma_{n,R}$, – X_n-in hər bir elementinin proobrazlarının sayı R-dən qiymət alan, Σ_n-dən olan bütün inikasların altçoxluğudur. Proobrazların sayına məhdudiyyətlər T. i.-ın xassələrinin mühüm dəyişikliyinə səbəb olmur. Məs., B_r hər hansı sabit olarsa, $\tau(\Sigma_{n,R})\sqrt{B_r/n}$ üçün limit paylanması $\tau(\Sigma_n)/\sqrt{n}$-in limit paylanması ilə üst-üstə düşür.

Ümumi halda T. i.-da $1, \dots, n$ elementlərinə uyğun $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ σ – obrazları məhz $(X_n)^n$-də ixtiyari birgə paylanması olan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Σ_n-dən olan T. i. üçün $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunlar X_n-dən ixtiyari qiyməti eyni ehtimalla alırlar. $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda T. i. üçün bir sıra nəticələr alınmışdır, məs., belə T. i.-ın qrafının yalnız bir komponentli olması ehtimalı üçün düstur alınmışdır (bax, [3]).

Əd.: [1] К о л ч и н В. Ф., Случайные отображения, М., 1984; [2] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] С т е п а н о в В. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 1, с. 64–77; [4] К а л у г и н И. Б., «Матем. заметки», 1983, т. 34, № 5, с. 757–71.

* **TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT « случайная величина; random variable »** – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir. T. k. və onun riyazi gözləməsi anlayışlarının rolunu ilk dəfə aydın surətdə P. L. Çebışev qiymətləndirmişdir (1867, bax, [1]). T. k. anlayışının ümumi funksiya anlayışının xüsusi halı olduğu faktı xeyli müddətdən sonra anlaşılmışdır. Ölçü nəzəriyyəsi əsasında ehtimal nəzəriyyəsinin əsasları tamamilə və hər bir artıq məhdudiyyətlər olmadan A. N. Kolmoqorov tərəfindən verilmişdir (1933, bax, [2]); bu şərhdən tamamilə aydın oldu ki, T. k. məhz hər hansı *ehtimal fəzasında* ölçülən funksiyadır. Bu faktı, hətta ehtimal nəzəriyyəsinin ilk şərhində belə, nəzərə almaq olduqca mühümdür. Dərslik ədəbiyyatında, bu nöqteyi – nəzər, ardıcıl surətdə ilk dəfə V. Feller tərəfindən şərh olunmuşdur [burada (bax, [3]-ə ön söz) şərh, elementar hadisələr fəzası anlayışına görə olub, qeyd olunur ki, yalnız bu halda T. k. anlayışı haqqında təsəvvür dolğun və məzmunlu olur].

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası olsun. Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuş və x-in bütün həqiqi qiymətlərində

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{A}, \quad x \in (-\infty, \infty) \qquad (*)$$

şərtini ödəyən birqiymətli ixtiyari $\xi = \xi(\omega)$ həqiqi funksiyasına t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t deyilir. ξ hər hansı təsadüfi kəmiyyət və $\mathscr{A}_\xi$ elə $A \subset \mathbb{R}^1$ çoxluqlarının sinfi olsun ki, bunlar üçün $\{\omega : \xi(\omega) \in A\} \in \mathscr{A}$; onda $\mathscr{A}_\xi$ σ – cəbrdir.

Bu halda $\mathbb{R}^1$ ədəd oxunun bütün Borel altçoxluqlarının sinfi $\mathscr{B}_1$, hər halda, $\mathscr{A}_\xi$ σ – cəbrinin tərkibində olacaqdır. $\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$, $B \in \mathscr{B}_1$ bərabərliyilə, $\mathscr{B}_1$-də təyin olunan $\mathbf{P}_\xi$ ölçüsünə $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *ehtimal paylanması* deyilir. Bu ölçü $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanma funksiyasını* birqiymətli təyin edir, yəni

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}_\xi\{(-\infty, x)\} = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}$$

funksiyası üzrə ξ-nin paylanma funksiyasını. $\mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in A\}$, $A \in \mathscr{A}_\xi$ ehtimallarının qiymətləri (yəni $\mathbf{P}_\xi$ ehtimallarının $\mathscr{A}_\xi$ σ – cəbrinə davamı olan ölçünün

qiymətləri) F_ξ paylanma funksiyasına görə, ümumiyyətlə, birqiymətli təyin olunmur (belə birqiymətlilik üçün kafi şərt – $\mathbf{P}$ ölçüsünün m ü k ə m m ə l ö l ç ü olmasıdır, bax, *Mükəmməl ölçü* və [4]). Bunu həmişə nəzərdə saxlamaq lazımdır (məs., T. k.-in paylanması onun *xarakteristik funksiyası* ilə birqiymətli təyin olunur kimi müddəanın isbatında).

T. k., yaxud T. k.-lər sisteminin doğurduğu təsadüfi hadisələr haqqında aşağıdakı teorem asanlıqla isbat olunur (bax, [6]):

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $\xi(\omega)$ – bu fəzada təyin olunmuş T. k. olsun. Onda Ω çoxluğunun aşağıdakı altçoxluqlarından hər biri *təsadüfi kəmiyyətdir*, yəni

$$\{\omega: \xi(\omega) \geq x\} \in \mathscr{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) > x\} \in \mathscr{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) = x\} \in \mathscr{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A},$$

ixtiyari $a < b \in \mathbb{R}^1$

$$\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}, \quad \{\omega: a < \xi(\omega) < x\}.$$

Əgər $\xi = \xi(\omega)$ və $\eta = \eta(\omega)$ $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş T. k.-lərdirsə, onda

$$\{\omega: \xi(\omega) < \eta(\omega)\} \in \mathscr{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) > \eta(\omega)\} \in \mathscr{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq \eta(\omega)\} \in \mathscr{A},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in \mathscr{A}$$

münasibətləri onu ifadə edir ki, «$\in$» münasibəti ödənilir, sol tərəfdəki ifadələr doğrudur və bu çoxluqlar $\mathscr{A}$ σ – cəbrindən olan təsadüfi hadisələrdir. Daha sonra,

$c \cdot \xi(\omega)$, $\xi(\omega) + c$, $|\xi(\omega)|$, $\xi(\omega) \pm \eta(\omega)$, $\xi(\omega) \cdot \eta(\omega)$ və $\mathbf{P}\{\omega: \eta(\omega) \neq 0\}$ olarsa, $\xi(\omega)/\eta(\omega)$ T. k.-lərdir (bax, [5]).

Əgər $\{\xi_n(\omega),\ n \geq 1\}$ $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş T. k.-lər ardıcıllığıdırsa,

$\sup\limits_n \xi_n(\omega)$, $\inf\limits_n \xi_n(\omega)$, $\overline{\lim}\, \xi_n(\omega)$, $\underline{\lim}\, \xi_n(\omega)$ – T. k.-lərdir (bax, [6]).

Əgər $f(x)$ $\mathbb{R}^m$-də təyin olunmuş Borel funksiyası, $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_m(\omega)$ $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş T. k.-lərdirsə, onda $f(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_m(\omega))$ – T. k.-dir (bax, [5]).

Əgər ξ T. k. sonlu və ya hesabi sayda cüt-cüt müxtəlif $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qiymətlərini, uyğun olaraq, $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ehtimalları ilə alırsa, $p_n = \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) = x_n\}$, onda onun paylanması d i s k r e t p a y l a n m a adlanır və bu ehtimal paylanması

$$\mathbf{P}_\xi(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər elə $p_\xi(x)$ funksiyası varsa ki, (ehtimal sıxlığı funksiyası), ixtiyari $B \subset \mathbb{R}^1$ intervalı üçün (ixtiyarı Borel çoxluğu B üçün),

$$\mathbf{P}_\xi(B) = \int_B p_\xi(x)\,dx$$

olsun, onda $\xi = \xi(\omega)$ T. k.-nin paylanması k ə s i l m ə z (və ya m ü t l ə q k ə s i l m ə z) p a y l a n m a adlanır. Adi riyazi analiz terminologiyasında, bu $\mathbf{P}_\xi(\cdot)$-nin $\mathbb{R}^1$-də Lebeq ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzliyidir.

Misal 1. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ – düzgün metal pulun bir dəfə atılması eksperimentinə uyğun ehtimal fəzası olsun. Bu halda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, elementar hadisələr fəzası, $\mathscr{A} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\ \varnothing, \Omega\}$, – hadisələr cəbri, $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 1/2$ olur.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 \\ -1, & \omega = \omega_2 \end{cases};$$

funksiyası Ω-da təyin olunmuş funksiya olsun. Onda aydındır ki,

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \varnothing, & x \leq -1 \\ \{\omega_2\}, & -1 < x \leq 1, \\ \Omega, & x > 1 \end{cases}$$

olduğundan, ixtiyari $x \in (-\infty, \infty)$ üçün $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{A}$ münasibəti ödənilir, deməli, $\xi = \xi(\omega)$ T. k.-dir. Bu halda, $\xi = \xi(\omega)$ inikasının doğurduğu ehtimal fəzası $(\mathbb{R}^1, \mathscr{B}, \mathbf{P})$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$; $\mathscr{B} = \{(-\infty, 1]; (-1, 1]; (1, +\infty); (-1, +\infty); (-\infty, -1] \cup (1, +\infty]; \mathbb{R}^1, \varnothing\}$; və ixtiyari $\mathbf{B} \in \mathscr{B}$ Borel çoxluğu üçün

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) \in \mathbf{B}\}.$$

Aydındır ki, bu təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası aşağıdakı münasibətlə ifadə olunur.

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 1/2, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(Ətraflı tanışlıq üçün bax, [6]).

T. k.-in ehtimal paylanmasının bir sıra ümumi xassələri onun ədədi xarakteristikaları ilə tam mənasında təsvir olunur. Bu halda, *median və kvantil* kimi ə d ə d i x a r a k t e r i s t i k a l a r ı n elə üstünlüyü vardır ki, bunlar ixtiyari paylanmalar üçün hesablanılır, lakin bunlarla müqayisədə ən çox istifadə olunan *riyazi gözləmə* $\mathbf{M}\xi$ və *dispersiya* $\mathbf{D}\xi$-dir. Bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi* məq.-nə.

ξ k o m p l e k s T. k. –

$$\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$$

düsturu ilə, həqiqi ξ_1 və ξ_2 T. k.-lər cütü ilə təyin olunur, $\xi_1 = \xi_1(\omega)$ və $\xi_2 = \xi_2(\omega)$ – eyni $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal

fəzasında verilmiş T. k.-lərdir. Kompleksqiymətli $\xi = \xi(\omega)$ T. k.-nin riyazi gözləməsi ξ_1 və ξ_2 T. k.-lərinin riyazi gözləmələri ($\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}(\xi_1 + i\xi_2) = \mathbf{M}\xi_1 + i\,\mathbf{M}\xi_2$) düsturu ilə təyin olunur.

Nizamlanmış $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ toplusuna qiymətləri $\mathbb{R}^s$-dən olan t ə s a d ü f i v e k t o r kimi baxmaq olar.

Sonsuz ölçülü hal üçün T. k. anlayışı *təsadüfi element* anlayışına ekvivalentdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, riyazi analizin bir sıra məsələlərində və ədədlər nəzəriyyəsində istifadə olunan funksiyalara məqbul sayılan ehtimal fəzalarında təyin olunmuş T. k.-lər kimi baxmaq məqsədəuyğun olur.

Əd.: [1] Ч е б ы ш е в П. Л., О средних величинах, в кн.: Полн. собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теория вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2изд., т. 1, М., 1967; [4] Г н е д е н к о Б. В., К о л м о г о р о в А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [5] К а ц М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [6] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Я д р е н к о М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT; ç e v i r m ə « **случайная величина;** п р е о б р а з о в а н и е; t r a n s f o r m a t i o n o f a **random variables** » – paylanma ehtimalları verilmiş xassələrə malik olan təsadüfi kəmiyyətlər funksiyalarının qurulmasıdır. Məs., X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası kəsilməz və ciddi artan $F(x)$ olsun, onda $Y = F(X)$ təsadüfi kəmiyyəti $[0, 1]$-də müntəzəm qanunla, $Z = \Phi^{-1}(F(x))$ isə $(0, 1)$ parametrlərli normal qanunla paylanır. Burada $\Phi(\cdot)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır. Əksinə, $X = F^{-1}(\Phi(Z))$ düsturundan Z normal qanuna tabe olduğu halda, paylanma funksiyası verilən $F(x)$ olan X kəmiyyəti alınır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin çevirmələri riyazi statistikada yüksək dəqiqlikli sadə asimptotik düsturların qurulmasında bir əsas kimi istifadə olunur (bax, *Asimptotik normal çevirmə*, *Asimptotik Pirson çevirməsi*, *Yaxşılaşdıran çevirmə yığılmanı*, *Approksimasiyası*, *mürəkkəb paylanmaların* d a h a s a d ə l ə r i l ə).

Əd.: [1] Б о л ь ш е в Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с.136–49; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT k ə s i k « **случайной величина** у с е ч е н н а я; t r u n c a t e d **random variable** » – bax, *Kəsik təsadüfi kəmiyyət.*

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT; m o d e l l ə ş d i r m ə « **случайная величина;** м о д е л и р о в а н и е; g e n e r a t i o n / s i m u l a t i o n o f **random variable** » – bax, *Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyət və funksiyaların*.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT n o r m a l a n m ı ş « **случайная величина** н о р м и р о в а н н а я; n o r m e d **random variable** » – bax, *Normalanmış təsadüfi kəmiyyət*.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT; s ə r h ə d l ə r i n q i y m ə t l ə n d i r i l m ə s i « **случайная величина;** о ц е н и в а н и е г р а н и ц; e s t i m a t i o n o f b o u n d s o f **random variable** » – kəsilməz *təsadüfi kəmiyyətinin* müşahidələr nəticəsində alınmış qiymətlərindən $H = \{X_i\}$, $i = 1, \ldots, N$ təkrar seçimi üzrə yuxarı sərhədi olan (aşağı sərhəd analoji təyin olunur) $M = \operatorname{vrai\,sup} X$ parametrinin statistik qiymətinin qurulmasıdır. Fərz olunur ki, M kəmiyyəti sonludur. $V(\upsilon) = 1 - F(M - 1/\upsilon)$, $\upsilon > 0$ funksiyası hər hansı α, $0 < \alpha < \infty$ göstəricisi ilə sonsuzluqda düzgün dəyişən funksiyadır. Burada F, – X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır. Göstərilən şərtlər ödənildikdə $(M - X_{(N)}) \big/ (M - \theta_N)$ T. k.-lər ardıcıllığı paylanma funksiyası $\Phi_\alpha(t) = \exp\{-(-t)^\alpha\}$, $t < 0$ olan T. k.-ə, $N \to \infty$ olduqda zəif yığılır, bu halda $F(\theta_N) = 1 - N^{-1}$, $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(N)}$, – H seçiminə uyğun qaydalı statistikalardır. M parametrinin xətti statistik qiymətləri $M_{N,k} = \sum_{i=0}^{k} a_i X_{(N-i)}$ -lərin sinfi daha çox yayılmışdır, bu halda $N \to \infty$ olduqda $k^2/N \to 0$. $M_{N,k}$ statistik qiymətlərinin tutarlı statistik qiymətlər olması üçün $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ şərtinin ödənilməsi zəruridir. $\hat{M}$ statistik qiymətinin keyfiyyəti $\mathbf{M}(\hat{M} - M)^2$ kəmiyyəti ilə ölçülür. Asimptotik optimal xətti statistik qiymətlərin aşkar ifadələri məlumdur (bax, [1]). Bu statistik qiymətlər asimptotik normal və asimptotik effektivdirlər (onların asimptotik dispersiyası asimptotik normal bütün statistik qiymətlər çoxluğunda minimaldır).

Əd.: [1] Ж и г л я в с к и й А. А., Математическая теория глобального случайного поиска, Л., 1985, гл. 7.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT s o n l u q r u p d a « **случайная величина** н а к о н е ч н о й г р у п п е; **random variable** i n a f i n i t e g r o u p » – təsadüfi kəmiyyət sonlu qrupdan qiymətlər aldığı halda təsadüfi kəmiyyət anlayışının ümumiləşdirilməsidir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ – sonlu qrup olsun. G-dən qiymətlər alan ixtiyari $\mathcal{A}$ – ölçülən $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ funksiyasına G q r u p u n d a t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t deyilir. G-də ξ T. k.-nin p a y l a n m a s ı $p_i = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = g_i\}$, $i = 1, \ldots, s$ ehtimallar toplusu ilə verilir. G-də təyin olunmuş, iki paylanmadan biri müntəzəm olan (yəni $p_i = 1/s$, $i = 1, \ldots, s$) paylanmaların kompozisiyası G-də müntəzəm paylanmadır. Limit teoremləri nəzəriyyəsində G-də paylanmaların kompozisiyası üçün müntəzəm paylanma T. k.-lərin cəmlənmə nəzəriyyəsində ədəd oxunda normal paylanmanın oynadığı rolu ifadə edir. G-də təyin olunmuş paylanmaları həqiqi ədədlər meydanı üzərində qrup cəbri U-nun elementləri ilə eyniləşdirmək münasibdir (x_i, $i = 1, \ldots, s$ həqiqi ədədlər olduğu halda U-nun elementləri bütün mümkün ola bilən $x_1 g_1 + \ldots + x_s g_s$ xətti formalarıdır); bu eyniləşdirmə aşağıdakı qayda üzrə aparılır: $\mathbf{P}\{\xi = g_i\} = p_i$, $i = 1, \ldots, s$ kimi verilən paylanmaya U-nun $p_1 g_1 + \ldots + p_s g_s$-ə bərabər elementi qarşı qoyulur. Bu halda G-də paylanmaların kompozisiyasına U-nun uyğun elementlərinin hasili uyğun olur (bax, [1]). G-də paylanmaların U-nun elementləri ilə ifadə olunmasından G-də paylanmaların kompo-

zisiyalarının yığılması üçün zəruri və kafi şərtləri müəyyənləşdirdikdə istifadə olunmuşdur (bax, [2], [3]).

G -də T. k. üçün xarakteristik funksiya anlayışı daxil olunmuşdur (bax, [4]). Bu anlayış aşağıdakı şəkildə verilir.

$M^{(r)}(g),\ r=1,\ \dots,t$, – G qrupunun unitar ayrılmayan birbirinə ekvivalent olmayan bütün ifadələri olsun; $M^{(r)}(g)$ ifadələrinin qiymətləri hər hansı $M^{(r)}(g_i),\ i=1,\ \dots,\ s$ matrisləri olacaqdır (bax, [5]). G -də ξ T. k.-nin xarakteristik funksiyası t sayda

$$\sum_{i=1}^{s} M^{(r)}(g_i)\,p_i\ ,\quad r=1,\ \dots,t \qquad (*)$$

martislərinin toplusu kimi anlaşılır. Əgər G Abel qrupudursa, onda (*)-da $t=s$, $M^{(r)}(g)$, – G -nin modulu 1-ə bərabər kompleks ədədlərin multiplikativ qrupuna homomorf inikasıdır. Məs., s modulu üzrə çıxıqların $Z_s=\{0,1,\dots,\ s-1\}$ qrupu üzrə

$$M^{(r)}(g_{j+1})=M^{(r)}(j)=\exp\left(2\pi i\,\frac{jr}{m}\right),$$

$$j=0,\ \dots,\ s-1,\ r=1,\ \dots,\ s\ .$$

(*) xarakteristik funksiyası ədəd oxunda T. k.-in xarakteristik funksiyasının bir çox xassələrinə malikdir, bu xüsusiyyət, G -də paylanmaların kompozisiyasının araşdırılmasında onu istifadə etməyə imkan yaradır (bax, [6], [7]).

G -də ξ T. k. üçün ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından riyazi gözləmə və dispersiyanın daxil edilməsi aydın deyildir. Belə ki, G -də ξ T. k. üçün riyazi gözləmə və dispersiyanın aksiomatik qurulması ədəd oxunda riyazi gözləmə və dispersiyanın əsas xassələrinə əsasən təyin olunur və bu halda bunların özünəməxsus xüsusiyyətləri şərtləşdirilmir (bax, [2], [8]). Məs., $C_2=\{e,\ g\}$ qrupunda (e – qrupun vahidi, $g^2=g$) paylanmış ξ T. k. üçün $\mathbf{P}\{\xi=e\}=p_1$, $\mathbf{P}\{\xi=g\}=p_2$, $p_1\neq p_2$ olduğu halda, $p_1>p_2$ olduqda riyazi gözləmə e, $p_1<p_2$ olduqda isə g -yə bərabər olur. Qeyd etmək lazımdır ki, $G=\{e\}$ və G_2 qrupunun düzünə dərəcəsinə izomorf qruplar riyazi gözləməsi olan sonlu qrupların yeganə siniflərıdir, bu isə bu anlayışın praktiki dəyərini azaldır.

Qruplarda təsadüfi proses, təsadüfi dolaşma kimi anlayışlar haqqında (bunlar qrupda T. k. anlayışı ilə sıx əlaqəlidirlər) bax, [9] və [10].

Əd.: [1] Schwarz S., «Чехосл. матем. ж.», 1963, т. 13, с. 372–426; [2] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 678–97; [3] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 295–307; [4] Максимов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 2, с. 228–42; [5] Максимов В. М., «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, № 3, с. 524–27; [6] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [7] Воробьев Н. Н., «Матеем. сб.», 1954, т. 34, № 1, с. 89–126; [8] Kawada Y., Ito K., «Proc. Phys. Math. Soc. Japan», 1940, v. 22, p. 977–98; [9] Boge W., «J. reine und angew. Math.», 1959, Bd 201, № 3–4, S. 150–56; [10] Takacs L., «Acta Sci. Math.», 1983, v. 45, № 1–4, p. 395–408.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏT, GƏLƏCƏKDƏN ASILI OLMAYAN « случайная величина не зависящая от будущего; random variable independing of future » – bax, *Təsadüfi zaman anı.*

***TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR** limitə görə sabit **« случайные величины** предельно постоянные; limitly constant **random variables »** – bax, *Böyük ədədlər qanunu.*

TƏSADÜFİ KƏSİK(yi) çoxüzlünün **« случайное сечение** многогранника; **random section** of a polyhedron **»** – çoxüzlünü təsadüfi müstəvi ilə kəsmə nəticəsində alınan çoxüzlüdür. Təsadüfi müstəvinin paylanması əksər hallarda hərəkətlər qrupuna nəzərən invariant olan müstəvilər ölçüsünün daralmasına münasib götürülür. T. k. riyazi strategiyada istifadə olunur.

Kombinator inteqral həndəsədə rahat hesablama düsturları alınmışdır; T. k.-in bucaqları sayı n -in paylanmaları $\{p_n\}$ ikiüzlü bucaqların açıları (rus. растворы углов) və tillərin və diaqonalların uzunluğu ilə ifadə olunur. Hündürlüyü h -a, perimetri H -a bərabər, oturacağı N bucaqlı olan düzgün prizmalar üçün

$$Mn=4+(N-4)\,\frac{k}{h+H/2}\ .$$

Düzbucaqlı paralelepipedlər sinfində

$$Mn=4\ ,\ p_4>p_3>p_5>p_6$$

olduğu alınmışdır, kub üçün p_3, p_5, p_6 ehtimalları maksimum, p_4 isə minimum qiymətlərini alır.

TƏSADÜFİ KODLA(N)MA « случайное кодирование; random coding » – *kodlama* metodlarından biridir, mənbənin hasil etdiyi məlumatların hər bir mümkün qiymətinə, rabitə kanalının girişində, siqnalın ixtiyari təsadüfi seçilmiş qiyməti qarşı qoyulur. Bu halda mümkün kodlar çoxluğunda (kanalın girişində siqnalların qiymətlər toplusunda) hər hansı ehtimal paylanması (kodlar ansamblı adlandırılan) verilir. Əksər hallarda fərz olunur ki, kodun hər bir elementi (yəni məlumatın verilən qiymətinə uyğun olan girişdəki siqnalın qiyməti) digərlərindən asılı olmadan və verilən ehtimal paylanmalarına uyğun olaraq seçilir. T. k. bəzən elə təyin edilir ki, T. k.-nın hər bir realizasiyası xətti kod olsun (bax, *Blok kod*).

T. k.-ya baxılmanın mühümlüyü onunla bağlıdır ki, *səhv dekodlama ehtimalının* bütün realizasiyalar üzrə orta qiyməti optimal kodun səhv dekodlama ehtimalı üçün araşdırılan yuxarı sərhədi nisbətən asan tapmağa imkan verir (bax, *Təsadüfi kodla*(n)*ma*; sərhəd). T. k. *mənbələr və kanallar şəbəkələrinin* kodlanması üçün də istifadə edilir və çoxkomponentli kanalların ötürücülük qabiliyyəti oblastının hesablanmasında əsas metod hesab olunur.

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3–104; [3] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1985; [4] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985; [5] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243–332.

TƏSADÜFİ KODLA(N)MA; sərhəd **« случайное кодирование;** граница; bound of **random coding »** – yaddaşsız kanal üzrə məlumatların ötürülməsində

səhv dekodlama ehtimalı üçün yuxarı sərhəddir. Fərz olunur ki, giriş əlifbası Y, çıxış əlifbası $\widetilde{Y}$ olan, keçid ehtimalları $p(\widetilde{y}\,|\,y)$ -lər çoxluğu ilə diskret stasionar yaddaşsız kanal üçün təsadüfi kodlama eksponentinin göstəricisi $E_r(R)$, $R \geq 0$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$E_r(R) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} \max_{q} [E_0(\rho, q) - \rho R], \qquad (*)$$

burada $q = \{q(y),\ y \in Y\}$, – Y -də ixtiyari ehtimallar paylanmasıdır, $E_0(\rho,\ q)$, – Qallager funksiyası adlanan, aşağıdakı düsturla ifadə olunan funksiyadır:

$$E_0(\rho,\ q) = -\ln \sum_{\widetilde{y} \in \widetilde{Y}} \left[\sum_{y \in Y} q(y)\,(p(\widetilde{y}\,|\,y))^{1/(1+\rho)} \right]^{1+\rho}.$$

Onda səhv dekodlama ehtimalının orta qiyməti sürəti R -ə bərabər, N uzunluqlu optimal blok kodunun köməyilə verilən kanalla ötürmədə yuxarıdan qiymətləndirilir (təsadüfi kodlama sərhədinə malikdir): $P_e^{\text{opt}} \leq \exp\{-N E_r(R)\}$. T. k. sərhədini verilmiş kanalın etibarlılıq funksiyası $E(R)$ üçün aşağı sərhəd kimi interpretasiya etmək olar: $E(R) \geq E_r(R)$.

Məlumdur ki, əgər bütün keçid ehtimalları $p(\widetilde{y}\,|\,y)$ -lər müsbət olarsa, onda (*) düsturu ilə təyin olunan $E_r(R)$ funksiyası müsbət, $\cup$ qabarıq, $0 \leq R < C$ olduqda monoton azalan funksiyadır. Əgər bəzi $\widetilde{y}, y$ cütləri üçün $\rho(\widetilde{y}\,|\,y) = 0$ olarsa, onda ola bilər ki, elə $C_0 > 0$ var ki (səhv sıfra bərabər olduqda kanalın ötürücülük qabiliyyəti adlanan), $0 \leq R < C_0$ olduqda $E_r(R) = \infty$ olsun.

R_{cr}, – R -in ən kiçik qiyməti olsun; R_{cr} üçün qabarıq $E_r(R)$ əyrisinə dayaq xəttinin meyl bucağının tangensinin -1 -ə bərabər olduğu fərz olunur (R_{cr} kritik sürət adlanır). Onda $R_{\text{cr}} \leq R < C$ olduqda $E_r(R) = E_{sp}(R)$ bərabərliyi doğrudur, burada E_{sp} – kürəvi qablaşdırma göstəricisidir (bax, *Sıx yerləşmə sərhədi*) və o, E_r -in yuxarı sərhədidir. Beləliklə, $R_{\text{cr}} \leq R < C$ olduqda $E(R)$ -in dəqiq qiyməti məlumdur, yəni optimal səhv dekodlama ehtimalı P_e^{opt} üçün baş hədlərdə üst-üstə düşən asimptotik yuxarı və aşağı sərhədlər məlumdur.

T. k. sərhədinin digər formaları da vardır (bax, [1]). T. k. sərhədinin dəqiqləşdirilməsi haqqında bax, [2].

Əd.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш., Курс теории информации, М., 1982; [3] Чисар И., Кернер Я., Теория информации, пер. с англ., М., 1985.

TƏSADÜFİ KOMPAKT ÇOXLUQ « случайное компактное множество; compact random set » – bax, *Təsadüfi çoxluq.*

TƏSADÜFİ KÜKRƏNTİ(si) dinamik sistemin **« случайное возмущение** динамической системы; **random perturbation** of a dynamical system **»** – dinamik sistemin bu və digər *təsadüfi prosesin* (adətən, orta qiyməti sıfır olan) təsirindən yaranan kükrəntisidir, məs., bəyaz küyün təsirilə. Dinamik sistemlərin kiçik T. k.-ləri 20-ci əsrin 30-cu illərində öyrənilməyə başlanılmışdır. Sonsuz parçada və ya kükrəntilər azaldıqca sonsuz artan zaman parçasında kükrəntiyə məruz qalmış sistemin evolyusiyası ilə bağlı məsələ-lərdən əsasları: invariant ölçünün asimptotikası haqqında, kükrən-tisiz sistemin trayektoriyalarının çıxmadığı oblastdan çıxış yeri və müddətinin limit paylanmaları və s. haqqında məsələlərdir. Bu halda ən sadə, lakin mühüm nəticə ondan ibarətdir ki, kükrəntilər azaldıqca kükrəntiyə məruz qalmış sistemin invariant ölçüsünün limiti kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin invariant ölçüsüdür. Bu halın xarakteristikalarını öyrənmək üçün kükrəntiyə məruz qalmış sistemin kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin trayektoriyalarından zamanın sonlu parçalarında böyük yayınmalarının ehtimallarının asimptotikası mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Kiçik bəyaz küylü $x(t) = b(x(t))$ dinamik sistemlərinin zaman üzrə bircins T. k.-lərinin sxemi daha çox öyrənilmişdir, bu sistemlər kiçik ε parametrinə mütənasib diffuziyaya malik diffuzion proseslərə gətirir, yuxarıda şərh olunan məsələlər yüksək tərtib törəmələri

$$\sum_i b^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j} a^{ij}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}.$$

münasibətilə ifadə olunduqda kiçik parametrlə 2-ci tərtib operatorla bağlı olan elliptik və parabolik terminlərilə təbii olaraq ifadə olunur.

Kükrəntiyə məruz qalmış sistemin trayektoriyası $x^\varepsilon(t)$ -nin, kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin trayektoriyası $x(t)$ -dən $[T_1,\ T_2]$ sonlu parçasında böyük yayınmalarının ehtimalları hərəkət funksionalı adlandırılan

$$\varepsilon^{-1} S(\varphi) = \varepsilon^{-1} S_{T_1,\,T_2}(\varphi)$$

funksional ilə xarakterizə olunur, burada

$$S_{T_1,T_2}(\varphi) = S_{T_1}^{T_2}\,\frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi(t))(\varphi^i(t)) -$$

$$- b^i(\varphi(t))(\varphi^j(t)) - b^j(\varphi(t))$$

(a_{ij} matrisi a^{ij} -yə tərs matrisdir). Daha dəqiq: $x^\varepsilon(t)$ -nin $[T_1,\ T_2]$ parçasında $\varphi(t)$ funksiyasına ε -nun kiçik qiymətlərində yaxın olması ehtimalı, təqribi olaraq, $\exp\{-\varepsilon^{-1} S_{T_1,T_2}(\varphi)\}$ -yə bərabərdir (bu halda $x_{T_1}^\varepsilon = \varphi_{T_2}$ olduğu fərz olunur). Kiçik ε -lu $x^\varepsilon(t)$ prosesinin zamanın böyük parçalarında qalması üçün dinamik sistemin verildiyi fəzanın nöqtələri arasında ekvivalentlik münasibətinin olması mühümdür: əgər ($S(\varphi)$ və $S(\psi)$ -nin ən kiçik qiymətləri olması şərtilə) x -i y ilə və y -i x ilə birləşdirən φ və ψ funksiyaları vardırsa (yəni $\varphi_0 = x$, $\varphi_{T_1} = y$, $\psi_0 = y$, $\psi_{T_2} = x_2$), onda $x \sim y$. Əgər bir-birinə ekvivalent nöqtələrdən ibarət və kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin bütün ω limit nöqtələrini də özündə saxlayan sonlu sayda K_i kompaktları varsa, kükrəntiyə məruz qalmış sistem zamanın böyük parçalarında, müəyyən mənada, ε parametrindən asılı və keçid ehtimalları $\exp\{-\varepsilon^{-1} V_{ij}\}$ tərtib sonlu Markov zəncirinə oxşardır; burada V_{ij}, – i -ci kompaktı j -ci kompaktla birləşdirən funksiyalar üzrə S funksionalının aşağı sərhədidir. «Ümumi vəziyyət» halında bu

$\varepsilon \downarrow 0$ olduqda invariant ölçünün hansı K_i kompaktında topalandığını göstərməyə və kükrəntiyə məruz qalmış sistemin trayektoriyalarının oblastdan çıxması ilə bağlı məsələləri həll etməyə imkan yaradır (bax, [2]). Əgər limit kompaktında kükrəntiyə məruz qalmamış sistemin normalanmış invariant ölçüsü birdən çoxdursa, onda kükrəntiyə məruz qalmış sistemin invariant ölçüsünün bunlardan hansına yığılması haqqında sual doğur. Bu sual, xüsusilə də, o halda maraqlıdır ki, kükrəntiyə məruz qalmamış sistem güclü qarışma xassələrinə malik olur və özü-özünə «stoxastik» olması ilə xarakterizə olunur. Bu halda invariant ölçünün limitinə aid nəticələr (diskret zamanlı dinamik sistemlər üçün) [3]-də əks olunmuşdur, son zamanlarda isə kəsilməz zaman sxemi üçün bu növ nəticələr alınmışdır.

Digər – kiçik kükrəntilər sxemi – parametrdən asılı olmayan, lakin zaman keçdikcə azalan kükrəntilər sxeminə stoxastik approksimasiya prosedurlarına əlavələrlə [4]-də baxılmışdır.

Əd.: [1] Понтрягин Л., Андронов А., Витт А., «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1933, т. 3, № 3, с. 165–80; [2] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [3] Кифер Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1974, т. 38, № 5, с. 1091–115; [4] Коростелев А. П., Стохастические рекуррентные процедуры. Локальные свойства, М., 1984.

TƏSADÜFİ KVADRATUR DÜSTUR « случайная квадратурная формула; random quadrature formula » –

$$\int f(x)\,\mu(dx) \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

şəklində düsturdur, burada kvadratur cəmin düyünləri və çəkiləri hər hansı kvadratur cəmlər çoxluğu K -da təyin olunmuş ehtimal ölçüsünə uyğun olaraq K çoxluğundan təsadüfi seçilir. Bir qayda olaraq, bu halda kvadratur cəm inteqralın n üzrə meylsiz və ya asimptotik meylsiz statistik qiymətidir. T. k. d.-lardan təsadüfi düyünlərli *kvadratur düsturlar* daha çox yayılmışdır.

Əd.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

TƏSADÜFİ QABARIQ ÇOXLUQ « случайное выпуклое множество; random convex set » – bax, *Təsadüfi çoxluq.*

TƏSADÜFİ QRAF « случайный граф; random graph » – qrafların hər hansı çoxluğu $\mathcal{G}$ -nin *təsadüfi elementidir*. $\mathcal{G}$ -dən olan qrafların səciyyəvi əlamətləri onların «T. q» adına da əlavə olunur. Belə qraflara misal istiqamətlənmiş, istiqamətlənməmiş, zirvələri bir-birindən fərqlənən və fərqlənməyən təsadüfi ağaclar, təsadüfi meşələr və s. kimi adlandırılmış T. q.-lardır. Əgər $\mathcal{G}$ sonlu sinif olarsa və $\mathcal{G}$ -nin bütün qraflarına eyni bir ehtimal qarşı qoyulmuşdursa, bu halda qraf bərabərehtimallı T. q. adlanır. n sayda fərqlənən zirvələrli və N sayda ilgəksiz və paralel tillərli bərabərehtimallı $\mathcal{G}_{n,N}$ T. q. hər birinə $\left(\binom{n}{2}\right)^{-1}$ ehtimalı qarşı qoyulmuş bütün qeyd olunmuş qrafların çoxluğu ilə təyin olunur.

T. q.-ların mühüm T. q.-lar tipi verilən $G=(V,\,E)$ qrafından onun bəzi tillərinin təsadüfən, asılı olmayaraq xaric olunması ilə alınan qraflardır, bu xaric olunma aşağıdakı kimi aparılır: $e\in E$ tili $q(e)$ ehtimalı ilə G -dən xaric olunur, $p(e)=1-q(e)$ ehtimalı ilə orda qalır. Əgər $G=K_n$ tam n – zirvəli qrafdırsa və $p(e)\equiv p$ olarsa, onda uyğun T. q. $\mathcal{G}_{n,\,p}$ ilə işarə olunur.

T. q.-lar nəzəriyyəsinin əsas məsələsi T. q.-ın quruluşunu xarakterizə edən təsadüfi kəmiyyətlərin – əlaqə komponentlərinin sayı, diametrin, xromatik ədədin və s.-nin paylanmalarının öyrənilməsi, həmçinin xüsusi bir hal kimi T. q.-ın bu və ya digər xassəyə malik olması ehtimalının tapılmasıdır. Bərabərehtimallı T. q.-lar üçün bu məsələlər bu və ya digər tip qrafların sayının hesablanması haqqında kombinatorikanın uyğun məsələləri ilə eynigüclüdür. T. q.-lar nəzəriyyəsini fərqləndirən cəhət uyğun təsadüfi kəmiyyətlərin limit paylanmaları haqqında, səciyyəvi parametrin (məs., zirvələr sayının) sonsuzluğu yaxınlaşdığı halda məsələnin qoyuluşu və həllidir. $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,\,p}$ T. q.-larının quruluşu ən tam şəkildə araşdırılmışdır.

$\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,\,p}$ T. q-larının quruluşu əsas etibarilə $\mathcal{G}_{n,N}$ üçün $t=2N/n$ parametri ilə və ya $\mathcal{G}_{n,\,p}$ üçün $t=(n-1)\,p$ parametri ilə təyin olunur. Ümumi hallarda t T. q.-ın ixtiyari zirvəsinin qüvvət üstünün orta qiyməti kimi interpretasiya olunur. t «zaman» kimi interpretasiya olunduqda, n -in dəyişməz, t -nin isə artması şərtlərində $\mathcal{G}_{n,N}$ T. q.-nın quruluşunun dəyişməsini bu qrafların zaman üzrə evolyusiya kimi interpretasiya etmək olar. $t\to\infty$ olduqda $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,\,p}$ T. q.-ları eyni bir t anında əsas etibarilə asimptotik olaraq eyni quruluşlu olur. T. q.-ın hər hansı xassəyə malik olması haqqında bütün müddəalar $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,\,p}$ T. q.-larının evolyusiyasının aşağıdakı təsvirində uyğun hadisənin ehtimallarının $n\to\infty$ olduqda 1-ə yaxınlaşması kimi anlaşılmalıdır.

$0<t<1$ olduqda T. q.-ın bütün komponentlərinin tsikli birdən artıq olmur; komponent – ağacların sayı orta qiyməti $\sim n(1-t/2)$ olan asimptotik normal qanunla, bir tsiklli komponentlərin sayı parametri $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-t}-t-t^2/2$ olan Puasson qanunu ilə paylanır; maksimal komponentdə zirvələrin sayının tərtibi $\sim(t-\ln t-1)^{-1}\ln n$ -dir.

$1<t<\infty$ olduqda T. q.-da yeganə «nəhəng» komponent əmələ gəlir ki, onun zirvələri sayı orta qiyməti $\sim n(1-\theta/t)$ olan asimptotik normal qanunla paylanır. Burada $\theta=\theta(te^{-t})$ və $\theta(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!}\,w^k$, – $w=ze^{-z}$ funksiyasına tərs funksiyanın baş hissəsidir. «Nəhəng» komponentdən fərqli komponentin maksimal ölçüsünün tərtibi $\sim(\theta-\ln\theta-1)^{-1}\ln n$ -dir və belə komponentlərin hamısı ya ağaclardır, ya da ki, bir tsiklli komponentlərdir; komponent – ağacların sayı orta qiyməti $\sim n\theta(1-\theta/2)/t$ olan asimptotik normal qanunla paylanır, bir tsiklli komponentlərin sayı isə parametri $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\theta}-\theta-\frac{\theta^2}{2}$ olan Puasson qanunu ilə paylanır. Yuxarıda qeyd olunan normal paylanmaların dispersiyalarının tərtibi n -ə bərabərdir, lakin $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,\,p}$ T. q.-ları üçün bu dispersiyalar müxtəlifdir.

$t=1$ olduqda $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-nı xarakterizə edən bir sıra təsadüfi kəmiyyətlərin limit paylanmalarının parametrləri $t=1$ olduqda ∞-a çevrilir, bu isə bu T. q.-ların t-dən 1 qiymətinə keçidində quruluşundakı xüsusiyyətlərdən irəli gəlir (bax, [3]).

T. q.-ların əlaqəlilik ehtimalı (rus. вероятность связности) da öyrənilmişdir. $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-ları üçün $t=\ln n+x$, $x=O(1)$, $n\to\infty$ olduqda əlaqəlilik ehtimalı

$$P_{\text{əl.}}=\exp(-e^{-x})(1+o(1))$$

düsturu ilə təyin olunur. İxtiyari $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q. üçün ixtiyari $p=1-q$ qiymətində

$$P_{\text{əl.}}\le(1-q^{n-1})^{n-1}$$

bərabərsizliyi ödənilir, $n\to\infty$ və $q^n\le c<1$ olduqda isə bu ehtimal

$$P_{\text{əl.}}=(1-q^n+q^n\ln q^n)(1-q^n)^{n-1}(1+q(1))$$

düsturu ilə təyin olunur. Əgər $t-(\ln n+r\ln\ln n)\to\infty$ olarsa, T. q. til və zirvə əlaqəli $(r+1)$ – əlaqəli qrafdır. $\mathcal{G}_{n,N}$ və $\mathcal{G}_{n,p}$ T. q.-ların evolyusiyasının daha gec anlarda qurulması haqqında [4]-ə bax.

Əd.: [1] Erdos P., Renyi A., «Magyar tud. Akad. Mat. Kutato intez. közl.», 1960, v. 5, № 1–2, p. 17–61; [2] Степанов В. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 2, с. 238–52; [3] Bollobas B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1984, v. 286, № 1, p. 257–74; [4] Коршунов А. Д., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 107–73.

TƏSADÜFİ QRAF; əlaqəlilik ehtimalı **« случайный граф;** вероятность связности; probability of connectedness of a **random graph »** – bax, *Təsadüfi qraf.*

TƏSADÜFİ MATRİS « случайная матрица; random matrix » – m sətir və n sütundan ibarət

$$\Xi=\|\xi_{ij}\|=\begin{Vmatrix}\xi_{11}\cdots\xi_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \xi_{m1}\cdots\xi_{mn}\end{Vmatrix}$$

düzbucaqlı cədvəlidir, ξ_{ij} – hər hansı K çoxluğundan qiymətlər alan *təsadüfi elementlərdir.* Əgər $m=n$ olarsa, onda Ξ, – n tərtib kvadrat T. m. adlanır. Ən mühüm hallarda K çoxluğu həqiqi ədədlər meydanı, kompleks ədədlər meydanı, çoxhədlilər halqası, kvaternionlar cismi ola bilər. T. m. anlayışı çoxölçülü statistik analizdə və statistik fizikada meydana gəlmişdir.

$(X,\ B)$, – n – tərtib Ξ kvadrat T. m.-lərinin ölçülən fəzası, $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası olsun. Ξ T. m.-nin paylanması X çoxluğundan qiymətlər alan $\mathbf{P}\{\omega:\Xi(\omega)\subset R\subset B\}=\mu(R)$ ölçüsünə deyilir. Əgər X matrislərin kompakt qrupudursa və $\mu(R)$ X qrupunda normalanmış Haar ölçüsüdürsə, onda Ξ matrisi Haar ölçüsü μ üzrə paylanmış dır və invariant paylanmaya malikdir, deyilir. Əgər X-də elə ν ehtimal ölçüsü varsa ki, $q(X)$ X-də ölçülən mənfi olmayan funksiya olduqda

$$\mu(R)=\int_R q(X)\,\nu(dx)$$

bütün $R\in B$ üçün mövcud olsun, onda $q(X)$ – Ξ T. m.-nin μ paylanmasının ν ölçüsünə nəzərən sıxlığı adlanır. T. m.-lərin əsas tipləri: *Qauss təsadüfi matrisi*, *qeyri – simmetrik təsadüfi matris*, *ortoqonal təsadüfi matris*, *simmetrik təsadüfi matris*, *universal təsadüfi matrisdir.* T. m.-in ən çox öyrənilən funksiyaları: təsadüfi determinant, məxsusi qiymətlər və məxsusi vektorlar, tərs matrisdir.

T. m. əsas etibarilə çoxölçülü statistik analizdə tətbiq olunur, burada

$$\hat R=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\hat x)(x_k-\hat x)^{\mathsf T},\quad \hat x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

empirik kovariasion matrisləri öyrənilir, x_k, – m – ölçülü ξ vektoru üzərində müşahidələrdir. Əgər ξ vektoru $N(a,\ R)$ normal qanunu ilə paylanmış olarsa, $\hat R$ matrisinin paylanması Uişart paylanması adlanır. T. m.-lərin paylanmalarının dim. – ölçüləri böyük olduğu hallarda bu paylanmalar da olduqca böyük şəkildə ifadə olunur, bu halda T. m.-lər üçün onların tərtibi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda *limit teoremləri* böyük maraq doğrudur.

Əd.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Гирко В. Л., Теория случайных детерминантов, К., 1980; [3] Дайсон Ф., Статистическая теория енергетических уровней сложных систем, пер. с англ., М., 1963; [4] Mehta M. L., Random matrices and the statistical theory of energy levels, N. Y. – L., 1967.

TƏSADÜFİ MATRİS(i) Hermit **« случайная матрица** эрмитова; Hermit **random matrix »** – bax, *Hermit təsadüfi matrisi*.

TƏSADÜFİ MATRİS(i) Qauss **« случайная матрица** гауссовская; Gaussian **random matrix »** – bax, *Qauss təsadüfi matrisi.*

TƏSADÜFİ MATRİS qeyri–simmetrik **« случайная матрица** несимметричная; non – symmetric **random matrix »** – bax, *Qeyri – simmetrik təsadüfi matris.*

TƏSADÜFİ MATRİS; limit teoremləri **« случайная матрица;** предельные теоремы; limit theorems for **random matrix »** – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi matrislər üçün.

TƏSADÜFİ MATRİS ortoqonal **« случайная матрица** ортогональная; orthogonal **random matrix »** – bax, *Ortoqonal təsadüfi matris.*

TƏSADÜFİ MATRİS simmetrik **« случайная матрица** симметрическая; symmetric **random matrix »** – bax, *Simmetrik təsadüfi matris.*

TƏSADÜFİ MATRİS; spektral funksiya **« случайная матрица** спектральная функция; spectral function of a **random matrix »** – bax, *Spektral funksiya*(sı) təsadüfi matrisin.

TƏSADÜFİ MATRİS unitar **« случайная матрица** унитарная; unitary **random matrix »** – bax, *Unitar təsadüfi matris*.

TƏSADÜFİ MEŞƏ « случайный лес; random forest » – meşələrin hər hansı F çoxluğunun təsadüfi elementidir, F -də müntəzəm paylanma qanununa tabedir, yəni F -dən ixtiyari qiyməti bərabər ehtimallarla alır. T. m.-nin ədədi xarakteristikaları təsadüfi kəmiyyətlərdir. $F_{n,N}$, – N sayda kök ağaclardan ibarət bütün meşələrin çoxluğu olsun; bu ağacların kökləri $1, \dots, N$ ədədləri, digər (köksüz) ağacların n sayda zirvələri $1, 2, \dots, n$ ədədləri ilə nişanlanmışdır. $F_{n,N}$ çoxluğundakı meşələrin sayı $N(n+N)^{n-1}$ ədədinə bərabərdir. Belə meşələr sonlu çoxluğun özünə təsadüfi inikasının qrafına daxildirlər və bunların xassələrindən təsadüfi inikasların öyrənilməsində istifadə olunur. $F_{n,N}$ -dən olan T. m.-lərin ən təbii xarakteristikaları: köksüz zirvələrinin sayı yalnız r -ə bərabər ağacların sayı $\mu_r(F_{n,N})$; hündürlüyü t -yə bərabər olan zirvələrin sayı $\mu(t, F_{n,N})$ kimi xarakteristikalardır (zirvənin hündürlüyü zirvə ilə kökü birləşdirən yeganə yolu təşkil edən tillərin sayına bərabərdir), bu zaman meşənin hündürlüyü $\tau(F_{n,N}) = \max\{t : \mu(t, F_{n,N}) > 0\}$ bərabərliyi ilə təyin olunur; T. m.-nin ağacında kökü olmayan zirvələrin maksimal sayı $\eta(F_{n,N})$-dir. Bu təsadüfi kəmiyyət üçün $n \to \infty$ olduqda və n ilə N parametrləri arasında müxtəlif münasibətlərlə limit paylanmaları məlumdur. Məs., meşənin hündürlüyü $\tau(F_{n,N})$ üçün aşağıdakı müddəalar doğrudur. Əgər $n \to \infty$ və $n/N^2 \to \infty$ olarsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş $x > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\tau(F_{n,N})/\sqrt{n} \le x\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2 x^2)\, e^{-k^2 x^2/2}$$

münasibəti doğrudur.

$N = 1$ olduqda bu hökmdən təsadüfi ağacın hündürlüyünün limit paylanması alınır.

$n, N \to \infty$ olsun. Əgər bu halda $n/N \to \infty$, $n/N^2 \to 0$ olarsa, onda ixtiyari qeyd olunmuş x üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \tau(F_{n,N}) \ln\left(1 + \frac{N}{n}\right) - \ln\frac{2N^2}{n} \le x \right\} \to e^{-e^{-x}}$$

münasibəti doğrudur; əgər $n/N \to b$ olarsa və $t = t(n, N)$ tam ədədləri elə seçilərsə ki, $N\lambda^t \to \beta$ ödənilsin (b, β müsbət sabitlərdir, $\lambda = n/(n+N)$), onda ixtiyari qeyd olunmuş m üçün

$$\mathbf{P}\{\tau(F_{n,N}) < t + m\} \to \exp\{-\beta K(b/(1+b))^m\}$$

münasibəti doğrudur, burada K – hər hansı müsbət sabitdir; əgər $n/N \to 0$ olarsa və tam $t = t(n, N)$ ədədləri elə seçilərsə ki, γ mənfi olmayan sabit, $\lambda = n/(n+N)$ olduqda $N\lambda^t \to \infty$, $N\lambda^{t+1} \to \gamma$ münasibətləri ödənilsin, onda

$$\mathbf{P}\{\tau(F_{n,N}) = t\} \to e^{-\gamma},\ \mathbf{P}\{\tau(F_{n,N}) = t+1\} \to 1 - e^{-\gamma}$$

münasibətləri doğrudur.

Analoji nəticələr, qismən $F_{n,N}(R)$ çoxluğundan olan T. m.-lərin xarakteristikaları üçün alınmışdır. Bu $F_{n,N}(R)$ çoxluğu $F_{n,N}$ -dən olan bütün ağacları özündə saxlayır və bu ağacların zirvələrinin tam bölünmə sayı tam mənfi olmayan və sıfrı özündə saxlayan $\mathbb{R}$ -dən qiymətlər alır. $F_{n,N}(R)$ -dən olan T. m. ilə N hissəcikdən başlayan şaxələnən proses arasında əlaqə vardır və bu əlaqə təsadüfi ağac ilə bir hissəcikdən başlayan *şaxələnən proses* arasındakı əlaqəyə analojidir.

Əd.: [1] К о л ч и н В. Ф., Случайные отображения, М., 1984; [2] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [3] П а в л о в Ю. Л., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 3, с. 449–57.

TƏSADÜFİ MEYDAN « случайное поле; random field » – ç o x ö l ç ü l ü z a m a n l ı və ya ç o x ö l ç ü l ü p a r a m e t r l i t ə s a d ü f i p r o s e s, – hər hansı çoxölçülü fəzanın nöqtələr çoxluğunda verilmiş *təsadüfi funksiyadır*. T. m. müxtəlif tətbiqlərdə tez-tez təsadüf olunan təsadüfi funksiyaların mühüm bir tipidir. Üç fəza koordinatı – x, y, z -dən (həm də zaman parametri t -dən) asılı T. m.-a komponentləri qaz və ya mayenin turbulent axınının sürəti, təzyiq və temperatur olan meydanları misal göstərmək olar (bax, [1]) və s.

Ümumi şəkildə T. m. nəzəriyyəsi faktiki olaraq təsadüfi funksiyaların ümumi nəzəriyyəsindən fərqlənmir; daha məzmunlu konkret nəticələri yalnız əlavə xassələrə malik olan T. m.-ların bir sıra xüsusi sinifləri üçün almaq olur; bu xassələr T. m.-ların araşdırılmasını müəyyən qədər sadələşdirir. Belə mühüm siniflərdən biri çevirmələr qrupu G ilə verilən bircins S fəzasında verilmiş *bircins təsadüfi meydanlar* sinfidir; bu meydanlar belə xassəyə malikdirlər ki, S fəzasının nöqtələrinin ixtiyari sonlu qrupunda meydanın qiymətlərinin ehtimal paylanmaları və ya meydanın orta qiyməti və nöqtələr cütlərində meydanın qiymətinin ikinci momentləri meydanın arqumentlərinə G qrupunun hər hansı çevirməsinin tətbiqi nəticəsində dəyişmir. $\mathbb{R}^k$, $k = 2, 3, \dots$ Evklid fəzasında və ya $\mathbb{R}^k$ -nın tamqiymətli koordinantlara malik nöqtələrinin $\mathbb{Z}^k$ şəbəkəsində bircins təsadüfi meydanlar (bu meydanlar G qrupu kimi bütün mümkün ola bilən (və ya bütün tamqiymətli) paralel köçürtmələr çoxluğunun seçilməsinə uyğundur) *stasionar təsadüfi proseslərin* təbii ümumiləşməsidir və belə proseslər üçün isbat olunmuş nəticələrin əksəriyyəti bu ümumiləşmələr üçün də alınır.

Tətbiq üçün maraq doğuran təsadüfi meydanlar $\mathbb{R}^2$ və $\mathbb{R}^3$ -də *bircins* və *izotrop təsadüfi meydanlardır*, bunlar uyğun fəzanın bütün mümkün olan izometrik çevirmələrinin çoxluğu G qrupunun seçilməsinə uyğun olur. Bircins T. m.-ların mühüm xüsusiyyəti bu meydanların özlərinin və həm də korrelyasion funksiyalarının xüsusi şəkildə *spektral ayrılışlarının* olmasıdır (bax, [3], [4]).

T. m.-ların digər, çox diqqət cəlb edən sinfi $\mathbb{R}^k$ fəzasının hər hansı $\mathcal{H}$ oblastında verilən *Markov təsadüfi meydanları* sinfidir. $U(\mathbf{x})$ T. m. üçün Markov xassəsinə malik olma, bir qədər kobud deyimdə belə anlaşılır: sərhədi Γ olan açıq çoxluqların olduqca geniş çoxluğu Q üçün Γ sərhədinin ε – ətrafı Γ^ε -də U meydanının qiymətlərinin qeyd olunması ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $\{U(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in Q \setminus \Gamma^\varepsilon\}$ və $\{U(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in T \setminus \Gamma^\varepsilon\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ailələrinin asılı olmamazlılığını (və ya geniş mənada Markov xassəsinə malik olma halında qarşılıqlı qeyri – korrelyarlığını;

bax, məs., [5]) təyin edir, burada T, – Q çoxluğunun qapayıcısının $\mathcal{K}$-da tamamlayıcısıdır. Markov təsadüfi meydan anlayışının ümumiləşməsi L – Markov təsadüfi meydan anlayışıdır ki, bu meydan üçün yuxarıda qeyd olunan asılı olmamazlıq (və ya qeyri – korrelyarlıq) yalnız Q oblastının Γ sərhədinin xüsusi şəkildə müəyyən qalınlaşdırılmış $\Gamma + L$ sərhəd ilə əvəz olunmasında məna kəsb edir. Markov T. m.-ları və L – Makov təsadüfi meydanları nəzəriyyəsinin kvant meydanlarının fiziki nəzəriyyəsi və statistik fizikada bir sıra mühüm tətbiqləri vardır (bax, [6], [7]). T. m.-ların statistik fizika məsələlərində yaranan daha bir maraqlı sinfi *Gibbs təsadüfi meydanları* sinfidir ki, bu meydanların ehtimal paylanmaları Gibbs T. m.-larının verilməsi üçün münasib üsul – sonlu oblastda meydanın qiymətlərinin şərti ehtimal paylanmalarının toplusu vasitəsilə onların verilməsindən ibarətdir; bu şərti ehtimal paylanmaları bu sonlu oblastdan kənarda onun qeyd olunmuş bütün qiymətlərinə uyğun seçilmiş fərz olunur. S – hamar çoxobrazlısında T. m.-a *ümumiləşmiş təsadüfi meydanın* xüsusi halı kimi baxmaq, əksər hallarda, münasibdir, bu meydan üçün verilən bir nöqtədə onun qiymətləri olmaya bilər, lakin hamar əsas $\varphi(\mathbf{x})$ funksiyalarının hər hansı D fəzasında təyin olunmuş təsadüfi xətti funksionallar olan hamar $U(\varphi)$ qiymətlərinin mənası vardır. Ümumiləşmiş T. m.-lar (xüsusilə də, ümumiləşmiş Markov T. m.) fiziki tətbiqlərdə geniş istifadə olunur, yalnız $\int \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$ şərtini ödəyən $\varphi(\mathbf{x})$ funksiyalarını götürərək ümumiləşmiş T. m. nəzəriyyəsində stasionar artımlarlı lokal bircins (və lokal bircins və lokal izotrop) təsadüfi proseslərə yaxın T. m.-ları asanlıqla təyin etmək olur, bunlar isə statistik turbulentlik nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır (bax, məs., [1], [9]).

Əd.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидро-механика, ч. 1–2, М., 1965–67; [2] Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А., Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход), М., 1975; [3] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [4] Ядренко М. И., Спектральная теория полей, К., 1980; [5] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [6] Саймон Б., Модель $P(\varphi_2)$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [8] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [9] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармотического анализа. Оснащенные гилбертовы пространства, М., 1961.

TƏSADÜFİ MEYDAN bircins « **случайное поле** однородное; homogeneous **random field** » – bax, *Bircins təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MEYDAN bircins artımlarlı « **случайное поле** с однородными приращениями; **random field** with homogeneous increments », lokal bircins təsadüfi meydan, – sonluölçülü $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n)\}$ fəzasında verilmiş və aşağıdakı xassələri ödəyən

$$\boldsymbol{X}(\mathbf{s}) = \{X_1(\boldsymbol{s}), \dots, X_k(\boldsymbol{s})\}$$

təsadüfi meydandır (ümumiyyətlə, çoxölçülü və kompleks): ya

1) $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_2) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_1), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_4) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_3), \dots, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_{2m}) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_{2m-1})$

fərqlərinin ixtiyari toplusunun ehtimal paylanması $2m$ sayda $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \dots, \boldsymbol{s}_{2m}$ nöqtələrinin paralel köçürülməsində dəyişmir və ya

2) həm $X_i(\boldsymbol{s}_2) - X_i(\boldsymbol{s}_1), \quad i = 1, \dots, k$ və həm də $[X_i(\boldsymbol{s}_2) - X_i(\boldsymbol{s}_1)][\overline{X_j(\boldsymbol{s}_4) - X_j(\boldsymbol{s}_3)}], \quad i, j = 1, \dots, k$ fərqlərinin hasillərinin riyazi gözləmələri $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ nöqtələr cütlərinin və ya uyğun olaraq $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4$ dördlüklərinin ixtiyari paralel köçürülməsi nəticəsində dəyişmir. 1) halında $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$ meydanı dar mənada bircins artımlarlı (və ya lokal) təsadüfi meydan, 2) halında isə analoji, lakin geniş mənada təsadüfi meydan adlanır.

Bircins artımlarlı T. m. anlayışı $n = 1$ olduqda onun çevrildiyi stasionar artımlarlı *təsadüfi proses* anlayışının ümumiləşməsidir. Bircins artımlarlı, geniş mənada T. m.-nın əsas statistik xarakteristikaları – meydanın komponentlərinin artımlarının orta qiymətləri

$$\mathbf{M}\,[X_i(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}) - X_i(\boldsymbol{s})] = m_i(\boldsymbol{r}), \quad i = 1, \dots, k$$

və

$$\mathbf{M}\,[X_i(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{r}_1) - X_i(\boldsymbol{s}_1)][\overline{X_j(\boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{r}_2) - X_j(\boldsymbol{s}_2)}] =$$

$$= D_{ij}(\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2), \quad i, j = 1, \dots, k$$

struktur funksiyalarıdır. Həqiqi birölçülü bircins artımlarlı $\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{s})$ T. m. halında $D_{11}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = D(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ funksiyası, sadəcə olaraq, birdəyişənli $\mathbf{M}[X_1(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}) - X_1(\boldsymbol{s})]^2 = D(r)$ funksiyası vasitəsilə ifadə oluna bilər (bax, *Struktur funksiya*). Kvadratik orta mənada kəsilməz bircins artımlarlı T. m. üçün $m_i(r), \quad i = 1, \dots, k$ funksiyaları həmişə vektor arqument $\boldsymbol{r}$-in bircins xətti funksiyalarıdır, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$, $D_{ij}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ və $D(\mathbf{r})$ funksiyaları isə özlərinin Furye – Stiltyes inteqrallarını da daxil edən spektral ifadələri və $\mathbb{R}^n$-də bircins T. m.-ların spektral ifadələrini və onların korrelyasion funksiyalarını ümumiləşdirən spektral ifadələri ilə verilə bilinər (bax, [1] – [4]).

Əd.: [1] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статис-тическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Yaglom A. M., Correlation theory of stationary and related random functions, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1987.

TƏSADÜFİ MEYDAN bircins və izotrop « **случайное поле** однородное и изотропное; homogeneous and isotropic **random field** » – bax, *Bircins və izotrop təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MEYDAN; böyük ədədlər qanunu « **случайное поле;** закон больших чисел; law of large numbers for **random field** » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* təsadüfi meydanlar üçün.

TƏSADÜFİ MEYDAN harmoniklənən « **случайное поле** гармонизуемое; harmonizale **random field** » – bax, *Harmoniklənən təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MEYDAN izotrop « **случайное поле** изотропное; isotrop **random field** » – bax, *İzotrop təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ MEYDAN izotrop artımlarlı « **случайное поле** с изотропными приращениями; **random field** with isotropic increments », lokal izotrop meydan – $\boldsymbol{s}=(s_1, \dots, s_n)$ nöqtələrinin, $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında verilmiş

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) = \{X_1(\boldsymbol{s}), \dots, X_k(\boldsymbol{s})\}$$

təsadüfi meydanıdır (ümumiyyətlə, çoxölçülü və kompleks olan) və bu meydan aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_2) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_1), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_4) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_3), \dots, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_{2m}) - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}_{2m-1})$

fərqlərinin ixtiyari toplusunun ehtimal paylanması $\mathbb{R}^n$ fəzasının $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \dots, \boldsymbol{s}_{2m}$ nöqtələri çoxluğunun ixtiyari paralel köçürmə, fırlanma və ya güzgü əksetdirməsi – g çevirməsi nəticəsində dəyişmir, bu halda g çevirməsi ona müvafiq $X_1, \dots, X_k$ komponentlərinin xətti U_g çevirməsi ilə müşayiət olunur, U_g – bütün mümkün izometrik g çevirmələrinin G qrupunun hər hansı k – ölçülü $\mathscr{U}$ təsvirində $X_1, \dots, X_k$ komponentlərinin g çevirməsinə müvafiq xətti çevirməsidir və ya

2) həm $X_i(\boldsymbol{s}_2) - X_i(\boldsymbol{s}_1),\ i = 1, \dots, k$ fərqlərinin və

$$[X_i(\boldsymbol{s}_2) - X_i(\boldsymbol{s}_1)][\overline{X_j(\boldsymbol{s}_4) - X_j(\boldsymbol{s}_3)}]$$

həmçinin fərqlər hasillərinin riyazi gözləmələri, $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ cütlərinin və uyğun olaraq, $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4$ dördlüklərinin $X_1, \dots, X_k$ komponentlərinin xətti U_g çevirməsilə müşayiət edilən birgə ixtiyari g çevirməsində dəyişmir. 1) halında $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$ meydanı $\mathbb{R}^n$ fəzasının g çevirmələri (məs., müəyyən ranqlı tenzorlar və ya skalyarlar, vektorlar) nəticəsində $\mathscr{U}_G$ təsviri üzrə çevrilən $\boldsymbol{X}$ kəmiyyətlərinin dar mənada izotrop artımlarlı (və ya lokal izotrop) təsadüfi meydanı adlanır; onda $\boldsymbol{X}$ meydanı dar mənada izotrop artımlarlı tenzor və ya skalyar, vektor T. m. olacaqdır, 2) halında bu meydan analoji, lakin geniş mənada adlanır. İzotrop artımlarlı T. m., həmçinin, bircins və izotrop artımlarlı təsadüfi meydan (və ya da ki, lokal bircins və lokal izotrop təsadüfi meydan) da adlanır. Belə halda yuxarıda təyin edilmiş $G = \{g\}$ qrupu qeyd olunmuş O nöqtəsi ətrafında fırlanmaların daha dar qrupu ilə və O nöqtəsini özündə saxlayan müstəvilərə nəzərən əksetdirmələr ilə əvəz olunmaqla təyin olunan meydan da bəzən izotrop artımlarlı meydan adlanır (bax, *İzotrop təsadüfi meydan*).

İzotrop artımlarlı T. m. üçün $\mathbf{M}\,[X_i(\boldsymbol{s}_2) - X_i(\boldsymbol{s}_1)]$ orta qiymətləri geniş şərtlərlə eynilik kimi sıfra bərabər olur; buna görə də, geniş mənada izotrop artımlarlı T. m.-nın mühüm statistik xarakteristikaları

$$\mathbf{M}[X_i(s_1 + r_1) - X_i(s_1)][\overline{X_j(\boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{r}_2) - X_j(\boldsymbol{s}_2)}] =$$

$$= D_{ij}(\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$

düsturu ilə ifadə olunan struktur funksiyalarıdır. İzotrop artımları $X_1(\boldsymbol{s}) - X_2(\boldsymbol{s})$ olan bircins (yəni skalyar) T. m. üçün $D_{11}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = D(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ funksiyası spektral ifadəsi

$$D(r) = \int_0^\infty (1 - \cos kr)\, d\Phi(k) + Ar^2 \qquad (1)$$

ola bilən, $\mathbf{M}\left|X(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}) - X(\boldsymbol{s})\right|^2 = D(r),\quad r = |\boldsymbol{r}|$ skalyar arqumentinin funksiyası vasitəsilə ifadə oluna bilər, burada $A \geq 0,\ \Phi(k)$, –

$$\int_0^\infty \frac{k^2}{1 + k^2}\, d\,\Phi(k) < \infty \qquad (2)$$

şərtini ödəyən, $(0, \infty)$ yarımoxunda azalmayan funksiyadır (bax, [1] – [4]). Geniş mənada izotrop artımlarlı vektor T. m.-nın struktur tenzoru –

$$D_{ij}(\boldsymbol{s}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) =$$

$$= \mathbf{M}\,[X_i(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}_1) - X_i(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s})]\,[X_j(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{r}_2) - X_j(\boldsymbol{s}_2)]$$

funksiyası eyni $\mathbf{r}$ dəyişəninin iki mənfi olmayan, həm də (1)-ə yaxın olan spektral ifadəsi ola bilən, lakin (2) tipli şərti ödəyən iki azalmayan $\Phi_1(k)$ və $\Phi_2(k)$ funksiyalarını daxilinə alan funksiyalarla ifadə olunur. Mühüm xüsusi hallarda, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$ vektor meydanı ya solenoidal və ya potensial olduğu halda bu funksiyalardan biri eyniliklə sıfra çevrilir.

İzotrop artımlarlı T. m. ilk dəfə Kolmoqorovun lokal izotrop turbulentlik nəzəriyyəsində yaranmışdır ki, burada belə meydanlar (həm skalyar, həm də vektor) mühüm rol oynayır (bax, [5] və [2]-də 6, 8-ci fəsillər).

Əd.: [1] Яглом А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338; [2] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2, М., 1967; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Yaglom A. M., Correlation theory of stationary and related random functions, v. 1–2, N. Y. – [a. o.], 1987; [5] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 299–303 (Избр. тр. Математика и механика, М., 1984,с. 281–87).

TƏSADÜFİ MEYDAN lokal bircins « **случайное поле** локально однородное; locally homogeneous **random field** » – bax, *Təsadüfi meydan* bircins artımlarlı.

TƏSADÜFİ MEYDAN lokal izotrop « **случайное поле** локально изотропное; locally isotropic **random field** » – bax, *Təsadüfi meydan* izotrop artımlarlı.

TƏSADÜFİ MEYDAN lokal kompakt qrupda « **случайное поле** на локально компактной группе; **random field** on a locally compact group » – arqumentləri lokal kompakt qrupda dəyişən *təsadüfi funksiyadır.* Lokal kompakt qrupda T. m.-ların ən çox öyrənilmiş sinfi bircins meydanlardır. Əgər G qrupunun elementlərinin ixtiyari $g_1, \dots, g_n \in G$ toplularında ixtiyari $s \in G$ üçün bu elementlərin $g_i \to sg_i$ ($g_i \to g_i s$) sol (sağ)

yerinidəyişmələrində meydanın qiymətlərinin paylanmaları dəyişmirsə, $X(g)$, $g \in G$ meydanı G qrupunda dar mənada sol (sağ) bircins T. m. adlanır; əgər $\mathbf{M}|X(g)|^2 < \infty$ və $X(g)$ meydanının orta qiyməti və ikinci momenti meydanın arqumentlərinin bütün sol (sağ) yerinidəyişmələrinə nəzərən invariant olarsa, $X(g)$ meydanı G qrupunda geniş mənada sol (sağ) bircins meydan adlanır.

1 tip separabel lokal kompakt G qrupunda $\mathbf{M}X(g) = 0$ şərtini ödəyən sol bircins geniş mənada kvadratik orta mənada kəsilməz $X(g)$ meydanı və onun korrelyasion funksiyası $B_0 = \mathbf{M}X(sg)\,X(s)$ spektral ayrılışla ifadə oluna bilinir, yəni

$$X(g) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}[U_g(\lambda)\,Z(d\lambda)],$$

$$B(g) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}[U_g(\lambda)\,F(d\lambda)],$$

burada $\hat{G}$, – G qrupunun dual obyekti, $Z(d\lambda)$ və $F(d\lambda)$, – $\hat{G}$-də Makki σ – cəbrində elə ölçülərdir ki, bunların qiymətləri, uyğun olaraq, təsadüfi və mənfi olmayan təsadüfi olmayan xətti operatorlardır və bu operatorlar $H(\lambda)$ Hilbert fəzalarında, G qrupunun kəsilməz ayrılmaz unitar $g \to U_g(\lambda)$ təsviri kimi təsir edir, belə ki, iz $\operatorname{tr} F(\hat{G}) < \infty$ şərtini ödəyir və ixtiyari $x_1, x_2, y_1, y_2 \in H(\lambda)$ üçün

$$\mathbf{M}(Z(\Delta_1)x_1, x_2)(\overline{Z(\Delta_2)y_1, y_2}) =$$

$$= (x_1, y_1)\,(F(\Delta_1 \cap \Delta_2)y_2, x_2)$$

münasibəti doğrudur (bax, [1]). Bircins geniş (dar) mənada $\mathbf{X}(g)$, $g \in G$ meydanları üçün statistik individual erqodik teoremlər isbat olunmuşdur və bu teoremlər oxşar müddəaları stasionar təsadüfi proseslər üçün ümumiləşdirir (bax, [2], [3]).

Bircins geniş mənada meydanlara yaxın lokal kompakt qrupda T. m. sinifləri sanki bircins meydanlardır; ortalanmış spektrə malik meydanlar, həmçinin Abel qruplarında harmoniklənən meydanlar da belələrindəndir (bax, [4] – [6]). Lokal kompakt qruplarda ümumiləşmiş funksiyaların inkişaf etmiş nəzəriyyəsi lokal kompakt qrupda ümumiləşmiş T. m.-lara baxmağa imkan yaradır (bax, [7]), bu meydanlar isə, uyğun qruplarda, əsas funksiyalar fəzalarında xətti kəsilməz təsadüfi funksionallardır (bax, [8]).

Əd.: [1] Yaglom A. M., в кн.: Proceeding of the 4-th Berkeley Symposium Mathematical Statistic and Probability, v. 2, Berk. – Los Ang., 1961, p. 593–622; [2] Темпельман А. А., «Литов. матем. сб.», 1962, т. 2, № 1, с. 195–233; [3] Темпельман А. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1972, т. 26, с. 95–132; [4] Пономаренко А. И., «Докл. АН СССР», 1982, т. 262, № 6, с. 1316–18; [5] Vo – Khac Khoan A., «Bull. Soc. math. France», mémoire 6, 1966, p. 2–175; [6] Weron A., «Z. Wahr. und verw Geb.», 1985, Bd 68, № 4, S. 473–91; [7] Maurin K., General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups, Warsz., 1968; [8] Пономаренко А. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1983, в. 29, с. 100–09.

TƏSADÜFİ MEYDAN nöqtəvi « **случайное поле** точечное; point **random field** » – *Nöqtəvi təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MEYDAN(ı) Puasson « **случайное поле** пуассоновское; Poisson **random field** » – bax, *Puasson təsadüfi meydanı.*

TƏSADÜFİ MEYDAN requlyar « **случайное поле** регулярное; regular **random field** » – bax, *Requlyar təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MEYDAN; statistik analiz « **случайное поле;** статистический анализ; statistical analysis of **random field** » – bax, *Statistik analiz*(i) təsadüfi meydanların.

TƏSADÜFİ MEYDAN şaxələnən « **случайное поле** ветвящееся; branching **random field** » – bax, *Şaxələnən təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MEYDAN ümumiləşmiş « **случайное поле** обобщенное; generalized **random field** » – bax, *Ümumiləşmiş təsadüfi meydan.*

TƏSADÜFİ MOZAİKA « **случайная мозаика; random tessalation** » – $\mathbb{R}^n$-də çoxüzlülərin *təsadüfi prosesidir*, onun realizasiyalarındakı çoxüzlülərin daxili hissələri vahid ehtimalla kəsişmir və onların tamamlayıcılarının birləşməsi bütün $\mathbb{R}^n$-i verir.

Misallar. 1) Hipermüstəvilərin proseslərinin doğurduğu – T. m. (məs., invariant ölçü ilə idarəolunan Puasson prosesləri); 2) Voronoy mozaikaları (bax, [1]) T. m.-lardır. Bu mozaikalar aşağıdakı qaydada qurulur: $\mathbb{R}^3$-də ζ_i təsadüfi nöqtəvi prosesi verilir; prosesin hər bir nöqtəsinə $\mathbb{R}^3$-ün bütün elə nöqtələrinin çoxluğu qarşı qoyulur ki, bu nöqtələrdən həmin nöqtəyə qədər olan məsafə prosesin ixtiyari digər nöqtəsinə qədər olan məsafədən azdır (əksər hallarda, ζ_i bircins Puasson prosesi götürülür). T. m. ilə əlaqədar ehtimali məsələlər mozaikanın «tipik» çoxüzlüsünün təsviri ilə; onun təpələrinin, tillərinin və s.-nin sayının verilməsi və ya mozaikanın «tipik» düyünlərinin təsviri ilə verilir. Tam mənası ilə təsvirə yalnız nadir hallarda müyəssər olunur, əksərən bu kəmiyyətlərin momentlərini tapmaq olur.

Əd.: [1] Stochastic geometry, L., – [a. o.], 1974; [2] Stochastic geometry, geometric statistic, steoreology, Lpz., 1984; [3] Сантало Л., Интегральная геометрия и геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1983; [4] «Asta Appl. Math.», 1987, v. 9, № 1–2.

TƏSADÜFİ NÖQTƏVİ PROSES « **случайный точечный процесс; random point process** » – bax, *Nöqtəvi proses*.

TƏSADÜFİ ÖLÇÜ « **случайная мера, заряд; random measure** », stoxastik ölçü, təsadüfi yük, – çoxluqların additiv *təsadüfi funksiyasıdır.* X – hər hansı çoxluq, $\mathscr{B}$, – X-in altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. Hər bir $B \in \mathscr{B}$ çoxluğu üçün təyin olunmuş, cüt-cüt kəsişməyən $B_n \in \mathscr{B}$ çoxluqlarının ixtiyari $\{B_n\}$ ardıcıllığı üçün

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \qquad (1)$$

xassəsini ödəyən $\mu(B)$ təsadüfi kəmiyyətlər toplusuna $(X, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında təsadüfi ölçü deyilir.

T. ö.-lərin müxtəlif siniflərinə baxılarkən fərz olunur ki, (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıranın müxtəlif xarakterli yığılmaları ola bilər (ehtimala görə, kvadratik orta mənada, sanki

yəqin kimi yığılmalar). $\mu(B)$ üçün $+\infty$ və $-\infty$ simvollu kimi qiymətlər də nəzərdə tutulur. Bir çox tətbiqi məsələlərdə T. ö. təbii surətdə ifadə olunur; məs., $\mu(B)$, – B sahəsində yetişdirilmiş məhsul, B oblastındakı mineral ehtiyatı, B oblastında yerləşən ulduzların sayı kimi interpretasiya oluna bilər.

$D_1, \dots, D_n$ – genişləndirilmiş düzxətdə ($+\infty$ və $-\infty$ simvollarının əlavə olunması ilə kompaktlaşdırılmış) Borel çoxluqları olsun.

$$p(B_1, \dots, B_n; D_1, \dots, D_n) =$$

$$= \mathbf{P}\{\mu(B_1) \in D_1, \dots, \mu(B_n) \in D_n\} \qquad (2)$$

ehtimallar toplusu μ T. ö.-nün **ehtimal paylanması** adlanır. μ T. ö. müəyyən təbii uzlaşma şərtlərini ödəyir (bax, [5], s. 396). Uzlaşma şərtlərini ödəyən hər bir sonluölçülü paylanma toplusu üzrə elə T. ö. qurmaq olar ki, bu toplu ehtimal ölçüsü olur. T. ö.-lərin ən mühüm siniflərinə aşağıda baxılır.

Əgər $\mathscr{B}$-nin ixtiyari cüt-cüt kəsişməyən $B_1, \dots, B_n$ çoxluqları üçün $\mu(B_1), \dots, \mu(B_n)$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, μ T. ö.-sü **asılı olmayan qiymətlərli ölçü** adlanır. Asılı olmayan qiymətlərli T. ö.-nün paylanma qanunu birölçülü $\mathbf{P}\{\mu(B) \in D\} = p(B, D)$ paylanmaları ilə birqiymətli təyin olunur.

Əgər $\mathscr{B}$-nin ixtiyari $B_1, \dots, B_n$ çoxluqları toplusu üçün $\{\mu(B_1), \dots, \mu(B_n)\}$ təsadüfi vektoru Qauss paylanmasına malik olarsa, μ T. ö. **Qauss ölçüsü** adlanır. μ Qauss T. ö.-nün ehtimal paylanması $m(B) = \mathbf{M}\mu(B)$ və $Q(B_1, B_2) = \mathbf{M}\mu(B_1)\mu(B_2)$ funksiyaları ilə təyin olunur. $m(B)$ funksiyası $\mathscr{B}$-də ölçü, $Q(B_1, B_2)$ funksiyası $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$ fəzasında müsbət müəyyən nüvə, $Q(B_1, B_2)$ B_1 (B_2) çoxluğu qeyd olunduğu halda $\mathscr{B}$-də B_1 (B_2) üzrə ölçüdür.

Əgər $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n$ şərtini ödəyən $\mathscr{B}$-nin altçoxluqları $B_1, \dots, B_n$-lərin ixtiyari sonlu monoton ardıcıllığı üçün $\mu(B_1), \dots, \mu(B_n)$ təsadüfi kəmiyyətləri Markov zənciri təşkil edirsə, μ T. ö.-sü **Markov ölçüsü** adlanır.

Kompleksqiymətli μ T. ö. $\mathbf{M}\mu(B) = 0$, $\mathbf{M}\left|\mu(B)^2\right| < +\infty$ şərtlərini ödəyərsə və əgər $\mathscr{B}$-də elə mənfi olmayan ədədi $F(\Delta)$ ölçüsü olarsa ki,

$$\mathbf{M}\mu(B_1)\overline{\mu(B_2)} = F(B_1 \cap B_2)$$

[bu xassə xüsusi halda onu ifadə edir ki, kəsişməyən B_1 və B_2 çoxluqları üçün $\mu(B_1)$ və $\mu(B_2)$ təsadüfi kəmiyyətləri ortoqonaldır] xassəsini ödəsin, onda μ T. ö.-sü **ortoqonal qiymətlərli ölçü** adlanır; $F(\Delta)$ **struktur ölçü** adlandırılır. Ortoqonal qiymətlərli T. ö. təsadüfi proseslər və meydanların spektral nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır (bax, *Spektral ayrılış*(ı) təsadüfi funksiyanın).

$X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}$, – $\mathbb{R}^n$-in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr olsun. Kompleksqiymətli μ T. ö.-sü üçün

a) bütün $B \in \mathscr{B}$ çoxluqları üçün $\mathbf{M}\left|\mu(B)^2\right| < +\infty$;

b) bütün $x = \mathbb{R}^n$ və bütün $A, B \in \mathscr{B}$ üçün $\mathbf{M}(r_x B) = \mathbf{M}\mu(B)$, $\mathbf{M}\mu(r_x A)\mu(r_x B) = \mathbf{M}\mu(A)\overline{\mu(B)}$ şərtləri ödənilərsə, μ təsadüfi ölçüsü **birciins ölçü** adlanır (burada $r_x A = \{y + x : y \in A\}$).

İxtiyari birnöqtəvi $\{x\}$ çoxluğu üçün $\mu(\{x\}) = 0$ olarsa, μ T. ö.-sü **requlyar (səpələnmiş diffuz) ölçü** adlanır.

T. ö.-yə aid **mühüm misallar.**

Puasson təsadüfi ölçüsü elə asılı olmayan qiymətlərli tamqiymətli elə T. ö.-dür ki, hər bir $B \in \mathscr{B}$ üçün $\mu(B)$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması $m(B)$ parametrli Puasson paylanmasıdır, yəni

$$\mathbf{P}\{\mu(B) = k\} = \frac{m^k(B)}{k!}\, e^{-m(B)}. \qquad (3)$$

Əgər asılı olmayan qiymətlərli tamqiymətli μ T. ö. üçün elə $m(B)$ ədədi ölçüsü olarsa ki, o,

a) $\lim\limits_{m(B)\to 0} \dfrac{\mathbf{P}\{\mu(B) = 1\}}{m(B)} = 1$;

b) $\lim\limits_{m(B)>0} \dfrac{\mathbf{P}\{\mu(B) > 1\}}{m(B)} = 0$

şərtlərini ödəmiş olsun, onda T. ö. hökmən Puasson T. ö.-dür (bax, [2]). a) və b) şərtlərini ödəyən Markov tamqiymətli T. ö.-ləri [2]-də verilmişdir.

$X = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}$, – $\mathbb{R}^n$-in Borel çoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, $|\Delta|$, – Δ ($\Delta \in \mathscr{B}$) çoxluğunun Lebeq ölçüsü olsun.

$$\mathbf{M}\mu(B) = 0,\ \mathbf{M}\,\mu(B_1)\,\mu(B_2) = |B_1 \cap B_2|$$

şərtlərini ödəyən qiymətləri asılı olmayan μ Qauss T. ö.-nə $\mathscr{B}$-də **Viner təsadüfi ölçüsü** deyilir.

X-də təsadüfi nöqtəvi prosesin verildiyi fərz olunur, yəni fərz olunur ki, X-ə təsadüfi x_i nöqtələri $i = 1, 2, \dots$, ixtiyari surətdə atılmışdır və hər bir nöqtəyə s bölünənliyi qarşı qoyulmuşdur.

$$\mu(B) = \sum_{x_i \in B} \Phi(\{x_i\})$$

T. ö.-nə **nöqtəvi prosesin sayıcı ölçüsü** deyilir (bax, [4], [8]).

ξ, – X-də təsadüfi element, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\xi \in B)$, – ξ-nin ehtimal paylanması, $\xi_1, \dots, \xi_n$ – paylanmaları $\mathbf{P}(B)$ olan asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olsun.

$$\mu_n^*(B) = \frac{k_n(B)}{n}$$

ölçüsünə **empirik təsadüfi ölçü** deyilir, burada $k_n(B)$, – B çoxluğuna aid olan ξ_i-lərin sayıdır. μ_n^* T. ö. Markov T. ö.-dür.

T. ö.-nün öyrənilməsində xarakteristik funksionallar aparatı mühüm rola malikdir.

$$C(f) = \mathbf{M} \exp \left\{ i \int_X f(x)\, \mu(dx) \right\}$$

μ T. ö.-nün xarakteristik funksionalı adlanır, burada $f(x)$, – X-də həqiqi məhdud funksiya, $\int_X f(x)\mu(dx)$, – μ T. ö.-sü üzrə stoxastik inteqraldır. μ T. ö.-sünün ehtimal paylanmaları sadə funksiyalarda $C(f)$-in qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunur (bax, [5]).

T. ö.-lərin ümumi nəzəriyyəsi A. Prekopanın və A. V. Skoroxodun işlərində öyrənilməyə başlanmışdır (bax, [1], [2]). Asılı olmayan qiymətlərli T. ö.-lər [2], [3], [8], [9]-da öyrənilmişdir; ən tam şərh [9]-da öz əksini tapmışdır. Markov ölçüsü A. V. Skoroxod tərəfindən [2]-də daxil olunmuşdur və burada requlyar Markov T. ö.-ləri və tamqiymətli Markov ölçülərinin bəzi sinifləri də verilmişdir.

[4]-də T. ö. nəzəriyyəsi ilə təsadüfi nöqtəvi proseslər nəzəriyyəsinin əlaqəsi verilmişdir (bax, [7], [8], [10]).

T. ö. nəzəriyyəsinin əsas müddəalarının sistematik şərhi [5]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Prekopa A., «Acta. math. Acad. sci. hung.», 1956, v. 7, p. 215–63; 1957, v. 8, p. 337–400; [2] Скороход A. B., «Вісник Київськ. ун-ту. Сер. астр. матем., механ.», 1958, № 1, в. 1, с. 105–14; [3] Kingman J., «Pacif J. of Math.», 1967, v. 21, № 1, p. 59–78; [4] Беляев Ю. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 333–37; [5] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, M., 1971; [6] Thornett M. L., «Stochastic processes and their appl.», 1979, v. 8, p. 323–34; [7] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., M., 1982; [8] Kallenberg O., Random measures, 3 ed., B., 1983; [9] Скороход A. B., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., M., 1986; [10] Karr A., Point processes and their statistical inference, N. Y. – Basel, 1986.

TƏSADÜFİ PARAMETR « случайный параметр; random parameter » – bax, *Faktor analiz*.

TƏSADÜFİ PLAN(ı) eksperimentin **« случайный план эксперимента; random design of experiment »** – bax, *Dispersion analiz.*

TƏSADÜFİ PLANLAŞDIRILMA « случайное планирование; random design » – bax, *Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması.*

TƏSADÜFİ PROSES « случайный процесс; random / stochastic process », stoxastik proses, ehtimali proses, təsadüfi zaman funksiyası, – ümumi nöqteyi – nəzərdən zaman etibarilə cərəyan edən və ehtimal qanunları ilə idarə olunan ixtiyari prosesdir. T. p.-ə tipik misal *Braun hərəkəti prosesidir*. Cərəyan gücünün nizamlanmamış fluktuasiyaları və gərginlik ilə (küylərlə) müşayiət olunan elektrik dövrəsində cərəyanın keçməsi prosesi; radiosiqnalların meteoroloji və ya digər əngəllər nəticəsində təsadüfi itməsi (feydinqlər) hallarında radiodalğaların yayılması, turbulentlik (yəni maye və ya qazın turbulent axını) T. p.-lərə aid olan praktiki mühüm misallardandır. T. p.-lərə təsadüfi fluktuasiyalarla müşayiət olunan bir çox istehsalat proseslərini, geofizikada təsadüf edilən bir sıra prosesləri (məs., yerin maqnit sahəsinin variasiyaları, mikroseysmləri – Yer səthinin səviyyəsinin yüksəktezlikli nizamsız dəyişmələrini), biofizikada beyinin elektroensefaloqramda qeyd olunan bioelektrik potensiallarının dəyişiklərini, iqtisadiyyat proseslərini misal göstərmək olar.

T. p.-lərin riyazi nəzəriyyəsi araşdırılan sistemin ani vəziyyətinə faza fəzasının (vəziyyətlər fəzası) hər hansı bir nöqtəsi kimi baxır; bu zaman T. p. qiymətləri R-dən olan t zaman arqumentinin funksiyası $\zeta(t)$ (və ζ_t) kimi anlaşılır. Adətən, R-in vektor fəzası olduğu fərz olunur, həm də, tətbiqi nöqteyi – nəzərdən, ən mühüm hesab olunan, ən az sahəni əhatə edən hal – R-in nöqtələrinin bir və ya bir neçə ədədi parametrlərlə (sistemin ümumiləşmiş koordinatları ilə) verildiyi haldır, odur ki, T. p.-ə, sadəcə, ya təsadüfdən asılı olaraq müxtəlif qiymətlər alan zamanın ədədi funksiyası $\zeta(t)$ kimi, yəni müxtəlif $x(t)$ realizasiyaları ilə müşahidə olunan (birölçülü təsadüfi proses) funksiya kimi, yaxud uyğun $\zeta(t) = \{\zeta_1(t), \dots, \zeta_k(t)\}$ vektor funksiyası (çoxölçülü və ya vektor təsadüfi proses) kimi baxmaq olar. Çoxölçülü T. p.-lərin öyrənilməsini birölçülü proseslərin öyrənilməsinə $\zeta(t)$ prosesindən

$$\zeta_a(t) = (\zeta(t), a) = \sum_{j=1}^{k} a_j \zeta_j(t)$$

– köməkçi prosesinə keçməklə gəlmək olur, burada $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – ixtiyari k – ölçülü vektordur; buna görə də, birölçülü $\zeta(t)$ proseslərinin araşdırılması T. p.-lər nəzəriyyəsində mərkəzi yer tutur. t parametri, adətən, ya ixtiyari həqiqi qiymətlər və ya həqiqi $\mathbb{R}^1$ oxunun hər hansı intervalından qiymətlər (bu halda kəsilməz zamanlı təsadüfi proses anlaşılır) alır, lakin t yalnız tam qiymətlər də ala bilər ki, bu halda $\zeta(t)$ – diskret zamanlı təsadüfi proses (və ya təsadüfi ardıcıllıq və ya zaman sırası) adlanır. $\zeta(t)$ T. p.-nin bütün mümkün realizasiyalarının sonsuzölçülü fəzasında ehtimal paylanmalarının verilməsi ehtimal nəzəriyyəsinin klassik metodları çərçivəsinə sığmır və buna görə də, xüsusi riyazi aparatın qəbul olunması tələb olunur. Ehtimali xarakter yalnız $\zeta(t) = \zeta(t, \mathbf{Y})$ funksiyasının tamamilə sonluölçülü $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ təsadüfi vektorundan asılılığı olan T. p.-lərin xüsusi sinifləri üçün istisna haldır; çünki, bu halda $\zeta(t)$ prosesinin bu və ya digər tərzdə cərəyan etməsi yalnız $\mathbf{Y}$ vektorunun sonluölçülü paylanmasından asılıdır. Belə T. p.-ə praktiki mühüm misal amplitudmodulyasiya olunmuş harmonik rəqs – $\zeta(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$ prosesidir, burada ω – qeyd olunmuş ədəd, A və Φ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

T. p. üçün ehtimal paylanmalarının geniş sinfi arqumentin qiymətlərinin bütün mümkün sonlu $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ altçoxluqlarına müvafiq $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi vektorlarının bir-birilə uzlaşdırılmış sonluölçülü ehtimal paylanmalarının sonsuz çoxluqları (topluları) ilə xarakterizə oluna bilinir (bax, *Təsadüfi funksiya*). Lakin bütün bu paylanmaların verilməsi belə, t-nin qiymətlərinin sonsuz fəzasında $\zeta(t)$-nin qiymətlərindən asılı hadisələrin ehtimallarının təyin olunması üçün kifayət etmir, yəni $\zeta(t)$ T. p. birqiymətli təyin oluna bilinmir.

Misal. $\zeta(t) = \cos(\omega t + \Phi)$, $0 \le t \le 1$ – təsadüfi fazası Φ olan harmonik rəqs, Z, – $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun; $\zeta_1(t)$, $0 \le t \le 1$, T. p. –

$$\zeta_1(t) = \begin{cases} \zeta(t), & t \neq Z \text{ olduqda,} \\ \zeta(t)+3, & t = Z \text{ olduqda} \end{cases}$$

münasibətilə verilir. Qeyd olunmuş ixtiyari sonlu nöqtələr qrupu $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ üçün $\mathbf{P}\{Z = t_1$ və ya $Z = t_2$ və ya $\dots$ $Z = t_2\}$ olduğundan, $\zeta(t)$ və $\zeta_1(t)$ T. p.-lərinin bütün sonluölçülü paylanmaları eynidir. Lakin bununla belə, $\zeta(t)$ və $\zeta_1(t)$ prosesləri bir-birindən fərqlənir: məs., $\zeta(t)$ prosesinin bütün realizasiyaları kəsilməzdir (sinusoid formasına malikdirlər), amma $\zeta_1(t)$-nin bütün realizasiyaları kəsilmə nöqtələrinə malikdirlər; $\zeta_1(t)$-nin bütün realizasiyaları 1 ədədini aşmır, $\zeta_1(t)$-nin heç bir realizasiyası bu xassəyə malik deyildir. Sonluölçülü ehtimal paylanmalarının verilən sisteminə T. p.-in müxtəlif uyğun modifikasiyaları ola bilər və yalnız sonluölçülü paylanmalara əsaslanmaqla T. p.-in realizasiyasının kəsilməz olduğu ehtimalını, hər hansı qeyd olunmuş sabitlə məhdud olduğu ehtimalını müəyyən etmək olmur.

Lakin, əksər hallarda, sonluölçülü ehtimal paylanmaları toplusunun verilməsi ilə bu sonluölçülü paylanmalara malik, realizasiyaları 1 ehtimalla kəsilməz funksiyalar olan (və ya, məs., differensiallanan və ya verilmiş sabiti heç yerdə aşmayan) heç olmazsa bir təsadüfi prosesinin varlığı və ya da ki, belə $\zeta(t)$ T. p.-lərinin mövcud olub-olmadığını müəyyən etmək olur. 1 ehtimalla realizasiyaları kəsilməz olan və verilmiş sonluölçülü paylanmalara malik $\zeta(t)$ T. p.-nin varlığını təmin edən ümumi şərtə tipik misal, K o l m o q o r o v ş ə r t i d i r: əgər $[a, b]$ intervalında təyin olunmuş $\zeta(t)$ T. p.-nin sonluölçülü paylanmaları üçün müəyyən $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $C < \infty$ və bütün kifayət qədər kiçik h qiymətlərində

$$\mathbf{M}\,|\,\zeta(t+h) - \zeta(t)\,|^{\alpha} < C\,|\,h\,|^{1+\delta} \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə (aydındır ki, yalnız $\zeta(t)$-nin ikiölçülü paylanmalarına məhdudiyyətlər qoyan), onda $\zeta(t)$ T. p. 1 ehtimalla kəsilməz realizasiyalarlı modifikasiyaya malikdir (bax, məs., [1] – [6]). $\zeta(t)$-nin *Qauss prosesi* olduğu xüsusi halda, (1) şərti, müəyyən $\alpha_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, $C_1 < \infty$ qiymətlərində daha zəif

$$\mathbf{M}\,|\,\zeta(t+h) - \zeta(t)\,|^{\alpha_1} < C_1\,|\,h\,|^{\delta_1} \qquad (2)$$

şərti ilə əvəz olunur; $\alpha_1 = 2$, $\delta_1 = 1$ olduqda (2) şərti ödənilir, məs., *Viner prosesi* və *Ornşteyn – Ulenbek prosesi* üçün. Sonluölçülü ehtimal paylanmaları verildiyi halda elə $\zeta(t)$ T. p. varsa ki, onun realizasiyaları 1 ehtimalla kəsilməz funksiyalardır (və ya, məs., differensiallanandır və ya $|B|$ sabiti ilə məhduddurlar), onda bu prosesin digər modifikasiyalarına baxılmır, lakin bununla belə $\zeta(t)$ T. p.-nin hər hansı daha ümumi requlyarlıq şərtlərini ödəməsi tələb olunur, bu da tətbiqi məsələlərdə praktik olaraq, yerinə yetirilən hesab olunur (bax, *Separabel proses*).

$\zeta(t)$ T. p.-nin sonluölçülü ehtimal paylanmalarının sonsuz çoxluğunu vermək əvəzinə,

$$\psi[l] = \mathbf{M}\exp\{il[\zeta(t)]\} \qquad (3)$$

uyğun xarakteristik funksionalının qiymətini göstərməklə də T. p. təyin etmək olur, burada $l[\zeta(t)]$, – $\zeta(t)$-dən asılı xətti funksionalların kifayət qədər geniş sinfində dəyişir. Əgər $\zeta(t)$, $a \le t \le b$ ehtimala görə kəsilməz T. p.-dirsə [yəni ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $h \to 0$ olduqda $\mathbf{P}\{|\zeta(t+h) - \zeta(t)| > \varepsilon\} \to 0$], $g(t)$ isə $[a, b]$-də məhdud variasiyalı funksiyadırsa, onda

$$\int_a^b \zeta(t)\, dg(t) = l^{(g)}[\zeta(t)]$$

təsadüfi kəmiyyət olacaqdır: bu zaman (3) düsturunda $l[\zeta] = l^{(g)}[\zeta]$ hesab etmək olar (belə ki, burada $\psi[l^{(g)}]$-ni $\psi[g]$ simvolu ilə əvəz etmək məsləhətdir). Bir çox hallarda $l[\zeta]$ xətti funksionallarının baxılan sinfini daraltmaq mümkündür, buna görə yalnız

$$\int_a^b \zeta(t)\, \varphi(t)\, dt = l_{\varphi}[\zeta]$$

şəklində funksionallarla kifayətlənmək olar, burada $\varphi(t)$, – t-nin sonsuz differensiallanan finit funksiyasıdır ($[a, b]$ intervalı sonsuz da ola bilər). Geniş requlyarlıq şərtlərində $\psi[l_{\varphi}] = \psi[\varphi]$ qiymətləri $\zeta(t)$ T. p.-nin bütün sonluölçülü ehtimal paylanmalarını birqiymətli təyin edir, çünki

$$\varphi(t) \to \theta_1 \delta(t - t_1) + \dots + \theta_n \delta(t - t_n)$$

olduqda,

$$\psi[\varphi] \to \psi_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

olur, burada $\psi_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, – $\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi vektorunun xarakteristik funksiyasıdır [burada $\delta(t)$ – Dirak δ – funksiyasıdır, yığılma isə ümumiləşmiş funksiyaların yığılması mənasında anlaşılır]. Əgər belə limit yaxınlaşmasında $\psi[\varphi]$ funksionalı sonlu limitə yığılmırsa, deməli, qeyd olunmuş nöqtədə $\zeta(t)$ T. p.-nin sonlu qiymətləri mövcud deyildir və yalnız $l_{\varphi}[\zeta]$ – hamarlanmış qiymətlər mənasında anlaşılır, yəni $\psi[\varphi]$ xarakteristik funksionalı adi («klassik») $\zeta(t)$ prosesini deyil, $\zeta = \zeta(\varphi)$ *ümumiləşmiş təsadüfi prosesini* təyin edir.

$\zeta(t)$ T. p.-nin sonluölçülü ehtimal paylanmaları toplusunun verilməsi o hallarda olduqca sadələşir ki, bütün bu toplular yalnız bəzi aşağı tərtib paylanmalarla birqiymətli təyin olunsun. Bütün çoxölçülü paylanmaları $\zeta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birölçülü paylanmaları ilə təyin oluna bilən T. p.-lərin mühüm sinfi asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığıdır (diskret zamanlı T. p.-lərin xüsusi bir sinfi olan). Olduqca xüsusi belə T. p.-lər klassik ehtimal nəzəriyyəsi çərçivəsində öyrənilə bilinər, lakin mühüm cəhət odur ki, T. p.-lərin bəzi mühüm sinifləri $Y(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin ardıcıllığının funksiyası şəklində də effektiv surətdə verilə bilinir. Məs., olduqca maraq doğuran T. p.-lər –

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y_j(t-j) \quad \text{və ya} \quad \zeta(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j),$$

prosesləridir, burada $t = 0, \pm 1, \dots$, (bax, *Sürüşən orta prosesi*) və

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j h_j(t), \; a \le t \le b$$

prosesidir, burada $h_j(t), \; j = 1, 2, \dots$, – $[a, b]$ intervalında funksiyaların verilmiş sistemidir (bax, *Karunen – Loev ayrılışı*).

T. p.-lərin aşağıdakı dörd sinfi olduqca mühüm siniflərdir (ilk üç sinif üçün bütün sonluölçülü paylanmalar $\zeta(t)$-nin qiymətlərinin birölçülü paylanmaları və $\{\zeta(t_1), \zeta(t_2)\}$ cütlərinin ikiölçülü paylanmaları ilə təyin olunur).

1) *Asılı olmayan artımlarlı təsadüfi* $\zeta(t)$ *prosesləri sinfi:* bu halda $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$ olduqda $\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ və $\zeta(t_4) - \zeta(t_3)$ – asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Burada $[a, b]$ parçasında $\zeta(t)$ T. p.-nin verilməsi üçün $\zeta(a)$ və $\zeta(t_2) - \zeta(t_1)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin uyğun paylanma funksiyaları olan $F_a(x)$ və $\Phi_{t_1,t_2}(z)$-dən istifadə etmək məqsədəuyğun olur; aydındır ki, $\Phi_{t_1,t_2}(z)$ funksiyası

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{t_1,t_2}(z-u)\, d\, \Phi_{t_2,t_3}(u) = \Phi_{t_1,t_3}(z), \qquad (4)$$
$$a \le t_1 < t_2 < t_3 \le b$$

funksional tənliyini ödəməlidir. (4)-dən istifadə edərək göstərmək olar ki, əgər $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi ehtimala görə kəsilməz prosesdirsə, onda onun xarakteristik funksionalı $\psi[g]$,

$$\psi[g] = \exp\left\{ i\int_a^b \gamma(t)\, d\, g(t) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b \beta(t)\,[g(b) - g(t)]\, d\, g(t) +$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b \left[e^{iy[g(b)-g(t)]} - 1 - \frac{iy[g(b)-g(t)]}{1+y^2} \right] \frac{1+y^2}{y^2}\, dt\, \Pi_t(dy) \right\}$$

kimi ifadə oluna bilinir, burada $\gamma(t)$ – kəsilməz funksiyadır, $\beta(t)$ elə azalmayan kəsilməz funksiyadır ki, $\beta(a) \ge 0$ və $\Pi_t(dy)$ – $\mathbb{R}^1$-də azalmayan, t-yə görə kəsilməz ölçüdür və bütün bunlar asılı olmayan $\zeta(t)$ T. p.-ni təyin edir.

2) $\zeta(t)$ *Markov prosesləri sinfi:* bu proseslər üçün $t_1 < t_2$ olduqda $\zeta(t)$ prosesinin bütün qiymətlərinin $t_1 \le t_2$ qiymətlərində verildiyi şərtinə nəzərən $\zeta(t_2)$-nin şərti ehtimal paylanması, yalnız $\zeta(t_1)$-dən asılı olur. $\zeta(t), \; a \le t \le b$ Markov prosesinin verilməsi üçün $\zeta(a)$-nın paylanma funksiyası $F_a(x)$ və $t_1 < t_2$ olduqda $\Phi_{t_1,t_2}(x, z)$ keçid funksiyasından istifadə etmək məqsədəuyğundur, $\Phi_{t_1,t_2}(x, z)$ $\zeta(t_1) = x$ şərtinə nəzərən $\{\zeta(t_2) < z\}$ hadisəsinin şərti ehtimalıdır.

1010 TƏSADÜFİ

$\Phi_{t_1,t_2}(x, z)$ funksiyası (4)-ə yaxın Kolmoqorov – Çepmen funksional tənliyini ödəməlidir, bu da bu funksiyanı təyin etmək üçün daha sadə olan Kolmoqorov düz və tərs tənliklərini müəyyən şərtlər daxilində almağa imkan verir.

3) $\zeta(t)$ *Qauss prosesləri* sinfi: bu proseslər üçün $\{\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)\}$ təsadüfi vektorlarının bütün çoxölçülü paylanmaları Qauss (normal) paylanmalarıdır. Normal qanunlar özlərinin birinci və ikinci momentlərilə birqiymətli təyin olunduğundan, $\zeta(t)$ Qauss prosesinin verilməsi üçün $\mathbf{M}\zeta(t) = m(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t)\zeta(s) = B(t, s)$ funksiyalarının qiymətlərini göstərmək kifayətdir, burada $B(t, s)$ elə müsbət müəyyən nüvə olmalıdır ki, $b(t, s) = B(t, s) - m(t)m(s)$ funksiyası da müsbət müəyyən nüvə olsun. $\zeta(t), \; a \le t \le b$ Qauss prosesinin xarakteristik funksionalı $\psi[g]$ aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\psi[g] =$$

$$= \exp\left\{ i\int_a^b m(t)\, d\, g(t) - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b b(t, s)\, d\, g(t)\, dg(s) \right\}.$$

4) T. p.-lərin mühüm siniflərindən biri də $\zeta(t)$ *stasionar təsadüfi proseslər* sinfidir ki, bu proseslərin statistik xarakteristikaları zaman üzrə dəyişmir, yəni bu proseslər $\zeta(t) \to \zeta(t + a)$ (a – ixtiyari qeyd olunmuş ədəddir) çevirməsinə nəzərən invariantdırlar. Ümumi stasionar $\zeta(t)$ T. p.-nin çoxölçülü ehtimal paylanmaları sadə şəkildə təsvir oluna bilinmir, lakin belə proseslərlə əlaqədar olan bir çox məsələlər üçün yalnız $\mathbf{M}\zeta(t) = m$ və $\mathbf{M}\zeta(t + s)\zeta(t) = B(s)$ birinci və ikinci momentlərini bilmək kifayətdir [belə ki, burada yalnız geniş mənada stasionarlıq haqqında fərziyyə lazım olur, yəni $\mathbf{M}\zeta(t)$ və $\mathbf{M}\zeta(t + s)\zeta(t)$ momentlərinin t-dən asılı olmamazlığı fərziyyəsi]. Mühüm cəhət odur ki, ixtiyari stasionar (və ya heç olmasa geniş mənada stasionar) T. p.

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\, Z(\lambda) \qquad (5)$$

spektral ayrılışı şəklində ifadə oluna bilinir, burada $Z(\lambda)$ – qeyri – korrelyar artımlarlı təsadüfi prosesdir; xüsusi halda buradan

$$B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, d\, F(\lambda) \qquad (6)$$

olduğu alınır; $F(\lambda)$, – $\zeta(t)$ T. p.-nin monoton azalmayan spektral funksiyasıdır. (5) və (6) spektral ayrılışları stasionar təsadüfi proseslərin ən yaxşı (xətanın kvadrat orta mənasında) xətti ekstrapolyasiya, interpolyasiya və filtrasiyası məsələlərinin həllərinin əsasını təşkil edir.

T. p.-lərin riyazi nəzəriyyəsi yuxarıda qeyd olunmuş T. p. siniflərinin altsinifləri sırasına aid bir çox nəticələri və əksinə, yuxarıda qeyd olunmuş T. p. siniflərinin ümumiləşmələrinə aid nəticələri də əhatə edir (məs., *Markov zəncirlərinə*, *diffuzion proseslərə şaxələnən proseslərə*, hər hansı tərtibli stasionar artımlarlı *təsadüfi proseslərə*, *martinqallara* aid).

Əd.: [1] С л у ч к и й Е. Е., Избранные труды, М., 1960, с. 269–80; [2] Д у б Д ж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию

случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1–3, М., 1971–75; [5] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [6] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975; [7] Розанов Ю. А., Случайные процессы, 2 изд., М., 1979; [8] Ито К., Вероятностные процессы, пер. с япон., в. 1 – 2, М., 1960–63; [9] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964; [10] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [11] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [12] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

TƏSADÜFİ PROSES; arifmetik modelləşdirmə « **случайный процесс;** арифметическое моделирование; arithmetic simulation of a **random process** » – bax, *Arifmetik modelləşdirmə*(si) təsadüfi prosesin.

TƏSADÜFİ PROSES artan « **случайный процесс** возрастающий; increasing **random process** » – bax, *Artan təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı « **случайный процесс** с независимыми приращениями; **random process** with independent increments » – elə $X(t)$ *təsadüfi prosesidir* ki, ixtiyari natural n və prosesin təyin olunma oblastından arqumentin ixtiyari $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ qiymətlərində $X(t_0)$, $X(t_1) - X(t_0)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Asılı olmayan artımlarlı T. p.-in faza fəzası additiv qrup olmalıdır. Adətən, ədədi və ya vektor qiymətlərli proseslərə baxılır. Prosesin sonluölçülü paylanmalarını vermək üçün onun birölçülü paylanmalarını, həm də prosesin artımlarının paylanmalarını vermək kifayətdir. Əgər $\varphi_t(z)$ $X(t)$-nin xarakteristik funksiyası, $\psi_{s,t}(z)$, $s < t$ olduqda $X(t) - X(s)$ artımının xarakteristik funksiyasıdırsa, onda bu funksiyalar $\varphi_t(z) = \varphi_s(z)\,\psi_{s,t}(z)$ münasibətilə əlaqəlidirlər, $X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n)$ kəmiyyətlərinin birgə xarakteristik funksiyası aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\varphi_{t_0,t_1,\ldots,t_n}(z_0, z_1, \ldots, z_n) =$$

$$= \varphi_{t_0}(z_0 + z_1 + \ldots + z_n)\,\psi_{t_0,t_1}(z_1 + \ldots + z_n) \cdots \psi_{t_{n-1},t_n}(z_n). \quad (1)$$

Levi ayrılışı. Faza fəzası M – sonluölçülü Evklid fəzası olsun. Onda asılı olmayan artımlarlı hər bir T. p.

$$X(t) = a(t) + X_1(t) + X_2(t)$$

ayrılışı ilə ifadə oluna bilinir, burada $a(t)$ – təsadüfi olmayan funksiya, $X_1(t)$ – asılı olmayan artımlarlı diskret T. p., $X_2(t)$ – asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz T. p.-dir, bu proseslər bir-birilə asılı olmayan proseslərdir. Asılı olmayan artımlarlı diskret T. p. aşağıdakı kimi qurulur. Əgər T prosesin təyin olunma oblastı, $\overline{T}$ onun qapanmasıdırsa, onda elə $T_0 \subset \overline{T}$ hesabi altçoxluğu və qiymətləri M-dən olan, küllüyyatca asılı olmayan kəmiyyətlərin toplusu $\{\xi_s^+, \xi_s^-, s \in T_0\}$ vardır ki,

$$X_1(t) = \sum_{s \le t} \xi_s^- + \sum_{s > t} \xi_s^+$$

(sağ tərəfdəki sıralar sanki yəqin yığılır və bu sıraların cəmləri onların cəmlənmə qaydasından asılı deyildirlər).

Asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz $X_2(t)$ prosesi üçün aşağıdakı funksiyalar mövcuddur: qiymətləri M-dən olan $a_1(t)$, M-dən M-ə təsir edən mənfi olmayan xətti operatorların fəzası $L_+(M)$-dən qiymətlər alan $B(t)$ funksiyası, M-də sıfırda atomları olmayan sonlu Borel ölçülərinin fəzasında $\Pi_t(dx)$; prosesin artımının xarakteristik funksiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\psi_{s,t}(z) = \exp\left\{ i(z, a_1(t) - a_1(s)) - \frac{1}{2}((B(t) - B(s))z, z) + \right.$$

$$\left. + \int \left(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z,x)}{1 + |x^2|} \right) \frac{1 + |x|^2}{|x|^2} \left[\Pi_t(dx) - \Pi_s(dx) \right] \right\},$$

$$s < t, \quad (2)$$

bu halda $a_1(t)$, $B(t)$, $\Pi_t(\cdot)$ funksiyaları kəsilməzdirlər (Π – variasiya üzrə kəsilməzdir), $B(t)$ və $\Pi_t(\cdot)$ monoton azalmayan funksiyalardır. (2) düsturundan aydındır ki, asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz T. p.-in artımları sonsuz bölünən paylanmaya malikdir. $a_1(t)$ və $B(t)$ funksiyaları prosesin artımlarının paylanmaları üzrə birqiymətli təyin olunur.

Asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz T. p. üçün sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan modifikasiya həmişə mövcuddur. $\mathbb{R}_+$ – sağdan kəsilməz və soldan limitləri olan $X(t_-)$, asılı olmayan artımlarlı $X(t)$ T. p.-nin təyin olunma oblastı olsun. $t \in \mathbb{R}_+$ üçün təsadüfi ölçü

$$\nu_t(A) = \sum_{s \le t} I_A(X(s) - X(s_-))$$

olsun, burada A, – M-in Borel çoxluğudur; cəmlənmə $X(t)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri üzrə aparılır (bunlar hesabi çoxluğu aşmır). Bu ölçü prosesin sıçrayışlarının ölçüsüdür və o, aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) $\nu_t(A)$ ölçüsü $O \in X$ nöqtəsindən müsbət məsafədə yerləşən bütün A-lar üçün sonludur;

2) $i \ne j$ olduqda $A_i \cap A_j = \varnothing$ şərtini ödəyən ixtiyari $A_1, A_2, \ldots, A_m$ çoxluqları üçün $\nu_t(A_1), \ldots, \nu_t(A_m)$ təsadüfi prosesləri asılı olmayan proseslərdir;

3) əgər A çoxluğu O nöqtəsindən müsbət məsafədə yerləşərsə, onda $\nu_t(A)$ asılı olmayan artımlarlı prosesdir və $\nu_t(A)$ kəmiyyəti Puasson paylanması ilə paylanır və $G_t(A) = \mathbf{M}\nu_t(A)$ funksiyası X-də A üzrə sonlu Borel ölçüsüdür və

$$G_t(A) = \int_A \frac{1 + |x|^2}{|x|^2}\, \Pi_t(dx),$$

burada $\Pi_t(A)$, – (2) düsturundakı ölçüdür;

4) $X_d(t) = \int x \left[\nu_t(dx) - \frac{1}{1 + |x|^2}\, G_t(dx) \right]$

– asılı olmayan artımlarlı T. p. təyin olunmuşdur (sağda stoxastik inteqral yazılmışdır), bu proses belə bir xassəyə malikdir ki, $X(t)-X_d(t)=X_c(t)$ – asılı olmayan artımlarlı kəsilməz T. p.-dir, bu proses $X_d(t)$-dən asılı deyildir. Asılı olmayan artımlarlı ixtiyari kəsilməz T. p.-in artımlarının paylanmaları Qauss paylanmalarıdır, buna görə də, belə $X_c(t)$ prosesi üçün $X_c(t)-X_c(0)$ artımının paylanması riyazi gözləmə və korrelyasion operatorla tamamilə təyin olunur. $X_c(t)=$ $=X(t)-X_d(t)$ prosesi üçün

$$\mathbf{M}\,(X_c(t)-X_c(0))=a_1(t),$$

$z\in\mathbf{M}$ olduqda

$$\mathbf{M}(X_c(t)-X_c(0)-a_1(t),\,z)^2=(B(t)z,\,z),$$

burada $a_1(t)$ və $B(t)$, – (2) düsturundakı funksiyalardır.

Asılı olmayan artımlarlı T. p. kəsilmə nöqtələri arasında sabit olarsa, o, pillə v a r i t ə s a d ü f i p r o s e s adlanır; hər bir sonlu çoxluqda belə kəsilmə nöqtələrinin sayı sonludur. Əgər $X(t)$ asılı olmayan artımlarlı pilləvari T. p.-dirsə, onda $X(0)=0$. Bu prosesin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M}\exp\{i\,(z,\,X(t))\}=\exp\{\int\,(e^{i(z,x)}-1)\;G_t(dx)\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $G_t(\cdot)$, – M-də sonlu ölçüdür.

$M=\mathbb{R}_+$ olsun. Asılı olmayan artımlarlı $X(t)$ T. p.-nin ($X(0)=0$) azalmayan modifikasiyasının olması üçün onun xarakteristik funksiyasının

$$\mathbf{M}\exp\{iz,\,X(t)\}=\exp\{iz\gamma(t)+\int_0^\infty\,(e^{i(z,x)}-1)\,G_t(dx)\}$$

şəklində ifadə olunması zəruri və kafidir, burada $\gamma(t)$ – azalmayan kəsilməz funksiyadır, $\gamma(0)=0$, $G_t(dx)$ isə onun üçün

$$\int_0^\infty\,\frac{x}{1+x}\;G_t(dx)<\infty$$

şərti ödənilən ölçüdür. M sonluölçülü fəza olsun. Asılı olmayan artımlarlı $X(t)$ T. p.-nin xarakteristikası

$$\mathbf{M}\exp\{i\,(z,\,X(t))\}=$$

$$=\exp\{i\,(z,\,a(t))+\int\,(e^{i(z,x)}-1)\,G_t(dx)\}$$

şəklində ifadə olunarsa, bu prosesin lokal məhdud variasiyalı modifikasiyası mövcuddur, burada $a(t)$ məhdud variasiyalı kəsilməz funksiya, $G_t(dx)$ isə onun üçün

$$\int\,\frac{|x|}{1+|x|}\;G_t(dx)<\infty$$

şərti ödənilən ölçüdür. Bu halda $V(t)=\operatorname{var}\limits_{[0,\,t]}X(\cdot)$ (bu $X(\cdot)$ funksiyasının $[0,\,t]$ parçasında variasiyasıdır) asılı olmayan artımlarlı birölçülü stoxastik kəsilməz T. p.-dir, $V(t)$-nin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M}\exp\{i\,\lambda\,V(t)\}=$$

$$=\exp\left\{i\lambda\operatorname{var}\limits_{[0,\,t]}a(\cdot)+\int\,(e^{i\lambda|x|}-1)\;G_t(dx)\right\}$$

düsturu ilə təyin olunur. Asılı olmayan artımlarlı T. p. keçid ehtimalı

$$\mathbf{P}\,(s,\,x,\,t,\,B)=\mathbf{P}\{X(t)-X(s)\in B-x\},$$
$$0\le s\le t,\;x\in M,\;B\in\mathscr{B}$$

olan Markov prosesidir, $(B-x)$, $x+y\in B$ şərtini ödəyən y-lərin çoxluğudur. Bu isə onu ifadə edir ki, $X(t)$ prosesi Markov prosesi kimi fəza üzrə bircins prosesdir.

Asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz $X(t)$ T. p. $t\in\mathbb{R}_+$ qiymətlərində təyin olunmuşdursa, $X(0)=0$ şərtini ödəyirsə və $X(t+h)-X(t)$ artımının paylanması t-dən asılı deyildirsə, $X(t)$ a s ı l ı o l m a y a n a r t ı m l a r l ı b i r c i n s p r o s e s adlanır. Bu halda $X(t)$ həm də bircins Markov prosesi olur.

Sonluölçülü M Evklid fəzasında asılı olmayan artımlarlı bircins T. p. üçün elə $a\in M$, $B\in L_+(M)$ və $\mathscr{B}$-də $G(dx)$ ölçüsü vardır ki, bu ölçü üçün

$$\int\,\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\;G(dx)<\infty$$

şərti ödənilir, prosesin xarakteristik funksiyası $\varphi_t(z)$ aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\varphi_t(z)=\exp\{t\,K(z)\},$$

burada

$$K(z)=i(z,\,a)-\frac{1}{2}\,(Bz,\,z)+$$

$$+\int\,\left(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z,\,x)}{1+|x|}\right)G(dx),$$

$K(z)$ prosesin k u m u l y a n t a s ı adlanır.

Markov prosesi olan asılı olmayan artımlarlı bircins T. p. ilə Kolmoqorov tənliyi arasında əlaqə varmı? $f(x)$, – M-dən olan, ikiqat kəsilməz differensiallanan, $\mathbb{R}$-də birinci və ikinci tərtib məhdud törəmələrə malik funksiya olsun. $u(t,x)=$ $=\mathbf{M}f(x+X(t))$ olsun. Onda $u(t,x)$ funksiyası parabolik tip

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=L\,u(t,x)\qquad(3)$$

inteqro – differensial tənliyini ödəyir, burada

$$Lf(x)=\sum_i\,a_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\,b_{ik}\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\,\partial x_k}+$$

$$+\int\left[f(x+y)-f(x)-\sum_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,f(x)y_i\,\frac{1}{1+|x|^2}\right]G(dy),$$

x_i, a_i, – x və a vektorlarının koordinantlarıdır, b_{ik}, – M fəzasının hər hansı ortonormalanmış bazisində B matrisinin elementləridir. (3) tənliyi $u(0, x) = f(x)$ başlanğıc şərtilə həll olunmalıdır. (3) Kolmoqorovun tərs tənliyi adlanır.

Asılı olmayan artımlarlı bircins T. p. bircins Markov prosesidir, L bu prosesin ikiqat kəsilməz differensiallanan funksiyalar sinfində doğuran operatorudur. Əgər $\mathbf{P}(t, x, B)$ prosesin keçid ehtimalıdırsa, onda onun rezolventi

$$R_\lambda(x, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathbf{P}(t, x, B)\, dt$$

aşağıdakı münasibətlə təyin olunur:

$$R_\lambda(x, B) = r_\lambda(B - x),$$

burada

$$\int e^{i(z, x)}\, r_\lambda(dx) = \frac{1}{\lambda - K(z)} =$$

$$= \exp\left\{ \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\lambda t} \int (e^{i(z,x)} - 1)\, \mathbf{P}\{X(t) \in dx\}\, dt \right\},$$

yəni $\frac{1}{\lambda} r_\lambda(B)$ sonsuz bölünən paylanmaya malikdir.

$S \in M$ – hamar sərhədli birəlaqəli oblast, τ, – $x + X(t)$ prosesinin S oblastında ilk çıxış anı, $v(t, x) = \mathbf{M} f(X(\tau)) I_{\{\tau < t\}}$ olsun. Əgər $v(t, x)$ funksiyası x üzrə iki dəfə differensiallanandırsa, onda bu funksiya

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = L\, v(t, x), \quad x \in S$$

tənliyini və $v(t, x) = f(x), \quad x \in [S], \quad v(0, x) = 0, \quad x \in S$ şərtlərini ödəyir.

$g(x)$, – M-dən olan ikiqat kəsilməz differensiallanan $\mathbb{R}$-də birinci və ikinci tərtib məhdud törəmələrə malik funksiya olsun;

$$\Phi_x(t) = \int_0^t g(X(s) + x)\, ds$$

– $X(t)$ prosesinin inteqral tipli additiv funksionalı olsun. Bu funksionalın paylanmasını tapmaq üçün $\Phi_x(t)$ kəmiyyətinin Laplas çevirməsi üçün aşağıdakı tənlikdən istifadə etmək olar. $w(t, x) = \mathbf{M} \exp\{\lambda \Phi_x(t)\}$ olsun. Onda $w(t, x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t, x) = L w(t, x) + \lambda\, g(x)\, w(t, x), \quad t > 0$$

tənliyini və $w(0, x) = 1$ başlanğıc şərtini ödəyir.

Əgər asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz T. p.-in xarakteristik funksiyasını (2) düsturu ilə təyin edən $a_1(t)$, $B(t)$, $\Pi_i(B)$ funksiyaları t-yə görə differensiallanandırlarsa, asılı olmayan artımlarlı stoxastik kəsilməz T. p. lokal bircins T. p. adlanır.

$$a_1(t) = \int_0^t a^*(s)\, ds, \quad B(t) = \int_0^t B^*(s) ds,$$

$$\Pi_t(A) = \int_0^t \Pi_s^*(A)\, ds$$

olsun, burada $a^*(s)$, $B^*(s)$, $\Pi_s^*(A)$ – ölçülən və lokal inteqrallanan funksiyalardır; $L_t f$, – M-dən $\mathbb{R}$-ə təsir edən iki dəfə differensiallanan funksiyalar üzərində inteqro – differensiallanan operatordur, a_i^*, x_i, B_{ik}^*, – uyğun olaraq, a^*, x vektorlarının koordinatları və B^* operatorunun matrisinin elementləridir:

$$L_t f = \sum_i a_i^*(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} B_{ik}^*(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) +$$

$$+ \int \Bigg[f(x + y) - f(x) -$$

$$- \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, y_i \frac{1}{1 + |x|^2} \Bigg] \frac{1 + |x|^2}{|x|^2}\, \Pi_t^*(dx).$$

Bircins proseslər üçün yuxarıda verilən nəticələr lokal bircins proseslər üçün də doğrudur.

$f(x)$ – iki dəfə kəsilməz differensiallanan funksiya, f'_{x_i}, $f''_{x_i x_j}$ məhdud,

$$u_t(s, x) = \mathbf{M} f(x + X(t) - X(s)),$$

$$v_t(s, x) = \mathbf{M} \exp\left\{ \lambda \int_s^t f(x + X(t) - X(s))\, ds \right\}$$

olsun. Onda $0 < s < t$ olduqda bu funksiyalar

$$\frac{\partial}{\partial s} u_t(s, x) + L_s u_t(s, x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} v_t(s, x) + L_s v_t(s, x) + \lambda f(x) v_t(s, x) = 0$$

tənliklərini və $u_t(t, x) = f(x)$, $v_t(t, x) = 1$ başlanğıc şərtlərini ödəyir.

$S \subset M$ – hamar sərhədli birəlaqəli oblast, τ_s, – $X(t) - X(s) + x$ prosesinin $(t \geq s)$ S-dən ilk çıxış anı olsun. Onda $w_t(s, x) = \mathbf{P}\{\tau_s < t\}$ funksiyası (bu funksiyanın x-ə görə olduqca hamar olduğu fərz olunur)

$$\frac{\partial}{\partial s} w_t(s, x) + L_s w_t(s, x) = 0, \; x \in S$$

tənliyini və əlavə $w_t(s, x) = 1, \quad x \notin S, \quad 0 \leq s < t,$ $w_t(t, x) = 0, \quad x \in S$ şərtlərini ödəyir.

$\mathbb{R}_+$-da asılı olmayan artımlarlı bircins T. p.-lər. Belə proseslər üçün pillə funksionalları əsas rol oynayır. $X(t)$ – belə proses, $x > 0$, τ_x – prosesin (x, ∞) intervalına ilk dəfə daxil olduğu an olsun, $\gamma_x = X(\tau_x) - x$, bu kəmiyyətlər uyğun olaraq x-i ötüm anı və ötüm müddəti adlanır (bax, *Eksses*(i) dolaşmanın, *Ötüm müddəti*).

$$Q_+(t,\ x) = \mathbf{P}\{\sup_{s\le t} X(s) < x\} = \mathbf{P}\{\tau_x > t\},$$

$$q_+(\lambda,\ x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Q_+(t, x)\, dt,$$

$$\widetilde{q}_+(\lambda, x) = \int e^{izx}\, d_x\, q_+(\lambda,\ x)$$

olsun. Onda

$$\widetilde{q}_+(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda}\ \exp\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_0^\infty (e^{izx} - 1)\, d_x\, F_t(x)\, dt\right\},$$

burada $F_t(x) = \mathbf{P}\{X(t) < x\}$. $\widetilde{q}_+(\lambda, z)$ funksiyası üzrə $q_+(\lambda,\ x)$ funksiyasını, deməli, τ_x-in paylanmasını təyin etmək mümkündür; τ_x, $x < 0$, – $(-\infty,\ x)$ intervalına ilk dəfə daxil olma anı kimi təyin olunur, $\gamma_x = X(\tau_x) - x$. Əgər

$$Q_-(t, x) = \mathbf{P}\{\inf_{s\le t} X(s) > x\} = \mathbf{P}\{\tau_x < t\},$$

$$q_-(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Q_-(t, x)\, dt,$$

$$\widetilde{q}_-(\lambda, z) = \int_0^\infty e^{izx}\, d_x\, q_-(\lambda, x)$$

olarsa, onda

$$\widetilde{q}_-(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda}\ \exp\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_0^\infty (e^{izx} - 1)\, d_x\, F_t(x)\, dt\right\}.$$

$X_+ = \sup_{t>0} X(t)$ (ola bilər ki, $X_+ = +\infty$) olsun; $\mathbf{P}\{X_+ < \infty\} = 1$ bərabərliyi, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki,

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\ \mathbf{P}\{X(t) > 0\}\ d\,t < \infty$$

şərti ödənilsin, bu halda

$$\mathbf{M}e^{izX_+} = \exp\left\{\int_1^\infty \frac{1}{t} \int_0^\infty (e^{izx} - 1)\, d_x\, F_t(x)\, dt\right\},$$

$$\mathbf{P}\{X_+ = 0\} = \mathbf{P}\{\sup_t X(t) \le 0\} =$$

$$= \exp\left\{\int_1^\infty \frac{1}{t}\, \mathbf{P}\{X(t) > 0\}\, dt\right\}.$$

Əgər

$$n(\lambda,\ y,\ x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, d_t\, \mathbf{P}\{\tau_x < t,\ \gamma_x \ge y\},\ x > 0,\ y > 0$$

olarsa, onda

$$n(\lambda,\ y,\ x) =$$

$$= \lambda \int_0^x \left(\int_{-\infty}^0 G([x + y - u - z,\ \infty)\right) d\, q_-(\lambda, z)\, d\, q_+(\lambda, z).$$

Analoji düstur $x < 0$, $y < 0$ (q_- və q_+ yerlərini dəyişir) olduqda doğrudur. $x > 0$, $y > 0$ və $x < 0$, $y < 0$ üçün $n(\lambda,\ y,\ x)$-lə birlikdə

$$\Gamma(x,\ dt,\ dy) = \mathbf{P}\{\tau_x \in dt,\ X(\tau_x) \in dy\}$$

ölçüsünü təyin etmək olar (əgər $x > 0$ olarsa, onda Γ ölçüsü $\mathbb{R}_+ \times [x,\ \infty)$-da, əgər $x < 0$ olarsa, $\mathbb{R}_+ \times (-\infty,\ x]$-də topalanmışdır). Əgər $a < 0 < b$, $a \le \alpha < \beta \le b$, $F_t(\alpha, \beta) =$ $= \mathbf{P}\{\alpha < X(t) < \beta\}$ olduqda

$$Q(t;\ a,\ b;\ \alpha, \beta) =$$

$$= \mathbf{P}\{\inf_{s\le t} X(s) \ge a,\ \sup_{s\le t} X(s) \le b,\ \alpha < X(t) < \beta\}$$

işarələməsi qəbul edilərsə, onda

$$Q(t;\ a,\ b;\ \alpha, \beta) =$$

$$F_t(\alpha, \beta) - \sum_{k=0}^\infty \left[\int_{0<t_1<\ldots<t_{k+1}<t} \int \Gamma(b, dt_1\, dy_1) \times\right.$$

$$\times \Gamma(a - y_1,\ dt_2, dy_2)\ \ldots\ \Gamma(c_{k+1} - y_k,\ dt_{k+1}, dy_{k+1}) \times$$

$$\times\ F_{t-t_k}(\alpha - y_{k+1},\ \beta - y_{k+1}) + \Gamma(a,\ dt_1, dy_1) \times$$

$$\times \Gamma(b - y_1,\ dt_2,\ dy_2)\ \ldots\ \Gamma(c_k - y_k,\ dt_{k+1}, dy_{k+1}) \times$$

$$\left.\times\ F_{t-t_{k+1}}(\alpha - y_{k+1},\ \beta - y_{k+1})\right],$$

burada k cüt olarsa, $c_k = a$, k tək olduqda isə $c_k = b$.

Asılı olmayan artımlarlı semikəsilməz bircins T. p.-lər elə proseslərdir ki, ya bunların müsbət sıçrayışları yoxdur (ya da ki, bunlar aşağıdan semikəsilməzdirlər). Əgər prosesin müsbət sıçrayışları yoxdursa, onda onun xarakteristik funksiyası aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\varphi_t(z) = \exp\{t\, K(z)\},$$

$$K(z) = iaz - \frac{1}{2}\ bz^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1 + x^2}\right) G(dx).$$

$K(z)$ asılı olmayan artımlarlı bircins T. p.-in kumulyantası adlanır. $\operatorname{Im} z < 0$ olduqda kumulyanta analitik funksiyadır. Bütün $x > 0$ qiymətlərində $\mathbf{P}\{\tau_x < \infty\} = 1$ olsun, bu şərt, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki,

$$a - \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\ G(dx) \ge 0$$

münasibəti ödənilsin. Semikəsilməzliyə əsasən $X(\tau_x) = x$. τ_x funksiyasına $\mathbb{R}_+$-də x-in təsadüfi funksiyası kimi baxmaq olar; τ_x T. p. kimi asılı olmayan artımlarlı bircins T. p.-dir, bu

azalmayan prosesdir və onun Laplas çevirməsi aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\mathbf{M}\exp\{-\lambda\tau_x\} = \exp\{-xB(\lambda)\},\ \ \lambda>0.$$

$B(\lambda)$ funksiyası $K(-iB(\lambda))=\lambda$ bərabərliyindən təyin olunur.

Belə proses üçün τ_x-in paylanması və $X(t)$ aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidirlər:

$$\frac{d}{ds}\int_0^x \mathbf{P}\{\tau_y < s\}\,dy = \frac{1}{s}\int_0^x y\,d_y\{X(s) < y\},$$

bu münasibət bərabərliyin sağ tərəfi s-ə görə kəsilməz olan bütün $s>0$ qiymətləri üçün ödənilir. $x<0$ üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\mathbf{P}\{\inf_{s\le t} X(s) < x\} = \mathbf{P}\{X(t)<x\} +$$

$$+\frac{d}{dx}\int_0^t \frac{1}{s}\,\mathbf{M}[X(s)\vee 0]\ \mathbf{P}\{X(t-s)<x\}\,ds.$$

Prosesin sonsuzluqda artım sürəti. Əgər $X(t),\ -\ \mathbb{R}$-də simmetrik bircins prosesdirsə (yəni $X(t)$-nin paylanması – $X(t)$-nin paylanması ilə üst-üstə düşərsə), $\varphi(t),\ -\ \mathbb{R}_+$-də kəsilməz artan funksiyadırsa və bu funksiya üçün $\varphi(t+s)\le\varphi(t)+\varphi(s),\ t>0,\ s>0$ şərti ödənilərsə, onda

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\varphi(t)}\ X(t)\le 1\right\}=1$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathbf{P}\{X(t)>\varphi(t)\}\,dt<\infty$$

şərtinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Əgər $X(t)$ $\mathbb{R}$-də bircins prosesdirsə və $\mathbf{M}X(t)=0,\ \mathbf{D}X(t)=bt$ olarsa, onda təkrar loqarifm qanunu ödənilir:

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{X(t)}{\sqrt{2bt\ln\ln t}}\right\}=1.$$

Bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı; asimptotik xassələr; *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı; lokal xassələr.

Asılı olmayan artımlar anlayışı P. Levi (1934) tərəfindən verilmişdir. Asılı olmayan artımlarlı T. p.-lərdən Puasson və Braun prosesləri o zaman yeganə məlum proseslər idi və bunlar fiziki məsələlərin tədqiqatı nəticəsində yaranmışdı. Asılı olmayan artımlarlı proses termini praktiki olaraq, yalnız parametr kəsilməz olduğu halda istifadə olunur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; asimptotik xassələr « **случайный процесс** с независимыми приращениями; асимптотические свойства; asymptotic properties of **random process** with independent increments» – asılı olmayan artımlarlı *təsadüfi prosesin* $t\to 0$ və ya $t\to\infty$ olduqda nə cür cərəyan etməsini xarakterizə edən xassələrdir. $t\to\infty$ olduqda bircins proseslər üçün alınmış asimptotik xassələr t-nin hər hansı digər sonlu zaman anına yaxınlaşdığı hal üçün də doğrudur. Asılı olmayan artımlarlı proseslərin asimptotik xassələri haqqında müddəalar böyük ədədlər qanunları və ya təkrar loqarifm qanunları kimidir.

Aşağıdakı müddəa səciyyəvidir: əgər $\zeta(t)$ bircins prosesdirsə və $\mathbf{M}\zeta(1)$ riyazi gözləməsi vardırsa, onda

$$\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty}\zeta(t)/t=\mathbf{M}\zeta(1)\}=1.$$

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; çatım anı və ötüm (eksses) kəmiyyətinin paylanmaları « **случайный процесс** с независимыми приращениями; распределение момента достижения и величины перескока; **random process** with independent increments; distribution of the first passage / hitting / crossing time and of the overshot / excess» – asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesi* üçün $x\ge 0$ səddini ötüm kəmiyyəti və çatım anının paylanmasıdır; $\tau_x^+,\ -\ x$ səddinə çatım anı, γ_x^+ (eksses) kəmiyyətləri aşağıdakı kimi ifadə olunur,

$$\tau_x^+=\inf\{t:\zeta(t)>x\},\ \gamma^+(x)=\zeta(\tau_x^+ +0)-x,\ x\ge 0.$$

τ_x^+-in paylanması $\zeta^+(t)=\sup_{0\le u\le t}\zeta(u)$-nun paylanması ilə

$$\mathbf{P}\{\tau_x^+ > t\}=\mathbf{P}\{\zeta^+(t)<x\}$$

bərabərliyi ilə bağlıdır. Bircins təsadüfi proseslər üçün τ_x^+ və γ_x^+ funksionallarının birgə paylanması ikinci faktorizasion eyniliklə ifadə olunur:

$$\mathbf{M}[\exp\{-\lambda\tau_{\theta_\mu}^+ - u\gamma^+(\theta_\mu)\},\ \tau_{\theta_\mu}^+<\infty]=$$

$$=\frac{\mu}{\mu-u}\left[1-\frac{\mathbf{M}\exp\{-\mu\zeta^+(\theta_\lambda)\}}{\mathbf{M}\exp\{-u\zeta^+(\theta_\lambda)\}}\right],\ \lambda>0,\ \mu>0,\ u>0.$$

$\theta_\lambda,\ \theta_\mu$ – parametrləri uyğun olaraq, λ və μ olan üstlü qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. Mənfi $x<0$ səddini ötüm kəmiyyəti və çatım anının paylanmaları da analoji təyin olunur.

Mənfi sıçrayışlarlı semikəsilməz $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün

$$\mathbf{M}[e^{-\lambda\tau_x^+},\ \tau_x^+<\infty]=\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_\lambda)>x\}=e^{-x\rho(\lambda)}\ (x>0)$$

münasibəti doğrudur, burada $\rho(\lambda),\ -\ \psi(i\rho)=\lambda,\ \lambda>0$ tənliyinin yeganə müsbət köküdür, $\psi,\ -\ \zeta(t)$ prosesinin kumulyantasıdır.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; dayanıqlı « **случайный процесс** с независимыми приращениями; устойчивый; stable **random process** with independent increments » – bax, *Dayanıqlı təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı, izotrop « **случайный процесс** с независимыми приращениями изотропный; isotropic **random process** with independent increments » – bax, *İzotrop təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; xarakteristik funksiya « **случайный процесс** с независимыми приращениями; характеристическая функция; characteristic function of a **random process** with independent increments » – qiymətləri $\mathbb{R}^m$-dən olan stoxastik kəsilməz asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ *təsadüfi prosesi* üçün

$$\varphi(t, u) = \mathbf{M} \exp\{ i(u, \zeta(t)) \}, \ u \in \mathbb{R}^m$$

düsturu ilə təyin olunan funksiyadır. $\zeta(t_0) = 0$, burada $(\cdot, \cdot)$, – $\mathbb{R}^m$-də skalyar hasildir. $\varphi(t, u)$ – sonsuz bölünən paylanmanın xarakteristik funksiyasıdır və *Levi kanonik ifadəsinin* düsturuna əsasən

$$\ln \varphi(t, u) = i(u, a(t)) - \frac{1}{2}(B(t)u, u) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \left(e^{i(u, x)} - 1 - \frac{i(u, x)}{1 + |x|^2} \right) \Pi(t, dx),$$

$a : T \to \mathbb{R}^m$ funksiyası kəsilməzdir, $B(t)$ kəsilməzdir və $\mathbb{R}^m$-də özü-özünə qoşma mənfi olmayan operatorların çoxluğunda qiymətlər alan funksiya kimi azalmayandır, $\Pi(t, A) \geq 0$ təyin olunmuş, kəsilməz və $\inf \{ |x| : x \in A \} > 0$ münasibətini ödəyən hər bir $A \in \mathbb{R}^m$ Borel çoxluğunda t üzrə azalmır, hər bir t qiymətində A üzrə hesabi – additivdir və

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}} |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} \Pi(t, dx) < \infty.$$

a, B və Π funksiyaları birqiymətli təyin olunur və asılı olmayan artımlarlı separabel proses üçün aşağıdakı mənanı daşıyır: $a(t)$, $\zeta(t)$ prosesinin təsadüfi olmayan «aparı»-sını təyin edir [əgər $a(t) - \int x(1 + |x|^2)^{-1} \Pi(t, dx)$ funksiyasına bərabər olan inteqral varsa], $B(t)$, – $\zeta(t)$-nin diffuzion komponentinin kovariasion operatorudur, Π – sıçrayışlar ölçüsüdür: $\Pi(t, A)$ – prosesin t anına qədər baş vermiş və A çoxluğuna düşən sıçrayışları sayının riyazi gözləməsinə bərabərdir (yəni elə sıçrayışların ki, bunlar $\zeta(s + 0) - \zeta(s - 0) \in A$ şərtini ödəsin). Bu halda $\zeta(t)$-nin trayektoriyası sanki yəqin:

1) kəsilməzdir, lakin yalnız $\Pi(t, A) \equiv 0$ olarsa [ζ riyazi gözləməsi $a(t)$-yə bərabər, diffuzion operatoru isə $B(t)$ olan Qauss prosesi olduqda];

2) yalnız a məhdud variasiyaya malik olarsa, $B(t) \equiv 0$ və

$$\int\limits_{0 < |x| < 1} |x| \, \Pi(t, dx) < \infty;$$

məhdud variasiyaya malikdir,

3) əgər, yalnız və yalnız, $a(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv 0$, $\Pi(t, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) < \infty$, $t \in T$ olarsa, pilləvaridir;

4) yalnız $B(t) \equiv 0$, $\Pi(t(-\infty, 0)) \equiv 0$ olduqda azalmayandır ($\zeta(t) \in \mathbb{R}^1$ halı) və $a(t) - \int x(1 + x^2)^{-1} \Pi(t, dx)$ funksiyası azalmır.

Bircins asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ prosesi üçün [$\zeta(t + h) - \zeta(t)$ fərqinin paylanması yalnız h-dan asılı olduqda] $a(t) \equiv a\,t$, $B(t) \equiv B\,t$ və $\Pi(t, A) \equiv t\,\Pi(A)$ olur.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; Levi ayrılışı « **случайный процесс** с независимыми приращениями; разложение Леви; Lévi decomposition of a **random process** » – bax, *Levi ayrılışı* asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; lokal xassələr « **случайный процесс** с независимыми приращениями; локальные свойства; local properties of a **random process** with independent increments » – $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesi* və onun artımları – $\zeta(s + t) - \zeta(s)$ fərqlərinin $t \to 0$ olduqda asimptotikasını xarakterizə edən xassələrdir. Asılı olmayan artımlarlı bircins T. p.-lər üçün s qeyd olunduğu halda $\zeta(s + t) - \zeta(s)$ fərqlərinin asimptotikasının araşdırılması prosesin sıfırda asimptotikasının öyrənilməsinə gətirilir. Asılı olmayan artımlarlı bircins ədədi T. p.-in lokal artım sürətini inteqral kriterisi (A. Ya. Xinçin, B. V. Qnedenko) vasitəsilə qiymətləndirmək münasibdir: əgər $\varphi(t)$ elə mənfi olmayan kəsilməz artan funksiyadırsa ki, bu funksiya üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\lim_{n \downarrow 1} \sup_t \left| 1 - \frac{\varphi(ut)}{\varphi(t)} \right| = 1,$$

$$\mathbf{P}\{ \zeta(t) > -\varepsilon \varphi(t) \} \geq q_\varepsilon > 0$$

münasibətləri ödənilsin, onda

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim_{t \downarrow 0}} \ \zeta(t)/\varphi(t) \leq 1 \right\} = 1,$$

münasibəti o halda ödənilir ki,

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{t} \mathbf{P}\{ \zeta(t) > \varphi(t) \} \, dt < \infty$$

olsun və

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim_{t \downarrow 0}} \ \zeta(t)/\varphi(t) \geq 1 \right\} = 1$$

münasibəti isə $I = \infty$ olduqda ödənilsin.

Asılı olmayan artımlarlı T. p.-lərin konkret tipləri üçün lokal artımın dəqiq yuxarı sərhədini göstərmək olur. Viner prosesi üçün təkrar loqarifm qanunu və aşağıdan semikəsilməz dayanıqlı proseslər üçün onun analoqları bunlara misaldır (bax, [1]). Qauss komponenti olmayan proseslər üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim_{t\downarrow 0}}\ \zeta(t)\Big/\sqrt{t\ln|\ln t|} = 0 \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur. Əgər asılı olmayan artımlarlı T. p üçün Levi ölçüsü G şərtini ödəyərsə, onda

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\ t^{-1/\gamma}|\zeta(t)| = \begin{cases} 0, & \text{əgər} \quad \gamma > \rho, \\ \infty, & \text{əgər} \quad \gamma < \rho \end{cases}$$

burada

$$\rho = \inf\left\{ \alpha : \int_{-1}^{1} |y|^{\alpha}\ G(dy) < \infty \right\}.$$

Dayanıqlı proseslər üçün ρ dayanıqlı qanunun parametri $\alpha \in (0, 2)$ ilə üst-üstə düşür.

Parametri $\alpha \in [0, 2]$ olan dayanıqlı prosesin artımının aşağı sərhədi üçün $0 < c_{\alpha} < \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \underline{\lim_{t\to 0}}\ (\ln|\ln t|/t)^{1/\alpha} \sup_{0\le s\le t} |\zeta(s)| = c_{\alpha} \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur. $\alpha = 2$ olduqda (Viner prosesi) $c_2 = \pi/\sqrt{8}$. Artan proseslər üçün

$$\underline{\lim_{t\to 0}}\ \zeta(t)/\psi(t) = \text{const}$$

münasibətini ödəyən ψ funksiyasının ifadəsi məlumdur (bax, [2]).

Kəsilməzliyin müntəzəm modulu yalnız Viner prosesi üçün vardır. Lakin fərqlərin artımlarının müntəzəm aşağı sərhədlərini semikəsilməz dayanıqlı proseslər üçün də göstərmək mümkündür; məs., $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$ olduqda

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\substack{0\le s\le 1\\ 0\le t\le \varepsilon}} \frac{\zeta(s+t)-\zeta(s)}{t^{1/\alpha}(2|\ln t|)^{(\alpha-1)/\alpha}} = d_{\alpha} \right\} = 1$$

münasibəti doğrudur, burada $0 < \alpha < 1$ olarsa, $0 < d_{\alpha} < \infty$ və $1 < \alpha < 2$ olarsa, $-\infty < d_{\alpha} < 0$ götürülür.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Fristedt B. E., Pruitt W. E., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1971, Bd 18, № 3, S. 167–82; [3] Mijnheer J. L., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 27, № 2, S. 153–70; [4] Samorodnitsky G., Taggu M. S., Stabl non-Gaussian random process. Stochastic models with infinite variance, L., 1994.

***TƏSADÜFİ PROSES** asılı olmayan artımlarlı; ordinar bircins « **случайный процесс** с независимыми приращениями; ординарно однородный; **random process** with independent increments; ordinary homogeneous » – asılı olmayan artımlarlı elə tamqiymətli və mənfi olmayan bircins $\{X_t,\ t \ge 0\}$ T. p.-idir ki (bax, *Təsadüfi proses* asılı olmayan artımlarlı), bu proses üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $X(\omega; 0) = 0$;

2) $0 < \lambda < \infty$, $h \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{X_h = 0\} = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$\mathbf{P}\{X_h = 1\} = \lambda h + o(h),$$

$$\mathbf{P}\{X_h \ge 2\} = o(h),$$

burada $X_t = X(\omega; t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$. Ordinar bircins prosesin qeyd olunan anda vahid uzunluqlu iki və ya ikidən çox sıçrayış alması ehtimalı sıfra yaxın olur.

Əd.: [1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, М, 1956; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1973.

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; rezolvent « **случайный процесс** с независимыми приращениями; резольвента; rezolvent of a **random process** with independent increments » – xüsusi halı asılı olmayan artımlarlı *təsadüfi proses* olan Markov prosesinin rezolventidir. Bircins asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ T. p.-nin rezolventi

$$R_{\lambda}(x, B) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}\ \mathbf{P}\{\zeta(t) + x \in B\}\, dt = r_{\lambda}(B - x)$$

düsturu ilə təyin olunur, $\zeta(t)$ prosesinin kumulyantası $K(z)$ olarsa,

$$\int e^{i(z,x)}\ r_{\lambda}(dx) = \frac{1}{\lambda - K(z)}.$$

TƏSADÜFİ PROSES asılı olmayan artımlarlı; yuxarı və aşağı sədlərin paylanması « **случайный процесс** с независимыми приращениями; распределение верхней и нижней граней; **random process** with independent increments; distribution of the upper and lower bounds » – asılı olmayan artımlarlı $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* yuxarı səddi

$$\zeta^{+}(t) = \sup_{0\le u\le t} \zeta(u)$$

və aşağı səddi

$$\zeta^{-}(t) = \inf_{0\le u\le t} \zeta(u)$$

funksionallarının paylanmasıdır. Bircins $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M}\, e^{i\alpha\zeta(t)} = e^{t\psi(\alpha)}$$

münasibətilə təyin olunur və sonsuz bölünənlik xassəsinə malikdir, bu halda $\psi(\alpha)$ kumulyantası Levi – Xinçin ifadəsi ilə aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x\delta(|x| < 1)]\, d\Pi(x),$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\, d\Pi(x) < \infty,\ |a| < \infty,\ \sigma^2 > 0 .$$

Bircins proseslər üçün onların paylanmaları sonsuz bölünən faktorizasiya eyniliyinin komponentləri ilə təyin olunur:

$$\mathbf{M} e^{i\alpha\zeta(\theta_\lambda)} = \mathbf{M}\, e^{i\alpha\zeta^+(\theta_\lambda)}\, \mathbf{M}\, e^{i\alpha\zeta^-(\theta_\lambda)}; \qquad (*)$$

$$\ln \mathbf{M}\, e^{i\alpha\zeta^\pm(\theta_\lambda)} = \pm \int_0^{\pm\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\, d\, N_\lambda^\pm(x),$$

$$\mathbf{P}\{\theta_\lambda > t\} = e^{-\lambda t},$$

$$N_\lambda^+(x) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-1}\, \mathbf{P}\{\zeta(t) \geq x\}\, dt,\ x > 0,$$

$$N_\lambda^-(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-1}\, \mathbf{P}\{\zeta(t) < x\}\, dt,\ x < 0 .$$

Birinci (*) faktorizasiya eyniliyi sonsuz bölünən faktorizasiya eyniliyi adlanır. $\zeta^+(\theta_\lambda)$ üçün xarakteristik funksiyanı təyin edən münasibət Polloçek – Spitser eyniliyinin analoqudur. $\zeta(t)$ prosesinin bütün sərhəd funksionallarının demək olar ki, hamısının paylanması $\zeta^\pm(\theta_\lambda)$, $\lambda > 0$ paylanmalarının terminlərilə ifadə olunur.

Əgər $\zeta(t)$ prosesinin sıçrayışları yalnız bir işarəli olarsa (belə proseslər semikəsilməz proseslər adlanır), onda $\zeta^+(\theta_\lambda)$ və $\zeta^-(\theta_\lambda)$ funksionallarının paylanması üstlü paylan-ma olur. Məs., əgər $\zeta(t)$ prosesinin sıçrayışları yalnız mənfi sıçrayışlar olarsa ($d\Pi(x) \equiv 0,\ x > 0$ olduqda), onda

$$\mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_\lambda) > x\} = e^{-x\rho(\lambda)},\ x > 0;$$

$\rho(\lambda)$, – $\psi(ip) = \lambda$ $(\lambda > 0)$ tənliyinin yeganə müsbət köküdür.

Əd.: [1] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985; [3] Братийчук Н. С., Гусак Д. В., Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями, К., 1990.

TƏSADÜFİ PROSES; bixətti model « **случайный процесс;** билинейная модель; bilinear model of **random process** » – bax, *Bixətti model*(i) təsadüfi prosesin.

TƏSADÜFİ PROSES binar « **случайный процесс** бинарный; binary **random process** » – bax, *Binar təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES çoxölçülü parametrli « **случайный процесс** с многомерным параметром; **random process** with multidimensional parameter » – bax, *Təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ PROSES çoxölçülü zamanlı « **случайный процесс** с многомерным временем; **random process** with multidimensional time » – bax, *Təsadüfi meydan*.

TƏSADÜFİ PROSES; differensiallama « **случайный процесс;** дифференцирование; differentiation of a **random process** » – $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* törəməsinin hesablanması üçün əməldir; bu törəmə

$$\lim_{h\to 0} \frac{\zeta(t+h) - \zeta(t)}{h} = \zeta'(t)$$

limiti kimi təyin olunur. Əgər limit kvadratik orta yığılma mənada (1 ehtimalla) anlaşılırsa, onda $\zeta(t)$-nin kvadratik orta mənada differensiallanması (1 ehtimalla) nəzərdə tutulur.

Kovariasion funksiyası $B(t, s)$ olan $\zeta(t)$ prosesinin kvadratik orta mənada differensiallanması üçün

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}} \frac{B(t+h,\, t+h') - B(t+h,\, t) - B(t,\, t+h') + B(t,\, t)}{hh'}$$

limitinin varlığı zəruri və kafidir.

Bu halda

$$\mathbf{M}\, \zeta'(t)\, \zeta'(s) = \frac{\partial^2 B(t,\, s)}{\partial t\, \partial s},\ \mathbf{M}\, \zeta(t)\, \zeta'(s) = \frac{\partial B(t,\, s)}{\partial s}$$

(qeyd olunan xüsusi törəmələrin varlığı fərz olunur).

Əgər $\zeta(t)$ prosesi kvadratik orta mənada differensiallanandırsa və $\zeta'(t)$ prosesi kvadratik orta mənada kəsilməzdirsə, onda $\zeta(t)$ prosesinə stoxastik ekvivalent, 1 ehtimalla differensiallanan təsadüfi proses vardır. Qauss prosesləri üçün bu şərt həm də zəruridir.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

TƏSADÜFİ PROSES dixotomik « **случайный процесс** дихотомический; binary **random process** » – bax, *Binar təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES diskret komponentli « **случайный процесс** с дискретной компонентой; **stochastic process** with discrete component » – ümumi $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında elə $\{\zeta_1(t), \zeta_2(t)\}$ *təsadüfi proseslər* cütüdür ki, bunlardan biri (məs., birincisi) sıçrayışvari prosesdir, bu cütə faza fəzalarının hasili $(E_1 \times E_2,\ \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)$ fəzasında vahid bir proses kimi baxılır, burada $(E_i, \mathscr{A}_i)$, – $\zeta_i(t)$ prosesinin faza fəzasıdır, $i = 1, 2$. Bu növ obyektlərə maraq onunla izah olunur ki, sıçrayışvari $\zeta_1(t)$ prosesinə əlavə $\zeta_2(t)$ komponentlərini əlavə edərək, onu əksər hallarda bircins Markov prosesi etmək olur. Tipik misal *semi – Markov prosesidir.* Buna görə də, bu mövzu ilə əlaqədar işlərin əksəriyyəti diskret komponentli bircins Markov proseslərinə həsr olunmuşdur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

TƏSADÜFİ PROSES diskret zamanlı « **случайный процесс** с дискретным временем; discrete time **random process** » – bax, *Təsadüfi ardıcıllıq*.

TƏSADÜFİ PROSES; doğruyaoxşarlıq nisbəti « **случайный процесс;** отношение правдоподобия; **random process;** likelihood ratio » – bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

TƏSADÜFİ PROSES erqodik « **случайный процесс** эргодический; ergodic **random process** » – bax, *Erqodik təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES; filtrasiya « **случайный процесс;** фильтрация; filtering of a **random process** » – $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* qiymətinin cari t anında, bu proseslə əlaqədar digər təsadüfi prosesin qiymətləri üzrə, qiymətləndirilməsi məsələsidir. Məs., $\zeta(t)$ stasionar prosesinin bu proseslə stasionar əlaqədar $X(s),\ s \le t$ stasionar prosesinin qiymətləri üzrə qiymətləndirilməsi belə məsələlərdəndir (bax, [1]). Adətən, kvadratik orta xətası $\mathbf{M}\left|\hat{\zeta}(t) - \zeta(t)\right|^2$ minimal olan $\hat{\zeta}(t)$ statistik qiymətinin tapılması nəzərdə tutulur. «Filtrasiya» termini siqnal və təsadüfi küyün «qarışığından» siqnalın ayrılması məsələsi ilə əlaqədar yaranmışdır, bu məsələnin mühüm modifikasiyalarından biri $\zeta(t)$ və $X(t)$ arasında əlaqə

$$d\,X(t) = \zeta(t)\,dt + d\,w(t),\quad t > t_0$$

differensial tənliyi ilə verildiyi hala uyğun sxemdə optimal filtrasiya məsələsidir, burada $\zeta(t)$-dən asılı olmayan küy $w(t)$ standart Viner prosesi ilə ifadə olunmuşdur.

Xətti stoxastik differensial tənliklərlə təsvir olunan $\zeta(t)$ proseslərinə tətbiq olunan filtrasiya metodu (Kalman – Byusi metodu) tətbiqdə geniş yayılmışdır. Məs., yuxarıda göstərilən sxemdə sıfır başlanğıc şərtlərilə

$$d\,\zeta(t) = a(t)\zeta(t)dt + d\,Y_1(t)$$

olarsa, onda

$$\hat{\zeta}(t) = \int_{t_0}^{t} c(t,\ s)\,d\,X(t)$$

olur, burada çəki funksiyası $c(t,\ s)$ aşağıdakı tənliklərdən tapılır:

$$\frac{d}{dt}\,c(t,\ s) = [a(t) - b(t)]\,c(t,\ s),\quad t > s\,,\quad c(s,\ s) = b(s),$$

$$\frac{d}{dt}\,b(t) = 2a(t)b(t) - [b(t)]^2 + 1,\quad t > t_0\,,\quad b(t_0) = 0;$$

bu metodun qeyri – xətti tənliklərə ümumiləşməsi filtrasiyanın ümumi stoxastik tənliklərinə gətirir (bax, [2]).

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\zeta_k(t)$$

prosesi naməlum $c_1, \ldots, c_n$ parametrlərindən asılı olduqda, bu parametrləri $x(s),\ s \le t$ üzrə qiymətləndirərək $\hat{\zeta}(t)$-nin interpolyasion statistik qiymətini vermək olur, burada ən kiçik kvadratlar metodu və onun ümumiləşmələrini tətbiq etmək olur (bax, məs., [3]).

Ədd.: [1] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970.

TƏSADÜFİ PROSES harmoniklənən « **случайный процесс** гармонизуемый; harmonizable **random process** » – bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES xətti ifadə olunan « **случайный процесс** линейно представимый; lineary filter of a **random process** » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES idarəolunan « **случайный процесс** управляемый; controlled **random process** » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES ikiqat stasionar « **случайный процесс** двоично стационарный; dyadic stationary **random process** » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES ikinci növ kəsilmələri olmayan « **случайный процесс** без разрывов второго рода; **stochastic process** without discontinuities of the second kind; CADLAG **stochastic process** ». $(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mathbf{P})$ – ehtimal fəzası, T – həqiqi oxun sonlu və ya sonsuz intervalı, E – metrik fəza, $\mathscr{B}$ – onun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri, $\zeta_t,\ t \in T$ – qiymətləri $(E, \mathscr{B})$ faza fəzasından olan *təsadüfi proses* olsun. Əgər elə $\Omega_1 \in \mathscr{A}$ hadisəsi tapılarsa ki, $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$ və bütün $\omega \in \Omega_1$, $t \in T$ üçün birtərəfli sol və sağ $\lim\limits_{s \uparrow t} \zeta_s(\omega)$ və $\lim\limits_{s \downarrow t} \zeta_s(\omega)$ limitləri olarsa, $\zeta_t,\ t \in T$ prosesi ikinci növ kəsilmələri olmayan təsadüfi prosesdir, deyilir. Əgər T intervalının sol (sağ) ucu ona daxil olarsa və t həmin bu ucla üst-üstə düşərsə, onda yalnız sol (sağ) limitin varlığı tələb olunur.

İkinci növ kəsilmənin olmaması üçün bir sıra kriterilər mövcuddur.

Ədd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

TƏSADÜFİ PROSES impulsal « **случайный процесс** импульсный; impulse **random process** » – bax, *İmpulsal təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; inteqrallanma « **случайный процесс;** интегрирование; integration of **random process** » – *təsadüfi prosesin* inteqralını hesablama əməlidir. $[a,\ b]$ parçasında təyin olunmuş, kovariasion funksiyası $B(t,\ s)$ olan $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin inteqralı –

$$\int_a^b \zeta(t)\,dt\,, \qquad (*)$$

inteqral cəmlərinin kvadratik orta mənada limiti kimi təyin oluna bilinir, bu şərtlə ki, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ bölgüsündəki intervalların boyları kiçilməlidir, burada s_k , – t_k və t_{k+1} arasında

ixtiyari (təsadüfi olmayan) nöqtədir. $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}(t_{k+1}-t_k)$ olsun. (*) inteqralının varlığı üçün

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} B(s_k,\ s_r)\,(t_{k+1}-t_k)(t_{r+1}-t_r)$$

limitinin varlığı zəruri və kafidir.

Xüsusi halda, əgər

$$\int_a^b\int_a^b B(t,\ s)\,dt\,ds$$

Riman mənada ikiqat inteqralı vardırsa, (*) inteqralı da vardır.

Əgər $\zeta(t)$ prosesinin realizasiyaları $[a,\ b]$ parçasında Riman (Lebeq) mənada sanki yəqin inteqrallanandırsa, (*) inteqralını prosesin ayrıca götürülmüş realizasiyasının Riman (Lebeq) inteqralını hesablamaqla təyin etmək olar.

Əd.: [1] В е н т ц е л ь А. Д., Курс теории случайных процессов, 2 изд., М., 1996.

TƏSADÜFİ PROSES; i n t e r p o l y a s i y a « **случайный процесс;** и н т е р п о л я ц и я; i n t e r p o l a t i o n o f **random process** » – $(a,\ b)$ intervalından kənarda $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* müşahidələri nəticəsində alınan qiymətlər üzrə $\zeta(t)$ prosesin qiymətlərinin hər hansı $a<t<b$ intervalında qiymətləndirilməsi haqqında məsələdir. Adətən, interpolyasion statistik qiymət kimi $\hat{\zeta}(t)$ nəzərdə tutulur və bu qiymət üçün interpolyasiyanın kvadratik orta xətası digər statistik qiymətlərlə müqayisədə minimal olur:

$$\mathbf{M}\left|\hat{\zeta}(t)-\zeta(t)\right|^2 = \min.$$

İnterpolyasiya xətti statistik qiymətlərlə məhdudlanırsa, o, x ə t t i i n t e r p o l y a s i y a adlanır. İlkin məsələlərdən biri kimi stasionar ardıcıllığın $\zeta(0)$ qiymətinin xətti interpolyasiyası məsələsi qoyulmuş və həll olunmuşdur; bu məsələnin analoqu aşağıdakı kimi verilir: $-\pi\le\lambda\le\pi$ parçasında kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar fəzası L^2-də $\varphi(\lambda)\in L^2$ funksiyasının $e^{i\lambda k}\varphi(\lambda),\ k=\pm1,\pm2,\dots$ funksiyaları ilə doğurulmuş alt fəzaya proyeksiyasını tapmaq tələb olunur; bu məsələ *stasionar təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsində geniş surətdə ümumiləşdirilmişdir (bax, [1], [2]). Tətbiq üçün l tərtib xətti differensial L operatorlu və sağ tərəfində bəyaz küy $Y(t),\ t>t_0$ olan $L\zeta(t)=Y(t)$ sistemində yaranan T. p.-in interpolyasiya məsələsinə baxmaq olar, burada $\zeta^k(t_0),\ \ k=0,\dots,l-1$ başlanğıc qiymətlərinin bəyaz küydən asılı olmadığı halda, $a<t<b$ intervalında ən yaxşı interpolyasiya statistik qiyməti $\hat{\zeta}(t),\ \ a<t<b,$ – $L^*L\zeta(t)=0$ uyğun sərhəd məsələsinin həllidir, burada L^* – formal qoşma operatordur; sərhəd şərtləri isə $s=a,b$ sərhəd nöqtələrində

$$\hat{\zeta}^{(k)}(s)=\zeta^{(k)}(s),\ \ k=0,\dots,l$$

bərabərlikləri ilə verilir.

Stoxastik differensial tənliklər sistemi üçün müəyyən komponentlərin qiymətləri üzrə interpolyasiya məsələsi, uyğun interpolyasiya tənliklərinə gətirir (bax, [3]).

Əd: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 2215–55; [2] Р о з а н о в Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

TƏSADÜFİ PROSES; i n v a r i a n t l ı q p r i n s i p i **« случайный процесс;** п р и н ц и п и н в а р и а н т н о с т и; i n v a r i a n c e p r i n c i p l e f o r **random process »** – bax, *İnvariantlıq prinsipi* t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n.

TƏSADÜFİ PROSES; k a n o n i k i f a d ə **« случайный процесс;** к а н о н и ч е с к о е п р е д с т а в л е н и е; c a n o n i c a l r e p r e s e n t a t i o n o f a **random process »** – sonlu və ya sonsuz $T=(A,B)$ intervalında (A ya həqiqi ədəd və ya $-\infty$, B isə A-dan böyük həqiqi ədəd və ya $+\infty$) aşağıdakı şərtlərlə təyin olunan təsadüfi ölçülər üzrə inteqralların cəmi şəklində verilən $X(t)$ *təsadüfi prosesinin* ifadəsidir; bu təsadüfi ölçülər $X(t)$ prosesinin gələcək artımlarının strukturunu təyin edən, yeniləşdirici adlandırılan komponentlərinin keçmiş qiymətlərilə və prosesin bu yeniləşdirici komponentlərlə korrelyar olmayan, keçmiş qiymətlərilə təyin olunan ölçülərdir.]

Fərz olunur ki, $X(t),\ t\in T,$ – $\mathbf{M}\,X(t)=0,\ \mathbf{M}\left|X(t)\right|^2<\infty$ şərtlərini ödəyən elə kompleks T. p.-dir ki, bu proses üçün hər bir $t\in T$ qiymətində $X(t-0)=\lim\limits_{h\downarrow0}X(t-h)$ və $X(t+0)=\lim\limits_{h\downarrow0}X(t+h)$ limitləri (kvadratik orta mənada) vardır və $X(t-0)=X(t)$. H – sonlu dispersiyalı kompleks Y təsadüfi kəmiyyətlərinin $(Y_1,Y_2)=\mathbf{M}\,Y_1\overline{Y}_2$ skalyar hasili ilə verilmiş Hilbert fəzası, $H_X(t),$ – H fəzasının $X(s),\ s\le t$ vektorlarını örtən altfəzası olsun; $X(t)$ isə $\bigcap\limits_{t\in T}H_X(t)=0$ şərtini ödəyən requlyar (yəni tamamilə determinik olmayan) proses olsun. Bu halda $X(t),\ t\in T$ prosesi ilə birqiymətli təyin olunan elə minimal N nömrəsi (tam müsbət ədəd və ya sonsuzluğa bərabər) vardır ki, $t\in T$ olduqda $X(t)$ T. p.-nin aşağıdakı şəkildə kanonik ifadəsi vardır:

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_A^B g_n(t,\ u)\,dZ_n(u),$$

burada $Z_n(u),\ \ n=1,\dots,N$ – qeyri – korrelyar artımlarlı, qarşılıqlı korrelyar olmayan proseslərdir. Bu halda $\mathbf{M}\,dZ_n(u)\,\overline{dZ_m(v)}=\delta_{nm}\,\delta(u-v)\,dF_n(u)\,dv,$ $F_n(u),$ $n=1,\dots,N$ monoton azalmayan, soldan kəsilməz elə funksiyalardır ki, bunlar üçün $dF_n(u)$ ölçüsü bütün əvvəlki $dF_m(u),\ m<n$ ölçülərinə nəzərən mütləq kəsilməz ölçüdür; $g_n(t,\ u)$ – təsadüfi olmayan

$$\sum_{n=1}^{N}\int_A^B\left|g_n(t,u)\right|^2 dF_n(u)<\infty$$

şərtini ödəyən funksiyalardır və $H_X(t)$ fəzası ixtiyari $t\in T$ qiymətində $Z_n(s)-Z_n(A),\ s\le t$ vektorları üzərini örtən, qarşılıqlı

ortoqonal $H_{Z_n}(t)$ altfəzalarının düz cəmidir, yəni $H_X(t) = H_{Z_1}(t) \oplus \dots \oplus H_{Z_N}(t)$. $Z_n(u),\ n = 1, \dots, N$ prosesləri, $X(t)$ prosesinin yeniləşdirici komponentləri, $\mathbf{Z}(u) = \{Z_n(u),\ n = 1, \dots, N\}$ $X(t)$ prosesi üçün yeniləşdirici proses, N isə $X(t)$-nin təkrarlıq sayıdır.

T. p.-in kanonik ifadəsi diskret zamanlı stasionar $X(t)$ prosesinin Vold ifadəsinin və bu ifadəyə yaxın – $(-\infty, \infty)$ oxunda requlyar stasionar $X(t)$ prosesinin birtərəfli *sürüşən orta prosesi* şəklində ifadəsinin təbii ümumiləşməsidir. İxtiyari T. p.-in $N = 1$ olan təkrarlıq sayı vardır. Lakin harmoniklənən T. p.-lərin daha ümumi sinfinə tətbiqdə N ixtiyari (sonlu və sonsuz) qiymət ala bilər (bax, [1]).

T. p.-in kanonik ifadəsi üzrə $A < t' \le s < t$ qiymətlərində məlum olan $X(t')$ qiymətləri üzrə $X(t)$-nin qiymətinin ən yaxşı xətti proqnozu $\hat{X}(t)$ asanlıqla təyin olunur:

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{A}^{s} g_n(t, u)\, dZ_n(u).$$

T. p.-in kanonik ifadəsini T. Hida [2]-də Qauss T. p. $X(t)$-yə tətbiqdə almışdır; ixtiyari requlyar $X(t)$ prosesləri halını H. Kramer araşdırmışdır (bax, məs., [1], [3]).

Çoxölçülü $\mathbf{X}(t) = \{X_1(t), \dots, X_m(t)\}$ (vektor) prosesləri və təsadüfi funksiyaların daha ümumi bəzi sinifləri üçün kanonik ifadə ümumiləşdirilmişdir (bax, [4], [5]).

Əd.: [1] Cramer H., «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, в. 2, с. 193–204; [2] Hida T., «Mém. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A», 1960, v. 33, № 1, p. 109–55; [3] Cramer H., Structural and statistical problem for a class of stochastic process, Princeton, 1971; [4] Kallianpur G., Mandrekar V., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 4, с. 614–44; [5] Розанов Ю. А., Теория обновляющих процессов, M., 1974.

TƏSADÜFİ PROSES; kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər « **случайный процесс;** канонические корреляции и величины; canonical correlations and variables of a **random process** » – $\{X(t),\ t \in T\}$ və $\{Y(s),\ s \in S\}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin iki çoxluğu üçün kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlərdir, burada $X(t), Y(s)$ – təsadüfi kəmiyyətlər, T və S, – t və s-in qiymətlərinin hər hansı çoxluqlarıdır.

H, H_X və H_Y – uyğun olaraq, $\{X(t),\ t \in T,\ Y(s),\ s \in S\}$, $\{X(t),\ t \in T\}$ və $\{Y(s),\ s \in S\}$ təsadüfi kəmiyyətlərini örtən, $(z_1, z_2) = \mathbf{M} z_1 z_2$ skalyar hasili ilə Hilbert fəzaları olsun; burada $\mathbf{M} X(t) = \mathbf{M} Y(t) = 0$, P_X və P_Y, – H_X və H_Y altfəzalarına müvafiq H fəzasında proyeksiyalayıcı operatorlardır. Əgər $\{X(t),\ t \in T\}$ və $\{Y(s),\ s \in S\}$ çoxluqları sonlu və ya hesabi olarsa, onda kanonik kəmiyyətlər $B_X = P_X P_Y P_X$ və $B_Y = P_Y P_X P_Y$ operatorlarının məxsusi vektorları, kanonik korrelyasiyalar isə bunların sıfra bərabər olmayan məxsusi qiymətlərinin kvadrat kökləridir (hər iki operatorlar üçün müsbət və eyni).

Əgər H_X və H_Y altfəzalarının dim. – ölçüləri M və L sonlu olarsa, onda kanonik korrelyasiyaların və kəmiyyətlərin sayı $N \le \min\{M, L\}$ olur və ümumi tərifə uyğun olaraq (bax, [1] – [3]),

$$U_i = \sum_{k=1}^{M} \alpha_{ik} X(t_k),\ V_i = \sum_{j=1}^{L} \beta_{ij} Y(s_j),\ i = 1, \dots, N$$

kanonik kəmiyyətlər cütünü və uyğun kanonik ρ_i korrelyasiyalarını –

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{L} B_{XY}(t_m, s_j)\beta_{ij} = \rho_i \sum_{k=1}^{M} B_{XX}(t_m, t_k)\alpha_{ik} \\ t_m \in T,\ m = 1, \dots, M \\ \sum_{k=1}^{M} B_{YX}(s_l, t_k)\alpha_{ik} = \rho_i \sum_{j=1}^{L} B_{YY}(s_l, s_j)\beta_{ij}, \\ s_l \in S,\ l = 1, \dots, L,\ i = 1, \dots, N \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{L} \sum_{l=1}^{L} \beta_{ij} B_{YY}(s_j, s_l)\beta_{il} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \alpha_{ik} B_{XX}(t_k, t_m)\alpha_{im} = 1,\ i = 1, \dots, N \quad (2)$$

münasibətlərindən tapmaq olur, burada $B_{XX}(t_k, t_m)$ və $B_{YY}(s_j, s_l)$, – $X(t)$ və $Y(s)$ proseslərinin avtokorrelyasion matrisləri, $B_{XY}(t_m, s_j)$ və $B_{YX}(s_l, t_k) = B_{XY}(t_k, s_l)$ – onların qarşılıqlı korrelyasion matrisləridir. Kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər elə nömrələnir ki, $\rho_1 \ge \rho_2 \ge \dots \ge \rho_N > 0$ olsun.

İlkin kanonik U_1 və V_1 kəmiyyətlərini də uyğun olaraq, H_X və H_Y-ə aid təsadüfi kəmiyyətlər kimi təyin etmək olar, bu kəmiyyətlər arasında korrelyasiya əmsalı $\rho_1 = \mathbf{M} U_1 V_1$ maksimaldır (H_X və H_Y altfəzaları arasında minimal bucağın kosinusuna bərabərdir). U_1 və V_1 kəmiyyətləri ilə korrelyar olmayan uyğun $U \in H_X$ və $V \in H_Y$ kəmiyyətləri cütü üçün onların korrelyasiya əmsalı ρ_2, $U = U_2$ və $V = V_2$ olduqda, maksimal olur və s. $\{U_1, U_2, \dots, U_N, V_1, V_2, \dots, V_n\}$ vektorunun bütün komponentlərinin dispersiyaları (2)-yə əsasən 1-ə bərabərdir və $\mathbf{M} U_i V_i = \rho_i$, $i = 1, \dots, N$ şərtini ödəyən $\{U_i, V_i\}$ cütləri istisna olunmaqla cüt-cüt qeyri – korrelyar kəmiyyətlərdir.

Kanonik korrelyasiyaların və kəmiyyətlərin tərifi H_X və H_Y altfəzalarının dim. – ölçüləri sonsuz olduğu hal üçün ümumiləşdirilir (məs., $X(t)$ və $Y(s)$ intervallar olduqda). Bu halda kanonik korrelyasiyalar toplusu B_X və B_Y operatorlarının spektrini əmələ gətirir (eyni bir), kanonik kəmiyyətlər isə bu operatorların H fəzasına daxil olmayan məxsusi funksiyalarıdır, bu şərtlə ki, bunlar kəsilməz spektrin nöqtələrinə uyğun olsun və [4]-dəki kəsilməz spektrli operatorların spektral nəzəriyyəsində qəbul olunmuş mənada anlaşılsın. T. p.-lər üçün kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlərin daha ümumi tərifində xətti funksionallar fəzası əvəzinə [5] funksionallarının daha geniş siniflərinə baxılır.

T. p.-lərin proqnozlanması məsələsinə tətbiqdə T çoxluğu «keçmiş», S isə «gələcək» kimi anlaşılır, məs., $T=[t-T_0,\ t]$; $S=[t+\tau,\ t+\tau_0+s_0]$, $Y(s)\equiv X(s)$. Bu halda V_i kanonik kəmiyyətləri – $X(t)$ prosesinin «gələcəyinin» funksionalları ən yaxşı özü də proqnozlanan olur, U_i prediktorlardır, bu prediktorlar üzrə V_i kəmiyyətləri $\hat{V}_i=\rho_i U_i$ dusturu ilə proqnozlaşdırılır.

M i s a l 1. $X(t)$ – stasionar artımlarlı, spektral sıxlığı isə $f(\omega)=C/\omega^{2\alpha}$ olan T. p. olsun, burada $1/2<\alpha<3/2$, $T=(-\infty,\ t)$, $S=(t+\tau,\ \infty)$. Onda kanonik korrelyasiyalar çoxluğu t və τ-dan asılı deyildir, kəsilməzdir və $0\le\rho\le|\sin\pi\alpha|$ intervalını doldurur (bax, [6]).

M i s a l 2. $X(t)$ – spektral sıxlığı rasional

$$f(\omega)=B\prod_{k=1}^{m}|\omega-\beta_k|^2\Big/\prod_{l=1}^{n}|\omega-\alpha_l|^2$$

funksiyası olan təsadüfi stasionar proses olsun, burada $B>0$, $\operatorname{Im}\alpha_l>0$, $\operatorname{Im}\beta_k\ge 0$, $T=(-\infty,\ t)$, $S=(t+\tau,\ \infty)$. Onda yalnız n sayda $(U_i,\ V_i)$ kanonik kəmiyyətlər cütləri və ρ_i kanonik korrelyasiyaları vardır və bunlar $2n$ sayda cəbri tənliklər sistemindən təyin olunur (bax, [7], [8]).

Əd.: [1] H o t e l l i n g H., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321–77; [2] О б у х о в А. М., «Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук», 1938, № 3, с. 339–70; [3] А н д е р с о н Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [4] А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Хар., 1978; [5] H a n n a n E. J., «J. Austral. Math. Soc.», 1961, v. 2, p. 229–42; [6] Ф о р т у с М. И., «Докл. АН СССР», 1983, т. 271, № 6, с. 1325–28; [7] Y a g l o m A. M., в кн.: Bernoulli – Bayes – Laplace anniversary volume, B. – [u. a.], 1965, p. 241–52; [8] Ф о р т у с М. И., в сб.: Физика атмосферы и проблема климата, М., 1980, с. 139–61.

TƏSADÜFİ PROSES k e n q u r u t i p **« случайный процесс** т и п а к е н г у р у; k a n g a r o o **random process »** – ixtiyari ardıcıl iki kəsilmə nöqtələri t_{n-1} və t_n arasında $t_{n-1}<t\le t_n$ intervallarında sabit X_n qiymətlərini alan, kəsilən zaman üzrə bircins elə $X(t)$, $-\infty<t<\infty$ *Markov prosesidir* ki, $\{X_n,\ n=0,\pm1,\dots\}$ – ehtimal paylanması verilən, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\tau_n=t_n-t_{n-1}$ isə eksponensial paylanma qanununa tabe, ehtimal sıxlığı $p_n(\tau)=\lambda_n e^{-\lambda_n\tau}$, $\tau\ge 0$ olan təsadüfi kəmiyyətdir, burada $\lambda_n=\lambda(x_n)$, X_n təsadüfi kəmiyyətinin aldığı x_n qiymətindən asılıdır. $X(t)$ prosesinin stasionar ehtimal paylanması X_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması və $\lambda(x)$ funksiyası ilə ifadə oluna bilər; əgər $X(t_0)$ paylanması hər hansı qeyd olunmuş t_0 qiyməti üçün bu stasionar paylanma ilə üst-üstə düşərsə, onda $X(t)$ korrelyasion funksiyası X_n kəmiyyətlərinin ehtimal paylanması və $\lambda(x)$ funksiyası ilə təyin olunan stasionar təsadüfi prosesdir. Xüsusi halda, λ x-dən asılı olmadıqda, kenquru tip T. p. Kubo – Anderson prosesinə çevrilir (bax, *Nöqtəvi təsadüfi proses*).

Kenquru tip T. p. [1]-də statistik optikanın xüsusi bir məsələsi ilə bağlı daxil olunmuşdur, bu modelin digər fiziki tətbiqləri də vardır (bax, məs., [2], [3]).

Əd.: [1] B r i s s a u d A., F r i s c h U., «J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.», 1971, v. 11, № 12, p. 1767–84; [2] B r i s s a u d A., F r i s c h U., «J. Math. Phys.», 1974, v. 15, № 5, p. 524–34; [3] Ш а п и р о В. Е., Л о г и н о в В. М., Динамические системы при воздействиях, Новосиб., 1983.

TƏSADÜFİ PROSES; k ə s i l m ə l ə r **« случайный процесс;** п е р е с е ч е н и я; c r o s s i n g s o f a **random process »** – *təsadüfi prosesin* seçimi funksiyasının qrafikinin zaman parametri və faza fəzasının düz hasilinin hər hansı müəyyən oblastının sərhədi ilə kəsildiyi nöqtələrdir. $\zeta(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$ həqiqi təsadüfi prosesi üçün u s ə v i y y ə l i k ə s i l m ə l ə r elə nöqtələrdir ki, bu nöqtələrdə $\zeta(t)=u$, $u=0$ səviyyəli kəsilmələr t ə s a d ü f i p r o s e s i n s ı f ı r l a r ı adlanır. Həqiqi təsadüfi prosesin u səviyyəli kəsilmələrinə baxılarkən, adətən, fərz olunur ki: 1) prosesin seçimi funksiyaları sanki yəqin kəsilməzdirlər və təsadüfi prosesin verildiyi oblastın heç bir intervalında eyniliklə u-ya bərabər deyildirlər; 2) əgər təsadüfi prosesin verildiyi oblastın sonlu sərhəd nöqtələri vardırsa, onda seçimi funksiyaların bu nöqtələrdəki qiymətləri sanki yəqin u-dan fərqlidirlər. Belə seçimi funksiyalarla u səviyyəsinin kəsilmələri aşağıdakı kimi təsnif olunur (bax, [1]).

Əgər t_0 nöqtəsinin ixtiyari ətrafında elə t_1 və t_2 nöqtələri tapılarsa ki, $(\zeta(t_1)-u)(\zeta(t_2)-u)<0$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda $\zeta(t)$ seçimi funksiyasının t_0 anında ə s l k ə s i l m ə s i vardır. Bütün digər u səviyyəli «kəsilmələr» t o x u n m a l a r adlanır. Əgər $N_u(a,\ b)$, $C_u(a,\ b)$, $T_u(a,\ b)$ zaman parametrinin qiymətlərinin $[a,\ b]$ parçasında, uyğun olaraq, u səviyyəli kəsilmələr sayı, əsl kəsilmələr sayı və u səviyyəsinə toxunmalar sayı olarsa, onda $N_u(a,\ b)=C_u(a,\ b)+T_u(a,\ b)$ bərabərliyi doğrudur. Əgər elə $\varepsilon>0$ varsa ki, $(t_0-\varepsilon,\ t_0)$ intervalından bütün t-lər üçün $\zeta(t)\le u$ ($\zeta(t)\ge u$) və $(t_0,\ t_0+\varepsilon)$ intervalından bütün t-lər üçün $\zeta(t)\ge u$ ($\zeta(t)\le u$) münasibətləri ödənilsin, onda t_0 anında əsl kəsilmə u s ə v i y y ə s i n d ə n k ə n a r a ç ı x ı ş (u s ə v i y y ə s i a l t ı n a g i r i ş) adlanır. Ümumi halda, $C_u(a,\ b)>U_u(a,\ b)+D_u(a,\ b)$ bərabərsizliyi ödənilir, burada $U_u(a,\ b)$ və $D_u(a,\ b)$ uyğun olaraq, $[a,\ b]$ parçasında u səviyyəsindən çıxış və u səviyyəsi altına girişlərin sayıdır. Lakin $\zeta(t)$ T. p.-nin birölçülü sıxlıq funksiyası $p_i(x)$, $[a,\ b]$ parçasında müntəzəm məhdud olarsa və T. p.-in seçimi funksiyaları sanki yəqin kəsilməz differensiallanandırlarsa, onda sanki yəqin $T_u(a,\ b)=0$, $N_u(a,\ b)$ sonlu və $N_u(a,\ b)=C_u(a,\ b)=U_u(a,\ b)+D_u(a,\ b)$ olur, yəni bütün kəsilmələr əsl kəsilmələrdir və bunlardan hər biri ya çıxışdır və ya girişdir.

Əgər $\zeta(t)$ Qauss T. p.-nin kvadratik orta mənada törəməsi $\dot{\zeta}(t)$ vardırsa, kvadratik orta mənada kəsilməzdirsə, onda cırlaşmayanlığın təbii şərtlərində (bax, [1])

$$\mathbf{M}N_u(a,\ b)=\int_a^b dt\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,p_t(u,\ y)\,dy$$

olur, burada $p_t(x,\ y),\ -\ \zeta(t)$ və $\dot{\zeta}(t)$ qiymətlərinin (təsadüfi kəmiyyətlərinin) birgə paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır.

Əgər, bundan başqa, üst-üstə düşməyən ixtiyari $t_1, \dots, t_k$ zaman anları üçün $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_k)$ və $\dot{\zeta}(t_1), \dots, \dot{\zeta}(t_k)$ kəmiyyətlərinin birgə paylanması cırlaşmayan paylanmadırsa və uyğun paylanma sıxlığı funksiyası $p_t(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$ olarsa, onda $[a, b]$ parçasında kəsilmələr sayı $N_u(a, b)$ təsadüfi kəmiyyətinin k tərtib faktorial momenti –

$$M_k(a, b) = \mathbf{M} N_u(a, b)[N_u(a, b) - 1] \dots [N_u(a, b) - k + 1]$$

$$M_k(a, b) = \int_a^b \dots \int_a^b d t_1 \dots d t_k \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} | y_1 \dots y_k | \times$$

$$\times\ p_t(u, \dots, u, y_1, \dots, y_k)\, d y_1, \dots, d y_k$$

düsturu ilə hesablanır (bax, [2]).

$\zeta(t)$ kovariasion funksiyası $B(t)$ olan stasionar Qauss T. p. olarsa, $\mathbf{M} N_u(a, b)$-nin sonlu olması üçün $B''(0)$ kəmiyyətinin sonlu olması zəruri və kafidir və bu isə $\zeta(t)$-nin kvadratik orta mənada differensiallanan olması ilə eynigüclüdür. Bu halda

$$\mathbf{M} N_u(a, b) =$$

$$= \pi^{-1}(b - a)(-B''(0)/B(0))^{1/2} \exp(-u^2/2\, B(0)),$$

$$\mathbf{M} U_u(a, b) = \mathbf{M} D_u(a, b) = (1/2)\mathbf{M} N_u(a, b).$$

Faktorial momentlərin sonluluğu haqqında məsələlər bir çox müəlliflər tərəfindən öyrənilmişdir (bax, [3]). Yalnız bir dəfə, kvadratik orta mənada differensiallanan və ixtiyari k tərtib sonlu faktorial momentlərə malik olan T. p.-lərə aid misallar məlumdur.

Əgər $\zeta(t)$ stasionar Qauss T. p.-nin kovariasion funksiyası $B(t)$

$$\int_0^{\infty} t\left(|B(t)| + |B'(t)| + |B''(t)| \right) d t < \infty$$

şərtini ödəyərsə, $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olarsa və $N_u(0, T)$ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası ixtiyari $T > 0$ üçün sonlu olarsa, onda elə $\sigma > 0$ vardır ki,

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{N_u(0, T) - \mathbf{M}N_u(0, T)}{\sigma^2 T} < x \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} d x$$

münasibəti doğrudur.

Əgər orta kəsilmələr sayı $\mathbf{M} N_u(a, b)$ T. p.-in verildiyi oblastın ixtiyari sonlu $[a, b]$ parçasında sonlu olarsa, bu təsadüfi prosesin u səviyyəsini kəsmə momentlərinə *nöqtəvi təsadüfi proses* kimi baxmaq olar. Belə yanaşma çox maraqlı nəticələrə gətirir. Məs., $\zeta(t)$ riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olan stasionar Qauss T. p. olarsa və onun kovariasion funksiyası $B(t)$ $t \to 0$ olduqda $B(t) = B(0) - Ct^2 + o(t^2),\quad C > 0$ və $t \to \infty$ olduqda $B(t)\ \ln\ t \to 0$ münasibətləri ilə ifadə oluna bilərsə, onda səviyyənin və miqyasın uzlaşaraq dəyişmələrini elə tənzimləmək olarsa ki, orta çıxışların sayı $\mathbf{M}\, U_n(0, 1)$ sabit a-ya bərabər olsun, $0 < a < \infty$, onda u səviyyəsindən kənara çıxışların təsadüfi nöqtəvi prosesi $u \to \infty$ olduqda, paylanmaya görə, a parametrli Puasson nöqtəvi stasionar prosesinə yığılır.

$\mathbf{M} N_u(a, b) = +\infty$ olduğu halda, $A_u(\xi) \bigcap [a, b]$ Hausdorf çoxluğunun dim. – ölçüsünün araşdırılması maraq doğurur, burada $A_u(\zeta) = \{t : \zeta(t) = u\}$, $-\ \zeta(t)$ T. p.-nin u səviyyələri çoxluğudur. Mərkəzlənmiş separabel Qauss T. p. $\zeta(t)$-nin riyazi gözləməsi – $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, kovariasion funksiyası – $B(s, t) = \mathbf{M}\zeta(s)\zeta(t)$ və hər bir u, w cütü üçün sıfırdan fərqli, sonlu

$$\lim_{t\to 0} t^{-a} B(t\upsilon, tw) = K(\upsilon, w)$$

limiti olsun.

Onda $A_0(\xi) \bigcap [0, 1]$ Hausdorf çoxluğunun dim. – ölçüsü sanki yəqin $1 - (\alpha/2)$-yə bərabərdir (bax, [4]). Viner prosesi üçün bu çoxluğun dim. – ölçüsü $1/2$-ə bərabərdir.

$\mathbf{M} N_u(a, b)$ riyazi gözləməsinin sonlu parçalarda sonsuz olduğu halında, $A_u(\zeta)$ səviyyəli çoxluqların öyrənilməsi τ – p a ç k a adlandırılan, u səviyyəli kəsilmələrin elə «kompakt» qurğularının daxil olunması ilə bağlıdır ki, bu qruplar, τ-ya $(\tau > 0)$ bərabər və ya τ-dan böyük məsafədə bir-birindən aralı qonşu kəsilmələri özündə saxlamır, eyni zamanda da bir-birindən digər τ – paçkaların τ-nu aşmayan məsafəsi qədər uzaqdırlar.

Məs., $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olan Qauss stasionar $\zeta(t)$ T. p. üçün onun kovariasion funksiyasının

$$B(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |t|),\quad \alpha > 0$$

olduğu halında $u \to \infty$ olduqda τ – paçkanın orta uzunluğu üçün asimptotik ifadə alınmışdır və τ – paçkalar başlanan τ – n ö q t ə l ə r i n T. p. öyrənilmişdir (bax, [5]).

Seçimi funksiyaları sanki yəqin kəsilməz differensiallanan olan T. p.-in lokal ekstremumlarının və stasionar nöqtələrinin tədqiqi T. p.-in kəsilmələrinin öyrənilməsi ilə sıx bağlıdır. Əgər riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olan Qauss stasionar T. p.-nin kvadratik orta mənada ikinci tərtib törəməsi $\ddot{\zeta}(t)$ vardırsa, onda $\zeta(t)$ T. p.-nin $[a, b]$ parçasında, hündürlüyü ya u-ya bərabər və ya u-dan böyük olan, lokal maksimumlarının orta sayı

$$\nu_n(a, b) = (b - a) \int_u^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, p(x, 0, z)\, d z$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $p(x, y, z)$, $-\ \zeta(t)$, $\dot{\zeta}(t)$, $\ddot{\zeta}(t)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ehtimal paylanmasının birgə sıxlıq funksiyasıdır.

$Y_t = Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_m(t)),$ – $\mathbb{R}^m$-dən qiymətlər alan və sanki yəqin kəsilməz differensial seçimi funksiyalara malik

m – ölçülü vektor təsadüfi proses, $D \subset \mathbb{R}^m$ isə sərhədi verilmiş $\Phi(y)$, $y \in \mathbb{R}^n$ olan, kifayət qədər hamar S_Φ oblastı olsun:

$$S_\Phi = \{y \in \mathbb{R}^m : \Phi(y) = 0\}, \quad D = \{y \in \mathbb{R}^m : \Phi(y) < 0\}.$$

Əgər $\Phi(Y_\tau) = 0$ olarsa, Y T. p.-nin seçimi funksiyasının τ anında S_Φ sərhədində kəsilməsi vardır. Əgər elə $\varepsilon > 0$ varsa ki, $(\tau - \varepsilon, \tau)$ intervalında $\Phi(Y_\tau) < 0$ $(\Phi(Y_\tau) > 0)$ və $(\tau, \tau + \varepsilon)$ intervalında $\Phi(Y_\tau) > 0$ $(\Phi(Y_\tau) < 0)$ münasibətləri ödənilsin, onda τ anında S_Φ sərhədində kəsilmə D oblastından çıxış (*D* oblastına giriş) adlanır. Sərhədin bütün digər kəsilmələri toxunmalar adlanır. Əgər $Y(t)$ T. p.-nin birölçülü ehtimal sıxlığı funksiyaları $p_t(y)$ varsa və bunlar $y \in \mathbb{R}^n$ və t üzrə müntəzəm məhduddurlarsa, onda: (a) $Y(t)$ T. p.-nin D oblastının sərhədi S_Φ-ə toxunması 1 ehtimalla yoxdur; (b) ixtiyari sonlu zaman intervalında S_Φ sərhədindən çıxış və sərhəd altına girişlərin ümumi sayı 1 ehtimalla sonludur. $Y(t)$ prosesi üzərinə qoyulan bəzi əlavə şərtlərlə $Y(t)$ prosesinin $s_1 \le t \le s_2$ zaman intervalında $\Gamma \subset S_\Phi$ çoxluğuna giriş və ondan çıxış saylarının faktorial momentləri üçün [6]-da düsturlar alınmışdır.

$\zeta(t)$ elə həqiqi stasionar T. p. olsun ki, onun riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$, kovariasion funksiyası

$$B(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, dF(\lambda),$$

spektral ifadəsi isə

$$\zeta(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, du(\lambda) + \int_0^\infty \sin \lambda(t) \, dv(\lambda)$$

olsun, burada $u(\lambda)$ və $v(u)$ – ortoqonal artımlarlı proseslərdir və

$$\mathbf{M}u(\lambda) = \mathbf{M}v(\lambda) = 0, \quad \mathbf{M}u(\lambda)v(\mu) = 0$$

$$\mathbf{M}[du(\lambda)]^2 = \mathbf{M}[dv(\lambda)]^2 = dF(\lambda).$$

$$\hat{\zeta}(t) = \int_0^\infty \sin \lambda t \, du(\lambda) - \int_0^\infty \cos \lambda t \, dv(t)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\hat{\zeta}(t)$ prosesi $\zeta(t)$ prosesinin Hilbert çevirməsi adlanır. $Z(t) = [\zeta^2(t) + \hat{\zeta}^2(t)]^{1/2}$ T. p.-nə $\zeta(t)$ T. p.-nin qurşayanı deyilir. $Z(t)$ təsadüfi prosesinin u səviyyəsindən çıxışları $Y(t) = (\zeta(t), \hat{\zeta}(t))$ vektor T. p.-nin $D = \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 < u^2\}$ dairəsinin sərhədinin çıxışlarına uyğundur. Əgər $\zeta(t)$ Qauss T. p. olarsa, belə çıxışların nöqtəvi T. p.-nin intensivliyini aşkar şəkildə hesablamaq mümkündür. Doğrudan da, $\zeta(t)$ Qauss T. p.-dirsə və $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$ olarsa və $|t| \le t_0$, $t_0 > 0$ üçün $|B''(0) - B''(t)| \le C \Big/ \left|\ln|t|\right|^{1+\varepsilon}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ şərti ödənilərsə, onda bu intensivlik

$$\mu_n^+ = (\lambda_2 - \lambda_1^2 \lambda_0^{-1})^{1/2} (2\pi\lambda_0)^{-1/2} (u/\lambda_0^{1/2}) \exp(-u^2/2\lambda_0)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada

$$\lambda_k = \int_0^\infty \lambda^k \cos \lambda t \, dF(\lambda).$$

Belə yanaşmadan istifadə olunma $Z(t)$ T. p.-nin aşma – enmələrinin müxtəlif xarakteristikalarını tədqiq etməyə imkan verir (bax, *Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın*).

Əd.: [1] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [2] Малевич Т. Л., в. сб.: Случайные процессы и статистические выводы, в. 5, Таш., 1975, с. 73–79; [3] Мирошин Р. Н., Пересечения кривых гауссовскими процессами, Л., 1981; [4] Островский Е. И., «Вестн. Моск. Ун-та. Матем. механ.», 1973, № 2, с. 23–29; [5] Беляев Ю. К., Питербарг В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1970, т. 13, в. 2, с. 217–27; [6] Беляев Ю. К., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 333–37; [7] Беляев Ю. К., в кн.: Стационарные случайные процессы, пер. с англ., с. 341–78, М., 1969; [8] Питербарг В. И., Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, пер. с англ., М., 1978, с. 258–80; [9] Питербарг В. И., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 19, М., 1982, с. 155–99.

TƏSADÜFİ PROSES kvant « **случайный процесс** квантовый; quantum **random process** » – bax, *Kvant təsadüfi prosesi.*

TƏSADÜFİ PROSES qarşılıqlı asılı olmayan qiymətlərli « **случайный процесс** с взаимно независимыми значениями; **stochastic process** with mutually independent values » – $n_1, \ldots, n_k$ tam ədədlərinin ixtiyari sonlu qrupu üçün $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin k – ölçülü paylanma funksiyası $F(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k})$,

$$F(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}) = F_{n_1}(x_{n_1}) \cdot \ldots \cdot F_{n_k}(x_{n_k})$$

şərtini ödəyən $\{\xi_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ prosesinə deyilir; $F_n(x)$, – ξ_n təsadüfi kəmiyyətinin birölçülü paylanma funksiyasıdır. Belə k – ölçülü $(k = 1, 2, \ldots)$ paylanma funksiyaları ailəsi simmetriklik və uzlaşma şərtini ödədiyindən Kolmoqorov teoreminə əsasən tamqiymətli parametrli təsadüfi proses vardır və bu təsadüfi prosesin sonlü ölçülü paylanma funksiyaları ailəsi bütün F-lərin ailəsi ilə üst-üstə düşür. F-in təyin olunmasına əsasən, aydındır ki, ξ_n-lər qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olur.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri–antisipativ « **случайный процесс;** неупреждающий; non-anticipating **random process** » – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri–xətti filtrasiya « **случайный процесс;** нелинейная фильтрация; nonlineary filtering of a **random process** » – bax, *Qeyri – xətti filtrasiya*(sı) təsadüfi proseslərin.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri–xətti modellər « **случайный процесс;** нелинейные модели; nonlinear models of a **random process** » – bax, *Qeyri – xətti modellər*(i) təsadüfi prosesləri.

TƏSADÜFİ PROSES; qeyri–xətti proqnozlama « **случайный процесс;** нелинейное прогнозирование; nonlinear prediction/extrapolation of a **random process** » – bax, *Qeyri – xətti proqnozlanma*(sı) təsadüfi prosesləri.

TƏSADÜFİ PROSES; qurşayan « **случайный процесс;** огибающая; envelope of a **random process** » – bax, *Təsadüfi proses*; kəsilmələr.

TƏSADÜFİ PROSES; limit teoremləri « **случайный процесс;** предельные теоремы; limit theorems for **random process** » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES Loev mənada harmoniklənən « **случайный процесс** гармонизуемый в смысле Лоэва; Loeve's harmonizable **random process** » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* qeyri–stasionar təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES; maksimum « **случайный процесс;** максимум; maximum of a **random process** » – *təsadüfi prosesin* seçimi funksiyasının ekstremal qiymətidir. T. p. nəzəriyyəsinin mühüm məsələlərindən biri – $Z(t) = \sup\limits_{t\in T} \zeta(t,\ \omega)$ funksionalının paylanmasının öyrənilməsidir, burada $\zeta(t,\ \omega)$ – separabel T. p., T – hər hansı parametrik çoxluqdur. $\zeta(t,\ \omega)$-nın ixtiyari parametrik T çoxluğunda, yaxud Evklid fəzasının altçoxluğunda Qauss T. p. olduğu hal sistematik surətdə araşdırılmışdır. $Z(T)$ kəmiyyətinin dəqiq paylanması bəzi cırlaşmış hallar (məs., ζ – sinusoid olduqda) və əlavə olaraq, ζ Markov xassəli proses olduğu hal üçün hesablanmışdır [$w(t)$ Viner prosesi, düzxətdə Markov stasionar Qauss T. p., $a(w(t+b)-w(t))$, $a>0$, $b>0$ tipli təsadüfi proses üçün]. $\zeta(t,\ \omega)$, $t\in T$ – riyazi gözləməsi sıfra bərabər, Qauss T. p., T – ixtiyari çoxluq olsun. Onda $\mathbf{P}\{Z(T)<\infty\} = 0$ və ya $=1$ olur (sıfır, yaxud vahid qanunu) (bax, *Təsadüfi proses*; trayektoriyaların requlyarlığı). Sonuncu halda $\mathbf{M}\exp(\alpha Z(T)^2)<\infty$ münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\alpha\in(-\infty,\ 1/2\sigma^2)$ olsun, burada $\sigma^2 = \sup\limits_{T} \mathbf{M}\zeta(t,\ \omega)^2$. Sonuncu müddəa, Orliç fəzalar metodu vasitəsilə, subqauss təsadüfi prosesləri adlandırılan proseslərin geniş sinfi üçün ümumiləşdirilmişdir. Entropik yanaşma vasitəsilə $Z(t)$ paylanmasının qalığı üçün universal bərabərsizlik alınmışdır. $\psi(1)<\infty$ və $\mathbf{M}\zeta(t,\ \omega)\equiv 0$ olsun. Onda ixtiyari $S\subseteq T$ altçoxluğu və bütün $u>0$ üçün

$$\mathbf{P}\{Z(T)>\sigma u\} \le \frac{8}{\sqrt{2\pi}u}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ u^2 + \chi(S,\ u/\sigma)\right),$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada

$$\chi(S,\ u) = \inf_{\varepsilon>0}\ (2u^2\varepsilon^2 + H(S,\ \varepsilon) + 4\,u\sup_{t\in S}\int\limits_0^{\varepsilon/2}\sqrt{2\ln N(S\cap B(t,\ \varepsilon),\ x)}\ dx).$$

Qauss T. p. üçün $F(a) = \mathbf{P}\{Z(T)\le a\}$ paylanma funksiyasının kəsilmə nöqtələrinin strukturu öyrənilmişdir. $Z(t)<\infty$ şərti sanki yəqin ödənilsin və bütün $t\in T$ üçün $\mathbf{M}\zeta(t,\ \omega)\ge 0$, $\mathbf{D}\zeta(t,\ \omega)\ne 0$ olsun. Onda $F(a)$ funksiyası ola bilər ki, $a_0 = \inf\{a : F(a) > 0\}$ ($a_0 = -\infty$ ola bilər) nöqtəsi istisna olunmaqla, hər yerdə kəsilməzdir. $(a_0, +\infty)$ intervalında $F(a)$ mütləq kəsilməzdir, onun törəməsi $F'(a)$ təyin olunmuşdur və $(a_0, +\infty)$ intervalının sıçrayışları aşağı yönələn, hesabi saydan çox olmayan nöqtələrindən başqa, bütün nöqtələrdə kəsilməzdir; ixtiyari $a>a_0$ üçün $F'(a)$, $(a_0, +\infty)$ çoxluğunda məhdud variasiyaya malikdir.

Stasionar və qeyri – stasionar Qauss T. p.-lərinin geniş sinfi üçün $Z(t)$ paylanmasının qalığının dəqiq asimptotikası tapılmışdır ki, bu proseslər üçün $d(t,s)$ funksiyası $t\to s$ olduqda qüvvət üstlü şəkilli olur. $T=[0,\ A]$, $\zeta(t,\ \omega)$ – düzxətdə stasionar Quass T. p. olsun. Fərz olunur ki, $\mathbf{M}\zeta(t,\ \omega)=0$, $\mathbf{M}\zeta(t,\ \omega)^2 = 1$, prosesin kovariasion funksiyası isə

$$r(t) = 1 - C|t|^{\alpha} + o(|t|^{\alpha}),\ t\to 0,\ r(t)<1,\ t\in(0,\ A]\quad (*)$$

şərtini ödəyir. Onda

$$\lim_{u\to\infty}\sqrt{2\pi}\,u^{1-2/\alpha}\exp(u^2/2\sigma^2)\ \mathbf{P}\{Z(T)>u\} = AC^{-1/\alpha}H_{\alpha}$$

bərabərliyi doğrudur, burada

$$H_{\alpha} = \lim_{t\to\infty} H_{\alpha}(t)/t,\ 0<H_{\alpha}<+\infty,\ H_{\alpha}(t) = \mathbf{M}\exp(\max_{s\in[0,\ t]}\ Y(s)),$$

$Y(s)$ – Qauss T. p.-dir, $\mathbf{M}Y(s) = -|s|^{\alpha}$, $\operatorname{cov}(Y(s),\ Y(v)) = |s|^{\alpha} + |v|^{\alpha} - |s-v|^{\alpha}$ (bax, [3]). Stasionar proseslər və meydanlar üçün ümumiləşmələr mövcuddur (bax, [3], [4]). Naməlum parametrlər halında Kolmoqorov tipli statistika üçün limit meydanları olan diffuzion tipli meydanlar da çoxölçülü halda araşdırılmışdır. Hamar trayektoriyalarlı stasionar Qauss T. p.-ləri halında müqayisə teoremi yerinə yetirir. Əgər $\zeta_1(t,\ \omega)$ və $\zeta_2(t,\ \omega)$ cırlaşmayan Qauss T. p.-ləri $\mathbf{M}\zeta_i(t,\ \omega)\equiv 0$, $\mathbf{M}\zeta_i(t,\ \omega)^2 = \mathbf{M}\zeta_i'(t,\ \omega)^2 \equiv 1$ və $\mathbf{M}\zeta_j''(t,\ \omega)^2<\infty$, $i=1,2$ şərtlərilə təyin olunursa, onda elə $C=C(T)$ və $\rho>0$ konstantları vardır ki,

$$\left|\ \mathbf{P}\{Z_{X_1}(T)<u\} - \mathbf{P}\{Z_{X_2}(T)<u\}\ \right| \le C\exp(-u^2(1+\rho)/2),\quad T=[0,\ A],\ u>0$$

bərabərsizliyi ödənilir. Bu bərabərsizlik və onun çoxölçülü hala ümumiləşməsi

$$\mathbf{P}\{Z_{X_i}(T) > u\} = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx + \frac{A}{2\pi} e^{-u^2/2} + O(\exp(-u^2(1+\delta)/2)), \quad \delta > 0$$

asimptotik ayrılışını almağa imkan yaradır (meydanlar üçün bax, [3]).

Asimptotikaların yuxarıda qeyd olunmuş nöqtələri əsasında stasionar Qauss T. p. və ya genişlənən intervalda meydanın maksimumu üçün limit teoremləri alınmışdır. Əgər (*) şərtindən başqa, $t \to \infty$ olduqda $r(t)\ln t \to 0$ şərti də ödənilərsə, onda

$$\lim_{A\to\infty} \mathbf{P}\{l(\widetilde{A}, \alpha)(Z(T) - l(\widetilde{A}, \alpha)) < x\} = e^{-e^{-x}}$$

olur, burada $T = [0, A]$, $\widetilde{A} = (2\pi)^{-1/2} H_\alpha A$,

$$l(C, \alpha)\sqrt{2\ln C} + (2/\alpha - 1)\ln\sqrt{2\ln C}\Big/\sqrt{2\ln C}\,.$$

Əgər bundan başqa Qauss T. p. üçün yuxarıda qeyd olunmuş, X' və X'' üzərinə qoyulmuş normalanma və hamarlılıq şərtləri də ödənilərsə, onda bu limit münasibətində yığılma sürəti loqarifmikdir və yaxşılaşdırılmayandır, həmçinin elə $\delta > 0$ vardır ki, $A \to \infty$ olduqda x üzrə müntəzəm olaraq

$$\mathbf{P}\{(Z(T) < l(\widetilde{A}, 2) + x\Big/l(\widetilde{A}, 2)\} = \exp(-\exp(-x - x^2\Big/2l(\widetilde{A}, 2)^2)) + O(A^{-\delta})$$

münasibəti ödənilir, burada $l(\widetilde{A}, 2) = \sqrt{2\ln(A/2\tau)}$.

Bu nəticə stasionar Qauss meydanı üçün ümumiləşdirilmişdir (bax, [3]).

Əd.: [1] S l e p i a n D., «Bell System Techn. J.», 1962, v. 41, p. 463–501; [2] Ц и р е л ь с о н Б. С., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1975, т. 20, в. 4, с. 865–73; 1984, т. 31, в. 1, с. 44–50; [3] П и т е р б а р г В. И., Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей, M., 1988; [4] Ф а т а л о в В. Р., «Докл. АН Арм. ССР », 1983, т. 77, № 1, с. 25–29; [5] Ф е р н и к К., в сб.: Случайные процессы. Выборочные функции и Пересечения, M., 1978, с. 63–132; [6] Д м и т р о в с к и й В. А., в сб.: Случайные процессы и поля, M., 1979; с. 22–31.

TƏSADÜFİ PROSES nöqtəvi « **случайный процесс** точечный; point **random process** » – bax, *Nöqtəvi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES opsional « **случайный процесс** опциональный; optional **random process** » – bax, *Tamamilə ölçülən proses*.

TƏSADÜFİ PROSES ortalanmış spektrli « **случайный процесс** с осредненным спектром; **random process** having average spectrum /asymptotically stationary **random process** » – *ortalanmış korrelyasion* $B_{av}(\tau)$ *funksiyası* [deməli, *ortalanmış spektral* $F_{av}(\lambda)$ *funksiyası*] olan diskret və ya kəsilməz zamanlı $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesidir.* Ortalanmış spektrli T. p.-lərə [1] – [8]-də baxılmışdır; [3]-də belə proseslər spektrə malik olan proseslər [$F_{av}(\lambda)$ funksiyası $\zeta(t)$ prosesinin spektri], [5]-də bunlar korrelyasion funksiyası olan proseslər [$B_{av}(\tau)$ funksiyası qeyri–stasionar $\zeta(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası], [6]-da asimptotik stasionar təsadüfi proseslər, [7], [8]-də KF sinfinin prosesləri ([5]-dəki müəlliflərin adları ilə bağlı) adlandırılmışdır.

$$B_{av}(\tau) = \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\overline{\zeta(t)} = B(\tau)$$

şərtini ödəyən bütün $\zeta(t)$ stasionar prosesləri və $\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\overline{\zeta(t)}$ limiti olan proseslər ortalanmış spektrli T. p.-lərdir. Bundan əlavə ortalanmış spektrli T. p. sinfinə M. Loev tərəfindən (bax, [3]) daxil olunmuş bütün *harmoniklənən təsadüfi proseslər*, korrelyasion funksiyası

$$B_{av}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\overline{\zeta(t)}\,dt$$

düsturu ilə ifadə olunan, ixtiyari T_0 periodlu *periodik korrelyar təsadüfi proseslər* daxildirlər.

İsbat olunmuşdur ki, harmoniklənməyən, periodik korrelyar olmayan bir çox T. p.-lər ortalanmış spektrli T. p.-lərdir (məs., *Harmoniklənən təsadüfi proses* məqaləsində təyin olunmuş bir çox, lakin hamısı deyil, yalnız Rozanov ümumi mənasında harmoniklənən, amma Loev mənasında deyil, proseslər) (bax, [7], [8]).

Stasionar T. p.-lərin spektral nəzəriyyəsinin bir çox nəticələri ortalanmış spektrli T. p.-lər üçün də alınır (bax, məs., *Ortalanmış spektral sıxlıq*).

Əd.: [1] Б у н и м о в и ч В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, M., 1951; [2] B l a n c - L a p i e r r e A., F o r t e t R., Theorie des fonctions aleatoires, P., 1953; [3] Р о з а н о в Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291–310; [4] Х а р к е в и ч А. А., «Радиотехника», 1957, т. 12, в. 5, с. 5–11; [5] K a m p e d e F e r i e t J., F r e n k i e l F. N., «Math. Comput.», 1962, v. 16, № 77, p. 1–21; [6] P a r z e n E., «Bull. Inst. Int. Statist.», 1962, v. 39, livre 2, p. 87–103; [7] R a o M. M., в кн.: Developments in statistics, v. 1, N. Y., 1978, p. 171–225; [8] C h u n g D. K., R a o M. M., в кн.: Real and stochastic analysis, N. Y., 1986, p. 7–118.

TƏSADÜFİ PROSES; ortoqonal ayrılış « **случайный процесс** ортогональное разложение; orthogonal expansion of a **random process** » – bax, *Karunen – Loev ayrılışı.*

TƏSADÜFİ PROSES ossilyar « **случайный процесс** осциллирующий; oscillating **random process** » – bax, *Evolyusionar spektral ifadə*.

TƏSADÜFİ PROSES öngörül « **случайный процесс** предсказуемый; predictable **random process** » – bax, *Öngörül təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES periodik korrelyarlanmış « **случайный процесс** периодически коррелированный; periodically correlated **random process** » – bax, *Periodik korrelyar təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES periodik paylanmış « **случайный процесс** периодически распределенный; periodically distributed **random process** » – bax, *Periodik paylanmış təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES pilləvari « **случайный процесс** ступенчатый; step **random process** » – bax, *Sıçrayışvari təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES; proqnozla(n)ma, ekstrapolyasiya « **случайный процесс;** прогнозирование, экстраполяция; forecasting/extrapolation of a **random process** » – $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* cari s anına qədər müşahidə qiymətləri əsasında gələcək $t > s$ zamanında onun qiymətlərinin qiymətləndirilməsi haqqında məsələdir. Proqnozlanma, adətən, ekstrapolyasiya statistik qiyməti $\hat{\zeta}(t)$, $t > s$ təsadüfi kəmiyyətinin təyin olunması kimi anlaşılır, bu statistik qiymətin kvadratik orta xətası $\mathbf{M}\left|\zeta(t) - \hat{\zeta}(t)\right|^2$, s anına qədər baxılan prosesin keçmişdəki qiymətləri üzrə alınmış digər statistik qiymətlərlə müqayisədə minimal olur [xətti statistik qiymətlər halında proqnozlama xətti proqnozlanma (proqnozlama) adlanır].

Stasionar təsadüfi ardıcıllığın xətti proqnozlanması məsələsi bu anlamda qoyulan məsələlərdən birincisi kimi həll olunmuşdur və aşağıdakı məsələ ilə analojidir: $-\pi \le \lambda \le \pi$ parçasında kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalar fəzası L^2-də $\varphi(\lambda) \in L^2$ funksiyasının $e^{i\lambda k}\varphi(\lambda)$, $k = 0, -1, -2, \ldots$ funksiyalarının doğurduğu fəzaya proyeksiyasını tapmaq tələb olunur; bu məsələ *stasionar təsadüfi proseslər* nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunmuşdur. $Y(t)$, $t > t_0$ bəyaz küyü və l tərtib xətti differensial L operatoru ilə verilən $L\zeta(t) = Y(t)$, $t > t_0$ sistemində yaranan T. p.-in proqnozlanması məsələsi tətbiqə aid misaldır; bu halda $t_0 \le t \le s$ anlarında qiymətlər üzrə bəyaz küydən asılı olmayan $\zeta^k(t_0)$, $k = 0, \ldots, l-1$ başlanğıc qiymətlərində ən yaxşı $\hat{\zeta}(t)$, $t > s$ proqnozu başlanğıc şərtləri $\hat{\zeta}^{(k)}(s) = \zeta^{(k)}(s)$, $k = 0, \ldots, l-1$ olan uyğun $L\hat{\zeta}(t) = 0$, $t > s$ tənliyi ilə verilə bilinər. Stoxastik differensial tənliklər sistemi üçün müşahidə olunmuş bəzi komponentlərin qiymətləri üzrə digər komponentlərin proqnozlanması məsələsi ekstrapolyasiyasının uyğun stoxastik tənliklərinə gətirir.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 215–55; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

TƏSADÜFİ PROSES proqressiv ölçülən « **случайный процесс** прогрессивно измеримый; progressively measurable **random process** » – bax, *Proqressiv ölçülən proses.*

TƏSADÜFİ PROSES Rozanov mənada harmoniklənən « **случайный процесс** гармонизуемый в смысле Розанова; Rozanov harmonizable **random process** » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* qeyri–stasionar təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES sayıcı « **случайный процесс** считающий; counting **random process** » – bax, *Nöqtəvi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES; sədd modeli « **случайный процесс;** пороговая модель; threshold model **random process** » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

TƏSADÜFİ PROSES sıçrayışvari « **случайный процесс** скачкообразный; jump **random process** » – bax, *Sıçrayışvari təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES; sıfırlar « **случайный процесс;** нули; zeros of a **random process** » – həqiqi *təsadüfi prosesin* seçimi funksiyasının sıfır qiymətini aldığı nöqtələrdir. T. p.-in sıfırlarının öyrənilməsi T. p.-in kəsilmələrinin tədqiqi ilə sıx bağlıdır. Tətbiqdə ən böyük maraq doğuran məsələlərdən ardıcıl sıfırlar arasında məsafələrin paylanması və verilmiş parçada sıfırların olmaması kimi məsələlərdir (bax, [1]). Bu məsələlərin dəqiq həllərini yalnız bəzi xüsusi hallar üçün almaq mümkündür, məs., riyazi gözləmələri sıfra bərabər, kovariasion funksiyaları

$$B(t) = e^{-|t|}$$

olan stasionar Qauss prosesləri (Qauss–Markov prosesi) üçün və

$$B(t) = (3/2)\, e^{-|t|/\sqrt{3}}\left(1 - (1/3)\, e^{-2|t|/\sqrt{3}}\right)$$

olan Yonq prosesi üçün. Verilmiş parçada sıfırların olmaması ehtimallarının müqayisəsi haqqında keyfiyyətli nəticələr müxtəlif proseslər üçün Slepian lemmasına əsaslanır.

Əmsalları asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, dərəcələri qeyri–məhdud artan cəbri və triqonometrik polinomların sıfırları üçün bir sıra asimptotik nəticələr alınmışdır (bax, məs., [2] – [5]).

Əd.: [1] Мирошин Р. Н., Пересечения кривых гауссовскими процессами, Л., 1981; [2] Dunnage J. E. A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1966, v. 16, № 1, p. 53–84; [3] Logan B. F. Shepp L. A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1968, v. 18, № 1, p. 29–35; [4] Farahmand K., «Ann. Probab.», 1986, v. 14, № 2, p. 702–709; [5] Farahmand K., «Stoch. Anal. and Appl.», 1987, v. 5, № 4, p. 379–86.

TƏSADÜFİ PROSES; sonluölçülü paylanmalar « **случайный процесс;** конечномерные распределения; finite dimensional distributions of a **random process** » – *təsadüfi prosesin* əsas xarakteristikalarıdır. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında $\zeta(t)$ T. p.-i parametrik T çoxluğu və faza fəzası $(S, \mathfrak{B})$ ilə verilmiş olsun. $(\zeta(t))_{t\in T}$ ailəsindən olan təsadüfi elementlərin ixtiyari sonlu toplusunun birgə paylanmaları toplusuna $\zeta(t)$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları toplusu deyilir.

Başqa sözlə, $\zeta(t)$ prosesinin sonluölçülü paylanmaları $(S^n, \mathfrak{B}^n)$ fəzalarında $(\zeta(t_1), \zeta(t_2), \ldots, \zeta(t_n))$ təsadüfi kəmiyyətlər toplularının ixtiyari $n = 1, 2, \ldots$ və $t_1, \ldots, t_n \in T$ qiymətlərində n – ölçülü paylanmalarını təyin edən ehtimal ölçülərini əmələ gətirir. Burada $(S^n, \mathfrak{B}^n)$, – $(S, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasının özü-özünə n – qat hasilidir. T. p.-in sonluölçülü paylanmaları toplusu T. p.-in əsas xarakteristikasıdır. T. p.-in sonluölçülü paylanmaları geniş mənada stoxastik ekvivalentlik anlayışı ilə əlaqədardır (bax, *Stoxastik ekvivalent təsadüfi proseslər*).

T. p.-in sonluölçülü paylanmalarının $(S^n, \mathfrak{B}^n)$ fəzalarında $n = 1, 2, \ldots$ və $t_1, \ldots, t_n \in T$-lərin bütün mümkün qiymətlərində

əvvəlcədən verilmiş ehtimal ölçüləri $\mu_{t_1}, \ldots, \mu_{t_n}(\cdot)$ ilə üst-üstə düşməsinin mümkünlüyü haqqında məsələ mühüm problemdir. Bu problem Kolmoqorovun sonluölçülü paylanmalar haqqında teoremində öz həllini tapmışdır.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статитике, 2 изд., М., 1985.

TƏSADÜFİ PROSES stasionar **« случайный процесс** стационарный; stationary **random process »** – bax, *Stasionar təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES stasionar artımlarlı **« случайный процесс** со стационарными приращениями; **random process** stationary increments **»** – diskret və ya kəsilməz t zamanlı elə $X(t)$ *təsadüfi prosesidir* ki, onun hər hansı qeyd olunmuş tərtib artımlarının statistik xarakteristikaları zaman üzrə dəyişmir (yəni $t \to t + a$ zaman yerinidəyişmələrinə invariantdırlar). Stasionar T. p.-lər halında olduğu kimi stasionar artımlarlı T. p.-lər iki tipə ayrılır: dar mənada stasionar artımlarlı T. p.-lər, yəni $t_1, \ldots, t_n$ nöqtələrində və $t_1 + a, \ldots, t_n + a$ nöqtələrində ixtiyari a qiymətində $X(t)$ prosesinin ixtiyari verilmiş tərtib artımlarının bütün sonluölçüsü ehtimal paylanmaları üst-üstə düşür və geniş mənada stasionar artımlarlı T. p.-lər, yəni t anında artımın orta qiyməti və t və $t + s$ anlarında artımların ikinci momentləri t -dən asılı olmur.

$t = 0, \pm 1, \ldots$ diskret zamanlı $X(t)$ prosesləri halında $X(t)$ prosesinə baxmaq əvəzinə yeni

$$\Delta^n X(t) = X(t) - C_n^1 X(t-1) + \ldots + (-1)^n C_n^n X(t-n)$$

T. p.-nə baxmaq olar, burada C_n^k – binomial əmsallardır. Əgər $X(t)$ n tərtib stasionar artımlarlı proses olarsa, onda $\Delta^n X(t)$ prosesi artıq adi mənada stasionar proses olacaqdır; buna görə də diskret zaman halında stasionar artımlarlı T. p.-lər nəzəriyyəsi daha xüsusi stasionar T. p.-lər nəzəriyyəsinə gətirilir. Lakin tətbiqi nöqteyi – nəzərdən stasionar artımlarlı və diskret zamanlı T. p. anlayışı əksər hallarda daha münasibdir, belə ki, praktikada bir çox təsadüf edilən açıq aşkar qeyri – stasionar olan $x(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ zaman sıralarına, onların hər hansı n tərtib artımları $\Delta^n x(t)$ sıralarına $\Delta^n X(t)$ stasionar T. p.-in realizasiyası kimi baxmaq olar. Məs., C. Boks (G. Box) və Q. Cenkins (G. Jenkins) (bax, [1]) göstərmişlər ki, bir çox praktiki məsələlərin həllində zaman sıralarını *avtoreqressiv – inteqrallanan sürüşən orta prosesin* (ARİSO – prosesin) realizasiyaları hesab etmək olar; bu proses stasionar artımlarlı və diskret zamanlı xüsusi bir T. p.-dir (bax, [2] – [4]).

Kəsilməz t zamanlı birinci tərtib stasionar artımlarlı T. p.-lərdən (dar mənada), məs., *Viner prosesi* və *Puasson prosesini* qeyd etmək olar; bu proseslərin hər ikisi birinci tərtib asılı olmayan stasionar artımlarlı proseslərin daha dar sinfinə də aiddir. Kəsilməz t zaman halında stasionar artımlarlı T. p.-lər nəzəriyyəsi artıq bilavasitə daha sadə stasionar artımlarlı T. p.-lər nəzəriyyəsinə gətirilə bilinmir. Birinci tərtib stasionar artımlarlı T. p.-lərin korrelyasion nəzəriyyəsi (yəni geniş mənada uyğun proseslərin nəzəriyyəsi) A. N. Kolmoqorov tərəfindən inkişaf etdirilmişdir (bax, [5], [6]); n – ixtiyari tam müsbət ədəd olduqda, n tərtib stasionar artımlarlı T. p.-lərin oxşar nəzəriyyəsinə [7] – [9]-da baxılmışdır. Stasionar artımlarlı T. p.-lərin korrelyasion nəzəriyyəsində belə proseslərin və onların 2-ci tərtib momentlərinin spektral ayrılışının çıxarılışı mərkəzi yer tutur. *Ümumiləşmiş təsadüfi proses* anlayışından istifadə stasionar artımlarlı T. p.-lər nəzəriyyəsini olduqca sadələşdirməyə imkan yaradır; belə ki, ümumiləşmiş T. p.-lər nəzəriyyəsi çərçivəsində ixtiyari $X(t)$ T. p.-nin bütün tərtibli törəmələri olduğundan (bunlar, ümumiyyətlə, ümumiləşmiş T. p.-lərdir), n tərtib stasionar artımlarlı T. p.-i n -ci tərtib törəməsi $X^n(t)$ stasionar T. p. olan (ümumiyyətlə, ümumiləşmiş) $X(t)$ T. p.-i kimi təyin etmək olar.

Əd.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов: прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974; [2] Nelson C. R., Applied time series analysis for managerial forecasting S. F., 1973; [3] Anderson O. D., Time series analysis and forecastting. The Box – Jenkins approach, L. – Boston, 1976; [4] Robinson E. A., Silvia M. T., Digital foundations of time series analysis, v. 1, The Box – Jenkins approach, S. F., 1979; [5] Колмогоров А. Н., Математика и механика, М., 1985, с. 269–73; [6] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Яглом А. М., «Матем. сб.», 1955, т. 37, № 1, с. 141–96; [8] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1955, т. 19, № 5, с. 319–44; [9] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139–51; [10] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

TƏSADÜFİ PROSES; statistik analiz **« случайный процесс;** статистический анализ; statistical analysis for **random process »** – bax, *Statistik məsələlər*(i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin.

TƏSADÜFİ PROSES; stoxastik ekvivalentlik **« случайный процесс;** стохастическая эквивалентность; stochastic equivalence of a **random process »** – bax, *Stoxastik ekvivalent təsadüfi proseslər.*

TƏSADÜFİ PROSES stoxastik kəsilməz **« случайный процесс** стохастически непрерывный; stochastically continuous **random process »** – bax, *Stoxastik kəsilməz təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES tamamilə ölçülən **« случайный процесс** вполне измеримый; well–measurable/optional **random process »** – bax, *Tamamilə ölçülən proses.*

TƏSADÜFİ PROSES; trayektoriyaların requlyarlığı **« случайный процесс;** регулярность траекторий; regularity of trajectoires/paths of a **random process »** – *təsadüfi prosesin* xassələrindən onun kəsilməzliyini (hamarlığını) xarakterizə edən bir xassədir. $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ – təsadüfi proses, T – hər hansı topoloji fəza olsun. Əgər bütün ω-lar üçün $\zeta(t, \omega)$ T. p.-nin bütün trayektoriyaları – $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ T -də kəsilməz olarsa, $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ T. p.-nə sanki yəqin kəsilməz proses deyilir. Separabel $\zeta(t, \omega)$ T. p.-nin $T = [0, T] \subseteq \mathbb{R}$ düzxəttində sanki yəqin kəsilməzlik şərti Kolmoqorov teoremində verilir: monoton azalan $g(h)$ funksiyası və $q(C, h)$, $h \geq 0$ mənfi olmayan funksiyasının varlığı və bu funksiyaların bəzi C və m üçün

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(2^{-n}T) < \infty$$

və

$$Q(m, C) = \sum_{n=m}^{\infty} 2^n q(C, 2^{-n}T) < \infty$$

münasibətlərini ödədiyi fərz olunur. Onda $\zeta(t, \omega)$ prosesi $[0, T]$-də sanki yəqin kəsilməz T. p.-dir. Bundan başqa, əgər hər hansı m üçün $C \to \infty$ olduqda $Q(m, C) \to 0$ olarsa, onda sanki yəqin elə müsbət $\gamma = \gamma(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sup_{\substack{t', t'' \in [0,T], \\ |t'-t''|<\varepsilon}} \left|\zeta(t', \omega) - \zeta(t'', \omega)\right| \le \gamma(\omega)\, Q(m, [\log_2 T/2\varepsilon])$$

münasibəti doğrudur. Qauss T. p.-ləri üçün bu teoremin şərtlərini olduqca zəiflətmək mümkündür. Məs., əgər stasionar Qauss T. p.-nin korrelyasion funksiyası $r(t)$, $p > 1$ olduqda $1 - r(h) = O\left(1 \Big/ \left|\ln|h|\right|^p\right)$, $h \to 0$ şərtini ödəyərsə, onda $\zeta(t, \omega)$ prosesi sanki yəqin kəsilməzdir, lakin Kolmoqorov teoreminin şərti yalnız $p > 3$ olduqda ödənilir.

Qauss T. p.-nin trayektoriyalarının requlyarlıq xassələri ödənildikdə 0 və ya 1 qanunu mühüm rol oynayır. $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ ixtiyari parametrik T çoxluğunda verilmiş Qauss T. p., K isə T-də bütün həqiqi funksiyaların fəzasının ixtiyari xətti altfəzası olsun. Onda $\zeta(t, \omega)$ prosesinin bütün trayektoriyaları ya sanki yəqin K altfəzasındandırlar və ya sanki yəqin K-ya aid deyildirlər. Məs., Qauss T. p.-nin trayektoriyaları sanki yəqin kəsilməz, yaxud sanki yəqin kəsiləndirlər; ya sanki yəqin differensiallanan və ya sanki yəqin differensiallanmayandırlar, ya sanki yəqin məhdud və ya sanki yəqin qeyri – məhduddurlar və s. Qauss T. p.-lərinin sanki yəqin kəsilməzliyini araşdırdıqda Sudakov – Dadli entropik yanaşması çox əlverişli olmuşdur; bu yanaşma 20-ci əsrin 30-cu illərində A. N. Kolmoqorovun qoyduğu: Qauss T. p.-nin sanki yəqin kəsilməzliyi üçün zəruri və kafi şərtlər (prosesin kovariasiyası terminlərində) haqqında suala cavab verməyə imkan yaratmışdır. $\mathbf{M}\zeta(t, \omega) \equiv 0$ olsun.

$$d(t, s) = (\mathbf{M}(\zeta(t, \omega) - \zeta(s, \omega))^2)^{1/2}$$

funksiyası T-də psevdometrikadır və T-də təbii topologiya adlandırılan topologiya təyin edir.

$B(t, \varepsilon) = \{ s : d(s, t) \le \varepsilon,\ s \in T \}$ – mərkəzi t-də, radiusu ε olan T-də d – kürə, $N(s, \varepsilon)$, $S \subseteq T$, – S-i örtən ε radiuslu d – kürələrinin minimal sayı, $H(S, \varepsilon) = \log_2 N(S, \varepsilon)$, – S çoxluğunun ε – e n t r o p i y a s ı (və ya K o l m o q o r o v e n t r o p i y a s ı) olsun.

S u d a k o v – D a d l i t e o r e m i. Əgər $\mathbf{M}\zeta(t) \equiv 0$ olarsa və elə $\delta > 0$ olarsa ki,

$$\psi(\delta) = \int_0^{\delta} \sqrt{H(S, x)\, dx} < \infty$$

şərti ödənilsin, onda $\zeta(t, \omega)$, $t \in S$ Qauss T. p. d topologiyasında sanki yəqin kəsilməzdir. Hətta sanki yəqin elə müsbət $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti vardır ki, $d(t, t') < \varepsilon(\omega)$ şərtini ödəyən bütün t, t' üçün

$$\left|\zeta(t, \omega) - \zeta(t', \omega)\right| \le 680 \int_0^{d(t,t')} \sqrt{\log_2 (1 + N(S, u)/u)}\, du$$

bərabərsizliyi doğrudur. Əgər T-də digər τ topologiyası olarsa (məs., $T \subset \mathbb{R}^n$ halında Evklid fəzasının topologiyası) və $\zeta(t, \omega)$ Qauss T. p.-nin kovariasion funksiyası bu topologiyada kəsilməz olarsa, onda $\psi(\delta)$ inteqralının sonlu olması $\zeta(t, \omega)$ Qauss T. p.-nin τ topologiyasında sanki yəqin kəsilməzliyini doğurur.

F e r n i k t e o r e m i. $\zeta(t, \omega)$ – riyazi gözləməsi sıfra bərabər və kovariasion funksiyası kəsilməz bircins Qauss meydanı (prosesi) olsun. Onda «ixtiyari $\delta > 0$ üçün $\psi(\delta) < \infty$ » şərti – $\zeta(t, \omega)$ Qauss T. p.-nin sanki yəqin kəsilməzliyi üçün zəruri şərtdir.

Qauss T. p. trayektoriyalarının kəsilmə nöqtələri çoxluğu öyrənilmişdir. δ, – T-də metrika olsun.

$$W_f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{\delta(t,s) \le \varepsilon \\ \delta(t,s') \le \varepsilon}} \left|f(s) - f(s')\right|$$

funksiyası həqiqi $f(t)$ funksiyasının δ – o s s i l y a s i y a s ı adlanır. Əgər (T, δ) metrik separabel fəza, $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$ elə Qauss T. p.-i olarsa ki, $d(t, s)$ funksiyası (T, δ)-da müntəzəm kəsilməz funksiya olsun, onda elə təsadüfi olmayan $\alpha(t)$, $t \in T$ funksiyası var ki, bütün t-lər üçün 1 ehtimalla $W_{\zeta(t,\omega)}(t) = \alpha(t)$ bərabərliyi doğrudur və ixtiyari t üçün

$$\underline{\lim_{s \to t}}\ \zeta(s, \omega) = \zeta(t, \omega) - \frac{1}{2}\alpha(t),$$

$$\overline{\lim_{s \to t}}\ \zeta(s, \omega) = \zeta(t, \omega) + \frac{1}{2}\alpha(t)$$

münasibətləri sanki yəqin ödənilir (İ t o – N i s i o t e o r e m i). Bu müddəadan Qauss stasionar T. p.-lərinin aşağıdakı gözəl bir xassəsi alınır.

B e l y a y e v – D o b r u ş i n a l t e r n a t i v i. Əgər $\alpha(t)$ funksiyası t-dən asılı deyildirsə, onda ya $\alpha(t) \equiv 0$ və ya $\alpha(t) \equiv \infty$. Yəni stasionar Qauss T. p.-nin (meydanının) bütün trayektoriyaları ya sanki yəqin kəsilməzdir, ya da ki, hər hansı çoxluqda sanki yəqin qeyri – məhduddurlar.

Orliç fəzasının elementləri olan qeyri – Qauss T. p.-nin [bu fəzaya subqauss və preqauss (rus. предгаусс) prosesləri adlandırılan proseslər daxildir, bax, [3]] araşdırılması üçün entropik yanaşma inkişaf etdirilir. Trayektoriyaların lokal xassələri qiymətləri Banax fəzasından olan təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının yığılmasının öyrənilməsi metodu ilə, daxiletmə teoremi metodu ilə araşdırılır (bax, [6]).

Əd.: [1] Ф е р н и к К., в сб.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, М., 1978, с. 63–132; [2] Д а д л и Р., Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения, М., 1978, с. 7–62; [3] К о з а ч е н к о Ю. В., в сб.: Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1984, в. 30, с. 92–107, в. 31, с. 44–50; [4] Б у л д ы г и н В. В., Сходимость случайных элементов в

топологических пространствах, К., 1980; [5] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [6] И б р а г и м о в И. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1983, т. 28, в. 2, с. 229–50.

TƏSADÜFİ PROSES u z l a ş m ı ş « **случайный процесс** с о г л а с о в а н н ы й; a d a p t e d **random process** » – bax, *Uzlaşmış təsadüfi proses.*

TƏSADÜFİ PROSES ü m u m i l ə ş m i ş « **случайный процесс** о б о б щ е н н ы й; g e n e r a l i z e d **random process** » – bax, *Ümumiləşmiş təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES v a h i d i « **случайный процесс** е д и н и ч н ы й; u n i t **random process** » – bax, *Binar təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES z a m a n ü z r ə b i r c i n s « **случайный процесс** о д н о р о д н ы й п о в р е м е н и; h o m o g e n e o u s i n t i m e **random process** » – bax, *Stasionar təsadüfi proses*.

TƏSADÜFİ PROSES z ə i f h a r m o n i k l ə n ə n « **случайный процесс** с л а б о г а р м о н и з у е м ы й; w e a k l y h a r m o n i z a b l e **random process** » – bax, *Böyük ədədlər qanunu* q e y r i – s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n.

TƏSADÜFİ SEÇMƏ q a y t a r m a m a q ş ə r t i l ə « **случайный выбор** б е з в о з в р а щ е н и я; **random sampling** w i t h o u t r e p l a c e m e n t » – bax, *Seçim* s t a t i s t i k.

TƏSADÜFİ ŞEYP « случайный шейп; random shape » – həndəsi obyektlərin formaları fəzasında (üçbucaqlıların, dördbucaqlıların, r – nöqtəlilərin və s.-nin) təsadüfi nöqtədir. $\mathbb{R}^n$-də r – nöqtəvi çoxluqların Evklid və affin şeypləri araşdırılmışdır. $\mathbb{R}^n$-ə aid nöqtələrin $(P_1, P_2, \dots, P_r)$ nizamlanmış ardıcıllıqlarına baxılır, $r \geq 2$; $P_1 = P_2 = \dots = P_r$ halı istisna olunur ($P_1 = P_2 = \dots = P_r$ olduqda Evklid şeypi təyin olunmamışdır). Əgər bir ardıcıllıq yerdəyişmə, fırlanma və dartılma nəticəsində digər ardıcıllığa çevrilirsə, bu iki ardıcıllıq eyni E v k l i d ş e y p i n ə malikdir. Ümumiliyi pozmadan, $P_1 = 0$ qəbul etmək olar, burada 0, – $\mathbb{R}^n$-də koordinat başlanğıcıdır. Evklid şeypləri fəzası

$$\Sigma_n^r = \{(\mathbb{R}^n)^{r-1} \setminus 0\} / W_n \times [0, \infty)$$

faktor fəzası ilə üst-üstə düşür, burada W_n, – $\mathbb{R}^n$-də fırlanmalar qrupu, $[0, \infty)$, – $\mathbb{R}^n$-də dartılmalar qrupudur.

$(P_1, P_2, \dots, P_r)$, – $\mathbb{R}^n$-ə aid nöqtələrin nizamlanmış ardıcıllıqları olsun, $r \geq n+1$ və $(P_1, P_2, \dots, P_r)$-dən olan $(n+1)$ sayda nöqtələrdən heç biri bir hipermüstəvidə yerləşmir. Əgər hər hansı bir ardıcıllığı affin çevirməsi vasitəsilə digər ardıcıllığa çevirmək olarsa, bu ardıcıllıqlar eyni a f f i n ş e y p i n ə malikdirlər.

$$F_n^r = \{(\mathbb{R}^n)^r \setminus Z\} / A_n \times [0, \infty)$$

faktor fəzası ilə üst-üstə düşür, burada Z – xaric olunmuş ardıcıllıqlar çoxluğu, A_n – affin çevirmələrinin xüsusi qrupudur (vahid modullu determinantla), $[0, \infty)$ – dartılmalar qrupudur. T. ş. fəzalarında ehtimal paylanmaları sırası inteqral həndəsəsinin adi ölçülərinin hasilindən uyğun qrupların Haar ölçülərinin ayrılması yolu ilə alınır.

M i s a l l a r. 1) dP – müstəvidə Lebeq ölçüsü olsun. Onda

$$dP_1\, dP_2\, dP_3 = dk\, h^3\, dh\, \mathbf{P}_1(d\sigma)$$

olur, burada dk – Evklid hərəkətləri qrupunun Haar ölçüsü, h, – $P_1P_2P_3$ üçbucaqlısının perimetri, $\mathbf{P}_1(d\sigma)$, – Σ_2^3 fəzasında ehtimaldır ($\sigma \in \Sigma_2^3$);

$$\mathbf{P}_1(d\sigma) = (\pi/21)^{-1} \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin\psi_3 (\sin\psi_1 + \sin\psi_2 + \sin\psi_3)^{-4}\, d\psi_1\, d\psi_2,$$

– P_1-in sıxlığıdır; ψ_1, ψ_2, ψ_3, – $P_1P_2P_3$ üçbucaqlısının bucaqlarıdır,

2) «sahə üzrə» aşağıdakı faktorizasiya doğrudur;

$$dP_1\, dP_2\, dP_3 = dk\, S\, dS\, \mu(d\sigma)$$

burada S, – $P_1P_2P_3$ üçbucaqlısının sahəsi, μ sıxlığı

$$\mu(d\sigma) = 2\, d\psi_1\, d\psi_2 / \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin\psi_3$$

olan, Σ_2^3 fəzasında ölçüdür; μ – ehtimal ölçüsü deyil, $\mu(\Sigma_2^3) = \infty$.

3) dg müstəvi düzxətlər fəzasında Evklid hərəkətlərinə nəzərən invariant ölçü olsun. Onda

$$dg_1\, dg_2\, dg_3 = dk\, m(dh)\, \mathbf{P}_2(d\sigma),$$

burada h – alınan üçbucağın perimetri, m, – $[0, \infty)$-da ölçü, $\mathbf{P}_2(d\sigma)$, – Σ_2^3 fəzasında ehtimaldır ($\sigma \in \Sigma_2^3$); $\mathbf{P}_2$-nin sıxlığı

$$\mathbf{P}_2(d\sigma) = c \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin\psi_3 (\sin\psi_1 + \sin\psi_2 + \sin\psi_3)^{-1} d\psi_1 d\psi_2$$

düsturu ilə ifadə olunur; c – sabitdir.

4) dP, – $\mathbb{R}^n$-də Lebeq ölçüsü olsun. Onda

$$\prod_{i=1}^{r} dP_i = c_{n,r}\, dA\, V^{r-2}\, dV\, \mathbf{P}_{n,r}(d\tau),$$

burada dA, – A_n-də Haar ölçüsü elementidir, V, – $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ çoxluğunun qabarıq örtüyünün minimal sahəsi, $\mathbf{P}_{n,r}$, – F_n^r-də ehtimal ölçüsü $(\tau \in F_n^r)$, τ – təpələri $\{P_1, \dots, P_r\}$-ə aid olan simplekslərin həcmlərinin $\{P_1, \dots, P_r\}$ çoxluğunun (minimal qabarıq örtüklü) həcminə nisbətləri ilə təsvir olunur, $c_{n,r}$ – sabitlərdir. Məs., $\mathbf{P}_{2,4}$, – F_2^4 fəzasında müntəzəm paylanmadır, F_2^4 isə tərəfi 1-ə bərabər üç kvadrat və tərəfləri 1-ə bərabər üç üçbucaqlının birləşməsidir.

T. ş.-lərə $\mathbb{R}^n$-də bircins Puasson nöqtəvi prosesindən seçilən «tipik» r – nöqtəlilərə baxıldığı zaman rast gəlinir.

Əd.: [1] K e n d a l l D. G., «Bull. London Math. Soc.», 1984, v. 16. p. 81–121.

TƏSADÜFİ TELEQRAF SİQNALI « случайный телеграфный сигнал; random telegraph signal » – $-\infty < t < \infty$ oxunda verilən, t_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ nöqtələrində qiymətlərini sıçrayışlarla dəyişən, ədəd oxunda bircins Puasson nöqtəvi təsadüfi proses doğuran (yəni ən sadə axın yaradan) *təsadüfi prosesdir*, t_k nöqtələri arasında növbə ilə $+a$ və $-a$ qiymətlərini (a müsbət ədəddir və əksər hallarda vahidə bərabər götürülür)

$$\mathbf{P}\{\zeta(0) = a\} = \mathbf{P}\{\zeta(0) = -a\} = 1/2$$

ehtimalı ilə alır. T. t. s. prosesinin riyazi gözləməsi sıfra bərabərdir (yəni t-nin bütün qiymətlərində $\mathbf{M}\zeta(t) = 0$) və korrelyasion funksiyası isə aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$B(\tau) = \mathbf{M}\zeta(t+\tau)\,\zeta(t) = a^2 \exp(-2\lambda|\tau|),$$

burada λ, – $\{t_k\}$ Puasson nöqtəvi prosesinin intensivliyidir (yəni vahid zaman müddətində t_k sıçrayış nöqtələri sayının orta qiymətidir); bu proses təsadüfi stasionar proses (Qauss prosesi olmayan), kəsilən Markov prosesi və binar təsadüfi prosesdir. T. t. s. modelini S. Rays ([1], [2]) təklif etmişdir. Bu proses təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur.

Əd.: [1] Rice S. O., «Bell System Techn. J.», 1944, v. 23, p. 282–332; 1945, v. 24, p. 46–156; [2] Райс С., в сб.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, пер. с англ., М., 1953, с. 88–238.

TƏSADÜFİ TƏKRARSIZ SEÇİM « случайная бесповторная выборка; random sample without replacement » – bax, *Seçim statistik*.

TƏSADÜFİ TƏNLİK cəbri **« случайное уравнение** алгебраическое; **random** algebraic **equation »** – bax, *Cəbri təsadüfi tənlik*.

TƏSADÜFİ TƏNLİK qrupda **« случайное уравнение** на группе; **random equation** in a group **»** – $a(x_1, \dots, x_n) = b$ şəklində tənlikdir, burada x_i, – X qrupunun elementləri, $a(\cdot)$, – X^n-in G qrupuna *təsadüfi inikasıdır* (müəyyənlik üçün fərz olunur ki, G additiv qrupdur) və $b \in G$. T. t.-lər olan məsələlər ehtimali avtomatlar nəzəriyyəsi və kodlanma nəzəriyyəsində əngələdayanıqlı kodların qurulmasında tətbiq ilə və hesablama proseslərində yaranır.

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = b_i, \quad 1 \le i \le N \qquad (*)$$

– T. t.-lər sistemi, $a_i(\cdot)$ – eyni ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi inikaslar olsun. (*) sistemi üçün əsas məsələlər aşağıdakılardır: X^n-dən olan həllər sayı ν_{Nn}-in və ya hər hansı $\mathfrak{X} \subset X^n$ çoxluğundan olan həllər sayı $\nu_{Nn}(\mathfrak{X})$-in paylanmasının araşdırılması və məs., sistemin həll olunan olması ehtimalının araşdırılması; X^n fəzasında həllərin qarşılıqlı vəziyyəti, məs., bu həllər arasında Hemminq məsafəsi, sistemin həlli alqoritmlərinin ehtimali xassələri (məs., orta mürəkkəblik); ν_{Nn} və təsadüfi əvəzləmələrin tsikllər sayı tipli kombinator xarakteristikaları arasında münasibətinin araşdırılması.

T. t.-lərin bir çox xassələri kombinator mülahizələrdən alınır. Məs., b_i asılı olmayan, G-nin eyniehtimallı elementləri olarsa, $(b_1, \dots, b_N)$ vektoru isə $(a_1(\cdot), \dots, a_N(\cdot))$-dən asılı olmazsa, onda

$$\mathbf{M}\nu_{Nn}(\mathfrak{X}) = |\mathfrak{X}| / |G|^N, \quad \mathbf{M}\,\nu_{Nn} = |X^n| / |G|^N,$$

bərabərlikləri doğrudur. Əgər $a_i(x_1, \dots, x_n)$ $x_1, \dots, x_n$, i-nin müxtəlif qiymətlərində küllüyyatca asılı olmayan və eyniehtimallı inikaslar olarsa, onda $(b_1, \dots, b_N)$ ixtiyari qeyd olunmuş vektor olduqda $\nu_{Nn}(\mathfrak{X})$ kəmiyyəti binomial qanunla paylanır. Lakin T. t. haqqında nəticələrin əksəriyyəti asimptotik xarakterlidir: seriyalar sxemində, adətən, $n, N \to \infty$.

$$\nu_{Nn}(\mathfrak{X}) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \xi_{Nn}(x)$$

ifadəsi geniş tətbiq olunur, burada $\xi_{Nn}(x)$ – T. t.-lər sisteminin $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vektoru ilə həllinin indikatorudur. Bu ifadənin köməyilə Puasson tipli limit paylanmalarını momentlər metodu ilə tapmaq olur.

Xətti təsadüfi tənliklər sistemi. $K = G$ sonlu meydan, $|G| = r$ onun elementlərinin sayı,

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$$

olsun; a_{ij}, – G meydanında eyniehtimallı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $b_i = 0$.

$$P_{Nn}(K) = \mathbf{P}\{\nu_{Nn} = r^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

ehtimalları müstəvinin dörddə bir hissəsində qeyri – bircins təsadüfi dolaşmanın xarakteristikaları kimi interpretasiya olunur və aşkar düsturla verilirlər; məs.,

$$P_{Nn}(0) = (1 - r^{-1})(1 - r^{-2}) \dots (1 - r^{-N}).$$

Eyniehtimallı asılı olmayan a_{ij}, b_k kəmiyyətləri halında

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad 1 \le i \le N$$

sisteminin uyuşanlığı ehtimalı $\sum_k r^{n-N-k} p_{Nn}(k)$ cəminə bərabərdir. Geniş bir sinif üçün, məs., $\mathbf{P}\{a_{ij} = z\} > \delta > 0$, $z \in G$ şərtini ödəyən asılı olmayan a_{ij}-lər verildiyi halda $n \to \infty$, $N - n - \text{const}$ olduqda bircins sistemlər üçün ν_{Nn}-in limit paylanması vardır və bu paylanma a_{ij}-lərin paylanmasına nəzərən invariantdır.

Bu halda xətti asılı olmayan $X^t = (x_1^t, \dots, x_n^t)$, $1 \le t \le k$ həllərinin ixtiyari toplusu üçün $(x_j^1, \dots, x_j^k) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ şərti ödənilən j-lərin tezliyi ehtimala görə r^{-k}-ya yığılır. İnvariantlığın bəzi xassələri qeyri – kommutativ sonlu halqalarda bircins və qeyri – bircins tənliklər üçün, həmçinin $\sum_j a_{ij}(x_j) = b_i$ şəklində T. t.-lər sistemləri üçün araşdırılmışdır, burada $a_{ij}(\cdot)$ – Abel qruplarının təsadüfi endomorfizmləridir.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Левитская А. А., Савчук М. Н., Избранные вопросы вероятностной комбинаторики, К., 1986.

TƏSADÜFİ VEKTOR « случайный вектор; random vector » – komponentləri təsadüfi kəmiyyətlər olan $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ vektorudur. $B \quad \mathbb{R}^n$ fəzasının Borel çoxluğu olduqda X_i təsadüfi kəmiyyətlərinin çoxölçülü paylanması, yəni

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(B) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \in B)$$

funksiyası təsadüfi vektorun ehtimal paylanması adlanır. Bu ehtimal paylanması

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{X_i \le x_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

çoxölçülü paylanma funksiyası ilə birqiymətli təyin olunur. $\mathbf{X}$ T. v.-nun mütləq kəsilməz paylanması $p_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ çoxölçülü paylanma sıxlığı funksiyası ilə

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(B) = \int\limits_B p_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

inteqralı vasitəsilə verilir.

$\mathbf{X}$ T. v.-nun diskret paylanması

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \in B) = \sum_{x(i) \in B} \mathbf{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}(i)\}$$

düsturu ilə hesabi sayda $\mathbf{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}(i)\}$ ehtimalları ilə təyin olunur.

TƏSADÜFİ VƏ PSEVDOTƏSADÜFİ ƏDƏDLƏR « случайные и псевдослучайные числа; random and pseudo – random numbers » – elə ξ_n ədədləridir ki (və ya α_n rəqəmləri), bunların ardıcıllığı bu və ya digər statistik qanunauyğunluqlara malikdir. Təsadüfi ədədlər (TƏ) hər hansı stoxastik qurğu ilə alınır, psevdotəsadüfi ədədlər (PƏ) arifmetik alqoritmlər vasitəsilə konstruksiya olunur. Bu halda, adətən (az və ya çox əsasla), belə qəbul edilir ki, alınan (və ya qurulan) ardıcıllıq tezlik xassələrinin kompleksinə malikdir ki, bunlar paylanma funksiyası $F(z)$ olan hər hansı X təsadüfi kəmiyyətinin asılı olmayan realizasiyalarının ardıcıllığı üçün «tipik» xassələrdir; bu halda $F(z)$ qanunu ilə paylanmış asılı olmayan T Ə-dən söhbət gedir. $\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = x, \; 0 \le x \le 1$ münasibəti ilə verilən $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış ξ_n T Ə-ləri (MPTƏ), həmçinin $\mathbf{P}\{\alpha_n = 0\} = \mathbf{P}\{\alpha_n = 1\} = 1/2$ qanunu ilə verilən bəraberehtimallı ikilik təsadüfi α_n işarələri (BİTİ) və riyazi gözləməsi 0, dispersiyası 1 olan normal qanunla paylanmış η_n normal T Ə ən çox istifadə olunan T Ə-dir. İxtiyari paylanma funksiyası olan T Ə və korrelyar T Ə-lər MPTƏ üzrə qurula bilinir (bax, *Modelləşdirilməsi*, *təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların*). MPTƏ-in ikilik yazılışının dərəcələri BİTİ-dir; əksinə, BİTİ-ni sonsuz ardıcıllıqların ardıcıllığına qruplaşdıraraq MPTƏ almaq olur.

T. və p. ə. statistik oyunlarda, riyazi statistikada, kriptoqrafiyada və kodlaşdırmada randomizasiya üçün, yəni yalnız «orta» mənada öncədən söylənə bilinən determinə olunmamış alqoritmlərin konkret realizasiyaları və s.-də istifadə olunur. Məs., əgər növbəti α_n üçün $\alpha_n = 0$ olursa, onda oyunçu birinci strategiyanı, $\alpha_n = 1$ olduqda isə o, ikinci strategiyanı seçir. Tətbiqi hesablamalarda geniş tətbiq olunan *Monte – Karlo metodu* tamamilə təsadüfi hadisə və ya proseslərin TƏ və PƏ vasitəsilə *statistik modelləşdirməsinə* əsaslanmışdır.

« $x_1, \ldots, x_n$ ədədlərinin verilən konkret ardıcıllığının tipik MPTƏ.-in asılı olmayan seçimi olduğu» haqqında hipotezin yoxlanılması üçün uzlaşma kriterisi istifadə olunur. Bir və ya bir neçə belə uzlaşma kriterilərinin ödənilməsindən belə nəticəyə gəlmək olur ki, bu ardıcıllığın təsadüfi ardıcıllıq kimi istifadəsi yalnız uyğun aspektlərdə mümkündür və bu halda universal zəmanət verilmir. T Ə. anlayışına ciddi məna yalnız alqoritmik ehtimal nəzəriyyəsi çərçivəsində vermək mümkündür (bax, [4]). Məs., $H = \mathbf{X}_{n=1}^{\infty} \{x_n : \quad 0 \le x_n \le 1\}$ – Lebeq ölçüsü olan vahidi hesabi ölçülü kub olsun $V\{\mathbf{X}_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\} = \Pi_n \left| b_n - a_n \right|$. H -da konstruktiv təsvir olunan ən böyük, ölçülən G çoxluğu vardır və $V(G) = 0$. Onda ixtiyari sonsuz $\{x_n\} \notin G$ ardıcıllığını tipik (yəni əvvəlcədən heç bir xüsusi xassələrə malik olmayan) ardıcıllıq hesab edərək, onu MPTƏ ardıcıllığı kimi qəbul etmək olar (bax, [5]). Bu ardıcıllıq avtomatik olaraq nəzəri – ədədi mənada tamamilə müntəzəm paylanmış ardıcıllıq olacaqdır (bax, [6]).

BİTİ ardıcıllığı anlayışı analoji qaydada, alqoritmik ehtimal nəzəriyyəsi mənasında, daxil oluna bilinər (bax, [5], [7]). Bu tərifdən, bu ardıcıllığın konstruktiv olmadığı nəticəsi alınır və bu anlamda təsadüfi ardıcıllıqlara yaxın ardıcıllıqların qurulması olduqca çətin olur. Buna görə də, praktikada daha sadə qurulmuş alqoritmlərdən istifadə olunur (bax, [8]) və bunların statistik «keyfiyyətləri» az sayda testlərlə yoxlanılır (bax, [9]).

TƏ və təsadüfi işarələr cədvəlləri də tərtib olunmuşdur. Lakin bunların bütün ağlabatan statistik testlərə cavab verdiyinə zəmanət vermək olmaz.

Əd.: [1] Ермаков С. М., Методы Монте – Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [2] Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973; [3] Ченцов Н. Н., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 632–43; [4] Колмогоров А. Н., Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987, с. 204–13; [5] Martin-Lof P., «Information and Control», 1966, v. 9, p. 602–19; [6] Коробов Н. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 215–38; [7] Шень А., «Семиотика и информатика», 1982, в. 18, с. 14–42; [8] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 2, М., 1977; [9] Blum M., Micali S., «SIAM J. Computing», 1984, v. 13, p. 850–64.

Hal-hazırda TƏ-in qurulmasının yeni metodları intensiv surətdə işlənilir, bu metodlarla böyük uzunluqlu periodu olan ardıcıllıqlar almaq olur və ya bunlar çoxsaylı paralel işləyən prosessorlarda TƏ-lərin praktiki olaraq bir-birindən asılı olmayan parçalarının realizasiyalarını almağa; $[0, 1]$ parçasında müntəzəm paylanmış TƏ-in daha mürəkkəb strukturlu psevdotəsadüfi obyektlərə: çoxobrazlıda təsadüfi nöqtələrə, təsadüfi kombinator və ya həndəsi obyektlərə çevrilməsi metodlarını almağa imkan yaradır.

TƏ *vergəclərinin* müxtəlif konkret hallarının statistik xassələri tədqiq olunur və ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi məntiqin qovuşmasında yaranan prinsipial məsələlərdən – determinik ardıcıllıq nə dərəcədə təsadüfi ardıcıllığı imitasiya edə bilər, kimi məsələlər də araşdırılır.

Əd.: [10] Devroye L., Non-uniform random variate generation, B., 1986; [11] Fishman G. S., Monte-Carlo: concepts, algorithms

and applications, B., 1996; [12] L u b y M., Pseudorandomness and cryptgraphic applications, Princeton, 1966; [13] N i e d e r r e i t e r H., Random number generation and quasi - Monte – Carlo methods, Philadelphia, 1992.

TƏSADÜFİ YERDƏYİŞMƏ / PERMUTASİON « случайная перестановка; random permutation » n t ə r t i b, – n tərtib bütün yerdəyişmələr çoxluğu S_n-də qiymətlər alan *təsadüfi elementdir.* T. y.-nin ehtimal paylanması kimi, adətən, S_n-də eyniehtimallı paylanma seçilir, yəni hər bir yerdəyişməyə $(n!)^{-1}$ ehtimalı qarşı qoyulur. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ – T. y., $X_n = X_n(\sigma)$, – $i = 1, 2, \dots, n-1$ indekslərinin sayı və $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ (σ-da artımların sayı), $Y_n = Y_n(\sigma)$, – $\sigma_i > \sigma_j$, $i < j$ şərtini ödəyən (i, j) indekslər cütlərinin sayı (σ-da inversiyaların sayı) olsun.

Əgər S_n-in bütün yerdəyişmələri bərabərehtimallı olarsa, onda

$$\mathbf{M} X_n = n/2 - 1, \quad \mathbf{D} X_n = n/12,$$

$$\mathbf{M} Y_n = n(n-1)/4, \ \mathbf{D} Y_n = (2n^3 + 3n^2 - 5n)/72$$

olur və $n \to \infty$ olduqda,

$$X_n^* = (X_n - \mathbf{M} X_n)/\sqrt{\mathbf{D} X_n},$$

$$Y_n^* = (Y_n - \mathbf{M} Y_n)/\sqrt{\mathbf{D} Y_n}$$

təsadüfi kəmiyyətlərinin (mərkəzlənmiş, normalanmış) paylanmaları $(0, 1)$ parametrlərli normal paylanmaya yığılır. X_n və Y_n təsadüfi kəmiyyətləri psevdotəsadüfi ardıcıllıqların keyfiyyətinin statistik analizində və həmçinin növlərəayırma alqoritmlərinin bəzilərinin ehtimali analizində təbii olaraq yaranır.

n – tərtib σ y e r d ə y i ş m ə s i n i n r a n q v e k t o r u n – ölçülü $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ vektoruna deyilir, bu vektorun koordinatları aşağıdakı kimi təyin olunur: əgər $j = \sigma_m$ olarsa, onda R_j elə $i \le m$ şərtini ödəyən i-lərin sayına bərabərdir ki, $\sigma_i \ge j$ olsun. S_n-də eyniehtimallı paylanma təyin olunduğu halda, T. y.-nin ranq vektorunun əsas xassələri aşağıdakılardır:

$$\mathbf{P}\{R_i = k\} = 1/n, \ \mathbf{P}\{R_i = k, \ R_j = t\} = 1/n(n-1), \ i \ne j,$$

$$k \ne t, \ \mathbf{M} R_i = (n+1)/2, \ \mathbf{D} R_i = (n^2 - 1)/12, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

T. y.-nin ranq vektoru statistik ranq kriterilərinin qurulması üçün əsasdır.

Bax, *Təsadüfi əvəzetmə.*

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] К н у т Д., Исскуство программирования для ЭВМ, пер. с англ.. т. 1–3, М., 1976–78; [3] С а ч к о в В. Н., Вероятностные методы в комбинаторном анализе, М., 1978; [4] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1984.

TƏSADÜFİ YERLƏŞMƏ « случайное размещение; random allocation » – N sayda müxtəlif oyuqda n sayda müxtəlif hissəciyin (kürəciyin) təsadüfi yerləşməsinin ehtimali sxemidir. Ən sadə, eyniehtimallı yerləşmələr sxemində, n hissəcikdən hər biri digərlərindən asılı olmadan ixtiyari qeyd olunmuş oyuqda $1/N$ ehtimalı ilə yerləşə bilər. $\mu_r = \mu_r(n, N)$ belə yerləşmələrdən sonra, hər birində yalnız r sayda hissəcik olan oyuqların sayı olsun və fərz olunur ki, $0 \le r_1 < r_2 < \dots < r_s$, $r_1 + r_2 + \dots + r_s = r$,

$$\Phi(z; x_1, \dots, x_s) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_s = 0}^{\infty} \frac{(Nz)^n}{n!} \mathbf{P}\{\mu_{r_1} = k_1, \dots, \mu_{r_s} = k_s\} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s}$$

bərabərliyi ilə təyin olunan doğuran funksiya aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\Phi(z; x_1, \dots, x_s) =$$

$$= \left[e^z + \frac{z^{r_1}}{r_1!}(x_1 - 1) + \dots + \frac{z^{r_s}}{r_s!}(x_s - 1) \right]^N. \qquad (1)$$

(1) funksiyasından istifadə edərək, μ_r-lərin momentlərini hesablamaq və μ_r-in paylanmasının $n, N \to \infty$ olduqda asimptotik xassələrini öyrənmək olur. Bu asimptotik xassələr bir oyuqda yerləşən hissəciklərin sayının orta qiyməti $\alpha = n/N$ parametrindən olduqca asılı olaraq təyin olunurlar. $n, N \to \infty$ və $\alpha = O(N)$ olduqda, r və t-nin qeyd olunmuş qiymətlərində

$$\mathbf{M}\mu_r \sim N p_r(\alpha), \ \operatorname{cov}(\mu_r, \mu_t) \sim N \sigma_{rt}(\alpha) \qquad (2)$$

münasibətləri doğrudur, burada $p_r(\alpha) = (\alpha^r/r!)e^{-\alpha}$ və

$$\sigma_{rt}(\alpha) = p_r(\alpha)\left[\delta_{rt} - p_t(\alpha) - p_t(\alpha) \frac{(\alpha - r)(\alpha - t)}{\alpha} \right],$$

δ_{rt} – Kroneker simvoludur.

μ_r-in asimptotikası müxtəlif olan beş müxtəlif oblast ayırmaq mümkündür. $\alpha = n/N = 1$ olan $n, N \to \infty$ dəyişmə oblastına m ə r k ə z i o b l a s t deyilir. $\alpha \to \infty$, $\mathbf{M}\mu_r \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ şərtləri ödənilən $n, N \to \infty$ oblastı s a ğ r – o b l a s t adlanır. $\alpha \to \infty$, $\mathbf{M}\mu_r \to \infty$ ödənilən $n, N \to \infty$ dəyişmə oblastına s a ğ a r a l ı q r – o b l a s t ı deyilir. $r \ge 2$ olduqda $\alpha \to 0$, $\mathbf{M}\mu_r \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$ ödənilən $n, N \to \infty$ dəyişmə oblastı s o l r – o b l a s t adlanır. $\alpha \to 0$, $\mathbf{M}\mu_r \to \infty$ münasibətləri ödənilən oblasta s o l a r a l ı q r – o b l a s t deyilir. Sol və sağ aralıq oblastlar $r = 0, 1$ üçün uyğun 2 – oblastlarla üst-üstə düşən oblastlar sayılır.

Yerləşmənin eyniehtimallı sxemində sağ r – oblastda μ_r asimptotik olaraq, Puasson paylanmasına malik olur. Sol r – oblastda μ_r, $r \ge 2$ olduqda, limitdə Puasson paylanması ilə paylanır; $r = 0$ və $r = 1$ olduqda $\mu_0 - N + n$ və $(n - \mu_1)/2$ limitdə Puasson paylanmaları ilə paylanır. Sol və sağ aralıq r – oblastlarda, μ_r asimptotik olaraq normal qanunla paylanır. Mərkəzi oblastda $\mu_{r_1}, \dots, \mu_{r_s}$ üçün çoxölçülü mərkəzi teoremi isbat olunmuşdur; limit normal paylanmanın parametrləri (2) asimptotik düsturları ilə təyin olunur.

Əgər hissəciklər bir-birindən asılı olmayaraq yerləşirlərsə və hissəciklərdən hər birinin j-ci oyuğa düşmə ehtimalı a_j-yə

bərabərdirsə və $\sum_{j=1}^{N} a_j = 1$ olarsa, onda *hissəciklərin polinomial paylanması* alınır.

Hissəciklərin qruplarla yerləşməsi sxemində fərz olunur ki, hissəciklər hər oyuqda m sayda olmaqla, qruplarla yerləşir və bir komplektin hissəciklərindən oyuqlarda yalnız biri yerləşə bilər, qrupların yerləşmələri isə asılı deyildirlər.

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976.

TƏSADÜFİ YÜK « случайный заряд; random charge » – bax, *Təsadüfi ölçü.*

***TƏSADÜFİ ZAMAN ANI « случайное время; random time »** – kəsilməz zaman ərzində aparılan stoxastik eksperimentlərdə müşahidə oluna bilinən hər hansı A hadisəsinin ilk dəfə baş verdiyi təsadüfi andır. T. z. a. bəzən «gələcəkdən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyət», «Markov anı» və ya «dayanma anı» kimi də adlandırılır. Formal tərif aşağıdakı kimi verilir. T – həqiqi ədədlər çoxluğu – stoxastik eksperimentlərin aparıldığı anlar çoxluğu olsun. $t_1 < t_2$ olduqda, verilmiş $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasının $\mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2}$ şərtini ödəyən $\{\mathscr{F}_t;\ t \in T\}$ monoton azalmayan σ – cəbrlər ailəsinə σ – cəbrlər axını (eksperimentlər axını) deyilir.

Bu halda $\mathscr{F}_t$, t anı da daxil olmaqla t müddəti ərzində aparılan eksperimentlərdə müşahidə olunan bütün hadisələrin sinfi kimi interpretasiya olunur. İxtiyari $t \in T$ qiymətlərində $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ şərtini ödəyən, Ω fəzasının hər hansı Ω_t altçoxluğunda təyin olunmuş, qiymətləri T -dən olan $\tau = f(\omega)$ funksiyası $\{\mathscr{F}_t;\ t \in T\}$ σ – cəbrlər axınında təsadüfi zaman anı adlanır.

$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ şərti aşağıdakı kimi anlaşılır: τ anı t anına qədər baş vermişdirsə, bu an haqqında $s \in T$, $s \le t$ şərtini ödəyən s anlarında eksperimentlərin nəticələrini müşahidə edərək mülahizə yürütmək olar. Ω_τ çoxluğu τ T. z. a.-nın T zaman müddəti ərzində baş verməsi hadisəsinə müvafiq çoxluqdur. Aydındır ki, Ω_τ (Ω -nın altçoxluğu) $\mathscr{F}$ – ölçüləndir. Əgər T -də maksimal $t_{\max}$ qiyməti varsa, onda $\Omega_\tau = \{\tau \le t_{\max}\} \in \mathscr{F}_{t_{\max}}$. Əgər T -də maksimal qiymət yoxdursa və $t_k \uparrow \sup\{t,\ t \in T\}$ olarsa, onda $\Omega_\tau = \bigcup_k \{\tau \le t_k\}$.

Əgər $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ şərti $\{\tau > t\} \in \mathscr{F}_t$ münasibətinin ödənilməsi ilə eynigüclüdür və ya T hesabi çoxluq olarsa, ixtiyari $t \in T$ üçün $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$ şərti ilə eynigüclüdür.

T. z. a. τ ilə, τ anı da daxil olmaqla τ anına qədər aparılan eksperimentlərin nəticələrini müşahidə edərək, bu eksperimentlərdə baş verən hadisələrin realizasiyaları haqqında mülahizə yürütmək olar və bu hadisələrin minimal σ – cəbrini əlaqələndirmək olar. İxtiyari $t \in T$ qiymətlərində $B \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$ münasibəti ilə təyin olunan B hadisələrinin sinfi $\mathscr{F}_\tau$ olsun, $(B \in \mathscr{F})$. Aydındır ki, $\mathscr{F}_\tau$ σ – cəbrdir, bu σ – cəbr T. z. a. τ -nun doğurduğu σ – cəbrdir. τ $\mathscr{F}_\tau$ – ölçülən təsadüfi kəmiyyətdir.

Misallar. 1) $\tau = t_0$, $t_0 \in T$ olsun. Onda $\{\tau \le t\}$ ya $\varnothing$ və ya Ω olur, odur ki, $\tau = t_0$ T. z. a.-nın xüsusi halıdır. Daha sonra $B \cap \{\tau \le t\}$ ya $\varnothing$ -ya və ya B -yə bərabərdir, odur ki, $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_{\tau 0}$, yəni T. z. a.-nın doğurduğu σ – cəbrin daxil olunmuş işarəsi, $t = t_0$ xüsusi halında qeyd olunmuş əvvəlki işarələmələrlə uzlaşır. 2) K – həqiqi ədədlər oxunda Borel çoxluğu və $\{\sup x : x \in K\} \le t$ olsun. Onda $\{\tau \in K\}$ hadisəsi $\mathscr{F}_t$ – ölçülən dür; və s. (bax, [1]).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов., т. 1, М., 1971.

TƏSDİQEDİCİ ANALİZİ, VERİLƏNLƏRİN « подтверждающий анализ данных; confirmatory data analysis » – bax, *Tədqiqi statistik analiz.*

TƏSİR FUNKSİYASI empirik **« влияния функция** эмпирическая; empirical **influence function »** – bax, *Empirik təsir funksiyası.*

TƏSİRSONRASI « последействие; after – effect » – bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi.*

TƏSNİFEDİCİ ƏLAMƏT « классификационный признак; nominal test » – bax, *Çoxölçülü statistik analiz.*

TƏSNİFEDİCİ DƏYİŞƏN « классификационная переменная; nominal variable » – bax, *Prediktant*.

TİPLƏRİN YIĞILMASI « типов сходимость; convergence of types » – paylanma funksiyalarının ekvivalentlik sinifləri ardıcıllığının *zəif yığılmasıdır*. Əgər T_n hər hansı paylanmalar tipləri ardıcıllığı olarsa və elə paylanma funksiyaları ardıcıllığı $F_n \in T_n$ olarsa ki, F_n ardıcıllığı $F \in T$ ardıcıllığına zəif yığılmış olsun, onda T_n *paylanmalar tipləri ardıcıllığı* T *tipinə yığılır*, deyilir. Tiplərin ixtiyari ardıcıllığı cırlaşmış tipə (bütün cırlaşmış qanunları və yalnız bunları özündə saxlayan tipə) yığılır. Tiplər ardıcıllığının heç biri birdən artıq cırlaşmayan tipə yığıla bilməz (bax, [1]).

Əd.: [1] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938.

TOQQUŞMALAR METODU qiymətləndirilmənin **« столкновений метод** оценки; **collisions method** of evalution **»** – köçürülən hissəciklərin faza trayektoriyaları $x(t)$ -lərin (ədədi modelləşdirilən), kəsilmə nöqtələrində stasionar xətti $Af = g$ *kinetik köçürtmə tənliyinin* ψ -nin qiymətləri üzrə həlli f -in funksionallarının, yəni

$$(f, \psi) = \int f(x)\psi(x)dx$$

funksionallarının qiymətləndirilməsi metodudur. Əgər $\lambda(x)$ hissəciklərin mühitlə toqquşmaları tezliyi, t_n hissəciklərin trayektoriyalarının təsadüfi sıçrayış anlarıdırsa, onda (f, ψ) başlanğıc vəziyyətləri $x(0)$ -ların sıxlığı $g(x)$ olan, köçürtmə Markov prosesinin trayektoriyaları $x(t)$ -lərin fəzası üzrə

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(x(t_n - 0)) / \lambda(x(t_n - 0))$$

təsadüfi kəmiyyətinin orta qiymətinə bərabərdir. Şaxələnən proses halı üçün oxşar ifadə yazmaq olar. T. m.-nun müxtəlif təkmilləşdirilmiş variantları haqqında bax, [2].

Əd.: [1] Спанье Дж., Гелбард Э., Метод Монте – Карло и задачи переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1972; [2] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982.

TOLERANT İNTERVAL « толерантный интервал; tolerance interval » – təsadüfi sərhədlərli intervaldır; bu interval seçim üzrə elə qurulur ki, o, əvvəlcədən verilmiş ehtimalla seçimin elementləri tabe olduğu kəsilməz paylanmanın ehtimal kütləsinin verilmiş payından (hissəsindən) az olmayan kütləsini daxilinə alır. $X=(X_1,\ \dots,\ X_n)$ – elementləri asılı olmayan, eyni kəsilməz paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlər olan seçim, $F(x),\ -\ X_i$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası olsun. $F(x)=F(X_1<x)$ naməlumdur. Fərz olunur ki, $T_1=T_1(X)$ və $T_2=T_2(X)$ elə statistikalardır ki, verilən p ehtimalı üçün $(0<p<1)$ $\{F(T_2)-F(T_1)\geq p\}$ hadisəsinin ehtimalı əvvəlcədən verilmiş γ-ya bərabərdir. Bu halda (T_1, T_2) təsadüfi intervalı $F(x)$ paylanma funksiyası üçün γ – tolerant interval, T_1 və T_2 statistikaları tolerant sərhədlər adlanır.

Əd.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

TOLERANT SƏRHƏDLƏR « толерантные границы; tolerance limits / bounds » – bax, *Tolerant interval*.

TOLERANTLIQ « толерантность; tolerance » – bax, *Binar münasibətlər statistikası*.

TOPLAM KOHERENTLİK « множественная когерентность; multiple koherence » – bax, *Koherentlik.*

TOPLAM KORRELYASİYA ƏMSALI « множественный коэффициент корреляции; multiple correlation coefficient » – bir təsadüfi kəmiyyət ilə təsadüfi kəmiyyətlərin hər hansı toplusu arasında xətti asılılıq ölçüsüdür. Daha dəqiq, $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ – qiymətləri $\mathbb{R}^k$-dan olan təsadüfi vektor olarsa, ξ_1 və $\xi_2, \dots, \xi_k$ arasında T. k. ə. ξ_1 və ξ_1-in $\xi_2, \dots, \xi_k$ üzrə ən yaxşı xətti yaxınlaşması arasında adi *korrelyasiya əmsalı* kimi, yəni ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin $\xi_2, \dots, \xi_k$ üzrə $\mathbf{M}(\xi_1 \mid \xi_2, \dots, \xi_k)$ *reqressiyası* ilə təyin olunur. T. k. ə. belə bir xassəyə malikdir ki, əgər $\mathbf{M}\xi_1 = \dots = \mathbf{M}\xi_k = 0$ olduqda

$$\xi_1^* = \beta_2 \xi_2 + \dots + \beta_k \xi_k$$

ξ_1-in $\xi_2,\dots,\xi_k$ üzrə reqressiyasıdırsa, onda $\xi_2, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin bütün xətti kombinasiyaları arasında ξ_1^* kəmiyyəti ilə ξ_1 arasında korrelyasiya ən böyük olur; T. k. ə. bu mənada *kanonik korrelyasiya əmsalının* xüsusi halıdır. $k=2$ olduqda T. k. ə. ξ_1 və ξ_1 arasında korrelyasiya əmsalı ρ_{12}-yə bərabərdir. ξ_1 və $\xi_2, \dots, \xi_k$ arasında T. k. ə. $\rho_{1\cdot(2\dots k)}$ ilə işarə olunur və $\mathbf{P} = \| p_{ij} \|,\ i,j=1,\dots,k$ korrelyasion matrisinin elementləri ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\rho^2_{1\cdot(2\dots k)} = 1 - |\mathbf{P}| / \mathbf{P}_{11},$$

burada $|\mathbf{P}|$, – $\mathbf{P}$ matrisinin determinantı, $\mathbf{P}_{11}$ isə $\rho_{11}=1$ elementinin cəbri tamamlayıcısıdır; $0 \leq \rho_{1\cdot(2\dots k)} \leq 1$. Əgər $\rho_{1\cdot(2\dots k)}=1$ olarsa, onda ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti 1 ehtimalla $\xi_2, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin hər hansı xətti kombinasiyasına bərabərdir, yəni $\xi_1, \dots, \xi_k$ təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması $\mathbb{R}^k$ fəzasının hər hansı hiperfəzasında topalanmışdır. Digər tərəfdən, $\rho_{1\cdot(2\dots k)}=0$ şərti, yalnız və yalnız, o halda doğrudur ki, $\rho_{12}=\dots=\rho_{1k}=0$ şərti ödənilsin, yəni ξ_1 təsadüfi kəmiyyəti $\xi_2, \dots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərindən heç biri ilə korrelyar olmasın. T. k. ə.-nı hesablamaq üçün

$$\rho^2_{1\cdot(2\dots k)} = 1 - \sigma^2_{1\cdot(2\dots k)} / \sigma_1^2$$

düsturundan da istifadə etmək olar, burada σ_1^2, – ξ_1-in dispersiyası,

$$\sigma^2_{1\cdot(2\dots k)} = \mathbf{M}(\xi_1 - \mathbf{M}(\xi_1 \mid \xi_2, \dots, \xi_k))^2$$

– ξ_1-in reqressiyaya nəzərən dispersiyasıdır. T. k. ə.-nın seçimi analoqu

$$\hat{\rho}_{1\cdot(2\dots k)} = \sqrt{1 - s^2_{1\cdot(2\dots k)} / s_1^2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada $s^2_{1\cdot(2\dots k)}$ və s_1^2, – n həcmli seçim üçün $\sigma^2_{1\cdot(2\dots k)}$ və σ_1^2 dispersiyalarının statistik qiymətləridir. Təsadüfi kəmiyyətlərin arasında asılılıq olmaması haqqında hipotezi yoxlamaq üçün $\hat{\rho}_{1\cdot(2\dots k)}$ seçimi toplam korrelyasiya əmsallarının seçimi paylanmalarından istifadə olunur. Seçim çoxölçülü normal paylanmalı ümumi çoxluqdan aparılmışdırsa, $\rho_{1\cdot(2\dots k)}=0$ olarsa, $\hat{\rho}^2_{1\cdot(2\dots k)}$ kəmiyyəti $((k-1)/2,\ (n-k)/2)$ parametrlərli beta – paylanma qanununa tabedir; əgər $\rho_{1\cdot(2\dots k)} \neq 0$ olarsa, onda $n\,\hat{\rho}^2_{1\cdot(2\dots k)}$ kəmiyyəti $n \to \infty$ olduqda, limitdə, sərbəstlik dərəcəsi sayı $(k-1)$-ə bərabər, qeyri – mərkəzilik parametri isə $n\,\tilde{\rho}^2_{1\cdot(2\dots k)}$ olan qeyri – mərkəzi xi – kvadrat paylanması ilə paylanır.

Əd.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

TOPLAM MÜQAYİSƏLƏR « множественные сравнения; multiple comparisons » – bir sıra hadisələrin (məs., 95% -lik etibarlı ikiintervalla iki ümumi çoxluq üçün orta qiymətlərin eyni zamanda daxilə alınması hadisələrinin) idarə olunması üçün və bir qədər geniş – hipotezlərin yoxlanılması, etibarlı intervalların qurulması kimi birgə (eyni zamanda) nəticələrin ödənilməsi üçün statistik metodlar qrupudur.

Birfaktorlu və ikifaktorlu dispersion analiz sxemlərində həm Qauss, həm də qeyri – parametrik modellərdə qruplar üçün orta qiymətlər (verilənlər üzərində işlənilmələrin effektləri) haqqında birgə nəticələr üçün T. m. yaxşı araşdırılmışdır.

T. m. qoşmalıq cədvəllərinin kateqoriyalanmış verilənlərini, reqression analizi, çoxfaktorlu dispersion analizi əhatə edir.

Əd.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1980; [2] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер с англ., М., 1983; [3] Miller R., в кн.:

Encyclopedia of statistical sciences, v. 5, N. Y., 1985, p. 679–89; [5] Miller R., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1977, v. 72, p. 779–88.

TOPLAM RANQ KORRELYASİYA ƏMSALI « множественный коэффициент ранговой корреляции; multiple rank correlation coefficient » – bax, *Ranq korrelyasiyası.*

TOPLAM REQRESSİYA « множественная регрессия; multiple regression » – çoxölçülü naməlum parametrli *reqression eksperimentdir.*

TOPLAYICILIQ(ğı) limit teoreminin **« собирательность** предельной теоремы; **collectness** of a limit theorem **»** – Yu. V. Linnik tərəfindən [1]-də təklif olunmuş termindir. Hər bir *limit teoremində* ilkin paylanmaların hər hansı $\Gamma = \{\mathbf{Q}\}$ çoxluğu iştirak edir və bunlar sonra $\mathbf{P}_t$ paylanmalarının ailəsinə çevrilir. Limit teoreminin məğzi t parametri hər hansı kritik θ qiymətinə yaxınlaşdıqda $\mathbf{P}_t$ -nin müvafiq $\mathbf{Q}$ paylanması ilə asimptotik approksimasiyasını qurmaqdan ibarətdir. Limit teoreminin T. geniş mənada (Yu. V. Linnikin nəzərdə tutduğu ilə müqayisədə) belə anlaşılır ki, $\mathbf{Q}$ paylanması Γ-də verilmiş sonlu sayda $q_1(t), \dots, q_m(t)$ funksionalları ilə birqiymətli təyin olunur.

Toplayıcı limit teoreminə misal – hər bir $n \geq 1$ qiymətində riyazi gözləmələri sonlu $a_n = \mathbf{M}S_n$ və dispersiyası $\sigma_n^2 = \mathbf{D}S_n$ olan, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmləri $S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}$ üçün *mərkəzi limit teoremidir*, belə ki,

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Phi(x; a_n, \sigma_n) + \varepsilon_n(x),$$

burada $\Phi(x; a_n, \sigma_n)$ – riyazi gözləməsi a_n olan, dispersiyası σ_n^2 -na bərabər normal qanunun paylanma funksiyasıdır, $n \to \infty$ olduqda $\varepsilon_n(x) \to 0$ x üzrə müntəzəm ödənilir. Yu. V. Linnikin [1]-də baxdığı məsələdə T. ixtiyari x -lər üçün deyil, yalnız n -lə birgə artan hər hansı intervala aid nöqtələr üçün olur. Elə limit teoremləri mövcuddur ki, bunlar hətta dar mənada belə toplayıcı deyildirlər. Məs., eyni tip hissəciklərli bircins *şaxələnən proseslər* üçün limit teoremləri belələrindəndir (bax, [2]). İsbat olunmuşdur ki, kritikaltı və kritiküstü hallarda bir hissəciyin çevrilmələrinin ilkin paylanması uyğun limit paylanmasına görə həmişə bərpa olunur.

Ədd.: [1] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 2, с. 261–62; [2] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 2, с. 256–65.

S – TOPOLOGİYA « S – топология; S – topology » – bax, *Məqbul topologiya.*

TOPOLOJİ ENTROPİYA(sı) dinamik sistemin **« топологическая энтропия** динамической системы; **topological entropy** of a dynamical system **»** – *erqodik nəzəriyyə* anlayışıdır. K kompaktının özünə ixtiyari kəsilməz $f: K \to K$ inikası üçün T. e. dinamik sistemin metrik entropiyası ilə analoji təyin olunur: bu

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\xi} h(f, \xi)$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada ξ, – K kompaktının açıq çoxluqlarla ixtiyari örtüyü, $N(\xi \cup f^{-1}\xi \cup \dots \cup f^{-n+1}\xi)$, – $\xi, f^{-1}\xi, \dots, f^{-n+1}\xi$ örtüklərinin elementlərinin, boş olmayan kəsişmələrindən ibarət $\xi \cup f^{-1}\xi \cup \dots \cup f^{-n+1}\xi$ örtüyünün elementlərilə K kompaktının minimal altörtüyünün elementləri sayının ikilik loqarifmidir və

$$h(f, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} N(\xi \cup f^{-1}\xi \cup \dots \cup f^{-n+1}\xi).$$

Metrik kompakt üçün T. e. $h_{\text{top}}(f)$ bütün normalanmış f -ə nəzərən invariant Borel μ ölçüləri üzrə metrik $n_\mu(f)$ entropiyalarının yuxarı sərhədi ilə üst-üstə düşür (bax, [2] – [4]). T. e. hamar dinamik sistemlər nəzəriyyəsində tətbiq olunur (bax, [5], [6]).

Ədd.: [1] Adler R., Konheim A., Mc Andrew M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 114, p. 309–19; [2] Динабург Е. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 2, с. 324–66; [3] Goodman T., «Bull. Lond.Math. Soc.», 1971, v. 3, № 2, p. 176–80; [4] Goodwyn L., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, № 2, p. 366–88; [5] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [6] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977.

σ – TOPOLOJİ FƏZA « σ – топологическое пространство; σ – topological space », σ – fəza, σ – topologiyalı fəza, Aleksandrov fəzası, – elementlər (fəzanın elementləri adlandırılan) çoxluğu $\mathscr{X}$ ilə hesabi sayda birləşmə əməlinə və sonlu sayda kəsişmə əməlinə görə qapalı açıq çoxluqlar sinfi ilə təyin olunan σ – topologiya kimi iki obyektdən ibarət topludur. $\mathfrak{E}$, – $\mathscr{X}$ çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş sistem olsun. Əgər:

1) $\mathfrak{E}$ sisteminin çoxluqlarının ixtiyari hesabi birləşməsi $\mathfrak{E}$ -dan olarsa;

2) $\mathfrak{E}$ sisteminin çoxluqlarının ixtiyari sonlu kəsişməsi $\mathfrak{E}$ -dan olarsa;

3) $\mathscr{X}$ və boş çoxluq $\mathfrak{E}$ -ya daxil olarsa,

$(\mathscr{X}, \mathfrak{E})$ cütü σ – topoloji fəza adlanır. $\mathfrak{E}$ -dan olan çoxluqlar açıq çoxluqlar, $\mathfrak{E}$ -dan olan çoxluqların tamamlayıcıları qapalı çoxluqlar adlanır.

«Adi» topoloji fəzalar σ – topoloji fəzalardır, lakin tərsi doğru deyildir.

Əgər ixtiyari $U \subset \mathbb{R}$ açıq çoxluğu üçün $f^{-1}(U) \in \mathfrak{E}$ olarsa, $f: \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ funksiyası kəsilməz funksiya adlanır. «Adi» topoloji fəzalarda kəsilməzlik üçün verilən bu tərif yığılma anlayışı vasitəsilə ifadə olunan kəsilməzlik anlayışına ekvivalentdir. Lakin σ – topoloji fəzalarda bu iki tərif ekvivalent deyildir. Yuxarıda verilən tərif burada daha təbiidir.

σ – T. f.-lar bu fəzalarda verilən ölçülərin yığılmasını öyrənmək üçün təbii obyektlərdir. Xüsusilə də, $\mathscr{X}$ -də verilən funksiyalar sinfinin doğurduğu σ – T. f.-lar faydalı olur (bax, *Limit teoremləri təsadüfi proseslər üçün*).

Bax, *σ – ölçülən funksiya*.

Ədd.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 307–48; 1941, т. 9, № 3, с. 563–628; 1943, т. 13, № 2–3, с. 169–238; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 3–41.

TRANSFER – MATRİS « трансфер – матрица; transfer – matrix » – statistik fizika və Evklid kvant meydan nəzəriyyəsində iki obyekti ifadə edən anlayışdır: 1) Markov (Gibbs) meydanının stoxastik (keçid) operatoru; 2) elə köməkçi

$A = \{A_{\alpha\beta}\}$ (operator) matrisini ki, sistemin statistik cəmi $\sum_{\alpha} (A^N)_{\alpha\alpha} = \mathrm{tr}\, A^N$ cəminə bərabərdir.

Daha ətraflı.

1) Transfer–matris–keçid operatoru. $\{X_t, t = (t^{(0)}, \dots, t^{d)}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ və ya $\mathbb{R}^{d+1}\}$ – qiymətləri hər hansı S fəzasından olan $\mathbb{Z}^{d+1}$ şəbəkəsində (və ya $\mathbb{R}^{d+1}$ fəzasında) stasionar təsadüfi meydan, zaman istiqamətinə nəzərən (yəni sıfır koordinat oxu boyunca) Markov meydanı olsun. Onda keçid operatorları

$$(\mathscr{T}_\tau f) X_0 = \left\langle \mathscr{U}_\tau f / X|_{Y_0} = X_0 \right\rangle, \ \tau \in \mathbb{Z}_+ (\tau \in \mathbb{R}_+), \ \tau > 0 \quad (1)$$

$\mathscr{T}_\tau = (\mathscr{T})^\tau$ semi – qrupunu əmələ gətirir, $\mathscr{T}$ operatoru meydanın transfer–matrisi adlanır. (1) düsturunda $Y_0 = \{t : t^{(0)} = 0\}$ «sıfırıncı laydır», $X_0 = \{X_t^0, t \in Y_0\}$ bu layda meydanın konfiqurasiyasıdır, f, – X meydanının funksionalıdır və onun Y_0-da daralması yalnız $X|_{Y_0}$-dan asılıdır. $\mathscr{U}_\tau f$ τ üzərində zaman istiqaməti boyunca f-in «yerinidəyişməsidir», $\left\langle \cdot / X\big|_{Y_0} = X_0 \right\rangle$ meydanın şərti riyazi gözləməsidir, bu şərtlə ki, onun daralması $X|_{Y_0}$ qeyd olunmuşdur və X_0 konfiqurasiyası ilə üst-üstə düşür.

T. – m.-in tərifi Ostervalder – Şraderə görə müsbətlik şərtini ödəyən Evklid kvant meydanları halı üçün (ya $\mathbb{R}^{d+1}$-də və ya $\mathbb{Z}^{d+1}$ şəbəkəsində təyin olunmuş) ümumiləşdirilir.

2) Transfer–matris–köməkçi operator. $G \subset \mathbb{Z}^d$ – məhdud çoxluq, $[0, N] \subset \mathbb{Z}$ olsun.

$$\Lambda = G \times [0, N] \subset \mathbb{Z}^{d+1}$$

oblastında olan spinlərin sonlu fəzası S ilə şəbəkəvari fiziki sistem üçün, bir sıra hallarda, elə $A = A(G)$ (T. – m.) göstərmək olur ki, $\mathbb{Z}_\Lambda$ sisteminin statistik cəmi A^N matrisinin matris elementlərinin cəminə bərabərdir (və ya onun yalnız diaqonal elementlərinin cəminə bərabərdir – «periodik sərhəd şərtləri» adlandırılan şərtlərlə). Məs., (2) oblastında sistemin enerjisi

$$H_\Lambda(X) = \sum_{i=0}^{N-1} V(X_i, X_{i+1}) \quad (3)$$

şəklində olarsa, onda T. – m.-in

$$A(G) = \{A_{XY} = \exp(-\beta V(X, Y))\}$$

ifadəsilə təyin olunduğu fərz olunur, burada X – sistemin konfiqurasiyası, X_i – onun i-ci laya daralması, $Y_i = G \times \{i\}$, $V = V(\cdot, \cdot)$, – X və Y konfiqurasiyalar cütünün hər hansı funksiyası, $X, Y \in S^G$, – G-də iki konfiqurasiyadır.

Spinlər fəzası S-in kəsilməz olduğu halda T. – m. (nüvə) analoji surətdə təyin olunur.

(3) halında sonsuz $G \times \mathbb{Z}$ silindrində limit Gibss meydanı Markov Gibbs meydanı ($t^{(0)}$ oxu boyunca) olur və onun T. – m. [(1) mənasında] $\mathscr{T} = \mathscr{T}(G)$

$$\mathscr{T}_{X,Y} = \frac{1}{\lambda_0 \psi_X^0} A_{X,Y} \ \psi_Y^0, \ X, Y \in S^G, \quad (4)$$

düsturu ilə ifadə olunur və bu düstur «T. – m.» termininin müxtəlif qiymətləri arasında əlaqəni müəyyən edir. (4)-də $\lambda^{(0)} = \lambda^{(0)}(G)$, – $A(G)$-nin ən kiçik məxsusi qiymətidir, $\Psi^0 = \{\Psi_X^0, X \in S^G\}$ – ona uyğun məxsusi vektordur. Bütün $\mathbb{Z}^{d+1}$ şəbəkəsində limit Gibss meydanının T. – m. $\mathscr{T}$ $G = \mathbb{Z}^d$ olduqda, $\mathscr{T}(G)$ operatorlarının termodinamik limiti kimi alınır.

Əd.: [1] Саймон Б., Модель $P[\varphi]_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966.

TRANSVERSAL(ı) latın kvadratının **« трансверсаль** латинского квадрата; **transversale** of a Latin square **»** – bax, *Latın kvadratı*.

TRANZİTİV MARKOV ZƏNCİRİ « транзитивная цепь Маркова; transitive Markov chain » – bax, *Qəyıdışsız Markov zənciri.*

TRAYEKTORİYA « траектория; trajectory / sample path » – bax, *Seçimi funksiya*, *Təsadüfi funksiya.*

TRAYEKTORİYA(sı) Markov zəncirinin **« траектория** цепи Маркова; **trajectory** of a Markov chain/sample path of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri.*

TRAYEKTORİYANIN TƏSADÜFİ UZUNLUĞU; eksponensial çevirmə **« случайный пробег;** экспоненциальное преобразование; exponential transformation of a **random path »** – bax, *Eksponensial çevirmə*(si) təsadüfi trayektoriya uzunluğunun.

TREND « тренд; trend » – *təsadüfi prosesin* sistematik dəyişikliyidir. T., adətən, $X(t)$ təsadüfi komponenti ilə cəmlənən, təsadüfi olmayan $f(t)$ funksiyası şəklində zaman sıraları modellərində iştirak edir: $Y(t) = f(t) + X(t)$. Bu halda $X(t)$ asılı olmayan xətalar ardıcıllığı (*bəyaz küy*) ola bildiyi kimi, sistematik xətalarsız, daha mürəkkəb təsadüfi proses belə ola bilər. Əgər $f(t)$ periodik funksiya olarsa, onda belə T., əksər hallarda, tsiklik trend adlanır. Əgər tsiklik T.-in rəqslər tezliyi yüksək olarsa, belə T. mövsüm effekti adlanır.

T. statistik qiymətinin qurulması və onun təsirinin yox edilməsi üçün çoxlu metodlar mövcuddur, məs., *sürüşən ortalar metodu*, *dəyişən fərqlər metodu.*

Bax, *Statistik nəzarət, keyfiyyətə.*

Əd.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендэл М., Временные ряды, пер. с англ., М., 1981.

TREND(i) meteoroloji kəmiyyətin **« тренд** метеорологической величины; **trend** of a meteorological variable **»** – X meteoroloji kəmiyyətinin hər hansı $[t', t' + \Delta t]$ zaman intervalında baş verən sistematik dəyişikliyidir. Δt-nin artması ilə əksər hallarda aydın olur ki, meteoroloji kəmiyyətin əvvəllər aşkar edilmiş T.-i (yəni onun artması və ya azalması), əslinə qaldıqda, hər hansı

uzun periodlu rəqsin bir hissəsidir və təsadüfi yüksəktezlikli rəqslərdən yalnız periodunun uzunluğu ilə fərqlənir. X kəmiyyətinin zaman üzrə dəyişməsinə $X(t)$ prosesinin realizasiyası kimi baxaraq, T.-i bəzən $m_x = \mathbf{M}\,X(t)$ riyazi gözləməsi üzrə $X(t)$-nin qeyri – stasionarlığının təzahürü kimi interpretasiya etmək olar, bu zaman m_x zaman funksiyası olur. T.-i təsvir etmək üçün digər tətbiq olunan modellər də məlumdur.

Meteoroloji kəmiyyətlərin T.-nin seçilməsi ilkin meteoroloji sıralar üzərində statistik işləmələrin müxtəlif üsullarının tətbiqinə əsaslanır. Bu məqsədlə, əksər hallarda $X(t)$-də olan qısaperiodlu rəqsin olduqca effektli hamarlanmasını təmin edən sürüşən orta metodu istifadə olunur. T.-in empirik qiymətlərinin növbəti approksimasiyası bir qayda olaraq, α_i əmsalları ən kiçik kvadratlar metodu ilə təyin olunan, $\widetilde{m}_x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$ şəklində n tərtib çoxhədlilər vasitəsilə həyata keçirilir. $n = 1$ olduqda $X(t)$-də xətti T.-in varlığı nəzərdə tutulur.

Meteoroloji zaman sıralarının statistik analizində T.-in olması əlavə xətaların yaranmasına səbəb ola bilər. Bu xətalar sonsuzluqda belə sönməyən, mərkəzlənmiş korrelyasion funksiyanın hesablanmasında əmələ gəlir (bax, [2], [3]). Bu effekti aradan qaldırmaq və ya zəiflətmək üçün korrelyasion funksiya əvəzinə struktur funksiyanı hesablamaq məsləhətdir.

İqlimin dəyişmə ənənələrini təyin edən (əsr boyunca) meteoroloji kəmiyyətlərin çoxillik T.-lərinin analizi mühüm əhəmiyyətə malikdir (məs., istiləşmə və soyuqlaşma kimi). İqlim T.-lərinin statistik mühümlüyünün təsdiq olunması və fiziki təbiətinin aydınlaşdırılması xüsusi tədqiqatların mövzularıdır (bax, [1], [4] – [6]).

Əd.: [1] Груза Г. В., Ранькова Э. Я., Данные о структуре и изменчивости климата. Температура воздуха на уровне моря. Обнинск, 1979; [2] Ламли Дж.-Л., Пановский Г.-А., Структура атмосферной турбулентности, пер. с англ., М., 1966; [3] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., 1965; [4] Поляк И. И., Численные методы анализа наблюдений, Л., 1975; [5] Рубинштейн Е. С., Полозова Л. Г., Современное изменение климата, Л., 1966; [6] Brinkmann W. A. R., «Quart. Res.», 1976, № 6, p. 335–58.

TRİPLETİ, ÖNGÖRÜL XARAKTERİSTİKALARIN « триплет предсказуемых характеристик; triplet of predictable characteristics » semimartinqalın – ζ semimartinqalının sıçrayışları ölçüsü μ-nün kompensatoru ν və öngörül B, C proseslərindən ibarət $T = (B, C, \nu)$ üçlüyüdür, bu anlayışların tərif və xassələri *Semimartinqal* məq.-də verilmişdir.

TSİKLİK KOD « циклический код; cyclic code » – bax, *Blok kod.*

TSİKLİK MARKOV ZƏNCİRİ « циклическая цепь Маркова; cyclic / periodic Markov chain » – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi elə bircins Markov zənciridir ki, vəziyyətlərin $d \geq 2$ sayda altsiniflərinə ayrılan yeganə mühüm C sinfindən ibarətdir (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı). Belə zəncir d – tsiklik və ya d – periodik zəncir adlanır. İxtiyari i vəziyyəti üçün d ədədi $t \geq 1$ şərtini ödəyən elə t-lərin ən böyük ümumi böləninə bərabərdir ki, bu t qiymətlərində t addıma keçid ehtimalı $p_{ij}(t)$ 0-dan fərqli olsun. Məs., əgər zəncirin vəziyyətləri $-\infty < n < \infty$ şərtilə verilən tam n ədədləridirsə və n vəziyyətindən qonşu $n-1$ və $n+1$ vəziyyətlərinə keçid ehtimalları $p_{n,n-1}$ və $p_{n,n+1}$ və yalnız belə keçid ehtimalları sıfırdan fərqli olarlarsa, belə zəncir 2 – tsiklik zəncirdir: bu halda cüt n-lər bir altsinfi, tək n-lər digər vəziyyətlər altsinfini əmələ gətirir.

T. M. z.-ndə t addıma keçid ehtimallarının limiti – $p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$, ümumiyyətlə, mövcud deyildir, lakin i-dən asılı olmayan, Çezaro mənada limitə analoji limitlər vardır, əgər C qayıdışsız və ya sıfır sinif olarsa, onda bu limitlər 0-a bərabərdir, əgər C müsbət sinifdirsə, onda bu limitlər də müsbətdir və bunlar zəncirin yeganə stasionar paylanmasını əmələ gətirir.

TSİKLİK SİNİF(fi) Markov zənciri vəziyyətlərinin **« циклический класс** состояний цепи Маркова; **cyclic class** of states of a Markov chain **»** – bax, *Markov zənciri.*

TSİKLİK TEZLİK « циклическая частота; cyclic frequency » – bax, *Tezlik.*

TSİKLİK VƏZİYYƏT(i) Markov zəncirinin **« циклическое состояние** цепи Маркова; **cyclic / periodic state** of a Markov chain **»** – vəziyyətləri çoxluğu sonlu və ya hesabi bircins Markov zəncirinin elə i vəziyyətidir ki, onun periodu (d), $d > 1$ şərtini ödəyir. Burada d ədədi $t \geq 1$ şərtini ödəyən elə t-lərin ən böyük ümumi bölənidir ki, bu t qiymətlərində t addıma keçid ehtimalı $p_{ii}(t)$ sıfırdan fərqli olsun. Bütün vəziyyətlərin bir mühüm sinfi üçün (bax, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı) period eynidir.

TUTARLI KRİTERİ « состоятельный критерий; consistent test », tutarlı test, – yoxlanılan hipotezi alternativlər sinfindən olan ixtiyari alternativ hipotezdən, müşahidələr sayını artırdıqca, yəqinliklə fərqləndirən *statistik kriteridir.* $(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{B}_k, \mathbf{P}_{k\theta})$, $\theta \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$ ehtimal fəzaları ardıcıllığı, Θ bütün fəzalar üçün ümumi olan parametrlər çoxluğu olsun: $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathfrak{B}^{(n)}, \mathbf{P}_\theta^{(n)})$, – $(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{B}_k, \mathbf{P}_{k\theta})$, $k = 1, \ldots, n$ ehtimal fəzalarının düz hasilidir. Bu, qiymətləri $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ fəzalarından, paylanmaları $\mathbf{P}_{1\theta}, \ldots, \mathbf{P}_{n\theta}$ olan asılı olmayan n sayda təsadüfi elementin müşahidəsinə uyğun fəzadır. Hər bir seçimi $\mathfrak{X}^{(n)}$ fəzası üçün $H_1 : \theta \in \Theta_1 \subset \Theta \setminus \Theta_0$ alternativinə qarşı $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ hipotezinin yoxlanılması üçün kritik funksiya φ_n olsun. $\{\varphi_n\}$ kritik funksiyalar ardıcıllığı ($n = 1, 2, \ldots$), əksər hallarda, kriteri adlandırılır. $\beta(\varphi_n, \theta) = \int \varphi_n \, d\mathbf{P}_\theta^{(n)}$, – φ_n kriterisinin güc funksiyası olsun. Əgər $\theta \in \Theta_0$ olduqda $\beta(\varphi_n, \theta) \leq \alpha$, $\theta \in \Theta_1$ olduqda isə $\lim_{n\to\infty} \beta(\varphi_n, \theta) = 1$ olarsa, $\{\varphi_n\}$ kriterilər ardıcıllığı α $(0 < \alpha < 1)$ hüdudunun tutarlı kriterisi adlanır.

Bəzən, $\theta \in \Theta_0$ olduqda $\lim_{n\to\infty} \beta(\varphi_n, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta_1$ olduqda isə $\lim_{n\to\infty} \beta(\varphi_n, \theta) = 1$ olduğu halda da, $\{\varphi_n\}$ kriterisi tutarlı kriteri adlandırılır; bu tərif T. k.-nin tərifinə müəyyən

mənada ekvivalentdir (bax, [1]). Əgər $\beta(\varphi_n, \theta) \to 0$ münasibəti $n \to \infty$ olduqda $\theta \in \Theta_0$ üzrə müntəzəm yığılma, $\beta(\varphi_n, \theta) \to 1$ isə $\theta \in \Theta_1$ üzrə müntəzəm yığılma olarsa, onda $\{\varphi_n\}$ ardıcıllığı müntəzəm tutarlı kriteri adlanır.

$\beta(\varphi_n, \theta)$ kəmiyyəti $\theta \in \Theta_0$ olduqda φ_n kriterisinin 1-ci növ səhvi, $1 - \beta(\varphi_n, \theta)$ kəmiyyəti isə $\theta \in \Theta_1$ olduqda φ_n kriterisinin 2-ci növ səhvi olduğundan, kriterinin tutarlılığı onu ifadə edir ki, seçimin həcmi sonsuzluğa yaxınlaşdıqda 2-ci növ səhv olduqca kiçik edilə bilinər; deməli, müşahidələrin sayını qeyri – məhdud artırdıqca yoxlanılan hipotezi ixtiyari alternativdən yəqinliklə fərqləndirmək olar. Analoji olaraq, müntəzəm tutarlılıq onu ifadə edir ki, $n \to \infty$ olduqda 1-ci və 2-ci növ səhvləri naməlum $\theta \in \Theta_0 \bigcup \Theta_1$ qiymətindən asılı olmayaraq, istənilən qədər kiçiltmək olar.

T. k. ideyası ilk dəfə [3]-də daxil olunmuşdur; müntəzəm T. k.-nin varlığının zəruri və kafi şərtləri [3]-də ətraflı araşdırılmışdır.

$\Theta \subset \mathbb{R}^s$ olduğu halda T. k.-yə misal *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisidir.* Qeyri – parametrik T. k.-yə misal *Kolmoqorov kriterisidir.*

Əd.: [1] Encyclopedic dictionary of mathematics, v. 2, p. 1217, Camb. – L., 1977; [2] Hoeffding W., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1958, v. 29, p. 700–18; [3] Wald A., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statist.», 1940, v. 11, p. 147–62; [4] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

TUTARLI STATİSTİK QİYMƏT « состоятельная оценка; consistent estimator » – qiymətləndirilən θ parametrinin əsl qiymətinə $n \to \infty$ olduqda ehtimala görə yığılan (zəif tutarlılıq) və ya sanki hər yerdə yığılan (güclü tutarlılıq) $\hat{\theta}_n$ *nöqtəvi statistik qiymətlərinin* ardıcıllığıdır, $n = 1, 2, \ldots$, n – seçimin həcmidir. Məs., seçimi orta qiymətlərin

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ardıcıllığı müşahidə olunan təsadüfi kəmiyyətin orta qiymətinin güclü T. s. q.-dir. Statistik qiymətlərin qurulmasında ümumi metodlar üçün qoyulan əsas tələblərdən biri onların tutarlı statistik qiymət olması haqqında qoyulan tələbdir (məs., momentlər metodu və maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə qurulmuş statistik qiymətlərin tutarlılığı haqqında, bax, [2], fəs. 1).

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

TUTUM « емкость; capacity » – klassikpotensial nəzəriyyəsində xarici Nyuton tutumu anlayışının abstrakt ifadəsidir. Fərz olunur ki, hər hansı F çoxluğu və onun altçoxluqlarının hər hansı ailəsi $\mathscr{F}$ verilmişdir, boş çoxluğun və $\mathscr{F}$ ailəsindən olan çoxluqların bütün mümkün birləşmələri və sonlu toplularının kəsişmələrinin də $\mathscr{F}$ -ə daxil olduğu fərz olunur. $[-\infty, +\infty]$ -dan qiymətlər alan və aşağıdakı xassələri ödəyən, F çoxluğunun bütün altçoxluqları üçün təyin olunmuş $C(A)$ funksiyasına Şoke tutumu və ya F – tutum deyilir: a) $C(A)$ funksiyası A artdıqca azalmır; b) $C(A)$ aşağıdan kəsilməzdir, yəni $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ çoxluqları $\mathscr{F}$ -ə daxildirlərsə, $C\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sup\{C(A_n);\ n \geq 1\}$; c) $C(A)$ yuxarıdan kəsilməzdir, yəni $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ çoxluqları $\mathscr{F}$ -ə daxildirlərsə, $C\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \inf\{C(A_n);\ n \geq 1\}$. Bu halda $A \subset F$ çoxluğu, əgər $C(A) = \sup\{C(B) : B \subset A,\ B \in \mathscr{F}_\delta\}$, $\mathscr{F}_\delta$ isə elementləri $\mathscr{F}$ -dən olan bütün mümkün ardıcıllıqların birləşmələrinin çoxluğu olarsa, C – ölçülən çoxluq adlanır.

Abstrakt T. nəzəriyyəsinin (bax, [3] – [5]) ən mühüm məsələsi C – ölçülənlik üçün münasib kriterilərin alınmasıdır. Belə kriteriləri Q. Şoke (G. Choquet) 1955–59-da qurmuşdur. $\mathscr{F}$ tutuma misal $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \supset A,\ B \in \mathscr{F}\}$ xarici ölçüsüdür, burada $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ – sonlu tam ölçü ilə verilən fəzadır. Digər misal: xarici Nyuton tutumudur (bax, [5]), onu təyin edərkən, F və $\mathscr{F}$ kimi uyğun olaraq $\mathbb{R}^3$, $n \geq 3$ və F -də kompaktlar çoxluğu götürülür. Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində T. Nəzəriyyəsi mühüm tətbiqləri ilə seçilir, məs., bəzi çətin ölçülənlik problemlərinin araşdırılmasında, o cümlədən, Markov proseslərinin trayektoriyalarının çoxluqlara ilk çatım anlarının (bax, [1], [2]) tədqiqində (bax, [3], [4]). Markov proseslərinin geniş sinfi üçün xarici Nyuton T.-na analoji T.-lar qurulmuşdur (bax, [2]).

Əd.: [1] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [2] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М.,1962; [3] Мейер П.-А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [4] Meyer P.-A., Dellacherie C., Probabilites et potentiel, P., 1976, ch.1–4; [5] Doob I. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N. Y. – B. – Tokyo, 1984.

F – TUTUM « F – емкость; F – capacity » – bax, *Tutum.*

TYUKİ KORRELYASİON PƏNCƏRƏSİ « Тьюки корреляционное окно; Tukey's lag window » – bax, *Korrelyasion pəncərə.*

TYUKİ – HENNİNQ STATİSTİK QİYMƏTİ « Тьюки – Хеннинга оценка; Tukey – Henning estimator » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri – parametrik statistik qiymət.

UAYTMAN FUNKSİYASI « Уайтмана функция; Wightman function » Vaytman funksiyası kvant meydan nəzəriyyəsində – meydan operatorlarının hasillərinin vakuum üzrə ortasının ortasıdır. Bu funksiyalara statistik mexanikada korrelyasion funksiyaların, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində moment funksiyalarının analoqu kimi baxmaq olar.

$\{\varphi(f),\ f\in S(\mathscr{M}^d)\}$ kvant meydanı, yəni vakuum vektoru Ω olan, hər hansı H Hilbert fəzasında təsir göstərən operatorlar ailəsi olsun (bax, [1]).

$$W_n(f_1,\dots,f_n) = (\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)\cdot\dots\cdot\varphi(f_n)\,\Omega,\ \Omega_H)$$

yarıxətti formaları nüvə haqqında teoremə əsasən (bax, [3])

$$W_n(f_1,\dots,f_n) =$$

$$= \int\limits_{(\mathscr{M}^0)^n} W_n(x_1,\dots,x_n)\, f_1(x_1)\dots f_n(x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

bərabərliyi ilə ifadə oluna bilinir, burada $W_n(x_1,\dots,x_n),\ x_i\in\mathscr{M}^d$ – nisbətən artan ümumiləşmiş funksiyadır, bu funksiya n-ci Uaytman funksiyası adlanır. Belə tərif onunla əlaqədardır ki, kvant meydan nəzəriyyəsində təsadüfi meydanlar ümumiləşmiş meydanlardır. Belə funksiyaların toplusu $\{W_n(x_1,\dots,x_n)\},\ n=1,2,\dots$ kvant meydan nəzəriyyəsinin aksiomlarından alınan bir sıra tələbləri ödəyir (kovariantlıq, müsbət müəyyənlik, lokallıq və s.; bax, [2]); bu toplu unitar ekvivalentliyə qədər dəqiqliklə $\{\varphi(f),\ f\in S(\mathscr{M}^d)\}$ kvant meydanının özünü təyin edir.

Əd.: [1] Йост R., Общая теория квантовых полей, пер. с англ., M., 1967; [2] Боголюбов N. N., [и др.], Общие принципы квантовой теории поля, M., 1987; [3] Гельфанд И. M., Виленкин N. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гилбертовы пространства, M., 1961.

UDUCU BARYER « поглощающий барьер; absorbing barrier / boundary » – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

UDUCU VƏZİYYƏT « поглощающее состояние; absorbing state » – bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu hesabi.

UDUCU VƏZİYYƏT Markov zəncirinin **« поглощающее состояние** цепь Маркова; absorbing state of a **Markov chain »** – bax, *Markov zənciri*; uducu vəziyyət, *Markov zənciri*; vəziyyətlərin təsnifatı.

UDUM EHTİMALI « поглощения вероятность; absorbtion probability » – bax, *Markov prosesi* vəziyyətləri çoxluğu sonlu, *Ehtimal*; *udum ehtimalı* Markov zəncirində.

UDUŞ FUNKSİYASI « выигрыша функция; gain function » – bax, *İdarəolunan diffuzion proses.*

UİLKOKSON KRİTERİSİ « Уилкоксона критерий; Wilcoxon test » – $X_1,\dots,X_n$ və $Y_1,\dots,Y_m$ seçimlərinin həmcinsliyini yoxlamaq üçün *qeyri – parametrik kriteridir.* Seçimlərin elementlərinin asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $F(x)$ və $G(x)$ -in isə uyğun olaraq, bu seçimlərin elementlərinin kəsilməz paylanma funksiyaları olduğu fərz olunur; $F(x)=G(x)$ hipotezi yoxlanılır. U. k.

$$W = s(r_1)+\dots+s(r_m) \qquad (*)$$

ranq statistikasına əsaslanır; r_j, – X_i və Y_j ümumi variasion sırasında Y_j təsadüfi kəmiyyətlərinin ranqları, $s(r)$, $r=1,\dots,n+m$ funksiyaları isə əvvəlcədən qeyd olunmuş

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+m \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n+m) \end{pmatrix}$$

əvəzləməsi ilə təyin olunur, burada $s(1),\dots,s(n+m)$, – $1,2,\dots,n+m$ ədədlərinin mümkün olan yerdəyişmələrindən biridir. Əvəzləmə elə seçilməlidir ki, verilmiş alternativ hipotez üçün U. k.-nin gücü ən böyük olsun. W statistikasının paylanması yalnız seçimlərin həcmindən asılı olub, əvəzləmənin seçimindən asılı deyildir (əgər paylanmaların eyniliyi hipotezi doğrudursa). $n\to\infty$ və $m\to\infty$ olduqda W təsadüfi kəmiyyəti asimptotik olaraq normal qanunla paylanır. Bu tip U. k.-nin variantı ilk dəfə F. Uilkokson tərəfindən eyni həcmli seçimlər üçün təklif edilmişdir və bu kriteri $s(r)\equiv r$ olduğu xüsusi hal üçün (*) statistikasına əsaslandırılmışdır (bax, *Ranqlar cəmi kriterisi*, *Mann – Uitni kriterisi*).

Bax, *Van der Varden kriterisi*, *Ranq kriterisi.*

Əd.: [1] Wilcoxon F., «Biometrics», 1945, v. 1, p. 80–83; [2] Большев L. N., Смирнов N. V., Таблицы математической статистики, 3 изд., M., 1983; [3] Вандер Варден B. L., Математическая статистика, пер. с нем., M., 1960.

UİLKS PAYLANMASI « Уилкса распределение; Wilks distribution », U – paylanma – $U=\left|\mathbf{I}_d - V\right|$ təsadüfi kəmiyyətinin *paylanmasıdır*, burada $\mathbf{I}_d - V$ təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayı uyğun olaraq, $m_E/2$ və $m_H/2$ olan $\mathbf{I}$ tip çoxölçülü beta – paylanma qanununa tabedir. U təsadüfi kəmiyyəti sərbəstlik dərəcələri sayları d, m_H, m_E olan Uilks paylanmasına tabedir, deyilir və bu simvolik olaraq, aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$U\sim U_{d,m_H,m_E};\quad U=\frac{|E|}{|E+H|},\quad |E|\neq 0.$$

U statistikası ilk dəfə S. Uilks tərəfindən 1932-də daxil olunmuşdur.

U. p.-nın əsas xassələri:

1) U -nun paylanma funksiyası natamam beta – funksiyaların hesabi qarışığı kimi ifadə oluna bilinir.

2) $U_{d,\,m_H,\,m_E}$ -nin paylanması $U_{m_H,\,d,\,m_E-m_H-d}$ -nin paylanması kimidir; bu faktdan $m_H < d$ olduqda istifadə olunur. $(d,\,m_H,\,m_E)$ üçlüyü əvəzinə $(d,\,m_H,\,h_0)$ üçlüyündən də istifadə etmək olar, burada $h_0 = m_E + m_H$. Əgər d və m_H -ı elə əvəz etmək olarsa ki, $d^* = m_H$ və $m_H^* = d$ olsun və $m_E^* = m_E + m_H - d$ götürülərsə, onda $n_0^* = m_E^* + m_H^* = m_E + m_H = h_0$ bərabərlikləri doğrudur.

3) Aşağıdakı xüsusi hallar doğrudur.

$d = 1$ olarsa, onda ixtiyari m_H üçün

$$\frac{1 - U_{1,m_H,m_E}}{U_{1,m_H,m_E}} \, \frac{m_E}{m_H} \sim F_{m_H,\,m_E}.$$

$m_H = 1$ olarsa, onda ixtiyari d üçün

$$\frac{1 - U_{d,1,m_E}}{U_{d,1,\,m_E}} \, \frac{m_E + 1 - d}{d} \sim F_{d,\,m_E+1-d}.$$

$d = 2$ olarsa, onda

$$\frac{1 - U_{2,\,m_H,\,m_E}^{1/2}}{U_{2,\,m_H,\,m_E}^{1/2}} \, \frac{m_E - 1}{m_H} \sim F_{2m_H,\,2(m_E-1)}, \quad m_H \geq 2.$$

$m_H = 2$ olarsa, onda

$$\frac{1 - U_{d,\,2,\,m_E}^{1/2}}{U_{d,\,2,\,m_E}^{1/2}} \, \frac{m_E + 1 - d}{d} \sim F_{2d,\;2(m_E+1-d)}, \quad d \geq 2.$$

4) Böyük h -lar üçün (yəni böyük m_E -lər üçün) $W = -f \ln U$ kəmiyyəti $\chi^2_{dm_H}$ -in paylanmasına yığılır, burada $f = m_E - (d - m_H + 1)/2 = h_0 - (d + m_H + 1)/2$.

Əd.: [1] S e b e r G. A. F., Multivariante observations, N. Y. – [a. o.], 1984.

UİNZORLANMIŞ ORTA QİYMƏTLƏR « уинзоризованные средние; Winzorized means » – bax, *Dayanıqlılıq*(ğı) s t a t i s t i k p r o s e d u r u n.

UİŞART PAYLANMASI « Уишарта распределение; Wishart distribution » – cırlaşmayan kovariasion matrisli çoxölçülü normal paylanmalı seçim üzrə kovariasion matris üçün hesablanmış statistik qiymətin *paylanmasıdır.* İlk dəfə C. Uişart tərəfindən alınmışdır (bax, [1]). U. p. birölçülü təsadüfi kəmiyyətin dispersiyasının statistik qiyməti üçün χ^2 – paylanmanın ümumiləşməsidir.

$(X_1, \ldots, X_n)$ – parametrləri naməlum μ və Ξ olan p – ölçülü müşahidələrin n həcmli seçimi olsun, $n > p + 1$, $X_i \in N_p(\mu,\, \Xi)$, $i = 1, \ldots, n$. S isə Ξ matrisinin statistik qiyməti olsun. Onda $A = (n-1)S$ təsadüfi matrisinin U. p.-nın sıxlıq funksiyası, A müsbət müəyyən olduğu halda,

$$w(A \mid \Xi,\, n-1) = \frac{|A|^{(n-p-2)/2}\, e^{-\operatorname{tr} A\,\Xi^{-1}/2}}{2^{(n-1)p/2}\, \pi^{p(p-1)/4}\, |\Xi|^{n-1/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma[(n-i)/2]}$$

düsturu ilə təyin olunur, digər hallarda isə sıfra bərabərdir. $w(A \mid \Xi, n-1)$ sıxlıq funksiyasına uyğun U. p. qanunu $W(\Xi,\, n-1)$ ilə işarə olunur.

U. p.-nın uyğun xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M} \exp\left[i \operatorname{tr}(A\Theta)\right] = \left| \Xi^{-1} \right|^{(n-1)/2} \Big/ \left| \Xi^{-1} - 2i\Theta \right|^{(n-1)/2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada Θ – həqiqi matrisdir.

Çoxölçülü statistik analizdə U. p.-ndan alınan aşağıdakı nəticələrdən çox istifadə olunur:

1) $\mathbf{M} S = \Xi$,

2) $\mathbf{M} S^{-1} = [(n-1)/(n-p-1)]\, \Xi^{-1}$,

3) $S^{ii} \sim \chi^2(n-p-1)$; s^{ii}, – S^{-1} matrisinin diaqonal elementidir,

4) $v' S\, v \sim (v' \Xi\, v)\, \chi^2(n-1)$.

U. p.-nın mühüm xassəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur: $A_j \sim W(\Xi,\, n_j - 1)$, $j = 1, \ldots, q$ olsun. Əgər A_j matrisləri asılı olmayan matrislərdirsə, onda $A = \sum_{j=1}^{q} A_j$ matrisi

$$A = \sum_{j=1}^{q} A_j \sim W\Big(\Xi,\, \sum_{j=1}^{q} n_j - q\Big)$$

münasibətini ödəyir.

Əd.: [1] W i s h a r t J., «Biometrika», 1928, v. 20A, p. 32–52; [2] А н д е р с о н Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

UİŞART PAYLANMASI ü m u m i l ə ş m i ş **« Уишарта распределение** о б о б щ е н н о е; **Wishart** g e n e r a l i z e d **distribution »** –

$$\hat{\Xi} = (n-1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \hat{x})\,(x_k - \hat{x})', \; \hat{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k / n$$

empirik kovariasion matrisinin elementlərinin birgə *paylanmasıdır*; bu matris m – ölçülü təsadüfi x vektoru üzərində $x_1, \ldots, x_n$ müşahidələri üzrə alınan matrisdir. $X = (x_1, \ldots, x_n)$ matrisinin elementlərinin paylanmasının sıxlıq funksiyası $p(U)$ -nun varlığı fərz olunur; U, – $m \times n$ – ölçülü matrisdir. Əgər $n > m$ olarsa, onda $\hat{\Xi}$ matrisinin paylanmasının sıxlığı

$$(n-1)^{m(n-1)/2}\, C_{m,n-1} \int_{G_{n-1}} p((n-1)^{1/2}\, Z_m^{1/2}\, H^m\, T_{n-1} + \\ + y_m\, t_n')\, \det Z_m^{(n-m-2)/2} \prod_{i=1}^{m} dy_i\, \mu(dH)$$

şəklində ifadə olunur, burada Z_m, – m – tərtibli mənfi olmayan müəyyən matrisdir. G_{n-1} – həqiqi ortoqonal matrislərin $(n-1)$ –

ölçülü qrupu, μ – bu qrupda normalanmış Haar (Haar H.) ölçüsü,

$$H^{(m)} = \| h_{ij} \|, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = \overline{1}, \dots, \overline{n},$$

$$\mathbf{y}_m = \| y_i \|^{\mathsf{T}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$T_n = \| t_{ij} \|$, $j = 1, \dots, n$ ortoqonal matrisdir, $t_n = (n^{-1/2}, \dots, n^{-1/2})$,

$$T_{n-1} = \| t_{ij} \|, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$C^{-1}_{m,\, n-1} = \pi^{m(m-1)/4 - (n-1)m/2} \prod_{i=1}^{m} \Gamma((n-i)/2).$$

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

UNİMODAL / TƏKZİRVƏLİ PAYLANMA « унимодальное / одновершинное распределение; unimodal distribution » – yalnız bir *modası* olan ehtimal *paylanmasıdır*. Paylanmanın m o d a s ı və ya z i r v ə s i adlanan hər hansı həqiqi a ədədi üçün uyğun paylanma funksiyası $F(x)$ $x < a$ olduqda qabarıq, $x > a$ olduqda çökük olarsa, ədəd oxunda ehtimal paylanması u n i m o d a l p a y l a n m a adlanır. Normal paylanma, Koşi paylanması, müntəzəm paylanma U. p.-lardır; müntəzəm paylanmanın modası birqiymətli deyildir. Moda nöqtəsinin kəsilmə nöqtəsi olmadığı paylanma funksiyası unimodal olduğu halda, $F(x)$ paylanma funksiyasına uyğun paylanmanın sıxlıq funksiyası $p(x)$ -in varlığı fərz olunur (ola bilər ki, yalnız bir nöqtə istisna olunmaqla), bu funksiya modadan solda azalmayan, modadan sağda isə artmayandır.

Paylanmanın unimodallığı üçün müxtəlif kriterilər mövcuddur. Bunlardan ən ümumisi L. Şeppə məxsus aşağıdakı teoremlə ifadə olunur: modası sıfır nöqtəsində olan $F(x)$ paylanma funksiyası, yalnız və yalnız,

$$F(x) = \int_0^1 G(x/u)\, du$$

şəklində olduqda unimodal paylanmadır. $G(x)$ – hər hansı paylanma funksiyasıdır. Bu kriteri A. Ya. Xinçinə məxsus teoremin sadə halıdır: $f(x)$ – paylanma funksiyası, yalnız və yalnız, onun uyğun xarakteristik funksiyası

$$f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u)\, du$$

şəklində olduğu halda unimodal paylanmadır, burada $\varphi(u)$ – xarakteristik funksiyadır (*Xinçin teoremi*).

Başqa sözlə, $F(x)$ funksiyası, yalnız və yalnız, iki asılı olmayan ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin hasilinin paylanma funksiyası olduğu halda unimodaldır, bu şərtlə ki, bu təsadüfi kəmiyyətlərdən biri $[0, 1]$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış olsun.

Xarakteristik funksiyaları ilə verilmiş (məs., *dayanıqlı* paylanmalar) paylanmaların unimodal olub-olmadığını yoxlamaq çətin analitik məsələlərdən hesab olunur. Məs., ö z ü - ö z ü n ə a y r ı l a n p a y l a n m a l a r s i n f i $\mathscr{D}$-dən olan paylanmaların unimodallıq problemi belə məsələlərdəndir. Bu sinifdən olan paylanmaların unimodallığı üç onillik ərzində araşdırılsa da, yalnız 1978-də öz həllini tapmış və isbat olunmuşdur; $\mathscr{D}$ sinfindən olan bütün paylanmalar təkzirvəlidir.

Kompozisiyaların və kompozisiyaların limitlərinin paylanmalarının unimodallığını araşdırarkən çətinlik doğuran o faktdır ki, ümumiyyətlə, iki U. p.-nın kompozisiyası U. p. deyildir (uzun müddət bunun əksi fərz olunurdu) (bax, [2]). Bu səbəbdən güclü umimodallıq anlayışı yaranır. Paylanmanın ixtiyari U. p. ilə kompozisiyası U. p. olarsa, belə paylanmaya g ü c l ü u n i m o d a l (g ü c l ü t ə k z i r v ə l i) paylanma deyilir. İki unimodal və simmetrik paylanmanın kompozisiyası unimodal və simmetrik paylanmadır. U. p.-nın simmetrizasiyası U. p.-dır. $F(x)$ – unimodal və simmetrik paylanma, $G(x)$ – unimodal və simmetrik olmayan paylanmadırsa, onda $F * G$ kompozisiyasının paylanması unimodal deyildir [3].

U. p.-lar sinfi ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikada böyük rol oynayır. Belə ki, paylanmalarla əlaqədar olan bir çox nəticələr U. p.-lar üçün daha da güclü olur. Məs., əgər ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanması unimodaldırsa, onda bu təsadüfi kəmiyyət üçün *Çebışev bərabərsizliyini* dəqiqləşdirmək olur və bu halda

$$\mathbf{P}\{|\xi - x_m| \geq a\sigma\} \leq 4/9a^2,$$

münasibəti doğrudur, burada $a > 0$, x_m – paylanmanın modası, $\sigma^2 = \mathbf{M}(\xi - x_m)^2$.

$$\mathbf{P}\{\xi = a + hk\} = p_k, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h > 0$$

şəbəkəvari paylanması üçün, əgər elə tam k_0 qiyməti vardırsa ki, $k \leq k_0$ qiymətlərində p_k k -nın funksiyası kimi azalmayan, $k \geq k_0$ qiymətlərində artmayan funksiya olsun, bu paylanma *unimodal şəbəkəvari paylanma* adlanır. Diskret paylanmalardan Puasson, binomial, həndəsi paylanmalar unimodal paylanmalardır.

Çoxölçülü paylanmalar sinfində də bir sıra unimodallıq xassəli paylanmalar mövcuddur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Л у к а ч Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [3] С т о я н о в Й., Контрпримеры в теории вероятностей, М., 1999.

UNİMODAL ŞƏBƏKƏVARİ PAYLANMA « унимодальное решечатое распределение; lattice unimodal distribution » – bax, *Unimodal / təkzirvəli paylanma.*

UNİTAR TƏSADÜFİ MATRİS « унитарная случайная матрица; unitary random matrix » – sətirləri ortonormalanmış sistem əmələ gətirən, $\mathbb{C}$ kompleks ədədlər meydanında n tərtib $U_n = \| u_{ij} \|$ kvadrat *təsadüfi matrisidir*. H_n – U. t. m., $\Lambda_n = \| \exp(i\lambda_k)\, \delta_{ks} \|$, $\exp(i\lambda_n)$ U_n matrisinin məxsusi qiymətləri, bunların arqumentləri isə $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq 2\pi$ qaydası ilə nizamlanmış olarsa, U_n U. t. m.-i $U_n = H_n \Lambda_n H_n^{\mathsf{T}}$ şəklində ifadə oluna bilinir. Əgər $\arg h_{1k} = c_k$, $k = 1, \dots, n$, $0 \leq c_k \leq 2\pi$ bəzi təsadüfi olmayan ədədlər olarsa, U_n matrisinin məxsusi qiymətləri yeganə surətdə təyin olunurlar.

Γ_n – n – ölçülü unitar matrislər qrupu, ν – bu qaydada normalanmış Haar ölçüsü, B, – Γ qrupunun Borel altçoxluqlarının σ – cəbri olsun. U_n təsadüfi matrisinin paylanması ν ölçüsünə

nəzərən mütləq kəsilməz paylanmadır. Onda ixtiyari $L \in B$ altçoxluğu və ixtiyari həqiqi $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1, \dots, n$ ədədləri üçün

$$\mathbf{P}\{H_n \in L,\ \alpha_k < \lambda_k < \beta_k,\ k = 1, \dots, n\}$$

ehtimallarını hesablamaq olur (bax, [1]).

Əgər ixtiyari $L \in B$ çoxluğu üçün $\mathbf{P}\{U_n \in L\} = \nu(L)$ bərabərliyi ödənilərsə, onda U_n matrisinin məxsusi vektorları onun məxsusi qiymətlərindən stoxastik asılı olmur. U_n matrisinin məxsusi qiymətlərinin arqumentlərinin paylanma sıxlığı

$$(n!)^{-1}(2\pi)^{-n} \prod_{\substack{k,s=1,\dots,n \\ k<s}} \left| e^{iyk} - e^{iys} \right|^2,$$

$$0 < y_1 < \dots < y_n < 2\pi$$

ifadəsinə bərabərdir. H_n matrisinin paylanması

$$\mathbf{P}\{H_n \in L\} = \int_{X \in L} \nu(dX_n \mid \arg x_{1k} = c_k,\ k = 1, \dots, n)$$

düsturu ilə təyin olunur.

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1, с. 67–104; [2] М у р н а г а н Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950; [3] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

UNİVERSAL KODLANMA « универсальное кодирование; universal encoding » – dəyərləri hər bir mənbənin entropiyasına yığılan mənbələr çoxluğu üçün *kodlar* ardıcıllığıdır. Bu yığılmanın müntəzəm yığılma olub-olmamasından asılı olaraq, kodlanma g ü c l ü və ya z ə i f u n i v e r s a l k o d l a n m a adlanır. Sonlu yaddaşlı mənbələr üçün güclü U. k.-nın varlığı isbat olunmuşdur (bax, [1]); belə mənbələr üçün asimptotik ən yaxşı universal kodlar qurulmuşdur (bax, [2]). Əlifbası sonlu olan bütün stasionar mənbələr çoxluğu üçün zəif U. k. mövcuddur (bax, [3]). U. k.-nın qurulması hər hansı kanalın ötürücülük qabiliyyətinin tapılması ilə ekvivalentdir (bax, [4]). U. k. mənbənin xarakteristikaları haqqında dəqiq bilgi olmadan belə informasiyanı yığcamlaşdırmağa imkan yaradır.

Əd.: [1] Ф и т и н г о ф Б. М., «Проблемы передачи информации», 1966, т. 2, № 2, с. 3–11; [2] K r i c h e v s k y R. E., T r o f i m o v V. K., «IEEE Trans. Uniform. Theory», 1981, v. IT27, № 2, p. 199–207; [3] S h t a r' k o v J u. M., B a b k i n V. F., «2-nd Int. Symp. Inform. Theory. Tsachkadzor, 1971», Bdpst, 1973, p. 249–57; [4] Р я б к о Б. Я., «Проблемы передачи информации», 1979, т. 15, № 2, с. 71–77.

UNİVERSAL OPTİMAL PLAN « универсально оптимальный план; universally optimal design » – bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması.*

UNİVERSAL ÖLÇÜLƏN STRATEGİYA « универсально измеримая стратегия; universally measurable strategy / policy » – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* d i s k r e t z a m a n l ı.

UNİVERSAL TUTARLILIQ XASSƏSİ « универсальной состоятельности свойство; universal consistence » – bax, *Qeyri – parametrik reqression analiz.*

UONQ PROSESİ « Уонга процесс; Wong process » – bax, *Təsadüfi proses*; s ı f ı r l a r.

URBANİK CƏBRİ « Урбаника алгебра; Urbanik algebra » – mənfi olmayan $\mathbb{R}_+$ yarımoxunda ehtimal paylanmalarının $\mathscr{P}$ fəzasında, kommutativlik xassəli hər hansı semi – qrup əməli « $\circ$ » ilə bağlı (bu əməl, yəni « $\circ$ » sonra konvolyusion adlandırılır) cəbri strukturdur; bu əməl haqqında aşağıdakılar fərz olunur. E_a, – a nöqtəsində topalanmış paylanma, $\mathfrak{B}_+$, – $\mathbb{R}_+$-da bütün Borel çoxluqlarının sistemi, $\{T_c : c \geq 0\}$, – $\mathscr{P}$-dən olan ölçülərin multiplikativ yerinidəyişmə operatorlarının çoxluğu olsun, yəni $T_c\,\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(c^{-1}A),\ A \in \mathfrak{B}_+,\ c > 0,\ T_0\mathbf{P} = \mathbf{E}_0$. Aşağıdakı aksiomlar sistemi daxil olunur. İxtiyari a, b, $c \in \mathbb{R}_+$ və ixtiyari $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{H} \in \mathscr{P}$ üçün

1) $\mathbf{E}_0 \circ \mathbf{P} = \mathbf{P}$;

2) $(a\mathbf{P} + b\mathbf{Q}) \circ \mathbf{H} = a(\mathbf{P} \circ \mathbf{H}) + b(\mathbf{Q} \circ \mathbf{H}),\ a + b = 1,\ a \geq 0,\ b \geq 0$;

3) $(T_c\mathbf{P}) \circ (T_c\mathbf{Q}) = T_c(\mathbf{P} \circ \mathbf{Q})$;

4) Əgər $\mathbf{P}_n \in \mathscr{P}$, $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ olarsa, onda $\mathbf{P}_n \circ \mathbf{Q} \xrightarrow{w} \mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$ münasibəti doğrudur ($\xrightarrow{w}$ – zəif yığılmanı ifadə edir);

5) elə $c_n \in \mathbb{R}_+$ ardıcıllığı və $\mathbf{Q} \in \mathscr{P}$, $\mathbf{Q} \neq \mathbf{E}_0$ ölçüsü vardır ki, $n \to \infty$ olduqda $T_{c_n}\mathbf{E}_1^{\circ n} \to \mathbf{Q}$ ($\mathbf{P}^{\circ n}$, – $\mathbf{P}$-nin n – qat konvolyusiyasıdır).

Əgər U. c. qeyri – trivial $h : \mathscr{P} \leftrightarrow \mathbb{R}^1$ homomorfizminə malik olarsa, onda o, r e q u l y a r Urbanik cəbri adlanır və bu halda bu cəbrdə

$$f(t,\ \mathbf{P}) = \int_0^\infty h(E_{xt})\,\mathbf{P}(dx)$$

xarakteristik funksiyalarını daxil etmək olur, əks halda isə U. c. q e y r i – r e q u l y a r U r b a n i k c ə b r i adlanır. Birinci tipə aid U. c.-lərində konvolyusiya əməlləri $\mathscr{P}$-də aşağıdakı şəkildə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üzərində $\mathbb{U}$ əməlləri ilə doğurulur:

$$X \mathbb{U} Y = X + Y,\quad X \mathbb{U} Y = XY,$$

$$X \mathbb{U} Y = \left| X^\alpha + ZY^\alpha \right|^{1/\alpha},\ \alpha > 0$$

burada Z – simmetrik Bernulli paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir və X və Y ilə asılı olmayandır. Qeyri – requlyar U. c.-nə misal $X \mathbb{U} Y = \max(X, Y)$ əməli ilə verilir.

U. c.-ndə limit teoremlərinin klassik nəzəriyyəsindəki adi kompozisiya əməli ilə bağlı (sonsuz bölünən özü-özünə ayrılan və dayanıqlı qanunlar, limit teoremləri nəzəriyyəsi və s.) analoji məsələlərə, bu cəbri strukturların spesifikası ilə bağlı məsələlərə də baxılmışdır (bax, [2] – [4]). U. c.-nin tədqiqatının təməli J. Kinqmenin [1] işində qoyulmuşdur. U. c.-nin ümumiləşməsi vardır (bax, [6]). U. c.-nə [5]-də işlənilmiş hiperqruplar konstruksiyası yaxındır.

Əd.: [1] K i n g m a n J. F. C., «Acta math.», 1963, t. 109, p. 11–63; [2] U r b a n i k K., «Studia Math.», 1964, v. 23, p. 217–45; 1973, v. 45, p. 57–70; [3] U r b a n i k K., «Studia Math.», 1984, v. 78, p. 59–75; [5] Y u r e k Z. J., «Probab. and Math. Statist.», 1985, v. 5, № 1, p. 113–35; [5] H e y e r H., Probability theory on hypergroups, B. – L. – N. Y., 1983; [6] В о л ь к о в и ч В. Э., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара, М., 1987.

URN SXEMİ « урновая схема; urn scheme / model » – ehtimal nəzəriyyəsi modellərindən ən sadəsidir. U. s. belə təsvir olunur: içərisində ağ və qara rəngli kürəciklər olan hər hansı bir

qab – urn götürülür. Urndan (qutu, yeşik sözləri də istifadə olunur) ixtiyari bir kürəcik götürülür, çıxarılmış kürəcik hansı rəngdə olarsa, bu kürəcik həmin rəngdə c sayda kürəcik və d sayda digər rəngli kürəciklə urna qaytarılır. Kürəciklər qarışdırıldıqdan sonra prosedur lazım olan qədər təkrarlanır. Fərz olunur ki, urnda əvvəlcə $a > 0$ sayda ağ və $b > 0$ sayda qara kürəcik olmuşdur. c və d – U. s.-nin parametrləri – mənfi ədədlər də ola bilər.

U. s. bəzi əsas ehtimalları şərti ehtimallarla hesablamaq üçün əlverişlidir. c və d parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox məlum sxemləri alınır: $c = 0$, $d = 0$ olduqda, qaytarmaq şərtilə seçmə sxemi (bax, *Bernulli sınaqları*), $c = -1, d = 0$ olduqda, qaytarmamaq şərtilə təsadüfi seçmə sxemi, $c = -1$, $d = -1$ halında Erenfestlər diffuziya modeli, $c > 0$, $d = 0$ halında Poya U. s. və s. kimi. Bu xüsusi hallar bir çox real hadisələrin və bunların araşdırılma metodlarının modelləridir. Məs., Poya U. s. epidemiyaların təsviri üçün istifadə olunur, bu halda hansısa hadisələrin baş verməsi onların növbəti dəfə baş verməsi ehtimalını artırır. U. s. çərçivəsində ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox paylanmalarını almaq olur, məs., binomial, hiperhəndəsi, həndəsi, Poya paylanmalarını. U. s.-də yaranan limit təsadüfi proseslərinin təsvirində mənfi binomial paylanma və Puasson paylanması tətbiq olunur.

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, M., 1984.

URSELL FUNKSİYALARI « Урселла функции; Ursell functions » s t a t i s t i k f i z i k a d a – aktivlik dərəcələrinə görə termodinamik təzyiqin ayrılışını verən funksiyalar ardıcıllığıdır (M e y e r a y r ı l ı ş ı adlanan, bax, [2]).

$\{Z(x),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ (və ya $z(x) = e^{-\beta\Phi(x)}$ aktivliyini $\{\Phi(x),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ xarici meydanı ilə qarşılıqlıtəsirli münasibətilə götürdükdə) aktivliklərin qeyri – bircins meydanı ilə təsvir olunan sonlu $\Lambda \in \mathbb{R}^d$ oblastında yerləşən qarşılıqlıtəsirdə olan hissəciklərin sistemi üçün bu sistemin statistik cəmi $Z_\Lambda(\{z(x)\})$ -in loqarifmi (bax, [1]) $z(x)$ -in olduqca kiçik qiymətlərində aşağıdakı şəkildə ifadə olunan ayrılışa malik olur:

$$\ln Z_\Lambda(\{z(x)\}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} z(x_i)\, d^d x_1 \dots d^d x_n . \qquad (1)$$

Bu ayrılışa daxil olan $\varphi_n(x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, \dots$ funksiyaları U r s e l l f u n k s i y a l a r ı adlanır.

Hissəciklər arasında qarşılıqlıtəsir translyasion invariant olduğu halda U. f. da bu xassəyə malikdirlər, yəni

$$\varphi_n(x_1 + y, \dots, x_n + y) = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \qquad (2)$$

və [$z(x) = z$ sabit aktivliyində] limit termodinamik təzyiqi –

$$p(T, z) = T \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu} \frac{\ln Z_\Lambda}{|\Lambda|}$$

mövcuddur ($T > 0$ sistemin temperaturudur, $|\Lambda|$, – $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ oblastının həcmidir).

Olduqca kiçik $z << 1$ qiymətlərində $p(T, z)$ funksiyası z -in qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılır:

$$p(T, z) =$$

$$= T\left(\varphi_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^\nu)^{n-1}} \varphi_n(0, x_2, \dots, x_n)\, d^d x_2 \dots d^d x_n \right),$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(x) = \text{const} .$$

Klassik qaz halında, hissəciklər arasında qarşılıqlıtəsir cüt translyasion invariant $U(x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}^1$ potensialı ilə verildikdə U. f. $\varphi_1 = 1$ və $n > 1$ qiymətlərində

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_G \prod_{(i,j) \in G} (e^{-\beta U(x_i - x_j)} - 1)$$

düsturu ilə təyin olunur, burada cəmləmə təpələri $1, \dots, n$ olan bütün əlaqəli qraflar üzrə aparılır, $\prod_{(i,j) \in G}$ hasili isə G -nin bütün tilləri üzrə aparılır.

Əd.: [1] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [2] У л е н б е к Д ж., Ф о р д Д ж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] U r s e l l H., «Proc. Comb. Philos. Soc.», 1927, v. 23, p. 685–97.

UYUŞAN MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏR « совместимые наблюдаемые; compatible observables » – bax, *Müşahidələnən.*

UYUŞMAYAN HADİSƏLƏR « несовместимые / дизъюнктные события; mutually / disjoint exclusive events », d i z y u n k t h a d i s ə l ə r, – eyni zamanda baş verməyən hadisələrdir. Əgər A və B U. h.-dirsə, onda $A \cap B = \varnothing$ (q e y r i – m ü m k ü n h a d i s ə) və $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayandırsa və bunlardan heç olmazsa biri hökmən baş verərsə, yəni ixtiyari $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ qiymətlərində $A_i \cap A_j = \varnothing$ və $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (yəqin hadisə) şərtləri ödənilərsə, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələri h a d i s ə l ə r i n t a m q r u p u n u əmələ gətirir və ya b ö l g ü təşkil edir, deyilir. U. h. və tam qrup əmələ gətirən hadisələr anlayışları bir çox ehtimal müddəalarının çıxarılışında geniş istifadə olunur (bax, məs., *Beyes düsturu*, *Tam ehtimal düsturu*).

UYUŞMAYAN MÜŞAHİDƏLƏNƏNLƏR « несовместимые наблюдаемые; incompatible observables » – bax, *Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi.*

UYUŞMAYAN / DİZYUNKT TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR « несовместные / дизъюнктные случайные события; mutually / dizjunct exclusive random events » – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən A və B təsadüfi hadisələrinin kəsişməsi qeyri – mümkün hadisə olan hadisələrə deyilir, yəni eyni zamanda baş verməyən A və B hadisələrinə deyilir. A və B hadisələri, yalnız və yalnız, $A \cap B = \varnothing$ olduqda U. t. h.-dir. U. t. h. eyni elementar hadisələrə malik olmayan hadisələrdir. $A_1, A_2, \dots$ (sonlu, yaxud sonsuz) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının hər bir ixtiyari cütü üçün $i \neq j$ şərtini ödəyən i, j -lərin bütün qiymətlərində $A_i \cap A_j = \varnothing$

bərabərliyi ödənilərsə, $\{A_i\}$ hadisələr ardıcıllığı *uyuşmayan və ya dizyunkt hadisələr ardıcıllığı* adlanır.

Cüt-cüt uyuşmayan və $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ şərtini ödəyən $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(A_i \subset \Omega,\ i = \overline{1, n})$ *hadisələrinə tam qrup əmələ gətirən hadisələr* deyilir. Eksperimentdə müşahidə oluna bilən təsadüfi hadisələrin tam qrup əmələ gətirən hadisələr olması üçün $i \neq j$ şərtini ödəyən ixtiyari $i, j = 1, 2, \ldots$ qiymətlərində $A_i \cap A_j = \varnothing$ və $\cup A_i = \Omega$ şərtləri ödənilməlidir.

Əgər A və B U. t. h.- dirsə, onda

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

U. t. h. anlayışı bir çox düsturların çıxarılışında geniş tətbiq olunur (bax, məs., *Tam ehtimal düsturu*, *Beyes düsturu*).

«UZAQ QONŞU» ALQORİTMİ « «дальнего соседа» алгоритм; farthest neighbour algorithm » – *təsnifatın iyerarx prosedurunun* xüsusi halıdır, sinif arasında yaxınlıq ölçüsü bu siniflərin ən uzaq obyektləri arasında yaxınlıq ölçüsü kimi təyin olunur.

F – UZLAŞMIŞ FUNKSİYA « F – согласованная функция; F – adapted function » – bax, *Qeyri – antisipativ funksiya.*

UZLAŞMA ƏMSALI / KONKORDANS ƏMSAL « согласованности коэффициент; concordance coefficient » – bax, *Ranq korrelyasiyası*.

UZLAŞMA KRİTERİSİ « согласия критерий; goodness of fit test » – uzlaşmanın yoxlanılması məsələsində tətbiq olunan *statistik kriteridir*; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – eyni bir ehtimal qanununa tabe, paylanma funksiyası $F(x)$ olan naməlum təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda $F_0(x)$ hər hansı paylanma funksiyası olarsa, $F(x) \equiv F_0(x)$ olduğunu fərz edən H_0 hipotezinin statistik yoxlanılması məsələsi uzlaşmanın yoxlanılması məsələsi adlanır. Məs., əgər $F_0(x)$ kəsilməz paylanma funksiyası olarsa, onda H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün *Kolmoqorov kriterisi*, *Smirnov kriterisindən* istifadə etmək olar.

Bax, *Riyazi statistika*; qeyri–parametrik metodlar.

Əd.: [1] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

UZLAŞMA KRİTERİSİ; deterministik interpretasiya **« согласия критерий;** детерминическая интерпретация; deterministic interpretation of a **goodness of fit test »** – statistik məsələnin deterministik məsələ ilə əvəz olunmasıdır ki, bu məsələdə baxılan uzlaşma kriterisi yalnız zəruri deyil, həm də kafidir. İlk dəfə [1]-də alınmışdır.

Misal. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin $0 \le x \le 1$ parçasında müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu haqqında hipotezi

$$\varkappa = \sqrt{n} \sup_{0 \le x \le 1} \left| F_n(x) - x \right|$$

statistikasına əsaslanan Kolmoqorov statistikasının köməyilə yoxlamaq olar; $F_n(x)$ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ seçiminin empirik paylanma funksiyasıdır. Uyğun deterministik məsələ: $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ -lərin qiymətlərini ortalama ilə $W_1^1(L)$-dən olan ixtiyari $f(x)$ funksiyasının inteqralını verilən dəqiqliklə qiymətləndirmək mümkündürmü?

$$\sup_{f \in W_1^1(L)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - \int_0^1 f(x)\,dx \right| = \frac{L\varkappa}{\sqrt{n}}$$

düsturundan aydındır, bu, yalnız və yalnız, χ kəmiyyəti olduqca kiçik olduğu halda mümkündür.

Əd.: [1] Соболь И. М., Детерминистическая интерпретация критериев согласия и проверка псевдослучайных чисел, М., 1968 (Препринт ИПМ АН СССР); [2] Соболь И. М., Численные методы Монте – Карло, М., 1973.

UZLAŞMIŞ PAYLANMALAR « согласованные распределения; consistent distributions » – çoxluqlar funksiyaları $\mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n)$-lərin çoxluğudur (burada $t_1, \ldots, t_n$ – hər hansı T çoxluğunun elementləridir, $B_1, \ldots, B_n$ – hər hansı $\mathbb{B}$ çoxluğunun altçoxluqlarının semi – halqası $\mathscr{A}$-nın elementləridir) və bu funksiyalar aşağıdakı şərtləri ödəyirlər: $\mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ funksiyaları $B_1, \ldots, B_n$ arqumentlərindən hər biri üzrə $\mathscr{A}$ semi – halqasında paylanmadır; $t_1, \ldots, t_n$ və $B_1, \ldots, B_n$-lərin eyni zamanda ixtiyari yerdəyişməsində

$$\mu_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}}(B_{i_1}, \ldots, B_{i_n}) = \mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n);$$

$$\mu_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}}(B_1, \ldots, B_n, \mathbb{B}) = \mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n).$$

$X = \mathbb{B}^T$ – qiymətləri $\mathbb{B}$-dən olan, T çoxluğunda bütün $x = x(t)$ funksiyalarının çoxluğu olsun; $\mu = \mu(A)$ X fəzasının

$$A = \{ x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n \} \qquad (*)$$

şəklində bütün silindrik çoxluqların semi – halqası $\mathscr{A}^T$-də ixtiyari paylanma olsun, burada $t_1, \ldots, t_n \in T$ və $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{A}$. Onda

$$\mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mu\{x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}$$

çoxluq funksiyalarının toplusu U. p. təşkil edir.

Əgər $\mathbb{B}$ kompakt, $\mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ U. p., $\mu_t(K) = \mu_{t, t_1, \ldots, t_n}(K, \mathbb{B}, \ldots, \mathbb{B})$, $t \in T$ $\mathscr{A}$ semi – halqasında requlyar paylanma olarsa, onda elə yeganə μ ölçüsü vardır ki, o, X fəzasının μ paylanmasına nəzərən ölçülən çoxluqlarının σ – cəbrində təyin olunmuşdur və (*) şəklində silindrik A çoxluqları üçün

$$\mu(A) = \mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n)$$

bərabərliyini ödəyir.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

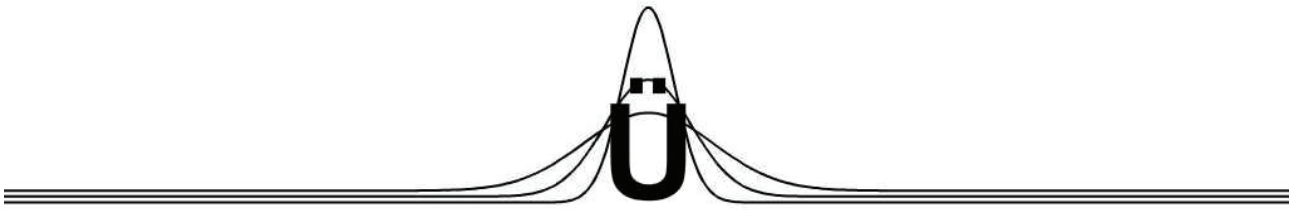
UZLAŞMIŞ TƏSADÜFİ PROSES « согласованный случайный процесс; adapted random process to given filter » – $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında σ – cəbrlər axını $(\mathscr{A}_t)_{t \ge 0}$ ilə verilmiş, $(M, \mathfrak{B})$ faza fəzasından qiymətlər alan elə $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$, $t \in T$ (T – nizamlanmış çoxluqdur) prosesidir ki, hər bir qeyd olunmuş $t \in T$ qiymətində $(\Omega, \mathscr{A}_t)$ ölçülən fəzasının $(M, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasına inikası $\zeta(t, \cdot)$ –

ölçüləndir. Əgər $\zeta(t)$ prosesi $(\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ σ – cəbrlər axını ilə uzlaşmış elə prosesdirsə ki, hər bir $\mathcal{A}_t$ σ – cəbri $\mathcal{A}$ -nın sıfır ehtimallı bütün çoxluqlarını özündə saxlasın, onda $\zeta(t)$ prosesinə stoxastik ekvivalent olan [yəni ixtiyari $t\in T$ qiymətində $\mathbf{P}\{\zeta(t)\neq\zeta^*(t)\}=0$ şərtini ödəyən $\zeta^*(t)$ prosesi] ixtiyari $\zeta^*(t)$ prosesi də bu axınla uzlaşan prosesdir. Hər bir $\zeta(t)$ prosesi müəyyən mənada minimal σ – cəbrlər axını $(\mathfrak{N}_t)_{t\geq 0}$ ilə uzlaşan prosesdir, burada $\mathfrak{N}_t$, – Ω -nın elə altçoxluqlarının minimal σ – cəbridir ki, bütün mümkün $\Gamma\in\mathfrak{B}$, $s\in T$, $s\leq t$ üçün $\{\omega:\zeta(s,\omega)\in\Gamma\}$ şəklində bütün çoxluqlar bu σ – cəbrə daxildir.

Əd.: [1] Д е л л а ш е р и К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [2] Справочник по теории вероятностей и математической статистики, 2 изд., М., 1985.

***UZUNÖMÜRLÜLÜK « долговечность; durability »** – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi*.

***UZUNÖMÜRLÜLÜYÜ, SİSTEMİN / ELEMENTİN « долговечность системы / элемента; durability of system / element »** – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*



ÜÇ SIRA TEOREMİ « трех рядов теорема; three series theorem / criterion »: asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ sırasının sanki yəqin yığılması üçün ixtiyari $c>0$ qiymətində

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{|\xi_n|>c\},\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{M}\xi_n^c\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{D}\xi_n^c$$

sıralarının yığılması zəruri, hər hansı $c>0$ qiymətində bu sıraların yığılması kafidir. Burada əgər $|\xi|\le c$ olarsa, $\xi^c=\xi$, əgər $|\xi|>c$ olarsa, $\xi^c=0$ fərz olunur. $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ sırasının yalnız sanki yəqin yığılan deyil, eyni zamanda elementləri yerdəyişmələrli (rus. перестановочный) sıra olması üçün Ü. s. t.-də $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{M}\xi_n^c$ sırası $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mathbf{M}\xi_n^c\right|$ sırası ilə əvəz olunmalıdır. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sanki yəqin yığılması üçün elə kriteri vardır ki, bu kriteri təsadüfi kəmiyyətlərin *indeksləri*, *mərkəzləri*, *səpələnmələri* kimi anlayışlardan istifadə edir (bax, *Yığılma*(sı) təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının).

Ü. s. t. [1]-də A. N. Kolmoqorov tərəfindən isbat olunmuşdur. Qiymətləri Hilbert fəzasından və bəzi Banax fəzalarından olan təsadüfi kəmiyyətlər halları üçün bu teoremin ümumiləşmələri alınmışdır (bax, [2]).

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Булдыгин В. В., Сходимость случайных элементов в топологических пространствах, К., 1980.

ÜÇ SİQMA QAYDASI « трех сигм правило; three-sigma rule / 3σ – rule » – mnemonik qaydadır, bu qaydaya görə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın bəzi məsələlərində normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsindən yayınmasının üç standart yayınmadan böyük olması hadisəsinin praktiki olaraq, qeyri – mümkün hadisə olduğu hesab olunur.

X, – $N(a,\sigma^2)$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyət olsun. İxtiyari $k>0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\left|X-a\right|<k\sigma\}=2\Phi(k)-1$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\Phi(\cdot)$ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır, onda bərabərlikdən $k=3$ olduqda aşağıdakı alınır:

$$\mathbf{P}\{a-3\sigma<X<a+3\sigma\}=0{,}99730.$$

Bu sonuncu bərabərliyə görə X təsadüfi kəmiyyəti özünün riyazi gözləməsi a -dan hər bir min sınaqda orta hesabla 3σ -dan 3 dəfədən çox olmamaqla böyük ola bilər. Eksperiment aparanlar ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın bəzi məsələlərində bəzən məhz bu nəticədən istifadə edirlər və onlar qəbul edirlər ki, $\{|X-a|>3\sigma\}$ hadisəsi praktiki olaraq qeyri – mümkün hadisədir və deməli, $\{|X-a|<3\sigma\}$ hadisəsi praktiki olaraq yəqin hadisədir. Bu halda, eksperiment aparan şəxsin «üç siqma qaydası»na istinad etdiyi deyilir.

Əd.: [1] Смирнов Н. В., Дунин–Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

ÜÇBUCAQ PAYLANMA « треугольное распределение; triangular distribution » – eyni bir parçada müntəzəm paylanmış iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin kəsilməz ehtimal paylanmasıdır.

ÜÇDƏ İKİ QANUNU « двух третей закон; two – thirds law » – bax, *Kolmoqorovun üçdə iki qanunu.*

ÜFÜQ(ü) modelin **« горизонт** модели; **horizon** of a model **»** – bax, *İdarəolunan təsadüfi proses* diskret zamanlı.

ÜMUMİ ÇOXLUQ « генеральная совокупность; general population » – elə obyektlər çoxluğudur ki, bu obyektlər kəmiyyət və ya keyfiyyət əlamətlərilə səciyyəvidir; verilən Ü. ç.-dan ixtiyari *seçim* əsasında bu obyektlərin paylanmaları statistik metodlarla öyrənilir. «Paylanma funksiyası F olan Ü. ç.-dan seçim deyimi (və ya çoxluqdan seçim)» ümumi paylanma funksiyası F olan təsadüfi kəmiyyətlər çoxluğu kimi anlaşılır. Bax, *Seçimi metod*.

ÜMUMİ QARŞILIQLI STRUKTUR FUNKSİYASI « общая взаимная структурная функция; general cross – structure function » – bax, *Struktur funksiya*(sı).

ÜMUMİ STATİSTİK ANALİZİ, MÜŞAHİDƏLƏRİN « общий статистический анализ наблюдений; general statistical analysis of observations », G – analiz, – hər hansı mürəkkəb S sistemi üzərində müşahidələr sayı n -in artması ilə belə sistemlərin riyazi modellərindəki parametrlərin sayı m_n -in də artması mümkün olan mürəkkəb S sistemlərini öyrənən riyazi nəzəriyyədir. Bu nəzəriyyənin məsələləri S sistemi üzərində aparılan müşahidələr üzrə onun elə riyazi modellərinin tapılmasından (G – statistik qiymətlərinin) ibarətdir ki, müşahidələr sayı minimal olduqda və müşahidələr haqqında ümumi fərziyyələrlə bu modellər hər hansı mənada verilən yaxınlaşma dəqiqliyi ilə S sisteminə yaxınlaşa bilsinlər: matrislərin, təsadüfi vektorların müşahidə paylanmaları sıxlıqlarının varlığı tələb olunmur, yalnız bunların komponentlərinin bir neçə ilk momentlərinin varlığı tələb olunur və bu zaman m_n və n ədədləri üçün

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ f(m_n, n) < \infty \qquad (*)$$

– G – şərti ödənilməlidir, burada $f(x,y)$, – x -ə görə artan, y -ə görə azalan hər hansı müsbət funksiyadır. Əksər hallarda $f(x, y)$ funksiyası $x\,y^{-1}$ -ə bərabərdir. Bu halda G – şərti Kolmoqorov – Deyev şərti adlanır.

M. ü. s. a.-ndə iki şərtin ödənilməsi fərz olunur:

1) S sisteminin riyazi modellərinin parametrlərinin sayı m_n -in artması ilə sistemin qiymətləndiriləcək xarakteristikalarının dim. – ölçüsü (parametrlərin sayı) dəyişmir;

2) S sistemi üzərində müşahidələr sayı n -in artması ilə riyazi modellərin ölçüsü m_n arta və ya əksinə azala bilər: m_n artdıqda da müşahidələr sayı n m_n -dən asılıdır və ixtiyari cür sürətlə arta bilməz.

M. ü. s. a.-ndə G – statistik qiymətlərin tapılması ideyası aşağıdakı misalda şərh olunur. $\mathbb{R}^{m_n}$ -də kəsilməz məhdud ikinci tərtib törəmələri olan Borel funksiyası $f(x)$ -in, ($x \in \mathbb{R}^{m_n}$) verildiyi fərz olunur; ξ, – $N(a, R_{m_n})$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi m_n – ölçülü vektor olsun, a – orta qiymətlər vektoru, R_{m_n} – kovariasion matrisdir. ξ vektoru üzərində müşahidələrin nəticələri x_k -lar üzrə, $k = 1, ..., n$, (*) G – şərtinin ödənilməsi şərtilə, $f(a)$ kəmiyyəti üçün tutarlı G – statistik qiymətini tapmaq tələb olunur (a vektorunun tutarlı statistik qiyməti kimi $\hat{a} = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} x_k$ kəmiyyətini götürmək olar). M. ü. s. a.-ndə fərz olunur ki, parametrlərin məhdud sayı üçün tutarlı statistik qiymətlər vardır. Bu statistik qiymətlər, məs., momentlər metodu, maksimal doğruyaoxşarlıq metodu və stoxastik approksimasiya metodu ilə tapılır. Tətbiqi məsələlərin bir çoxu orta qiymətlər vektoru a və kovariasion R_{m_n} matrisindən asılı funksiyaların qiymətləndirilməsi ilə əlaqədardır, bunların tutarlı statistik qiymətləri uyğun olaraq, $\hat{a}$ və

$$\hat{a},\ \hat{R}_{m_n} = (n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{a})(x_k - \hat{a})^{\mathsf{T}}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Əgər $f(x)$, a nöqtəsində kəsilməz olarsa, onda m -in qeyd olunmuş qiymətində $f(a) - f(\hat{a}) \xrightarrow{p} 0$ münasibəti ödənilir. Ümumi halda m n -dən asılı olduqda bu belə olmur. Əsas məsələ $f(\hat{a})$ -dan yaxşı olan $G(\hat{a})$ statistik qiymətlərinin axtarılmasıdır və bu qiymətlər elə olmalıdır ki, (*) şərti ödənildikdə $f(a) - G(\hat{a}) \xrightarrow{p} 0$ münasibəti də ödənilsin.

Bu məsələnin həlli üçün

$$u(z, t) = \mathbf{M}\, f(a + z + (R_{m_n}\, t\, n^{-1})^{1/2}\eta)$$

funksiyaları daxil olunur, burada η, – $N(0, 1)$ normal qanunu ilə paylanmış təsadüfi vektor, $z \in \mathbb{R}^{m_n}$, $t \geq 0$ – həqiqi parametrdir. $u(z, t)$ funksiyaları

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = Au(z,t)$$

G – tənliyini ödəyirlər, burada

$$A = (2n)^{-1}\sum_{i,j=1}^{m_n} r_{ij}\,\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j}, \quad u(z,0) = f(a+z),$$

$$R_{m_n} = \left\| r_{ij} \right\|, \quad i, j = 1, ..., m_n.$$

Əgər (*) ödənildikdə, ixtiyari məhdud z üçün

$$p\ \lim_{n\to\infty}\ [\ f(\hat{a}+z) - \mathbf{M}\, f(\hat{a}+z)] = 0$$

olduğu fərz olunarsa, onda $t = 1$ qiymətində G – tənliyinin verilmiş $u(z, 1) = f(\hat{a} + z)$ qiyməti üzrə onun həllinin $u(z, 0)$ başlanğıc qiyməti $f(a + z)$ -in tapılmasına gətirilir, yəni mahiyyət etibarilə məsələ differensial tənliklər üçün tərs məsələyə gətirilir ki, bu məsələni kvaziçevirmələr metodu və Furye çevirməsi metodu ilə həll etmək olur. G – statistik qiymətlərinin tapılmasında bu əsas andır. İsbat ideyası ondan ibarətdir ki, $f(\hat{a} + z) - \mathbf{M}f(\hat{a} + z)$ fərqini martinqal – fərqlər cəmi şəklində ifadə etmək olar. Sonra isə bu cəmə mərkəzi limit teoremini tətbiq etmək və asimptotik normal G – statistik qiymətlərini tapmaq mümkündür.

M. ü. s. a.-nin yaxşı xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, burada ehtimal nəzəriyyəsinin analitik metodları əsasında G – statistik qiymətlər üçün G – tənliklər əvəzinə, daha sadə şəkildə olan bəzi qeyri – xətti tənlikləri tapmaq olur.

G – analizin əsas məsələsi kovariasion matrisi R_{m_n} olan ξ təsadüfi vektoru üçün alınmış $x_1, ..., x_n$ müşahidələri üzrə R_{m_n} kovariasion matrislərinin normalanmış spektral funksiyaları –

$$\mu_{m_n}(x) = m_n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\chi(\lambda_k < x)$$

funksiyalarının Stiltyes çevirmələrinin qiymətləndirilməsi məsələsidir. Çoxölçülü statistik analizdə istifadə olunan kovariasion matrislərin bir çox analitik funksiyalarını $\mu_{m_n}(x)$ spektral funksiyaları vasitəsilə ifadə etmək olur. Məs.,

$$m_n^{-1}\ \mathrm{tr}\ f(R_{m_n}) = \int_0^{\infty} f(x)\, d\mu_{m_n}(x)$$

burada f – analitik funksiyadır.

$\mu_{m_n}(x)$ funksiyasının Stiltyes çevirməsi –

$$\varphi(t, R_{m_n}) = \int_0^{\infty}(1 + t\,x)^{-1}\, d\mu_{m_n}(x) = m_n^{-1}\,\mathrm{tr}\,(I + t\,R_{m_n})^{-1},$$

$$t \geq 0$$

ifadəsinə deyilir, bu zaman $\varphi(t, R_{m_n})$ Stiltyes çevirməsinin G_2 – statistik qiyməti $G_2(t, \hat{R}_{m_n}) = \varphi(\hat{\theta}_n(t), \hat{R}_{m_n})$ ifadəsinə deyilir, burada $\hat{\theta}_n(t)$ –

$$\theta\left(1 - \frac{m_n}{n-1} + \frac{m_n}{n-1}\,\varphi(\theta, \hat{R}_{m_n})\right) = t,$$

$$t > 0,\ m_n < n - 1$$

tənliyinin mənfi olmayan həllidir. $t > 0$ olduqda bu tənliyin müsbət və yeganə həlli vardır. Bəzi şərtlər ödənildiyi halda isbat olunur ki, əgər $t > 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{m_n}{n-1} < 1$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{[G_2(t, \hat{R}_{m_n}) - \varphi(t, R_{m_n})]\sqrt{(n-1)m_n}\, a_n(t) + c_n(t) < x\} =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$$

münasibəti doğrudur, burada $a_n(t)$ və $c_n(t)$

$$\sup_n [\,|a_n(t)| + |c_n(t)|\,] < c < \infty$$

şərtini ödəyirlər (bax, [2]).

Əd.: [1] Г и р к о В. Л., «Вычисл. и прикл. математика», 1986, в. 60, с. 115–21; [2] Г и р к о В. Л., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1986, в. 35, с. 28–31; [3] Г и р к о В. Л., «Вестн. Киевского ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем», 1987, в. 6, с. 40–44; [4] Г и р к о В. Л., Многомерный статистический анализ, К., 1988.

ÜMUMİ STRUKTUR FUNKSİYASI « общая структурная функция; general structure function » – bax, *Struktur funksiya*(s ı).

ÜMUMİ ŞAXƏLƏNƏN PROSES « общий ветвящийся процесс; general branching process », K r a m p – M o d – Y a g e r s p r o s e s i – hər biri təsadüfi ömür sürən və yaşama müddəti ərzində bir neçə dəfə yeni hissəciklər doğuran, bir-birindən asılı olmadan artan hissəciklər toplusunun evolyusiyasını təsvir edən *təsadüfi prosesdir*. Ü. ş. p. modeli şaxələnən proseslər nəzəriyyəsinin biologiya və demoqrafiyada tətbiqində istifadə olunur (bax, [1]). Bax, *Şaxələnən proses*.

Əd.: [1] J a g e r s P., Branching processes with biological applications, N. Y. – L., 1976.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ARKSİNUS PAYLANMASI « обобщенное распределение арксинуса; generalized arcsine distribution » – bax, *Arksinus paylanması.*

ÜMUMİLƏŞMİŞ BEYES STATİSTİK QİYMƏTİ « обобщенная бейесовская оценка; generalized Bayes estimator » – *Beyes statistik qiymətləri* ardıcıllığının requlyar (nöqtəvi) limiti olub, Θ parametrik fəzasında hər hansı σ – sonlu ölçüyə (bu ehtimal ölçüsü olmaya da bilər) nəzərən formal Beyes statistik qiymətidir. Məs., $\bar{x}$ seçimi ortası $\tau \to \infty$ olduqda (θ, σ) parametrlərli normal paylanmanın θ parametrinin Beyes statistik qiymətləri $-(n\bar{x}\sigma^{-2} + \mu\tau^{-2})/(n\sigma^{-2} + \tau^{-2})$ statistikalarının limitidir və kvadratik itki funksiyası olduğu halda θ-nın aprior paylanmasının (μ, τ) parametrlərli normal paylanma olduğu fərz olunur; bununla belə, $\bar{x}$ seçimi ortası, $\Theta = \mathbb{R}$-də $d\theta$ aprior Lebeq ölçüsünə nəzərən θ-nın formal Beyes statistik qiymətidir. Ü. B. s. q. minimaks statistik qiymətlərin axtarılmasında mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] З а к с Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

ÜMUMİLƏŞMİŞ BLOK PLAN « обобщенный блочный план; generalized block design » – bax, *Blok plan.*

ÜMUMİLƏŞMİŞ DİSPERSİYA « обобщенная дисперсия; generalized variance » – r e q r e s s i o n e k s p e r i m e n t i n keyfiyyət xarakteristikalarından biridir.

$$y = \boldsymbol{\theta}^{\mathsf{T}} f(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma^2 \mathbf{I}_n),$$

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^{\mathsf{T}}$$

reqression modelinin verildiyi fərz olunur, burada θ – reqressiya parametridir.

X planının normalanmış informasion matrisi –

$$\mathbf{M}\, X = \int_P f(p) f^{\mathsf{T}}(p) X(dp)$$

olsun (burada P planlama çoxluğudur). Onda

$$G = \max_{p \in P} f^{\mathsf{T}}(p)(\mathbf{M}\, X)^{-1} f(p)$$

kəmiyyətinə ü m u m i l ə ş m i ş d i s p e r s i y a deyilir.

Ü. d.-nın minimal qiymət aldığı X planına G – o p t i m a l p l a n deyilir. Bu planda reqression proqnozun ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymətlərinin bütün $p \in P$ nöqtələri üzrə dispersiyanın maksimumu ən kiçik qiymətini alır. Kifer – Volfovits ekvivalentlik teoreminə əsasən G – optimal plan eyni zamanda D – optimal plandır.

Bax, *Ən kiçik kvadratlar metodu.*

Əd.: [1] Е р м а к о в С. М., Ж и г л я в с к и й А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987.

ÜMUMİLƏŞMİŞ KORRELYASİON FUNKSİYA « обобщенная корреляционная функция; generalized correlation function » – bax, *Ümumiləşmiş stasionar proses*.

ÜMUMİLƏŞMİŞ QAUSS PROSESİ « обобщенный гауссовский процесс; generalized Gaussian process » – bax, *Qauss prosesi.*

ÜMUMİLƏŞMİŞ ÖLÇÜ « обобщенная мера; generalized / signed measure / charge » – bax, *Yük.*

ÜMUMİLƏŞMİŞ PUASSON PAYLANMASI « обобщенное распределение Пуассона; Poisson compound distribution » – bax, *Puasson paylanması* m ü r ə k k ə b ü m u m i l ə ş m i ş.

ÜMUMİLƏŞMİŞ PUASSON PROSESİ « обобщенный пуассоновский процесс; compound Poisson process » –

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k, \quad t \geq 0$$

şəklində ifadə olunan *təsadüfi prosesdir*, burada $\xi_1, \xi_2, \ldots$, – $\nu(t)$ prosesindən asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı, $\nu(t)$ – Puasson prosesidir. $\zeta(t)$ asılı olmayan artımlarlı, sıçrayışvari trayektoriyalara malik təsadüfi prosesdir. Tərsinə, əgər asılı olmayan artımlarlı ixtiyari $\{\zeta_t,\ t \geq 0\}$ təsadüfi prosesinin trayektoriyaları sıçrayışvari trayektoriyalar olarsa, $\{\zeta(t) - \zeta(0),\ t \geq 0\}$ prosesi Ü. P. p.-dır.

Əgər $v(t)$ bircins proses, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, $\zeta(t)$ bircins prosesdir. Bu halda prosesin xarakteristik funksiyası

$$\mathbf{M}\, e^{i\lambda\zeta(t)} = \exp\{ita \int (e^{i\lambda x} - 1)\, dF(x)\}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada a, – $v(t)$ prosesinin parametridir, $\mathbf{M}v(t) = at$ və F, – ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

ÜMUMİLƏŞMİŞ REQRESSİON EKSPERİMENT « обобщенный регрессионный эксперимент; generalized regression experiment » – asılı olmayan ölçmələr nəticələri $y_i = \eta(x_i, \theta) + \varepsilon_i$ şəklində verilən y_i -lərin toplusudur, $\mathbf{M}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2(x_i, \theta)$; $\eta(\cdot, \cdot)$ funksiyalarının requlyarlıq şərtlərini və $\sum_{i=1}^{N} (\eta(x_i, \theta) - \eta(x_i, \theta'))^2 > 0, \quad \theta \neq \theta'$ şərtini ödəməsi tələb olunur. Sonuncu şərt yalnız $\sigma(\cdot, \cdot)$ funksiyası naməlum parametrlərin bir hissəsindən asılı olmadıqda ödənilmir. Lakin sonuncu misalda ölçmə paylanmalarının üçüncü və dördüncü momentləri məhz ilk iki momentin funksiyaları olarsa, onda (y_i, y_i^2) vektoru ikiölçülü Ü. r. e. ilə təsvir olunur. Analoji reduksiya qarışıq modelin dispersion analizi üçün də faydalıdır.

Ü. r. e.-də θ parametrinin statistik qiymətlərinin asimptotik xassələri araşdırılmışdır (bax, *Ardıcıl planlaşdırılması eksperimentin*). Qeyd etmək lazımdır ki, əgər y_i -nin paylanması eksponent ailəyə daxil olunmuşdursa (məs., parametrlərli polinomial, x_i və θ -dan asılı), onda ölçmələrin ilk iki momentinə əsaslanan Jirina iterasion statistik qiymətləri iterasiyaların sayı artdıqda maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətlərinə asimptotik ekvivalent olur.

Əd.: [1] М а л ю т о в М. Б., «Изв. вузов. Математика», 1983, № 11, с. 19–41.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SPEKTRAL SIXLIQ « обобщенная спектральная плотность; generalized spectral density » – bax, *Spektral nəzəriyyələr*(i) q e y r i – s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n.

ÜMUMİLƏŞMİŞ STASİONAR PROSES « обобщенный стационарный процесс; generalized stationary process » – olduqca hamar əsas $\varphi(t)$ funksiyalarının hər hansı D vektor fəzasında verilən $X(\varphi)$ *ümumiləşmiş təsadüfi prosesidir* və ya elə $X(\varphi)$ ümumiləşmiş təsadüfi prosesidir ki, $\{X(V_a\varphi_1), X(V_a\varphi_2), \ldots, X(V_a\varphi_n)\}$ təsadüfi vektorunun ehtimal paylanmaları ixtiyari müsbət tam n, həqiqi a və D -dən olan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funksiyaları üçün $\{X(\varphi_1), X(\varphi_2), \ldots, X(\varphi_n)\}$ vektorunun ehtimal paylanması ilə üst-üstə düşür (d a r m ə n a d a Ü. s. p.), burada $V_a\varphi(t) = \varphi(t + a)$ və ya da ki,

$$\mathbf{M}\, X(\varphi) = \mathbf{M}\, X(V_a\varphi),$$

$$\mathbf{M}\, X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)} = \mathbf{M}\, X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}$$

münasibətləri bütün həqiqi a -lar üçün ödənilir (g e n i ş m ə n a d a Ü. s. p.). $D = D_\infty$ olduqda və (bir sıra başqa hallarda) $X(\varphi)$ prosesinin o r t a q i y m ə t i n i n f u n k s i o n a l ı $\mathbf{M}\, X(\varphi) = m(\varphi)$ və k o r r e l y a s i o n f u n k s i o n a l ı $\mathbf{M}\, X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)} = B(\varphi_1, \varphi_2)$ aşağıdakı şəkildədir:

$$m(\varphi) = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = B\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(s)\, \overline{\varphi_2(s - t)}\, ds \right) = B(\varphi_1 * \hat{\varphi}_2), \tag{2}$$

burada $*$ – kompozisiya işarəsidir, $\hat{\varphi}(t) = \overline{\varphi(-t)}$; odur ki, $m(\varphi)$, m sabiti ilə birqiymətli təyin olunur və m $X(\varphi)$ Ü. s. p.-nin o r t a q i y m ə t i adlandırılır, $B(\varphi_1, \varphi_2)$ isə ümumiləşmiş $B(\varphi)$ funksiyası (D -də kompleksqiymətli xətti funksionalı) ilə təyin olunur və $B(\varphi_1, \varphi_2)$ $X(\varphi)$ prosesinin ü m u m i l ə ş m i ş k o r r e l y a s i o n f u n k s i y a s ı adlanır. Bu halda $X(\varphi)$ Ü. s. p. və onun korrelyasion funksionalı $B(\varphi_1, \varphi_2)$ aşağıdakı şəkildə spektral ayrılışla ifadə olunur:

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, d\,\mathrm{Z}(\lambda), \quad \widetilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, \varphi(t)\, dt, \tag{3}$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}_1(\lambda)\, \overline{\widetilde{\varphi}_2(\lambda)}\, dF(\lambda), \tag{4}$$

burada $F(\lambda)$, – $X(\varphi)$ Ü. s. p.-nin həqiqi azalmayan spektral funksiyasıdır və $D = D_\infty$ olduğu halda müəyyən bir $p \geq 0$ qiymətində

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^2)^{-p} dF(\lambda) < \infty \tag{5}$$

şərtini ödəyir, $\mathrm{Z}(\lambda)$ isə $\mathbf{M}\,|d\,\mathrm{Z}(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$ şərtini ödəyən qeyri – korrelyar artımlarlı təsadüfi funksiyadır (bax, [1] – [3]). D fəzası kimi hər hansı tam analitik funksiyalar fəzasını seçdikdə spektral funksiyası sonsuzluqda eksponensial artan $F(\lambda)$ olan $X(\varphi)$ Ü. s. p.-ni almaq olur (bax, [4]).

(3) və (4) ayrılışları stasionar təsadüfi proseslərin bunlara yaxın spektral ayrılışlarını ümumiləşdirir; Ü. s. p. bəyaz küy olduqda $F(\lambda) = a_1\lambda + a_2$, burada $a_1 > 0$ və a_2 – sabitlərdir.

Ü. s. p. anlayışının ümumiləşdirilmiş halı $\mathbb{R}^n$ fəzasında b i r c i n s ü m u m i l ə ş m i ş m e y d a n anlayışıdır, yəni ümumiləşmiş təsadüfi $X(\varphi)$ meydanı [burada $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$, – n – dəyişənli finit sonsuz differensiallanan funksiyalar fəzası $D_\infty^{(n)}$ fəzasına aid funksiyadır]. Bu ümumiləşmiş meydan Ü. s. p.-in təyin olunması üçün qoyulan bütün şərtləri ödəyir, bu şərtlə ki, $V_a\varphi(t) = \varphi(t + a) = \varphi(t_1 + a_1, \ldots, t_n + a_n)$, burada $t = (t_1, \ldots, t_n)$ və $a = (a_1, \ldots, a_n)$, – $\mathbb{R}^n$ -də vektorlardır. $\mathbb{R}^n$ -də verilmiş bircins ümumiləşmiş $X(\varphi)$ meydanı üçün (1) – (5) düsturlarına tamamilə analoji düsturlar doğrudur;

bu halda $X(\varphi)$ və $B(\varphi_1, \varphi_2)$-nin spektral ayrılışları aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$X(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, \mathrm{Z}(d\lambda),$$

burada

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\lambda}\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad t\lambda = t_1\lambda_1 + ... + t_n\lambda_n,$$

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\varphi}_1(\lambda)\, \overline{\varphi_2(\lambda)}\, dF(\lambda),$$

burada $F(d\lambda)$, – $\mathbb{R}^n$-də mənfi olmayan elə ölçüdür ki, hər hansı $p > 0$ qiymətində

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\lambda|^2\right)^{-p} dF(\lambda) < \infty, \quad |\lambda| = (\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2)^{1/2},$$

$\mathrm{Z}(d\lambda)$, – $\mathbb{R}^n$-də elə təsadüfi ölçüdür ki, $\mathbf{M}\left|\mathrm{Z}(d\lambda)\right|^2 = F(d\lambda)$ (bax, [3], [5]).

Əd.: [1] Г е л ь ф а н д И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–56; [2] И т о К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139–51; [3] Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] O n o y a m a T., «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A», 1959, v. 13, № 2, p. 208–13; [5] Я г л о м А. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 3, с. 292–338.

ÜMUMİLƏŞMİŞ STOXASTİK KONVOLYUSİYA « обобщенная стохастическая свертка; generalized stochastic convolution » – hər hansı $(X, \mathscr{X})$ ölçülən fəzasında təyin olunmuş *ehtimal ölçülərinin* $B(X)$ çoxluğunda semi – qrup əməlidir. Ü. s. k. anlayışı bir sıra məlum ehtimal əməliyyatlarının – K. Urbanik [1], B. M. Levitan [2], R. Aski, C. Qasper [3] konvolyusiyaları, hiperqrup konvolyusiyaları və s. kimi əməliyyatların xassələrinin aksiomlaşdırılmasında yaranır. Ən çox aşağıdakı model istifadə olunur: 1) X – separabel tam metrik (lokal kompakt) fəza, $\mathscr{X}$ – onun Borel çoxluqlarının σ – cəbridir; 2) $(B(X), \circ)$ – semitopoloji, vahidi δ_α (δ_α, – $a \in X$-də topalanmış ölçüdür) olan kommutativ semi – qrupdur; 3) $\circ$ əməli ehtimal ölçülərinin qabarıq kombinasiyasına nəzərən distributivdir; 4) X fəzasının özünə elə $x \mapsto x^*$ kəsilməz inikası vardır ki, bu inikasda $\mu^*(A) = \mu(A^*)$, $\mu \in B(X)$ belə xassələri ödəyir: $\mu^{**} = \mu$ və $(\mu_1 \circ \mu_2)^* = \mu_1^* \circ \mu_2^*$. «Stoxastik» adı onunla əsaslandırılmışdır ki, bir qayda olaraq, $\mu = \delta_u \circ \delta_v$ $(u, v \in X)$ ölçüsü nöqtəvi ölçü olmur.

Əgər elə separabel lokal kompakt M fəzası və $X \times M$-də ölçülən məhdud $\omega \in L^1(X \times M)$ funksiyası varsa ki, bunlar üçün

$$\Phi(\mu, m) = \int_X \omega(m)\, \mu(dx)$$

inikası $L^1(M)$-də cəbri inyektiv simmetrik homomorfizmdir, onda Ü. s. k. z ə i f r e q u l y a r adlanır. Ölçülən nüvələrli inteqral çevirmələrin tətbiqi ideyasını K. Urbanik təklif etmiş və göstərmişdir ki, onun əvvəllər daxil etdiyi ixtiyari stoxastik konvolyusiya zəif requlyardır. Əgər ω dəyişənlərinin toplusu üzrə kəsilməz funksiya olarsa, $\circ$ konvolyusiyası requlyar adlanır. Requlyarlıq üçün zəruri və kafi şərtlər onunla təyin olunan yüklərin (ümumiləşmiş ölçülərin) simmetrik halqasının topolojiləşdirilməsi terminlərilə ifadə oluna bilinər. Requlyar stoxastik konvolyusiyaya ikili obyekt kimi hər hansı requlyar stoxastik konvolyusiya da daxil olunur. Belə ikiqat əməliyyatlar üçün müsbət və mənfi müəyyən funksiyaların ehtimal nəzəriyyəsini qurmaq mümkündür.

Əgər ixtiyari nisbi kompakt $B \subset B(X)$ altçoxluğunun bölənləri çoxluğu da nisbi kompakt olarsa, Ü. s. k. düzgün konvolyusiya adlanır (bax, [4]). Requlyar Ü. s. k. üçün bu halda Levi – Xinçin düsturunun analoqları eyniliklə involyutiv * inikasında alınmış, Puasson və Qauss paylanmalarının analoqları daxil olunmuşdur, ikiqat requlyar konvolyusiyalar üçün isə konvolyusiyaların tapılması üçün tənliklər verilmişdir.

Requlyar Ü. s. k.-nın arifmetik xassələri hələ ki, yalnız konkret realizasiyalar üçün araşdırılmışdır. Burada qruplar hallarından fərqli hallarda, əsas etibarilə, D. Kendall tərəfindən [5]-də delfi semiqrupları nəzəriyyəsi əsasında A. Ya. Xinçin faktorizasiya teoremlərinin analoqları alınmışdır (bax, o cümlədən, [6], [7]). Ümumiləşmiş konvolyusiyaların stoxastikliyi bir çox hallarda baxılan konvolyusiyalar üçün $B(X)$-dən olan ayrılmayan komponentlərin bütün paylanmaların I_0 sinfinin təsviri problemini həll etmək imkanını verir (bax, [7] – [9]).

Sonsuz bölünən paylanmaların xarakterizasiyalarının analoqları sonsuz kiçilən ölçülərin Ü. s. k.-lar seriyaları sxemi üçün limit halı kimi ümumi modeldə verilmişdir (bax, [4]). Burada Qauss qanunlarına yığılma şərtləri də araşdırılmışdır. Ümumi halda bir çox klassik limit teoremlərinin analoqlarının tapılması prosesində Ü. s. k. ölçüləri ardıcıllıqlarının mərkəzləndirilmə və normalandırılma əməliyyatlarının ümumi hal üçün təyin edilməsi problemi yaranır. Bu məsələnin həlli üçün [10]-da şərh olunmuş (fəs. 2, 5) Ü. s. k.-nın tədqiqinin ümumi prinsiplərindən istifadə etmək olar. Ü. s. k. üçün limit teoremlərində yığılma sürətlərinin statistik qiymətlərini tapılmaq üçün, Ü. s. k. nın xarakterizasion məsələlərinin dayanıqlılığını təyin etmək üçün təbii instrument ümumi tipli ideal metrikalardır.

Əd.: [1] U r b a n i k K., «Studia Math.», 1964, v. 23, p. 217–45; 1984, v. 80, p. 167–69; 1986, v. 83, p. 57–95; [2] Л е в и т а н Б. М., «Вестник ЛГУ», 1960, т. 7, № 2, с. 81–115; [3] A s k e y R., G a s p e r G., «J. analyse math.», 1977, t. 31, p. 48–68; [4] В о л ь к о в и ч В. Э., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1985, с. 15–24; М., 1987, с. 19–32; [5] K e n d a l l D., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1968, Bd 9, S. 163–95; [6] B i n g h a m N. H., «Proc. Camb. Phill. Soc.», 1973, v. 73, p. 145–56; [7] Т р у х и н а И. П., в кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, т. 34, Хар., 1980, с. 136–46; [8] Т р у х и н а И. П., «Зап. науч. сем. ЛОМИ», 1979, т. 87, с. 143–58; [9] О с т р о в с к и й И. В., «Матем. физ. и функц. анализ», 1973, т. 4, с. 3–12; [10] З о л о т а р е в В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

ÜMUMİLƏŞMİŞ TƏSADÜFİ MEYDAN « обобщенное случайное поле; generalized random field » – tipik realizasiyaları hamar G çoxobrazlısında verilən ümumiləşmiş funksiyalar olan, bu çoxobrazlıda *təsadüfi funksiyadır.* Başqa sözlə, belə təsadüfi meydanlar üçün, ümumiyyətlə, bunların $x \in G$ nöqtələrində qiymətləri $f(x)$ təyin olunmamışdır, lakin G çoxobrazlısında yoxlanma məqsədilə seçilən hamarlayıcı $\varphi(x)$ funksiyaları üçün (bunların sayı kifayət qədərdir)

$$f_\varphi = \int_G \varphi(x) f(x) dx \qquad (*)$$

«orta kəmiyyətləri» təyin olunmuşdur. Daha dəqiq, G – sonsuz hamar çoxobrazlı, $D(G)$, – G -də təyin olunmuş, sonsuz differensiallanan finit funksiyalarının fəzası olsun və bu fəzada belə müntəzəm finit funksiyalarının və onların bütün törəmələrinin ardıcıllıqları üçün müntəzəm yığılmanın adi topologiyasının təyin olunduğu fərz olunur. Onda əgər hər hansı $(\Omega, \mathscr{L}, \mu)$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətlərin $L_0(\Omega, \mathscr{L}, \mu)$ fəzasına $D(G)$ fəzasının kəsilməz xətti $D(G) \to L_0(\Omega, \mathscr{L}, \mu)$, $\varphi \to f_\varphi$, $\varphi \in D(G)$ inikası verilmişdirsə, G -də Ü. t. m. təyin olunmuşdur; $L_0(\Omega, \mathscr{L}, \mu)$ ölçü üzrə yığılma topologiyası ilə təmin olunmuşdur (bax, [7]). Əgər G -də ümumiləşmiş funksiyaların $D'(G)$ fəzası $D'(G)$ -nin silindrik çoxluqlarının doğurduğu σ – cəbrlə ehtimal fəzası olarsa, (*) inikası isə $f_\varphi(T) = (T, \varphi)$, $T \in D'(G)$, $\varphi \in D(G)$ düsturları ilə verilərsə, $\{f_\varphi, \varphi \in D(G)\}$ Ü. t. m. kanonik təsadüfi meydan adlanır. Aydın olmuşdur ki, sonluölçülü G çoxobrazlısında ixtiyari Ü. t. m. G -də hər hansı yeganə bir kanonik təsadüfi meydana ehtimali izomorfdur (bax, [2]).

Burada verilmiş tərifin bir sıra təbii modifikasiyaları vardır: məs., vektor qiymətlərli Ü. t. m.-a baxmaq olar və ya $D(G)$ fəzası əvəzinə, tərifdə, G -də əsas funksiyaların daha geniş hər hansı bir fəzasından istifadə etmək olar [məs., $G = \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ hallarında sonsuz differensiallanan, öz törəmələri ilə sonsuzluqda ixtiyari $|x|^k$, $k = -1, -2, -3, ...$, $x \in \mathbb{R}^n$ mənfi qüvvət üstündən daha sürətlə azalan funksiyalar fəzası $S(\mathbb{R}^n)$].

Ü. t. m. anlayışı realizasiyaları adi funksiyalar olan klassik təsadüfi meydanlar və təsadüfi prosesləri də əhatə edir. Bu anlayış 20-ci əsrin 50-ci illərinin ortalarında bir çox təbii stoxastik anlayışların klassik təsadüfi meydanlar terminlərində kifayət dərəcədə sadə ifadə oluna bilinməməsi, Ü. s. m. dilində isə sadə və incəliklə ifadə edilməsi ilə əlaqədar yaranmışdır. Məs., $D(\mathbb{R}^n)$ -də, $n = 1, 2, ...$ ixtiyari müsbət təyin olunmuş aşağıdakı şəkildə bixətti forma –

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} W(x_1, x_2)\, \varphi(x_1) \varphi(x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R}^n)$, $W(x_1, x_2)$ müsbət müəyyən, simmetrik ümumiləşmiş ikidəyişənli funksiya olduqda, $\mathbb{R}^n$ -də birqiymətli olaraq $\{f_\varphi, \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$ Qauss Ü. t. m.-nı təyin edir, bu meydanın kovariasiyası aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\int f_{\varphi_1} f_{\varphi_2} d\mu = (\varphi_1, \varphi_2)$$

[μ – bu meydana uyğun təyin olunmuş, $D'(\mathbb{R}^n)$ -də ehtimal ölçüsüdür].

Bu Ü. t. m. $W(x_1, x_2)$ yalnız olduqca yaxşı funksiya olduqda klassik meydan olur (məs., kəsilməz və məhdud funksiya olduqda). Digər misallar: $\mathbb{R}^n$ -də asılı olmayan qiymətlərli Ü. t. m. (bax, [2]) və ya $\mathbb{R}^n$ -də avtomodel təsadüfi meydanlar adlandırılan meydanlar (bax, [6]) (bunlar arasında isə klassik meydanlar, ümumiyyətlə, yoxdur).

Ü. t. m.-ların tədqiqinə maraq (xüsusən də, Markov təsadüfi meydanlarının) 20-ci əsrin 70-ci illərində Kvant fiziki meydanının qurulması məsələsi ilə $\mathbb{R}^n$ -də Markov Ü. t. m.-nın qurulması məsələsi arasında əlaqənin aşkar edilməsindən sonra artmışdır; $n > 1$ halında (bax, [5]).

Ü. t. m.-ların tədqiqini stimullaşdıran digər mühüm oblast stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsidir (xüsusilə də, xüsusi törəməli stoxastik tənliklər).

Əd.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Э., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–56; [4] Kiyosi Ito, «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1954, v. 28, № 3, p. 209–23; [5] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [6] Добрушин Р. Л., в сб.: Многокомпонентные случайные системы, М. – Л., 1978, с. 179–213; [7] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи. матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67–122.

ÜMUMİLƏŞMİŞ TƏSADÜFİ PROSES « обобщенный случайный процесс; generalized stochastic / random proses » – kəsilməz zaman arqumenti t -dən asılı elə ζ təsadüfi prosesidir ki, onun qeyd olunmuş zaman anlarında qiymətləri, ümumiyyətlə, mövcud deyildir, amma bu anlarda yalnız $\zeta(\varphi)$ «prosesinin hamarlanmış qiymətləri» vardır, bu qiymətlər isə prosesin qiymətlərini ölçmə nəticələri kimi təsvir edir; ölçmə nəticələri isə olduqca hamar çəki funksiyası $\varphi(t)$ (yəni impulsal keçid funksiyası) olan bütün mümkün ola bilən xətti ölçmə cihazlarının köməyilə alınır. $\zeta(\varphi)$ prosesi sonsuz differensiallanan finit φ funksiyalarının D_∞ fəzasının (və ya ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsində istifadə olunan əsas funksiyaların hər hansı bir digər fəzasının) hər hansı ehtimal fəzasında təyin olunmuş ζ təsadüfi kəmiyyətlərinin L_0 fəzasına kəsilməz xətti inikasıdır; ζ -nın realiizasiyaları $x(\varphi)$ adi, t arqumentinin ümumiləşmiş funksiyalarıdır.

Klassik (yəni adi) $\zeta(t)$ təsadüfi proseslərinə xüsusi Ü. t. p. kimi baxmaq olar ki, bu halda bunlar

$$\zeta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \zeta(t)\, dt$$

kimi təyin olunur; belə yanaşma faydalı ola bilər, çünki Ü. t. p. ζ -nın ixtiyari n tərtib $\zeta^{(n)}$ törəmələri vardır və bunları $\zeta^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \zeta(\varphi^{(n)})$ bərabərliyi ilə təyin etmək olur (bax, məs., *Təsadüfi proses* stasionar artımlarlı). Ü. t. p.-ə mühüm misal klassik təsadüfi proses olmayan *bəyaz küy* prosesidir və bu proses stasionar ümumiləşmiş proseslər sinfindəndir. Ü. t. p. anlayışının ümumiləşmişi *ümumiləşmiş təsadüfi meydan* anlayışıdır.

Əd.: [1] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853–56; [2] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139–51; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

ÜMUMİLƏŞMİŞ UİŞART PAYLANMASI « обобщенное распределение Уишарта; Wishart generalized distribution » – bax, *Uişart paylanması* ü m u m i l ə ş m i ş.

*__ÜST PİLLƏ ANI « верхний лестничный момент; upper ladder time »__ – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

*__ÜST PİLLƏ BOYU « верхняя лестничная высота; upper ladder height »__ – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

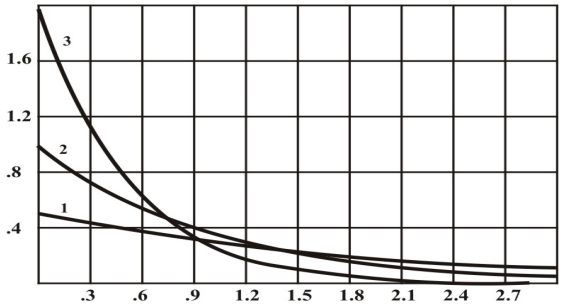
*__ÜST PİLLƏ İNDEKSİ « верхний лестничный индекс; upper ladder index »__ – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

*__ÜST PİLLƏ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİ « верхние лестничные случайные величины; upper ladder random variables »__ – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi*.

ÜSTLÜ PAYLANMA « показательное распределение; exponensial distribution », e k s p o n e n s i a l p a y l a n m a, – paylanma sıxlığı (bax, şəkil)

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

olan, $[0, \infty)$ -da topalanmış kəsilməz ehtimal paylanmasıdır, λ – paylanmanın parametridir.



(1) $\lambda = 0{,}5$; (2) $\lambda = 1$; (3) $\lambda = 2$ olduqda üstlü paylanmanın sıxlıq funksiyaları əyriləri

Ü. p.-nın xarakteristik funksiyası $f(t) = (1 - it/\lambda)^{-1}$, riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $1/\lambda$ və $1/\lambda^2$, medianı $\ln 2/\lambda$, asimmetriyası $\gamma_1 = 2$, ekssesi isə $\gamma_2 = 6$ -ya bərabərdir.

Ü. p. k e ç m i ş i n t ə s i r s i z l i k x a s s ə s i (M a r k o v x a s s ə s i) ilə xarakterizə olunur: mənfi olmayan X təsadüfi kəmiyyətinin üstlü qanunla paylanması üçün ixtiyari $x, y > 0$ qiymətlərində $\mathbf{P}\{X > x + y \mid X > y\} = \mathbf{P}\{X > x\}$ bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafidir. Ü. p. *Pirson paylanmaları* ailəsinin X tipinə aiddir, *qamma – paylanmanın* xüsusi halıdır (həmçinin *Erlanq paylanması* və *Veybul paylanmasının* da).

Ü. p. Puasson prosesi ilə sıx bağlıdır: əgər hadisələr axını Puasson prosesi ilə təsvir olunursa, onda ardıcıl baş verən hadisələr arasında keçən müddətlər (bunlar təsadüfi kəmiyyətlərdir) Ü. p.-ya tabe asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Ü. p.-nın bu xassəsinə görə o, kütləvi xidmət nəzəriyyəsi və etibarlılıq nəzəriyyəsində geniş tətbiq olunur.

Ü. p.-nın diskret analoqu *həndəsi paylanmadır.*

Əd.: [1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

ÜSTÜNLÜK İNDİKATORU « предпочтения индикатор; preference indicator » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

ÜSTÜNLÜK MEYDANI « предпочтения поле; ordering field » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

ÜSTÜNLÜK MÜNASİBƏTİ « предпочтения отношение; ordering relation » – bax, *Faydalılıq nəzəriyyəsi.*

ÜSTÜNLÜKLƏR ANALİZİ « предпочтений анализ; preference analysis » – bax, *Çoxölçülü şkallanma.*

VAHİDİ (SPORADİK) TƏSADÜFİ PROSES « единичный случайный процесс; unit random process » – bax, *Binar təsadüfi proses.*

VALD EYNİLİYİ « Вальда тождество; Wald's indentity » – sonlu riyazi gözləməsi $\mathbf{M}\xi_1$ olan eyni qanunla paylanmış asılı olmayan, təsadüfi τ kəmiyyəti sayda, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *təsadüfi kəmiyyətlərinin* cəmi $S_\tau = \xi_1 + \ldots + \xi_\tau$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi üçün eynilikdir:

$$\mathbf{M}\, S_\tau = \mathbf{M}\xi_1 \cdot \mathbf{M}\,\tau ;$$

τ , – $\mathscr{A}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ hadisələr σ – cəbri axınına nəzərən Markov anıdır və $\mathbf{M}\tau < \infty$. V. e. A. Vald tərəfindən ardıcıl analizdə tətbiqlə bağlı müəyyən olunmuşdur. Əgər $\mathbf{M}\xi_1 = 0$ və $1 < \alpha \le 2$ şərtini ödəyən hər hansı α üçün $\mathbf{M}\left|\xi_1\right|^\alpha < \infty$ olarsa, $\mathbf{M}S_\tau = 0$. V. e.-nin doğruluğu üçün $\mathbf{M}(\tau^{1/\alpha}) < \infty$ şərti kafi şərtdir (bax, [3]). Əgər $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 < \infty$ və $\mathbf{M}\tau < \infty$ olarsa, onda $\mathbf{M}(S_\tau - \mathbf{M}\xi_1 \tau)^2 = \sigma^2\, \mathbf{M}\tau$ eyniliyi də doğrudur (bax, [1]). Diskret və kəsilməz parametrli martinqallar üçün analoji münasibətlər doğrudur (bax, *Moment eynilikləri martinqallar üçün*).

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] Р о б б и н с Г., С и г м у н д Д., Ч а о И., Теория оптимальных правил остановки, пер. с англ., М., 1977.

VALD KRİTERİSİ « Вальда критерий; Wald test » – mürəkkəb statistik hipotezləri müqayisəetmə məsələsin-də A. Vald tərəfindən təklif edilmiş *statistik kriteridir* (bax, [1]). $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ – naməlum ω parametrindən asılı $\mathbf{P}_\omega$ paylanmasına mənsub təkrar seçim olsun; $\omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^s$. $r \le s$ şərti ilə r sayda $h_1(\omega), \ldots, h_r(\omega)$ həqiqi funksiyalarından ibarət $h(\omega) = (h_1(\omega), \ldots, h_r(\omega))'$ vektor – funksiyası ilə təyin olunan $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : h(\omega) = 0\}$ altçoxluğu seçilir, $\Omega_0 \subset \Omega$. $H_0 : \omega \in \Omega_0$ və $H_1 : \omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ statistik hipotezlərini müqayisəetmə məsələsi araşdırılır.

V. k.

$$n h'(\omega_n^*)\,[H'(\omega_n^*)\Sigma^{-1}(\omega_n^*)\,H(\omega_n^*)]\; h(\omega_n^*) \qquad (*)$$

statistikasına əsaslanır və (*) statistikasının böyük qiymətlərində H_0 hipotezini inkar edir, burada ω_n^*, – ω parametri üçün maksimal doğruyaoxşarlıq metodu ilə hesablanan statistik qiymət, $\Sigma(\omega)$, – $\mathbf{P}_\omega$ ailəsinin Fişer informasiya matrisi, $H(\omega)$ isə $\partial h_j(\omega)/\partial\omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, r$ komponentlərindən ibarət $(s \times r)$ – ölçülü matrisdir.

(*) statistikası H_0 hipotezi seçildikdə və $n \to \infty$ olduqda sərbəstlik dərəcəsi sayı r olan asimptotik mərkəzi χ^2 – paylanması ilə paylanır. Buna görə də, V. k. asimptotik oxşar kriteridir. Bir-birinə yaxınlaşan alternativlərə baxıldıqda (*) statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı r olan asimptotik qeyri – mərkəzi χ^2 – paylanması ilə paylanır və bu halda qeyri – mərkəzi kriteri aşkar ifadə olunur (bax, [1]).

V. k. olduqca ümumi requlyarlıq şərtlərilə *doğruyaoxşarlıq nisbəti kriterisi*, *Rao kriterisi*, $C(a)$ *statistik kriterisinə* asimptotik ekvivalentdir, deməli, bu kriteri uyğun asimptotik optimal xassələrə malikdir.

Əd.: [1] W a l d A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, № 3, p. 426–82.

VALD REDUKSİYASI « Вальда редукция; Wald reduction » – bax, *Ən əlverişsiz paylanma.*

VALD RİSKİ « Вальда риск; Wald risk » – bax, *Statistik həllər nəzəriyyəsi.*

VALD – HEFDİNQ BƏRABƏRSİZLİYİ « Вальда – Хэфдинга неравенство; Wald – Hoeffding inequality » – hipotezlərin ardıcıl yoxlanılması məsələsində *həlledici qaydalar* üçün müşahidələrin orta müddətinin aşağı sərhədini təyin edən bərabərsizlikdir. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, $p(x)$ bu təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasının sıxlıq funksiyası, $H_i : p(x) = p_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ isə $p(x)$ funksiyası üçün irəli sürülmüş sadə hipotezlər, $\alpha_{ij} = \mathbf{P}_i\{d = j\}$, $i \ne j$ isə hər hansı (τ, d) həlledici qaydasının xətalarının ehtimalları olsun (i indeksi H_i hipotezinin yerinə yetirilməsi ilə ehtimalların araşdırılmasını göstərir). Onda

$$\mathbf{M}_i\tau \ge \max_{j \ne i} \frac{1}{\mathrm{I}(i, j)} \sum_{n=1}^{k} \alpha_{i,j} \ln(\alpha_{in}/\alpha_{jn})$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\mathrm{I}(i, j) = \mathbf{M}_i \ln\{p_i(\xi_1)/p_j(\xi_1)\}$ – Kullbak – Leybler informasion ədədləridir və $0 \cdot \ln(0/c)$ tipli ifadə ixtiyari $c > 0$ qiymətində sıfra bərabər götürülür. $k = 2$ olduqda bu bərabərsizlik [1]-də isbat olunmuşdur. k -nın böyük qiymətləri üçün bu bərabərsizliyin bir sıra modifikasiyaları alınmışdır (bax, [3], [4]).

Əd.: [1] В а л ь д А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ш и р я е в А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] H o e f f d i n g W., «Ann. Math. Stat.», 1960, v. 31, № 2, p. 352–68; [4] Б у р н а ш е в М. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.» 1979, т. 43, № 6, с. 1203–26.

VAN DANTSİQ SİNFİ « ван Данцига класс; van Dantzig class » – elə *xarakteristik funksiyalar* toplusudur ki, xarakteristik funksiyanın bu sinifdən olması üçün o, aşağıdakı şərtləri ödəməlidir: 1) f *analitik xarakteristik funksiya* olmalıdır; 2) $t \in \mathbb{R}^1$ olduqda $1/f(it)$ nisbəti xarakteristik funksiya olmalıdır. Normal paylanmanın xarakteristik funksiyası V. D. s.-ndəndir.

Belə xarakteristik funksiyaların təsviri problemi D. van Dantsiq tərəfindən dəfələrlə təklif olunmuşdur (bax, [1]). Bu problem hələ də öz həllini tapa bilməmişdir. V. D. s.-nə aid funksiyaların bir sıra xassələri [2] və [3]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] Prize questions, Nieuw Archiel voor Wiskunde, ser. 3, 1958, v. 6, p. 28 (question № 9); 1959, v. 7, p. 41 (question № 5); 1960, v. 8, p. 42, (question № 50); [2] Lukacs E., «Теория вероятн. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 1, с. 114–25; [3] Островский И. В., «Тр. Матем. ин.-та АН СССР», 1970, т. 111, с. 195–207.

VAN DER VARDEN KRİTERİSİ « Ван дер Вардена критерий; Van der Waerden test » – vəziyyətlərinin fərqli olmasının əksinə olaraq, iki skalyar seçimin bircinsliyini yoxlamaq üçün ranq kriterisidir. Asılı olmayan skalyar seçimlərlə təmsil olunan iki ümumi çoxluğun bircinsliyi hipotezinə alternativ onların (yerinidəyişmənin alternativi) formaları sabit qaldıqda vəziyyətlərinin fərqli olması hipotezi irəli sürülür. Ranqların təyinedilmə sistemi aşağıdakı qaydada qurulur: seçimlər bir ümumi çoxluqda cəmləşir və həcmlərinə görə nizamlanır; müşahidənin ranqı bu nizamlamada onun nömrəsinə bərabər götürülür (üst-üstə düşən müşahidələr olduqda orta ranqlar götürülür). $r_1, ..., r_m$ – seçimlərdən birinin ranqı olsun (m, n seçimlərin həcmidir). V. d. V. k. statistikası

$$W = \sum_{i=1}^{m} \psi(r_i)$$

cəminə bərabərdir, burada $\psi(\cdot)$ – standart normal paylanmanın kvantillər funksiyasıdır.

Əgər hər iki seçim eyni bir kəsilməz ümumi çoxluqlardan götürülmüşdürsə, W statistikasının paylanması yalnız m, n-dən asılı olur. m, n-in kiçik qiymətlərində cədvəllər [2]-də verilmişdir. m və n-in böyük qiymətləri üçün normal approksimasiya da orada göstərilmişdir. Müşahidələr normal qanuna yaxın qanunla paylandıqda V. d. V. k. tətbiq oluna bilər.

Əd.: [1] Van der Waerden B. L., «Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. A.», 1952, v. 55, p. 453–58; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] Ван дер Варден Б., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

VAN HOV TEOREMLƏRİ « ван Хова теоремы; van Hove theorems » – *Gibbs təsadüfi meydanları nəzəriyyəsinin* termodinamik limit keçidində xüsusi sərbəst enerji limitinin varlığı şərtini verən teoremlər sinfidir. Məs., V. H. t.-nin diskret arqumentli Gibbs paylanmaları üçün variantlarından biri aşağıdakından ibarətdir. $|\Lambda|$, – Λ çoxluğunun gücü, Λ^c, – Λ çoxluğunun tamamlayıcısı, $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$, $n = 1, 2, \ldots$ – sonlu həcmlər ardıcıllığı olsun. İxtiyari $m > 0$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n|^{-1} \left| \{t \in \Lambda_n : \operatorname{dist}(t, \Lambda^c) \le m\} \right| = 0$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\Lambda_n\}_n$ ardıcıllığı Van Hov xassəsinə malikdir, deyilir. Fərz olunur ki, bu xassə ödənilir və U Gibbs meydanının potensialı elədir ki, onun norması $\|U\|$ sonludur; onda

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{\Lambda_n}$$

limiti vardır, burada f_{Λ_n}, – Λ_n həcmində xüsusi sərbəst enerjidir və bu enerji Λ_n ardıcıllığının seçilməsindən asılı olmur.

Əd.: [1] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

VANDERMOND TƏSADÜFİ DETERMİNANTI « Вандермонда случайный детерминант; Vandermonde random determinant » – bax, *Təsadüfi determinant.*

VAPNİK – ÇERVONENKİS SİNFİ « Вапника – Червоненкиса класс; Vapnik – Chervonenkis class, VC class » – ixtiyari $\mathfrak{X}$ çoxluğunun altçoxluqlarının elə $\mathscr{B}$ ailəsidir ki, bu ailə üçün

$$\min\{n : \sup_{x_i \in \mathfrak{X}} \Delta_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n) < 2^n\} < \infty$$

şərti ödənilir, burada $\Delta_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$, – $B \in \mathscr{B}$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap B$ tipli müxtəlif sonlu altçoxluqların sayıdır (bax, [1], [2]). Əgər $\mathscr{B}$ V. Ç. s.-dirsə, onda empirik ölçülər ardıcıllığı üçün $\mathscr{B}$ üzrə müntəzəm Qauss approksimasiyası mümkündür (bax, *Yığılma*(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin; [2]). Empirik paylanmaların müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər $\Delta_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)$ kəmiyyəti terminologiyasında alınmışdır. $\mathbb{R}^k$ fəzasının bütün yarımfəzalarının, bütün k – ölçülü kürələrin, tərəfləri koordinat müstəvilərinə paralel bütün k – ölçülü paralelepipedlərin çoxluqları V. – Ç. s.-dirlər.

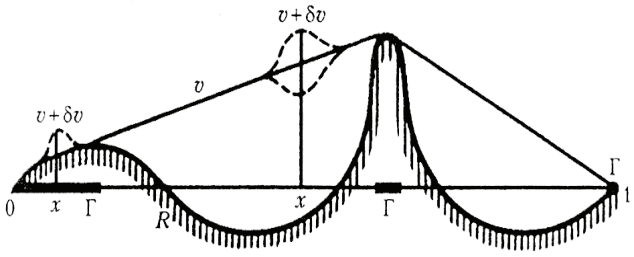
Əd.: [1] Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, в. 2, с. 264–79; [2] Dudley R. M., «Ann. Probab.», 1978, v. 6, № 6, p. 899–929.

VARİASİON BƏRABƏRSİZLİKLƏR stoxastik idarəetmədə **« вариационные неравенства** в стохастическом управлении; **variational inequalities** in stochastic control **»** – maneəli (bax, aşağıda) variasion məsələ ilə analogiyaya əsaslanan optimal dayanma haqqında məsələnin öyrənilməsi üçün analitik aparatdır. V. b.-in ümumiləşməsi impulslu idarəetmə məsələlərində istifadə olunan *kvazivariasion bərabərsizliklərdir.*

V. b. ideyasını $\mathbf{I} = [0, 1]$ parçasından ilk çıxış anında udulan $\{w(t)\}$ Viner prosesi misalında izah etmək münasibdir. Proses $x \in \mathbf{I}$ nöqtəsində dayandıqda $R(x)$ gəlirinin alındığı fərz olunur; R funksiyası kəsilməzdir və $R(0) = R(1) = 0$. Məsələnin dəyəri

$$v(x) = \sup_{\tau} \mathbf{M}_x R(\omega_\tau), \quad x \in \mathbf{I} \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur; x – prosesin ilkin vəziyyəti, τ – ixtiyari sonlu Markov anıdır. Məlumdur ki, v, – R funksiyasının çöküb (içəri) majorantıdır (bax, şəkil) və prosesin $\Gamma = \{x : v(x) = R(x)\}$



çoxluğuna ilk daxilolma anı τ^* optimal andır [(1)-in supremumunu təmin edir]. Aydındır ki, $L\upsilon \le 0$, $R-\upsilon \le 0$ münasibətləri $\mathbf{I}$-də ödənilir,

$$L\upsilon = 0 \text{ isə } \mathbf{I}\setminus\Gamma\text{-də, } R-\upsilon = 0 \text{ isə } \Gamma\text{-də ödənilir,} \quad (2)$$

burada $L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$, – $\{w(t)\}$ prosesinin doğuran operatorudur (formal şərhdə $L\upsilon$ ümumiləşmiş funksiya kimi anlaşılır).

(2) düsturları

$$\upsilon(0) = \upsilon(1) = 0 \quad (3)$$

sərhəd şərtlərilə υ dəyərini və Γ çoxluğunu birqiymətli təyin edir. Γ çoxluğunu xaric edərək, (2) münasibətlərini υ funksiyası üçün aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$L\upsilon \le 0,\ R-\upsilon \le 0,\ L\upsilon(R-\upsilon) = 0. \quad (4)$$

K – (3) sərhəd şərtlərini, $R-\upsilon \le 0$ bərabərsizliyini, bəzi hamarlılıq və inteqrallananlıq şərtlərini ödəyən, $\mathbf{I}$-də verilmiş funksiyalar sinfi olsun; υ dəyərinin $\upsilon \in K$ şərtini ödədiyi fərz olunur. Və fərz olunur ki, υ elə dəyişir ki, $\upsilon + \delta\upsilon \in K$. $L\upsilon \ne 0$ olan nöqtələrdə, birincisi, $L\upsilon < 0$, ikincisi $R = \upsilon$ olur və buna görə də, $\delta\upsilon \ge 0$. Deməli, $L\upsilon\,\delta\upsilon \le 0$ bərabərsizliyi hər yerdə ödənilir və xüsusən ona görə ki, $(L\upsilon,\ d\upsilon)$ skalyar hasili ≤ 0 şərtini ödəyir. Beləliklə, υ dəyəri bütün $\upsilon + \delta\upsilon \in K$, $\upsilon \in K$ üçün

$$(L\upsilon,\ d\upsilon) \le 0 \quad (5)$$

variasion məsələsinin həllidir; K sinfində baxılan bu məsələ mexanikada R maneəli variasion bərabərsizlik adlanır. Əksinə, (5) münasibətindən (4) alınır; buna görə ixtiyari $x \in \mathbf{I}$ nöqtəsinin kiçik ətrafında $\delta\upsilon$-ni sıfırdan fərqli götürmək və nəzərə almaq lazımdır ki, $\mathbf{I}\setminus\Gamma$ çoxluğunda ixtiyari işarəli variasiyalar, Γ-də isə yalnız müsbət variasiyalar mümkün ola bilər. Beləliklə, (1) dəyəri (5) V. b.-nin yeganə həllidir. Stoxastik idarəetmə nəzəriyyəsində «V. b.» termini (4) sistemi üçün tədricən qəbul olunmuşdur. Dayanma anına qədər gəlirlər sürəti $r(x)$ olan və diskontlama (dəyərsizlənmə) parametri $\beta(x)$-ə bərabər, doğuran operatoru

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

düsturu ilə verilən, $\mathbb{R}^n$ fəzasında diffuzion prosesin optimal dayanma məsələsində V. b. (4) və ya (5) şəklində olduğu kimi qalır, lakin bu halda operator $L\upsilon = A\upsilon - \beta\upsilon + r$ düsturu ilə ifadə olunur [əgər proses bütün fəzada verilməmişdirsə, onda (4) münasibətinə sərhəd şərtləri də əlavə olunur və bu şərtlər K sinfinin tərifində də əks olunur]. Əgər A, β, r idarəedən a parametrindən asılıdırlarsa, onda L xətti olmayan $L\upsilon = \sup_a [A\upsilon - \beta\upsilon + r]$ Bellman operatoru olur.

Əgər dayanmalar əvəzinə ixtiyari $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ Markov anlarında b impulslu idarəetmələr tətbiq etmək olarsa və bunlar prosesdə $q(x, b, dy)$ paylanmalı ani sıçrayışlar və ani $R(x, b)$ gəliri yaradarsa, bundan sonra proses yenidən y nöqtəsindən başlayır (adətən, $R < 0$ olduğu hesab edilir). Dinamik proqramlama mülahizələrinə görə hesab olunur ki, optimal idarəetmənin uyğun məsələsinin dəyəri υ sərhəd şərtlərilə yanaşı

$$L\upsilon \le 0,\ M\upsilon \le 0,\ L\upsilon M\upsilon = 0 \quad (6)$$

münasibətlərini də ödəməlidir, burada M operatoru

$$M\upsilon(x) = \sup_b [R(x,\ b) + \int \upsilon(y)\, q(x, b, dy)] - \upsilon(x)$$

düsturu ilə təyin olunmuşdur; ümumiyyətlə isə, optimal idarəetmə ondan ibarətdir ki, x vəziyyətində elə a və ya b idarəetməsini tətbiq etmək lazımdır ki, o, $L\upsilon$ və $M\upsilon$-yə sıfra bərabər supremum təmin etsin. (6) sistemini sərhəd şərtlərilə (5)-ə oxşar şəkildə yazmaq olar, lakin bu zaman qeyd olunmuş K sinfi əvəzinə υ-dən asılı $K(\upsilon)$ sinfi götürülməlidir («maneə» həldən asılı olur). Belə variasion məsələlər və (6) şəklində münasibətlər «kvazi–variasion bərabərsizliklər» kimi adlandırılmışdır.

V. və kvazivariasion bərabərsizliklər impulslu idarəetmələr arasında Puasson tipli sıçrayışlar mümkün olan və υ dəyərinin x vəziyyətindən və t zamanından asılı olan, zamana görə bircins olmayan modellər üçün də tətbiq olunur. Birinci halda L operatorunda, M operatorundakı inteqrala oxşar, əlavə inteqral yaranır; ikinci halda isə $\frac{\partial}{\partial t}$ həddi yaranır.

Əd.: [1] Bensoussan A., Lions J. - L., Applications des inequations variationnelles en contrôle stochastique, P., 1978; [2] Бенсусан А., Лионс Ж. - Л., Импульсное управление и квазивариационные неравенства, пер. с франц., М., 1987.

VARİASİON PRİNSİP statistik mexanikada **«вариационный принцип** в статистической механике; **variational principle** in statistical mechanics **»** – enerjisi qeyd olunmuş, izolə edilmiş material sistemin tarazlıq vəziyyəti entropiyanın maksimal qiyməti ilə xarakterizə olunan, C. Gibbs tərəfindən daxil olunmuş prinsipdir (bax, [1]).

Statistik mexanikanın hissəciklərinin vəziyyətləri (tipləri) sayı sonlu olan şəbəkəvari modelləri üçün bu prinsipin ən sadə riyazi ifadəsi

$$\mathscr{G}_0(\Phi) = \left\{ \mu \in M_0 :\ s(\mu) - U_\Phi(\mu) = \sup_{\nu \in M_0} [s(\nu) - U_\Phi(\nu)] \right\}$$

münasibətilə təyin olunur, burada M_0 – konfiqurasiyalar fəzasında translyasion invariant ehtimal ölçüləri çoxluğu, $\mathscr{G}_0(\Phi)$, –

Φ potensiallı (tarazlıqlı vəziyyətlərin) translyasion invariant Gibbs paylanmaları çoxluğu, $s(\mu)$, – μ ölçüsünə uyğun xüsusi (rus. удельная) termodinamik entropiya, $U_\Phi(\mu)$ – orta xüsusi (rus. удельная) enerjidir (bax, [2], [3], [5]). Analoji müddəalar digər modellər üçün də doğrudur (bax, [6], [8]).

$$\mathbf{P}(\Phi) = \sup_{\nu \in M_0} [s(\nu) - U_\Phi(\nu)]$$

bərabərliyi də V. p. adlanır, burada $\mathbf{P}(\Phi)$ təzyiqdir (bax, [4]).

V. p.-lə bağlı ideya və anlayışlar erqodik nəzəriyyəyə təsir göstərmişdir.

Əd.: [1] Г и б б с Д ж., О равновесии гетерогенных веществ, в его кн.: Термодинамика. Статистическая механика, пер. с англ., М., 1982, с. 61–349; [2] L a n f o r d O., R u e l l e D., «Communs Math. Phys.», 1969, v. 13, № 3, p. 194–215; [3] R u e l l e D., «Communs Math. Phys.», 1967, v. 5, № 1, p. 324–29; [4] Р ю э л ь Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [5] R u e l l e D., Thermodinamic formalism, Reading (Mass.), 1978; [7] P r e s t o n C h., Random fields, B., 1976; [7] F o l l m e r H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1973, Bd 26, № 3, S. 207–17; [8] K u n s c h H., «Z. Wahr. und verw. Geb.», 1981, Bd 58, № 1, S. 69–85; [9] G e o r g i I H., Gibbs measures and phase transitions, B., 1988; [10] П р и г о ж и н И. Р., Введение в термодинамику необратимых процессов, пер. с англ., М., 1960; [11] К л е й н М., в кн.: Термодинамика необратимых процессов, пер. с англ., М., 1962, с. 213–32; [12] Б о у э н Р., Методы символической динамики, пер. с. англ., М., 1979.

VARİASİON SIRA « вариационный ряд; set of order statistics, ordered statistics » – n həcmli $X_1, \dots, X_n$ seçiminin artmaqla nizamlanmış elementlərindən təşkil edilmiş, yəni

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$$

şərtilə təyin olunan $\{X_{(i)}\}_{i=1}^n$ vektorudur.

V. s.-nın hədlərinə seçimin q a y d a l ı s t a t i s t i k a l a r ı deyilir.

Paylanma funksiyaları kəsilməz olan, eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin V. s.-nın riyazi statistikada mühüm tətbiqi əhəmiyyəti vardır. $\{X_{(i)}\}_{i=1}^n$ V. s.-nın minimal və maksimal hədlərinin paylanmaları uyğun olaraq,

$$\mathbf{P}\{X_{(1)} < x\} = 1 - \mathbf{P}\{X_{(1)} \ge x\} = 1 - (1 - F(x))^n,$$

$$\mathbf{P}\{X_{(n)} < x\} = (F(x))^n$$

münasibətlərilə təyin olunur. k-cı qaydalı $X_{(k)}$ statistikasının paylanması

$$\mathbf{P}\{X_{(k)} < x\} = C_n^{k-1}(n-k+1)\int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt,$$

$$k = 2, \dots, n-1$$

düsturu ilə hesablanır, burada $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasıdır və onun kəsilməz olduğu fərz olunur.

Əgər X_i, $1 \le i \le n$ asılı olmayan ümumi paylanma sıxlığı f olan elementlərdirsə, onda V. s.-nın elementlərinin birgə ehtimal sıxlığı $x_1 \le \dots \le x_n$ olduqda

$$g(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

düsturu ilə təyin olunur, əks halda isə sıfra bərabərdir. Bircins asılı olmayan seçim üçün V. s. ranqlar vektorundan asılı olmur.

Əd.: [1] Д е й в и д Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979.

VARİASİYA(s ı) ö l ç ü n ü n **« вариация** м е р ы; **variation** o f a m e a s u r e **»** – dəyişkənişarəli və ya kompleks ölçü ilə əlaqələnən müsbət *ölçüdür*. φ, – Ω çoxluğunun altçoxluqlarından təşkil olunmuş $\mathcal{A}$ σ – cəbrində təyin olunmuş çoxluq (ədədi) funksiyası olsun. $E \in \mathcal{A}$ çoxluğunda

$$|\varphi|(E) = \sup \sum_{i=1}^n |\varphi(E_i)|$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $|\varphi|$ funksiyasına v a r i a s i y a (və ya t a m v a r i a s i y a) deyilir, burada yuxarı sərhəd E çoxluğunun bütün $\{E_1, \dots, E_n\}$ tipli sonlu bölgüləri üzrə götürülür; $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{A}$, $n \in N$. Əgər $|\varphi|(\Omega) < \infty$ olarsa, φ s o n l u (və ya m ə h d u d) v a r i a s i y a y a malikdir, deyilir. Əgər φ additivdirsə, onda $|\varphi|$ çoxluq funksiyası kimi additivdir. Əgər $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ additiv məhdud funksiyadırsa, onun V.-sı sonludur. Əgər $\mathcal{A}$ σ – cəbr və $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ hesabi – additiv funksiyadırsa, onda φ-nin sonlu V. vardır və $|\varphi|$ hesabi – additivdir. Əgər $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ müsbət ölçü təyin olunmuş fəzadırsa və $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μ – inteqrallanan funksiyadırsa, onda çoxluq funksiyası

$$\varphi(E) = \int_E f\,d\mu,\ E \in \mathcal{A}$$

hesabi – additivdir və o, sonlu V.-ya malikdir və

$$|\varphi|(E) = \int_E |f|d\mu,\ E \in \mathcal{A}.$$

V. anlayışı *vektor ölçülər* üçün də təyin olunur.

Əd.: [1] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962, с. 111–13, 129, 142–48.

VARİASİYA ƏMSALI « вариации коэффициент; variation coefficient » – təsadüfi kəmiyyətin adsız kəmiyyət olan səpələnmə ölçüsüdür. V. ə. müxtəlif qaydalarla təyin olunur. Praktikada ən çox istifadə olunan V. ə. düsturu

$$V = \sigma / \mathbf{M}\xi$$

ifadəsilə verilir, burada σ^2 və $\mathbf{M}\xi$ – uyğun olaraq, ξ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası və riyazi gözləməsidir (bu halda $\mathbf{M}\xi$ müsbət olmalıdır). Bəzən bu ifadə faizlərlə, yəni $V = 100\sigma / \mathbf{M}\xi\%$ kimi verilir. V. ə. σ-nın (*kvadratik orta meylin*) $\mathbf{M}\xi$-nin neçə faizi olduğunu göstərir. V. ə. üçün bu tərif K. Pirson (K. Pearson, 1985) tərəfindən verilmişdir.

VARŞAMOV – HİLBERT SƏRHƏDİ « Варшамова – Гильберта граница; Varshamov – Hilbert boundary » – bax, *Kod*.

VATANABE TEOREMİ « Ватанабе теорема; Watanabe theorem » – bax, *Limit teoremləri* t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n; m a r t i n q a l m e t o d l a r ı.

VAYTMAN FUNKSİYASI « Вайтмана функция; Wightman function » – bax, *Uaytman funksiyası*.

VEKTOR – BİRCİNS VƏ İZOTROP TƏSADÜFİ MEYDANI « векторное однородное и изотропное случайное поле; vector – valued homogeneous isotropic random field » – bax, *Bircins və izotrop təsadüfi meydan.*

VEKTOR KRİTERİSİ eksperimentin planlaşdırılmasının **« векторный критерий** планирования эксперимента; **vector test / criterium** design of experiment **»** – planın minimizasiya olunacaq skalyar xarakteristikaları toplusudur (məs., yerinidəyişmə, reqressiya funksiyasının qeyri – adekvat statistik qiymətinin səpələnməsi kimi). Minimizasiya eyni zamanda mümkün olmadıqda, ya kriterilər prioriteti daxil olunur və ya planların Pareto üzrə optimallığı anlayışından istifadə olunur (bax, [1], [2]).

Əd.: [1] Математическая теория планирования эксперимента, M., 1983; [2] Соболь И. М., Статников Р. Б., Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями, M., 1981.

VEKTOR ÖLÇÜ « векторная мера; vector measure » – hər hansı σ – cəbrdə təyin olunmuş, qiymətləri Banax fəzasından olan hesabi – additiv inikasdır. V. ö. anlayışı aşağıdakı daha ümumi halda təyin olunur. Ω – boş olmayan çoxluq, $\mathscr{A}$ – onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş hər hansı cəbr, $\mathbb{B}$ – lokal qabarıq fəza olsun. Əgər $\mathscr{A}$ -nın cüt-cüt kəsişməyən çoxluqları A_n -lərin birləşməsi də $\mathscr{A}$ -ya daxil olduqda hər bir A_n ardıcıllığı üçün $\sum \varphi(A_n)$ sırası $\mathbb{B}$ -də yığılarsa və $\varphi\left(\bigcup A_n\right) = \sum \varphi(A_n)$ olarsa, $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}$ inikası vektor ölçü (və ya hesabi–additiv vektor ölçü) adlanır.

Aşağıda fərz olunur ki, $\mathbb{B}$ Banax fəzasıdır. Əgər $\mathscr{A}$ σ – cəbr və $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}$ V. ö. olarsa, onda $\{\varphi(A) : A \in \mathscr{A}\}$ -nın qiymətləri çoxluğu zəif topologiyada nisbi kompakt $\mathbb{B}$ altçoxluğudur (Bartl–Danford–Şvarts teoremi). V. ö. üçün ölçünün davamı haqqında teorem aşağıdakı kimi ifadə olunur. Əgər $\mathscr{A}_0$ cəbr, $\mathscr{A}$ $\mathscr{A}_0$ cəbrinin doğurduğu σ – cəbrdirsə və $\varphi_0 : \mathscr{A}_0 \to \mathbb{B}$ elə V. ö.-dürsə ki, onun üçün $\{\varphi_0(A) : A \in \mathscr{A}_0\}$ $\mathbb{B}$ fəzasında zəif nisbi kompakt qiymətlər çoxluğudur, onda φ_0 V. ö.-sü $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}$ V. ö.-sünə qədər yeganə surətdə davam olunur; əgər $\mathbb{B}$ -nin C_0 -a izomorf altfəzası yoxdursa, onda hər bir $\varphi_0 : \mathscr{A}_0 \to \mathbb{B}$ məhdud V. ö.-sü $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}$ V. ö.-sünə qədər davam olunur.

$\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}$ V. ö.-nün variasiyası $|\varphi|$ skalyar ölçünün variasiyası kimi təyin olunur, lakin fərqləndirici cəhət modulun norma ilə əvəz olunmasıdır. Əgər $|\varphi|(\Omega) < \infty$ olarsa, V. ö. φ sonlu və ya məhdud variasiyaya malikdir, deyilir. Əgər $\mathbb{B}$ sonsuzölçülü fəza, $\mathscr{A}$ σ – cəbrdirsə, onda ixtiyari φ V. ö.-nün sonlu variasiyası olmaya bilər.

$\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}$ V. ö.-sünün semi–variasiyası $\|\varphi\|$ $E \in \mathscr{A}$ çoxluğunda

$$\|\varphi\|(E) = \sup \left\| \sum_1^n \beta_k \varphi(E_k) \right\|$$

bərabərliyilə təyin olunur, burada supremum bütün n -lər, E çoxluğunun bütün sonlu $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathscr{A}$ bölgüləri və $\max|\beta_i| \le 1$ şərtini ödəyən $\beta_1, \dots, \beta_n$ -lər üzrə götürülür. Yalnız və yalnız φ -nin qiymətlər oblastı $\mathbb{B}$ -də məhdud olduğu halda φ -nin sonlu semi – variasiyası vardır (yəni $\|\varphi\|(\Omega) < \infty$). Xüsusi halda, σ – cəbrdə təyin olunmuş V. ö. sonlu semi – variasiyaya malikdir. Semi – variasiya variasiyadan fərqli olaraq, additiv funksiya deyildir.

Əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ (sonlu) ölçülü fəza, $f : \Omega \to \mathbb{B}$ Pettisə görə inteqrallanan inikasdırsa, onda

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu$$

çoxluq funksiyası variasiyası σ – sonlu olan V. ö.-dür; əgər f Boxnerə görə ölçüləndirsə, onda φ -nin sonlu variasiyası, yalnız və yalnız, o halda mövcuddur ki,

$$\int_\Omega \|f(\omega)\| \, d\mu(\omega) < \infty$$

şərti ödənilsin.

V. ö.-yə mühüm misal operator (operatorqiymətli) ölçüdür. $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ – Banax fəzaları, $L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ – kəsilməz xətti operatorlar fəzası olsun. Əgər hər bir $x \in \mathbb{B}_1$ üçün φx V. ö. olarsa, $\varphi : \mathscr{A} \to L(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ inikası operator ölçü adlanır.

Operator ölçüləri üzrə inteqrallar operatorların spektral nəzəriyyəsində və geniş mənada stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1, M., 1962, 345–57; [2] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977; [3] Kluvanek I., Knowles G., Vector measures and control systems, Amst., 1975.

VEKTOR TƏSADÜFİ PROSES « векторный случайный процесс; vector random process » – bax, *Təsadüfi proses*.

VEKTORLAR KONFİQURASİYASI « векторов конфигурация; vector configuration » – elə vektorlar sistemidir ki, vektorların uzunluğu *korrelyasion matrisin* baş diaqonalının elementlərinə, bucaqları isə matrisin digər elementlərinə uyğundur. Baş diaqonal elementləri məlum olan korrelyasion matris ona uyğun yeganə, ciddi təyin olunmuş V. k.-nı təyin edir. Bu mənada hesab etmək olar ki, korrelyasion matris onunla əlaqəli bütün vektor cütlərinin skalyar hasilini təyin edir. Müəyyən dəyişənə uyğun hər bir vektorun uzunluğu bu dəyişənin ümumiliyini xarakterizə edən kəmiyyətin müsbət kvadrat kökünə bərabərdir. Matrisin V. k. kimi təsviri matrisin və ya V. k.-nın daşıdığı informasiyanın itkisinə səbəb olmur.

Əd.: [1] Окунъ Я., Факторный анализ, пер. с польск., M., 1974.

VENTSEL ŞƏRTİ « Вентцеля условие; Wentzell condition » – bax, *Markov prosesi*; sərhəd şərti.

VERGƏCİ, TƏSADÜFİ ƏDƏDLƏRİN « датчик случайных чисел; random numbers generator » – adətən, eyni qanunla paylanmış və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər (psevdotəsadüfi) ardıcıllığının bir sıra xassələrinə malik ədədlər ardıcıllığının regenerasiyası üçün proqram və ya qurğudur (bax, *Təsadüfi və psevdotəsadüfi ədədlər*). Təsadüfi kəmiyyətin

bütün xassələrini özündə əks etdirən ardıcıllıq yaradan proqram-vergəclər mövcud deyil (bax, [3]). T. ə. v.-ləri hesablama alqoritmlərində (Monte – Karlo metodu, bax, [2]), kompyuterlə modelləşdirmədə, informasiyanın kodlanmasında (qorunmasında) istifadə olunur. Vergəclərin qurulmasının əsas məsələsi $[0,1]$ parçasında müntəzəm paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının yaxşı imitasiyasıdır. Bu imitasiyadan ixtiyari paylanmaya malik ardıcıllıqlar almaq mümkündür. Vergəcin keyfiyyəti n – ölçülü müntəzəm paylanmanın xassələrinə əsaslanan testlərlə (bax, [1]), spektral metodlarla yoxlanılır (bax, [3]); bu metodlar və testlər vergəcin psevdoperiodikliyini (asılılığını) aşkar edir. $x_n = y_n / m$ periodik xətti konqruent vergəcləri ən çox istifadə olunan vergəclərdir, burada $y_n = a\,y_{n-1} + b \bmod m$, a, b, y_0 – tam, m – böyük, adətən, ən böyük maşın ədədləridir; a və b-nin yarayan qiymətlərində vergəcin periodu m-ə bərabərdir. Bunlar ikiölçülü müntəzəm paylanmaya çox da uyğun olmur və kiçik psevdoperiodlara malikdirlər. Daha mürəkkəb konstruksiyalar birgə paylanma baxımından yaxşı keyfiyyətli olur: periodları ölçüləbilinməyən vergəclərin xətti kombinasiyaları, inversal konqruent vergəclər: $x_n = y_n / m$, $y_n = a\hat{y}_{n-1} + b \bmod m$, $y\hat{y} = 1 (\bmod m)$, m – sadə ədəddir və b.

İmitasion modellərin vergəclərinin asılı olmamazlıqlarını əlavə surətdə yoxlamaq tələb olunur, çünki bu modellər istifadə olunan psevdotəsadüfi ardıcıllıqların elementlərinin asılılığına daha çox həssas olur; belə ki, asılılıq olduğu halda modelləşmənin nəticələri prinsipial surətdə təhrif olunur.

Əd.: [1] К н у т Д., Искусство программирования на ЭВМ, т. 2, пер. с англ., М., 1977; [2] Ф о р с а й т Дж., М а л ь к о л ь м М., Машинные методы математических вычислений, пер. с англ., М., 1980; [3] Ж у р б е н к о И. [и др.], О построении и исследовании псевдослучайных последовательностей различными методами, «Заводская лаборатория», 1985, т. 5.

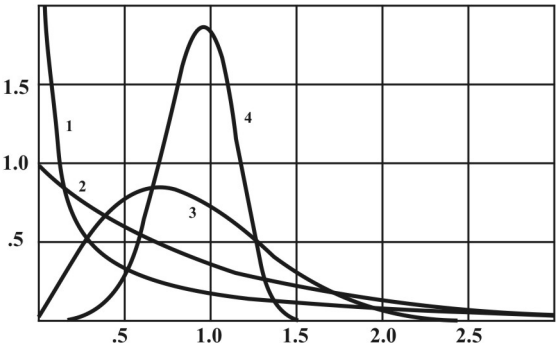
VERİLƏNLƏR PƏNCƏRƏSİ « данных окно; data window / taper » – bax, *Spektral sıxlıq*; q e y r i – p a r a m e t r i k s t a t i s t i k q i y m ə t.

VERİLƏNLƏRİN HİSSƏSİ « порция данных; data portion » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

VEYBULL PAYLANMASI « Вейбулла распределение; Weibull distribution » – paylanmasının sıxlıq funksiyası (bax, şəkil)

$$p(x) = \alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^{\alpha}}$$

olan, $(0, \infty)$ -da topalanmış, kəsilməz *ehtimal paylanmasıdır*.



Veybull paylanmasının sıxlıq funksiyası $\lambda = 1$ və $(1)\,\alpha = 0{,}5;\ (2)\,\alpha = 1;\ (3)\,\alpha = 2;\ (4)\,\alpha = 5$ qiymətlərində

V. p.-nın paylanma funksiyası

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^{\alpha}}, \quad \lambda > 0,\ \alpha > 0$$

münasibətilə ifadə olunur, burada α, λ – parametrlərdir. $\alpha = 1$ olduqda V. p. *üstlü paylanma*, $\alpha = 2$ olduqda isə *Reley* (Raylligh) *paylanması* ilə üst-üstə düşür. V. p.-nın bütün momentləri sonludur, riyazi gözləməsi və dispersiyası uyğun olaraq, $\alpha > 1$ olduqda

$$\lambda\Gamma(1 + 1/\alpha) \text{ və } \lambda^2(\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha))$$

ifadələrilə təyin olunur. V. p. unimodaldır, modası $\lambda(\alpha - 1)^{1/\alpha}$-ya bərabərdir.

V. p. fasiləsiz işləmə müddətinin paylanmasının ifadə edilməsi üçün statistik etibarlılıq nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] W e i b u l l W., A statistical theory of the strength of materials, Stockh., 1939; [2] Г н е д е н к о Б. В., Б е л я е в Ю. К., С о л о в ь е в А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [3] Б а р л о у Р., П р о ш а н Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984.

VEYL DÜSTURU « Вейля формула; Weyl formula » – bax, *Differensial operator*; t ə s a d ü f i ə m s a l l a r l ı s p e k t r a l n ə z ə r i y y ə.

VƏZİYYƏT « состояние; state » q e y r i – k o m m u t a t i v e h t i m a l n ə z ə r i y y ə s i n d ə – verilən sistemin hər bir X *müşahidələnəninə* onun orta qiyməti $\varphi(X)$-i qarşı qoyan riyazi gözləmənin funksionalıdır (bax, *Cəbri*, *müşahidələnənlərin*). V. riyazi anlayışı cəbri yanaşma çərçivəsində daha geniş (və daha az təyin olunmuş) s t a t i s t i k v ə z i y y ə t fiziki anlayışını verilən fərdi sistemlərin statistik ansamblının hazırlanmasını təsvir edən şərtlər toplusu kimi formalaşdırır və bu (yəni V.) müşahidə olunan bu və ya digər kəmiyyətin müşahidə olunmasından bilavasitə əvvəl həyata keçirilir.

VƏZİYYƏT DÖVRÜ; M a r k o v z ə n c i r i v ə z i y y ə t l ə r i n i n d ö v r ü **« состояния период** ц е п и М а р к о в а; **period of a state** o f a M a r k o v c h a i n **»** – bax, *Markov zənciri*; v ə z i y y ə t l ə r i n t ə s n i f a t ı.

VƏZİYYƏT VEKTORU « состояния вектор; state vector » – bax, *Sıxlıq operatoru.*

VƏZİYYƏTİ, AVTOMATIN « состояние автомата; automaton state » – bax, *Ehtimali avtomat.*

VİK FORMASI « Вика форма; Wick form » – bax, *Vik nizamlanması.*

VİK MONOMU « Вика моном; Wick monom » – bax, *Vik nizamlanması.*

VİK NİZAMLANMASI « Вика упорядочения; Wick ordering » – ikinci kvantlama metodu və təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsində tətbiq olunan iki əməliyyat üçün ümumi addır (hər iki əməl : : simvolu ilə işarə olunur).

1) İkinci kvantlanma halında, ixtiyari monom üçün $a_1^{\#} \cdot a_2^{\#} \cdot \ldots \cdot a_N^{\#}$, $a_i^{\#}$, $i = 1, \ldots, N$ -ya a_i-nin doğum operatoru və ya a_i-nin ölüm operatorudur; onun V i k (və ya n o r m a l) f o r m a s ı $: \prod_{i=1}^{N} a_i^{\#} :$ elə hasilə deyilir ki, bütün ölüm operatorları doğum operatorlarından sağda yerləşirlər. : : xətti əməl olduğuna

görə $a_i^{\#}$ operatorlarının bütün polinomlarına (sıralarına) da davam olunur.

2) $\{X_1, \dots, X_N\}$ cüt-cüt müxtəlif Qauss təsadüfi kəmiyyətlərinin sistemi olarsa, n_i tam ədədlər, $i = 1, \dots, N$ olduqda, baş həddi $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_N^{n_N}$ olan, bütün $\prod_{i=1}^{N} X_i^{k_i}$, $0 \le k_i \le n$, $\sum_{i=1}^{N} k_i \le \sum_{i=1}^{N} n_i$ monomlarına ortoqonal olan $X_1, \dots, X_N$ kəmiyyətlərinin polinomuna $:\prod_{i=1}^{N} X_i^{n_i}:$ Vik monomu deyilir. Asılı olmayan Qauss sisteminin ən sadə halında $:\prod_{i=1}^{N} X_i^{n_i}: = \prod_{i=1}^{N} :X_i^{n_i}:$ olur və bu halda $:X^n: = H_n(X)$, burada $H_n(\cdot)$ – baş əmsalı 1 olan n -ci Hermit çoxhədlisidir.

Qauss təsadüfi funksiyası (meydanı) – $\{X_x,\ x \in H,\ H$ – Hilbert fəzasıdır$\}$ üçün onun kovariasion operatoru vahidi operator olduğu halda $::$ əməlinin köməyilə $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ fəzasının $\mathcal{F}_s(H)$ fəzasına – H üzərində simmetrik *Fok fəzasına* – mühüm izomorfizmi (İto – Vik inikası; [3]) qurulur [(Ω, Σ, μ), – X_x təsadüfi kəmiyyətlərinin təyin olunduğu ehtimal fəzasıdır]:

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)^s \leftrightarrow :\prod_{i=1}^{N} X_{x_i}:,$$

burada $(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)^s$, – $x_i \in H_i$, $i = 1, \dots, N$ elementlərinin simmetriklənmiş hasilidir.

Əd.: [1] Хеппн., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974; [2] Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля, М., 1985; [3] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67–122.

VİQNER PAYLANMASI « Вигнера распределение; Wigner distribution » – Qauss simmetrik matrislər ansamblında (Viqner ansamblı) limit spektral funksiyasını (vəziyyətlər sıxlığını) xarakterizə edən *paylanmadır*. Bu ansambl aşağıdakı kimi daxil olunur.

X_{ij}, $n \ge i \ge j \ge 1$ – asılı olmayan həqiqi Qauss ədədləri;

$$\mathbf{M}X_{ij} = 0;\ \mathbf{D}X_{ij} = 1, i \ne j, \mathbf{D}X_{ii} = 2;\ X_{ij} = X_{ji},\ i < j;$$

$$A_n = n^{-1/2} \left\| X_{ij} \right\|;$$

$\lambda_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ A_n -in məxsusi ədədləri olsun. $n \to \infty$ olduqda

$$N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} n(\tau)\, d\tau = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum \lambda_i^{(n)} < \lambda^{(1)}$$

limit spektral paylanma funksiyası yaranır, belə ki, vəziyyətlər sıxlığı $n(\lambda)$ aşkar hesablanır:

$$n(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \lambda^2}\ \chi_{|\lambda| \le 1},$$

bu düsturla ifadə olunan sıxlıq Viqner semi–dairəvi qanunu adlanır. Viqner ansamblı ortoqonal invariantlıq xassəsinə malikdir. $A_n = O_1 A_n O_2$, burada O_i – təsadüfi olmayan ortoqonal matrislərdir. V. p. ağır nüvələrin spektral xassələrinin təsvir edilməsində model kimi istifadə olunur.

Əd.: [1] Гирко В. Л., Случайные матрицы, К., 1975.

VİQNER SEMİ – DAİRƏVİ QANUNU « Вигнера полукруговой закон; Wigner semicircular law » – bax, *Viqner paylanması*.

VİLKOKSON KRİTERİSİ « Вилкоксона критерий; Wilcoxon test » – bax, *Uilkokson kriterisi*.

VİLSON TƏSİRİ « Вильсона действие; Wilson action » – bax, *Kalibrləmə modeli* statistik mexanikanın.

VİLSON – HİLFERTİ ÇEVİRMƏSİ « Вильсона – Хилферти преобразование; Wilson – Hilferty transformation » – sərbəstlik dərəcəsi sayı ν -yə bərabər *xi – kvadrat paylanmaya* malik χ_ν^2 təsadüfi kəmiyyətini normallaşdıran çevirmədir. V. – H. ç.

$$h(\chi_\nu^2) = 3\sqrt{\frac{\nu}{2}} \left[\left(\frac{\chi_\nu^2}{\nu} \right)^{1/3} - 1 + \frac{2}{9\nu} \right]$$

bərabərliyi ilə ifadə olunur. Bu normallanmış təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası $\nu \to \infty$ olduqda

$$K_\nu(y) = \mathbf{P}\{ h(\chi_\nu^2) < y \} =$$

$$= \Phi(y) - \Phi^{(4)}(y) \big/ (108\nu) + O(\nu^{-3/2})$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $\Phi(y)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır və $\Phi^{(4)}(y) = \partial^4 \Phi(y) \big/ \partial y^4$. Fişer çevirməsi $g(\chi_\nu^2) = \sqrt{2\chi_\nu^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ üçün $\nu \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{ g(\chi_\nu^2) < y \} = \Phi(y) + O(\nu^{-1/2})$$

olur.

V. – H. ç. $\nu \ge 50$ oblastında $\mathbf{P}\{\chi_\nu^2 < x\}$ ehtimalını hesablamaq üçün cədvəllərdə istifadə olunur, bu cədvəllər $K_\nu(y) - \Phi(y)$ fərqləri üzrə tutulmuşdur və bu halda, əgər $y = h(x)$ olarsa, $K_\nu(y) = \mathbf{P}\{ \chi_\nu^2 < x \}$ götürülür.

Əd.: [1] Wilson E. B., Hilferty M. M., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1931, v. 17, p. 684–88; [2] Пугачова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

VİNER FUNKSİONALI « винеровский функционал; Wiener functional » – $(w_t, \mathcal{A}_t^w, \mathbf{P})$, $t \ge 0$ ehtimal fəzasında təyin olunmuş ölçülən funksiyadır, burada w_t, – m – ölçülü *Viner prosesi*, $\mathcal{A}_t^w$, – $\{w_s,\ s \le t\}$ qiymətlərinin doğurduğu və əsas ehtimal ölçüsü $\mathbf{P}$ üzrə tamamlanmış σ – cəbrdir.

V. f.-na aid:

$$\max_{t \in [0,\ T]} (\min)\ w_t,\ \int_0^T f(w_t)\, dt,$$

f – təsadüfi olmayan funksiyadır; n – qat Viner inteqralları –

$$\int\limits_{[0,T]^n} K(t_1, ..., t_n)\, d\boldsymbol{w}_{t_1} ... \, d\boldsymbol{w}_{t_n},$$

$K \in L^2([0,\ T]^n)$; təsadüfi olmayan və ya $\mathscr{A}_t^{\boldsymbol{w}}$ – antisipativ əmsallarlı stoxastik differensial $dX_t = a(t, X)d\boldsymbol{w}_t + b(t, X)dt$ tənliklərinin güclü həllərinin funksionallarını misallar kimi qeyd etmək olar. $m = 1$ olduğu halda, qeyd olunan funksionalların paylanmalarına baxılmışdır (bax, [1] – [3]), məs.,

$$\mathbf{P}\{\max_{t\in[0,\mathrm{T}]} \boldsymbol{w}_t < a\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_0^a \exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\} dx, \quad a \in \mathbb{R}^1.$$

$\mathscr{A}_t^{\boldsymbol{w}}$ – ölçülən X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi sonlu olarsa, yəni $\mathbf{M}|X| < \infty$ olarsa, onda V. f.

$$X = \mathbf{M}X + \int\limits_0^T (g_t,\ d\boldsymbol{w}_t)$$

şəklində ifadə oluna bilinər, burada g_t, – m – ölçülü $\mathscr{A}_t^{\boldsymbol{w}}$ – uzlaşmış prosesdir (bax, [4]).

V. f.-larının stoxastik analizi kimi bölmələr də inkişaf etməkdədir və xüsusi halda V. f.-nın törəməsi təyin olunmuşdur.

Əd.: [1] Ito K., «J. Math. Soc. Jap.» 1951, v. 3, p. 157–69; [2] Винер Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961; [3] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, 2 изд., М., 1986; [4] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [5] Ватанабэ С., Икэда Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

VİNER FUNKSİONALI; ortoqonal sıralara ayrılış **« винеровский функционал;** разложение в ортогональные ряды; **Wiener functional;** expansion into orthogonal series **»** – kvadratik inteqrallanan *Viner funksionalı* X -in (X hər hansı $T > 0$ üçün $\mathscr{A}_T^{\boldsymbol{w}}$ – ölçüləndir və $\boldsymbol{w}_t$ birölçülü Viner prosesidir) polinomial ortoqonal funksionallar üzrə sıraya ayrılışıdır:

$$X = \mathbf{M}X + \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{r, m_1+...+m_r=n} A_{m_1,...,m_r} \varphi_{m_1,...,m_r},$$

$A_{m_1,...,m_r}$, – Furye – Hermit əmsallarıdır,

$$A_{m_1,...,m_r} = \mathbf{M}X \cdot \varphi_{m_1,...,m_r};$$

$$\varphi_{m_1,...,m_r} = \psi_{m_1,1} \cdot ... \cdot \psi_{m_r,r},$$

$$\psi_{m,p} = H_m\left(\int\limits_0^T \alpha_t^{(p)}\, d\boldsymbol{w}_t\right),$$

$\alpha_t^{(p)}$, – $L^2[0, T]$ -də ortonormalanmış bazisdir,

$$H_m(u) = (-1)^m 2^{-m/2} (m!)^{-1/2} e^{u^2} \frac{d^m}{du^m} (e^{-u^2})$$

normalanmış Hermit çoxhədlileridir. Bu halda

$$\mathbf{M}X^2 = (\mathbf{M}X)^2 + \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{r, m_1+...+m_r=n} (A_{m_1,...,m_r})^2.$$

Hər bir $\varphi_{m_1,...,m_r}$ funksionalı çoxqat Viner inteqralı şəklində ifadə oluna bilindiyindən

$$X = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{n=0}^{N} G_n(K_n)$$

ifadəsi doğrudur, burada $G_n(K_n) \perp G_m(K_m)$, $m \neq n$;

$$G_n(K_n) = \int\limits_{[0,T]^n} K_n(t_1, ..., t_n)\, d\boldsymbol{w}_{t_1} ... \, d\boldsymbol{w}_{t_n},$$

$$K_n(t_1, ..., t_n) = \lim_{\varepsilon\to 0} (\varepsilon^n n!)^{-1} \mathbf{M}XG_n(L_n^{\varepsilon}),$$

$$L_n^{\varepsilon}(s_1, ..., s_n) = \begin{cases} 1, & t_i \le s_i \le t_i + \varepsilon,\ i = 1, ..., n \\ 0, & \text{əks halda.} \end{cases}$$

Əd.: [1] Cameron R., Martin W. T., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 385–92; [2] Винер Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1961.

VİNER İNTEQRALI « винеровский интеграл; Wiener integral » – $C = C[0, 1]$ ədədi kəsilməz funksiyalar fəzasının Borel σ – cəbri $\mathscr{B}$ -də təyin olunmuş $\mu_{\boldsymbol{w}}$ *Viner ölçüsü* üzrə inteqraldır. V. i.-nın ehtimali interpretasiyası: V. i.-nın, $\mu_{\boldsymbol{w}}$ Viner ölçüsünü doğuran $\boldsymbol{w}(t)$ Viner prosesinin trayek-toriyaları üzərində təyin olunmuş təsadüfi funksionalın riyazi göz-ləmə olmasıdır:

$$\int\limits_C f(x(\cdot))\mu_{\boldsymbol{w}}(dx(\cdot)) = \mathbf{M}f(\boldsymbol{w}(\cdot)).$$

Burada $f(x(\cdot))$, – C-də təyin olunmuş, $\mathscr{B}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən ədədi funksionaldır.

VİNER KÖRPÜSÜ « винеровский мост; Wiener bridge », Braun körpüsü – sonlu zaman parçasının uclarında aldığı qiymətlərin qeyd olunması şərtilə, şərti *Viner prosesidir*.

$a \le t \le b$ olduqda, $\zeta(t)$ V. k. $\zeta(a) = A$, $\zeta(b) = B$ sərhəd şərtlərilə verilən, riyazi gözləməsi

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{M}\zeta(t) = A + \frac{B - A}{b - a}(t - a), \quad a \le t \le b,$$

kovariasion funksiyası

$$K(s,\ t) = \mathbf{M}\{[\zeta(s) - \mathbf{m}(s)][\zeta(t) - \mathbf{m}(t)]\} =$$

$$= \frac{(b - t)(s - a)}{b - a}, \quad a \le s \le t \le b$$

olan kəsilməz Qauss – Markov prosesidir.

$$\zeta^*(s) = \zeta(t) - \mathbf{m}(t), \quad t = a + (b - a)s$$

düsturları vasitəsilə $\zeta(t)$ V. k., $0 \le s \le 1$ olduqda, $\zeta^*(0) = \zeta(1) = 0$ sərhəd şərtləri ilə verilən $\zeta^*(s)$ V. k.-nə çevrilir. $w(t)$ sıfırdan başlayan standart Viner prosesi olduqda da, $\zeta^*(s) = w(s) - s\,w(1)$ qəbul etməklə eyni prosesi almaq olur.

V. k. funksional limit teoremlərində istifadə olunur. Əgər F_n, – ξ təsadüfi kəmiyyətinin empirik paylanma funksiyası, F onun kəsilməz nəzəri paylanma funksiyasıdırsa, onda $x = F^{-1}(s)$, $0 \le s \le 1$, $n \to \infty$ olduqda $\zeta_n^*(s) = \sqrt{n}\,[F_n(x) - F(x)]$ təsadüfi prosesi V. k.-nə yığılır. *Kolmoqorov kriterisi* statistikasının paylanmasının çıxarılışı bu mülahizəyə əsaslanır.

Əd.: [1] Х и д а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

VİNER MARTİNQALI « винеровский мартингал; Wiener martingale » – kəsilməz, *kvadratik inteqrallanan* $\mu(t)$ *martinqalıdır*, $\mu(0) = 0$; V. m.-nın xarakteristikası – $\langle \mu \rangle_t = t$. Yəni V. m. elə *Viner prosesidir*. Aşağıda baxılan bütün təsadüfi proseslər qeyd olunmuş $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t, \mathbf{P})$ stoxastik bazisində təyin olunmuşdur, $t \ge 0$. Tərifdə qeyd olunmuş xassənin çoxölçülü analoqu L e v i t e o r e m i kimi (bax, [1]) məlumdur, bu teoremdə hökm olunur ki, əgər $\mu(t)$ $\mathcal{A}_t$ axınına nəzərən m – ölçülü kəsilməz lokal martinqaldırsa, $\mu(0) = 0$ və qarşılıqlı xarakteristika $\langle \mu_i, \mu_j \rangle_t = \delta_{ij} t$ (δ_{ij} – Kroneker simvoludur) olarsa, onda μ_t $\mathcal{A}_t$-yə nəzərən m – ölçülü Viner prosesidir.

Əgər $(\mu(t), \mathcal{A}_t)$ m – ölçülü Viner prosesidirsə, onda aşağıdakı müddəalar doğrudur:

1) Əgər $b(s, \omega) \in \mathbb{R}^m$, $|b(s, \omega)| = 1$ olarsa, onda

$$\left(\int_0^t b(s, \omega)\, d\mu(s),\ \mathcal{A}_t \right)$$

Viner prosesidir.

2) Əgər $B(s, \omega)$ bütün (s, ω)-lar üçün $\mathbb{R}^n$-də unitar operatordursa, onda

$$\left(\int_0^t B(s, \omega)\, d\,\mu(s),\ \mathcal{A}_t \right)$$

Viner prosesidir.

3) $m = 1$, $\alpha(s, \omega)$ – ədədi funksiya və bütün $t > 0$ üçün

$$\int_0^t \alpha^2(s, \omega) d(s) < \infty, \quad \int_0^\infty \alpha^2(s, \omega) ds = \infty$$

olsun və $t = \int_0^{\tau_t} \alpha^2(s, \omega) ds$ bərabərliyindən τ_t təyin olunsun. Onda

$$\left(\int_0^{\tau_t} \alpha(s, \omega) d\mu(s),\ \hat{\mathcal{A}_t} = \mathcal{A}_{\tau_t} \right)$$

Viner prosesidir.

Əd.: [1] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975; [2] В а т а н а б э С., И к э д а Н., Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, пер. с англ., М., 1986.

VİNER MEYDANI « винеровское поле; Wiener field » – *Viner prosesinin* çoxparametrli analoqu, n – ölçülü $\mathbb{R}^n$ Evklid fəzasında təyin olunmuş paralelepipedlərdə bircins asılı olmayan artımlarlı həqiqi Qauss meydanıdır. Standart V. m. $W(x) = W(x_1, \ldots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ – riyazi gözləməsi $\mathbf{M}W(x) = 0$, korrelyasion funksiyası

$$\mathbf{M}W(x)W(y) = \prod_{i=1}^n b(x_i, y_i)$$

olan Qauss meydanı kimi təyin olunur, burada

$$b(x_i, y_i) = \begin{cases} \min(x_i, y_i), & x_i > 0,\ y_i > 0 \text{ olduqda;} \\ \min(-x_i, -y_i), & x_i < 0,\ y_i < 0 \text{ olduqda;} \\ 0, & \text{əgər } x_i, y_i \le 0 \text{ olarsa.} \end{cases}$$

$W(x)$ meydanı $\mathbb{R}^n$-in ölçülən altçoxluqlarında $\mathbf{M}\Gamma(dx) = 0$ və $\mathbf{M}|\Gamma(dx)|^2 = dx$ şərtləri, $x \in \mathbb{R}^n$ üçün $W(x) = \Gamma(A_x^0)$ bərabərliyi ilə təyin olunan Qauss ortoqonal ölçüsü Γ ilə təyin oluna bilinir, burada

$$A_x^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \min(0, x_i) \le y_i \le \max(0, x_i),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

$W(x)$ V. m. sanki yəqin kəsilməzdir və $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ şərtini təmin edən bütün x-lər üçün vahid ehtimalla $W(x) = 0$ olur.

$\mathbb{R}^n$ fəzasının $\mathbf{I}^n = [0, 1]^n$ vahidi kubunda $W(x)$ meydanını 1 ehtimalla müntəzəm yığılan sıra kimi ifadə etmək olur, yəni

$$W(x) = \sum_{m=0}^\infty Z_m \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} \varphi_m(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n,$$

burada $\{\varphi_m(y),\ y \in \mathbf{I}^n\}$, – $L^2(\mathbf{I}^n)$ Hilbert fəzasında elə funksiyaların ixtiyari tam ortonormalanmış sistemidir ki, bunlar $\mathbf{I}^n$-də Lebeq ölçüsü üzrə kvadratı ilə inteqrallanan funksiyalardır, $\{Z_m\}$, – $\mathbf{M}Z_m = 0$ və $\mathbf{M}Z_m^2 = 1$ şərtini ödəyən asılı olmayan Qauss təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığıdır (bax, [2]). $\{x, W(x), x \in \mathbf{I}^n\}$ V. m.-nın qrafikində demək olar ki, bütün realizasiyaların Hausdorf dim. – ölçüsü $(n + 1/2)$-ə bərabərdir və $0 < \beta < 1/2$ olduğu hallarda

$$|W(x) - W(y)| \le Z\,\|x - y\|^\beta,\ x, y \in \mathbf{I}^n$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, burada Z – sanki yəqin sonlu müsbət təsadüfi kəmiyyətdir (bax, [3]).

V. m. təsadüfi funksiyaların müxtəlif modellərinin qurulmasında istifadə olunur. Bu zaman ümumiləşmiş təsadüfi meydanlar nəzəriyyəsi anlamında anlaşılan $\dot{W}(x) = \partial^n W(x) / \partial x_1 \dots \partial x_n$ törəməsi (bu törəmə çoxparametrli bəyaz küydür, yəni sabit spektral sıxlığı $f(\lambda) = 1/(2\pi)^n$ -ə bərabər ümumiləşmiş bircins Qauss meydanıdır) və $W(x)$ üzrə stoxastik inteqrallar mühüm rol oynayır (bax, [4]).

Məs., $\mathbf{M}V(x) = 0,\ x \in \mathbf{I}^2$ və

$$\mathbf{M}V(x)V(y) = [\min(x_1, y_1) - x_1 y_1]\,[\min(x_2, y_2) - x_2 y_2]$$

şərtlərilə təyin olunan $V(x), x \in \mathbf{I}^2$ Qauss meydanına (B r a u n m ə l ə f ə s i də adlandırılan)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(x) + \frac{1}{1-x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} V(x) + \frac{1}{1-x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} V(x) + \\ + \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} V(x) = \dot{W}(x)$$

stoxastik differensial tənliyinin həlli (ümumi mənada) kimi baxmaq olar; bu halda stoxastik differensial tənliyə $\mathbf{I}^2$ kvadratında və $\mathbf{I}^2$ -nın sərhədində sərhəd şərtləri sıfır olduğu hal üçün baxılır.

Əd.: [1] Ч е н ц о в Н. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 4, с. 607–09; [2] Б у л д ы г и н В. В., Сходимость случайных элементов в топологических просранствах, К., 1980; [3] A d l e r R. J., The geometry of random fields, Chichester – [a. o.], 1981; [4] C a i r o l i R., W a l s h J. B., «Acta math.» 1975, v. 134, № 1–2, p. 111–83.

VİNER ÖLÇÜSÜ « винеровская мера; Wiener measure » – kəsilməz funksiyalar fəzasının altçoxluqlarından təşkil olunmuş Borel σ – cəbrində *Viner prosesinin* doğurduğu *ehtimal ölçüsüdür.* Ədədi kəsilməz funksiyaların fəzası $C = C[0, 1]$ -də B altçoxluqlarının Borel σ – cəbri

$$C(t_1, \dots, t_n;\ a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \\ = \{ x(\cdot) \in C : a_k \le x(t_k) < b_k,\ k = 1, \dots, n \}$$

tipli bütün silindrik altçoxluqları özündə saxlayan minimal σ – cəbr kimi təyin olunur.

B -də V. ö. μ_w öz qiymətləri ilə silindrik çoxluqlarda birqiymətli təyin olunur (ölçünün davamı haqqında teoremə uyğun olaraq):

$$\mu_w(C(t_1, \dots, t_n;\ a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)) = \int_{a_1}^{b_1} p(t_1, x_1)\,dx_1 \times$$

$$\times \int_{a_2}^{b_2} p(t_2 - t_1, x_2 - x_1)\,dx_2 \ \dots \ \int_{a_n}^{b_n} p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})\,dx_n \quad (*)$$

burada

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2t} \right\}.$$

(*) düsturu $w(t)$ standart Viner prosesinin sonluölçülü paylanmalarını ifadə edir və bu anlamda μ_w ölçüsü $w(t)$ Viner prosesinin doğurduğu ölçü kimi anlaşılır. μ_w ölçüsünün ümumi xassələri $w(t)$ prosesinin trayektoriyalarının xassələri ilə əlaqəlidir. Məs., məlumdur ki, μ_w ölçüsü heç yerdə differensiallanmayan, lakin kəsilməz funksiyalar fəzası C -də topalanmışdır $(\mu_w(\hat{C}) = 1)$.

V. ö. anlayışı Braun hərəkətinin riyazi modelinin öyrənilməsi ilə əlaqədar N. Viner tərəfindən daxil olunmuşdur.

Əd.: [1] W i e n e r N., «Math. and Phys.» 1923, v. 2, p. 131–74; [2] Х и д а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

VİNER PROSESİ « винеровский процесс; Wiener process » – həqiqiqiymətli asılı olmayan artımlarlı elə bircins $w(t),\ t \ge 0$ *Qauss prosesidir* ki,

$$w(0) = 0,\ \mathbf{M}(w(t) - w(s)) = 0,$$

$$\mathbf{D}(w(t) - w(s)) = \sigma^2 |t - s|.$$

V. p. birölçülü Braun hərəkətinin riyazi modelidir və o, B r a u n h ə r ə k ə t i p r o s e s i kimi də adlanır. $\sigma^2 = 1$ olduqda V. p. s t a n d a r t V i n e r p r o s e s i adlanır. Separabel V. p. vahid ehtimalla kəsilməzdir və aşağıda V. p. məhz kəsilməz standart V. p. kimi anlaşılacaqdır. Orta qiymətlərinin və artımlarının dispersiyalarının verildiyi hallarda bu proses vahid ehtimalla yeganə kəsilməz asılı olmayan artımlarlı prosesdir. Kəsilməz həqiqi funksiyalar fəzası $C[0, 1]$ -in Borel σ – cəbrində ehtimal ölçüsü $w(t),\ t \in [0, 1]$ V. p.-nin paylanmasıdır və ölçü nəzəriyyəsində sonsuzölçülü funksional fəzalarda bu ehtimal ölçüsü mühüm rol oynayır və *Viner ölçüsü* adlanır.

V. p. üçün onun xassələrini əks etdirən bir neçə ekvivalent tərif verilmişdir. Riyazi gözləməsi sıfır və korrelyasion funksiyası $R(s, t) = \min(s, t)$ olan $w(t),\ t \ge 0$ Qauss təsadüfi prosesi məhz V. p.-dir.

Keçid ehtimalının sıxlıq funksiyası $p(t, x, y)$ –

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

parabolik differensial tənliyinin fundamental həlli

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2t} \right)$$

düsturu ilə verilən bircins Markov prosesi $w(0) = 0,\ w(t),\ t \ge 0$ – V. p.-dir.

Əgər $w(0) = 0,\ w(t),\ t \ge 0$ təsadüfi prosesi 1 ehtimalla kəsilməz prosesdirsə, $\mathscr{A}_t,\ t \ge 0$ σ – cəbrlər axını ilə uzlaşmışdırsa və 1 ehtimalla

$$\mathbf{M}((w(t) - w(s))^2 \mid \mathscr{A}_s) = 0$$

$$\mathbf{M}((w(t) - w(s))^2 \mid \mathscr{A}_s) = t - s,\ s < t$$

münasibətlərini ödəyirsə, onda $w(t)$ V. p.-dir.

V. p. faza və zaman şkalasının bəzi çevrilmələrinə görə invariantdır: ixtiyari $\sigma > 0,\ s \ge 0$ qiymətlərində $\zeta(t) = \sigma w(t/\sigma^2),\ t \ge 0;\ \zeta(t) = t w(1/t),\ t > 0$ və $\zeta(0) = 0;\ \zeta(t) = w(t + s) - w(s),\ t \ge 0$ təsadüfi prosesləri V. p.-ləridir. V. p. ciddi Markov xassəsinə malikdirsə və 1 ehtimalla $\tau < \infty$ olarsa, onda $\zeta(t) = w(t + \tau) - w(t),\ t \ge 0$ təsadüfi prosesi $w(t),\ t \le \tau$ prosesindən asılı deyildir.

$w(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$ V. p. konstruktiv olaraq,

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_0^t \varphi_k(u)\, du$$

sırası şəklində ifadə olunur. Burada ξ_k, $k \geq 1$ – asılı olmayan Qauss təsadüfi kəmiyyətləridir və $\mathbf{M}\xi_k \equiv 0$, $\mathbf{D}\xi_k \equiv 1$; φ_k, $k \geq 1$ isə $[0, T]$ parçasında Lebeq ölçüsünə görə kvadratı ilə inteqrallanan bütün həqiqi funksiyaların Hilbert fəzası $L^2[0, T]$-də ortonormalanmış bazisdir. $w(t)$-nin ifadəsindəki sıra $[0, T]$-də 1 ehtimalla müntəzəm yığılır. $[0, \infty)$ zaman yarımoxunda V. p.-ni konstruktiv şəkildə vermək üçün φ_k, $k \geq 1$ əvəzinə, $L^2[0, \infty)$-də ortonormalanmış bazis götürmək kifayətdir. Bu halda $w(t)$-nin ifadəsindəki sıra ixtiyari məhdud intervalda 1 ehtimalla müntəzəm yığılır. Xüsusi halda, $w(t)$, $t \in [0, 1]$ V. p.,

$$w(t) = t\xi_0 = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{k\pi},$$

$$w(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{\sin(k+1/2)\pi t}{(k+1/2)\pi}$$

münasibətlərilə ifadə olunur, burada ξ_k, $k \geq 0$ – asılı olmayan Qauss təsadüfi kəmiyyətləridir və $\mathbf{M}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, $k \geq 0$.

V. p.-nin demək olar ki, bütün trayektoriyaları kifayət qədər kiçik ixtiyari intervalda qeyri – məhdud variasiyaya malikdirlər və heç yerdə differensiallanmayandırlar. V. p. üçün

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{h \to 0} \frac{|w(h)|}{\sqrt{2h \ln\ln h}} = 1 \right\} = 1$$

lokal təkrar loqarifm qanunu və V. p.-ni lokal cəhətdən xarakterizə edən bu qanunun aşağıdakı dəqiqləşmələri doğrudur:

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{h \to +0} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|w(t+h) - w(t)|}{\sqrt{2h \ln(1/h)}} = 1 \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{h \to +0} \sup_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \frac{|w(s+t) - w(s)|}{\sqrt{2h \ln(1/h)}} = 1 \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\left\{ \lim_{h \to +0} \inf_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} \sqrt{\frac{8\ln(1/h)}{\pi^2 h}} |w(s+t) - w(s)| = 1 \right\} = 1.$$

Digər tərəfdən

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left| w(k/2^n) - w((k-1)/2^n) \right|^2 = 1$$

münasibəti 1 ehtimalla ödənilir.

$t \to \infty$ olduqda V. p.-nin trayektoriyaları asimptotik olaraq təkrar loqarifm qanunu –

$$\mathbf{P}\left\{ \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{|w(t)|}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1 \right\} = 1$$

münasibətilə və funksional təkrar loqarifm qanunu ilə ifadə olunur; sonuncu qanuna əsasən

$$\left(\frac{w(nt)}{\sqrt{2n \ln\ln n}},\ t \in [0, 1] \right),\ n \geq 3$$

təsadüfi proseslər ardıcıllığı $C(0, 1)$ fəzasında 1 ehtimalla nisbi kompaktdır və bu ardıcıllığın limit nöqtələri çoxluğu

$$f(0) = 0, \qquad \int_0^1 (f'(t))^2\, dt \leq 1$$

şərtlərini ödəyən Lebeq ölçüsü mənada mütləq kəsilməz $f(t)$, $t \in [0, 1]$ funksiyalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

V. p.-nin tətbiqi baxımdan bir çox mühüm funksionallarının paylanma funksiyalarının aşkar analitik ifadələri vardır və bunlardan bəziləri sadə şəkildədir. Məs., $x > 0$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leq s \leq t} w(s) \leq x\} = 1 - 2\mathbf{P}\{w(t) > x\} =$$

$$= (2/\sqrt{2\pi t}) \int_0^x e^{-u^2/2t}\, du.$$

$x > 0$ səviyyəsini ilk aşma müddəti τ_x-in paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p_x(s) = \left(x/\sqrt{2\pi s^3} \right) e^{-x^2/2s},\ s > 0$$

kimi ifadə olunur. $[0, t]$ intervalında V. p.-nin maksimum nöqtəsi τ ilə (maksimum 1 ehtimalla yeganədir) prosesin maksimumu $\max_{0 \leq s \leq t} w(s)$-in birgə paylanmasının sıxlıq funksiyası

$$p(s, x) = (x/\pi s \sqrt{s(t-s)}) e^{-x^2/2s},\ 0 \leq s \leq t,\ 0 \leq x < \infty$$

düsturu ilə təyin olunur. τ-nun özü isə arksinus qanunu ilə paylanır:

$$\mathbf{P}\{\tau < s\} = 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{s/t},\ 0 \leq s \leq t.$$

V. p.-nin müsbət yarımoxda olma müddəti də arksinus qanunu ilə paylanır.

Yuxarıdakı münasibətlərə əsaslanaraq belə nəticə alınır ki, ixtiyari bir x nöqtəsindən çıxan V. p.-nin trayektoriyası olduqca kiçik zaman ərzində 1 ehtimalla x səviyyəsini sonsuz dəfə ilkin vəziyyətinə qayıdaraq aşır: bütün x-lər üçün 1 ehtimalla $\tau_x < \infty$ olur, yəni t müddətində V. p. bütün nöqtələrdə olur; qeyd olunmuş zaman intervalı $[0, t]$-də bu trayektoriya $s = 0$ və $s = t$ nöqtələrinin yaxınlığında ekstremal qiymətlər almağa meylli olur.

V. p.-nin bircins Markov prosesi kimi invariant ölçüsü $\mathbf{Q}(dx)$ vardır:

$$\mathbf{Q}(A) \equiv \int \mathbf{Q}(dx)\, \mathbf{P}(t, x, A)$$

[$p(t, x, A)$ – keçid ehtimalı funksiyasıdır], bu ölçü ədəd oxunda Lebeq ölçüsü ilə üst-üstə düşür: $\mathbf{Q}(dx) = dx$. V. p.-nin $[0, T]$ müddətində A çoxluğunda olması müddət $T(A)$ -nın erqodik xassəsi ondan ibarətdir ki, $T \to \infty$ olduqda

$$T(A_1)/T(A_2) \to \mathbf{Q}(A_1)/\mathbf{Q}(A_2)$$

münasibəti ixtiyari məhdud A_1 və A_2 Borel çoxluqları üçün 1 ehtimalla ödənilir ($\mathbf{Q}(A_2) > 0$).

Braun hərəkəti prosesinə ilk dəfə L. Başelye [1]-də baxmışdır. Bu prosesin ciddi riyazi qurulması və onun trayektoriyalarının xassələrinin öyrənilməsi N. Viner tərəfindən [2]-də aparılmışdır. m – ölçülü V. p. və birölçülü V. p. haqqında ətraflı məlumat [3] – [8]-də verilmişdir. Hilbert – qiymətli V. p.-ləri nəzəriyyəsi işlənilmişdir (bax, [9]). Vektor parametr üçün V. p.-nin analoqu P. Levi (P. Lévy) və N. N. Çentsov tərəfindən daxil olunmuş təsadüfi meydanlardır (bax, *Viner meydanı*).

Əd.: [1] Bachelier L., «Ann. Sci. Écol. Norm. supér.», 1900, № 17, p. 21–86; [2] Wiener N., «J. Math. and Phys.», 1923, № 2, p. 131–74; [3] Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., M., 1972; [4] Дуб Дж. Д., Вероятностные процессы, пер. с англ., M., 1956; [5] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер с англ., M., 1968; [6] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, M., 1973; [7] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, M., 1974; [8] Csorgo M., Revesz P., Strong Approximations in Probability and Statistics, Bdpst, 1981; [9] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В., Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, M., 1983; [10] Розанов Ю. А., в кн.: Математическая энциклопедия, т. 1, M., 1977, с. 698–700.

VİNER PROSESİ ani əksolunan **« винеровский процесс** с мгновенным отражением; **Wiener process with instantaneous reflection about zero »** – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

VİNER PROSESİ çəp **« винеровский процесс** косой; skew **Brownian motion »** – bax, *Viner prosesi* yarımoxda.

VİNER PROSESİ çoxölçülü **« винеровский процесс** многомерный; multivariate **Wiener process »** – bax, *Çoxölçülü Viner prosesi*.

VİNER PROSESİ çoxparametrli **« винеровский процесс** многопараметрический; multiparameter **Wiener process »** – bax, *Viner vərəqi.*

VİNER PROSESİ; ekskursiya **« винеровский процесс;** экскурсия; **Wiener process;** excursion **»** – bax, *Ekskursiya*(sı) Viner prosesinin.

VİNER PROSESİ; erqodik teoremlər **« винеровский процесс;** эргодические теоремы; **Wiener process;** ergodic theorems **»** – bax, *Erqodik teoremlər* Viner prosesləri üçün.

VİNER PROSESİ kəsilməzlik modulu **« винеровский процесс;** модуль непрерывности; **Wiener process;** modulus of continuity **»** – *standart Viner prosesi* $w(t)$-nin ossilyasiyalarını xarakterizə edən

$$\omega(h) = \sup\{\,|w(t+s) - w(t)| : 0 \le t,\ t+s \le 1, |s| < h\,\}$$

kəmiyyətidir:

$$\lim_{h \to 0} w(h) = 0$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir, belə ki, $w(t)$-nin trayektoriyaları kəsilməz funksiyalardır. Dəqiq yığılma sürəti Levi teoremi ilə verilir: $l(h) = (2h|\ln h|)^{1/2}$ olduqda

$$\limsup_{h \to 0} w(h)/l(h) = 1$$

münasibəti sanki yəqin ödənilir (bax, *Təkrar loqarifm qanunu* Viner prosesi üçün). Deməli, $w(t)$ prosesinin trayektoriyaları $\alpha < 1/2$ olduqda Lipşits şərtini sanki yəqin ödəyir, $\alpha \ge 1/2$ olduqda bu şərti ödəmir. Trayektoriyaların qeyri-requlyarlığı aşağıdakı mənada müntəzəmdir:

$$\lim_{h \to 0} \inf_{0 \le t \le 1} \sup_{0 \le s \le h} \frac{|\ln h|}{l(h)} |w(t+s) - w(t)| = \frac{\pi}{4} \quad \text{sanki yəqin.}$$

$\omega(h)$-in paylanması üçün aşağıdakı qiymətləndirmə faydalıdır:

$$\mathbf{P}\{\,\omega(h) > x\,\} \le 20xh^{-3/2} \exp(-x^2/2h).$$

Əd.: [1] Levy P., Théorie dé l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; [2] Csorgo M., Revesz P., «Stoch. Proc. Appl.», 1978, v. 8, № 2, p. 119–29; [3] Revesz P., «Ann. Probab.», 1982, v.10, № 3, p. 613–22.

VİNER PROSESİ Li qrupunda **« винеровский процесс** на группе Ли; **Wiener process** on a Lie group **»** – qiymətləri birəlaqəli G Li qrupunun çoxobrazlısından olan, zaman üzrə bircins *Markov prosesidir*; onun bütün trayektoriyaları sanki kəsilməzdir, Γ G-də Borel çoxluğudur və $g \in G$ olduqda keçid ehtimalı $\mathbf{P}(t, g, \Gamma)$ aşağıdakı şərtlərdən birini ödəyir: ixtiyari $h \in G$ üçün ya $\mathbf{P}(t, hy, h\Gamma) = \mathbf{P}(t, g, \Gamma)$ (G-də solinvariant V. p.), yaxud $\mathbf{P}(t, gh, \Gamma h) = \mathbf{P}(t, g, \Gamma)$ (G-də sağinvariant V. p.). Li qrupunda V. p. $w(t, \omega)$

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}\mathbf{P}(t, g, G \setminus U_g) = 0$$

tip Lindeberq şərtini ödəyir, burada U_g, – g-nin ($g \in G$) açıq ətrafıdır. Əgər $g^1, \dots, g^n$ və $h^1, \dots, h^n$ G-dən olan g və h-ın uyğun lokal koordinatlarıdırsa, onda G-də $g, h \subset U$ açıq çoxluğu üçün aşağıdakı limitlər vardır:

$$\lim t^{-1} \int_U (h^i - g^i)\ \mathbf{P}(t, g, dh) = a^i(g),$$

və

$$\lim t^{-1} \int_U (h^i - g^i)(h^j - g^j)\ \mathbf{P}(t, g, dh) = b^{ij}(g).$$

Əgər G^* G Li qrupunun birəlaqəli örtən Li qrupudursa, $\varphi: G^* \to G$ təbii homomorfizmdirsə, onda

$$\tilde{w}^*(t, \omega) \overset{def}{=} [\ w(s, \omega),\ 0 \le s \le t\ ]^*,$$

burada bərabərliyin sağ tərəfi G^*-nun $[w(s,\omega),\ 0\le s\le t]$ trayektoriyası ilə ifadə olunan elementidir (w qeyd olunmuşdur). Li qrupunda V. p. $w(t,\omega)$, $[w(0,\omega)=e]$ G^* Li qrupunda V. p.-dir. Əksinə, əgər $w^*(t,\omega)\ w^*(0,\omega)=e^*$ şərtilə G^*-da V. p.-dirsə, onda $w(t,\omega)=\varphi[w^*(t,\omega)]$ G Li qrupunda V. p.-dir. $\mathbf{P}(t,x,\Gamma)$ və $\mathbf{P}^*(t,x^*,\Gamma^*)$ keçid ehtimalları $\mathbf{P}(t,\varphi(x^*),\Gamma)=$ $=\mathbf{P}^*(t,x^*,\varphi^{-1}(\Gamma))$ münasibətilə əlaqəlidirlər, G və G^*-da sol- (uyğun olaraq, sağ-) invariant Haar ölçülərinə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər və uyğun ehtimal sıxlıqları üçün

$$p(t,x,y)=\sum_{\alpha_n} p^*(t,\ \varphi^{-1}(x),\ \alpha_n y^*)$$

düsturu doğrudur, burada $N=\{a_1,a_2,\ldots\}$, – G $(G^*/N\cong G)$ qrupunun diskret komponentlər qrupudur və sağ tərəf proobrazın seçilməsindən asılı deyildir.

Əd.: [1] I t ô K., «Proc. Jap. Acad.», 1950, v. 26, № 8, p. 4–10; [2] I t ô K., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1952, № 1, p. 40–48.

VİNER PROSESİ; m a k s i m u m və m i n i m u m u n p a y l a n m a s ı « **винеровский процесс;** р а с п р е д е л е н и е м а к с и м у м а и м и н и м у м а; **Wiener process;** d i s t r i b u t i o n o f m a x i m u m a n d m i n i m u m » – $w(t),\ t\ge 0$ standart Viner prosesi üçün

$$\mathbf{M}(t)=\max_{0\le s\le t} w(s) \text{ və } \mathbf{m}(t)=\min_{0\le s\le t} w(s)$$

təsadüfi kəmiyyətləri ikimisilli (əksolunan) normal qanunla –

$$\mathbf{P}\{\mathbf{M}(t)>x\}=\mathbf{P}\{-\mathbf{m}(t)>x\}=2\mathbf{P}\{w(t)>x\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_x^\infty e^{-y^2/2t}dy,\ x\ge 0$$

qanunu ilə paylanır. İxtiyari A Borel çoxluğu üçün Viner prosesi, prosesin maksimumu və minimumunun b i r g ə p a y l a n m a s ı

$$\mathbf{P}\{\mathbf{m}(t)>a,\mathbf{M}(t)<b,w(t)\in A\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_A[\exp\{-(x+2k(b-a))^2/2t\}-$$

$$-\exp\{-(x-2a+2k(b-a))^2/2t\}]\,dx$$

düsturu ilə təyin olunur.

Xüsusi halda,

$$\mathbf{P}\{\mathbf{M}(t)<b,\ w(t)<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{x-2b}^{x}e^{-y^2/2t}dy,$$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{m}(t)>-b,\ \mathbf{M}(t)<b\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\int_{-b}^{b}\exp\{-(y-2kb)^2/2t\}dy=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\{-\pi^2(2k+1)^2t/(8b)^2\}.$$

Aparılı $w_a(t)=w(t)-at$, $a>0$ V. p.-nin, üstlü paylanması

$$\mathbf{P}\{\mathbf{M}_a(\infty)>x\}=e^{-2ax},\ x>0$$

düsturu ilə ifadə olunan, sonlu maksimumu $\mathbf{M}_a(\infty)=$ $=\max_{t\ge 0} w_a(t)$ vardır.

Əd.: [1] Х и д а Т., Броуновское движение, пер. с англ., М., 1987.

VİNER PROSESİ; p r o s e s i n h i s s ə s i n i n e k s s e s s i v f u n k s i y a l a r ı « **винеровский процесс;** э к с ц е с с и в н ы е ф у н к ц и и д л я е г о ч а с т и; **Wiener process;** e x c e s s i v e f u n c t i o n s o f i t s p a r t » – *Viner prosesinin* vəziyyətlər fəzasının müəyyən oblastından ilk çıxış anında qırılmış V. p. üçün ekssesiv funksiyalardır (bax, *Markov prosesi*; h i s s ə s i). Belə funksiyalar ailəsi uyğun oblastda klassik mənada superharmonik, mənfi olmayan bütün funksiyalar çoxluğu ilə üst-üstə düşür. V. p. üçün ekssesiv funksiyalar mənfi olmayan konstantlardır.

Bax, *Potensial nəzəriyyəsi* M a r k o v p r o s e s i ü ç ü n.

Əd.: [1] Д ы н к и н Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] D o o b J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, N.Y. – [a. o.], 1984.

VİNER PROSESİ s f e r i k « **винеровский процесс** с ф е р и ч е с к и й; s p h e r i c a l **Wiener process** » – bax, *Sferik Viner prosesi.*

VİNER PROSESİ s t a n d a r t « **винеровский процесс** с т а н д а р т н ы й; s t a n d a r d **Wiener process** » – bax, *Viner prosesi*.

VİNER PROSESİ y a r ı m o x d a « **винеровский процесс** в п о л у п р я м о й; **Wiener process** i n h a l f - l i n e » – $X_t=B_t+M_t$, $t\ge 0$ şəklində *semi – martinqaldır*, burada B_t – artan prosesdir, $dB_t=L_{\{0\}}(X_t)dB_t$, M_t – kəsilməz martinqaldır və $d\langle M\rangle_t=\mathrm{I}_{(0,\infty)}(X_t)dt$. X_t özünü standart *Viner prosesi* kimi aparır. Belə ki, X_t O nöqtəsinə çatdıqda ya bu nöqtədə həmişəlik qalır, ya da ki, sıçrayışla və ya *aparı* təsiri ilə $(0,\infty)$-a qayıda bilər. O nöqtəsində X_t-nin özünü nə cür aparması Markov halında (bax, [2]) B_t prosesinin öngörül xarakteristikaları terminlərilə: $\{\rho,c,\pi\}$ toplusu ilə təsvir olunur; $\rho\ge 0$ – zaman müddəti, $c\ge 0$, – *aparı əmsalı*, π, – $(0,\infty)$-da ölçüdür, $\int_{(0,\infty)} u\wedge 1\pi(du)<\infty$ – sıçrayışların ölçüsüdür.

Məhz X_t ilə uzlaşan (prosesin daxildəki sıfırda keçirdiyi müddət) elə kəsilməz artan φ prosesi vardır ki,

$$\mathrm{I}_{\{0\}}(X_t)dt=\rho d\varphi_t,\ B_t=c\varphi_t+\sum_{s\le t}\Delta B_s$$

və B_t prosesinin ΔB_s sıçrayışları ölçüsünün dual öngörül proyeksiyası $d\pi d\varphi$-yə bərabərdir. $\rho=0$ halında

$$\int_0^\infty \mathrm{I}_{\{0\}}(X_t)dt=0.$$

Əgər bu halda $c=1$, $\pi=0$ olarsa, onda X_t s ı f ı r d a a n i ə k s o l u n a n (O nöqtəsində) V i n e r p r o s e s i, O

nöqtəsi əksedici baryer adlanır; X_t -nin paylanması V. p.-nin modulunun paylanması ilə üst-üstə düşür (bax, [2]):

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right).$$

$\rho > 0$, $c = 1$, $\pi = 0$ halında isə O nöqtəsi lə n g i d i c i baryer adlanır. $\rho > 0$, $c = 0$, $\pi = 0$ halında isə O nöqtəsi u d u c u baryer adlanır; keçid ehtimalının sıxlıq funksiyası

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right)$$

düsturu ilə təyin olunur və

$$\mathbf{P}\{X_t > 0\} = 1 - 2 \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy.$$

$(0, \infty)$ yarımoxunda V. p.-nin təbii ümumiləşməsi $\mathbb{R}^1$ -də, sıfırda şəffaf sərhədli Viner prosesidir (bax, *Stoxastik differensial tənlik* s ə r h ə d l i). Ani əksolunan prosesə analoji proses ç ə p V i n e r p r o s e s i d i r (bax, [4] $\mathbb{R}^1/\{0\}$ halı) ki, bu proses özünü Viner prosesi kimi aparır, 0 nöqtəsində isə $p > 0$ və $1-p$ ehtimalları ilə uyğun olaraq, $(0, \infty)$ və $(-\infty, 0)$ -da əks olunur.

Əd.: [1] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Теория мартингалов, М., 1986; [2] И т о К., М а к к и н Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1986; [3] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [4] H a r r i s o n J. M., S h e p p L. A., «Ann. Probab.», 1981, v. 9, p. 309–13.

VİNER PROSESİNİN FUNKSİONALI « винеровского процесса функционал; functional of the Wiener process » – $w(t)$, $t \in [0, T]$ *Viner prosesinin* doğurduğu $\mathcal{A}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülən Y təsadüfi kəmiyyətidir. $w_t = (w_t)$ qiymətləri kəsilməz funksiyalar fəzası $C[0, T]$ -dən olan təsadüfi kəmiyyət olduğundan, $Y = F(w)$, burada F , – $C[0, T]$ -də Borel funksiyasıdır.

V. p. f.-nın s t o x a s t i k i n t e q r a l l a r l a i f a d ə s i. $L^2(\Omega)$ -dan olan ixtiyari V. p. f.

$$Y = \mathbf{M}Y + \int_0^T \varphi_t\, d w_t$$

şəklində ifadə olunur, burada inteqral İto mənada anlaşılır, φ – antisipativ funksiya olub, $L^2(\Omega \times [0, T])$ sinfində yeganədir (bax, [1], həm də *Klark düsturu*). V. p. f.-nın inteqral ifadələri stoxastik analiz, filtrasiya nəzəriyyəsi və optimal idarəetmədə (bax, [1]) mühüm rol oynayır.

Əd.: [1] C l a r k J. M. C., «Ann. Math. Statist.», 1970, v. 41, № 4, p. 1282–95; [2] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

VİNER SOSİSİ « винеровская сосиска; Wiener sausage » – $\sigma = 1$ parametrli (yəni korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}W(t)W(s) = \min(t, s)$ olan) $W(t)$ *Viner prosesinin* trayektoriyası $w(t)$, $0 \le t \le u$ səth əyrisinin nöqtələrində mərkəzləri yerləşən r radiuslu dairələr toplusu ilə örtülmüş, qalınlığı $2r$, uzunluğu u -ya bərabər müstəvinin nöqtələri y -lərin çoxluğu S_u^r -dir; başqa sözlə,

$$S_u^r = \{y : |y - w(t)| \le r \text{ , hər hansı bir } t \in [0, u] \text{ üçün}\}.$$

V. s.-nin daha ümumi sinfi $S_u^{K_r}$

$$S_u^{K_r} = \{y : y - w(t) \in K_r, \text{ hər hansı bir } t \in [0, u] \text{ üçün}\}$$

bərabərliyi ilə verilir, burada K_r – «mərkəzi» (K_r -in daxili nöqtəsidir) koordinat başlanğıcında yerləşən $2r$ diametrli müstəvidə qeyd olunmuş kompakt çoxluqdur. V. s. ilə əlaqədar tədqiqatların böyük hissəsi qeyd olunmuş u və $r \to 0$ halı və ya qeyd olunmuş r və $u \to \infty$ halında V. s. orta sahəsinin asimptotikasının öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Bu sahədə ilk nəticələr 1933-də A. N. Kolmoqorov və M. A. Leontoviç tərəfindən alınmışdır (bax, [1] və ya [2]). Sonrakı nəticələr [3] – [7]-də şərh olunmuşdur.

Əd.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986, с. 124-34; [2] Л е о н т о в и ч М. А., Избранные труды. Теоретическая физика, М., 1985, с. 134–42; [3] C h a v e l I., F e l d m a n E. A., «Comp. Math.», 1986, v. 60, p. 65–84; [4] D y n k i n E. B., «Ann. Probab.», 1988, v. 16., p. 1–57; [5] L e G a l l J.–F., «Ann. Probab.», 1986, v. 14, p. 1219–44; [6] L e G a l l J.–F., «C.r. Acad. sci., Ser. 1», 1987, t. 304, p. 339–42; [7] L e G a l l J.–F., «J. Funct. Anal.», 1989.

VİNER VƏRƏQİ « винеровский лист; Wiener sheet », B r a u n v ə r ə q i, – riyazi gözləməsi sıfra bərabər və korrelyasion funksiyası $\mathbf{M}\, W_s W_t = \min(s_1, t_1) \min(s_2, t_2)$ olan $W = (W_t,\ t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2)$ Qauss *təsadüfi meydanıdır.* V. v. kəsilməz modifikasiyaya malikdir (bax, [1]) və ikiölçülü parametr *Viner prosesinin* təbii ümumiləşmiş halıdır.

Çoxparametrli Viner prosesi analoji təyin olunur. n – p a r a m e t r l i V i n e r p r o s e s i riyazi gözləməsi sıfra bərabər və korrelyasion funksiyası

$$\mathbf{M}W_s W_t = \prod_{i=1}^n \min(s_i,\ t_i)$$

olan sanki yəqin kəsilməz Qauss təsadüfi meydanına deyilir. Çoxparametrli Viner prosesinin artımları asılı olmayan bircins artımlardır və bu aşağıdakı kimi anlaşılır. $t, h \in \mathbb{R}_+^n$ olduğu fərz olunur; W -nin $[t, t+h] = \prod_{i=1}^n [t_i,\ t_i + h_i]$ düzbucaqlısında artımı

$$W[(t+h)] = \sum (-1)^{n+\sum_{i=1}^n \varepsilon_i} W_{t_1+\varepsilon_1 h_1, \ldots, t_n+\varepsilon_n h_n}$$

kəmiyyətidir, burada cəmləmə bütün $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vektorları üzrə aparılır, $\varepsilon_i = 0$ və ya $\varepsilon_i = 1$, $1 \le i \le n$. Bu halda W -nin artımları göstərilən şəkilli düzbucaqlılarda asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, bu şərtlə ki, bu düzbucaqlıların ümumi daxili nöqtələri olmamalıdır və $W[(t,\ t+h)]$ riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası $|h|$ olan normal paylanmaya malikdir, burada $t \in \mathbb{R}_+^n$ üçün $|t| = \prod_{i=1}^n t_i$.

n – parametrli Viner prosesi W -nin ümumiləşmiş törəməsi

$$W_{t_1,\dots,t_n} = \frac{\partial^n W_{t_1,\dots,t_n}}{\partial t_1 \dots \partial t_n}$$

$\mathbb{R}_+^n$ -də Qauss bəyaz küyüdür.

Fərz olunur ki, $s,\ t \in \mathbb{R}_+^n$, $\delta(s,t) = \lambda([0,s]\Delta[0,t])$, λ, – $\mathbb{R}^n$ -də Lebeq ölçüsüdür; əgər $s_i \le t_i$ olarsa, $s \le t$, $1 \le i \le n$; $u \in \mathbb{R}_+^n$ nöqtəsi qeyd olunmuşdur, $u_i > 0$, $1 \le i \le n$. Onda n – parametrik Viner prosesi W -nın sanki bütün trayektoriyaları üçün

$$\overline{\lim_{|t|\to 0,\ t\le u}} \frac{|W_t|}{\sqrt{2n|t|\ln\ln 1/|t|}} = 1,$$

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty,\ t\ge u}} \frac{|W_t|}{\sqrt{2n|t|\ln\ln|t|}} = 1,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\delta(s,t)\le\varepsilon, s\le u,\ t\le u} \frac{|W_t - W_s|}{\sqrt{2n\delta(s,t)\ln|u|/\delta(s,t)}} = 1,$$

$$C(u) = \{u\}$$

burada $C(u)$, – u nöqtəsini özündə saxlayan $\{t : W_t = W_u\}$ qapalı çoxluğunun əlaqə komponentidir.

W – qiymətləri $\mathbb{R}^d$ -dən olan n – parametrli Viner prosesi, yəni $W = (W^1, \dots, W^d)$, W^i – n – parametrli Viner prosesləridir, müxtəlif i -lər üçün W_i asılı olmayan proseslərdir; $d \ge 1$. Onda ixtiyari $x \in \mathbb{R}^d$ üçün:

əgər $d > 2n$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{|t|\to\infty,\ t\ge(1,\dots,1)} |W_t| = \infty\right\} = 1;$$

əgər $d \le 2n$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{|t|\to\infty,\ t\ge(1,\dots,1)} |W_t - x| = 0\right\} = 1;$$

əgər $d \ge 2n$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{W_t = x,\ |t| > 0 \text{ şərtini ödəyən hər hansı } t \text{ üçün}\} = 0;$$

əgər $d < 2n$ olarsa, onda ixtiyari $u \in \mathbb{R}_+^n$ üçün

$$\mathbf{P}\{\mathbf{M}t \ge u : W_t = x\} = 1.$$

Ədd.: [1] Ч е н ц о в Н. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 4, с. 607–09; [2] O r e y S., P r u i t t W. E., «Ann. Probab.» 1973, v. 1, № 1, p. 138–63; [3] Р о з а н о в Ю. А., «Марковские случайные поля», М., 1981; [4] W a l s h J. B., «Lect. Notes Math.», 1986, v. 1215, p. 329–491.

VİNOQRAD METODU « Винограда метод; Winograd method » – diskret Furye çevirməsinin effektiv hesablanması alqoritmidir, sürətli Furye çevirməsi alqoritmilə müqayisədə vurma əməlində əməliyyatın 80% az olmasını tələb edir. Metod $N = N_1 \cdot \dots \cdot N_k$ uzunluqlu diskret Furye çevirməsinin hesablanması üçün istifadə olunur, N_l, $l = 1, \dots, k$ – qarşılıqlı sadə ədədlərdir; diskret Furye çevirməsinin vektor yazılışı – $A = W_N x$ düsturundan W_N $(N \times N)$ – matrisinin N_l – nöqtəvi diskret Furye çevirmələrinin düz hasili – $W_N = W_{N_1} \otimes \dots \otimes W_{N_k}$ ifadəsinə əsaslanır; N_l – nöqtəvi çevirmələrinin hesablanması çoxhədlilər halqasında modul cəbrinin istifadə olunması ilə dairəvi konvolyusiyaların hesablanmasına gətirilməsinə əsaslanır.

Ədd.: [1] W i n o g r a d S., «Math. Comp.», 1978, v. 32, № 141, p. 175–99; [2] М а к к е л л а н Д ж., Р э й д е р Ч., Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., М., 1983.

VİRİAL AYRILIŞ « вириальное разложение; virial expansion » – bax, *Klasterlərə ayrılış metodu.*

VİRTUAL GÖZLƏMƏ MÜDDƏTİ « виртуальное время ожидания; virtual waiting time » – qeyd olunmuş anda daxil olmuş tələbin xidməti gözləmə müddətidir və bu müddət qeyd olunmuş ana qədər daxil olmuş tələblərin bütünlüklə xidmət olunmasına qədər keçən zaman intervalına bərabərdir. Puasson giriş axınlı, gözləmli, *təkxətli xidmət sistemini* ifadə edən V. g. m.-ni təsvir edən $\zeta(t)$ prosesi Markov prosesidir. V. g. m.-nin stasionar paylanmasının Laplas çevirməsi

$$\mathbf{M}e^{-s\zeta} = \lambda\mathbf{M}\beta[1 - \lambda(1 - \mathbf{M}e^{-s\beta})/s]^{-1}$$

Xinçin düsturu ilə təyin olunur, burada λ – giriş axınının parametri, β – xidmət müddətidir,

$$\zeta := \lim_{t\to\infty} \zeta(t).$$

Ədd.: [1] Г н е д е н к о Б. В., К о в а л е н к о И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [2] Г н е д е н к о Б. В., [и др.], Приоритетные системы обслуживания, М., 1973.

VİTALİ SİSTEMİ « Витали система; Vitali system » – bax, *Differensiallanması, sistemin.*

VİTALİ TEOREMİ « Витали теорема; Vitali theorem » – bax, *Ölçülməyən çoxluq.*

VİTALİ – HAN – SAKS TEOREMİ « Витали – Хана – Сакса теорема; Vitali – Hahn – Saks theorem » – bax, *Mütləq kəsilməzliyi, ölçülərin.*

VLASOV TƏNLİYİ « Власова уравнение; Vlasov equation » – meydanın orta qiymətinin limit yaxınlaşmasında hissəciklərin orta sıxlığının dəyişikliyini – statistik mexanika dinamik sisteminin doğurduğu dəyişikliyi təsvir edən tənlikdir. Bu tənlik aşağıdakı şəkildədir:

$$\frac{\partial f_t(q,0)}{\partial t} = -(p,\ grad_q, f_t(q,p)) -$$

$$-\left(grad_p f_t(q,p),\ \int_{\mathbb{R}^d+\mathbb{R}^d} grad_q U^0(q-q_1) f_t(q_1,p_1)\,dq_1\,dp_1\right); (*)$$

burada $f_t(q,p)$, – t anında $(q,\ p) \in \mathbb{R}^d + \mathbb{R}^d$ nöqtəsində orta sıxlıqdır (və ya, başqa sözlə, birinci korrelyasion funksiyadır), q – hissəciyin koordinatıdır, p – onun impulsudur, $U^0(q)$

– hamar funksiya olduğu fərz olunan qarşılıqlıtəsir potensialıdır. V. t.-ni $f_t(q, 0)$ orta sıxlığı üçün Boqolyubov tənliklərindən, dəyişənlərin əvəz olunması, yəni $f_t(q, 0) = f_{\varepsilon^{-1}t}(\varepsilon q, p)$ və U^0 potensialının $U(q) = \varepsilon^{\nu} U^0(\varepsilon q)$ ilə əvəz olunması və $\varepsilon \to 0$ olduqda limitə keçidlə almaq olur. (*) tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyini ehtimal metodları ilə isbat etmək olur. Tətbiqlərdə (*) tənliyinin şəklinin dəyişməsi mühümdür; $q \to 0$ olduqda $U(q) \to \infty$ xassəli U potensialına tətbiqdə, lakin bu halda riyazi nəzəriyyə az inkişaf etmişdir.

Əd.: [1] Д о б р у ш и н Р. Л., «Функц. анализ и его прилож.», 1979, т. 13, в. 2, с. 48–58; [2] Д о б р у ш и н Р. Л., С и н а й Я. Г., С у х о в Ю. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 2, М., 1985, с. 235–84; [3] B r a u n W., H e p p K., «Comm. Math. Phys.», 1977, v. 56, p. 101–13; [4] N e u n z e r t H., «Trans. Fl. Dynamics», 1977, v. 18, p. 663–78.

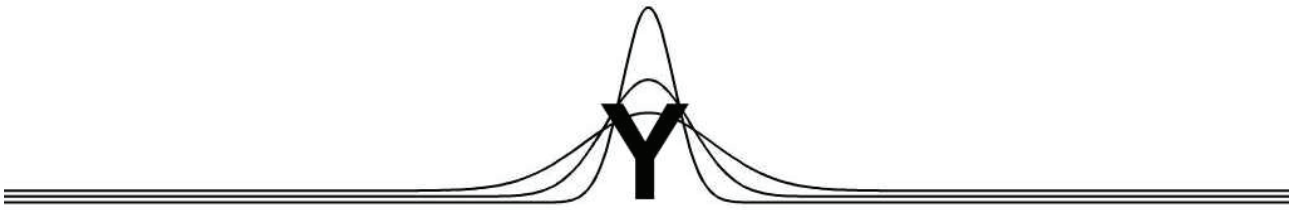
VOLD AYRILIŞI « Вольда разложение; Wold's decomposition » – bax, *Xətti filtr.*

VORONOY MOZAİKASI « Вороного мозаика; Voronai tesselation » – bax, *Təsadüfi mozaika.*

VURUĞU STATİSTİK QİYMƏTİ, PAYLANMA FUNKSİYASININ « множительная оценка функции распределения; product – limit estimator of a distribution function » – bax, *Etibarlılığın riyazi nəzəriyyəsi.*

VURULMA SXEMİ, TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN « схема перемножения случайных величин; multiplication scheme for random variables » – *təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlənmə sxeminə* analoqdur; bu halda təsadüfi kəmiyyətlərin hasilləri – $S_n = X_1 X_2 \ldots X_n$ topluları araşdırılır. Bu modelə vuruqlar asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğu halda baxılmışdır (bax, [1] – [3]). T. k. v. s.-də xarakteristik funksiyalar rolunu xarakteristik çevirmələr ifa edir. T. k. v. s., bu sxemlə bağlı analitik aparat və asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin hasili üçün limit teoremləri ədədlərin ehtimali nəzəriyyəsində tətbiq olunur.

Əd.: [1] З о л о т а р е в В. М., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 4, с. 788–91; [2] Б а к ш т и с А., «Лит. матем. сб.», 1971, т. 11, № 4, с. 724–44; [3] А б р а м о в В. А., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1984, с. 12–21; [4] А б р а м о в В. А., в кн.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. Тр. семинара, М., 1986, с. 4–10.



YADDAŞ(ı) k o d u n « **память** к о д а; c o d e **memory** » – bax, *Konvolyusion kod.*

YAXIN HİPOTEZLƏR « близкие гипотезы; close hypotheses », y a x ı n l a ş a n h i p o t e z l ə r, – *statistik hipotezlərin* fərqləndirilməsi asimptotik məsələsində hipotezlər ardıcıllığının xassəsidir, əsas və alternativ hipotezlər doğru olduğu halda, müşahidələrin paylanmalarına uyğun ehtimal ölçüləri ardıcıllığının (müəyyən mənada) yaxınlaşmasından ibarətdir və bu, müşahidələrin qeyri – məhdud artırılması halı üçün nəzərdə tutulur (statistik nəticənin alınan dəqiqliyinin artmasına gətirən digər limitə keçidlərə daha az baxılır).

Y. h.-ə tipik misal *kontiqual alternativlərdir*, buna baxmayaraq, kontiqual olmayan, lakin yaxınlaşan alternativlər üçün bir çox məzmunlu nəticələr alınmışdır (məs., çoxseçimli məsələlər üçün xi – kvadrat tipli ranq kriterilərində; bax, [1]).

Əd.: [1] Г а е к Я., Ш и д а к З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984.

YAXINLAŞAN HİPOTEZLƏR « сближающиеся гипотезы; close hypotheses » – bax, *Yaxın hipotezlər*.

YAXINLIQLAR ANALİZİ « близостей анализ; proximity analysis » – bax, *Çoxölçülü şkallanma.*

YAXINLIQLAR ÖLÇÜSÜ « близости мера; proximity measure » $\mathfrak{X}$ f ə z a s ı n d a – qeyri – ədədi təbiətli obyektlər arasında yaxınlığı ölçmə üçün, qeyri – ədədi təbiətli obyektlər statistikasında istifadə olunan $\rho : \mathfrak{X}^2 \to [0, \infty]$ funksiyasıdır və ixtiyari $x, y \in \mathfrak{X}$ üçün $\rho(x, x) = 0$ və $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ şərtləri ödənilir. Üçbucaq bərabərsizliyinin ödənilmədiyi fərz olunur. Y. ö.-nə *Kemeni məsafəsini*, $\mathbb{R}^k$-da Evklid məsafəsinin kvadratını, Spirmen ranq korrelyasiyası əmsalının 1-ə qədər tamamlanmasını misal kimi göstərmək olar. Əgər ρ Y. ö. olarsa, onda $f(\rho)$, $f(0) = 0$ şərtini ödəyən, ixtiyari ciddi artan, $f : [0, \infty) \to [0, +\infty)$ münasibətini təmin edən funksiya olarsa, $f(\rho)$ Y. ö.-dür. Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin konkret fəzalarında Y. ö. əksər hallarda uyğun aksiomların köməyilə daxil olunur.

Əd.: [1] О р л о в А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., 1979; [2] Р а у ш е н б а х Г. В., в кн.: Анализ нечисловой информации в социалогических исследованиях, М., 1985, с. 169–203.

***YALIN İZİ « след гребня; ridge trace »** – bax, *Yalvari reqressiya.*

YALVARİ FUNKSİYA « хребтовая функция; ridge function » – $\{z : a < \mathrm{Im} z < b\}$, $a < 0 < b$ zolağında $f(x)$ analitik funksiyasıdır, bu zolaqda $|f(z)| \le |f(i\,\mathrm{Im} z)|$ bərabərsizliyini ödəyir. Sonsuzluqda olduqca tez azalan ehtimal paylanmalarının xarakteristik funksiyaları Y. f.-lar sinfinin özünün altsinfini əmələ gətirir.

Y. f.-lardan çox vaxt sonsuz bölünən paylanmaların ayrılışları haqqında məsələlərin analitik funksiyalar nəzəriyyəsi məsələlərinə reduksiyası üçün istifadə olunur.

Əd.: [1] Л и н н и к Ю. В., О с т р о в с к и й И. В., Разложение случайных величин и векторов, М., 1972.

***YALVARİ REQRESSİYA « хребтовая / гребневая регрессия; ridge regression »**, r i d c r e q r e s s i y a – $y = \mathbf{F}\theta + \varepsilon$ xətti reqression eksperimentinin $\theta \in \mathbb{R}^p$ parametrinin xətti statistik qiymətidir, burada $y \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, $\theta \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{M}\varepsilon = 0$, $\mathrm{cov}\,\varepsilon = \mathbf{W}^{-1}$, $\hat{\theta}_\alpha = (M + \alpha\mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}y$ tiplidir, burada $M = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{F}$, $\alpha > 0$, $\mathbf{A}$ – müsbət müəyyən matrisdir. Bu statistik qiymət meylli statistik qiymətdir, lakin onun kvadratik riski $R_\alpha = \mathbf{M}\left\|\hat{\theta}_\alpha - \theta\right\|^2$ α-nın $\alpha > 0$ kiçik qiymətlərində Y. r.-nın ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətindən kiçik olur. Y. r. ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınacaq statistik qiymətin hesablanılması və statistik xassələrinin yaxşılaşdırılması məqsədilə bu qiymətə süni meyl daxil etmə sxemlərindən ən çox yayılmışıdır. Belə uyğun statistik qiymətlər r i d c – q i y m ə t l ə r adlanır.

Y. r., xüsusilə də, $\det M$ kiçik olduğu halda (prediktorların multikollinearlığı halında) məsləhətdir. $\arg\min R_\alpha$-nı tapmaq üçün $\hat{\theta}_\alpha$, R_α-nın qrafiklərinin qurulmasına əsaslanan evristik qaydalar mövcuddur. R_α-nın funksiyası $\mathbf{\Phi}$-i optimallaşdırıcı planların reqression eksperimentin $\mathbf{\Phi}$ – optimal planına yığılması isbat olunmuşdur, bu da özlüyündə cırlaşmış informasion matrisli $\mathbf{\Phi}$ – optimal planların ədədi qurulmasının əsas metodlarından biridir (bax, *Reqression eksperimentlərin planlaşdırılması*).

«Yalın izi»-nin (ridge trace; след гребня) istifadə olunması proseduru ilk dəfə Hörl (Hoerl A. E.) tərəfindən 1962-də təklif olunmuşdur (bax, [1]). Bu prosedur o vaxt istifadə olunur ki, modelə daxil olan müxtəlif prediktorlar arasında xeyli dərəcədə korrelyasiyalar mövcuddur və bunun nəticəsində də $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi demək olar ki, cırlaşan olur və parametrlərin statistik qiymətləri isə dayanıqlı qiymətlər olmur. Statistik qiymətlərin işarəsi düzgün olmaya bilər və ya onların qiymətləri fiziki və ya praktiki mülahizələrə görə olan qiymətlərdən olduqca böyük ola bilər (bax, [2]).

Y. r. metodu ən sadə formada aşağıdakı kimidir. Tədqiq olunan reqression məsələ «korrelyasion formada» ifadə olunduğu halda $\mathbf{Z}$ müvafiq surətdə mərkəzlənmiş və normalanmış $\mathbf{X}$ matrisini ifadə etmiş olsun. Onda bütün mümkün r sayda $Z_1, Z_2, ..., Z_r$ prediktorlarını özündə saxlayan model üçün $\mathbf{b}_z(\theta)$ parametrlərinin statistik qiymətlərini

$$\mathbf{b}_z(\theta) = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \theta\mathbf{I}_r)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y} \qquad (1)$$

düsturu ilə almaq olur, burada θ – müsbət ədəddir (tətbiqi məsələlərdə bu kəmiyyət $(0, 1)$ intervalında yerləşir). (1)-də Y vektoru korrelyasion deyil, adi formada verilir, $\mathbf{b_z}(\theta) = \{b_{1z}(\theta), b_{2z}(\theta), \dots, b_{rz}(\theta)\}$ isə $(r \times 1)$ – vektordur və o, sərbəst həddin qiymətini özündə saxlamır.

Aydındır ki, sərbəst həddə heç bir düzəliş tələb olunmur, çünki (1) tənliyində $\mathbf{Y}$ -i $\mathbf{Y} - \overline{\mathbf{Y}}\mathbf{I}$ ilə əvəz etdikdə $(\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1))$ alınan nəticələrdə dəyişiklik olmur, belə ki, prediktorların «mərkəzlənməsi» $\mathbf{Z1} = \mathbf{0}$ münasibətinin ödənilməsini təmin edir. $\mathbf{Y}$ vektoru korrelyasion formada ifadə olunmadığından, $S_{YY}^{1/2}$ əmsalından istifadə olunmamalıdır, buna görə də, nəticədə $(r+1) \times 1$ dim. – ölçülü $\mathbf{b}(\theta) = \{b_0(\theta), b_1(\theta), \dots, b_r(\theta)\}'$ vektorunu almaq üçün aşağıdakı dəyişiklikləri etmək olar :

$$b_j(\theta) = b_{jz}(\theta) / S_{jj}^{1/2}, \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

burada

$$S_{jj} = \sum_{i=1}^{n} (Z_{ji} - \overline{Z}_j)^2 \quad \text{və} \quad b_0(\theta) = \overline{\mathbf{Y}} - \sum_{j=1}^{z} b_j(\theta) \overline{Z}_j .$$

$\theta = 0$ olduqda bu vektorun komponentləri $b_j(0)$ -lar $j = 0, 1, 2, \dots, r$ adi – ən kiçik kvadratlar metodu ilə alınmış statistik qiymətlərdir ki, bu (1) tənliyində $\theta = 0$ əvəzləməsi aparılmaqla alınır. (1)-in sağ tərəfindəki $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$ vuruğunu ayıraraq ridc-qiymətləndiricisini ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablamış statistik qiymətləndirici $\mathbf{b}_z(0) = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}$ ilə, yəni $\mathbf{b}_z(\theta) = \{\mathbf{I} + \theta(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\}^{-1} \times \times \mathbf{b}_z(0) = \mathbf{Q}\mathbf{b}$ ilə ifadə etmək olar, çünki ridc-qiymətləndiricilər ən kiçik kvadratlar metodu ilə hesablanmış statistik qiymətlərin əmsallarla xətti kombinasiyalarıdır, bunlar isə

$$\{\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\}^{-1}$$

ilə təyin olunur.

Bundan sonra $b_{jz}(\theta)$ və ya $b_j(\theta)$ -nın θ -dan asılılığını $j = 1, 2, \dots, r$ qiymətlərində qrafik şəkildə qurmaq olar. Qrafik əyrisinin ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi, adətən, göstərilmir. Bu qrafik yalın izi adlanır. Adətən, bu qrafik «korrelyasion» vahidlərlə qurulur (yəni $b_j(\theta)$ kəmiyyətlərindən istifadə olunur), bu o məqsədlə edilir ki, müxtəlif əmsalların nisbi effektlərini birbaşa müqayisə etmək mümkün olsun və ilkin əmsalların qiymətlərinin müxtəlif X -lər üçün miqyas ölçmələrinin təsirini aradan qaldırmaq mümkün olsun.

Y. r. ona görə də, əlverişli sayılır ki, o, elə praktiki qaydadır ki, bununla xətanın kvadratik ortasının kiçik qiymətini almaq mümkündür. Yalvari qiymətləndirici üçün kvadratik orta xəta

$$\mathbf{M}S\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{M}\{\mathbf{b}_z(\theta) - \boldsymbol{\beta}_z\}'\{\mathbf{b}_z(\theta) - \boldsymbol{\beta}_z\} =$$
$$= \mathbf{M}\{\mathbf{Q}\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_z\}' \times \{\mathbf{Q}\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_z\} =$$
$$= \mathbf{M}\{(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_z)'\mathbf{Q}'\mathbf{Q}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_z) + \boldsymbol{\beta}_z'(\mathbf{Q} - \mathbf{I})'(\mathbf{Q} - \mathbf{I})\boldsymbol{\beta}_z\}$$

şəklində yazıla bilinər (bax, [4], səh. 30–32).

Əd.: [1] Hoerl A. E., Kennard R. W., Ridge regression; biased estimation for nonorthogonal problems. Tecnometrics, 1970, 12, p. 55–67; [2] Mullet G. M., Way regression coefficients have the wrong sign. Journal of Quality Technology, 1976, 8; p. 121–126; [3] Hoerl A. E., Kennard R. W., Communication in Statistics, 1976, A 5, p. 77–87; [4] Дрейпер Г., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, изд. второе, кн. 2, пер. с англ, М., 1987; [5] Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1987; [6] Pazman A., Founadions of optimum experimental design, Dordrecht - [a. o.], 1986.

YALVARİ STATİSTİK QİYMƏT « гребневая оценка; ridge estimator » – bax, *Aprior informasiyadan istifadə*.

YANQ – MİLLS MEYDANI « Янга – Миллса поле; Yang – Mills field » – bax, *Kalibrləmə modeli* statistik mexanikanın.

YANLIŞ KORRELYASİYA « ложная корреляция; spurious correlation » – *qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlərə* baxıldıqda yaranan və onlarda təxmini qarşılıqlı əlaqə olduğunu göstərən vəziyyəti ifadə edən termindir. Məs., əgər x_1, x_2, x_3 qarşılıqlı qeyri – korrelyar, orta qiymətləri müsbət və variasiya əmsalları kiçik υ_1, υ_2, υ_3 olan kəmiyyətlərdirsə, onda x_1/x_3 və x_2/x_3 arasında korrelyasiya təqribən

$$\rho = \upsilon_3^2 \Big/ \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_3^2}\,\sqrt{\upsilon_2^2 + \upsilon_3^2} > 0$$

düsturu ilə ifadə olunur. Deməli, qeyri – korrelyarlıq asılı olmamazlığı ifadə etmir.

YARDIMÇI STATİSTİKA « вспомагательная статистика; auxiliary statistics » – elə *oxşar statistikadır* ki, baxılan paylanmalar ailəsi üçün digər hər hansı biri ilə birgə *kafi statistika* əmələ gətirir, belə ki, oxşar statistika birincisinə nəzərən yardımçı statistika olur. «Y. s.» anlayışı R. Fişer tərəfindən seçimdən maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətinə keçdikdə informasiyanın mümkün ola bilən itkisinin qarşısını almaq məqsədilə daxil olunmuşdur (bax, [5]).

R. Fişerin ideyası aşağıdakı misalda şərh olunmuşdur. Baxılan paylanmalar ailəsi $\mathscr{P}$ -nin θ parametrli $R(\theta - 1, \theta + 1)$ ümumi çoxluğundan $\xi_1, \dots, \xi_n$ təkrar seçimi ilə doğurulduğu fərz olunur, yəni ξ_i asılı olmayan və $(\theta - 1, \theta + 1)$ -də müntəzəm qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir. $X_1 = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $X_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$ olduqda, (X_1, X_n) cütü $\mathscr{P}$ üçün kafi statistika, $(X_1 + X_n)/2$ isə maksimal doğruyaoxşarlıq statistik qiymətidir. $X_n - X_1$ isə Y. s.-dır. Fərz olunur ki, ümumi şəkildə $\mathscr{P}$ ailəsinin parametri $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ kimi, kafi statistika isə (T_1, T_2) kimi ifadə olunur. Əgər T_2 komponentinin paylanması yalnız θ_2 -dən asılı olarsa, onda T_2 -yə hər hansı geniş mənada Y. s. kimi baxmaq olar. R. Fişer şərtilik prinsipini aşağıdakı kimi ifadə etmişdir: θ_1 haqqında statistik nəticələrin çıxarılması üçün yalnız T_2 verildiyi halda T_1 komponentinin şərti paylanmasını bilmək kifayətdir (bax, [1]).

Y. s. nəzəriyyəsinin müasir vəziyyəti ilə tanışlıq üçün [2]-yə bax. Y. s.-ya sinonim kimi bəzən «əlavə statistika» termini də istifadə olunur. M. Bartlett (M. Bartlett) «kvazikafi statistika» terminindən istifadə edir və bunu onunla əsaslandırır ki, T_1 -in T_2 -yə nəzərən şərti paylanması nəzərdə tutulur. Lakin bu termin geniş yayılmamışdır.

Əd.: [1] Кендалл M., Стьюарт A., Статистические выводы и связи, пер. с англ., M., 1973; [2] Buehler R. J., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1982, v. 77, № 379, p. 581–89; [3] Fisher R. A., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1925, v. 22, p. 700–725.

***YAŞAMA MÜDDƏTİ « время жизни; life time »** – bax, *Şaxələnən proses* immiqrasiyalı, *Yaşama müddəti paylanması.*

YAŞAMA MÜDDƏTİ PAYLANMASI « возраста распределение; age distribution » – *şaxələnən prosesdə* hissəciklərin yaşama müddətinin *paylanması* üçün qəbul edilmiş termindir. $\zeta_t(x)$ – yaşama müddəti x-i aşmayan hissəciklərin t anında sayı olsun; $0 \le x \le \infty$. Hissəciklərin yaşama müddətinin empirik paylanması $\zeta_t(x)/\zeta_t(\infty)$ $(\zeta_t(\infty) > 0)$ şaxələnən prosesinin çoxalma qanunu üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlərlə $t \to \infty$ olduqda

$$A(x) = \int_0^x e^{-\alpha t}(1 - G(t))\,dt \Big/ \int_0^\infty e^{-\alpha t}(1 - G(t))\,dt$$

paylanmasına yığılır, burada α – şaxələnən prosesin yaşama müddətindən asılı Maltus parametri, $G(x)$ – hissəciyin ömrünün paylanma funksiyası, $A(x)$ – yaşama müddətinin limit paylanmasıdır.

Əd.: [1] Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М., Случайные процессы. Справочник, К, 1983; [2] Ватутин В. А., Зубков А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 23, M., 1985, с. 3–67.

YAYINMALAR FUNKSİYASI « уклонений функция; deviation / rat function » $X \in \mathbb{R}^d$ təsadüfi kəmiyyəti üçün –

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \{(\lambda, \alpha) - \ln \psi(\lambda)\} \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə ifadə olunan funksiyadır, burada $\psi(\lambda) = \mathbf{M}e^{(\lambda, X)}$. Y. f. $A(\lambda) = \ln\psi(\lambda)$ funksiyasının Lejandr çevirməsidir [başqa sözlə, $A(\lambda)$-ya ikili funksiya qoşma funksiyadır].

Y. f. [$A(\lambda)$ ilə birlikdə] qabarıq funksiyadır. Bu funksiyanın ehtimali mənası

$$\Lambda(\alpha) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \in \Delta_{\alpha,\varepsilon}\right\}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, X_k, $k = 1, \ldots, n$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir və X təsadüfi kəmiyyəti ilə eyni paylanmaya malikdirlər, $\Delta_{\alpha,\varepsilon}$, – α nöqtəsini özündə saxlayan və $\varepsilon \to 0$ olduqda bu nöqtəyə sarı dartılan, daxil edilmiş kublar və ya sferaların ardıcıllığıdır. Y. f. S_n cəmlərinin böyük yayınmaları ehtimallarının təsvirində və buna yaxın məsələlərdə mühüm rol oynayır.

Birölçülü hal.

$$\lambda_- = \inf\{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\}, \quad \lambda_+ = \sup\{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\},$$

$\lambda_- < \lambda_+$ (əks halda $\Lambda(\alpha) \equiv 0$) olsun. $A(\lambda) = \ln\psi(\lambda)$ funksiyası $[\lambda_-, \lambda_+]$ parçasında təyin olunmuşdur, bu parçada ciddi qabarıqdır və $\lambda \downarrow \lambda_-$ olduqda, $A(\lambda) \to A(\lambda_-)$ (uyğun olaraq, $\lambda \uparrow \lambda^+$ olduqda, $A(\lambda) \to A(\lambda_+)$) münasibəti ödənilir. Buna görə də, ixtiyari α üçün elə yeganə $\lambda(\alpha) \in [\lambda_-, \lambda_+]$ nöqtəsi vardır ki, bu nöqtədə $\lambda\alpha - A(\lambda)$ funksiyası maksimumunu alır. $[\lambda_-, \lambda_+]$ parçasının daxilində $\lambda(\alpha)$ funksiyası $A'(\lambda) = \alpha$ tənliyini ödəyir, yəni bu funksiya $A'(\lambda)$-nın tərsidir. $\Lambda(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$ funksiyaları $(\alpha_-, \alpha_+) = (A'(\lambda_-), A'(\lambda_+))$ intervalında analitikdirlər və bu funksiyaların limitləri uyğun olaraq, $\alpha \uparrow \alpha_+$ olduqda, $\Lambda(\alpha_+)$, $\lambda(\alpha_+)$, $\alpha \downarrow \alpha_-$ olduqda isə $\Lambda(\alpha_-)$, $\lambda(\alpha_-)$ olur. $\alpha \notin [\alpha_-, \alpha_+]$ olduqda $\lambda\alpha - A(\lambda)$ funksiyası maksimumunu $[\lambda_-, \lambda_+]$ parçasının uclarında alır, belə ki, $\alpha \ge \alpha_+$ olduqda, $\lambda(\alpha) = \lambda_+$; $\alpha \le \alpha_-$ olduqda, $\lambda(\alpha) = \lambda_-$ olur. α-nın belə qiymətləri üçün, əgər $\lambda_\pm$ sonlu olarsa, onda $\mathbf{\Lambda}(\alpha) = \alpha\lambda_\pm - A(\lambda_\pm)$ olur. Əgər $\lambda_\pm = \pm\infty$ olarsa, $\alpha > \alpha_+$ və $\alpha < \alpha_-$ olduqda, $\mathbf{\Lambda}(\alpha) = +\infty$ olur. $\alpha_- > -\infty$, $\lambda_- = -\infty$ (uyğun olaraq, $\alpha_+ < +\infty$, $\lambda_+ = +\infty$) variantı X-in aşağıdan (yuxarıdan) α_- qiyməti ilə (α_+ ilə) məhdud olduğu hala uyğundur. Bu halda $\mathbf{\Lambda}(\alpha_\pm) = \ln \mathbf{P}\{X = \alpha_\pm\}$, odur ki, $\mathbf{\Lambda}(\alpha)$ funksiyası $\alpha_\pm$ nöqtəsində, $\mathbf{P}\{X = \alpha_\pm\} > 0$ olduğu halda kəsilmə nöqtəsinə malikdir.

Beləliklə, Y. f. $\mathbf{\Lambda}(\alpha)$ bütün həqiqi oxda təyin olunmuşdur, bununla belə $\mathbb{R}^1$ oxu Y. f.-nın requlyar olduğu ən çoxu üç intervala bölünür. Bundan başqa, ixtiyari $\alpha_0 \in (\alpha_-, \alpha_+)$ üçün

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha) = \mathbf{\Lambda}(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \lambda(t)\,dt.$$

Əgər $\mathbf{M}X = a$ vardırsa, onda $\mathbf{\Lambda}(a) = 0$ olur və

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \lambda(t)\,dt.$$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} r(\mu)\,d\mu$ çevirmə düsturu da doğrudur, burada $r(\mu)$ funksiyası $\lambda(\alpha) = \mathbf{\Lambda}'(\alpha)$ funksiyasının tərsidir. Bu digər

$$A(\lambda) = \sup_{\alpha} \{\alpha\lambda - \Lambda(\alpha)\}$$

– çevirmə düsturuna və $A(\lambda)$ funksiyasına ikiqat qoşma $A^{**}(\lambda) = \sup_{\alpha}(\lambda\alpha - A^*(\alpha))$ funksiyasının $A(\lambda)$ ilə üst-üstə düşməsinə uyğundur. Beləliklə, $A(\lambda)$ və $\mathbf{\Lambda}(\lambda)$ funksiyaları arasında əlaqə onunla xarakterizə olunur ki, bunların törəmələri $A'(\lambda)$ və $\mathbf{\Lambda}'(\lambda)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Əgər $\mathbf{\Lambda}_Y(\alpha)$ Y üçün Y. f.-dırsa, onda

$$\mathbf{\Lambda}_{a+bX}(\alpha) = \mathbf{\Lambda}_X((\alpha - a)/b), \quad \mathbf{\Lambda}_{S_n}(\alpha) = n\mathbf{\Lambda}_X(\alpha/n). \qquad (2)$$

Əgər $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ olarsa [$\psi(\lambda)$ funksiyası $\lambda = 0$ nöqtəsində analitikdir], onda $\lambda(\alpha)$ -nın ayrılışındakı [uyğun olaraq $\Lambda(\alpha)$ -nın] əmsalları X təsadüfi kəmiyyətinin semiinvariantları γ_k -lar vasitəsilə ifadə etmək olur. (2)-yə əsasən, $\mathbf{M}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$ halına baxmaq kifayətdir. $a_k = \gamma_{k+1}/k!$, $a_1 = \gamma_2 = 1$ olduqda $A'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k$ olduğundan, $\lambda(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \alpha^k$ olur, burada $l_1 = 1$, $l_2 = -a_2$, $l_3 = -a_3 + 2a_2^2$, $l_4 = -a_4 + 5a_3 a_2 - 5a_2^3$; $L_k = l_{k-1}/k$, – $k \geq 3$ olduqda Kramer sırasının əmsallarını əmələ gətirir [$\mathbf{\Lambda}(\alpha)$ funksiyasının ayrılış əmsallarını] (bax, [1], [6]).

Y. f. $\mathbf{\Lambda}(\alpha)$ və $A(\lambda)$ funksiyası

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha) + A(\lambda) \geq (\alpha,\ \lambda)$$

Yunq bərabərsizliyini ödəyirlər.

Bəzi paylanmalar üçün Y. f. aşkar şəkildə tapılır. Standart normal paylanma üçün:

$$A(\lambda) = \lambda^2/2,\ \lambda(\alpha) = \alpha,\ \mathbf{\Lambda}(\alpha) = \alpha^2/2,\ \lambda_{\pm} = \pm\infty,$$
$$\alpha_{\pm} = \pm\infty.$$

Binomial paylanma üçün:

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = p,\ \mathbf{P}\{X = -1\} = 1 - p,$$
$$A(\lambda) = \ln(pe^{\lambda} + (1-p)e^{-\lambda}),$$
$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{2}\ln\frac{(1-p)(1+\alpha)}{p(1-\alpha)},\quad \lambda_{\pm} = \pm\infty,\quad \alpha_{\pm} = \pm 1.$$

$(\beta,\ \mu)$ parametrlərli qamma paylanma üçün:

$$A(\lambda) = -\mu\ln(1 - \lambda/\beta),\ \lambda(\alpha) = \beta - \mu/\alpha$$
$$\Lambda(\alpha) = \mu(\alpha - \mu/\beta) - \ln(\alpha\beta/\mu),$$
$$\lambda_- = -\infty,\ \lambda_+ = \beta,\ \alpha_- = 0,\ \alpha_+ = \infty.$$

μ parametrli Puasson paylanması üçün:

$$A(\lambda) = -\mu + \mu e^{\lambda},\ \lambda(\alpha) = \ln\alpha/\mu,\ \lambda_{\pm} = \pm\infty,$$
$$\alpha_- = 0,\ \alpha_+ = \infty.$$

Y. f. təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin böyük yayınmalarının ehtimallarının yalnız loqarifmik (kobud) ifadələrinin deyil, həm də dəqiq asimptotik ifadələrinin alınmasında istifadə olunur.

Əgər $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\alpha = x/n \in (0, \alpha_+)$, $\alpha\sqrt{n} \to \infty$, $(\alpha_+ - \alpha)\sqrt{n} \to \infty$ olarsa, onda

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim \frac{\mathbf{\Lambda}''(\alpha)}{\sqrt{2\pi n}\ \lambda(\alpha)}\ e^{-n\mathbf{\Lambda}(\alpha)}$$

münasibəti ödənilir (bax, [1]). Bu münasibəti aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim c(\alpha)(\mathbf{\Lambda}_{S_n}(x))^{-1/2} e^{-\mathbf{\Lambda}_{s_n}(x)}.$$

Qeyd etmək lazımdır ki, bu münasibət zəif məhdudiyyətlər qoyulduqda və X_k təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olduğu və müxtəlif paylanmalara malik olduqları halda belə ödənilir.

Çoxölçülü halda Ω çoxluğu 0 nöqtəsinin ətrafını daxilində saxlamadığı şərtilə və $\mathbf{M}X_1 = 0$, $x\sqrt{n} \to \infty$ olduğu halda $\mathbf{P}\{S_n \in x\Omega\}$ ehtimalının təsvir olunmasında

$$H_b = \{\alpha : \Lambda(\alpha) \leq b,\ b \geq 0\}$$

qabarıq çoxluqlarının sərhədləri olan Γ_b hüdudlu müstəvilər və

$$b_{\Omega_x} = \sup\{b : H_b \cap \Omega_x = \varnothing\} = \inf\{\Lambda(\alpha),\ \alpha \in \Omega_x\},$$
$$\Omega_x = x\Omega/n$$

kəmiyyəti mühüm rol oynayır.

Məs., əgər $H_{b_{\Omega_x}}$ və Ω_x yeganə $\alpha(\Omega_x)$ nöqtəsində bir-birinə toxunarsa və bütün istiqamətlər üzrə bu toxunma ikinci tərtiblə olarsa (yayınmanın tərtibi r^2 -na bərabərdir, r toxunan müstəvidə $\alpha(\Omega_x)$ -dən olan məsafədir), onda bəzi çox da məhdud olmayan şərtlərlə (bax, [4])

$$\mathbf{P}\{S_n \in x\Omega\} \sim \frac{c(\alpha(\Omega_x))}{\sqrt{n\mathbf{\Lambda}(\alpha(\Omega_x))}}\ e^{-n\mathbf{\Lambda}(\alpha(\Omega_x))}$$

münasibəti ödənilir.

Y. f. təsadüfi dolaşmalar üçün sərhəd məsələlərində böyük yayınmaların təsvirində, invariantlıq prinsipində böyük yayınmaların təsvirində və digər yaxın problemlərdə (bax, [3]) təyinedici rol oynayır. Y. f., sonsuz halda belə, böyük yayınmaların ehtimallarının kobud asimptotikasını (loqarifmik) təsvir etməyə imkan verir.

Y. f. anlayışı (əsas xassələrinin saxlanılması ilə) qiymətləri ixtiyari topoloji vektor fəzası V -dən olan təsadüfi kəmiyyətlər üçün də təyin olunmuşdur; bu halda

$$\mathbf{\Lambda}(\alpha) = \sup_{\lambda \in V^*}\{\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)\},\ A(\lambda) = \ln\mathbf{M}e^{\langle \lambda,\ X\rangle},$$

burada V^*, – V -yə qoşma olan xətti kəsilməz funksionallar fəzasıdır və bu funksionallar $\langle \lambda, \alpha \rangle$ kimi işarə olunmuşdur. Bu fəzada Y. f.-nın rolu

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}(\alpha) &= -\inf_{U \in C(\alpha)}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \in U\right\}\right] \\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}&\left\{\frac{S_n}{n} \in U\right\} = -\inf_{\alpha \in U}\Lambda(\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

münasibətilə izah olunur, burada $C(\alpha)$, – α -nı özündə saxlayan açıq qabarıq çoxluqların toplusudur. Bu hökmlər V fəzasının lokal qabarıq, X -in paylanmasının V -də sıx, U çoxluğunun isə (3) düsturunda açıq və qabarıq olduğu halda da doğrudur (bax, [5]).

Böyük yayınmalar haqqında əsas «kobud» teoremlər (bax, [5], [7], [8]) aşağıdakı ümumi sxemlə ifadə olunur. X_n – qiymətləri V fəzasından olan təsadüfi elementlər ardıcıllığı olsun. V və V^* çoxluqlarının elə uyğun $\mathfrak{M}$ və $\mathfrak{M}^*$ sinifləri vardır ki, aşağıdakı iki münasibət ekvivalentdir:

I. $\lambda \in \mathbf{M}^*$ üçün $\ln \mathbf{M} \exp(y(n) \langle \lambda, X_n \rangle) \sim y(n)\, \mathbf{\Lambda}(\lambda)$

II. $\Omega \in \mathbf{M}$ üçün $\ln \mathbf{P}\{X_n \in \Omega\} \sim -y(n) \inf\limits_{\alpha \in \Omega} \mathbf{\Lambda}(\alpha)$,

burada y_n, $-\infty$-a yaxınlaşan hər hansı ədədi ardıcıllıqdır. Bu böyük yayınmalar nəzəriyyəsində özünəməxsus ikilik prinsipidir (qabarıq analizdə ikilik prinsipilə sıx bağlı), burada əvvəldə olduğu kimi

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)\}, \; A(\lambda) = \sup_{\alpha} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - \Lambda(\alpha)\}$$

münasibətləri doğrudur.

Markov proseslərinin böyük yayınmaları (1) düsturu ilə ifadə olunan təsir funksionalı vasitəsilə verilir ki, bu halda $\psi(\lambda)$ keçid ehtimalının Laplas çevirməsi (momentlərin doğuran funksiyası) ilə əvəz olunur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд, М., 1986; [2] Боровков А. А., «Теория вероятностей и ее примен.», 1967, т. 12, в. 4, с. 635–54; [3] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 2, с. 253–89, 1964, т. 5, № 4, с. 750–67; [4] Боровков А. А., Рогозин Б. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69; [5] Боровков А. А., Могульский А. А., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 5, с. 988–1004, т. 21, № 5, с. 12–16; [6] Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987; [7] Вентцель А. Д., «Теория вероятн. и ее примен.», 1976, т. 21, в. 2, с. 235–52; [8] Donsker M. D., Varadhan S. R. S., «Comm. Pure. Appl. Math.», 1976, v. 29, № 4, p. 389–461.

YEGANƏLİK TEOREMİ xarakteristik funksiyalar üçün **« единственности теорема** для характеристических функций; **uniqueness theorem** for characteristic functions **»** – təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası öz xarakteristik funksiyası ilə birqiymətli təyin olunur, yəni əgər $F_1(x)$ və $F_2(x)$ paylanma funksiyaları, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ bu paylanmaların uyğun xarakteristik funksiyalarıdırsa və bütün $z \in \mathbb{R}^1$ qiymətlərində $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$ olarsa, onda $F_1(x) \equiv F_2(x)$. Y. t.-nə əsasən paylanma funksiyaları və xarakteristik funksiyalar arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir.

Daha ümumi təbiətli fəzalarda verilmiş paylanma funksiyaları və xarakteristik funksiyalar arasında da bu xassə analoji ödənilir.

YENİLƏŞDİRƏN PROSES « обновляющий процесс; innovation process » – bax, *Təsadüfi proses*; kanonik ifadə.

YENİLƏŞDİRİCİ HADİSƏ « обновляющее событие; renovating event » – *təsadüfi prosesin* $(n-\tau, n)$, $\tau \geq 0$ intervalı müddətində trayektoriyalarına aid elementar nəticələrinin elə çoxluğudur ki, prosesin bu çoxluğa daxil olan trayektoriyası $m > n$ anlarında prosesin $m \leq n - \tau$ anlarındakı trayektoriyalarından qismən asılı olmur. $\{\upsilon_n\}$ qiymətləri ixtiyari ölçülən fəzadan olan elə ardıcıllıqdır ki, bu ardıcıllıq ilkin υ_1 təsadüfi kəmiyyəti və $\upsilon_{n+1} = f(\upsilon_n, u_n)$, $n \geq 1$ rekurrent münasibətlərilə təyin olunur, burada $\{u_n\}$ – verilmiş təsadüfi ardıcıllıq, f – ölçülən funksiyadır. $\mathscr{F}_n$ $\upsilon_1, u_1, u_2, \ldots, u_n$, $n \geq 1$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbr, $\tau \geq 0$ qeyd olunmuş ədəd olsun. Əgər $\upsilon_{n+1}(\omega), \upsilon_{n+2}(\omega), \ldots$ təsadüfi kəmiyyətləri $\omega \in A_n$ olduqda

$$\upsilon_{n+j}(\omega) = \varphi_j(u_{n-\tau}(\omega), \ldots, u_{n+j-1}(\omega))$$

şəklində ifadə olunarsa, $n \geq \max(1, \tau)$ olduqda $A_n \in \mathscr{F}_n$ hadisəsi $(n-\tau, n)$ intervalında yeniləşdirici hadisə adlanır, burada φ_i funksiyası yalnız $\tau + j$ arqumentlərinin sayından və $\{A_n\}$ hadisələr ardıcıllığından asılıdır.

υ_n-in ixtiyari qeyd olunmuş nöqtədə olması (əgər u_n-lər asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, bu regenerasiya adır) $\tau = 0$ qiymətində Y. h.-dir. $n \to \infty$ olduqda $\{\upsilon_{n+k};\, k \geq 0\}$ ardıcıllığının hər hansı $\{\omega_k;\, k \geq 0\}$ stasionar ardıcıllığına yığılma şərtlərini təyin etmək və yığılma sürətinin qiymətlərini tapmaq $\{u_n\}$ idarəedici ardıcıllığının kiçik dəyişikliklərində $\{\omega_k;\, k \geq 0\}$ ardıcıllığının (və ya $\{\upsilon_n\}$ ardıcıllığının) dayanıqlılıq şərtlərini araşdırmaq və dayanıqlılıq üçün qiymətlər almaq kimi məsələlərin həllində Y. h. anlayışından istifadə olunur.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Калашников В. В., «Изв. АН СССР Сер. Техническая кибернетика», 1979, № 5, с. 85–89.

YENİLƏŞDİRİCİ KOMPONENTLƏR « обновляющие компоненты; innovation components » – bax, *Təsadüfi proses*; kanonik ifadə.

YENSEN BƏRABƏRSİZLİYİ « Йенсена неравенство; Jensen's inequality » ehtimal nəzəriyyəsində – təsadüfi kəmiyyətin qabarıq funksiyasının riyazi gözləməsi üçün bərabərsizlikdir. Əgər ξ təsadüfi kəmiyyət, $g(x)$ qabarıq Borel funksiyası, $\mathbf{M}g(\xi) < \infty$ olarsa, onda

$$g(\mathbf{M}\xi) \leq \mathbf{M}\, g(\xi)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Xüsusi halda, $g(x) = x^2$ olarsa, onda

$$(\mathbf{M}\xi)^2 \leq \mathbf{M}\xi^2$$

olur; əgər $g(x) = |x|^r$ ($x \geq 1$) olarsa, $|\mathbf{M}\xi|^r \leq \mathbf{M}|\xi|^r$ olur.

Bu bərabərsizliyi inteqrallar üçün İ. Yensen [1]-də isbat etmişdir.

Əd.: [1] Jensen J. L. W., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 175–93; [2] Holder O., «Nachr. Ges. Wiss. Gott.», 1889, S. 38–47; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Партасарати К., Введение в теорию вероятностей и теорию меры, пер. с англ., 1983; [5] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

***YERDƏYİŞƏN HADİSƏ « перестановочное событие; permutational event »** – $\mathscr{F}_{1,n}$ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının ilk n sayda $\xi_1, \ldots, \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbr, $\mathscr{F}_{n,\infty}$ $\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin doğurduğu σ – cəbr, $\mathscr{F}_{1,\infty}$ $\prod\limits_{k=1}^{N} B_k \subset \mathscr{F}_{1,N}$ hadisələri ilə

doğurulmuş σ – cəbr olarsa ($B_k \in \mathscr{F}_k$ ədəd oxunda Borel çoxluqlarıdır), onda əgər $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) \in A$ hadisəsi $(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1, x_{n+1}, \dots) \in A$ hadisəsini doğurarsa, $A \in \mathscr{F}_{1,\infty}$ hadisəsinə deyilir. Qalıq hadisələr Y. h.-dir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Курс теории вероятностей, M., 1972; [2] Лоэв M., Теория вероятностей, M., 1962.

YERDƏYİŞMƏ(si) / **PERMUTASİON**(u) sonlu çoxluğun elementlərinin **« перестановка** элементов конечного множества; **permutation** of elements of a finite set **»** – $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ çoxluğunun elementlərinin yerdəyişməsi – X_n-in bütün elementlərindən ibarət tamamilə nizamlanmış çoxluqdur. n ədədi Y.-nin tərtibi adlanır. n tərtib Y.-lərin sayı $n!$-a bərabərdir. Adətən, X_n kimi $\{1, 2, \dots, n\}$ çoxluğu götürülür. $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ $\{1, 2, \dots, n\}$ ədədlərinin Y. olsun. σ-nın mühüm xarakteristikalarından biri onun siqnaturu $q = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ çoxluğudur, burada $q_i = \operatorname{sign}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Verilən siqnaturlu Y.-lərin sayı hesablanmışdır (bax, [4]). Məs., əgər C_n siqnaturu $q = (1, -1, 1, -1, \dots)$ olan n tərtib Y.-lərin sayı, $A(r, s)$ hər birinin siqnaturunda yalnız r sayda 1 və $s = n - 1 - r$ sayda -1 olan Y.-lərin sayı olarsa, onda

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n = \operatorname{tg} x + \sec x - 1 - x,$$

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} A(r, s) \frac{x^r y^s}{(r+s+1)!} = \frac{e^x - e^y}{xe^y - ye^x}$$

bərabərlikləri doğrudur. $r+1$ və $s+1$ kəmiyyətləri uyğun olaraq Y.-nin artma və azalma ədədi adlanır.

Əgər $i < j$ və $\sigma_j < \sigma_i$ olarsa, σ_i və σ_j elementləri cütü inversiya əmələ gətirir. $B_n(k)$ k inversiyalı n tərtib Y.-lərin sayı olsun. $B_n(k)$, $k = 0, 1, \dots, C_n^2$ ardıcıllığının doğuran funksiyası

$$\sum_{n=0}^{C_n^2} B_n(k) x^k = (1-x)^{-n} \prod_{j=0}^{n} (1 - x^j)$$

düsturu ilə təyin olunur. Hər bir σ yerdəyişməsinə $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ inversiyalar cədvəlini qarşı qoymaq olar, burada b_j, – σ-dakı j-dən böyük və j-dən solda yerləşən elementlərin sayıdır. İnversiyalar cədvəli uyğun Y.-ni yeganə surətdə təyin edir. $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ vektoru σ-nın ranqlar vektoru adlanır, burada $r_j = b_j + 1$. Siqnaturun xassələri, inversiyalar cədvəlləri (və ranqlar vektorunun) bir çox statistik kriterilərin, o cümlədən, Uilkokson kriterisi, median kriterisi, yerdəyişmələr kriterisi kimi kriterilərin, həm də növlərə ayırma və axtarışın müxtəlif alqoritmlərinin qurulmasında istifadə olunur. n tərtib Y.-ə n sayda müxtəlif hissəciyin n müxtəlif oyuqlarda yerləşməsi (bütün oyuqların dolu olması halı) kimi baxmaq olar. Belə interpretasiya təbii olaraq Y. anlayışını X_n-in elementləri arasında bir-birindən fərqlənməyən elementlər olduğu hal üçün də ifadə etməyə imkan verir (bax, [1]).

Əd.: [1] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 1–3, M., 1976–78; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., 1963; [3] Сачков В. Н., Введение в комбинаторные методы дискретной математики, M., 1982; [4] Carlitz L., «Math. Nachr.», 1973, Bd 58, H. 1/6, S. 31–53.

YERDƏYİŞMƏ / PERMUTASİON təsadüfi **« перестановка** случайная; random **permutation »** – bax, *Təsadüfi yerdəyişmə* / *permutasion*.

YERDƏYİŞMƏLƏR KRİTERİSİ « перестановок критерий; permutation test » – bax, *Randomizasiya*(sı) kriterilərin, kriterilərin yerdəyişmələrinin.

YERİNİDƏYİŞDİRMƏ PARAMETRİ « сдвига параметр; location / shift parameter » – $F_a(x)$, $a \in A \subset \mathbb{R}^k$, $x \in X \subset \mathbb{R}^k$ funksiyalar ailəsinin aşağıdakı şərti ödəyən parametridir: ixtiyari $a \in A$, $x \in X$ üçün $F_a(x) = F_0(x - a)$ bərabərliyi ödənilir. Əgər $\mathbb{R}^k$-da paylanma funksiyası ilə verilən paylanma funksiyası $F_0(x)$ olan paylanma tipli olarsa, onda $F(x) = F_0((x-a)/b)$ olur. Burada a Y. p., $b > 0$ miqyas parametridir.

YERİNİDƏYİŞDİRMƏ PARAMETRİ; statistik qiymət **« сдвига параметр;** оценка; estimator of a **location parameter »** – θ parametrinin

$$x_j = \theta + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n \qquad (*)$$

şəklində müşahidələr əsasında alınan *statistik qiymətidir*, ε_j – eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. θ parametrinə həqiqi ədədlərin additiv qrupunun elementi kimi baxmaq mümkün olduğundan, çox vaxt onun *ekvivariant statistik qiymətlərindən* istifadə olunur. Bu statistik qiymətlər arasında *Pitmən statistik qiyməti* ən yaxşısı hesab olunur.

(*) sxemi münasib nəzəri modeldir. Bu sxemlə adaptiv, robast, müəyyən qədər qeyri – parametrik və digər tip qiymətləndirilmələrin bir sıra nəticələri əlaqəlidir. Y. p.-nin statistik qiymətlərinin xassələri ilə paylanmaların xarakterizasiyasının bir sıra məsələlərinə baxılmışdır. Məs., əgər seçimi orta Y. p.-nin məqbul statistik qiyməti olarsa, onda (*)-dakı x_j təsadüfi kəmiyyətləri normal qanunla paylanır.

Əd.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., M., 1975; [2] Каган А. M., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, M., 1972; [3] Кендалл M., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., M., 1973; [4] Хьюбер П., Робастность в статистике, пер. с англ., M., 1984.

YERİNİDƏYİŞMİŞ EKSKURSİYA « сдвинутая экскурсия; shifted excursion » – bax, *Ekskursiya*(sı) Markov prosesinin.

YERLƏŞMƏ / ARANJEMAN « размещение; arrangement / permutation with repetition », təkrarlanan elementlərli m həcmli nizamlanmış seçim, təkrarlanan elementlərli yerləşmə (aranjeman), – n elementli $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ çoxluğunun elementlərindən təşkil olunmuş

$\overline{a} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$ ardıcıllığıdır. Əgər $\overline{a}$ -nın bütün elementləri müxtəlif olarsa, onda $\overline{a}$ təkrarsız aranjeman adlanır. Y.-ni $1, 2, \dots, m$ ədədləri ilə işarələnmiş hissəciklərin $\{1, 2, \dots, n\}$ (və ya $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$) işarələrli oyuqlarda Y. kimi interpretasiya etmək olar. Belə interpretasiya $\overline{a}$ Y.-ni $Z_m = \{1, 2, \dots, m\}$ çoxluğunun $Z_n = \{1, \dots, n\}$ çoxluğuna φ inikası ilə eyniləşdirməyə imkan yaradır və bu halda $\varphi(k) = i_k$.

Bütün Y.-lər çoxluğunu müxtəlif üsullarla baxılan oyuqlar və (və ya) hissəciklərin müxtəlif və ya fərqlənməyən obyektlər olmasından asılı olaraq ekvivalent Y.-lər siniflərinə ayırmaq olar. Bu halda iki Y.-dən biri digərindən müxtəlif olmayan hissəciklərin və (və ya) oyuqların yenidən uyğun nömrələnməsindən sonra alına bilinirsə, belə Y.-lərə ekvivalent Y.-lər deyilir.

Təkrarsız (elementləri müxtəlif) Y. halında (bu o hala uyğun olur ki, hər bir oyuqda yalnız bir hissəcikdən artıq olmamaqla, yəni hər bir oyuqda hissəciklərin sayı birdən artıq olmamaqla hissəcik yerləşə bilər) ən maraq doğuran Y.-lər aşağıdakılardır.

1) Müxtəlif hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda yerləşməsi. Bu halda hər bir ekvivalentlik sinfi yalnız bir elementdən ibarətdir və belə siniflərin sayı

$$A_n^m = (n)_m = n(n-1)\dots(n-m+1), \quad m \le n$$

olur. $n = m$ olduqda belə Y.-lər (aranjemanlar) n – elementli çoxluğun *yerdəyişmələri* (*permutasyonlar*) olur.

2) Fərqlənməyən hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda Y.. Bu halda bütün $k \in Z_m$ üçün, əgər Z_m -in elementlərinin yerdəyişməsi σ üçün elə φ və ψ Y.-ləri varsa ki, $\varphi(\sigma(k)) = \psi(k)$ bərabərliyi ödənilsin, onda φ və ψ ekvivalent Y.-lər adlanır. Ekvivalentlik siniflərinin sayı $n! / m!(n-m)!$ düsturu ilə təyin olunur, hər bir ekvivalentlik sinfi n elementdən m elementli təkrarsız birləşməyə (kombinezona) uyğun olur.

Oyuqların həcminə (sayına) məhdudiyyət qoyulmadıqda Y.-lərin ekvivalentlik sinifləri və onların sayı aşağıdakı kimi təsvir olunur.

3) Müxtəlif hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda Y.-lərində hər bir ekvivalentlik sinfi bir elementdən ibarətdir və belə siniflərin sayı n^m -ə bərabərdir.

4) Müxtəlif oyuqlarda bir-birindən fərqlənməyən hissəciklərin Y.-lərində Y.-nin ekvivalentlik sinifləri 2)-də olduğu kimi təsvir olunur. Ekvivalentlik siniflərinin sayı bu halda $(n+m-1)! / m!(n-1)!$ olur, hər bir sinif isə n elementdən m elementli təkrarlanan elementlərli birləşməyə uyğun olur.

5) Bir-birindən fərqlənməyən hissəciklərin müxtəlif oyuqlarda Y.-lərində, əgər A -nın elementlərinin elə τ yerdəyişməsi (permutasiyon) vardırsa ki, bütün $k \in Z_m$ üçün $\tau(\varphi(k)) = \psi(k)$ bərabərliyi ödənsin, onda φ və ψ ekvivalentdirlər. Ekvivalentlik siniflərinin sayı Z_m çoxluğunun, n -dən çox olmamaqla, bölgüləri sayı ilə üst-üstə düşür və bu say

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(m, k)$$

ədədinə bərabərdir, burada $\sigma(m, k)$ 2-ci növ Stirlinq ədədləridir.

6) Əgər Z_m və A çoxluqlarının elementlərinin uyğun olaraq elə σ və τ yerdəyişmələri tapılarsa ki, bunlar üçün bütün $k \in Z_m$ qiymətlərində $\tau(\varphi(\sigma(k))) = \psi(k)$ bərabərliyi ödənilsin, onda φ və ψ Y.-ləri ekvivalentdirlər. Ekvivalentlik siniflərinin sayı m natural ədədinin n -dən çox olmayan sayda toplanana bölgüləri sayı $Q_m(n)$ ilə üst-üstə düşür və o,

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(n) t^m = \prod_{k=1}^{n} (1 - t^k)^{-1}$$

bərabərliyindən təyin olunur.

Bax, *Polinomial yerləşməsi*, *hissəciklərin*; *Yerləşməsi*, *hissəciklərin* qruplarla.

Əd.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ, М., 1963; [2] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложение, пер. с англ., т. 1, М., 1984; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

YERLƏŞMƏ təsadüfi « **размещение** случайное; random **allocation** » – bax, *Təsadüfi yerləşmə.*

YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN bərabərehtimallı « **размещение частиц** равновероятное; equiprobable **allocation of particles** » – bax, *Polinomial yerləşməsi, hissəciklərin*.

YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN qruplarla « **размещение частиц** комплектами; group **allocation of particles** » – hissəciklərin oyuqlarda elə *yerləşmə* sxemidir ki, hissəciklər qruplarla asılı olmayaraq yerləşir və qrupun hissəcikləri müxtəlif oyunlarda bir-bir yerləşir. Hissəciklərin qruplarla yerləşməsi hər birində s hissəcik olan n sayda qrupun hissəciklərinin N sayda oyuqda asılı olmayaraq yerləşmələri sxemi kimi anlaşılır; hissəciklərin yerləşməsi üçün bütün mümkün olan halların sayı C_N^s olub, bərabərehtimallıdırlar.

Bu sxemdə hər bir oyuqda r hissəcik yerləşməsi sayı μ_r təsadüfi kəmiyyətinin, ilk dəfə heç olmasa k sayda oyuğun dolu olduğu haldakı qrupların sayı ν_k və oyuqda hissəciklərin maksimal sayı η təsadüfi kəmiyyətinin limit paylanmaları öyrənilmişdir. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin limit paylanmaları bir çox cəhətlərilə ns hissəciyin N oyuqda yerləşməsinin bərabərehtimallı sxemində belə kəmiyyətlərin limit paylanmalarına analojidir (bax, *Polinomial yerləşməsi, hissəciklərin*). μ_r , υ_k , η üçün limit teoremləri isbat olunmuşdur (bax, [1] – [4]).

Hissəciklərin qruplarla yerləşməsinin əsas sxemi bəzən bərabərehtimallı sxem adlanır. Bu sxemin bir sıra ümumiləşmələri, o cümlədən, aşağıdakılar vardır.

Qrupların ölçüləri – $s_1, s_2, \dots, s_n$ müxtəlif ola bilər. Bu halda, boş oyuqların sayı – μ_0 təsadüfi kəmiyyəti üçün normal və Puasson limit paylanmalarına yığılma sürəti qiymətləndirilərək, limit teoremlərinin tam spektri alınmışdır (bax, [5]).

Qrupun yerləşməsinin digər halı bütün oyuqlar çoxluğundan hər hansı altçoxluğun təsadüfi seçimi ilə eyniləşdirilir. Bu halda μ_r təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasının Puasson paylanmasına yığılmasının kafi şərtləri göstərilir (bax, [6]).

Əd.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976; [2] Михайлов В. Г., «Матем. сб.», 1980, т. 11, № 2, с. 163–86; [3] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., «Теория вероятн. и ее примен.»,

1966, т. 11, в. 4, с. 701–08; [4] Хакимуллин Е. Р., «Матем. заметки», 1981, т. 30, в. 2, с. 277–89; [5] Ватутин В. А., Михайлов В. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1982, т. 27, в. 4, с. 684–92; [6] Михайлов В. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, в. 1, с. 155–60.

YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN; Markov yerləşməsi **« размещение частиц** марковское; Markov **allocation of particles »** – bax, *Markov yerləşməsi*, *hissəciklərin.*

YERLƏŞMƏSİ, HİSSƏCİKLƏRİN; polinomial yerləşmə **« размещение частиц** полиномиальное; multinomial group **allocation of particles »** – bax, *Polinomial yerləşməsi*, *hissəciklərin.*

YEYTS DÜZƏLİŞİ « Йейтса поправка; Yates correction » – sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər xi – kvadrat approksimasiyasının dəqiqliyi üçün təyin edilmiş *kəsilməzlik düzəlişidir*. Bu tip ilk düzəlişə F. Yeyts [1]-də aşağıdakı məsələ ilə əlaqədar baxmışdır (bax, [2], s. 482). Arasında A əlamətli M sayda elementi olan N sayda element təsadüfi qaydada iki qrupa – n və $N-n$ sayda elementdən ibarət qruplara bölünür. Bu bölgünün nəticələri 2×2 cədvəli şəklində göstərilir, m – 1-ci qrupda A əlamətli elementlərin sayıdır.

	əlamətli	əlamətsiz	cəmisi
1-ci qrup	m	$n-m$	n
2-ci qrup	$M-m$	$N-n-M+m$	$N-n$
cəmisi	M	$N-M$	N

Sual olunur ki, 2×2 cədvəlindəki verilənlərə görə bölgünün, həqiqətən də, təsadüfi qaydada – elementlərdə A əlamətinin olub-olmamasını nəzərə almadan aparılması haqqında H_0 hipotezini yoxlamaq olarmı? Aydındır ki, H_0 hipotezi doğru olarsa, m ədədinə

$$\mathbf{P}\{\xi = m \mid H_0\} =$$

$$= \begin{cases} C_M^m\, C_{N-M}^{n-m} \big/ C_N^n, & \text{əgər } \max(0,\ M+n-N) \le m \\ & \le \min(M, n) \text{ olarsa} \\ 0, & \text{digər hallarda} \end{cases}$$

hiperhəndəsi paylanma qanununa tabe ξ təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyası kimi baxmaq olar, bu halda $\mathbf{M}\xi = nM/N$, $\mathbf{D}\xi = NM(N-n)(N-M)\cdot\dfrac{1}{N^2(N-1)}$, H_0 hipotezi ξ təsadüfi kəmiyyəti terminlərilə $\mathbf{M}\big(\xi/n - (M-\xi)/(N-n)\big) = 0$ bərabərliyi ilə verilir. Əgər N böyük olarsa, $n, M, N-n, N-M$ ədədlərindən isə heç biri çox da kiçik olmazsa, onda H_0 hipotezi doğru olduğu halda $Y^2 = (\xi - \mathbf{M}\xi)^2/\mathbf{D}\xi$ statistikası sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər xi – kvadrat qanunu ilə təqribi paylanır, yəni

$$\mathbf{P}\{Y^2 \ge x \mid H_0\} \approx \mathbf{P}\{\chi_1^2 \ge x\} = P_1(x),$$

bundan da, praktikada H_0 hipotezini yoxlamaq üçün istifadə olunur. N-in kiçik qiymətlərində Y^2 statistikası əvəzinə

$$Y_*^2 = \left(|Y| - 1/2\sqrt{\mathbf{D}\xi}\ \right)^2 \qquad (1)$$

statistikasını hesablamaq məsləhətdir və bu halda aşağıdakı qaydaya riayət olunmalıdır: əgər $P_1(Y_*^2) \le \alpha$ olarsa, onda təsadüfilik haqqında hipotez qəbul edilmir, əgər $P_1(Y_*^2) > \alpha$ olarsa, müşahidə olunan qiymətin təsadüfilik haqqında hipotezə zidd olmadığı hesab olunur (α – kriterinin mühümlük ölçüsüdür, $0 < \alpha < 0{,}5$). (1) düsturunda çıxarılan $1/2\sqrt{\mathbf{D}\xi}$ $P_1(x)$-i approksimasiyalayan paylanma funksiyasının kəsilməzliyinə Yeyts düzəlişidir. $n = 3(1)20$ və $N - n = 2(1)n$ üçün $\mathbf{M} - \xi$-nin dəqiq kritik qiymətləri cədvəlləri mövcuddur və (dəqiq Fişer kriterisi) bu cədvəllərdən N-in kiçik qiymətlərində təsadüfilik hipotezini yoxlamaq üçün istifadə etmək olar (bax, [3], [4]). Əgər $N \ge 21$ olarsa, təqribi birtərəfli kriterilərin kritik oblastları aşağıdakı bərabərsizliklərlə verilir (bəlli olan kəsilməzliyə düzəlişləri ilə):

$$(\xi - \mathbf{M}\xi)\big/\sqrt{\mathbf{D}\xi} \ge \Phi^{-1}(1-\alpha) + 1/2\sqrt{\mathbf{D}\xi},$$

$$(\xi - \mathbf{M}\xi)\big/\sqrt{\mathbf{D}\xi} \le -\Phi^{-1}(1-\alpha) - 1/2\sqrt{\mathbf{D}\xi},$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal qanunun paylanma funksiyasıdır, deməli, mühümlük ölçüsü α-ya bərabər təqribi ikitərəfli kriterinin kritik oblastı

$$Y^2 = (\xi - \mathbf{M}\xi)^2/\mathbf{D}\xi \ge \left(\Phi^{-1}(1-\alpha/2) + 1/2\sqrt{\mathbf{D}\xi}\right)^2 \qquad (2)$$

bərabərsizliyi ilə verilir.

Beləliklə, dəqiq Fişer kriterisinin kritik qiymətləri üçün təqribi düsturlar elə nəticəyə gətirir ki, bu nəticə (1) düsturu şəklində yazılan nəticələrdən fərqlənir. Doğrudan da, (1) düsturuna görə Y_*^2 statistikası təqribi olaraq χ_1^2 kimi paylanır, (2) düsturuna görə isə Y^2 statistikası təqribi olaraq sərbəstlik dərəcəsi sayı 1-ə bərabər xi – kvadrat paylanması və qeyri – mərkəzilik parametri $(1/4)\mathbf{D}\xi$ ilə paylanır. Əgər $\mathbf{D}\xi \to \infty$ olarsa, onda Y^2 və Y_*^2 statistikalarının paylanmaları asimptotik ekvivalent paylanmalar olur.

Əd.: [1] Yates F., «J. Roy, Statist. Soc.», 1934, Suppl. 1, p. 217–35; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц, пер. с англ., М., 1966; [5] Grinwood P. E., Nikulin M. S., A Guide to Chi-squard testing, N. Y., 1996.

YƏQİN HADİSƏ « достоверное событие; certain event » – apriori hökmən baş verən hadisədir. $\Omega = \{\omega\}$ elementar nəticələr fəzası olarsa, ω elementar nəticələrindən ixtiyari biri ilə baş verən A hadisəsi yəqin hadisə adlanır və aydındır ki, bu hadisə bütün Ω fəzası ilə üst-üstə düşməlidir. Buna görə də, Y. h.-nin ehtimalını 1-ə bərabər götürmək təbiidir:

$$\mathbf{P}(A) = \{\omega : \omega \in A\}\text{-nın ölçüsü} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1.$$

A hadisəsinə əks hadisə (tamamlayıcı hadisə) qeyri – mümkün hadisədir.

Bax, *Cəbri, hadisələrin.*

YƏQİNLİK « **достоверность; certainty** » – hər hansı hadisə və ya prosesin baş verəcəyinə bütün şübhələri istisna edən aprior əminlikdir. Y. hər hansı hadisənin reallaşmasını xarakterizə edir və onun ehtimalının ən böyük qiymətli olmasını qeyd edir. Y. 1 ehtimalla baş verən *yəqin hadisələrlə* bağlıdır. Praktikada hər hansı hadisənin ehtimalı 1-ə kifayət dərəcədə yaxın olduğu halda Y.-dən danışıla bilinər.

YIĞILMA ehtimala görə « **сходимость** по вероятности; **convergence** in probability » – ehtimal nəzəriyyəsində geniş istifadə olunan, təsadüfi kəmiyyətlərin yığılmasının xüsusi halıdır. $X_0, X_1, \ldots$ eyni $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{|X_n - X_0| > \varepsilon\} \to 0, \; n \to \infty$$

münasibəti ödənilərsə, $\{X_n, n \geq 1\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı $n \to \infty$ olduqda X_0-a ehtimala görə yığılır, deyilir və bu yığılma simvolik olaraq, $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X_0$ kimi işarə olunur. Yığılmanın bu növü *Ki – Fan metrikası* ilə metriklənir və bu növ yığılma riyazi analizdə ölçüyə görə yığılmaya uyğundur.

YIĞILMA(sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin « **сходимость** эмпирических мер и эмпирических процессов; **convergence** of empirical measures and processes » – normalanmış empirik paylanmalar və momentlər üçün *mərkəzi limit teoremi* və *invariantlıq prinsipidir*.

$(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ – ixtiyari ölçülən fəza, P_n, – $\mathscr{A}$-da verilmiş $\mathbf{P}$ paylanmasına tabe n – ölçülü seçim üzrə qurulmuş empirik paylanmadır. Kvadratı ilə inteqrallanan ölçülən $f : (\mathscr{X}, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ funksiyalarının hər hansı $\mathscr{F} \equiv \{f\}$ parametrik çoxluğunda verilən empirik proses

$$Y_n(f) = n^{1/2} \int_{\mathscr{X}} f(x)\,(\mathbf{P}_n - \mathbf{P})\,dx, \quad f \in \mathscr{F}$$

düsturu ilə təyin olunur. $Y_n(f)$-in $\{\mathbf{I}_A(\cdot);\ A \in \mathscr{B}\}$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ indikatorlar çoxluğuna daralması empirik ölçü adlanır:

$$\mu_n(A) = n^{1/2}(\mathbf{P}_n(A) - \mathbf{P}(A)), \quad A \in \mathscr{B}.$$

Çoxölçülü mərkəzi limit teoreminə əsasən $\{Y_n(f);\ f \in \mathscr{F}\}$ empirik prosesinin sonluölçülü paylanmaları $n \to \infty$ olduqda, riyazi gözləməsi sıfra bərabər və kovariasiyası

$$\mathbf{M}\, Z(f)Z(g) =$$

$$= \int_{\mathscr{X}} f(x)g(x)\mathbf{P}(dx) - \int_{\mathscr{X}} f(x)\mathbf{P}(dx) \int_{\mathscr{X}} g(x)\mathbf{P}(dx) \qquad (1)$$

düsturu ilə ifadə olunan $\{Z(f);\ f \in \mathscr{F}\}$ Qauss prosesinin sonluölçülü paylanmalarına zəif yığılır.

$\{Y_n(\cdot)\}$ ardıcıllığı $\mathscr{F}$ sinfi üzrə mərkəzi limit teoremini müntəzəm ödəyir, bu şərtlə ki, hər bir n üçün eyni ehtimal fəzasında elə $Y_n(\cdot)$ və $Z(\cdot)$ təsadüfi proseslərini vermək mümkündür ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün bu proseslər

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\sup_{f\in\mathscr{F}} |Y_n(f) - Z(f)| > \varepsilon\} = 0 \qquad (2)$$

şərtini ödəsin, burada Pr – xarici ehtimaldır (rus. внешняя вероятность) [(2)-dəki supremum təsadüfi kəmiyyət olmaya bilər].

Bir sıra məsələlərdə $\{Y_k(\cdot);\ k \leq n\}$ şəklində «trayektoriyaların» Qauss approksimasiyası zərurəti yaranır. Buna görə də, (2) münasibətinə ekvivalent aşağıdakı müddəa məqsədəuyğun sayılır. Əgər eyni bir ehtimal fəzasında empirik proseslərin $\{Y_n(\cdot)\}$ ardıcıllığını və həm də kovariasiyası (1) olan asılı olmayan mərkəzlənmiş elə $\{Z_j(\cdot)\}$ Qauss proseslərini vermək olarsa ki, bunlar üçün

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{\max_{k\leq n} \sup_{f\in\mathscr{F}} \Big| k^{1/2} Y_k(f) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} Z_j(f)\Big| > \varepsilon n^{1/2}\} = 0 \qquad (3)$$

münasibəti ödənilsin, onda $\{Y_n(\cdot)\}$ ardıcıllığı üçün $\mathscr{F}$ üzrə müntəzəm invariantlıq prinsipi ödənilir, deyilir.

Əgər (2) və (3)-də supremum bütün n qiymətlərində təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda empirik ölçülərin və empirik proseslərin Y.-sı uyğun funksional fəzalarda paylanmaların zəif Y. Terminlərilə ifadə oluna bilinər (bax, [1] – [3]). (2) və (3)-dən $Y_n(\cdot)$ və ya $\{Y_k(\cdot);\ k \leq n\}$ toplularının funksionallarının olduqca geniş sinfi üçün paylanmaların zəif yığılması alınır.

$\mathscr{F}$ sinfinin bəzi entropik xarakteristikaları terminlərində (2) və (3) münasibətlərinin ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır (bax, [1] – [7]).

$H_1(\varepsilon, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ aşağıdakı şərtləri ödəyən $\mathbf{P}$ – inteqrallanan $\{f_i\}$ funksiyalarının ($\mathscr{F}$-dən olmaya da bilər) minimal sayının loqarifmi (əgər bu varsa) olsun: sonlu $\mathscr{F}$ ailəsindən ixtiyari elə f_{i_1} və f_{i_2} funksiyaları tapılar ki, ixtiyari $f \in \mathscr{F}$ üçün

$$f_{i_1}(x) \leq f(x) \leq f_{i_2}(x), \quad \int_{\mathscr{X}} (f_{i_2}(x) - f_{i_1}(x))\,\mathbf{P}(dx) \leq \varepsilon$$

şərtləri ödənilsin. Əgər $\mathscr{F}$-dən olan funksiyalar müntəzəm məhdud olarsa və

$$\int_0^1 H_1^{1/2}(\varepsilon^2, \mathscr{F}, \mathbf{P})\,d\varepsilon < \infty$$

şərti ödənilərsə, onda (2) və (3) münasibətləri ödənilir (bax, [2], [5]).

Əgər $\mathscr{B}$ çoxluqların *Vapnik – Çervonenkis sinfi* olarsa, onda müəyyən ölçülənlik şərtlərində ixtiyari $\mathbf{P}$ üçün $\{\mu_n(A);\ A \in \mathscr{B}\}$ empirik ölçülər ailəsi (2) və (3) münasibətlərini ödəyir (bax, [1], [2]).

Ədd.: [1] Dudley R. M., «Ann. Probab.», 1978, v. 6, p. 899–929; [2] Dudley R. M., «Lect. Notes in Math.», 1984, № 1097, p. 1–141; [3] Колчинский В. И., «Теория вероятн. и матем. статистика», 1981, т. 24, с. 63–75; [4] Gine E., Zinn J., «Ann. Probab.», 1984, v. 12, № 4, p. 929–89; [5] Борисов И. С., «Сиб. матем. ж.», 1983, т. 24, № 6, с. 14–25; [6] Борисов И. С., «Тр. Ин-та матем.», Новосиб., 1985, т. 5, с. 3–27; [7] Ossiander M., «Ann. Probab.», 1987, v.15, № 3, p. 897–919.

YIĞILMA əsas etibarilə « **сходимость** в основном; weak **convergence** » – bax, *Zəif yığılma.*

YIĞILMA(sı) inteqral funksionalların « **сходимость** интегральных функционалов; **convergence** of integral functional » – bax, *Yığılma*(sı) inteqral tipli funksionalların paylanmalarının.

YIĞILMA(sı) inteqral tipli funksionalların paylanmalarının « **сходимость** распределений функционалов интегрального типа; **convergence** of distributions of integral type functionals » – inteqral funksiyalarının doğurduğu σ – topologiyalı fəzada paylanmaların zəif yığılmasıdır ($\mathscr{F}$ inteqral tipli funksionallar sinfi olduqda, bu yığılma təsadüfi proseslərin $\mathscr{F}$ – yığılmasıdır).

$\zeta(t)$ – ölçülən təsadüfi proses və $(\zeta_n(t))$, $t \in [0,1]$ – məhdud ölçülən funksiyalar fəzası $M(0,1)$-də 1 ehtimalla $[0,1]$ parçasında topalanmış ölçülən təsadüfi proseslər ardıcıllığı, $\mathscr{F}$ –

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(x(t))\, dt$$

şəklində bütün funksionallar sinfi olsun, burada φ, – $\mathbb{R}$ -də kəsilməz funksiyadır.

ζ_n ardıcıllığının ζ -ya $\mathscr{F}$ – yığılması (inteqral funksionallarının yığılması) üçün:

1) $\mathbb{R}$ -də ixtiyari kəsilməz φ funksiyası və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_N \lim_{n\to\infty} \sup \mathbf{P}\left\{ \int_{\{t:\,|\zeta_n(t)|>N\}} \varphi(\zeta_n(t))\, dt < \varepsilon \right\} = 0$$

münasibətinin ödənilməsi;

2) hesabi çoxluğu aşmayan elə ədədlər çoxluğu D və $\mathbb{R}\setminus D$-də hər yerdə sıx elə S çoxluğu olsun ki, ixtiyari m üçün

$$\lim_n \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{P}\left\{ \bigcap_{j=1}^m \{\zeta_n(t_j) < u_j\} \right\} dt_1 \dots dt_m =$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathbf{P}\left\{ \bigcap_{j=1}^m \{\zeta_n(t_j) < u_j\} \right\} dt_1 \dots dt_m$$

münasibətinin ixtiyari $u_1, \dots, u_m \in S$ üçün ödənilməsi zəruri və kafidir.

Ədd.: [1] Боровков А. А., Печерский Е. А., «Сиб. матем. ж.», 1975, т. 16, № 5, с. 899–915; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

YIĞILMA kvadratik orta « **сходимость** в среднем квадратичном; **convergence** in mean square/ **convergence** in the quadratic mean » – bax, *Yığılma* p tərtib orta.

YIĞILMA ölçüyə görə « **сходимость** по мере; **convergence** in measure » – ölçülən funksiyaların yığılma növlərindən biridir. $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ – ölçülü fəza, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ – həqiqi ədədlərin genişləndirilmiş çoxluğu, $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$ isə sanki hər yerdə sonlu və ölçülən funksiyaların ardıcıllığı olsun, burada Ω – hər hansı çoxluq, $\mathscr{A}$ – onun altçoxluqlarından təşkil olunmuş σ – cəbr, μ isə bu altçoxluqlarda verilmiş ölçüdür. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ və A ($A \subset \Omega$, $A \in \mathscr{A}$) üçün elə $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülən funksiyası tapılarsa ki,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0 \qquad (1)$$

münasibəti ödənilsin, onda f_n, $n \geq 1$ ardıcıllığı f funksiyasına A çoxluğunda μ ölçüsünə görə yığılır, deyilir. Əgər (1) münasibəti $A = \Omega$ olduqda ödənilərsə, onda $\{f_n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə yığılan ardıcıllıq adlanır. Bu halda $\{f_n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı f funksiyasına μ ölçüsünə görə yığılır, deyilir və belə yığılma simvolik olaraq

$$f_n \xrightarrow{\mu} f,\ f_n \longrightarrow f(\mu),\ f = \mu - \lim f_n$$

kimi işarə olunur. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq 1} \mu\{x \in \Omega : |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

münasibəti ödənilərsə, f_n, $n \geq 1$ ardıcıllığı ölçüyə görə fundamental ardıcıllıq adlanır.

Ölçüyə görə Y. ölçülən funksiyalar fəzasının topoloji strukturunun öyrənilməsində mühüm rol oynayır və bu yığılma digər növ yığılmalarla sıx əlaqədardır.

1) Əgər $\mu(\Omega) < \infty$ olarsa, onda sanki hər yerdə sonlu funksiyaya sanki hər yerdə yığılmadan həmin limit funksiyasına ölçüyə görə (hətta sanki hər yerdə) Y. alınır. Əgər $\mu(\Omega) = \infty$ olarsa, onda sanki hər yerdə yığılmadan (hətta hər yerdə yığılmadan), ümumiyyətlə, ölçüyə görə Y. alınmır. $\mu(\Omega) = \infty$ olduqda ölçüyə görə Y., bəzən, bütün $A \subset \Omega$, $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) < \infty$ çoxluqlarında ölçüyə görə Y. kimi təyin olunur.

2) Əgər ardıcıllıq ölçüyə görə yığılarsa, onda bu ardıcıllıqdan həmin limit funksiyasına sanki hər yerdə yığılan altardıcıllıq seçmək olur.

3) Ölçüyə görə Y. və ölçüyə görə fundamentallıq bir-birilə ekvivalentdirlər.

4) $p > 0$ tərtib orta yığılma həmin limit funksiyasına ölçüyə görə Y.-nı doğurur.

5) Ölçüyə görə Y. funksiyaların toplanması və funksiyaların skalyarlara hasili ilə uzlaşır. Bundan əlavə, əgər $S(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bir-birilə ekvivalent ölçülən funksiyaların siniflərinin çoxluğudursa və μ ölçüsü σ – sonlu ölçüdürsə, onda $S(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ tam topoloji metriklənən vektor fəzadır və bu fəzada metrikaya görə yığılma ölçüyə görə Y. ilə üst-üstə düşür. Uyğun metrika müxtəlif üsullarla daxil oluna bilinər (bax, [2], [3]). Əgər μ diskret ölçü deyildirsə, onda $S(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ fəzası lokal fəza olmur (deməli, normalanmayan fəza da). Əgər $\mathscr{A}$ σ – cəbri hesabi bazisə malikdirsə, $S(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ fəzası separabeldir. $[0, 1]$ parçasında ölçülən funksiyalar fəzasında ölçüyə görə yığılma üçün metriklənməni ilk dəfə M. Freşe [5]-də həyata keçirmişdir.

Ölçülən metrik fəzalarda qiymətlər alan ölçülən inikaslar üçün ölçüyə görə Y.-nın tərifi həqiqiqiymətli ölçülən funksiyalar halına analojidir. Məs., separabel Banax fəzaları üçün ölçüyə görə Y.-nın bütün xassələri olduğu kimi qalır.

Ölçüyə görə Y. anlayışı ehtimal nəzəriyyəsindəki ehtimala görə Y. anlayışına uyğundur.

Əd.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 6 изд., М., 1989; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [4] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [5] Frechet M., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1921, v. 11, p. 187–206.

YIĞILMA(sı) paylanmaların « **сходимость** распределений; **convergence** of distribution » – ehtimal nəzəriyyəsində geniş istifadə olunan, təsadüfi kəmiyyətlərin yığılma anlayışının xüsusi halıdır; bütün təsadüfi kəmiyyətlərin çoxluğu $\mathscr{X}$ -in, paylanmaları eyni $\mathbf{P}_X$ olan X təsadüfi kəmiyyətlərini birləşdirən ekvivalentlik siniflərinə $\mathscr{X}$ çoxluğunun bölgüsünə uyğun haldır. Əgər $X_0, X_1, ... \in \mathscr{X}$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanmaları $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ...$ olarsa, onda paylanmaların yığılması $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}_n$ -in $\mathbf{P}_0$ -la müəyyən mənada yaxınlaşması kimi anlaşılır. Əgər baxılan $\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_0$ Y. $\mathscr{X}$ -də μ metrikası ilə metriklənirsə, onda $\mu(X, Y)$ X, Y kəmiyyətlərinin paylanmaları cütləri $(\mathbf{P}_X, \mathbf{P}_Y)$ -lərin çoxluğunda verilmiş funksionaldır və bu Y. aşağıdakı münasibətlə eynigüclüdür:

$$\mu(X_n, X_0) = \mu(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_0) \to 0, \quad X_n \in \mathscr{X} = \{X : \mathbf{P}_X = \mathbf{P}_{X_n}\}.$$

Ehtimal nəzəriyyəsində paylanmaların Y.-nın çoxsaylı müxtəlif növləri ənənəvi istifadə olunur – *zəif yığılma*, *müntəzəm yığılma*, variasiyaya görə *yığılma*, çəkili *orta yığılma* və s. Paylanmaların Y.-nın metrik interpretasiyasının üstün cəhəti ondadır ki, paylanmaların baxılan Y.-nda $\mathbf{P}_n$ -in $\mathbf{P}_0$ -a yaxınlaşma sürəti haqqında sual qoymağa imkan verir (bax, məs., *Berri – Esseen teoremi*) və limit teoremləri nəzəriyyəsində və stoxastik modellərin dayanıqlılığı nəzəriyyəsində və s. müxtəlif analitik metodlar üçün əsas yaradır.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

YIĞILMA; paylanmaların çəki ilə orta yığılması « **сходимость** распределений в среднем с весом; **convergence** of distributions in the weighted mean » – bax, *Orta yığılma* çəkili.

YIĞILMA(sı) paylanmaların moment xarakteristikalarının « **сходимость** моментных характеристик распределений; **convergence** of moment distribution characteristics » – F_n paylanmalarının moment xarakteristikaları adlanan $\int \varphi(x) F_n(dx)$ inteqrallarının $\int \varphi(x) F(dx)$ inteqralına yığılmasıdır, burada F, F_n, $n = 1, 2, ...$ – hər hansı $(X, \mathscr{A})$ ölçülən fəzasında ehtimal paylanmaları, $\varphi(x)$ – bu paylanmalar üzrə inteqrallanan funksiyadır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər cəmlərinin moment xarakteristikalarının yığılması haqqında hökmlər aşağıdakı teoremə əsaslanır.

X separabel Hilbert fəzası, $\mathscr{A}$ isə onun altçoxluqlarının Borel σ – cəbri olsun. Fərz olunur ki, $(X, \mathscr{A})$ -da simmetrik ehtimal paylanmalarının kompozisiyalar ardıcıllığı $F_n = \prod_{k=1}^{m_n} * F_{nk}$, $n = 1, 2, ...$ F ehtimal paylanmasına zəif yığılır və φ kəsilməz müsbət funksiyadır, X -də təyin olunmuşdur və aşağıdakı şərtləri ödəyir: φ hər bir F_{nk} ehtimal paylanması üzrə inteqralanandır və bütün x və y və hər hansı A üçün $\varphi(x + y) \le A\varphi(x)\varphi(y)$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi(x)\, dF_n(x) = \int_X \varphi(x)\, dF(x)$$

münasibətinin ödənilməsi üçün

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \sum_{k=1}^{m_n} \int_{\|x\|>R} \varphi(x)\, dF_{nk}(x) = 0$$

münasibətinin ödənilməsi zəruri və kafidir.

φ funksiyası kimi $1 + \|x\|^p$, $p > 0$ və $\exp\{\alpha \|x\|^\beta\}$, $\alpha > 0$, $0 < \beta \le 1$ götürərək, momentlərin və eksponensial momentlərin yığılmasının zəruri və kafi şərtlərini almaq olur.

Əd.: [1] Круглов В. М., Дополнительные главы теории вероятностей, М., 1984.

YIĞILMA; paylanmaların müntəzəm yığılması « **сходимость** распределений равномерная; uniform **convergence** of distributions » – bax, *Müntəzəm yığılma*(sı) paylanmaların.

YIĞILMA paylanmaya görə « **сходимость** по распределению; **convergence** in distribution » – təsadüfi kəmiyyətlərin yığılmasının bir növüdür. Əgər $X_0, X_1, ...$ paylanmaları uyğun olaraq, $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ...$ olan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olarsa, onda paylanmaya görə yığılma, adətən, $n \to \infty$ olduqda $\mathbf{P}_n$ paylanmalarının $\mathbf{P}_0$ -a *zəif yığılması* kimi anlaşılır. Lakin paylanmaya görə yığılmaya daha geniş anlam vermək olar ki, buna görə yalnız zəif topologiya ilə kifayətlənməmək olarsa.

YIĞILMA sanki yəqin, vahid ehtimalla « **сходимость** почти наверное, **сходимость** с вероятностью 1; almost surely **convergence / convergence** with probability 1 » – təsadüfi kəmiyyətlərin yığılma növlərindən biri olub, aşağıdakı kimi təyin olunur. $(U, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza, $X_0, X_1, ...$ – eyni bir $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ fəzasında verilmiş, U -dan qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı olsun. Əgər $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{\omega : X_n(\omega) \to X_0(\omega)\} = 1 \qquad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, X_n ardıcıllığı X_0 -a sanki yəqin və ya vahid ehtimalla yığılır, deyilir və bu yığılma

simvolik olaraq $X_n \xrightarrow{s.y.} X_0$ kimi yazılır. (*) münasibəti ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün aşağıdakı münasibətlərdən ixtiyari biri ilə ekvivalentdir:

A) $\mathbf{P}\{\omega : |X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \varepsilon$ n-in sonsuz sayda qiymətləri çoxluğu üçün$\} = 0$

B) $\mathbf{P}\{\omega : \bigcup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0$, $n \to \infty$;

C) $\mathbf{P}\{\omega : \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0$, $n \to \infty$.

Sanki yəqin yığılma riyazi analizdəki sanki hər yerdə yığılmaya uyğundur.

Ehtimal nəzəriyyəsində sanki yəqin yığılmanın gücləndirilmiş bir növü – dar mənada sanki yəqin yığılma adlandırılan növü də məlumdur. Q. Robbins (G. Robbins) və P. L. Hsu (P. L. Hsu) tərəfindən daxil edilmiş bu növ yığılma ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\omega : |X_n(\omega) \to X_0(\omega)| \geq \varepsilon\} < \infty$$

şərtlərilə təyin olunur. Sanki yəqin yığılma və dar mənada sanki yəqin yığılma metriklənmir.

Ədd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Дюге Д., Теоретическая и прикладная статистика, пер. с франц., М., 1972.

YIĞILMA tam « **сходимость** полная; complete **convergence** » – bax, *Yığılma tamamilə*.

YIĞILMA tamamilə « **сходимость** вполне; complete **convergence** », tam yığılma – $\mathbb{R}^1$-də bütün məhdud və azalmayan $H(x)$, $H(-\infty) = 0$ funksiyalarının çoxluğu $\mathscr{H}$-da aşağıdakı kimi təyin olunan yığılmadır. $H_0, H_1, \ldots \in \mathscr{H}$ olsun; əgər H_0 funksiyasının hər bir kəsilməzlik nöqtəsində $\{H_n(x)\}_{n \geq 1}$ $H_0(x)$-ə yığılırsa və $H_n(\infty) \to H_0(\infty)$ münasibəti də ödənilərsə, onda $\{H_n\}_{n \geq 1}$, $n \to \infty$ olduqda H_0-a tamamilə yığılır, deyilir. $\{F_n\}_{n \geq 1}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının $F_0(x)$ paylanma funksiyasına tam Y. $\{F_n\}_{n \geq 1}$-in F_0-a zəif yığılması ilə eynigüclüdür. Y.-nın bu növü *Levi metrikası* ilə metriklənir, bu metrikanın tərifi isə $\mathscr{H}$-dan olan funksiyalar halı üçün də təyin olunur.

Tam Y.-ya nəzərən $\mathscr{A} \subset \mathscr{H}$ çoxluqları üçün zəif nisbi kompaktlıq kriterisinin analoqu

$$\sup \left\{ \int_{|x| > T} dH(x) : H \in \mathscr{A} \right\} \to 0, \quad T \to \infty$$

şərtidir.

Ədd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

YIĞILMA p tərtib orta « **сходимость** в среднем порядка p; **convergence** in mean of order p » – təsadüfi kəmiyyətlərin yığılma növlərindən biridir. $p > 0$, $\mathbb{B}$ – təsadüfi kəmiyyətlərin separabel Banax fəzası olsun; bu təsadüfi kəmiyyətlərin eyni bir ehtimal fəzasında verildiyi, $\mathbb{B}$-dən qiymətlər aldığı, $\mathbf{M}\|X_n\|^p < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$, olduğu fərz olunur. Əgər

$$\mu_p(X_p(X_n, X_0)) = \mathbf{M}\|X_n - X_0\|^p \to 0$$

münasibəti ödənilərsə, X_n ardıcıllığı X_0-a p tərtiblə orta yığılır, deyilir. $\mu(X, Y) = (\mu_p(X, Y))^{1/\min(1, p)}$ funksionalı $\mathscr{X}_p = \{X : \mathbf{M}\|X\|^p < \infty\}$ çoxluğunda sonlu qiymətlər alan ehtimal metrikasıdır. μ metrikasını $K(X, Y)$ *Ki – Fan metrikası* ilə

$$K(X, Y) \leq (\mu(X, Y))^{(1+p)/\min(1, p)}$$

bərabərsizliyi əlaqələndirir. $p = 2$ olan hal kvadratik orta yığılmaya uyğundur.

YIĞILMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının « **сходимость** рядов случайных величин; **convergence** of series of random variables » – analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi dilində təyin olunduğu kimi, $\mathbf{P}$ ehtimal ölçüsü ilə verilmiş hər hansı $(\Omega, \mathfrak{B})$ ölçülən fəzasında verilən həqiqi ölçülən $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$ funksiyalarının

$$X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots \tag{1}$$

sıralarının yığılmasıdır, yəni $S_n(\omega) = X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)$ xüsusi cəmlərinin $(\Omega, \mathfrak{B})$ fəzasında hər hansı $Y(\omega)$ ölçülən funksiyasına hər hansı mənada yığılmasıdır. Y.-nın ehtimal nəzəriyyəsində ən çox istifadə olunan növləri aşağıdakılardır:

1. Vahid ehtimalla yığılma ($\mathbf{P}$ ölçüsünə nəzərən sanki yəqin yığılma):

$$\mathbf{P}\{\omega : S_n(\omega) \to Y(\omega), n \to \infty\} = 1.$$

2. Ehtimala görə yığılma: hər bir $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mathbf{P}\{\omega : |S_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Yığılma topologiyasının bu tipi *Ki – Fan metrikası* ilə reallaşır, yəni (2)

$$K(S_n, Y) \to 0, \quad n \to \infty$$

yığılmasına ekvivalentdir.

3. Zəif yığılma (paylanma üzrə): G paylanma funksiyasının kəsilməzlik nöqtəsi olan hər bir x üçün

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\omega : S_n(\omega) < x\} \to G(x) = \mathbf{P}\{\omega : Y(\omega) < x\}.$$

Zəif yığılma topologiyası *Levi metrikası* ilə reallaşır, yəni (3) münasibəti

$$L(F_n, G) \to 0, \quad n \to \infty$$

yığılmasına ekvivalentdir.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin sıraları üçün Y.-nın bütün üç tipi bir-birilə ekvivalentdirlər (bax, [1]). Belə sıraların Y. üçün zəruri və kafi şərtlər A. N. Kolmoqorovun isbat etdiyi *üç sıra teoremində* ifadə olunmuşdur. Ədədi sıralardan fərqli olaraq yığılan (1) sırası elə sıra ola bilər ki, onun toplananlarının yerini dəyişdirdikdə bu cəmin qiyməti dəyişilməz qalsın. Məsələn,

$$\mathbf{P}\{X_k = 1/k\} = \mathbf{P}\{X_k = -1/k\} = 1/2$$

kimi verilən asılı olmayan $X_1, X_2, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlərinin mütləq yığılmayan sırası belə sıradır.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin (1) sırasının yığılma kriteriisi təsadüfi kəmiyyətlərin $\Delta(X_i)$ *indeksləri*, $\mathbb{C}_r(X_j)$ *mərkəzləri* (ixtiyari), $\mathbb{B}_r(X_j)$ *səpələnmələri* (ağır təsadüfi kəmiyyətlərin) terminlərində aşağıdakı şərtlərin ödənilməsindən ibarətdir: hər hansı $0 < r < \Delta$ üçün

$$\Delta = \inf(\Delta(X_j):\ j \geq 1) > 0$$

[belə r seçilərsə, bütün j -lər üçün $\mathbb{C}_r(X_j)$ -in və $\mathbb{B}_r(X_j)$ -in varlığı təmin olunur];

$$\mathbb{C}_r(X_1) + \mathbb{C}_r(X_2) + \ldots \text{ və } \mathbb{B}_r(X_1) + \mathbb{B}_r(X_2) + \ldots$$

sıraları yığılır. Əgər sıranın yığılmasının mərkəzlərdən ibarət şərti onun mütləq Y. şərti ilə əvəz olunarsa, onda Y. kriterisi və sıranın toplananlarının yerinidəyişməsinin onun qiymətinə təsir etməməzliyi alınır (bax, [2]).

Əd.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1984; [2] Золотарев В. М., Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., 1986.

YIĞILMA(sı) təsadüfi kəmiyyətlərin « **сходимость** случайных величин; **convergence** of a random variables » – ehtimal nəzəriyyəsində və ilk növbədə limit teoremlərində istifadə olunan anlayışlardan biridir. $\mathscr{X} = \{X(\omega)\}$ eyni bir $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzasında verilmiş və hər hansı ölçülən $(U, \mathscr{B})$ fəzasından qiymətlər alan bütün mümkün ola bilən kəmiyyətlər çoxluğu olsun. $X_n(\omega) \in \mathscr{X}$ funksiyalarının $X_0(\omega) \in \mathscr{X}$ funksiyasına $n \to \infty$ olduqda Y. müxtəlif mənalarda anlaşıla bilinər ki, bu da təsadüfi kəmiyyətlərin müxtəlif tip Y.-larına uyğundur.

Ehtimal nəzəriyyəsində konkret problemlərin həlli prosesində ümumi xüsusiyyətə malik təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən tip Y.-sından istifadə etmək ənənəsi vardır ki, $\mathscr{X}$ -dən olan təsadüfi kəmiyyətlər bu və ya digər üsulla ekvivalentlik siniflərinə bölünür, sonra isə Y.-nın uyğun şəklində bu təsadüfi kəmiyyətlərə müstəqil elementlər kimi baxılır. Bölgü üsullarından ən çox istifadə olunanlar aşağıdakı iki üsuldur: əgər

A) $\mathbf{P}\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = 1$;

B) $\mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \in A\} = \mathbf{P}\{\omega : Y(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathscr{A}$

olarsa, $X, Y \in \mathscr{X}$ eyni bir ekvivalentlik sinfinə mənsubdurlar.

Birinci üsul ilə, məs., təsadüfi kəmiyyətlərin sanki yəqin *yığılması*, ehtimala görə *yığılma*, p tərtib orta *yığılma* kimi Y.-lar, ikinci üsulla isə təsadüfi kəmiyyətlərin Y.-sının olduqca geniş qrupu, o cümlədən, *zəif yığılma*, *müntəzəm yığılma*, variasiyaya görə *yığılma* və s. kimi Y.-lar bağlıdır (bax, *Yığılma*(sı) paylanmaların). Bir qayda olaraq, təsadüfi kəmiyyətlərin istifadə olunan Y. tipləri metriklənir. Bu belə anlaşılır: təsadüfi kəmiyyətlərin baxılan $X_n(\omega) \to X_0(\omega)$ Y.-na $\mathscr{X}$ -də elə μ *ehtimal metrikası* qarşı qoymaq mümkündür ki, bu metrika üçün bu Y. $\mu(X_n, X_0) \to 0$ yığılmasına ekvivalentdir. Bununla belə təsadüfi kəmiyyətlərin metriklənməyən Y.-sı da vardır, məs., 1 ehtimalla yığılma. Ehtimal metrikalarının təsnifatında B) bölgüsü sadə metrikalar üçün istifadə olunduğu halda, mürəkkəb metrikalar digər bölgülərdən istifadə edir.

Təsadüfi kəmiyyətlərin Y. anlayışına yaxın olan təsadüfi kəmiyyətlərin yaxınlaşması anlayışı – $X_n, Y_n \in \mathscr{X}$ iki təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqlarının əsasında formalaşmışdır. Bu yaxınlaşma təsadüfi kəmiyyətlərin müəyyən tip Y. ilə əlaqəlidir və bu Y. μ metrikası ilə metriklənə bildiyi halda, onu ifadə edir ki, $\mu(X_n, Y_n) \to 0$, lakin metriklənmə mümkün olmadığı halda bu əlaqə $X_n(\omega) - Y_n(\omega)$ fərqinin bu yığılma mənasında sıfra yaxınlaşması ilə ifadə olunur. Təsadüfi kəmiyyətlərin Y.-sı anlamında ekvivalent olan, $\mathscr{X}$ -də μ və ν metrikaları təsadüfi kəmiyyətlərin yaxınlaşması mənasında ekvivalent olmaya da bilər. Məs., *Levi metrikası* L və *Levi – Proxorov metrikası* π belə metrikalardır, $L \leq \pi$ olmasına baxmayaraq, $x \geq 0$ yarımoxunda azalmayan elə $\psi(x)$ funksiyası yoxdur ki, $\psi(0) = \psi(+0) = 0$ və $\pi \leq \psi(L)$ şərtlərini ödəsin (bax, *Ehtimal metrikalarının müqayisəsi*).

Əd.: [1] Золотарев В. М., в сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей, М., 1988, с. 48–52; [2] Ротарь В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 3, с. 527–46.

YIĞILMA(sı) tiplərin « **сходимость** типов; **convergence** of types » – bax, *Tiplərin yığılması*.

YIĞILMA vahid ehtimalla « **сходимость** с вероятностью 1; **convergence** with probability 1 » – bax, *Yığılma* sanki yəqin, vahid ehtimalla.

YIĞILMA variasiyaya görə « **сходимость** по вариации; **convergence** in variation » – paylanmaların yığılma növlərindən aşağıdakı kimi təyin olunan bir yığılmadır. $(U, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza, $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots,$ – $\mathscr{A}$ -da verilmiş ehtimal paylanmaları ardıcıllığı olsun. Tərifə görə, əgər $\{\mathbf{P}_n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı $\mathbf{P}_0$ -a *tam variasiya metrikası* mənasında yığılırsa, yəni

$$\sigma(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_0) = \sup\{|\mathbf{P}_n(A) - \mathbf{P}_0(A)| : A \in \mathscr{A}\} \to 0, \quad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $n \to \infty$ olduqda $\{\mathbf{P}_n,\ n \geq 1\}$ ardıcıllığı $\mathbf{P}_0$ -a variasiyaya görə yığılır. (*) şərti

$$\operatorname{var}(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0) = (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0)^+(U) + (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0)^-(U)$$

variasiyasının sıfra yığılması ilə eynigüclüdür, burada $(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0)^+(A)$, $(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0)^-(A)$, – $(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0)(A)$, $A \in \mathscr{A}$ ümumiləşmiş ölçüsünün (yükünün) Jordan – Han ayrılışının komponentləridir.

Əgər $U = \mathbb{R}^k$ olarsa və $\mathbf{P}_n$, $n = 0, 1, \ldots$ paylanmalarının sıxlıqları p_k -lar olarsa, onda (*)

$$\int_U |p_n(u) - p_0(u)|\, du \to 0,\ n \to \infty$$

münasibətilə eynigüclüdür.

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

YIĞILMA zəif « **сходимость** слабая; weak **convergence** » – bax, *Zəif yığılma.*

C – YIĞILMA(sı) təsadüfi proseslərin « **C – сходимость** случайных процессов; **C – convergence** of stochastic processes » – təsadüfi proseslərin paylanmalarının elə yığılma növüdür ki, limit prosesinin trayektoriyaları kəsilməz olur. $\{X_n(t)\}$ $[a, b]$ sonlu parçasında verilmiş, trayektoriyaları hər hansı $R[a, b] \supseteq C[a, b]$ funksional fəzasından olan, paylanmaları isə $R[a, b]$ fəzasının bütün silindrik çoxluqlarını özündə saxlayan hər hansı $\mathscr{A}$ σ – cəbrindən olan təsadüfi proseslər ardıcıllığı olsun. $X(t)$ prosesinin trayektoriyaları 1 ehtimalla kəsilməz olduqda və əgər $R[a, b]$-də ixtiyari $\mathscr{A}$ – ölçülən, $x \in C[a, b]$ nöqtələrində müntəzəm topologiyada kəsilməz $f(x)$ funksionalı üçün $f(X_n)$-in paylanmaları $f(X)$-in paylanmasına zəif yığılarsa, $\{X_n(t)\}$ ardıcıllığı $X(t)$ prosesinə C – yığılır, deyilir (bax, [1]). Təsadüfi proseslərin C – y.-na misal ədəd oxunda empirik proseslərin kəsilməz trayektoriyalarlı limit Qauss prosesinə yığılmasıdır (bax, [2]).

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; [2] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

D – YIĞILMA(sı) təsadüfi proseslərin « **D – сходимость** случайных процессов; **D – convergence** of stochastic processes » – təsadüfi proseslərin paylanmalarının elə yığılma növüdür ki, limit prosesi trayektoriyaları 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan funksiyalar fəzasından olan prosesdir. Təsadüfi proseslərin D – paylanması təsadüfi proseslərin C – *paylanmasına* analojidir.

Əd.: [1] Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

$\mathscr{F}$ – YIĞILMA(sı) paylanmaların « **$\mathscr{F}$ – сходимость** распределений; **$\mathscr{F}$ – convergence** of distributions » – bax, *Limit teoremləri* təsadüfi proseslər üçün.

$\mathscr{F}$ – YIĞILMA(sı) təsadüfi proseslərin « **$\mathscr{F}$ – сходимость** случайных процессов; **$\mathscr{F}$ – convergence** of stochastic processes » – təsadüfi proseslərin funksionallarının verilmiş $\mathscr{F}$ sinfindən paylanmalarının zəif yığılmasıdır. $\mathscr{F}$, – $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ ölçülən fəzasında verilən, qiymətləri $\mathbb{R}$-dən olan ölçülən funksionallar sinfi olsun. Əgər X qiymətləri $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ fəzasından olan təsadüfi elementdirsə, onda hər bir $f \in \mathscr{F}$ funksionalı üçün $F_X^f(t) = \mathbf{P}\{f(X) < t\}$ paylanma funksiyasını təyin etmək mümkündür. (X_0) – qiymətləri $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$-dən olan təsadüfi elementlərin şəbəkəsi olsun. Əgər hər bir $f \in \mathscr{F}$ üçün paylanma funksiyası $F_{X_0}^f$ F_X^f funksiyasına zəif yığılarsa, onda (X_0) şəbəkəsi X təsadüfi elementinə $\mathscr{F}$ – *yığılır*, deyilir.

Məs., X_0 və X təsadüfi proseslər olduqda $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ fəzası rolunu $\mathbb{R}$-dəki trayektoriyaların (funksiyaların) fəzası ifa edir. Əgər $\mathscr{X}$-də topologiya verilmişdirsə və $\mathscr{F}$ bütün kəsilməz funksiyaların sinfi ilə üst-üstə düşərsə, onda $\mathscr{F}$ – yığılma təsadüfi proseslərin zəif yığılmasına ekvivalentdir.

Əd.: [1] Боровков А. А., «Успехи матем. наук.», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

G – YIĞILMA « **G – сходимость; G – convergence** » – bax, *Ortalanma prinsipi* təsadüfi əmsallarlı differensial operatorlar üçün.

YIĞILMANI YAXŞILAŞDIRAN ÇEVİRMƏ « улучшающее сходимость преобразование; convergence improving transformation » – paylanmaları limit paylanma qanununa «çox yaxın» olan təsadüfi kəmiyyətlər funksiyalarının qurulmasıdır. Məs., $X_1, \ldots, X_n$, – $(-1, 1)$ intervalında müntəzəm qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər və $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sqrt{n/3}$ olsun. Onda mərkəzi limit teoreminə əsasən $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{Z_n < x\} - \Phi(x) = O(n^{-1}),$$

burada $\Phi(x)$ – standart normal paylanma funksiyasıdır.

Əgər

$$V_n = Z_n - (3Z_n - Z_n^3)/(20n)$$

olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda

$$\mathbf{P}\{V_n < x\} - \Phi(x) = O(n^{-2})$$

münasibəti doğrudur.

Y. y. ç.-yə aid digər misallar *Vilson – Hilferti çevirməsi*, *Patnayk çevirməsi*, *Pirson çevirməsidir.*

Bax, *Asimptotik normal çevirmə*, *Asimptotik Pirson çevirməsi.*

Əd.: [1] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 2, с. 136–49.

YIĞILMANIN EKSTREMAL KRİTERİSİ « сходимости экстремальный критерий; extremal criterion for convergence »: $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nm_n}$ – hər bir seriyada asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin seriyalar ardıcıllığı olsun və bu təsadüfi kəmiyyətlərin müntəzəm sonsuz kiçilənlik şərtini ödədikləri fərz olunur. Fərz olunur ki, $|X_{nk}| < \varepsilon$ olduqda $X_{nk}^{\varepsilon} = X_{nk}$ və $|X_{nk}| \geq \varepsilon$ olduqda $X_{nk}^{\varepsilon} = 0$ olur; $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nm_n} - a_n$ cəmlərinin paylanma funksiyaları ardıcıllığının, a_n, $n = 1, 2, \ldots$ sabitlərinin hər hansı seçimində, xarakteristik funksiyasının Levi ifadəsi (bax, *Levi kanonik ifadəsi*) γ, σ^2, M, N xarakteristikaları ilə təyin olunan, sonsuz bölünən paylanma funksiyasına zəif yığılması üçün zəruri və kafidir ki, $\mathbf{P}\{\min_{1 \leq k \leq m_n} X_{nk} < x\}$ və $\mathbf{P}\{\max_{1 \leq k \leq m_n} X_{nk} < x\}$ paylanma funksiyaları ardıcıllıqları

$$L_1 = \begin{cases} 1 - \exp\{-M(x)\}, & x < 0 \text{ olduqda}, \\ 1, & x > 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və

$$L_2 = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \ \text{olduqda}, \\ \exp\{N(x)\}, & x > 0 \ \text{olduqda} \end{cases}$$

paylanma funksiyalarına zəif yığılsınlar və

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ \underline{\lim_{n \to \infty}} \ \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{D} X_{nk}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ \overline{\lim_{n \to \infty}} \ \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{D} X_{nk}^{\varepsilon} = \sigma^2$$

şərti ödənilsin.

Kriterini M. Loev isbat etmişdir (bax, [1]). Y. e. k.-nin ümumiləşməsi haqqında, bax, [2].

Əd.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Круглов В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, в. 4, с. 710–27.

YIĞIM METODU « накопления метод; scoring method » – *doğruyaoxşarlıq funksiyasının* qradiyentinin tutarlı statistik qiymət ətrafında xəttiləşdirilməsinə əsaslanan, R. Fişer (R. Ficher) tərəfindən *statistik qiymətlərin* effektivliyini artırmaq üçün təklif olunan metoddur. $\widetilde{\theta}_n$, – n sayda asılı olmayan $X_1, \ldots, X_n$ müşahidələri üzrə θ parametrinin hər hansı tutarlı statistik qiyməti, $f(x, \theta)$, – θ parametrinin sıxlığı,

$$\ln f(X^{(n)}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} f'_{\theta}(X_i, \theta) / f(X_i, \theta),$$

$$X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n),$$

$\mathbf{I}(\theta)$, – f sıxlığının informasion miqdarı olsun. Onda Y. m. proseduru nəticəsində $\theta_n^* = \widetilde{\theta}_n - n^{-1} \mathbf{I}^{-1}(\widetilde{\theta}_n) \ln f(X^{(n)}, \widetilde{\theta}_n)$ statistik qiyməti alınır ki, bu statistik qiymət əksər hallarda asimptotik effektiv qiymət olur. Y. m. çoxölçülü parametrlərin qiymətləndirilməsində, asılı müşahidələr üçün və s.-də tətbiq olunur. Statistik qiymət $\varphi_n(X^{(n)}, \theta) = 0$ tipli tənlikdən təyin olunduğu bütün hallarda bu metoddan istifadə olunur.

Əd.: [1] Le Cam., в кн.: Proceeding 3-d Berkeley symposium on mathematical statistics probability, v. 1, Berk., 1956, p. 129–56; [2] Джапаридзе К., Оценка параметров и проверка гипотез в спектральном анализе стационарных временных рядов, Тб., 1981.

YUXARI ETİBARLI SƏRHƏD « верхняя доверительная граница; upper confidence bound » – bax, *Etibarlı zolaq.*

***YUXARI KVARTİL « верхняя квартил; upper quartile »** – *kvantilin* $p = 3/4$ qiymətinə uyğun kvartildir.

Bax, *Kvartil.*

YUXARI QİYMƏTİ, OYUNUN « верхняя цена игры; upper value of a game » – bax, *Oyunu*, *iki şəxsin.*

***YUXARI LİMİT**(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının **« верхний предел** последовательности случайных событий; **lower limit** of sequence of random events **»** – stoxastik eksperimentdə müşahidə oluna bilən A_1, A_2, ... hadisələrindən, yalnız və yalnız, sonsuz saydası baş verdikdə baş verən hadisədir;

$A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, Ω eksperimentin uyğun *elementar hadisələr fəzasıdır*. A^* ilə işarə olunan bu hadisə $\{A_n\}$ hadisələr ardıcıllığının yuxarı limiti adlanır və bu limit $\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n$ kimi işarə olunur. A^* hadisəsi üçün

$$A^* = \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

bərabərliyi doğrudur. Bu hadisə elə ω-lar çoxluğudur ki, ($\omega \in \Omega$), bu ω-lar $\{A_n\}$ ardıcıllığının, yalnız və yalnız, sonsuz sayda hadisələri üçün əlverişli elementar hadisələrdir, yəni $\omega \in A^*$ olarsa, onda bu ω A_n-lərdən sonsuz saydasına daxildir və əksinə, ω A_n-lərdən sonsuz saydasına daxildirsə (yəni $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n$ olarsa), onda $\omega \in A^*$.

Əgər

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$$

olarsa, yəni $\{A_n\}$ *monoton azalan hadisələr ardıcıllığı* olarsa,

$$A^* = \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

olur.

Əd.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

YUXARI SƏRHƏD(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının **« верхняя граница** последовательности случайных событий; **upper boundary** of sequence of random events **»** – bax, *Birləşmə*(si)*/cəm*(i) təsadüfi hadisələrin.

YUXARI SƏRHƏD FUNKSİONALI « верхний граничный функционал; upper boundary functional » – bax, *Faktorizasion eyniliklər.*

YUXARI VƏ AŞAĞI ARDICILLIQLAR (FUNKSİYALAR) « верхняя и нижняя последовательности (функции); upper and lower sequences (functions) ». $\{X_n\}_{n>0}$ təsadüfi ardıcıllığı üçün $\mathbf{P}\{X_n > a_n$ sonsuz sayda çoxlu n-lər üçün$\} = 0$ olarsa ($= 1$ olarsa), $\{a_n\}_{n>0}$ ədədi ardıcıllığı yuxarı (aşağı) ardıcıllıq adlanır və ya o, yuxarı sinfə (aşağı sinfə) aiddir, deyilir. Başqa sözlə, sanki yəqin hər hansı təsadüfi N kəmiyyətindən başlayaraq $n > N$ qiymətlərində $X_n \le a_n$ olarsa, $\{a_n\}_{n>0}$ Y. a. (uyğun olaraq, sanki yəqin elə kifayət qədər böyük n-lər varsa ki, $X_n > a_n$ olarsa, $\{a_n\}_{n>0}$ A. a.) adlanır. Əgər $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, Y_i-lər isə eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda ixtiyari $\{a_n\}$ ardıcıllığı $\{X_n\}$ təsadüfi ardıcıllığı üçün ya yuxarı, ya da aşağı ardıcıllıq olur. Bu hada $\mathbf{M}Y_1 = m$ riyazi gözləməsi olarsa, onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində $\{(m + \varepsilon)n\}$, – $\{X_n\}$ üçün Y. a. [$(m - \varepsilon)n$ – A. a.] olur; $\sigma^2 = \mathbf{M}Y_1^2 < \infty$ olduqda Y. və A. a. –

$$\{ mn + (1 \pm \varepsilon)\, \sigma (2n \ln \ln n)^{1/2} \}$$

kimi ifadə olunur (təsadüfi kəmiyyətlər cəmi üçün *təkrar loqarifm qanunu*).

Kəsilməz zamanlı $\{\zeta(t)\}$ təsadüfi prosesi üçün yuxarı və aşağı funksiyalar oxşar surətdə təyin olunur: əgər sanki yəqin hər hansı təsadüfi T qiymətindən başlayaraq $\zeta(t) \leq a(t)$, $t > T$ [uyğun olaraq, kifayət qədər böyük olan elə t -lər olarsa ki, bu t -lər üçün $\zeta(t) \leq a(t)$] olarsa, $a(t)$ funksiyası $\zeta(t)$ təsadüfi prosesi üçün yuxarı (aşağı) funksiya adlanır; t sonlu t_0 limitinə yaxınlaşdıqda yuxarı və aşağı funksiyalar analoji təyin olunur, məs.: əgər kifayət qədər kiçik $|t - t_0|$ üçün $\zeta(t) \leq a(t)$ bərabərsizliyi sanki yəqin ödənilərsə, $a(t)$ yuxarı funksiyadır.

Standart Viner prosesi $w(t)$ üçün $t^{1/2} b(t)$ funksiyası

$$\int_0^{\infty} \exp(-b^2(t)/2)\, b(t)\, t^{-1}\, dt$$

inteqralı yığıldığı halda yuxarı, dağıldığı halda aşağı funksiyadır; $b(t)$ – monoton funksiyadır. Beləliklə, $\varepsilon > 0$ olduqda $w(t)$ prosesi üçün $(1+\varepsilon)(2t \ln \ln t)^{1/2}$ yuxarı funksiya, $(2t \ln \ln t)^{1/2}$ $w(t)$ üçün aşağı funksiyadır (Viner prosesi üçün *təkrar loqarifm qanunu*).

Yuxarı (aşağı) funksiyanın digər bir tərifi də istifadə olunur. Əgər

$$\mathbf{P}\{ \limsup_{t \to \infty} \zeta(t)/a(t) < 1 \} = 1$$

$$(\mathbf{P}\{ \limsup_{t \to \infty} \zeta(t)/a(t) > 1 \} = 1)$$

münasibəti ödənilərsə, onda $a(t)$ funksiyası $\zeta(t)$ prosesi üçün yuxarı (aşağı) funksiya adlanır. Əgər

$$\mathbf{P}\{ \limsup_{t \to \infty} \zeta(t)/a(t) = 1 \} = 1$$

münasibəti ödənilərsə, onda $a(t)$ funksiyası $\zeta(t)$ prosesi üçün dəqiq yuxarı funksiya adlanır.

Əd.: [1] Боровков А. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977.

YUL PROSESİ « Юла процесс; Yule process » – kəsilməz zamanlı elə Markov *şaxələnən prosesidir* ki, hər bir hissəcik iki yeni hissəcik yaradaraq məhv olur. Y. p. *xalis doğum prosesinin* xüsusi halıdır (yəni hissəciyin yaranması intensivliyi onun yarandığı ana qədər mövcud olan bütün hissəciklərin sayına mütənasibdir), t anında hissəciyin bölünmə intensivliyi $1/(1-t)$ -yə mütənasib olan intensivlikli $[0, 1]$ parçasında, zaman üzrə qeyri – bircins Y. p. kritik halda redüslənmiş şaxələnən proseslər üçün limit prosesidir (bax, [2]).

Əd.: [1] Yule G. U., «Philos. Trans. Roy. Soc. Lonlon. Ser. B», 1925, v. 213, p. 21–87; [2] Fleischmann K., Siegmund – Schultze R., «Math. Nachr.», 1977, Bd 79, S. 233–41.

YUL – UOKER STATİSTİK QİYMƏTLƏRİ « Юла – Уокера оценки; Yule – Walker estimator » avtoreqressiya parametrlərinin –

$$X(t) + a_1 X(t-1) + \ldots + a_m X(t-m) = Y(t)$$

fərqlər düsturunun $\mathbf{M}Y(t) = 0$, $\mathbf{M}Y(t)Y(s) = \sigma^2 \delta_{st}$ şərtlərilə stasionar həlli olan, m tərtib *avtoreqressiv* $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ *prosesinin* müşahidə olunmuş $x(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T$ qiymətləri üzrə, $a_1, \ldots, a_m$ parametrləri üçün *Yul – Uoker tənliyində* $B(s) = \mathbf{M}X(t+s)X(t)$ korrelyasion funksiyasının naməlum əsl qiymətlərini $B_T^*(s)$ seçimi korrelyasion funksiyasının qiymətlərilə əvəz etdikdən sonra alınmış tənliklərin naməlum $a_1, \ldots, a_m$ parametrlərinə görə həllindən alınmış statistik qiymətlərdir. Adətən, avtoreqressiya parametrlərinin Y. – U. s. q.-ni tapmaq üçün m məçhullu m xətti tənliklər sistemi əmələ gətirən $k = 1, \ldots, m$ sayda tənliklər istifadə olunur; bu tənliklər sisteminin həlləri $a_1^*, \ldots, a_m^*$, geniş şərtlərlə, avtoreqressiya parametrlərinin tutarlı statistik qiymətləri olur (bax, [1] – [4]).

m sayda Yul – Uoker tənliklər sisteminin ədədi həllində Levinson – Derbin rekurrent alqoritmindən istifadə etmək münasibdir (bax, *Levinson alqoritmi*); T -nin böyük qiymətlərində bu sistemin əmsallarını təyin edən, seçimi korrelyasion $B_T^*(s)$ funksiyasının qiymətlərinin EHM-da hesablanılmasını sürətləndirmək olur, bu məqsədlə $B_T^*(s)$ funksiyasının $x(t)$ sırasının periodoqramının Furye çevirməsi olduğuna əsaslanaraq, *sürətli Furye çevirməsi* alqoritmi iki dəfə tətbiq olunmalıdır (bax, *Korrelyasion funksiya*; qiymətləndirmə). $Y(t)$ prosesinin dispersiyası σ^2 da naməlum olduğu halda, onun tutarlı statistik qiyməti $(\sigma^2)^*$ -nu $k = 0$ olduqda Yul – Uoker tənliyi əsasında

$$(\sigma^2)^* = B_T^*(0) + \sum_{s=1}^{m} a_s^* B_T^*(s)$$

tənliyindən tapmaq olar, burada a_s^*, $s = 1, \ldots, m$ – avtoreqressiya parametrləri üçün məhz Y. – U. s. q. olur. Y. – U. s. q.-ni təyin etmək üçün, bəzən $p > 0$, $k = 1, \ldots, m + p$ olan, yenidən təyin edilmiş Yul – Uoker tənliklər sistemindən də istifadə olunur ki, bunlar əsasında $a_1^*, \ldots, a_m^*$ statistik qiymətləri üçün qiymətlər xətalar kvadratları cəminin minimizasiyasının köməyilə alınır (bax, [5], [6]). Bəzi hallarda Y. – U. s. q.-nin yalnız $s > 0$ olan $B(s)$ -in qiymətlərini özündə saxlayan və yalnız olduqca yüksək k tərtib Yul – Uoker tənlikləri daxil olan tənliklər sistemi əsasında tapılması da maraqlıdır. $N(t)$ müşahidə xətaları olarsa və $\mathbf{M}N(t) = 0$, $\mathbf{M}N(t)N(s) = \sigma_N^2 \delta_{ts}$ şərtlərini ödəyərsə, real müşahidə olunan $X_1(t) = X(t) + N(t)$ prosesinin korrelyasion funksiyası $B_{11}(s) = \mathbf{M}X_1(t+s)X_1(t)$, $s \neq 0$ olduqda $B(s)$ ilə üst-üstə düşür; buna görə də, yalnız $B(0)$ qiymətlərini özündə saxlamayan tənliklərin və yalnız bu tənliklərin istifadə olunması avtoreqressiya parametrlərinin Y. – U. s. q.-nə müşahidə xətalarının təsirini yox etməyə imkan verir. Lakin yüksək tərtibli Yul – Uoker tənliklər sisteminin ədədi həllində çox vaxt əlavə çətinliklər yaranır ki, bunlar xüsusi qaydaların cəlb olunmasına gətirir (bax, [6]).

Əgər $Y(t)$ yuxarıda qeyd olunmuş proses, müşahidə olunmuş $x(t)$, $t = 1, \ldots, T$ qiymətləri

$$X(t) + a_1 X(t-1) + ... + a_m X(t-m) =$$
$$= Y(t) + b_1 Y(t-1) + ... + b_n Y(t-n)$$

fərqlər tənliyinin həlli olan qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta prosesinin realizasiyaları olarsa, onda $a_1^*, ..., a_m^*$ avtoreqressiya parametrlərinin tutarlı Y. – U. s. q.-ni təyin edən tənliklər sistemini tapmaq mümkündür, buna görə $k = n+1, ..., n+m$ olan Yul – Uoker tənliklər sistemində (və ya $p > 0$, $k = n+1, ..., n+m+p$ olan belə tənliklərin sistemində) $B(s) = \mathbf{M}X(t+s)X(t)$ korrelyasion funksiyasının əsl qiymətləri $x(t)$ sırasının seçimi korrelyasion funksiyası $B_T^*(s)$ qiymətləri ilə əvəz olunmalıdır (bax, *Yul – Uoker tənlikləri*).

Əd.: [1] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1–2, М., 1974; [4] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [5] Кэдзоу Дж. А., «Тр. Ин-та инж. электротехн. радиоэлектрон.», 1982, т. 70, № 9, с. 256–93; [6] Tzraelevitz D., Lim J. S., в кн.: ASSP Spectrum Estimat, 2-nd Workshop, N. Y., 1983, p. 49–54; [7] Chan Y. T., Langford R. P., «IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Proc.», 1982, v. 30, № 5, p. 689–98.

YUL – UOKER TƏNLİKLƏRİ « Юла – Уокера уравнения; Yule – Walker equation » – $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, ...$ *avtoreqressiv prosesinin* korrelyasiya funksiyası $B(k) = \mathbf{M}\zeta(t+k)\zeta(t)$ -in qiymətlərinin ödədiyi

$$B(k) + a_1 B(k-1) + ... + a_m B(k-m) =$$

$$= \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \quad \text{olduqda}, \\ 0, & k = 1, 2, ... \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

tənlikləridir, burada $\zeta(t)$, $t = 0, \pm 1, ...$ avtoreqressiv prosesi –

$$\zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + ... + a_m \zeta(t-m) = Y(t)$$

[$\mathbf{M}Y(t) = 0$; $\mathbf{M}Y(t)Y(k) = \sigma^2 \delta_{tk}$, yəni $Y(t)$ diskret bəyaz küydür] fərq tənliyinin stasionar həllidir. Y. – U. t. [1]-də $m = 2$ halında Q. Yul, [2]-də ümumi halda isə Q. Uoker tərəfindən alınmışdır ([3] və [6]).

Avtoreqressiv – sürüşən orta qarışıq prosesi $\zeta(t)$

$$\zeta(t) + a_1 \zeta(t-1) + ... + a_m \zeta(t-m) =$$
$$= Y(t) + b_1 Y(t-1) + ... + b_n Y(t-n)$$

fərq tənliyini ödəyirsə, onda $B(k) = \mathbf{M}\zeta(t+k)\zeta(t)$ korrelyasion funksiyasının qiymətləri

$$B(k) + a_1 B(k-1) + ... + a_m B(k-m) = 0,$$
$$k = n+1, n+2, ...$$

tipli Yul–Uoker tənliklərini ödəyir.

Əd.: [1] Yule G. U., «Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A», 1927, v. 226, p. 267–98; [2] Walker G., «Proc. Roy. Soc. Ser. A» 1931, v. 131, p. 518–32; [3] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [4] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов, Прогноз и управление, пер. с анг., в. 1–2, М., 1974; [5] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [6] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

YUNAN – LATIN KUBU « греко – латинский куб; Greek – Latin cube » – bax, *Ortoqonal kublar.*

YUNAN – LATIN KVADRATI « греко – латинский квадрат; Greek – Latin square » – bax, *Ortoqonal kvadratlar.*

YUVA VAHİDİ « гнездовая единица; unit » – bax, *Seçimi statistik araşdırma.*

YÜK ümumiləşmiş ölçü, dəyişənişarəli ölçü **« заряд**, обобщенная мера, знакопеременная мера; **charge / signed measure »** – ədədi qiymətlər alan, hesabi – additiv çoxluq funksiyasıdır. Bir qayda olaraq, Y.-ün təyin olunma oblastı çoxluqların hər hansı σ – halqasıdır və xüsusi hallarda çoxluqlar σ – cəbri də ola bilər (bu halda, adətən, tələb olunur ki, boş çoxluqda hər bir Y. sıfır qiyməti alsın).

Xüsusi maraq kəsb edən fakt Y.-ün təyin olunma oblastının tamamilə $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ genişlənmiş həqiqi oxunun tərkibində olmasıdır, başqa sözlə, hər bir Y.-ün təyin olunma oblastı ya tamamilə $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ və ya $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ çoxluğuna daxildir.

Y.-ə standart misal –

$$\lambda(Y) = \int_Y f \, d\mu, \quad Y \in S$$

inteqralı ilə təyin olunan çoxluq funksiyası λ-dır, burada μ hər hansı S σ – cəbrində verilmiş, hər hansı σ – sonlu (müsbət) ölçü, f μ ölçüsü üzrə inteqrallanan ixtiyari ədədi funksiyadır. Yuxarıdakı bərabərlik bir çox hallarda λ yükünün μ ölçüsü üzrə inteqral ifadəsi adlanır.

Y.-ün inteqral ifadələri *Radon – Nikodim teoremi* ilə sıx bağlıdır; bu teorem yükün və ölçünün verilənləri arasında hansı münasibətlərlə qeyd olunan inteqral ifadəsinin mümkünlüyü müəyyən edilir.

Y.-ə digər bir misal

$$\lambda(Y) = \mu_1(Y) - \mu_2(Y), \quad Y \in S$$

bərabərliyi ilə təyin olunan çoxluq funksiyası λ-dır, burada μ_1 – hər hansı S σ – cəbrində verilmiş müsbət σ – sonlu ölçü, μ_2 isə eyni S σ – cəbrində verilmiş müsbət ölçüdür. Yüklər haqqında *Han teoremi* kimi məlum olan mühüm müddəada isbat olunur ki, hər bir Y. təyin olunma oblastı ilkin Y.-ün təyin olunma oblastı ilə eyni olan iki müsbət ölçünün fərqi şəklində ifadə oluna bilir, belə ki, bu ölçülərdən biri hökmən sonludur.

Y. anlayışı ehtimal paylanmalarının yığılmasında və xüsusilə, σ – topoloji fəzalarda paylanmaların yığılmasının öyrənilməsində böyük rola malikdir (təsadüfi proseslərin yığılması haqqında mühüm məsələnin araşdırılmasında istifadə olunur; bax, [3], [4]).

Onun bu rolu onunla izah olunur ki, ümumiləşmiş Helli teoreminə əsasən yükün müntəzəm məhdud variasiyalı ixtiyari altçoxluğu (xüsusi halda ixtiyari paylanmalar çoxluğu) zəif yığılmanın doğurduğu topologiyalı bütün yüklər fəzasında nisbi kompaktlıq xassəsinə malikdir (bax, [3] – [5]).

Əd.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 6 изд., М., 1989; [3] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1940, т. 8, с. 307–48, 1941, т. 9, с. 563–628; 1943, т. 13, с. 169–238; [4] Боровков А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68; [5] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

YÜKLƏNMƏ FUNKSİYASI « загрузки функция; load function » – $(0, t)$ intervalında *xidmət sisteminə* daxil olan tələblərin xidmət müddətlərinin cəminə bərabər *təsadüfi* $K(t)$ *funksiyasıdır.* Y. f.-nın sıçrayış anları tələblərin daxil olduğu anlarla üst-üstə düşür, sıçrayışların boyları (uzunluğu) tələblərin xidmət olunma müddətlərinə bərabərdir. *Virtual gözləmə müddəti* $w(t)$ Y. f. ilə $w'(t) = K'(t) - \operatorname{sign} w(t)$ stoxastik differensial tənliyi ilə əlaqəlidir (bu tənlikdə törəmələr ümumiləşmiş mənada anlaşılır). Ən çox yayılmış hal $K(t)$ ümumiləşmiş Puasson prosesi olduğu haldır.

ZAMAN XARAKTERİSTİKASI, FİLTRİN « временная характеристика фильтра; time response of a filter » – bax, *Xətti filtr.*

ZAMAN PƏNCƏRƏSİ « временное окно; time window » – bax, *Spektral sıxlıq*; qeyri–parametrik statistik qiymət.

ZAMAN – SELEKTİV FEYDİNQİ / DONMASI « время – селективное замирание; time – selective fading » – bax, *Feydinqlər / donmalar* kanalda.

ZAMAN SIRASI « временной ряд; time series » – 1) $\zeta(t)$, $t=0, \pm1, \pm2, \ldots$ *diskret təsadüfi prosesi*, təsadüfi ardıcıllığıdır.

2) Z. s. diskret $\zeta(t)$ təsadüfi prosesinin $t=t_1, t_2, \ldots, t_N$ qiymətlərində müşahidə olunan sonlu realizasiyasıdır (bəzən t_i və t_{i+1} nöqtələri arasındakı məsafə bütün i-lər üçün eyni götürülür). Z. s. anlayışı yalnız zaman etibarı ilə təkamüldə olan proseslərlə bağlı istifadə olunmur (məs., t fəza koordinatı ola bilər).

Spektral analiz(i) zaman sıralarının məqaləsinə bax.

ZAMAN ÜZRƏ DİSKRETİZASİYA / KVANTLAMA « временная дискретизация / квантование во времени; time quantization » – analiz (ölçmə) obyekti olan kəsilməz $x(t)$ prosesinin t_i diskret müşahidə anlarındakı $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_i), \ldots$ hesablanan qiymətlər ardıcıllığı ilə əvəzlənməsidir. Tərs əməliyyat hesablanan qiymətlər əsasında müəyyən dəqiqliklə ilkin $x(t)$ funksiyasının bərpasıdır və bu əməliyyat bərpaolunma adlanır. Əgər hesablamalar bərabər $T = t_{i+1} - t_i = \text{const}$ intervallarından bir götürülürsə, onda Z. ü. d. müntəzəm, əks halda qeyri–müntəzəm adlanır (bax, [1]).

Z. ü. d.-nin əsas problemi hesablamalar tezliyinin seçilməsidir ki, bu da bir qayda olaraq diskretləndiriləcək funksiyanın xüsusiyyətləri haqqında mülahizələrin dəqiqliyi və aprior təsəvvürlərə əsaslanır. Məhdud spektrli proseslər üçün Kotelnikov – Şennon teoremi fundamental əhəmiyyətə malikdir; bu teoremə görə $x(t)$ funksiyası $T = 1/2 f_m$ addımlı diskret hesablamalar üzrə dəqiqliklə bərpa olunur, burada f_m, – $x(t)$ funksiyasının spektrinin maksimal tezliyidir.

Z. ü. d. addımının ehtimal modelləri əsasında seçilməsi geniş yayılmışdır; bu halda fərz olunur ki, $x(t)$ hər hansı $\zeta(t)$ *təsadüfi prosesinin* realizasiyasıdır (əksər hallarda stasionar təsadüfi prosesin) və bu prosesin statistik xarakteristikaları məlumdur (bax, məs., [2], [3]). Bu halda Z. ü. d.-nın addımı T intervalı üzrə ortalanmış bərpa xətasının kvadratik ortasını və ya verilmiş maksimal qiymətini aşmaması şərtindən asılı seçilə bilinər. Xüsusi halda, iki qonşu hesablanma üzrə xətti interpolyasiyada, yəni $x(t)$

$$\tilde{x}(t_i + \Delta t) = (1 - \Delta t/T)\ x(t_i) + \Delta t/T\ x(t_i + T),\ 0 \le \Delta t \le T$$

təqribi düsturu ilə bərpa olunduqda, stasionar $\zeta(t)$ prosesi üçün maksimal kvadratik orta xətanın verilmiş qiymətini aşma şərti

$$3/2\ -\ 2r_{xx}(T/2)\ +\ r_{xx}(T)/2 \le \varepsilon^2$$

münasibətilə ifadə olunur, burada $r_{xx}(\cdot)$, – $\zeta(t)$-nin monoton normalanmış korrelyasion funksiyası, ε^2 isə diskretizasiya intervalının ortasında bərpa xətasının məqbul dispersiyasının $\zeta(t)$ funksiyasının dispersiyasına olan nisbətidir.

Əd.: [1] Кавалеров Г. И., Мандельштам С. М., Введение в информационную теорию измерений, М., 1974; [2] Ицкович Э. Л., Статистические методы при автоматизации производства, М. – Л., 1964; [3] Немировский А. С., Волконский В. А., «Измерительная техника», 1963, № 4, с. 1–6.

ZAMAN ÜZRƏ KVANTLAMA / DİSKRETİZASİYA « квантование во времени / временная дискретизация; time quantization » – bax, *Zaman üzrə diskretizasiya / kvantlama.*

ZAMAN ÜZRƏ ORTA QİYMƏT « временное среднее значение; time-average value » – bax, *Erqodik teoremlər*.

ZƏİF DOĞRUYAOXŞARLIQ PRİNSİPİ « слабый принцип правдоподобия; weak likelihood principle » – bax, *Ən böyük doğruyaoxşarlıq prinsipi*.

ZƏİF HARMONİKLƏNƏNLİK(yi) təsadüfi prosesin **« слабая гармонизуемость** случайного процесса; **weak harmonizability** of a random process **»** – bax, *Harmoniklənən təsadüfi proses*.

ZƏİF İZOMORF DİNAMİK SİSTEMLƏR « слабо изоморфные динамические системы; weakly isomorphic dynamical systems » – bax, *İzomorfizmi*, *dinamik sistemlərin* metrik.

ZƏİF KOMPAKT ŞƏBƏKƏ(si) ehtimal ölçülərinin **« слабо компактная сеть** вероятностных мер; **weak compact net** of probability measure **»** – bax, *Kompaktlıq*(ğı) ölçülər ailəsinin.

ZƏİF NİSBİ KOMPAKTLIQ(ğı) ehtimal ölçüləri ailəsinin **« слабая относительная компактность** семейства вероятностных мер; **weak relative compactness** of a family of random measures **»** – bütün ehtimal ölçüləri fəzasının *zəif topologiyasında ehtimal ölçüləri* ailəsinin nisbi kompaktlığıdır.

T metriklənən separabel fəza olduğu halda T-də ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathscr{M}$-in Z. n. k. zəif nisbi sekvensial kompaktlıqla eynigüclüdür, yəni $\mathscr{M}$ zəif nisbi kompakt ailə, yalnız və yalnız, o halda olur ki, $\mathscr{M}$-in elementlərindən ibarət $\{\mu_n\}$ ardıcıllığından zəif yığılan $\{\mu_{k_n}\}$ ardıcıllığını ayırmaq mümkün olsun.

Z. n. k. şərtləri *Proxorov kriterisində* verilir: tam separabel metrik T fəzasında ehtimal ölçülərinin ailəsi $\mathscr{M}$, yalnız və yalnız, o halda zəif nisbi kompakt ailədir ki, o, sıx olsun, yəni hər bir ε üçün elə $K \subset T$ kompakt altçoxluğu tapılar ki, hər bir $\mu \in \mathscr{M}$ üçün $\mu(K) \geq 1$ şərti ödənilsin.

Banax fəzası halında Z. n. k.-ın öyrənilməsində ehtimal ölçülərinin *müstəvi – sıxlaşmış ailəsi* anlayışından istifadə olunur. Bir çox konkret fəzalar üçün müxtəlif ehtimal fəzalarının Z. n. k. şərtləri məlumdur.

Əd.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238; [2] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

ZƏİF ÖLÇÜLƏN İNİKAS « слабо измеримое отображение; weakly measurable mapping », skalyar ölçülən inikas – qiymətləri Banax və ya ümumi lokal qabarıq B fəzasından olan inikas üçün ölçülənlik anlayışıdır. $(\Omega, \mathscr{A})$ – ölçülən fəza olsun. Əgər B-də hər bir kəsilməz xətti x^* funksionalı üçün $x^*(X(\cdot))$ ədədi funksiyası ölçülən olarsa, $X : \Omega \to B$ inikası zəif (skalyar) ölçülən inikas adlanır. Zəif ölçülənlik B-də silindrik σ – cəbr və Ω-da $\mathscr{A}$ σ – cəbrinə nəzərən ölçülənliklə eynigüclüdür. Əgər B metriklənən və separabel fəza olarsa, onda X-in zəif ölçülənliyi hər bir $\beta \subset B$ Borel çoxluğu üçün $X^{-1}(\beta) \in \mathscr{A}$ münasibətinin ödənilməsi ilə eynigüclüdür. Əgər $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ ehtimal fəzası olarsa, X-in Z. ö. i. qiymətləri B-dən olan təsadüfi inikas adlanır.

Əd.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

ZƏİF PAYLANMA « слабое распределение; weak distribution » – bax, *Silindrik ölçü*.

***ZƏİF PİLLƏLİ ARTAN TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR « слабые лестничные возрастающие случайные величины; increasing weak ladder random variables »** – bax, *Daxil edilmiş bərpa prosesi.*

ZƏİF TƏSADÜFİ XƏTTİ OPERATOR « слабый случайный линейный оператор; weak random linear operator » – bax, *Təsadüfi xətti operator*.

ZƏİF TOPOLOGİYA « слабая топология; weak topology », dar topologiya, ölçülər fəzasında – metrik fəzada və ya daha ümumi tamamilə requlyar Hausdorf topoloji T fəzasında bütün Radon *ehtimal ölçülərinin* fəzası $\mathscr{M}(T)$-də ən zəif topologiyadır ki, bu topologiyaya nəzərən bütün $\mu \to \int_T f\, d\mu$ funksionalları kəsilməzdirlər, burada f, – T-də bütün məhdud kəsilməz həqiqi funksionallar çoxluğunda dəyişir. Z. t.-da yığılma ehtimal ölçülərinin *zəif yığılması* ilə eynigüclüdür. Əgər T metrik fəza olarsa, onda $\mathscr{M}(T)$-də Z. t. metriklənəndir. $\mathscr{M}(T)$-nin altçoxluqlarının nisbi kompaktlığı şərti ehtimal ölçüləri ailəsinin zəif nisbi kompaktlığının *Proxorov kriterisi* ilə verilir.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1977.

ZƏİF YIĞILMA « слабая сходимость; weak convergence », əsasən yığılma, – ehtimal nəzəriyyəsində baxılan və aşağıdakı kimi təyin olunan, əsas *yığılma* növüdür. $\{\mathbf{P}_n\}$ – metrik S fəzasının Borel çoxluqlarında paylanmaların (ehtimal paylanmalarının) ardıcıllığı olsun. Əgər S fəzasında ixtiyari həqiqi məhdud kəsilməz f funksiyası üçün

$$\lim_n \int_S f\, d\mathbf{P}_n = \int_S f\, d\mathbf{P} \qquad (*)$$

münasibəti ödənilərsə, $\{\mathbf{P}_n\}$ ardıcıllığı $\mathbf{P}$ paylanmasına zəif yığılan ardıcıllıq adlanır. Z. y., adətən, $\xrightarrow{w}$ simvolu ilə işarə olunur. Aşağıdakı şərtlər Z. y. ilə eynigüclüdür:

1) (*) münasibəti ixtiyari məhdud müntəzəm kəsilməz həqiqi f funksiyası üçün ödənilir;

2) (*) münasibəti ixtiyari məhdud $\mathbf{P}$ – sanki hər yerdə kəsilməz həqiqi f funksiyası üçün ödənilir;

3) $\overline{\lim_n}\, \mathbf{P}_n(F) \leq \mathbf{P}(F)$ münasibəti ixtiyari $F \subset S$ qapalı çoxluğu üçün ödənilir;

4) $\underline{\lim_n}\, \mathbf{P}_n(G) \geq \mathbf{P}(G)$ münasibəti ixtiyari $G \subset S$ açıq çoxluğu üçün ödənilir;

5) $\lim_n \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$ münasibəti $\mathbf{P}(\partial A) = 0$ şərtini ödəyən ixtiyari $A \subset S$ Borel çoxluğu üçün ödənilir, burada ∂A, – A çoxluğunun sərhədidir;

6) $\lim_n \pi(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}) = 0$ münasibəti doğrudur, burada π – *Levi – Proxorov* metrikasıdır.

Fərz olunur ki, U S-in altçoxluqlarının kəsişmə əməlinə nəzərən elə qapalı sinfidir ki, S-in ixtiyari açıq çoxluğu U-nun çoxluqlarının sonlu və ya hesabi sayda birləşməsidir. Onda bütün $A \in U$ üçün $\lim_n \mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(A)$ münasibəti ödənilərsə, $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ – zəif yığılması doğrudur. Məs., əgər $S = \mathbb{R}^k$ və F_n, F, – $\{\mathbf{P}_n\}$ və $\mathbf{P}$ paylanmalarının uyğun paylanma funksiyaları olarsa, onda $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$, yalnız və yalnız, o halda ödənilir ki, $\mathbf{P}_n(A) \to \mathbf{P}(A)$ bütün qabarıq Borel A çoxluqları üçün müntəzəm yığılma olsun.

$\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}$ – metrik S fəzasında paylanmalar, $\mathbf{P}_n \xrightarrow{w} \mathbf{P}$ və h, – S fəzasının metrik S' fəzasına $\mathbf{P}$ – sanki hər yerdə kəsilməz ölçülən inikas olsun; onda $\mathbf{P}_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mathbf{P} h^{-1}$ doğrudur, burada S-də verilmiş ixtiyari $\mathbf{Q}$ paylanması üçün $\mathbf{Q}h^{-1}$ paylanması onun S'-ə h – obrazıdır: ixtiyari $A \in S'$ Borel çoxluğu üçün

$$\mathbf{Q}h^{-1}(A) = \mathbf{Q}(h^{-1}(A)).$$

S-də paylanmaların ailəsi $\mathscr{P}$-nin elementlərinin ixtiyari ardıcıllığının zəif yığılan altardıcıllığı olarsa, $\mathscr{P}$ ailəsi zəif nisbi

kompakt ailə (rus. слабое относительное компактное семейство) adlanır. Zəif nisbi kompaktlıq şərti Proxorov teoremi ilə verilir. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $K \subset S$ kompaktı varsa ki, ixtiyari $\mathbf{P} \in \mathscr{P}$ üçün $\mathbf{P}(K) > 1 - \varepsilon$ şərtini ödəsin, onda $\mathscr{P}$ *sıx ailə* adlanır. Proxorov teoremi: əgər $\mathscr{P}$ sıx ailədirsə, onda $\mathscr{P}$ nisbi kompakt ailədir, əgər S separabel və sıx ailədirsə, onda $\mathscr{P}$ -nin zəif nisbi kompaktlığı onun sıx ailə olmasını doğurur. $S = \mathbb{R}^k$ olduqda paylanmalar ailəsi $\mathscr{P}$, yalnız və yalnız, o halda zəif nisbi kompakt ailədir ki, $\mathscr{P}$ -yə uyğun xarakteristik funksiyalar ailəsi sıfırda eyni dərəcədə olsun.

Əd.: [1] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

Z. y. anlayışına bəzən yuxarıda verilən mənadan fərqli digər məna verilir. Əgər $H_0, H_1, \ldots, -$ $\mathbb{R}^1$-də məhdud və azalmayan funksiyalar və $H_n(-\infty) = 0$ olarsa, zəif yığılma H_n funksiyalarının $n \to \infty$ olduqda H_0 funksiyasının hər bir kəsilməzlik nöqtəsində H_0 -a yığılmasına deyilir. Bu yığılmanın əsas xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, paylanma funksiyaları ardıcıllığının limiti < 1 tam dəyişməsi (xüsusi halda sabit) olan azalmayan funksiyaların Furye – Stiltyes çevirmələri h_n, h_0 terminlərilə ifadə olunan aşağıdakı şərtdir: hər bir $u > 0$ üçün

$$\int_0^u h_n(t)\,dt \;\to\; \int_0^u h_0(t)\,dt, \quad n \to \infty$$

(ətraflı bax, [2] və *Yığılma* tamamilə).

ZƏİF YIĞILMA(sı) ehtimal ölçülərinin **« слабая сходимость** вероятностных мер; **weak convergence** of probability measures **»** – ehtimal nəzəriyyəsində *ehtimal ölçülərinin* yığılma növlərindən ən mühüm yığılma növüdür. Metrik T fəzasında μ_n Borel ehtimal ölçülərinin μ_n, $n \in \mathbb{N}$ ardıcıllığı və T -də hər bir kəsilməz və məhdud həqiqi f funksionalı üçün

$$\lim_n \int_T f\,d\mu_n = \int_T f\,d\mu$$

münasibəti ödənilərsə, μ_n, $n \in \mathbb{N}$ ardıcıllığı T -də verilən μ Borel ehtimal ölçüsünə zəif yığılır, deyilir. Aşağıdakı şərtlərdən hər biri (μ_n) -in μ -yə Z. y. ilə eynigüclüdür.

1) hər bir qapalı $F \subset T$ üçün $\limsup_n \mu_n(F) \le \mu(F)$;

2) hər bir açıq $U \subset T$ üçün $\liminf_n \mu_n(U) \ge \mu(U)$;

3) sərhədinin μ – ölçüsü sıfra bərabər hər bir Borel çoxluğu $B \subset T$ üçün $\lim_n \mu_n(B) = \mu(B)$.

Separabel T fəzası üçün Z. y. *Levi – Proxorov metrikası* ilə metriklənir:

$$\pi(\mu, \nu) = \inf \{\varepsilon > 0 : \mu(A) \le \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon$$
bərabərsizliyi hər bir Borel çoxluğu $A \subset T$ üçün doğrudur$\}$,

burada A^ε, – A çoxluğunun ε – ətrafıdır.

Əgər $T = \mathbb{R}^n$, G_n və G uyğun olaraq, μ_n və μ ölçülərinin paylanma funksiyaları olarsa, onda (μ_n) -in μ -yə Z. y. $G_n(x)$ -in $G(x)$ -ə G -nin kəsilməz olduğu hər bir $x \in \mathbb{R}^n$ nöqtəsində yığılması ilə eynigüclüdür.

Tamamilə requlyar Hausdorf fəzasında Radon ehtimal ölçülərinin Z. y. da analoji təyin olunur. «Z. y.» termini əvəzinə bəzən, «dar yığılma», «tam yığılma», «Bernulli mənada yığılma» terminləri də istifadə olunur. Ehtimal ölçülərinin Z. y.-sı ölçülər fəzasının *zəif topologiyada* yığılmasıdır.

Əd.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., 1977.

ZƏİF YIĞILMA(sı) ölçülərin **« слабая сходимость** мер; **weak convergence** of measures **»** – bax, *Fəzası, ölçülərin.*

ZƏİF YIĞILMA(sı) topoloji fəzada ölçülər şəbəkəsinin **« слабая сходимость** сети мер в топологическом пространстве; **weak convergence** of a net of measures in a topological space **»** – *ölçülər* şəbəkəsinin ölçülər fəzasında zəif topologiyaya uyğun yığılmasıdır. $(\mathbf{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ – ölçülər şəbəkəsi, $\mathbf{P}$, – $(\mathscr{X}, \mathfrak{G})$ fəzasının Borel σ – cəbrində verilmiş ölçülər fəzasından olan ölçüdür. Əgər $\mathscr{X}$ -də verilən ixtiyari kəsilməz məhdud f funksiyası üçün

$$\lim_\theta \int_{\mathscr{X}} f(x)\,d\mathbf{P}_\theta(x) = \int_{\mathscr{X}} f(x)\,d\mathbf{P}(x)$$

bərabərliyi ödənilərsə, $(\mathbf{P}_\theta)$ şəbəkəsi $\mathbf{P}$ ölçüsünə zəif yığılır, deyilir. Bu bərabərlik onu ifadə edir ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\theta_\varepsilon \in \Theta$ vardır ki, bütün $\theta \ge \theta_\varepsilon$ üçün

$$\left| \int_{\mathscr{X}} f(x)\,d\,\mathbf{P}_\theta(x) \;-\; \int_{\mathscr{X}} f(x)\,d\,\mathbf{P}(x) \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. *Aleksandrov teoremi* ölçülər şəbəkəsinin zəif yığılma kriterisini verir. Yuxarıda qeyd olunanlar topoloji və həmçinin σ – topoloji fəzalar üçün də doğrudur.

Əd.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Боровков А. А., «Успехи матем. наук.», 1976, т. 31, в. 2, с. 3–68.

ZƏRİF / SEYRƏKLƏNMİŞ ÇOXLUQ « тонкое множество; thin set » – requlyar nöqtələri olmayan sağ Markov prosesinin vəziyyətlərinin hər hansı sanki Borel çoxluğundan olan çoxluqdur (bax, *Potensial nəzəriyyəsi* Markov prosesləri üçün). Beləliklə, əgər $\zeta = (\zeta_t, \xi, \mathscr{A}_t, \mathbf{P}_x)$ vəziyyətləri çoxluğu $\mathscr{E}$ olan, bircins, ümumiyyətlə, qırılan sağ Markov prosesi olarsa, onda $\Gamma \subset \mathscr{E}$ çoxluğu aşağıdakı halda Z. ç.-dur: elə sanki Borel $A \supset \Gamma$ çoxluğu olarsa ki, bu çoxluq üçün bütün $x \in \mathscr{E}$ vəziyyətlərində $\tau_A > 0$ şərti $\mathbf{P}_x$ – sanki yəqin ödənilmiş olsun, onda A Z. ç.-dur, burada τ_A, – $t = 0$ anından sonra A -ya ilk çatım anıdır. Z. ç. polyar çoxluğun xüsusi halıdır.

$\Gamma \subset \mathscr{E}$ çoxluğunun hər hansı $x \in \mathscr{E}$ nöqtəsi qeyri – requlyar nöqtə olarsa, Γ çoxluğu bu nöqtədə zərif çoxluq adlanır. Lakin $\mathscr{E}$-dən olan bütün nöqtələrdə Z. ç. ζ prosesi üçün Z. ç. olmaya da bilər.

Əd.: [1] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N. Y. – L., 1968.

ZƏRURİ KAFİ STATİSTİKA « необходимая достаточная статистика; necessary sufficient statistic » – *minimal kafi statistikadır.*

ZƏRURİ STATİSTİKA « необходимая статистика; necessary statistics » – bax, *Minimal kafi statistika.*

ZƏRURİ TOPOLOGİYA « необходимая топология; necessary topology » – T lokal qabarıq fəzasına qoşma T^* fəzasında topologiyadır və bu topologiyada T-də ixtiyari sıx silindrik μ ehtimalının xarakteristik funksionalı $\hat{\mu}$ kəsilməzdir.

ZİGEL PROBLEMİ « Зигеля задача; Siegel problem »: – $\mathbb{R}^n$ fəzasının çevirmələrinin verilmiş G qrupu üçün elə $\omega \subset \mathbb{R}^n$ nöqtələr sistemini tapmaq lazımdır ki, bunlar üçün $\{g\omega : g \in G\}$ obrazlar çoxluğunda topalanmış G – invariant *nöqtəvi proses* mövcud olsun. K. Zigel isbat etmişdir ki, $\mathbb{R}^n$-in Lebeq ölçüsünü saxlayan affin çevirmələrinin qrupu üçün uyğun məsələnin həlli tamqiymətli koordinatlarlı nöqtələr şəbəkəsidir (bax, [1]). $\mathbb{R}^n$-in paralel köçürtmələr qrupu və Evklid qrupu üçün Z. p.-nin həlləri k – şəbəkələr (bir-birindən yerinidəyişmə ilə alınan k – şəbəkələrin birləşmələri) və yalnız bu şəbəkələrdir. Affin qrupun bəzi altqrupları üçün Z. p.-nin həlləri tapılmışdır və bu həllər, artıq, k – şəbəkələr olmur.

Əd.: [1] Siegel S., «Ann. Math.», 1945, v. 46, № 2, p. 340–47.

ZİGEL – TYUKİ KRİTERİSİ « Сиджела – Тьюки критерий; Siegel – Tukey test » – iki skalyar seçimin miqyas fərqlərinin olması alternativinə qarşı miqyas bircinsliyinin yoxlanılması üçün istifadə olunan *ranq kriterisidir.* Asılı olmayan skalyar seçimlərlə ifadə olunan iki ümumi çoxluğun (rus. генеральная совокупность) bircinsliyinə alternativ hipotez medianlar eyni olduqda səpələnmələrdəki fərqlənmədir. Ranqların təyinsistemi: bütün müşahidələr bir çoxluq kimi birləşdirilir; 1 ranqı bu çoxluqdakı ədədlərdən ən kiçiyinə aid edilir, 2 ranqı qalan ədədlərdən ən böyüyünə aid olunur, 3 ranqı yenidən qalanlardan ən böyüyünə; 4 ranqı qalanlardan ən kiçiyinə aid olunur və s. Əgər bütün müşahidələr artma qaydası ilə düzülərsə, onda bunların ranqlar ardıcıllığı: 1, 4, 5, …, 3, 2 olacaqdır. Z. – T. k. seçimlərdən birinin ranqları cəmidir. İlkin hipotezdə bu cəm Uilkokson ranqlar cəmi kriterisi kimi sərbəst paylanır. Buna görə də, Z. – T. k. üçün Uilkokson kriterisi üçün tərtib olunmuş cədvəllərdən istifadə olunur (bax, [1], [2], [3]).

Medianları ola bilsin ki, eyni olmayan iki ümumi çoxluğun seçimlər üzrə miqyaslarının bərabərliyinin yoxlanılması üçün L. Mizes ranq kriterisinə oxşar, paylanmadan asılı olmayan (ilkin hipotezdə) kriteri təklif etmişdir (bax, [2], [4]). Bu kriteridə süni randomizasiyadan – ilkin seçimlərin altqruplara təsadüfi bölgüsündən istifadə olunur.

Əd.: [1] Siegel S., Tukey J. W., «J. Amer. Statist. Assos.», 1960, v. 55, p. 429–45; [2] Холлендер М., Вулф Д., Непараметрические методы статистики, пер. с англ., М., 1983; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [4] Moses L. E., «Ann. Math. Statist.», 1963, v. 34, p. 973–83.

ZİRVƏ (si) paylanmanın **« вершина распределения; mode of a distribution »** – bax, *Moda.*

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA MÜNTƏXƏBATI

Müntəxəbat fransız alimi P. Laplasın «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» adlı görkəmli əsərinin tərcüməsi ilə başlayır. Daha sonra giriş hissəsi, son və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə rus dilində ilk dərslik – V. Ya. Bunyakovskinin «Основания математической теории вероятностей» (СПб., 1846) adlı əsərindən tarixi oçerk verilir. Müntəxəbatın xülasə hissəsi «Большая Советская энциклопедия»-nın 1-ci və 2-ci nəşrlərində (M., 1937-58) verilmiş ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə məqalələrdən ibarətdir. P. Laplas (P. Laplace, 1749-1827) yaşadığı illərdə «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» beş dəfə (fevral və noyabr, 1814, 1816, 1819, 185) dərc olunmuşdu. Bu əsərin ikinci və üçüncü nəşrləri onun «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi» («Théorie analytique des probabilités», Paris, 1812, – birinci nəşr) əsərinin giriş hissəsi kimi verilmişdir. Belə hesab olunur ki, «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» hələ 1725-də, «Écoles normales»-da müəllifin oxuduğu mühazirələrin ideyalarının necə inkişaf etməsini özündə ehtiva edir.

Müntəxəbatın birinci hissəsinin titul səhifəsi aşağıda verilir.

ЛАПЛАС

ОПЫТ ФИЛОСОФИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

(Essai philosophique sur les probabilités)

ПОПУЛЯРНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЯ ПРИЛОЖЕНИЙ

Перевод **А. І. В.**

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

А. К. Власова

ПР-ДОЦЕНТА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Москва – 1908.

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» və onun tərcümələri 1840-dan başlayaraq, 19-cu və 20-ci əsrlərdə dəfələrlə nəşr olunmuşdur. Onun sonuncu nəşrlərindən biri – 1825-ci il 5-ci fransız nəşrinin ingilis tərcüməsi (Laplace R. S., Philosophical essay on probabilities, N. Y. – B., 1994), əvvəlki nəşrlərin izahları nəzərə alınmaqla geniş kommentarilərlə hazırlanmışdır.

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» rus dilinə tərcümədə 1908-də dərc olunmuşdur. Azərbaycan dilində bu tərcümə aşağıda verilir.

Tərcüməyə ön söz

Ehtimal nəzəriyyəsi – riyazi analizin ən maraqlı, hətta qeyri-mütəxəssislərin də nəzərini özünə çoxdan cəlb etmiş qollarından biridir. Riyazi statistikanın, biometrikanın, müxtəlif növ sığortaların inkişaf edərək və geniş xalq kütlələrinə yayılaraq, ictimai və iqtisadi siyasətin qaçılmaz faktoruna çevrilməsi, bu elmlərin əsası və tətbiqlərinin təməli olan ehtimal nəzəriyyəsinin bunlardakı rolunu sübut edir.

Son zamanlar bu nəzəriyyə yalnız fizika–riyaziyyat fakültələrinin riyaziyyat bölmələrində, əvvəllər də tədris olunmuş bir predmet kimi hökmən, hətta belə bölmələr yaradılmış hüquq fakültələrinin və digər ali məktəblərin bölmələrində də, öyrənilməsi vacib sayılan bir predmet kimi daxil olunur.

Beləliklə, təbii olaraq, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə belə əsərlərin yaradılması tələbatı yaranmışdı ki, bunlar, daha geniş oxucu dairəsi üçün nəzərdə tutulmuş və bu predmetin hərtərəfli işıqlandırılmasında bu nəzəriyyənin əsaslı surətdə öyrənilməsinə giriş rolunu oynamış olsun.

Laplasın oxucunun diqqətinə burada təqdim olunan «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» («Essai philosophique sur les probabilités») əsərinin tərcüməsini bu cəhətdən ən məqsədəuyğun hesab etmək olar. Fransız həndəsəçisinin bu gözəl əsərində bu nəzəriyyənin, demək olar ki, bütün əsas məsələlərinin toplusu verilir, təsadüfi təzahürlər nəzəriyyəsinin elm və həyatın ən dərin və incə məsələlərinə tətbiq olunduğu məsələlərinə toxunulur. Ehtimal nəzəriyyəsi heç bir kəsə Laplasa olduğu qədər borclu deyildir. Onun «Théorie analytique des probabilités» əsəri bu predmet üzrə bir növ *prinsipia* təşkil edir. Bu əsas əsərə giriş kimi «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» əlavə olunmuşdur, bu başlıq ilə o, əvvəl ayrıca monoqrafiya kimi dərc olunmuşdu. Bu klassik əsərin yüz illik yaşı onun əhəmiyyətini azaltmamışdır. Cevonsun ifadəsinə görə ««Essai philosophique sur les probabilités» – dərc olunmuş ən dərin və incə traktatlardan biridir. Məntiqi metodu öyrənən hər bir kəs bu traktatla yaxşı tanış olmalıdır, çünki zaman ötdükcə o, (traktat, H. M.) az və ya heç bir şey itirməmişdir». Cevons özünün «Elmin əsasları, məntiq və elmi metod haqqında traktat» əsərlərində belə yazmışdı. Belə də əlavə etmək olardı ki, Laplasın bu kitabı ilə tanışlıq, ümumtəhsil məqsədlərində öz məlumatlarının artırılmasını genişləndirmək istəyən şəxsləri, şübhəsiz ki, qane edəcəkdir, özünü elmi işlərə və ya statistikaya, biometrikaya və sığortanın praktiki məsələlərinə elmi nəticələrin tətbiqinə həsr etmiş insanlarda riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin əsaslı surətdə öyrənilməsinə maraq və enerji yaradacaqdır.

Tərcümə, Laplasın əsərlərinin tam küllüyyatına daxil olmuş «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi»-nin («Théorie analytique des probabilités») üçüncü nəşrinə əlavə olunmuş girişdən olunmuşdur. Dahi həndəsəçinin məşhur «Baxış» («Опыт», «Essai») traktatı artıq çoxdan digər dillərə tərcümə olunm1uşdur və mən fikirləşirəm ki, son zamanlar ehtimal

nəzəriyyəsinə bizdə maraq canlandığından, rus tərcüməsinin (az. tərcüməsinin, H. M.) olması artıq bir şey olmayacaqdır.

A. Vlasov.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ FƏLSƏFƏSİNƏ BAXIŞ

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» – mənim, riyaziyyat professoru kimi, Laqranjla birlikdə milli konventin dekreti ilə dövət olunduğum «école normales»-da, 1795-də ehtimal nəzəriyyəsi üzrə oxuduğum mühazirələr kursunun genişləndirilmiş formada «Théorie analitique des probabilités» əsərinə verilmiş giriş sözüdür. Burada mən, analizdən istifadə etmədən, ehtimal nəzəriyyəsinin bu kitabda şərh olunmuş prinsiplərini və ümumi nəticələrini, əksəriyyəti məhz ehtimal nəzəriyyəsinin məsələləri olan həyatın ən mühüm suallarına tətbiq edərək şərh etmək istəyirəm. Dəqiq demək istəsək, hətta demək olar ki, bizim bütün biliklərimiz ehtimalidir; bizim yəqinliklə dərk edə biləcəyimiz predmetlərin çox da geniş olmayan dairəsində, hətta riyaziyyatın özündə belə, həqiqətə qovuşmanın əsas vasitələri – induksiya və analogiya – ehtimallara əsaslanır; beləliklə, bəşəri biliklərin bütün sistemi bu əsərdə şərh olunmuş nəzəriyyə ilə bağlıdır. Şübhəsiz ki, burada idrakın, ədalətin və humanizmin əbədi prinsiplərinə bunları daima müşayiət edən xoşbəxt bir mümkünlüklər (rus. статочности) kimi baxılarsa, maraqla görmək olur ki, bu prinsiplərə riayət etmək olduqca faydalıdır, lakin onları nəzərə almamaq çox ziyanlıdır; belə ki, bunların mümkünlüyü lotereyada əlverişli mümkünlüklər kimi təsadüfün dəyişmələri arasında üstünlüyə malikdir. Mən arzu edərdim ki, bu giriş sözündə rast gəlinən fikirlər filosofların diqqətini cəlb etsin və onların diqqətini olduqca dəyərli predmetin öyrənilməsinə yönəldə bilsin.

Ehtimal haqqında

Bütün hadisə və ya proseslər, hətta özünün əhəmiyyətsizliyi ilə guya ki, təbiətin ali qanunlarından asılı olmayanları belə, o dərəcədə də məhz bu qanunların zəruri nəticələridir, məs., günəşin dövr etməsi kimi. Bu nəticələri bütün kainat sistemi ilə əlaqələndirən bağları bilmədən, bunların birinin digərinin ardınca məlum bir düzgünlüklə və ya görünməz bir qayda ilə baş verib-vermədiklərindən asılı olaraq, onların son səbəblər və ya təsadüf nəticəsində baş verdikləri fərz olunur, lakin xəyalın məhsulu olan bu səbəblər, bizim bilik hüdudlarımız genişləndikcə, nəzərə alınmayaraq, sağlam fəlsəfə qarşısında tamamilə itmiş oldu, belə ki, bu fəlsəfəyə görə, bu səbəblər – həqiqi səbəbi yalnız özümüz olan – bilgisizliyin təzahürüdür.

Baş vermiş hər bir hadisə və ya proses özündən əvvəlki ilə belə bir açıq-aşkar prinsipə əsaslanaraq əlaqəlidir ki, hər hansı hadisə və ya proses (təzahür) onu doğuran səbəb olmadan baş verə bilməz. «Kifayətedici əsas prinsip» (rus. «принцип достаточного основания») adı ilə məlum olan bu aksiom, hətta əhəmiyyətsiz sayılan olaylara da şamil olunur. Bu olayları onları əmələ gətirən səbəblər olmadan ən azad iradə belə yarada bilməz; çünki bu iradə, əgər bir halda təsir göstərib, digər halda təsir göstərməkdən yayınmış olsa idi və hər iki vəziyyət isə bütün cəhətlərilə tamamilə oxşar olsaydı, iradənin seçimi – səbəbsiz bir olay olardı: Leybnitsin dediyi kimi, bu iradə epikürçülərin kor-koranə bir halı olardı. Əks fikir əqlin illüziyasıdır ki, o, fərqinə varılmayan davranışlarda iradənin bu və ya digər seçimində xırda səbəbləri nəzərdən qaçıraraq əminliklə hesab edir ki, bu fikir özü-özünə və səbəbsiz yaranır.

Beləliklə, biz kainatın hazırki vəziyyətinə onun əvvəlki vəziyyətinin nəticəsi və növbəti vəziyyətinin səbəbi kimi baxmalıyıq.

Təbiəti canlandıran qüvvələr və onun bütün tərkib hissələrinin nisbi vəziyyəti hər hansı bir verilmiş anda əqlə məlum olsa idi və üstəlik bu ağıl elə geniş ola bilsəydi ki, bunları əhatəli analiz edə biləydi, o, kainatın nəhəng cisimlərinin hərəkətini ən yüngül atomların hərəkətləri ilə eyni bir düsturda əhatə etmiş olardı: onun üçün yəqin olmayan heç bir şey qalmazdı və gələcək, həmçinin keçmiş onun qarşısında canlanmış olardı. Kamil insan zəkasının astronomiyaya verə bildikləri belə idrakın zəif eskizi haqqında təsəvvür verir. Ümumdünya cazibəsinin kəşfi ilə bağlı olaraq, mexanika və həndəsədə əqlin etdiyi kəşflər, kainat sisteminin keçmiş və gələcək vəziyyətlərini eyni bir analitik ifadələrlə anlamağa imkan yaratdı. Həmin metodu bəzi digər bilik obyektlərinə tətbiq etdikdə, müşahidə olunan hadisə və ya prosesləri ümumi qanunlarla ifadə etmək bizim idrakımıza müyəssər oldu və o, verilmiş şərtlər nəticəsində baş verə biləcək hadisə və ya prosesləri öncədən söyləməyə belə müvəffəq oldu. Gerçəklik axarışında ruhun bütün cəhdləri daima ruhu idraka (zəkaya) yaxınlaşdırmağa yönəlmişdir və indicə qeyd etdiyimiz elə idraka ki, ruh ondan həmişə sonsuz uzaqda olacaqdır. İnsana xas olan bu cəhdetmə onu heyvanlardan üstün edir; onun bu istiqamətdəki uğurları millətləri və əsrləri fərqləndirir və onların həqiqi şöhrətini təşkil edir.

Xatırlayaq ki, bizdən o qədər də uzaq olmayan keçmiş dövrlərdə yağışa və ya fövqəladə quraqlığa, olduqca uzanmış quyruğu olan kometə, günəş tutulmasına, şimal şəfəqinə və ümumiyyətlə, qeyri-adi təzahürlərə Göy qəzəbinin əlaməti kimi baxılırdı. Bunların zərərli təsirinin qarşısını almaq üçün Göyə (Tanrıya) yalvarırdılar. Planetlərin və ya günəşin hərəkətini dayandırmaq üçün Tanrıya yalvarmırdılar: müşahidə tez bir zamanda bu yalvarışların tamamilə səmərəsiz olduğunu hiss etdirərdi. Lakin uzun müddətdən bir baş verən və itən təzahürlərdən belə fikir yaranırdı ki, bunlar təbiətdə qərarlaşmış qaydalara ziddir və insanlar fərz etməyə başladılar ki, bunları Göy (Tanrı) yaradır və o, insanları günahlarına görə cəzalandırmaq üçün bunları lazımi bildiyi kimi də dəyişir. 1456-da müşahidə olunmuş uzanmış quyruğu olan komet, bu ərəfədə türklərin sürətli qələbələri nəticəsində Bizans imperiyasının süquta uğramasından dəhşətə gəlmiş Avropada çaxnaşma yaratdı. Bu Göy ulduzu özünün dörd dövrünü başa vurduqdan sonra, bu hadisə bizim aramızda çox müxtəlif maraqlar doğurdu. Bu dövr ərzində kainat sisteminin əldə olunmuş qanunları ilə tanışlıq insanın kainata gerçək münasibətlərindəki bilgisizliyi ilə doğrulmuş qorxunu aradan qaldırmış oldu; bu kometin 1531, 1607 və 1682-ci illərdə müşahidə olunmuş komet olduğu qənaətinə gəlmiş Halley (Halley), onun 1758-in sonunda və ya 1759-un əvvəlində qayıdışını öncədən söylədi. Elm aləmi bu qayıdışı səbrsizliklə gözləyirdi, belə ki, bu elmdə edilmiş ən böyük kəşflərdən birini və bununla da, çox böyük məsafələr qət edən Göy ulduzlarının dövrləri haqqında Senekinin öngörülüklə söyləmiş olduğu: «Gün gələcək ki, indi bizə məlum olmayan şeylər bir neçə yüzilliklər boyu öyrənilməsinin davam olunması sayəsində, özünün bütün açıq-aşkarlığı ilə zühur edəcəklər; əcdadlarımız bu qədər aşkar gercəkliklərin onların nəzərindən qaçmasına çox təəccüblənəcəklər» fikrini də təsdiq etməli idi. Onda Klero (Clairaut) iki ən böyük planet – Yupiter və Saturnun təsiri nəticəsində bu kometin məruz qaldığı kükrəntiləri analiz etməyə başladı: olduqca böyük hesablamalardan sonra onun perigelilərdən yaxın keçəcəyini 1759-un aprelin başlanğıcına təyin etdi və müşahidə bunu təsdiq etdi. Astronomiyanın bizə aşkar etdiyi düzgünlük bütün təzahürlərdə heç bir şübhə doğurmadan özünü göstərir. Havanın və ya buxarın sadə molekulunun cızdığı əyri, planetlərin orbiti kimi dəqiqliklə təyin olunur: bunlar arasındakı fərq, yalnız, bizim bilgisizliyimizdən irəli gəlir.

Ehtimal, müəyyən qədər bu bilgisizliklə, müəyyən dərəcədə isə bizim bilgimizlə şərtləşdirilir. Bizə məlumdur ki, üç və ya daha çox hadisədən biri baş verəcəkdir; lakin bunlardan birinin digərlərindən hər hansı bir üstünlüyə malik olması barədə hər hansı dəlilin olmasına da əsasımız yoxdur. Belə bir inamsızlıqda biz hansı hadisənin baş verəcəyini yəqinliklə söyləyə bilmərik. Lakin bu hadisələrdən ixtiyari birinin baş verməyəcəyi fərz olunur, çünki bu hadisənin baş verməməsi üçün onun baş verməsini istisna edən bir neçə, eynilə mümkün ola bilən hallar olduğu halda, onun baş verməsi üçün yalnız bir əlverişli hal vardır.

Təsadüflər nəzəriyyəsi – bütün bircins hadisələrin bərabər mümkün olan hallarının, yəni varlığı bizim üçün eyni dərəcədə qeyri-müəyyən olan halların məlum sayı ilə ifadə etməyə nail olunmaqdan və ehtimalı axtarılan hadisənin baş verməsi üçün əlverişli hallar sayının da təyin oluna bilinməkdən ibarətdir. Bu əlverişli hallar sayının bütün mümkün halların sayına nisbəti bu ehtimalın ölçüsüdür və beləliklə, bu ehtimal – surəti bütün əlverişli hallar sayı, məxrəci bütün mümkün hallar sayı olan kəsrdir.

Ehtimalın əvvəlki anlayışında fərz olunur ki, əlverişli hallar sayı və bütün mümkün hallar sayı eyni nisbətdə artırıldıqda ehtimal

dəyişmir. Buna əminlik üçün iki – A və B urnlarına baxaq; A-da dörd ağ və iki qara kürəcik, B-də yalnız iki ağ və bir qara kürəcik olsun. Fərz edək ki, A-dakı iki qara kürəcik bir-birilə iplə bağlanmışdır və bu kürəciklərdən birini götürdükdə bu ip qırılır; dörd ağ kürəciyin də belə iki sistem əmələ gətirdiyi fərz olunur. Qara sistemin kürəciklərindən birinin çıxarılması üçün əlverişli olan bütün mümkün hallar qara kürəciyin çıxması ilə nəticələnəcəkdir. Əgər kürəcikləri bir-birilə birləşdirən iplərin qırılmayan olduğu fərz olunarsa, onda aydındır ki, bütün mümkün baş verмələrin sayı dəyişməyəcəkdir, qara kürəciklərin çıxarılması üçün əlverişli baş verмələrin sayı da dəyişməyəcəkdir; yalnız bu halda bir dəfədə urndan iki kürəcik çıxacaqdır. Urndan qara kürəciyin çıxması ehtimalı əvvəlkinə bərabər olub, dəyişməyəcəkdir. Onda aydındır ki, bu hal B urnu halı olacaqdır, lakin yalnız belə bir fərqli cəhət olacaqdır ki, bu sonuncu urnun üç kürəciyi dəyişməz olaraq, bir-birilə bağlanan kürəciklərin üç cütü ilə əvəz olunacaqdır. Bütün mümkün hallar hər hansı hadisənin baş verməsi üçün əlverişli olarsa, onda güman (ehtimal) yəqinliklə əvəz olunur və onun ifadəsi vahidə bərabər olur. Bu anlamda yəqinlik və ehtimal müqayisə olunandırlar, lakin bununla belə, əqlin iki halı arasında mühüm fərq vardır: ya həqiqət əqlə ciddi surətdə isbat olunur və ya əql hələ də kiçik bir səhvin ola biləcəyini də nəzərdə tutur.

Yalnız doğruyaoxşar hadisələrdə, hər bir ayrıca insanda ona məlum ola bilən verilənlər arasındakı fərq, eyni bir əşyalar haqqında mövcud olan fikir müxtəlifliyinin əsas səbəblərindən biridir. Məs., üç – A, B, C urnlarından birində yalnız qara kürəciklər, qalan ikisində yalnız ağ kürəciklər olduğu fərz olunur. Kürəcik C urnundan çıxarılmalıdır; bu kürəciyin qara olması ehtimalı nəyə bərabərdir? Əgər bizə məlum olsa idi ki, bu üç urndan hansı yalnız qara kürəciklər olanıdır, onda qara kürəciklərin B-də və ya A-da deyil, məhz C-də olduğunu fərz etmək üçün heç bir dəlil yoxdur, onda bütün bu üç fərziyyənin eyni dərəcədə mümkün olduğu görüntüsü yaranar, belə ki, qara kürəcik yalnız birinci fərziyyə şərtində çıxarıla bilindiyindən, onun çıxarılması ehtimalı üçdə birə bərabərdir. Əgər A-da yalnız ağ kürəciklərin olduğu məlum olarsa, onda bizim tərəddüdümüz yalnız B və C urnları ilə əlaqədar olacaqdır və C urnundan çıxan kürəciyin qara olması ehtimalı ikidə birə bərabər olacaqdır. Əgər biz əmin olarsaq ki, A və B urnlarında yalnız ağ kürəciklərdir, bu halda ehtimal, nəhayət, yəqinliyə çevrilir.

Çoxsaylı toplantı qarşısında hansısa bir tərzdə söylənilmiş fakt dinləyicilərin bilik dairəsinə görə müxtəlif ehtimallarla qiymətləndirilir. Əgər bu fakt barədə məruzə edən şəxs bu fakta tamamilə əmindirsə və onun tutduğu vəziyyəti və xarakteri böyük inam tələqin edirsə, onun hekayətinin nə dərəcədə qeyri-adi olmasından asılı olmayaraq, maariflənməmiş dinləyicilər üçün bu şəxsin danışığı adi fakt kimi eyni dərəcədə doğruyaoxşar olacaqdır; şübhəsiz ki, ona inanacaqlar. Lakin dinləyicilərdən hər hansı birinə məlum olarsa ki, həmin fakt bu şəxsdən heç də az hörmətli olmayan şəxs tərəfindən inkar olunur, onda bu dinləyicidə şübhə oyanacaqdır; maarifli insanlar bu faktı yalan hesab edəcəklər, çünki onlar tapa biləcəklər ki, bu fakt yaxşı yoxlanılmış faktlara, ya da ki, təbiətin dəyişməz qanunlarına ziddir.

Yanlış fikirlərin cahil dövrlərdə Yer üzündə yayılmasına görə biz, kütlənin məlumatlı hesab etdikləri və həyatın ən mühüm məsələlərində inanmağa adət etdikləri şəxslərin fikirlərinin təsirinə borcluyuq. Magiya və astrologiya buna aid mühüm misallardır. Uşaqlıqdan insanlara tələqin olunmuş, yoxlanılmadan qəbul edilərək, olduqca uzun müddət onlarda davamlı olaraq, bərqərarlaşdırılan ümumi inamla formalaşmış belə yanlış fikirlər dəstəklənirdi; lakin elmin inkişafı ilə və nəhayət, bunlar maariflənmiş insanların ağıllarında darmadağın olunduqdan sonra, onların fikirləri xalq arasında təqlid sayəsində və adətetmə vərdişilə belə yanlış fikirlərin yox olması zərurətini yaratdı. Məhz mənəvi aləmin ən möhtəşəm və təhrikedici olan bu gücü, eyni hakimiyyətli başqa bir yerdə tərəfdarları olan ideyalara tam tərs olan və bütöv bir millətə xas ideyaları təsdiq edir və qoruyub saxlayır. Bizimkindən fərqli, əksər hallarda şəraitin yaratdığı yad baxışlara, biz nə qədər də anlaşıqlı olmalıyıq. Biz kifayət qədər maariflənməmiş hesab etdiklərimizi maarifləndirəcəyik:

lakin əvvəlcə, özümüzün şəxsi baxışlarımıza ciddi surətdə yenidən baxaraq, onların nisbi yəqinliyini qərəzsiz ölçüb-biçməliyik.

Baxışlar arasında fərq həmçinin bizə məlum verilənlərin təsirinin təyin olunması üsulundan da asılıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi elə incə mülahizələrlə əlaqəlidir ki, xüsusilə mürəkkəb məsələlərdə eyni verilənlərə malik iki şəxsin müxtəlif nəticələrə gəlməsi heç də təəccüb doğurmur. Bu nəzəriyyənin əsas prinsiplərini indi şərh edək.

Ehtimalların hesablanmasının ümumi prinsipləri

I p r i n s i p. Prinsiplərdən birincisi – ehtimalın özünün tərifidir və biz gördük ki, ehtimal – əlverişli hallar sayının bütün mümkün hallar sayına nisbətidir.

I I p r i n s i p. Lakin bu zaman müxtəlif halların bərabər mümkünlüyü fərz olunur. Əgər bu hətta belə olmasa, onda bu halların uyğun mümkünlükləri təyin olunur; bunların dəqiq qiymətləndirilməsi – təsadüflər nəzəriyyəsinin ən incə bəndlərindən biridir. Onda ehtimal hər bir əlverişli halın mümkünlüklərinin cəmi olacaqdır. Bu prinsipi misalla izah edək.

Fərz edək ki, havaya böyük və çox nazik metal pul atılır; bu pulun hər iki üzü tamamilə oxşardır, bunları *xaç* və *şəbəkə* ilə adlandıraq. Pulun iki dəfə atılmasında *xaçın* heç olmasa bir dəfə görünməsi ehtimalını tapaq. Aydındır ki, eyni mümkün ola bilən dörd hal ola bilər, doğrudan da: birinci və ikinci atılmada *xaç*; birinci atılmada *xaç* və ikincidə *şəbəkə*; birinci atılmada *şəbəkə* və ikincidə *xaç*; nəhayət, hər iki atılmada *şəbəkə*. Birinci üç hal, ehtimalı axtarılan hadisə üçün əlverişlidir, bu ehtimal, deməli, $3/4$-ə bərabərdir; odur ki, iki dəfə atılmada xaçın heç olmasa bir dəfə düşməsi üçün bir şans əleyhinə üç şans vardır.

Bu oyunda, belə hesab etmək olar ki, üç müxtəlif hal vardır, məhz: birinci atılmada *xaçın* düşməsi pulun ikinci dəfə atılması zəruriliyini istisna edir; birinci atılmada şəbəkə və ikincidə *xaçın* düşməsi; nəhayət, birinci və ikinci atılmada *şəbəkə*. Əgər biz Dalamber kimi bu halları eyni mümkün üç hal kimi hesab etmiş olsaydıq, onda bu ehtimalın $2/3$ olduğunu alardıq. Lakin aydındır ki, *xaçın* birinci atılmada düşməsi ehtimalı $1/2$-ə bərabərdir, bununla belə digər halların hər birinin ehtimalı $1/4$-ə bərabərdir; çünki birinci hal sadə hadisədir və bu hadisə iki mürəkkəb hadisəyə uyğundur: birinci və ikinci atılmada *xaç* düşməsinə və birincidə *xaç,* ikinci atılmada *şəbəkə* düşməsinə. Əgər indi, ikinci prinsipə görə birinci atılmada *xaçın* mümkünlüyü $1/2$-i birinci atılmada *şəbəkə*, ikinci atılmada *xaçın* mümkünlüyü $1/4$-ə əlavə etsək, axtarılan ehtimal üçün $3/4$ ehtimalı alınar, bu isə hər iki dəfə atılmanı yerinə yetirmək fərziyyəsini qəbul etdikdə tapdığımız ehtimalla uzlaşır. Bu fərziyyə bu hadisə üçün mərc gəlmiş şəxsin aqibətini heç də dəyişmir.

I I I p r i n s i p. Ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm bəndlərindən biridir və burada illüziyalara daha çox yer verilir və bu elə bir qaydadır ki, ehtimallar qarşılıqlı birləşmələrlə artır və azalır. Əgər hadisələrdən biri digərindən asılı deyildirsə, onların birgə baş verməsi ehtimalı bu hadisələrin hər birinin ehtimallarının hasilinə bərabərdir. Məs., bir zərin bir dəfə atılmasında bir xalının düşməsi ehtimalı altıda bir olduğu halda, iki zərin bir dəfə atılmasında iki xal düşməsi ehtimalı otuz altıda birə bərabər olur. Doğrudan da, bir zərin hər bir üzü digərinin altı üzü ilə kombinasiya oluna bilindiyindən, onda eyni mümkün otuz altı hal vardır və bunlardan yalnız biri iki xalı verir. Ümumiyyətlə isə, hər hansı hadisənin eyni şəraitdə, verilmiş ədəd dəfə təkrar olunması ehtimalı, bu sadə hadisənin ehtimalının bu ədəd qədər qüvvət üstünə yüksəldilməsindən alınan ədədə bərabərdir. Beləliklə, vahiddən kiçik olan kəsrin ardıcıl qüvvət üstləri həmişə azalır, odur ki, bir sıra olduqca böyük ehtimallardan asılı olan hadisə həddən ziyadə kiçik ehtimallı da ola bilər. Fərz edək ki, hər hansı bir fakt şahidlik edən iyirmi nəfərlə bizə elə surətdə ötürülür ki, birinci onu ikinciyə, ikinci üçüncüyə və s. ötürür: daha sonra fərz edirik ki, hər bir şahidlik ehtimalı $9/10$-a bərabərdir; şahidliklərdən alınan faktın ehtimalı bu halda səkkizdə birdən az olardı. Əşyalardakı aydınlığın azalması ilə ehtimalın da azalmasına ən yaxşı müqayisə: göz qarşısına bir neçə şüşə lövhə qoyulduqda, bir şüşədən

tamamilə aydın görünən əşyanın görünməz olması üçün hətta az sayda lövhənin kifayət etməsidir. Tarixçilər, deyəsən, faktların ehtimalının belə tədrici azalmasına kifayət qədər diqqət yetirmirdilər, əgər tarixi hadisələrə çox sayda nəsillər ardıcıllığı keçdikdən sonra nəzər salınarsa, əksəriyyəti yəqin hadisələr sayılan belə hadisələr sınaqlarla yoxlanılsaydı, onlar ən azı şübhə doğurardı.

Sırf riyazi elmlərdə ən əvvəlki nəticələr baş verdikləri prinsipin yəqinliyində iştirak edir. Analizin fizikaya tətbiqində alınan nəticələr faktların və ya təcrübələrin tam yəqinliyinə malikdir. Mənəvi elmlərdə, hər bir nəticə əvvəlki nəticədən doğruyaoxşarlıq əsasında çıxarıldığından, bu nəticələrin nə qədər ehtimallı olmasına baxmayaraq, xətaların sayı onların sayı ilə birlikdə artır, hər hansı bir prinsipin ən əvvəlki nəticələrində gerçəklik şanslarından artıq olur.

I V p r i n s i p. Əgər iki hadisə bir-birindən asılı olarsa, mürəkkəb hadisənin ehtimalı – birinci hadisənin ehtimalının, bu hadisənin baş verməsi şərtində, ikinci hadisənin baş verməsi ehtimalına hasilidir. Məs., üç A, B, C urnlarına baxdığımız halda, bunlardan ikisində yalnız ağ kürəciklər və birində yalnız qara kürəciklər olduqda, C urnundan ağ kürəcik çıxması ehtimalı 2/3 -ə bərabərdir, belə ki, üç urndan yalnız ikisində ağ kürəciklər vardır. C urnundan ağ kürəciyin çıxmasına əsaslanmaqla məhz hansı urnda yalnız qara kürəciklər olduğu haqqında məlumatsızlıq, artıq yalnız A və B urnlarına aid olur; B urnundan ağ kürəciyin çıxması ehtimalı 1/2 -ə bərabərdir; 2/3 -nin 1/2 və ya 1/3 -ə hasili, deməli, B və C urnlarından eyni zamanda iki ağ kürəcik çıxarılması ehtimalıdır. Əslində, buna görə, A-nın yalnız qara kürəciklər olan urnlardan biri olması zəruridir, aydındır ki, bu halın ehtimalı 1/3 -dir.

Bu misaldan baş vermiş hadisələrin gələcək hadisələrin ehtimalına təsiri olduğu aydın olur; belə ki, ehtimalı əvvəlcədən 2/3 -yə bərabər olan B urnundan ağ kürəciyin çıxması ehtimalı, C urnundan ağ kürəcik çıxdıqdan sonra, 1/2 olur: həmin urndan, əgər qara kürəcik çıxsaydı, bu ehtimal yəqinliyə çevrilərdi. Bu təsir əvvəlki prinsipin nəticəsi olan aşağıdakı prinsip vasitəsilə təyin olunur.

V p r i n s i p. Əgər baş vermiş hadisənin ehtimalı *a priori* hesablanarsa və bu birinci və digər hadisədən ibarət hadisənin ehtimalı hesablanılarsa, onda birinciyə bölünmüş ikinci ehtimal, müşahidə olunmuş hadisədən sonra gözlənilən hadisənin ehtimalı olacaqdır.

Burada keçmişin gələcək hadisənin ehtimalına təsiri barədə bəzi filosofların qaldırdığı sual ortaya çıxır. Fərz edək ki, *xaç* və *şəbəkə* oyununda *xaç şəbəkədən* daha çox düşmüşdür: yalnız buna əsasən biz belə fikirləşə bilirik ki, elə bir həmişəlik səbəb vardır ki, belə nəticə üçün əlverişlidir. Məs., həyatda daimi xoşbəxtlik bacarıqlılığın sübutudur, bu isə insanları xoşbəxt adamlara üstünlük verməyə sövq edir. Lakin, əgər şəraitin qeyri-sabitliyindən biz, hər dəfə mütləq qeyri-müəyyənlik vəziyyətinə qayıdırıqsa; məs., *xaç və şəbəkə* oyununda metal pul hər bir atılmada dəyişdirilirsə, onda keçmişin gələcəyə cüzi aydınlıq gətirməsi mümkün deyildir və bunu hesaba almaq mənasızlıq olardı.

V I p r i n s i p. Müşahidə olunmuş hadisənin baş vermə səbəblərindən hər biri ehtimal olunmaqdan daha çox, xüsusən də, ona görə doğruyaoxşardır ki, bu səbəb mövcud olduqda hadisə baş verəcəkdir; bu səbəblərdən hər hansı birinin mövcud olması ehtimalı, aydındır ki, surəti – bu səbəbdən baş verən hadisənin ehtimalı olan, məxrəci isə bütün səbəblərə aid olan oxşar ehtimalların cəmi olan kəsrə bərabərdir: əgər bu müxtəlif, *a priori* baxılan səbəblər eyni ehtimallı deyildirlərsə, onda hər bir səbəbin doğurduğu hadisənin ehtimalı əvəzinə, bu ehtimalın, səbəbin özünün ehtimalına hasili götürülməlidir. Bu, təsadüfiliklər analizinin hadisələrdən səbəblərə keçidlə məşğul olan sahəsinin əsas prinsipidir.

Bu prinsip düzgün hadisələrin nəyə görə xüsusi səbəblə əlaqədar olmasını izah edir. Bəzi filosoflar fərz edirdilər ki, bu hadisələr digərlərindən daha az ehtimallıdırlar və *xaç* və *şəbəkə* oyununda, məs., *xaçın* ardıcıl olaraq iyirmi dəfə düşməsi birləşməsi daha az təbiidir, nəinki *xaç* və *şəbəkənin* düzgün qarışdırılmadıqları birləşmələrdən. Lakin belə nöqteyi-nəzər fərz edir ki, keçmiş hadisələr gələcək hadisələrin mümkünlüyünə təsir edir, bu isə qətiyyən mümkün deyildir. Düzgün hallara yalnız ona görə az-az təsadüf olunur ki, onlar çoxsaylılardan daha azdır. Biz simmetriya müşahidə etdikdə səbəbi müəyyənləşdirmək istəsək, bundan belə nəticə çıxarılmamalıdır ki, biz simmetrik hadisəyə daha az mümkün ola bilən hadisə kimi baxırıq; bu hadisə ya requlyar səbəbin və ya təsadüfün nəticəsi ola bildiyindən, birinci fərziyyə ikincidən daha çox ehtimallı olur. Biz masa üzərində hərflərin belə düzülüşünü görürük: *Konstantinopol* və bu halda biz hesab edirik ki, bu düzülüş təsadüfilik nəticəsi deyildir, ona görə yox ki, belə düzülüş başqalarından daha az ehtimal olunur, belə ki, əgər bu söz heç bir dildə istifadə olunmasaydı, belə düzülüşün heç bir xüsusi səbəbinin olduğuna biz şübhələnməzdik: lakin bu söz bizdə istifadə olunan sözdür, onda bu düzülüşdə hərfləri belə kiminsə də qoyması halının ehtimalı, şübhəsiz ki, düzülüşün təsadüfilik nəticəsi halındakı ehtimalından daha çox olur.

Burada *qeyri-adi* sözünü təyin etmək yerinə düşərdi. Biz bütün mümkün ola bilən hadisələri fikrən müxtəlif siniflərə bölürük və bu hadisələrdən ən az sayda hadisədən ibarət sinifləri biz *qeyri-adi* sinif hesab edirik. Məs., *xaç* və *şəbəkə* oyununda xaçın yüz dəfə ardıcıl düşməsi bizə qeyri-adi görünür, çünki yüz dəfə atılmada baş verə bilən, demək olar ki, sonsuz sayda birləşmələri düzgün sıralara və ya bizim nəzərimizə görə bu birləşmələrdə asanca hiss olunan qayda hökm sürən sıralara və nəhayət, düzgün olmayan sıralara böldükdə, bu sonuncular misilsiz dərəcədə çoxdur. İçərisində yalnız biri ağ, digərləri qara kürəcik olan milyon kürəcik yerləşən urndan ağ kürəciyin çıxması da bizə qeyri-adi hal kimi görünür, çünki iki rəngə uyğun hadisələrin yalnız iki sinfini təşkil edirik. Lakin milyon ədəd nömrələnmiş kürəcik olan urndan 475813 №-li kürəciyin çıxması bizə adi hadisə kimi görünür, çünki nömrələri onları siniflərə bölmədən fərdi surətdə yoxladıqda, bunlardan birinin digərindən daha tez çıxacağını düşünməyimizə heç bir əsas yoxdur.

Biz əvvəlkilərdən, ümumiyyətlə, belə nəticə çıxarmalıyıq ki, hər hansı fakt nə dərəcədə qeyri-adidirsə, onu əsaslandırmaq üçün ciddi dəlillər olmalıdır; çünki onun haqqında şahidlik edənlər səhv edə bilərlər və ya aldana bilərlər və buna görə də, real fakt öz-özlüyündə daha az, bu iki səbəb isə daha çox ehtimal olunur. Şahidlərin şahidliklərinin ehtimalları haqqında danışdıqda biz buna xüsusilə əmin olacağıq.

V I I p r i n s i p. Gələcək hadisənin ehtimalı – müşahidə olunmuş hadisədən çıxarılmış hər bir səbəbin ehtimalının, bu səbəb olduqda, gələcək hadisənin baş verməsi ehtimalına hasillərinin cəmidir. Aşağıdakı misalda bu prinsip aydın olur.

İçərisində yalnız iki – ağ və ya qara kürəcik olan urn olduğunu fərz edirik. Bu kürəciklərdən biri çıxarılır, sonra o, yenidən urna qaytarılır ki, yeni tiraj başlansın. Fərz edirik ki, ilk iki tirajda ağ kürəciklər çıxmışdır, belə sual qoyulur: üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir.

Burada yalnız iki hipotez irəli sürmək olar: kürəciklərdən biri ağ, digəri qaradır və ya hər ikisi ağdır. Birinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı 1/4 -ə bərabərdir; bu ehtimal ikinci hipotezdə vahidə və ya yəqinliyə bərabərdir. Odur ki, səbəblər qədər də bu hipotezlərə də baxsaq, altıncı prinsipə görə, bunlara uyğun ehtimalların 1/5 və 4/5 olduğunu alırıq. Lakin əgər birinci hipotez yerinə yetərsə, onda üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxarılması ehtimalı 1/2 -ə bərabərdir; ikinci hipotezdə bu ehtimal vahidə bərabərdir. Bu sonuncu ehtimalları uyğun hipotezlərin ehtimallarına vurduqdan sonra alınmış hasillərin cəmi və ya 9/10 , – üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı olacaqdır.

Sadə hadisənin ehtimalı məlum olmadıqda, onda bu ehtimalın sıfırdan vahidə qədər bütün ədədi qiymətlər alacağını fərz etmək olar. Müşahidə olunmuş hadisədən sonra bu hipotezlərin hər birinin ehtimalı, altıncı prinsipə əsasən, surəti – bu hadisənin bu hipotezdə ehtimalına, məxrəci isə bütün hipotezlər üçün oxşar ehtimalların cəminə bərabər, kəsrə bərabərdir. Hadisənin verilmiş sərhədlərdə mümkünlüyünün ehtimalı – bu sərhədlərdə yerləşən kəsrlərin cəminə bərabərdir. Əgər hər bir kəsri uyğun hipotezdə təyin olunan gələcək hadisənin ehtimalına vurarıqsa, onda yeddinci prinsipə görə, bütün hipotezlərə aid hasillərin cəmi –

müşahidə olunmuş hadisə üzrə baş verəcək gələcək hadisənin ehtimalı olacaqdır.

Beləliklə, biz tapırıq ki, hadisə ardıcıl bir neçə dəfə baş verdikdən sonra, onun növbəti dəfə də baş verməsi ehtimalı, bir vahid artırılmış bu ədədin, iki vahid artırılmışına nisbətinə bərabərdir. Məs., biz ən qədim tarixi dövrü beş min il əvvələ və ya 1 826 613 gün geriyə aid etsək və nəzərə alsaq ki, bu müddət ərzində günəş, gün hər dəfə yeni günlə əvəz olunduqda daima çıxmışdır, onda günəşin sabah da çıxacağı üçün bir şansa qarşı 1 826 214 şans olacaqdır. Hadisə və ya proseslərin küllüyyatından günləri və ilin fəsillərini tənzimləyən prinsipin olduğunu bilən şəxs üçün bu ədəd misilsiz dərəcədə mühümdür, o görür ki, indiki anda bunların cərəyan etməsinin qarşısını heç bir qüvvə ala bilməz.

Byuffon özünün siyasi arifmetikasında ehtimalı əvvəlkindən fərqli, başqa yolla hesablayır. O fərz edir ki, bu ehtimal vahiddən, surəti vahidə bərabər, məxrəci isə iki ədədinin o dövrdən keçən günlər sayına qüvvət üstünə yüksəldilmişinə bərabər ədəd olan kəsr qədər fərqlənir. Lakin keçmiş hadisələrdən səbəblərin və gələcək hadisələrin ehtimalına keçidin düzgün üsulu bu məşhur yazıçıya məlum deyildi.

Gözləmə haqqında

Hadisələrin ehtimalı bu hadisələrin mövcudluğunda maraqlı şəxslərin ümidini və ya qorxusunu təyin etməyə xidmət edir. *Ümid* sözünün müxtəlif mənaları vardır: bu, adətən, şəxsin yalnız gümanla etdiyi fərziyyələrlə, hər hansı mənfəəti gözləyərək, qazancını ifadə edir. Bu qazanc – ehtimal nəzəriyyəsində, gözlənilən miqdarın onun alınması ehtimalına hasilinə bərabərdir, bu isə miqdarın ehtimallara mütənasib olaraq paylandığı fərz olunduqda, hadisəyə qoşma olan riskə məruz qalmamaq arzusunda olan maraqlı şəxsin ödəməli olacağı miqdarın hissəsini təşkil edir. Ehtimalın bərabər dərəcədə paylanması gözlənilən miqdara bərabər hüquqlar verdiyindən, biz bütün kənar halları nəzərə almasaq, bu, yeganə doğru paylanmadır. Bu qazancı biz *riyazi gözləmə* adlandıracağıq.

V I I I p r i n s i p. Əgər qazanc bir çox hadisədən asılıdırsa, onda hər bir hadisənin ehtimalını bu hadisənin baş verməsi ilə bağlı mənfəətə vuraraq, bu hasillərin cəmini götürsək, biz bu qazancı alarıq.

Bu prinsipi misallara tətbiq edək. Fərz edək ki, *xaç* və *şəbəkə* oyununda birinci atılmada *xaç* düşərsə, Pavel iki frank alır, *xaç* yalnız ikinci atılmada düşərsə, o, beş frank alır. İki frankı birinci halın ehtimalı 1/2 -ə, beş frankı ikinci halın ehtimalı 1/4 -ə vursaq, hasillərin cəmi və ya Pavelin qazancı olan iki tam dörddə bir frankı alarıq. Bu məbləğ o qədərdir ki, o, bu qazancı ona əldə etməyə səbəbkar olan şəxsə əvvəlcədən verməlidir: çünki oyunun bərabərhüquqlu olması üçün oyunda ortaya qoyulan məbləğ onun gətirdiyi qazanca bərabər olmalıdır.

Əgər Pavel birinci atılmada xaç düşdükdə iki frank və hətta birinci atılmada da xaç, ikinci atılmada da xaç düşdükdə belə, beş frank alarsa, onda iki frankın və beş frankın 1/2 -ə vurulmasından sonra bu hasillərin cəmi – Pavelin qazancı üçün üç frank yarıma bərabər olacaqdır, deməli, bu onun oyunda ortaya qoyacağı məbləğdir.

I X p r i n s i p. Bəziləri gəlir, digərləri ziyan gətirməsi ehtimal olunan bir sıra hadisələrin olduğunu bilərək, biz bunlardan alına bilən qazancı təyin edə bilərik, buna görə, hər bir əlverişli hadisənin ehtimalını onun gətirdiyi mənfəətə hasilinə vuraraq, hasillərin cəmini hesablayıb, hər bir əlverişsiz hadisənin ehtimalını onunla bağlı ziyana vuraraq, hasillərin cəmini hesabladığımız birinci cəmdən çıxmalıyıq. Əgər ikinci cəm birincidən çoxdursa, onda qazanc ziyana, ümid isə qorxuya çevrilir.

Həyatda, həmişə, heç olmasa gözlənilən qazancın onun ehtimalına hasili ilə ziyan üçün belə hasilin bərabər götürülməsi baxımından hərəkət etmək gərəkdir. Lakin buna nail olmaq üçün gəliri, ziyanı və onların uyğun ehtimallarını dəqiq qiymətləndirmək zəruridir. Buna görə ən doğru əqlə, incə nəzakətə və böyük təcrübəyə, aşağıdakı nisbətlərdə malik olmaq gərəkdir: özünü xurafatdan, illüziyalardan, qorxudan və ümiddən, əksər insanların var-dövlət barədə öz izzət-nəfslərini arxayın etdikləri yanlış fikirlərdən qorumağı bacarmaq gərəkdir.

Aşağıdakı məsələyə əvvəlki prinsiplərin tətbiqi həndəsəçiləri çox maraqlandırmışdı. Pavel aşağıdakı şərtlərlə *xaç* və *şəbəkə* oyununda iştirak edir: əgər birinci atılmada *xaç* düşmüşdürsə, o, iki frank, *xaç* yalnız ikinci atılmada düşmüşdürsə, dörd frank, *xaç* yalnız üçüncü atılmada düşmüşdürsə, səkkiz frank və s. alır. Onun oyunda ortaya qoyduğu məbləğ, səkkizinci prinsipə görə, atılmalar sayına bərabər olmalıdır; odur ki, əgər partiya sonsuz davam edilirsə, onda bu məbləğ sonsuz olmalıdır. Bununla belə heç bir ağıllı adam bu oyunda hətta orta məbləği, məs., 50 frankı ortaya qoymazdı. Sağlam düşüncənin göstərişləri ilə hesablama nəticələrinin arasında bu fərq nədən yaranır? Tez bir zamanda öyrəndilər ki, bu ondan asılıdır ki, hər hansı mənfəətdən bizə çatan mənəvi qazanc, bu mənfəətə mütənasib deyildir və o, minlərlə səbəblərdən asılıdır, amma bunlardan ən ümumisi və mühümü – əksər hallarda çətinliklə təyin olunan vəziyyətdir (səbəblər nəzərdə tutulur – H. M.). Əslində, aydındır ki, milyonerlə müqayisədə, 100 frankı olan şəxs üçün bir frank daha qiymətlidir. Buna görə də, gözlənilən mənfəətdə onun bir frankının mütləq dəyəri nisbi dəyərindən fərqləndirilməlidir: bu nisbi dəyər onu istəməyə məcbur edən dəlillərdən asılı olduğu halda, birincisi bundan asılı deyildir. Bu nisbi dəyərin qiymətləndirilməsi üçün ümumi prinsip vermək mümkün deyildir. Lakin bununla belə Daniil Bernullinin təklif etdiyi və bir çox hallarda səmərəli olan prinsip aşağıda verilir.

X p r i n s i p. Son dərəcə kiçik məbləğin nisbi dəyəri – maraqlı şəxsin bütün əmlakının mütləq dəyərə nisbətinə bərabərdir. Burada fərz olunur ki, hər bir insanın hər hansı əmlakı vardır və onun dəyərinin sıfra bərabər olduğunu heç bir halda fərz etmək belə olmaz. Doğrudan da, hətta heç bir şeyi olmayan şəxs belə, öz zəhmət və ümidlərilə yaratdıqlarına, heç olmasa yaşamaq üçün zəruri olan dəyəri verir.

İndicə şərh etdiyimiz prinsipi analiz edərək, aşağadakı qaydanı alarıq.

Əgər hər hansı şəxsin varidatının onun gözləmələrindən asılı olmayan hissəsini vahidlə işarə edib, bu gözləmələr və onların ehtimallarına görə bu varidatın ala biləcəyi qiymətlər təyin edilərsə, onda bu ehtimallarla göstərilən uyğun qüvvət üstlərinə yüksəldilmiş bu qiymətlərin hasili fiziki sərvət olacaqdır, bu isə həmin şəxsin öz varidatından vahid əvəzinə götürülmüş hissəsindən və öz gözləmələrindən ala biləcəyi mənəvi qazanc olacaqdır; onda fərq fiziki sərvətin artımı olacaqdır, buna görə biz gözləmələrə borcluyuq: biz bu artımı *mənəvi gözləmə* adlandıracağıq. Asanlıqla görmək olur ki, mənəvi gözləmə o halda riyazi gözləmə ilə üst-üstə düşür ki, vahid əvəzinə qəbul edilmiş varidat gözləmələrdən yaranan dəyişikliklərlə müqayisədə sonsuz olur. Lakin bu dəyişikliklər bu vahidin əsas hissəsini təşkil edirsə, hər iki gözləmə bir-birindən olduqca çox fərqlənə bilər.

Bu qayda sağlam düşüncənin göstərişlərilə uzlaşan nəticələrə gətirir, bunun sayəsində bunlar müəyyən dəqiqliklə qiymətləndirilə bilinir. Məs., əvvəlki misalda tapırıq ki, əgər Pavelin iki yüz frankı vardırsa, onda oyunda ortaya qoyulan məbləgin iki yüz frankdan artıq qoyulması ağılsızlıqdır. Həmin bu qayda bütün varidatı təhlükəyə məruz qoymaqdansa, bu təhlükəni tez bir zamanda gözlənilən varidatın bir neçə hissəsinə paylaşdırılmasını tövsiyyə edir. Bundan belə nəticə çıxır ki, hətta ən ədalətli oyunda belə, uduzulmuş məbləğ uduşdan həmişə nisbətən çox olur. Məs., yüz frankı olan oyunçu *xaç* və *şəbəkə* oyununda əlli frank ortaya qoyursa, bundan sonra ondakı məbləğ səksən yeddi frank olacaqdır, yəni bu son məbləğ oyunçuya oyundan sonra onun varı haqqında vəziyyəti kimi həmin mənəvi qazancı verə bilərdi. Beləliklə, oyun hətta o halda da əlverişsizdir ki, oyunda ortaya qoyulan məbləğ gözlənilən məbləğin onun ehtimalına hasilinə bərabər olsun. Buna əsaslanaraq, gözlənilən məbləğin bu hasildən kiçik olduğu oyunlarda mənəviyyatsızlıq haqqında mühakimə yürütmək olar. Oyundakı mənəviyyatsızlıqlar yalnız yanlış mühakimələrə və tamahkarlığa görə mövcuddur və bunlar, hətta sonsuz bəlaların mənbəi olan xam xəyal ümidləri naminə və bunların doğruyaoxşar olmadığını qiymətləndirmək iqtidarında olmadıqlarından xalqı onun üçün zəruri olanı belə qurban verməyə sövq edirlər.

Oyunların mənfəətsizliyi, gözlənilən bütün mənfəəti eyni bir təhlükəyə məruz qoymamağın faydası və sağlam düşüncənin göstərdiyi bütün oxşar nəticələr hər bir fərd üçün onun mənəvi sərvətini ifadə edən fiziki sərvətin funksiyalarından asılı olmayaraq mövcuddur. Mənəvi

sərvət funksiyasının artımının fiziki sərvətin artımına nisbətinin, bu sonuncunun artması ilə azalması kifayətdir.

Ehtimalların analitik metodları haqqında

Ehtimalın müxtəlif məsələlərinə bizim indicə şərh etdiyimiz prinsiplərin tətbiqi elə metodları tələb etdi ki, bunların axtarışı analizin bir çox sahələrinin, o cümlədən, birləşmələr nəzəriyyəsinin və sonlu fərqlər hesabının başlanğıcına səbəb oldu.

Əgər vahid üstəgəl birinci hərf, vahid üstəgəl ikinci hərf, vahid üstəgəl üçüncü hərf və s. n-ci hərfə qədər binomların hasilini yazıb, vahiddən bu hasilin açıq ifadəsini çıxsaq, onda bir-bir, iki-iki, üç-üç və s. bütün hərflərdən ibarət birləşmələrin cəmini alarıq, belə ki, hər bir birləşmənin əmsalı vahid olacaqdır. n hərfdən ibarət s hərfli birləşmələrin sayını almaq üçün, qeyd etmək kifayətdir ki, bu hərflərin öz aralarında bərabərliyi halında əvvəlki hasil vahid üstəgəl birinci hərf binomunun n-ci qüvvət üstünə çevriləcəkdir; beləliklə, n hərfdən s hərfli binomların sayı – bu binomun ayrılışında qüvvət üstü n-ə bərabər birinci hərfin əmsalı olacaqdır; bu ədəd, aydındır ki, məlum binom düsturundan alınacaqdır.

Hər bir birləşmədə hərflərin düzülüşünə fikir verəcəyik, nəzərə almalıyıq ki, əgər birinci hərfi ikincisinə birləşdirdikdə, onu ya birinci və ya ikinci yerə yerləşdirməklə iki birləşmə alınır. Əgər bu birləşmələrə üçüncü hərf də birləşdirilərsə, onda bu hərfi hər bir birləşmədə birinci, ikinci və ya üçüncü yerdə yerləşdirmək olar ki, bu da əvvəlki ikincisindən hər birinə üç birləşməni verir; cəmisi altı birləşmə. Buradan asanlıqla belə nəticə çıxarmaq olur ki, s hərfdən ibarət yerləşmələrin sayı – vahiddən s-ə qədər ədədlərin hasilinə bərabərdir. Buna görə də, hərflərin düzülüşü qaydasını da nəzərə aldıqda bu hasilə n hərfdən s hərfli birləşmələrin sayını da vurmaq gərəkdir; bu isə ona gətirir ki, bu ədədi ifadə edən binomun həddinin əmsalının məxrəci atılmalıdır.

n nömrədən ibarət lotereya olduğunu fərz edək, bu lotereyalardan hər bir tirajda s saydası çıxır: s sayda verilən nömrənin bir tirajda çıxması ehtimalını təyin etmək lazımdır. Buna görə də, n lotereyada s saydasının birləşmələri sayı təyin edilməlidir. Sonra oxşar surətdə, r lotereyadan s lotereya olan birləşmələrin sayı təyin olunur. Bu sonuncu ədədin əvvəlkinə nisbəti, aydındır ki, s sayda verilmiş nömrənin r sayda lotereya arasında çıxması ehtimalı olacaqdır; deməli, bu, axtarılan ehtimal olacaqdır. Məlum olduğu kimi, 90 nömrədən ibarət, hər bir tirajında beş nömrə çıxan Fransa lotereyasında verilmiş biletin çıxması ehtimalı $5/90$ və ya $1/18$-ə bərabərdir; deməli, bu halda oyunun bərabərhüquqlu olması üçün lotereya oyununda ortaya qoyulan məbləğin on səkkiz misli qaytarılmalıdır. 90 nömrədən iki-iki bütün mümkün birləşmələrin sayı $4\,005$-ə bərabərdir və bunlardan hər bir tirajda onu çıxır. Verilən ambın çıxması ehtimalı, buna görə də, $1/400{,}5$-ə bərabərdir və bu halda lotereya ortaya qoyulan məbləğin $400{,}5$ mislini qaytarmalı olardı; üç-üç birləşmələr üçün o, bu məbləği $11\,748$ dəfə, dörd-dörd birləşmələr üçün $511\,038$ dəfə və beş-beş birləşmələr üçün $43\,949\,268$ dəfə artırmalı olardı; lotereya da oyunçulara bu imkanları verməkdən uzaqdır.

Fərz edək ki, urnda a sayda ağ və b sayda qara kürəcik vardır və urndan bir kürəcik çıxarılır və sonra o, yenidən urna qaytarılır: belə sual qoyulur ki, n tirajda m sayda ağ və $n-m$ sayda qara kürəcik çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir? Aydındır ki, hər bir tirajda mümkün halların sayı a üstəgəl b-yə bərabərdir. İkinci tirajın hər bir halı birinci tirajın bütün halları ilə kombinasiya oluna bilindiyindən, iki tirajda mümkün ola bilən bütün halların sayı a üstəgəl b binomunun kvadratına bərabərdir. Bu kvadratın ayrılışında a-nın kvadratı – iki dəfə ağ kürəcik çıxan halların sayı, a və b-nin hasilinin iki misli – ağ və qara kürəciklər çıxan halların sayı, b-nin kvadratı – iki dəfə qara kürəcik çıxan halların sayıdır. Bu qayda ilə davam etdikdə, ümumiyyətlə, tapmaq olur ki, a üstəgəl b binomunun n-ci dərəcəsi – n tirajda bütün mümkün olan halların sayını ifadə edir və bu ayrılışda a-nın m-ci dərəcəsinə vurulan həddi – m dəfə ağ, $n-m$ dəfə qara kürəcik çıxan halların sayını ifadə edir. Buna görə də, bu həddi qüvvət üstü n-ə bərabər olan binoma böldükdə, m dəfə ağ və $n-m$ dəfə qara kürəcik çıxması ehtimalını alarıq. a-nın a üstəgəl b-yə nisbəti – bir tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı, b-nin a üstəgəl b-yə nisbəti isə bir tirajda qara kürəcik çıxması ehtimalı olduğundan, n tirajda m ağ kürəcik çıxması ehtimalı – p üstəgəl q binomunun n-ci dərəcəsinin ayrılışında qüvvət üstü m olan p-nin vuruğudur: asanlıqla görmək olur ki, p üstəgəl q cəmi vahiddir. Binomun çox gözəl bu xassəsi ehtimal nəzəriyyəsində çox səmərəlidir.

Lakin ehtimal haqqında məsələlərin ən ümumi və birbaşa həlli – onları fərqlər tənliklərindən asılılığa gətirməkdir. Ehtimal ifadə edən funksiyanın ardıcıl qiymətlərini müqayisə etdikdə, dəyişənlər onlara uyğun fərqlər qədər artdıqda təklif olunan məsələ çox vaxt bu qiymətlər arasında sadə münasibətlərə gətirir. Bu – *adi* və ya *xüsusi fərqlərlə tənlik* adlanan münasibətdir: bir dəyişən olduqda adi, bir neçə dəyişən olduqda, xüsusi fərqlərli tənlik. Bir neçə misala baxaq.

Eyni bacarıqlı üç oyunçu aşağıdakı şərtlərlə oyunda iştirak edir. İlk iki oyunçudan rəqibini udan, üçüncü oyunçu ilə oynayır və əgər o, üçüncüyə qalib gəlirsə, onda oyun sona çatır. Əgər o uduzursa, onda qalib oyunçu digəri ilə oynayır və s. və oyun, oyunçulardan biri ardardınca digər iki oyunçunu udana qədər davam edir, bununla da, partiya sona çatır: partiyanın hər hansı n gedişdən sonra qurtaracağı ehtimalını tapmaq tələb olunur. Əvvəlcə oyunun məhz n gedişdən sonra başa çatacağı ehtimalını tapaq. Buna görə, oyunu udan oyunçu, oyuna n minus vahid gedişdən sonra başlamalıdır və həm bu, həm də növbəti oyunu udmalıdır. Əgər o, n minus vahid gedişini udmaq əvəzində öz rəqibi tərəfindən məğlub olsaydı və həm də, bu rəqib-qalib növbəti anda digər oyunçunu da udsaydı, onda oyun bu gedişdə sona çatmış olardı. Odur ki, oyunçulardan birinin n minus vahid gedişində partiyaya qoşulmasının ehtimalı – partiyanın məhz bu gedişdə sona çatması ehtimalına bərabərdir; bu oyunçu isə növbəti gedişi də udmalıdır ki, partiya n-ci gedişdə sona çatsın, bu halın ehtimalı yalnız əvvəlki ehtimalın yarısına bərabər olacaqdır. Bu ehtimal, aydındır ki, n ədədinin funksiyasıdır; deməli, bu funksiya, bu funksiyadakı n bir vahid azaldıldıqdan sonra onun yarısına bərabərdir. Bu bərabərlik – *adi sonlu fərqlərlə tənliklər* adlanan tənliklərdən biridir.

Bu tənliyin köməyilə partiyanın məhz verilən hər hansı gedişdə sona çatacağı ehtimalını asanlıqla təyin etmək olur. Aydındır ki, partiya ikinci gedişdən tez qurtara bilməz və buna görə də, ilk iki oyunçudan rəqibini udan oyunçu ikinci gedişdə üçüncü oyunçunu da hökmən udmalıdır; bu gedişdə partiyanın sona çatacağı ehtimalı, buna görə də, $1/2$-ə bərabərdir. Buradan əvvəlki tənliyə əsasən biz belə nəticəyə gəlirik ki, partiyanın sona çatmasının ardıcıl ehtimalları: üçüncü gediş üçün $1/4$-ə, dördüncü gediş üçün $1/8$-ə və s. bərabərdir, ümumiyyətlə, n-ci gediş üçün $1/2$-in qüvvət üstlərindən sonuncusu minus vahidə bərabər qüvvət üstü ilə təyin olunur. Bu qüvvət üstləri ilə götürülmüş $1/2$-lərin cəmi ($\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$, – H. M.) vahid minus n-ci gediş ehtimalına ($1-\frac{1}{2^{n-1}}$, H. M.) bərabərdir; bu – partiyanın ən çoxu n gedişdə sona çatacağı ehtimalıdır.

Ehtimalın hesablanması üçün ilk, az və ya çox çətin bir məsələyə baxaq, bu məsələni həll etmək mümkün olmuşdu və Paskal onu Fermata həll etmək üçün təklif etmişdi. Eyni bacarıqlı iki oyunçu – A və B bir-birilə belə bir şərtlə oynayırlar ki, kim ilk dəfə olaraq, digərinə verilən say dəfə qalib gələrsə, o oyunda ortaya qoyulan məbləğlərin cəmi qədər partiyanı udur; bir neçə gedişdən sonra oyunçular partiyanı başa çatdırmamış oyunu dayandırmağa razılaşırlar; sual olunur, bu məbləğ bunlar arasında necə paylaşdırılmalıdır? Aydındır ki, onların payları partiyanı udmaq üçün uyğun ehtimallara mütənasib olmalıdır; buna görə də, məsələ bu ehtimalların təyin olunmasına gətirilir. Bu

ehtimallar, aydındır ki, verilən ədədə çatmaq üçün, hər bir oyunçunun udması üçün çatışmayan xallar sayından asılıdır. Odur ki, oyunçu A-nın ehtimalı iki ədədin funksiyasıdır, bunları biz *göstəricilər* adlandıracağıq. Əgər hər iki oyunçu bir gediş etməyə də razılaşsaydılar (əgər bu gedişdən sonra ortadakı məbləğin paylaşdırılması partiyanı udmaq üçün yeni ehtimallarla mütənasib olarsa, bu razılaşma onların taleini dəyişmir), onda ya A bu gedişi udur və bu halda onun üçün çatışmayan xallar sayı bir vahid azalacaqdır və ya B onu udacaqdır və bu halda B üçün çatışmayan xallar sayı bir vahid az olacaqdır. Lakin bu hallardan hər birinin ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir; axtarılan funksiya – birinci göstəricisi bir vahid azaldılmış bu funksiya üstəgəl ikinci göstəricisi bir vahid azaldılmış funksiyanın yarısına bərabərdir. Bu bərabərlik *sonlu fərqlərlə tənliklər* adlanan tənliklərdən biridir.

Bu tənliyin köməyilə oyunçu A üçün ehtimalları, oyunçu A verilən say qədər xal topladığı halda ehtimalın və ya bu ehtimalı ifadə edən funksiyanın vahidə bərabər olmasını nəzərə alaraq (yoxsa birinci göstərici sıfra bərabər olduqda, bu funksiya ikinci göstəricisi ilə birlikdə sıfra çevrilir) və ən kiçik ədədlərdən başlayaraq təyin etmək olar. Beləliklə, fərz edərək ki, oyunçu A-ya yalnız bir xal çatışmır, biz onda taparıq ki, onun üçün uduş ehtimalları, B üçün bir və ya iki, və ya üç xal çatışmamasından asılı olaraq, $1/2$, $3/4$, $7/8$ -ə və s. bərabər olur. Ümumiyyətlə, onda bu ehtimal bərabərdir: vahid minus $1/2$ üstü B üçün çatışmayan xallar sayı. Sonra fərz edək ki, oyunçu A üçün iki xal çatışmır və oyunçu B üçün bir və ya iki və ya üç xal çatışmamasından asılı olaraq, bu ehtimalın $1/4$, $1/2$, $11/16$ və s. bərabər olduğunu tapırıq. Daha sonra fərz edirik ki, oyunçu A üçün üç xal çatışmır və s.

Hər hansı bir kəmiyyətin ardıcıl qiymətlərinin fərqlərlə tənliyinin köməyilə alınmasının bu üsulu uzun və çətindir. Həndəsəçilər bu tənliyi ödəyən göstəricilərin ümumi funksiyasının alınması metodlarını axtarırdılar ki, hər bir xüsusi halda bu funksiyada göstəricilərin uyğun qiymətlərini yerinə qoymaq mümkün olsun. Bu məsələyə ümumi halda baxaq. Buna görə üfiqi xətt üzrə yerləşən sıradakı hədlərdən elələrini götürək ki, bunlardan hər biri əvvəlkilərdən məlum qanun əsasında yaranır. Fərz edək ki, bu qanun bir neçə ardıcıl hədləri onların öz göstəriciləri ilə və ya onların sırada tutduğu yeri göstərən ədədlə əlaqələndirən tənliklə ifadə olunur. Bu həmin tənlikdir ki, mən onu *bir göstəricili sonlu fərqlərlə tənlik* adlandırıram. Bu tənliyin tərtibi və ya dərəcəsi onun kənar hədlərinin tərtiblərinin fərqidir. Bu tənliyin köməyilə sıranın hədlərini ardıcıl surətdə təyin etmək və onu qeyri-müəyyən olaraq davam etdirmək olar; lakin buna görə, sıranın tənliyin dərəcəsinə bərabər hədlərinin sayını bilmək zəruridir. Bu hədlər fərqlərlə tənliyin inteqralı və ya sıranın ümumi həddinin məhz ixtiyari sabit ifadələridir.

İndi əvvəlki sıranın hədlərinin üstündən üfüqü yerləşən hədlərinin ikinci sırasını götürək; ikinci sıranın hədlərinin üstündən üçüncü üfüqü sıranı da götürək və s. Sonsuzluğa qədər belə davam edərək, fərz edək ki, bütün bu sıraların hədləri şaquli və həm də üfüqü istiqamətlərdə götürülmüş bir neçə ardıcıl hədlərlə və bunların hər iki istiqamətdə yerlərini göstərən ədədlər arasında ümumi tənliklə əlaqələnmişdir. Bu həmin tənlikdir ki, mən onu *iki göstəricili sonlu xüsusi fərqlərlə tənlik* adlandırıram.

Oxşar qaydada əvvəlki sıraların müstəvisi üzərindən hədləri, uyğun olaraq, birinci müstəvi üstündə olan oxşar sıraların ikinci müstəvisini götürək; sonra, bu ikinci müstəvinin üzərindən oxşar sıraların üçüncü müstəvisini götürək və fərz edək ki, bu sıraların bütün hədləri uzunluq, en və hündürlük istiqamətlərində götürülmüş bir neçə ardıcıl hədlərlə və bu istiqamətlərdə onların yerini göstərən üç ədəd arasında tənliklə əlaqələndirilmişdir. Bu həmin tənlikdir ki, mən, onu *üç göstəricili sonlu xüsusi fərqlərlə tənlik* adlandırıram.

Nəhayət, məsələyə mücərrəd formada və fəzanın ölçülərindən asılı olmayaraq baxaraq, ümumiyyətlə, məlum sayda göstəricilərin funksiyaları olan kəmiyyətlər sisteminə baxaraq, fərz edək ki, bu kəmiyyətlər, bu göstəricilərə nəzərən onların fərqləri arasında və göstəricilərin özlərinin arasında bu kəmiyyətlərin sayı qədər tənlik vardır; bunlar – göstəricilərinin sayı məlum olan sonlu xüsusi fərqlərli tənliklər olacaqdır.

Bu tənliklərin köməyilə bu kəmiyyətləri ardıcıl surətdə təyin etmək olar. Bir göstəricili tənlik halında sıranın hədlərinin məlum sayını bilmək zəruri olduğu kimi, iki göstəricili tənlik halında da ümumi hədlərinin hər biri bu göstəricilərdən birinin ixtiyari funksiyası kimi ifadə oluna bilən sıraların bir və ya bir neçə sətirlərini bilmək zəruridir. Eynilə də, üç göstəricili tənlik halında da ümumi hədlərinin hər biri iki göstəricinin ixtiyari funksiyası kimi ifadə oluna bilən sıraların bir və ya bir neçə müstəvisini bilmək zəruridir və s. Bütün bu hallarda sıraların hər hansı bir həddini ardıcıl xaricetmə yolu ilə təyin etmək mümkündür. Xaricetmə aparılan tənliklərin hamısı eyni bir tənliklər sistemindən olduğundan, bu xaricetmələrin köməyilə alınmış ardıcıl hədlərin bütün ifadələri həddin yerini təyin edən göstəricilərin funksiyası olan bir ümumi ifadədə olmalıdır. Bu ifadə fərqlərlə təklif olunmuş tənliyin inteqralıdır və onun tapılması – inteqral hesabının predmetidir.

Teylor ilk dəfə «Methodus incrementarum» adı ilə sonlu fərqlərlə xətti tənlikləri tədqiq etmişdir. O, burada bir əmsallı və sonuncu həddi göstəricinin funksiyaları olan birinci tərtib tənliklərin inteqrallanması yolunu verir. Düzdür, ədədi və həndəsi silsilələrin hədlərinin əlaqələrinə həmişə baxılmışdır və bunlar fərqlərlə xətti tənliklərin ən sadə hallarıdır; lakin bunlara hələ belə nöqteyi-nəzərdən baxılmamışdı, bu nöqteyi-nəzər ümumi nəzəriyyə ilə qovuşaraq, bu nəzəriyyələrə gətirir və bunlar əsl kəşflər hesab olunur.

O zamanlara yaxın dövrdə, Muavr sabit əmsallı ixtiyari tərtib sonlu fərqlərlə tənliklərə – *qayıdışlı sıralar* (suites récurrentes) adlandırılan tənliklərə baxmışdı. O, bunları olduqca bacarıqlı üsulla inteqrallaya bilmişdi. İxtiraçıların yolu ilə getmək həmişə maraqlı olduğundan, mən Muavrın tutduğu yolu qayıdışlı sıraya tətbiq edərək şərh edəcəyəm; bu sıranın ardıcıl üç həddi arasında əlaqə verilir. Muavr əvvəlcə həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri arasında əlaqəyə və ya onu ifadə edən ikihədli tənliyə baxır. O, bu münasibəti əvvəlki hədlərə aid edərək, onu bu şəkildə sabit vuruğa vuraraq, hasili ilkin tənlikdən çıxır. Bu üsulla o, həndəsi silsilənin üç ardıcıl həddini əlaqələndirən tənlik alır. Sonra Muavr ikinci silsiləyə baxır, bu silsilənin ardıcıl hədlərinin nisbəti – indicə götürülən həmin vuruqdur. O, bu yeni silsilədə tənliyin hədlərinin göstəricisini oxşar qaydada bir vahid azaldır: bu şəkildə o, bu silsiləni ikinci silsilənin hədlərinin nisbətinə vurur və hasili ikinci silsilənin tənliyindən çıxır, bununla da o, onun birinci silsilə üçün tapdığı qayda ilə bu silsilənin üç ardıcıl hədləri arasında tamamilə oxşar münasibəti alır. Daha sonra o qeyd edir ki, hər iki silsiləni hədbəhəd topladıqda, həmin münasibət üç ixtiyari belə ardıcıl cəmlər arasında qüvvədə qalır. O, bu nisbətin əmsallarını təklif olunmuş qayıdışlı sıranın hədlərinin nisbətinin əmsalları ilə müqayisə edir və hər iki həndəsi silsilənin nisbətlərini təyin etmək məqsədilə ikinci dərəcəli tənlik tapır ki, bu tənliyin kökləri bu nisbətlər olur. Beləliklə, Muavr qayıdışlı sıranı hər biri ixtiyari sabitə vurulmuş iki həndəsi sıraya ayırır, bu sabit qayıdışlı sıranın ilk iki həddinin köməyi ilə tapılır. Bu ağıllı üsul mahiyyətcə Dalamberin sonradan sabit əmsallı sonsuz kiçilən fərqlərlə xətti tənliklərin inteqrallanması üçün tətbiq etdiyi və Laqranj tərəfindən sonlu fərqlərlə oxşar tənliklərə keçirilmiş olan metoddur.

Bundan sonra mən, sonlu xüsusi fərqlərlə xətti tənliklərə, əvvəlcə, qayıdışla – qayıdışlı sıralar adı ilə (rus., возвратно-возвратных; suites récurro-récurrentes) baxmışam. Bütün bu tənliklərin ən ümumi və ən sadə inteqrallanması qaydası, mənə elə gəlir ki, mənim doğuran funksiyaların baxılmasına əsaslandırdığım üsuldur ki, onun ideyası belədir.

Əgər t dəyişəninin artan qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılmış t dəyişəninin funksiyası olan A-nı götürsək, onda bu qüvvət üstlərindən hər hansı birinin əmsalı bu qüvvət üstünün funksiyası və ya bu dərəcənin göstəricisi olacaqdır. A – bu əmsalın və ya göstəricinin *doğuran funksiya* adlandırdığım funksiyasıdır.

İndi isə A sırasını həmin t dəyişəninin xətti funksiyasına, məs., vahid plyus bu dəyişənin iki mislinə vursaq, onda hasil yeni doğuran funksiya olacaqdır ki, burada dəyişənin hər hansı qüvvət üstünün əmsalı – A-da həmin qüvvət üstlü əmsal plyus bir vahid az qüvvət üstlü əmsalın iki mislidir. Beləliklə, hasildəki göstərici funksiya A-dakı göstərici funksiya plyus həmin iki misli götürülmüş

funksiya olacaqdır ki, bu funksiyada göstərici bir vahid azaldılmışdır. Hasilin ayrılışında bu göstərici funksiya, beləliklə, A-da göstərici funksiyanın törəməsi olacaqdır, elə törəmə ki, onu bu sonuncu funksiya qarşısında qoyulan δ xarakteristikası ilə ifadə etmək olur. Xarakteristika ilə göstərilən əməliyyat A-nın vuruğundan asılıdır, bu vuruğu B ilə işarə edəcəyik və fərz edəcəyik ki, A kimi o da t dəyişəninin qüvvət üstləri üzrə sıraya ayrılmışdır.

İndi yenə də, B-ni, A-nın B-yə hasilinə vursaq, bu, A-nın B-nin kvadratına hasilinə bərabər olacaqdır, onda üçüncü doğuran funksiya təşkil olunacaqdır ki, bu funksiyada t-nin hər hansı dəyişəninin əmsalı əvvəlki hasilin uyğun əmsalının oxşar törəməsi olacaqdır; buna görə də, onu əvvəlki törəmə qarşısında qoyulmuş həmin δ xarakteristikası ilə işarə etmək olar; onda bu xarakteristika A sırasına uyğun əmsalın qarşısında iki dəfə yazılacaqdır. Lakin onu iki dəfə yazmaq əvəzinə onu iki əmsalı ilə yazırlar.

Bu qayda ilə davam edərək, ümumi halda biz görəcəyik ki, A-nı B üstü n-ə vurduqdan sonra, əgər A-nın uyğun əmsalı qarşısında n üstlü δ xarakteristikasını yazsaq, hasildə t dəyişəninin hər hansı qüvvət üstlü əmsalı alınır.

Fərz edək ki, B, – vahid bölünsün t-dir; onda A-nın B-yə hasilində hər hansı qüvvət üstlü bu dəyişənin (t-nin) əmsalı, A-da, qüvvət üstü bir vahid artıq olan əmsal olacaqdır; buradan belə nəticə alınır ki, A-nın n dərəcəli B-yə hasilində bu əmsal, A-da, n vahid artıq dərəcəli əmsal olacaqdır.

C ilə vahid bölünsün t dəyişəni minus vahidi işarə edək; onda A-nın C-yə hasilində hər hansı qüvvət üstlü dəyişənin əmsalı – A sırasında onun bir vahid qüvvət üstlü əmsalı minus həmin sırada bu qüvvət üstlü əmsal olacaqdır; bu, deməli, göstəricisi bir vahid azaldılan bu sonuncu əmsalın sonlu fərqi olacaqdır. Beləliklə, A-nın qüvvət üstü n olan C-yə hasilində əmsal, – A-nın uyğun əmsalının n-ci fərqi olacaqdır.

Belə ki, burada B, – vahid plyus C-yə bərabər olduğundan, qüvvət üstü n olan B, – həmin qüvvət üstlü vahid plyus C binomuna bərabərdir. Buna görə də, bu qüvvət üstlərilə qeyd olunan binomların A-ya hasilindən sonra hər iki hasilin eyni olduğu aşkar olur. Lakin A-nın n üstlü B-yə hasilində hər hansı qüvvət üstü t dəyişəninin əmsalı, biz gördüyümüz kimi, A-da qüvvət üstlü n vahid böyük olan əmsaldır; deməli, bu əmsal n ədədi qədər artırılmış göstərici funksiyadır. A-nın vahid plyus C binomuna ayrılışına hasilində, biz əvvəlki mülahizələrə əsasən, A-nın C-nin ardıcıl dərəcələrinə hasilləri əvəzinə A-dakı göstərici funksiyanın ardıcıl fərqlərini yazaraq və bu funksiyanı C-dən asılı olmayan həddə vuraraq, uyğun əmsalları alarıq. Deməli, biz göstəricinin qeyri-müəyyən n qədər artırılmış hər hansı funksiyasını alırıq, bu funksiya qüvvət üstü n olan vahid plyus vahid binomunun uyğun olaraq, funksiyanın özünə və onun ardıcıl fərqlərinə vurulmuş əmsalları ilə ifadə olunur ki, bu da sıraların ardıcıl hədlərinin fərqləri vasitəsilə bu sıraların interpolyasiyasını verir, əgər qeyri-müəyyən n-ə kəsr kimi baxılarsa.

Eynilik tənliyi $-B$ bərabərdir C plyus vahid, C bərabərdir B minus vahid eynilik tənliyini verir. Bu sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini n qüvvət üstünə yüksəldib və bunları da A-ya vurduqda A-nın qüvvət üstü n olan C-yə hasilində t dəyişəninin verilmiş qüvvət üstlü əmsalı – A-da həmin qüvvət üstü ilə əmsalın n-ci sonlu fərqi olacaqdır. Qüvvət üstü n olan B minus vahid binomunun ayrılışına A-nın hasilində verilən qüvvət üstlü dəyişənin əmsalı – bu ayrılışın A-dakı həmin qüvvət üstlü əmsalının qiymətlərinə uyğun olaraq, vurulmuş hədlərinin cəminə bərabər olur, əgər bu əmsalın göstəricisi ardıcıl surətdə n, n minus vahid, n minus iki və s. qədər artırılarsa, göstərici funksiyanın n-ci sonlu fərqi funksiyanın ardıcıl qiymətlərilə ifadə olunur.

δ ilə A-da t dəyişəninin verilən qüvvət üstlü əmsalının B vuruğuna nəzərən törəməsini işarə edərək, C vuruğuna nəzərən törəməni Δ xarakteristikası ilə işarə edək. Əgər B bərabərdir C plyus vahid tənliyində δ, əvəzinə Δ yazsaq, onda əvvəlkinə əsasən, bu tənliyin hər iki tərəfini n-ci qüvvətə yüksəltsək, bərabərlik pozulmur, yalnız bu zaman ayrılışın hər bir həddində A-da dəyişənin verilən qüvvət üstlü əmsalı və ya göstərici funksiya, xarakteristikanın hər bir qüvvət üstündən sonra qoyulmalıdır, xarakteristikalardan asılı olmayan hədd isə bu funksiyaya vurulmalıdır. Bunlar C bərabərdir B minus vahid tənliyində, həmçinin B minus C bərabərdir vahid tənliyində də yerinə yetir. B və C əvəzinə δ və Δ yazsaq və bu sonuncu tənliyin hər iki tərəfini n-ci dərəcədən qüvvətə yüksəldib, sonra birinci hissənin ayrılışını yazsaq, bərabərlik pozulmur, yalnız bu zaman hər bir həddə göstərici funksiya δ və Δ-nın qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikalarından və qüvvətə yüksəldilmiş bu xarakteristikaların hasilindən sonra yazılmalıdır; bu funksiya yalnız ikinci hissədə vahid əvəzinə yazılmalıdır; bu funksiyanın ifadəsi, nəticədə, onun ardıcıl qiymətlərinin və fərqlərinin vasitəsilə alınır.

B və C vuruqlarının digər qiymətlərinə bu mülahizələri tətbiq etdikdə, biz aşağıdakı ümumi nəticəyə gəlirik: B və C-ni əlaqələndirə bilən bütün eynilik tənliklərinin ayrılışında B və C-də təmsil olunan t dəyişəninin funksiyalarının nə cür olmasından asılı olmayaraq, bu funksiyaları δ və Δ-nın uyğun xarakteristikaları ilə əvəz etmək olar, yalnız bu zaman göstərici funksiya qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikadan və qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikaların hasillərindən sonra yazılmalı, xarakteristikadan asılı olmayan hədlər isə bu funksiyaya vurulmalıdır. Doğrudan da, aydındır ki, əgər B və C-ni əlaqələndirən tənliyin, hər hansı söhbət gedən həddində r, – B-nin dərəcəsi, r', – C-nin dərəcəsidirsə, *doğuran* funksiyalardan onların əmsallarına keçmək üçün δ-ni B-nin və Δ-nı C-nin əvəzinə və dərəcələrin hasilini də yerinə yazmaq gərəkdir.

Bölmə mümkün olmadığı halda, Muavr bu nəticəni analoji genişləndirərək, qüvvət üstü kəsr olan kəmiyyətə qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyətin kökü kimi baxır, bu kökdə kökaltı kəmiyyət – kəsrin surətində göstərilən qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyət, kökün dərəcəsi – həmin kökün məxrəcidir. Sonra o görmüşdür ki, Dekart işaraləməsi üzrə eyni bir hərfin iki qüvvətinin hasili onların dərəcələrinin toplanmasına, nisbəti – bölünənin dərəcəsindən bölənin dərəcəsinin, lakin birincisi ikincisindən böyük olduqda, çıxılmasına gətirir. Vallis bu nəticəni birinci göstərici ikinci göstəriciyə bərabər və ya ondan kiçik olduğu hallar üçün genişləndirərək, bu fərqi ya sıfra bərabər götürür və ya onu mənfi edir. Onda o fərz edirdi ki, mənfi qüvvət üstü göstəricisi – vahidin müsbət, lakin həmin qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyətə nisbətidir. Bu mülahizələr onu, ümumi halda differensial birhədlilərin inteqrallanmasına gətirdi; buradan o, qüvvət üstü tam və müsbət ədəd olan differensial binomların xüsusi növ müəyyən inteqrallarını çıxardı. Sonradan o, bu inteqralları ifadə edən ədədlərin qanununu müşahidə edərək, həndəsəçiləri olduqca maraqlandıran və mənim yeni ehtimal nəzəriyyəmin əsaslarından biri olan müəyyən inteqrallar hesabının başlanğıcı sayılan bir sıra interpolyasiya və uğurlu induksiyalar vasitəsilə dairənin sahəsinin onun diametrinin kvadratına nisbətini sonsuz hasillə ifadə etmişdir; bu hasili sonsuz davam etdirməyib dayandırdıqda, tədricən bu nisbət alınır: analizin ən gözəl nəticələrindən biri. Lakin çox qəribədir ki, radikal qüvvətlərin kəsri dərəcələrini çox yaxşı araşdıran Vallis, bunları ondan əvvəlkilər kimi işarə etməyə davam etmişdir. Nyuton ilk dəfə, əgər səhv etmirəmsə, «Oldenburqa Məktublarında» bu qüvvətlərin işarələmələrini kəsri dərəcələr vasitəsilə daxil etmişdir. Binomun qüvvət üstlərinin göstəricisini onun ayrılışındakı hədlərin əmsalları ilə induksiya metodu ilə müqayisə edərək, bu metodu belə gözəl tətbiq edən Vallis, bu qüvvət üstü tam və müsbət olduğu halda, bu əmsalların qanununu müəyyən etmiş və onu analoji surətdə kəsri və mənfi qüvvət üstləri halına genişləndirmişdir. Dekart işarələnməsinə əsaslanan bu müxtəlif nəticələr, onun analizin inkişafına təsirini sübut edir. Dekart işarələməsinin daha üstün bir cəhəti də vardır ki, o,

loqarifmlər haqqında ən sadə və düzgün anlayış verir, bu loqarifmlər əslində eyni bir kəmiyyətin qüvvət üstlərinin göstəriciləridir, bunlar sonsuz kiçilən kəmiyyətlər qədər ardıcıl artaraq, bütün ədədləri ifadə edə bilirlər.

Lakin bu işarələmənin ən mühüm ümumiləşməsi, onun dəyişən göstəricilərə genişləndirilməsidir, bu isə ən yeni analizin ən məhsuldar istiqamətlərindən biri olan göstərici hesabını təşkil edir. Leybnits dəyişən göstəricilərli transsendent kəmiyyətləri birinci olaraq göstərmişdir və bunlarla o, sonlu funksiyanın təşkil olunduğu elementlər sistemini tamamlamış oldu, belə ki, dəyişənin hər bir aşkar sonlu funksiyası sonuncu analizdə toplama, çıxma, hasil və bölmə, sabit və ya dəyişən qüvvətlərə yüksəltmə vasitəsilə sadə kəmiyyətlərə gətirilir. Bu elementlərdən ibarət tənliklərin kökləri – dəyişənin qeyri-aşkar funksiyalarıdır. Beləliklə, dəyişən – hiperbolik loqarifmi vahid olan ədədin qüvvətləri sırasında göstəricinin loqarifminə bərabər olan qüvvətə bərabərdir, odur ki, dəyişənin loqarifmi qeyri-aşkar funksiyadır.

Leybnits, kəmiyyətlərə olduğu kimi, özünün differensial xarakteristikasına dərəcələr vermək fikrinə gəldi; amma bu halda bu dərəcələr eyni bir kəmiyyətin təkrarən vurulmasını deyil, eyni bir funksiyanın təkrarən differensiallamasını göstərəcəkdir. Dekart işarələməsinin bu ümumiləşdirilməsi Leybnitsi differensialların müsbət, inteqralların isə mənfi qüvvətlərinin analogiyasına gətirdi. Laqranj bu gözəl analogiyanı onun bütün təfərrüatı ilə izlədi; o, dəyişənlər sonlu və müxtəlif artımlar aldıqda, həmçinin bu artımlar sonsuz kiçilən olduqda, bu və digər hallarda fərqlərin və inteqralların başqa şəklə salınması üçün həm maraqlı, həm də faydalı ümumi düsturlara, induksiya metodunun nə vaxtsa olunmuş tətbiqlərindən ən gözəl sayılan bir sıra induksiyalara gətirib çıxardı. Lakin çətin hesab etdiyindən o, isbatlar vermədi. Doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi Dekart işarələməsini ixtiyari xarakteristikalara genişləndirir: bu nəzəriyyə bu xarakteristikaların göstərdiyi qüvvətə yüksəltmə və əməllər arasında analogiyanı aydın şəkildə sübut edir, odur ki, bu nəzəriyyəyə xarakteristikaların göstərici hesabı kimi də baxıla bilinər. Sıralara və fərqlər tənliklərinin inteqrallanmasına aid olan nə varsa, bu nəzəriyyədən son dərəcə asanlıqla alınır.

Ehtimalların hesablanmasının tətbiqi. Oyunlar haqqında

Oyunlarla ifadə olunan kombinasiyalar ehtimallar haqqında ilk tədqiqlərin predmeti olmuşdur. Bu kombinasiyaların intəhasız müxtəlifliyi arasında bir çoxu asanlıqla hesablanılır, digərləri olduqca çətin hesablanma tələb edir və kombinasiyalar çətinləşdikcə bu hesablamalardakı çətinliklərin də artması ilə bunları dəf etmək və maraq həndəsəçiləri analizin bu növünü getdikcə daha çox təkmilləşdirməyə sövq etdi. Biz əvvəl gördük ki, birləşmələr nəzəriyyəsinin köməyilə hər hansı bir lotereyada qazancı asanlıqla müəyyən etmək olur; lakin birə qarşı bir mərcini neçənci tirajda saxlamağı bilmək çox çətindir, məs., bütün nömrələrin çıxmasını. Əgər n – nömrələrin sayı, r – hər bir tirajda çıxan nömrələrin sayı, i isə tirajların naməlum sayıdırsa, onda bütün nömrələrin çıxması ehtimalının ifadəsi i-nin n-ci dərəcəsindən r sayda ardıcıl ədədlərin hasilinin sonlu fərqindən asılıdır. n ədədi xeyli böyük olduqda bu ehtimalın 1/2-ə bərabər alınmasına baxmayaraq, bu fərqi heç olmasa yaxşı yığılan sıraya ayırmadıqda, i-nin qiymətini tapmaq mümkün olmur. Buna çox böyük ədədlərin funksiyalarının yaxınlaşmaları üçün əvvəl göstərilmiş metodun köməyilə uğurla nail olmaq mümkündür. Beləliklə, biz belə nəticəyə gəlirik ki, əgər lotereya on min nömrədən təşkil olunmuşdursa və hər bir tirajda bunlardan yalnız biri çıxarılırsa, onda birə qarşı bir mərcini, yəni bütün nömrələrin 95 767 tirajdan sonra çıxacağı mərcini gəlmək sərfəli deyildir və həmin mərci 95 768 tiraj halında gəlmək sərfəlidir. Fransız lotereyasında 85-ci tirajda mərc gəlmək sərfəli deyil, 86-cı tirajda isə sərfəlidir.

Belə bir hala da baxaq: iki oyunçu – A və B *xaç* və *şəbəkə* oyununu belə bir qaydada oynayırlar ki, hər bir atılmada *xaç* düşdükdə A, B-yə bir jeton verir, *şəbəkə* düşdükdə B, A-ya bir jeton verir; B-də olan jetonların sayı məhduddur, A-nın jetonlarının sayı qeyri-məhduddur və partiya yalnız B-nin jetonları qurtardıqda sona çatır. Sual olunur, oyunçulardan birinin digərilə mərc gəlməsi üçün atmaların sayı nə qədər olmalıdır ki, oyun bitmiş hesab olunsun. Partiyanın i sayda atılmadan sonra sona çatacağı ehtimalının ifadəsi sıra ilə verilir, əgər B-nin jetonlarının sayı çox olarsa, bu sıra çoxlu həddlər və vuruqlardan ibarət olur; bu sıranın 1/2-ə bərabər olmasını təmin edən naməlum i-nin qiymətinin tapılması, bu sıranı olduqca yığılan sıraya gətirmək mümkün olmadıqda, mümkün olmazdı. İndicə şərh etdiyimiz metodu bu sıraya tətbiq edərək, naməlum i üçün çox sadə ifadə tapırıq, buradan isə belə nəticə alınır ki, məs., B-də yüz jeton olarsa, onda birə qarşı birdən bir qədər az şans vardır ki, partiya 23 780 atılmadan sonra sona yetsin və birə qarşı bir şansdan bir qədər çox şans vardır ki, partiya 23 781 atılmadan sonra başa çatsın.

Bu iki misal, verdiyimiz misallarla birlikdə, oyunlar üçün məsələlərin analizinin mükəmməlləşdirilməsinə nə cür təsir etdiyini göstərmək üçün kifayətdir.

Bərabər fərz olunan şanslar arasında mümkün ola bilən naməlum qeyri-bərabərliklər haqqında

Ehtimalların hesablanması nəticələrinə xüsusi diqqətəlayiq bu növ bərabərsizliklər xeyli təsir göstərir. *Xaç və şəbəkə* oyununa baxaq və fərz edək ki, metal pulun hər iki üzü eyni yüngüllüklə düşür; onda birinci atılmada *xaçın* düşməsi ehtimalı 1/2-ə bərabərdir, onun ardıcıl iki dəfə düşməsi ehtimalı 1/4-ə bərabərdir. Lakin, əgər metal pulun üzlərində qeyri-bərabərlik vardırsa və buna görə də, üzlərdən birinin digərindən çox düşməsi kimi üstünlüyü olursa və bu qeyri-bərabərliyin hansı üz üçün əlverişli olduğu məlum olmazsa, onda birinci atılmada *xaç* düşməsi ehtimalı yenə də 1/2 olacaqdır, çünki bu qeyri-bərabərlik haqqında bizim bilgisizliyimiz halında, əgər bu qeyri-bərabərlik düşən üz üçün əlverişlidirsə, sadə hadisənin ehtimalı bir o qədər də artır, əgər bu qeyri-bərabərlik onun üçün əlverişli deyildirsə, onda bu ehtimal o qədər də azalır. Lakin bu bilgisizliyimizdə *xaçın* iki dəfə ardıcıl düşməsi ehtimalı artır. Əslində bu ehtimal, birinci atılmada *xaçın* düşməsi ehtimalı ilə onun birinci dəfə *xaç* düşməsindən sonra ikinci dəfə də *xaç* düşməsi ehtimalına hasilinə bərabərdir; lakin birinci dəfə *xaç* düşməsi metal pulun qeyri-bərabər üzlü olmasının bu hal üçün əlverişli olduğu nəticəsinə gətirir; deməli, naməlum qeyri-bərabərlik bu halda ikinci atılmada *xaç* düşməsi ehtimalını artırır; o, aydındır ki, hər iki ehtimalın hasilini də artırır. Bu suala cavabı hesablamaq məqsədilə fərz edək ki, bu qeyri-bərabərlik sadə hadisənin ehtimalının iyirmidə bir qədər artması üçün əlverişlidir. Əgər bu hadisə *xaçın* düşməsi hadisəsidirsə, onun ehtimalı – 1/2 plyus 1/20 və ya 11/20, iki dəfə ardıcıl *xaç* düşməsidirsə, onda onun ehtimalı 11/20-nin kvadratı və ya 121/400 olacaqdır. Əgər *şəbəkə* düşməsi əlverişli hadisə olarsa, onda *xaçın* ehtimalı – 1/2 minus 1/20 və ya 9/20 olacaqdır, xaçın ard-ardınca iki dəfə düşməsi ehtimalı 81/400 olacaqdır. Qeyri-bərabərliyin bu hadisələrdən hansı üçün əlverişli olduğunu əvvəlcədən bilmək üçün heç bir əsas olmadığından, aydındır ki, «*xaç – xaç*» – mürəkkəb hadisəsinin ehtimalını tapmaq üçün əvvəlki iki ehtimalı toplamaq və bunların cəminin yarısını götürmək lazımdır, nəticədə bu ehtimal 101/400 -ə bərabər olur ki, bu da 1/4-in 1/400 qədər və ya 1/20-in artımının kvadratına bərabərdir ki, qeyri-bərabərlik onun əlverişli etdiyi hadisənin mümkünlüyünü bu qədər artırır. Oxşar olaraq «*şəbəkə – şəbəkə*» düşmə ehtimalı 101/400-ə bərabərdir; lakin «*xaç – şəbəkə*» və ya «*şəbəkə – xaç*» düşməsi ehtimallarından hər biri yalnız 99/400-ə bərabərdir, belə ki, bu dörd ehtimalın cəmi yəqinliyə və ya vahidə bərabər olmalıdır. Beləliklə, adi olaraq belə məlum olur ki, sadə hadisələr üçün əlverişli olan, eyni mümkün sayılan sabit və naməlum səbəblər eyni bir sadə hadisənin təkrar olunması ehtimalını həmişə artırır.

Atılma sayı cüt olduqda *xaç və şəbəkə* hər ikisi ya cüt dəfə, ya da tək dəfə düşməlidir. Bu hallardan hər birinin ehtimalı, əgər metal pulun hər iki üzünün düşməsi mümkünlüyü eyni olarsa, 1/2-ə bərabərdir; lakin bunlar arasında naməlum qeyri-bərabərlik olduqda, onda bu qeyri-bərabərlik həmişə birinci hal üçün əlverişli olur.

Eyni bacarıqlı iki oyunçu belə bir şərtlə oynayırlar ki, hər bir gedişdə oyunu uduzan öz rəqibinə jeton verir və partiya oyunçulardan birinin jetonu qurtarana qədər davam edir. Ehtimalların hesablanmasından bizə aydın olur ki, oyunun bərabərhüquqlu olması üçün oyunçuların oyunda

ortaya qoyduqları məbləğ onların jetonlarının sayına mütənasib olmalıdır. Lakin onların bacarıqları arasında kiçicik naməlum qeyri-bərabərlik olarsa, onda o, jetonların sayı az olan oyunçu üçün əlverişli olacaqdır. Əgər oyunçular öz jetonlarını iki dəfə, üç dəfə artıq götürməyi şərtləşsələr, onun partiyanı udması ehtimalı artır və bu ehtimal 1/2-ə bərabər olacaqdır və ya onların jetonlarını sayı aralarındakı nisbət eyni qalmaq şərtilə sonsuz artdığı hallarda belə, ikinci oyunçunun ehtimalı kimi olacaqdır.

Bu naməlum qeyri-bərabərlikləri təsadüfün şanslarına məruz qoyaraq onların təsirini düzəltmək olar. Məs., *xaç və şəbəkə* oyununda, əgər biz *xaçla* ikinci metal pulda düşən üzü həmişə adlandırmağı şərtləşsək, onda birinci pulda ard-ardınca* *xaç* düşməsi ehtimalı dörddə birə daha çox yaxınlaşacaqdır, nəinki bir pulun atılmasında. Bu sonuncu halda fərq birinci pulun əlverişli halı üçün naməlum qeyri-bərabərliyin verdiyi ehtimalın kiçik artımının kvadratına bərabərdir: digər halda bu fərq bu kvadratın dörd mislinin ikinci pul üçün uyğun kvadrata hasilinə bərabərdir.

Urna nömrələnmə qaydası ilə birdən yüzə qədər nömrələnmiş yüz nömrə atılmışdır və bunları qarışdırmaq məqsədilə urnu silkələdikdən sonra bunlardan biri çıxarılır; aydındır ki, bu qarışdırma yaxşı olmuşdursa, onda nömrələrin çıxması ehtimalları bərabər olacaqdır. Lakin bunların çıxmasında nömrələrin urna atılması qaydasında asılı olan cüzi fərqlərin olmaması üçün şübhə yaranmasın deyə, bu fərqləri nisbətən azaltmaq məqsədilə, bu nömrələri onları birinci urndan çıxardıqdan sonra qarışdırmaq üçün ikinci urna atırlar. Üçüncü, dördüncü və s. urnlar ikinci urndakı bu kiçicik fərqi azaldacaqdır.

Hadisələrin qeyri-müəyyən artması nəticəsində yaranan ehtimal qanunları haqqında

Hadisələrin gedişatını qeyri-sabit və düzgün olmayan edən, *təsadüf* adı ilə anladığımız dəyişən və naməlum səbəblər çərçivəsində bu hadisələrin sayının artması ilə nəzərə çarpacaq qədər, son dərəcədə bir düzgünlük yaranır ki, bu da qabaqcadan düşünülmüş niyyətdən asılılıq kimi görünmüş və onu İlahi qüvvənin varlığına sübut kimi saymışdılar. Lakin bu haqda düşünərək, biz tezliklə əmin oluruq ki, bu düzgünlük ən çox ehtimal olunan tez-tez baş verəcək sadə hadisələrin uyğun ehtimallarının aşkar olunmasıdır. Məs., içərisində ağ və qara kürəcik olan urndan hər dəfə çıxarılan kürəciyin urna qaytarıldığı fərz olunur və yeni tirajda da bu təkrar olunur. Çıxarılmış ağ kürəciklər sayının çıxarılmış qara kürəciklər sayına nisbəti ilkin tirajlarda, əksər hallarda, olduqca düzgün nəticə verməyəcəkdir; lakin bu qeyri-düzgünlüyün qeyri-sabit səbəbləri elə təsirlər yaradır ki, bunlar hadisələrin düzgün məcrada baş verməsi üçün növbə ilə əlverişli və əlverişsiz olur, bu təsirlər tirajların sayı çoxaldıqca bir-birini qarşılıqlı yox edərək, urndakı ağ kürəciklər sayının qara kürəciklər sayına nisbətini və ya hər bir tirajda urndan ağ və ya qara kürəciyin çıxmasının uyğun ehtimallarını get-gedə daha çox nəzərə çarpdırır. Buradan aşağıdakı teorem alınır.

Çıxarılmış ağ kürəciklər sayının çıxarılmış bütün kürəciklər sayına nisbətinin urndakı ağ kürəciklər sayının bütün kürəciklər sayına nisbətindən, verilmiş intervaldan artıq yayınmayacağı ehtimalı – fərz olunan intervalın nə qədər kiçik olmasından asılı olmayaraq, hadisələr sayını qeyri-müəyyən surətdə artırdıqda qeyri-müəyyən surətdə yəqinliyə yaxınlaşır.

Sağlam düşüncənin təlqin etdiyi bu teoremi analizin köməyilə isbat etmək çətin idi. Və bununla ilk olaraq məşğul olan məşhur həndəsəçi Yakob Bernulli bu teoremin özü verdiyi isbatına böyük əhəmiyyət verirdi. Doğuran funksiyalar hesabının bu predmetə tətbiqi, bu teoremi asanlıqla isbat etməklə yanaşı, müşahidə olunan hadisələrlə əlaqəli nisbətin onların uyğun mümkünlüklərilə əlaqəli əsl nisbətindən yalnız məlum sərhədlərdə yayınma ehtimalını da təyin edir.

Əvvəlki teoremdən ümumi qanun kimi baxılacaq bir nəticə çıxarmaq olar: təbiətin yaratdıqlarının nisbətləri bu yaradılmışlara külli miqdarda baxıldıqda, təxminən sabit qalır. Məs., illərin müxtəlifliyinə baxmayaraq, məhsulların cəmi uzun illər üçün eyni olaraq qalır; odur ki, hər şeyi nəzərə alan insan, təbiətin ona qeyri-bərabər bəxş etdiklərini bütün dövrlərə bərabər paylaşdıraraq, ilin mövsümlərinin qeyri-sabitliyindən özünü qoruya bilər. Mən əvvəlki qanundan mənəvi səbəblərdən yaranan təsirləri istisna etmirəm. Hər il üçün doğum sayının əhalinin sayına nisbəti və nigahların doğumlara nisbəti çox dəyişmir: Parisdə illik doğum sayı, demək olar ki, dəyişmir; eşitdiyimə görə, adi vaxtda, ünvan olmaması səbəbindən məktubların poçtla çatdırılmaması ildən-ilə az dəyişir; oxşar vəziyyət Londonda da müşahidə olunmuşdur.

Bundan başqa bu teoremdən belə nəticə alınır ki, qeyri-müəyyən davam olunan hadisələr sırasında requlyar və sabit səbəblərin təsiri zaman ötdükcə, qeyri-requlyar səbəblərin təsirini üstələməlidir. Bu vəziyyət lotereyadan alınan gəliri də əkinçilik məhsullarından alınan gəlir kimi ona görə labüd edir ki, onların fərz etdikləri şanslar oyunda ortaya qoyulan məbləğ çox olduqda onlara qazanc gətirir. Beləliklə, nəzərə alınarsa ki, əlverişli çoxsaylı şanslar cəmiyyətin əsası və dayağı olan idrakın, ədalətin və humanizmin ədədi prinsiplərinə riayət edilməsilə həmişə əlaqədardır, bu prinsiplərə əməl etmək böyük üstünlük, bunlardan yayınmaq – böyük nöqsandır. Hər kəs tarixə və özünün şəxsi təcrübəsinə nəzər salarsa, görər ki, bütün faktorlar bu hesabın nəticəsini təsdiq edir. İdraka və insanın təbii hüquqlarına əsaslanan qərarların, bunları daxil etmiş və qoruyub saxlamış xalqların uğurlu nəticələrinə nəzər salın. Həmçinin vicdanı öz əxlaqının əsası götürən dövlətlərə onun nə cür üstünlüklər verdiyinə baxın və görün ki, onlar öz vədlərini yerinə yetirməkdə ciddi dəqiqlik naminə verdikləri qurbanlara görə necə mükafatlanmışlar. Ölkə daxilində nə dərəcədə nəhəng bir etimad! Ətrafda necə bir nüfuz! Əksinə bir baxın, öz rəhbərlərinin hakimiyyət sevərliyi və xəyanətkarlığı ucbatından xalqlar tez-tez dərin bədbəxtliklərə düçar olmuşlar. Hər dəfə böyük dövlət qələbələrə böyük sevgidən başı gicəllənib dünyaya hökmranlığa can atdıqda, təhlükə altında olan insanları asılı olmamazlıq hissi ittifaqda birləşdirir. Qeyri-sabit səbəblər arasında müxtəlif dövlətlərin genişlənməsinə və kiçilməsinə oxşar olaraq, eynilə də, təbii çərçivələr sabit səbəblər kimi təsir göstərərək, nəhayət, qələbə qazanmalıdır. Buna görə də, dövlətin möhkəmliyi naminə, həm də xoşbəxtliyi naminə, bu sərhədləri keçmək olmaz, bu sərhədlərə onlar bu səbəblərin təsirindən aramsız olaraq qayıtmalıdırlar, necə ki, tüğyan edən fırtınadan qabaran dəniz suları ağırlıqdan öz hövzəsinə qayıdır. Bu, ehtimal hesabının çoxsaylı fəlakətli təcrübələr ilə təsdiqlənmiş nəticələrindən biridir. Daimi səbəblər nöqteyi-nəzərindən baxılan tarix maraq üçün faydadan çox elə faydanı ifadə etmiş olardı ki, o, insanlara ən yaxşı dərs verə bilmiş olsun. Bəzən bu səbəblərin qaçılmaz nəticələrinin təsadüfi təsirləri aşkar olunduqda, onların təsadüf nəticəsində baş verdiyini düşünürlər; məs., bir-birindən böyük dənizlər və ya böyük məsafə ilə aralı olan ərazilərdə yaşayan hər hansı xalqın digər xalqa tabe olması heç bir vəhclə qəbulolunmazdır. Belə iddia etmək olar ki, zaman ötdükcə bu sabit səbəb, həmin anlamda zaman ötdükcə aşkar olunan dəyişkən səbəblərlə həmişə birləşərək, nəhayət, onlar arasında ən güclüsünə rast gələcəkdir ki, tabe xalqa təbii asılı olmamazlığını qaytarsın və ya onu onunla qonşu hər hansı güclü dövlətə birləşdirsin.

Təsadüfi analizin ən mühüm hallarının əksəriyyətində, sadə hadisələrin mümkünlükləri məlum olmur və biz, olub keçmiş hadisələrdə bizim səbəblər barədə bunlardan asılı fərziyyələrimizdə bir göstəriş axtarmaq məcburiyyətində oluruq. Doğuran funksiyalar analizini müşahidə olunmuş hadisələrdən çıxarılmış nəticələrin yuxarıda qeyd olunmuş ehtimal prinsipinə tətbiq etdikdə, biz aşağıdakı teoremi alırıq.

Hadisə sadə olarsa və ya bir neçə sadə hadisədən ibarət olarsa, məs., oyun partiyası çox dəfə təkrar olunmuşdursa, onda sadə hadisələrin müşahidələnənini ən ehtimallı edən mümkünlüklər – ən doğruyaoxşar müşahidənin göstərdiyi mümkünlüklərdir: müşahidə olunan hadisə təkrar olunduqca, bu doğruyaoxşarlıq artır və o, təkrar olunma sayı sonsuz olduqda, nəhayət, yəqinliklə qovuşur.

Burada iki cür yaxınlaşma mümkündür: bunlardan biri – baş vermiş hadisəyə, ən böyük doğruyaoxşarlıq şamil edən mümkünlüklərin bu və ya digər tərəfdən götürülmüş sərhədlərinə aiddir, ikinci yaxınlaşma isə bu mümkünlüklərin bu sərhədlər arasında olması ehtimalına aiddir. Mürəkkəb hadisənin get-gedə daha çox dəfə təkrar olunması, əgər bu sərhədlər eyni qalarsa, bu ehtimalı artırır; bu təkrarlanma, əgər ehtimal dəyişməzsə, bu sərhədlərin arasını daraldır: sonsuzluqda bu məsafə sıfra çevrilir, ehtimal isə yəqinliyə keçir.

* şərti mənada.

Əgər bu teorem Avropanın müxtəlif ölkələrində doğulan oğlanlar sayının qızlar sayına nisbətinə tətbiq olunarsa, onda bu nisbət hər yerdə təqribən, 22-nin 21-ə nisbətinə bərabər olub, oğlanların ən ehtimallı çox yüngül doğumunu sübut edir. Bu nisbətin Neapol və Peterburqda da belə olduğunu nəzərə alaraq, biz görürük ki, bu mənada iqlimin təsiri hiss olunmazdır. Buna görə ümumi fikrə zidd olaraq, belə düşünmək olar ki, oğlan doğumları hətta şərqdə də üstünlük təşkil edir. Buna görə də, mən, Misirə ezam olunmuş fransız alimlərinə bu maraqlı məsələ ilə məşğul olmağı təklif etdim: lakin doğum barədə dəqiq məlumatların alınmasındakı çətinlik onlara bu məsələni həll etməyə imkan vermədi. Xoşbəxtlikdən Qumboldt yeni verilənlər əsasında bu məsələni diqqətdən kənarda qoymadı; o, bu verilənləri Amerikada müşahidə etmiş və ağılla, fərasətlə, inadla və cəsarətlə toplamışdı. O, cəngəlliklər arasında da oğlan doğumlarının qız doğumlarına nisbətinin Parisdə müşahidə edilmiş kimi olduğunu tapmışdı, bu isə oğlan doğumlarının üstünlüyünə insan nəsli üçün ümumi qanun kimi baxmaq məcburiyyəti yaratmalıdır. Bu mənada müxtəlif növ heyvanlar üçün qanunlar təbiətşünasların diqqətini, məncə, özünə cəlb etməlidir.

Oğlan doğumlarının qız doğumlarına nisbəti vahiddən çox az fərqlənir, lakin hər hansı bir yerdə müşahidə olunmuş olduqca çoxsaylı doğumlar, bu mənada ümumi qanuna zidd nəticə verə bilərdi və bununla yanaşı, bizim buradan bu qanunun olmaması nəticəsinə gəlməyə haqqımız yoxdur. Belə bir nəticə çıxarmaq üçün çox böyük ədədlər tətbiq olunmalıdır və belə nəticənin böyük ehtimalla göstərildiyinə əmin olmaq gərəkdir. Məs., Byuffon özünün siyasi arifmetikasında bir neçə Burqundiya icmasında qız doğumlarının oğlan doğumlarından çox olmasını misal gətirmişdir. Bu icmalardan *Carcelle-le Griqnon* icması 2009-cu il üçün beş il ərzində 1026 qız və 983 oğlan doğulacağını bildirir. Bu ədədlər o qədər böyük olmasalar da, bunlar qız doğulmasının çox ehtimallı olmasını yalnız 9/10 ehtimalı ilə verir; bu ehtimalın *xaç* və *şəbəkə* oyununda *xaçın* dörd dəfə ardıcıl düşməməsi ehtimalından az olmasına baxmayaraq, bu anomaliyanın səbəbini tapmaq üçün kifayət deyildir; əgər bu icmada doğulma yüzillik ərzində müşahidə olunsaydı, bu anomaliya güman ki, nəzərə çarpmazdı.

Doğum barədə doğum şəhadətnamələri kitabları vətəndaşların vəziyyətlərinin təminatı məqsədilə diqqətlə tərtib olunmadığından, böyük bir dövlətin əhalisinin çox çətin və dəqiq yerinə yetirilməsi çətin olan əməliyyata – əhalinin siyahıya alınmasına müraciət etmədən təyin etmək olar. Lakin buna görə əhalinin illik doğumlara nisbəti məlum olmalıdır. Buna nail olmaq üçün ən dəqiq üsul ondan ibarətdir ki, 1) ümumi nəticənin yerləşdiyi mövqenin şəraitindən asılı olmaması üçün dövlətdə elə departamentlər seçilməlidir ki, onlar bu dövlətin bütün ərazilərində təqribən eyni cür paylanmış olsunlar; 2) hər hansı verilmiş dövr üçün hər bir departamentdə bir neçə icmanın əhalisinin siyahısı diqqətlə aparılmalıdır; 3) bu dövrdən əvvəl və bu dövrdən sonrakı bir neçə il ərzində doğum siyahılarının köməyilə illik doğumlara uyğun orta ədəd tapılmalıdır. Əhalinin sayına bölünmüş bu ədəd, siyahıyaalma çox olduqca, hərillik doğumların sayının əhalinin sayına nisbətini daha doğru ifadə edir. Dövlət belə siyahıyaalmanın xeyirli olmasına əmin olaraq, mənim xahişimə əsasən onun yerinə yetirilməsinə razılıq verdi. Bütün Fransa üzrə eynimövqeli otuz departamentdə elə icmalar qeyd olunmuşdur ki, bunlar ən dəqiq məlumatlar verə bilirdi. Bu icmalarda siyahıyaalma, ümumi nəticədə, 23 sentyabr 1802-ci il üçün 2 037 615 nəfər sakin olduğunu qeydə almışdı. Bu icmalarda 1800, 1801 və 1802 illəri üçün doğum sayları siyahısı aşağıdakı nəticələri vermişdi:

doğum	nigah	ölüm halları
110 312 oğlan 105 287 qız	46 037	103 659 kişi 99 443 qadın

Əhali sayının illik doğum sayına nisbəti 28 352 845 -in 1 000 000 nisbəti olur; bu nisbət əvvəlki illərdə hesablananlarla müqayisədə böyükdür. Bu nisbəti Fransadakı illik doğum sayına vurduqda, bu dövlətin əhalisinin sayını alırıq. Lakin bu qayda ilə alınan əhali sayının əhalinin gerçək sayından verilən bir sərhədi aşmaması ehtimalı nəyə bərabərdir? Bu məsələni həll edərək və onun həllinə əvvəlki verilənləri tətbiq edərək, mən tapdım ki, Fransada hər ildəki doğum sayının bir milyona bərabər olduğu fərz olunarsa, əhalinin sayı 28 352 845 nəfər olacaqdır, bu isə bu nəticənin xətasının hətta yarımmilyona bərabər olmayacağına, bir şansa qarşı üç yüz min şansın olacağına dəlalət edir.

Əvvəlki siyahılara görə oğlan doğumları sayının qız doğumları sayına nisbəti – 22-nin 21-ə nisbətinə bərabərdir; nigahlar sayının doğum saylarına nisbəti – üçün on dördə nisbəti kimidir.

Parisdə hər iki cinsdən uşaqların xaç suyuna salınması 22-nin 21-ə nisbətindən bir qədər yayınır. 1745-dən – doğum barədə doğum şəhadətnaməsi kitablarında cins də qeyd olunmağa başlandığı zamandan bu paytaxtda 1784-ün sonuna qədər 393 386 oğlan və 377 555 qız xaç suyuna salınmışdı. Bu ədədlərin nisbəti təqribən 25-in 24-ə nisbətinə bərabərdir; belə çıxır ki, Parisdə hər iki cinsdən xaç suyuna salınanların sayını bərabərləşdirmək üçün hansısa xüsusi səbəb vardır.

Əgər bu məsələyə ehtimal hesabını tətbiq etsək, onda bu səbəbin olması üçün bir şansa qarşı 238 şansın olduğunu taparıq, bu isə bu səbəbin axtarılmasına kifayət qədər haqq verir. Mən bu haqda fikirləşərkən, mənə belə gəldi ki, nəzərə çarpan bu fərq ondan asılıdır ki, kənd və əyalətlərdən olan valideynlər oğlan uşaqlarını özlərində saxlamaqda müəyyən üstünlük olduğunu düşünərək, onları Parisdəki atılmış uşaqlar üçün Yetimxanaya qızlarla müqayisədə daha az göndərirdilər, bu isə iki cinsdən doğum saylarının nisbətindən də aydın ola bilərdi; məhz bu Yetimxananın siyahısı mənə bunu sübut etdi. Bu Yetimxanaya 1745-in əvvəlindən 1809-un sonuna qədər 163 499 oğlan və 159 405 qız qəbul olunmuşdu. Bu ədədlərdən birincisi ikincisindən yalnız otuz səkkizdə bir qədər artıqdır, əslində isə bu heç olmasa, iyirmi dörddə bir qədər artıq olmalı idi. Bu səbəbin mövcudluğunu o da sübut edir ki, əgər atılmış uşaqlar nəzərə alınmazsa, Parisdə doğulmuş oğlan uşaqları sayının qız uşaqları sayına nisbəti, bütün Fransada oldığu kimi, 22-nin 21-ə nisbətinə bərabərdir.

Parisdə də, Londonda da oğlan doğumlarının qız doğumlarından üstünlüyündəki sabitlik, bəzi alimlərin müşahidə apardıqları müddət ərzində İlahi bir qüvvənin müdaxiləsi kimi görünürdü və onlar düşünürdülər ki, bu qüvvə olmasaydı, hadisələrin gedişini aramsız pozan qeyri-requlyar səbəblər, qızların illik doğumlarının oğlan doğumlarından üstünlüyünü göstərməliydi.

Lakin bu dəlil belə bir yeni misaldır ki, çox vaxt sui-istifadə olunan son nəticələr, problemlərin daha dərin tədqiqində, bunların həlli üçün zəruru verilənlər olduqda həmişə itir. Söhbət gedən sabitlik requlyar səbəblərin nəticəsidir ki, bunlar illik doğum sayı olduqca çox olduqda təsadüfdən asılı olan anomaliyaları üstələyən oğlan doğumlarına üstünlük verir. Bu sabitliyin uzun zaman müddətində qalacağı ehtimalının tapılması, təsadüflər analizinin o sahəsinə aiddir ki, burada keçmiş hadisələrdən gələcək hadisələrin ehtimalına keçilir, nəticədə isə bizə bəlli olur ki, Parisdə 1745-dən 1784-ə qədər müşahidə olunmuş doğumlar üzrə oğlanların illik doğumları yüzillik ərzində qız doğumlarını həmişə üstələyəcəkdir: beləliklə, təəccüblənməyə heç bir dəlil-sübut yoxdur ki, yarımyüzillikdə də eyni nəticə müşahidə olunmuşdu.

Belə bir misala baxaq ki, hadisələrin sayı artdıqca onlar sabit münasibətləri necə aşkar edir? Dairəvi qaydada düzülmüş urnlar sırasına baxaq və bunlardan hər birində çox sayda ağ və qara kürəciklər vardır; deməli, bu urnlarda ağ kürəciklərlə qaraların nisbətləri əvvəlcə olduqca müxtəlif ola bilər, məs., bu urnlardan hansı birində yalnız ağ, digər hər hansı birində yalnız qara kürəciklər olan hal. Əgər biz birinci urndan kürəcik çıxarıb, onu ikinci urna qoyaraq, bu urndakı kürəcikləri yaxşıca qarışdırdıqdan sonra, ondan bir kürəcik çıxarıb, onu üçüncü urna qoyaraq və i. a., sonuncu urna qədər bu qayda ilə davam edərək, sonuncudan çıxarılmış kürəciyi birinci urna qoyaraq, biz bu tirajlar sırasını qeyri-müəyyən olaraq davam etdirə bilərik; ehtimalların analizi bizə göstərir ki, bu urnlarda ağ kürəciklərlə qara kürəciklərin nisbətləri, nəhayət, eyni olur və urnlardakı bütün ağ kürəciklər cəminin bütün qara kürəciklər cəminə nisbətinə bərabər olur. Onda bu dəyişdirilmə qaydasının requlyarlığından nisbətlərdəki ilkin düzgün olmamazlıq zaman ötdükcə itir ki, bu da nəticədə ən sadə qaydanın öz yerini tutmasına səbəb olur. Əgər biz bu urnlar arasında yeni urnlar

yerləşdirsək və bu urnlardakı ağ kürəciklər cəminin qara kürəciklər cəminə nisbəti əvvəlki nisbətdən fərqli olarsa və biz, bütün bu urnlardan kürəciklərin çıxarılmasını əvvəlki qayda ilə davam etdirsək, əvvəlki urnlarda qərarlaşmış o sadə qayda əvvəlcə pozulacaqdır və ağ kürəciklər sayının qaraların sayına nisbəti düzgün olmayacaqdır; lakin bu düzgünolmamazlıq get-gedə itəcəkdir və yeni qayda ilə əvəz olunacaqdır ki, bu qayda, nəhayət, urnlardakı ağ kürəciklər sayının qaraların sayına nisbətlərinin bərabərliyi qaydası, qərarlaşacaqdır. Bu nəticəni təbiətdəki bütün birləşmələrə genişləndirmək olar, belə ki, bu birləşmələrə xas olan sabit qüvvələr düzgün təsir tərzini bərqərar edir, bu isə qəribə qanunlarla idarəolunan sistemin xaosunun içindən belə özünü biruzə verir.

Belə görünür ki, baş verən hadisələr və ya proseslər, hətta təsadüfdən ən çox asılı olanları belə, demək olar ki, bunların sayı artdıqca aramsız olaraq tamamilə müəyyən münasibətlərə yaxınlaşmağa meylli olur; odur ki, əgər biz bu münasibətlərin hər birini hər iki tərəfdən ixtiyari uzunluqlu parça ilə məhdudlaşdırsaq, onda müşahidələrin orta nəticəsi bu parça daxilində yerləşəcəkdir və əvvəl-axır yəqinlikdən yalnız ixtiyari verilən kəmiyyətdən kiçik olan kəmiyyət qədər fərqlənəcəkdir. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələrə tətbiq edilən ehtimal hesabı vasitəsilə bu münasibətlərin mövcudluğunu dərk etmək olar. Lakin bunların səbəblərini araşdırmazdan əvvəl, həm də faydasız düşüncələrdə çaşıb qalmamaq üçün, bu münasibətlərin təsadüfdən asılı olmayan anomaliyalar kimi baxılmasını istisna edən ehtimallarla göstərilməsinə əmin olmaq zəruridir. Doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi bu ehtimal üçün olduqca sadə ifadə verir, bu ifadə differensial kəmiyyətin hasilinin inteqrallanmasından alınır, bu ehtimal üçün çoxsaylı müşahidələrdən alınmış bu nəticə gerçək ehtimaldan vahiddən kiçik və məsələnin növündən asılı olan bir sabit qədər yayınır, bu sabitin qüvvət üstü yayınma kvadratının müşahidələr sayına nisbətinə bərabərdir. Verilmiş sərhədlərlə götürülmüş inteqralın sərhədləri müsbət və mənfi sonsuzluq olan həmin inteqrala nisbəti – gerçəkdən yayınma ehtimalının sərhədlər arasında olmasını ifadə edəcəkdir. Çoxsaylı müşahidələrlə göstərilən nəticələrin ümumi ehtimal qanunu belədir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin natural fəlsəfəyə tətbiqi

Təbiət hadisələri və ya proseslərinin əksəriyyəti o qədər kənar səbəblərlə müşayiət olunur ki, bunlara çoxsaylı dəyişikliklər yaradan o qədər səbəblər qarışır ki, onları dərk etmək olduqca çətin olur. Bunların əsl mahiyyətini dərk etmək üçün yalnız təkrarlanan müşahidələr və sınaqlar aparılmalıdır ki, kənar təsirlər bir-birini yox etsinlər və orta nəticələr bu hadisələri və ya prosesləri və onların müxtəlif elementlərini aşkar edə bilsinlər. Bu müşahidələr nə qədər çox olarsa və nə qədər az fərqlənərsə, bunların nəticələri gerçəkliyə o qədər yaxın olur. Bu axırıncı şərtə müşahidə metodlarının seçilməsi, alətlərin dəqiqliyi və dəqiqlilik sayəsində nail olunur. Ehtimal nəzəriyyəsinin köməyilə və ən münasib (əlverişli) orta nəticələr və ya ən az xəta ilə olan nəticələr təyin olunur. Lakin bu kifayət deyildir; bundan başqa bu nəticələrin xətalarının verilən sərhədlər arasında olması ehtimalı qiymətləndirilməlidir; bunsuz biz, yalnız alınmış dəqiqliyin dərəcəsi haqqında mükəmməl olmayan anlayış almış olarıq. Buna görə də, bu məqsədə xidmət edən düsturlar elmi metodun əsl təkmilləşdirilməsini və onun mühüm əlavəsini təşkil edir. Bu düsturların analizi ehtimal nəzəriyyəsində ən incə və çətin sahədir; bu analiz mənim bu nəzəriyyə üzrə dərc olunmuş əsərimdə əsas predmetlərdən birini təşkil edir, burada mən üstünlüyü olan elə bir neçə düstur tapmışam ki, bunlar xətaların ehtimal qanunlarından asılı deyildirlər və bilavasitə müşahidələrlə verilən təsadüfi kəmiyyətləri və onların ifadələrini özlərində ehtiva edirlər.

Hər bir müşahidənin analitik ifadəsi təyin olunması tələb olunan elementlərin funksiyasıdır; və əgər bu elementlər təxminən məlum olarsa, bu funksiya bunların düzəlişlərinin xətti funksiyasına çevrilir. Bu funksiyanı müşahidənin özünə bərabərləşdirərək, *şərti tənlik* adlandırılan tənlik alırıq. Əgər oxşar tənliklərin sayı çox olarsa, onda bunlar elə kombinasiya olunmalıdırlar ki, nəticədə elementlərin sayı qədər sonuncu tənliklər alınsın, bu elementlərə düzəlişləri isə sonradan bu tənlikləri həll edərək təyin etmək mümkün olsun. Görəsən, nəticədə alınası sonuncu tənliklərin alınması üçün tənliklərin kombinasiya üsullarından hansı daha əlverişlidir? Xətaların ehtimal qanunu necə bir qanundur ki, bu qanunun bu xətalardan alınan elementləri hələ də olduqca dəyişkəndirlər? Bu suallara cavabı ehtimal nəzəriyyəsindən öyrənəcəyik. Şərti tənliklərin köməyi ilə sonuncu tənliyin qurulması bu şərti tənliklərdən hər birinin qeyri-müəyyən vuruğa vurulmasına və bu hadisələrin birləşdirilməsinə gətirir. Deməli, vuruqların elə sistemi seçilməlidir ki, bu sistemdə ən kiçik xəta gözlənilsin. Lakin hər hansı elementin mümkün olan xətaları onların uyğun ehtimallarına vurularsa, onda aydındır ki, ən əlverişli sistem – müsbət işarə ilə götürülmüş bütün hadisələrin cəmi *minimum* olan sistem olacaqdır, çünki müsbət və ya mənfi xətaya həmişə itki kimi baxılmalıdır. Beləliklə, hasillərin bu cəmini qurduqda, *minimum* şərti münasib vuruqlar sistemini və ya ən əlverişli sistemi təyin edəcəkdir. Beləliklə, biz tapırıq ki, bu sistem – hər bir şərti tənlikdə elementlərin əmsallarının sistemidir, odur ki, ilk sonuncu tənlik – hər bir şərti tənliyin uyğun olaraq, birinci elementinin əmsalına vurulması ilə və bu qayda ilə vurulmuş bütün belə tənliklərin birləşdirilməsi ilə qurulur. İkinci sonuncu tənlik də, ikinci elementin əmsalları ilə oxşar qayda ilə davransaq, analoji alınır və i. a. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələr toplusunda əks olunan hadisə və ya proseslərin elementləri və qanunları daha çox aydınlıqla aşkarlana bilinir.

Hər bir elementdə arzu olunmaz xətaların ehtimali-hiperbolik loqarifmi vahidə bərabər olan, mənfi işarə ilə götürülmüş və xətalar ehtimalının modulu kimi baxılan sabit əmsala vurulmuş, xətanın kvadratına bərabər olan qüvvətə yüksəldilmiş ədədə mütənasibdir, çünki, əgər xəta dəyişməz qalarsa, xəta artdıqda onun ehtimalı sürətlə azalır; odur ki, əgər mən belə ifadə edə bilərəmsə, alınmış elementin çəkisi, bu modul nə qədər böyük olarsa, o qədər çox gerçəyə yaxın olur. Buna görə də, mən bu modulu elementin və ya nəticənin *çəkisi* adlandıracağam. Bu çəki ən əlverişli vuruqlar sistemindən böyük mümkün qiymətə malikdir; bu isə bu sistemə digərləri ilə müqayisədə üstünlük verir. Ümumi ağırlıq mərkəzinə görə müqayisə olunan həm bu çəkinin, həm də cisimlərin çəkisinin bu gözəl analogiyasından aydın olur ki, əgər hər hansı bir element çoxsaylı müşahidələrdən təşkil olunmuş müxtəlif sistemlərlə verilərsə, onda bütün nəticələrdən ən əlverişlisi olan orta nəticə ayrılıqda götürülmüş hər bir nəticənin özünün çəkisinin hasillərinin cəminin bütün çəkilərin cəminə nisbətinə bərabərdir.

Bundan başqa, müxtəlif sistemlərin nəticəsinin ümumi çəkisi onların ayrı-ayrılıqdakı çəkilərinin cəminə bərabərdir, odur ki, bütün bunların birlikdə götürülmüş orta nəticəsinin xətaları ehtimali-hiperbolik loqarifmi vahidə bərabər olan, bütün çəkilərin cəminə vurulmuş mənfi işarə ilə götürülmüş xətanın kvadratına bərabər olan qüvvətə yüksəldilmiş ədədə mütənasibdir. Əslində hər bir çəki hər bir sistemin xətalarının ehtimal qanunundan asılıdır, bu qanun isə demək olar ki, həmişə naməlumdur; lakin sistemin müşahidələrinin onların orta qiymətlərindən yayınmaları vasitəsilə bu qanunu özündə ehtiva edən vuruğu xaric etmək mənə müyəssər oldu. Beləliklə, çoxlu sayda müşahidələr toplusu ilə əldə olunmuş nəticələr haqqında bizim bilgilərimizi genişləndirmək üçün yaxşı olardı ki, hər bir nəticə ilə yanaşı onun uyğun çəkisi də yazılsın; bu məqsəd üçün analiz bizi ümumi və sadə metodlarla təmin edir. Xətaların ehtimal qanununu ifadə edən üstlü funksiya bu şəkildə alındıqda, biz belə bir ehtimala malik oluruq ki, nəticənin xətası verilən sərhədlərdə yerləşir, üstlü funksiyanın xətanın differensialına hasilinin inteqralı bu sərhədlərdə götürülərək, nəticənin çəkisinin kvadrat kökünün vahid diametrli çevrəyə nisbətinə vurulmalıdır. Buradan belə bir nəticə alınır ki, eyni bir ehtimallı nəticələrin xətaları onların çəkilərinin kvadrat köklərinə tərs mütənasibdir; bu isə onların nisbi dəqiqliklərinin müqayisəsinə xidmət edə bilər. Bu metodu müvəffəqiyyətlə tətbiq etmək üçün müşahidələrin və ya sınaqların şərtləri elə surətdə müxtəlifləşdirilməlidir ki, xətanın dəyişməz səbəblərinə təsadüf olunmasın. Müşahidələrin sayı olduqca çox olmalıdır, təyin olunası elementlər çox olduqca bunlar da çox olmalıdır, belə ki, nəticənin orta çəkisi müşahidələr sayının elementlər sayına nisbəti ilə birlikdə artır. Bundan başqa, bu müşahidələrdə elementlərin dəyişikliklərinin müxtəlif cür olması zəruridir, çünki əgər iki elementin dəyişikliyi tamamilə eyni olardısa, onda onların əmsalları şərti tənliklərdə mütənasib olardı, onda bu elementlər birlikdə bir məchulla ifadə olunardı ki, bu da onları bu müşahidələr üzrə

fərqləndirməyi mümkünsüz etmiş olardı. Nəhayət, zəruridir ki, müşahidələr dəqiq olsun: bütün şərtlərdən ən birincisi olan bu şərt nəticənin çəkisini olduqca artırır, bu nəticənin ifadəsinin böləni – müşahidələrin bu nəticədən yayınmaları kvadratlarının cəmidir. Belə ehtiyatlı tədbirlərdə əvvəlki metoddan istifadə etmək və çoxsaylı müşahidələrdən çıxarılmış nəticələrin etibarlılıq dərəcəsini qiymətləndirmək mümkün olacaqdır.

Şərti tənliklərdən son tənliklərin çıxarılması üçün indicə verdiyimiz qayda ona gətirilir ki, müşahidələr xətalarının kvadratlar cəmi *minimumlaşdırılsın*, çünki hər bir şərti tənlik müşahidə ilə onun xətası cəmi ilə əvəzləmədən sonra dəqiqləşir; əgər bu tənlikdən bu xətanın ifadəsi təyin edilərsə, onda asanlıqla əmin olmaq olur ki, bu ifadələrin kvadratları cəminin «*minimum*»luq şərti həmin bu qaydanı verir. Bu qayda müşahidələr sayı çox olduqca daha dəqiq olur; hətta bu say böyük olmadıqda belə, hər halda axtarılan düzəlişləri fikirləşmədən ala bilmək üçün sadə üsul verən həmin qaydanı tətbiq etmək təbii görünür. Bu qayda eyni bir ulduzun müxtəlif astronomik cədvəllərinin dəqiqliyini müqayisə etmək üçün də istifadə oluna bilinər. Həmişə belə fərz etmək olar ki, bu cədvəllər eyni bir şəklə gətirilmişdir, bu halda bunlar yalnız dövrlərlə, arqumentlərin orta hərəkətlərilə və əmsalları ilə fərqlənirlər; belə ki, bunlardan birində digərlərində olmayan arqument olarsa, onda aydındır ki, bu belə fərziyyə ilə əsaslandırılır ki, bu arqumentin əmsalı sıfra bərabərdir. Əgər bütün bu cədvəllər yaxşı müşahidələrin bütün toplusundan istifadə edilərək tərtib olunursa, onda bunlar xətaların kvadratları cəminin «*minimum*»luq şərtini ödəyərdilər; beləliklə, bu şərtə daha çox yaxınlaşan cədvəllər olduqca çoxsaylı müşahidələrlə tərtib olunmuş cədvəllərlə müqayisədə, üstünlüyə layiqdirlər.

Yuxarıda şərh olunmuş metod, əsas etibarilə, astronomiyada müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilinər. Astronomik cədvəllər nail olduqlarına, həqiqətən də, müşahidələrin və nəzəriyyələrin dəqiqliyinin heyrətamiz doğruluğuna, həmçinin, şərti tənliklərin istifadə olunması ilə borcludurlar, bu tənliklərin sayəsində isə çox gözəl müşahidələrin əksər sayı eyni bir elementin düzəlməsinə xidmət edir. Lakin xətalar ehtimalını da təyin etmək tələb olunur, çünki bu düzəlişlərdə xətaların ola biləcəyi istisna deyil; indicə mənim şərh etdiyim metod bu məqsədə xidmət edir. Bu metodun bir neçə maraqlı tətbiqlərini göstərməkdən ötrü, mən, *Bouvardın* yenicə başa çatdırdığı, Yupiter və Saturnun hərəkətləri haqqındakı çox dərərli bir əsərindən istifadə etdim, o, olduqca dəqiq cədvəlləri olduqca böyük bir diqqətlə tərtib etmiş, qarşıdurmaları və *Bradley* və astronomların müşahidə etdikləri bu iki planetin kvadraturlarını araşdırmışdır; onlar son illərə qədər *Bouvardın* davamçıları olmuşlar. *Bouvard,* bu cədvəllərdən bu planetlərin hərəkətlərinin, vahid kimi götürülən Günəş kütləsi ilə müqayisə olunan kütlələrininin və hərəkətlərinin elementlərinin düzəlişlərini çıxarmışdır. Bu hesablamalardan Saturnun kütləsinin Günəş kütləsinin 3 512 -də bir hissəsinə bərabər olduğu alınmışdır. Bunlara mənim ehtimal düsturlarımı tətbiq edərək, mən bu nəticənin xətasının onun ədədi qiymətinin yüzdə birdən az olması üçün bir şansa qarşı on bir min şansın olduğunu tapdım; və ya əgər yüz ildən sonra yeni müşahidələrə əvvəlki müşahidələrlə birlikdə həmin üsulla baxılarsa, demək olar ki, eyni bir nəticəyə gəlmək olur, lakin yeni nəticə *Bouvard* nəticəsindən yüzdə bir qədər fərqlənməyəcəkdir. Bu alim-astronom bundan başqa tapır ki, Yupiterin kütləsi Günəş kütləsinin 1701-də bir hissəsinə bərabərdir; mənim ehtimal metodum isə bu nəticənin hətta neçə yüzdə bir qədər səhv olmadığı üçün bir şansa qarşı milyon şans olduğunu verir.

Bu metod geodeji əməliyyatlara da müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilinər. Yer səthində böyük qövsün uzunluğu dəqiq ölçülmüş bazaya söykənən üçbucaqlar zənciri ilə təyin olunur; lakin bucaqların nə cür dəqiqliklə ölçülməsinə baxmayaraq, qaçılmaz xətalar olacaqdır, bunlar çox sayda üçbucaqlardan çıxarılmış qövsün ədədi qiymətinin gerçəkdən olduqca yayınmasına səbəb olacaqdır. Beləliklə, bizə məlumdur ki, ədədi qiymət mükəmməl olmayacaqdır, əgər biz onun xətasının verilən sərhədlər hüdudunda yerləşməsi ehtimalını təyin edə bilməsək, onda bizə məlum olan ədədi qiymət, deməli, mükəmməl qiymət olmayacaqdır. Geodeji nəticənin xətası hər bir üçbucağın bucaqlarının xətalarının funksiyasıdır. Adı çəkilən əsərdə mən ehtimal qanunu bizə məlum olan çoxsaylı xüsusi xətaların çox saydasının bir və ya bir neçə xətti funksiyalarının ədədi qiymətlərinin ədədi ehtimallarını almaq üçün ümumi düsturlar vermişəm; deməli, bu düsturların köməyilə, xüsusi xətaların ehtimal qanununun nə cür olmasından asılı olmayaraq, hər hansı geodeji nəticənin təyin olunmuş sərhəd hüdudlarında yerləşməsi ehtimalını təyin etmək olar. Buna görə də, bu qanundan asılı olmamaq olduqca zəruridir, belə ki, hətta ən sadə qanunlar belə bunların təbiətdə mövcud olacaqları mümkün olanlarının sonsuz sayda olduqları nəzərə alınarsa, həmişə sonsuz kiçik ehtimallıdırlar. Amma xüsusi xətaların naməlum qanunu düsturlara qeyri-müəyyən kəmiyyət daxil edir və əgər onu xaric etmək mümkün olmazsa, bu kəmiyyət bu xətaların sayını azaltmağa imkan verməzdi. Biz gördük ki, astronomik məsələlərdə ixtiyari müşahidə xətti tənliyə gətirir, elementlərin alınması üçün bu qeyri-müəyyən kəmiyyət, hər bir tənlikdə elementlərin ən ehtimallı ədədi qiymətləri qoyulduqdan sonra, qalıqların kvadratları cəminin köməyilə xaric olunur. Geodeji məsələlərdə, oxşar tənliklər olmadığından, digər xaricetmə üsulu axtarılmalıdır. Biz bu üsulu, hər bir müşahidə olunan üçbucağın bucaqları cəminin iki düzbucaq plyus sferik artdığı aşan kəmiyyətlə alırıq. Bu kəmiyyətlərin kvadratları cəmi ilə şərti tənliklərin qalıqlarının kvadratları cəmi əvəz olunur; onda bir sıra geodeji əməliyyatların son nəticəsinin verilən kəmiyyəti aşmayacağı ehtimalını hesablamaq olar. Lakin hər bir üçbucağın 3 bucağı arasında onların xətaları cəmini paylaşdırdıqda hansı üsul ən əlverişlidir? Ehtimalların analizi göstərir ki, hər bir bucaq, geodeji nəticənin çəkisinin mümkün qədər ən böyük olması üçün, bu cəmin üçdə biri qədər kiçildilməlidir; bu isə həmin xətanı az ehtimallı edir. Deməli, ixtiyari üçbucağın üç bucağını müşahidə etmək və göstərilən üsulla onları düzəltmək böyük üstünlüyə malikdir. Sadə sağlam düşüncə bu faydanı hiss etməyə vadar edir; amma yalnız ehtimal hesabı bu faydanı qiymətləndirə bilər və göstərə bilər ki, bu düzəliş sayəsində bu fayda mümkün olduqca daha böyük olur.

Böyük dairənin qövsünün uclarından birində ölçülmüş bazaya söykənən bu qövsün ədədi qiymətinin dəqiqliyinə əmin olmaq üçün bu qövsün digər ucunda ikinci baza ölçülür və bu bazalardan biri üzrə digərinin uzunluğu ölçülür. Əgər bu uzunluq müşahidədən az yayınarsa, onda belə fikirləşmək tamamilə anlaşılardı ki, bu bazaları birləşdirən üçbucaqlar zənciri, demək olar ki, bu zəncirdən təyin olunan böyük qövsün uzunluğu kimi çox dəqiqdir. Sonra bu kəmiyyətə düzəliş verilir, buna görə üçbucaqların bucaqları elə dəyişdirilir ki, hesablanmış bazalar ölçülmüş bazalarla uzlaşsın; lakin bunu sonsuz sayda üsulla etmək olar, bunlar arasında geodeji nəticələri ən böyük çəkiyə malik olanlarına üstünlük verilməlidir, çünki həmin xəta bu halda ən az ehtimallı olur. Ehtimalların analizi bir neçə bazanın ölçülmələrindən alınan ən əlverişli düzəlişi bilavasitə almaq üçün düsturlar, həmçinin bazaların çoxsaylılığı sayəsində yaranan ehtimal qanunlarını, məhz bu çoxsaylılıq sayəsində daha sürətlə azalan qanunları verir.

Çoxsaylı müşahidələrdən çıxarılmış nəticələr xətaları, ümumiyyətlə, məhz hər bir müşahidənin xüsusi xətalarının xətti funksiyasıdır. Bu funksiyanın əmsalları məsələnin növündən və bu nəticənin alınması üçün istifadə olunan üsuldan asılıdır. Ən əlverişli üsul, aydındır ki, nəticələrdən alınan eyni bir xəta – digərlərindən ən az ehtimala malik olanıdır. Beləliklə, ehtimal hesabının natural fəlsəfəyə tətbiqi – bu funksiyaların ədədi qiymətlərinin ehtimallarını analitik olaraq təyin etməkdən və bunların qeyri-müəyyən əmsallarının elə seçilməsindən ibarətdir ki, bu ehtimal qanunu ən sürətli azalan qanun olsun. Xüsusi xətaların naməlum ehtimal qanununu, demək olar ki, həmişə məsələnin verilənləri vasitəsilə daxil edən vuruğu sonradan düsturlardan xaric edərək, nəticələrin xətalarını verilən kəmiyyəti aşmayacağı ehtimalını ədədi qiymətləndirmək mümkün olur. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələrdən alınmış nəticələrə görə nəyi arzu edəriksə, onun hamısını ala bilirik.

Bundan başqa, digər mülahizələr vasitəsilə çox yaxın nəticələr almaq mümkündür. Məs., fərz edək ki, eyni bir kəmiyyət üçün min bir müşahidə aparılmışdır; bütün bu müşahidələrin ədədi ortası ən əlverişli metodla verilmiş nəticədir; lakin nəticəni belə də seçmək olar ki, hər bir xüsusi kəmiyyətdən müsbət işarə ilə götürülmüş bütün yayınmalar cəmi *minimum* olsun: əslində isə bu şərti ödəyən nəticəyə gerçəyə ən yaxınlaşmış nəticə kimi baxmaq təbiidir. Əgər müşahidələrdən alınmış ədədi qiymətlər böyüklüyü qaydasında yerləşdirilərsə, onda asanlıqla

görmək olur ki, mərkəzdə yerləşən ədədi qiymət əvvəlki şərti ödəyəcəkdir; hesablamalar isə bizə göstərir ki, müşahidələr sayı sonsuz olduğu halda bu kəmiyyət gerçək kəmiyyət ilə üst-üstə düşür; bununla belə, ən əlverişli metodla verilən nəticə ən üstün sayılır.

Ehtimallara, Göy cisimlərinin hərəkətlərindəki müşahidə xətalarında gizli qalan kiçik bərabərsizlikləri fərqləndirmək və bu hərəkətlərdə nəzərə çarpan anomaliyaların səbəbini aydınlaşdırmaq məqsədilə də baxılır. Tixo Brage bütün Ay müşahidələrini bir-birilə müqayisə edərək, Aya Günəş və planetlərə tətbiq olan tənlikdən fərqli, zaman tənliyini tətbiq etməyin zəruriliyini etiraf edir. Oxşar surətdə çoxsaylı müşahidələrin toplusu Mayerə aşkar etdi ki, pressesiya bərabərsizliyinin əmsalı Ay üçün kiçildilməlidir. Hətta Mazonun da təsdiq etdiyi və hətta böyütmüş olduğu bu kiçilmənin ümumdünya cazibə qüvvəsindən alınmadığı görüntüsü yaratmağına baxmayaraq, astronomların böyük əksəriyyəti bunu öz hesablamalarında nəzərə almalıdılar. Bundan sonra mən, olduqca çox sayda Ay müşahidələrinin ehtimal hesablamalarını apardım, bu məqsəd üçün bu müşahidələr, mənim xahişimlə *Bouvard* tərəfindən seçilmiş və araşdırılmışdır; nəticədə bu kiçilmə mənə elə böyük ehtimalla göründü ki, mən bunun səbəbini tapmağı özümə borc sandım. Mən çox yaxşı gördüm ki, bu səbəb yalnız Yer sferoidinin elliptik şəkildə olması ilə izah oluna bilinər, amma o vaxta qədər bu, Ayın hərəkəti nəzəriyyəsində, ona yalnız əhəmiyyətsiz hədlər daxil edə biləcəyi baxımdan nəzərə alınmamışdı; buradan mən nəticə çıxardım ki, bu hədlər differensial tənliklərin ardıcıl inteqrallanmasında əhəmiyyətli hədlərə çevrilir. Mən sonra bu hədləri ayrıca analiz ilə təyin etdim və əvvəlcə heç bir astronomun ağlına belə gəlməyən, Ayın uzunluq dairəsinin *sinus*'una mütənasib olan en dairəsi üzrə Ayın hərəkəti bərabərsizliyini kəşf etdim. Sonradan mən bu bərabərsizliyin köməyilə, Aya tətbiq olunan pressesiya bərabərsizliyində Mayerin qeyd etmiş olduğu və kiçiltməni yaradan uzunluq dairəsi üzrə Ay hərəkətində digər bərabərsizliyin mövcudluğunun olduğunu bildim. Bu kiçilmə kəmiyyəti və en dairəsi üzrə əvvəlki bərabərsizliyin əmsalı Yerin sıxılmasını müəyyənləşdirmək üçün çox münasibdirlər. Özümün tədqiqlərim haqqında, o vaxtlar bütün yaxşı müşahidələrin müqayisəsi yolu ilə Ay cədvəllərinin təkmilləşdirilməsi ilə məşğul olan Burqa xəbər verərək, mən onun bu iki kəmiyyəti xüsusi bir diqqətlə təyin etməsini xahiş etdim. Onun tapdığı, olduqca gözəl uzlaşan bu iki kəmiyyət Yer üçün eyni bir sıxılma – 1/305 sıxılmasını verir, bu isə rəqqasın müşahidələrindən və meridianın dərəcələrinin ölçmələrindən çıxarılmış orta qiymətdən az fərqlənir, lakin məncə, bu sıxılma, müşahidə xətalarının bu ölçmələrə və onları dəyişdirən səbəblərin təsirinə görə, Ay bərabərsizlikləri ilə daha dəqiq təyin olunur.

Ehtimalları araşdırarkən, mən Ayın əsrlik tənliyinin səbəbini öyrəndim. Ayın ən yeni müşahidələrinin əvvəlki aytutulmaları ilə müşahidələrilə müqayisəsi astronomlara Ayın hərəkətinin sürətlənməsini göstərmiş oldu; lakin həndəsəçilər, xüsusilə də, Laqranj dəyişikliklərdəki bu sürətlənməyə səbəb olan hədlərin uğursuz axtarışından sonra, bu sürətlənməni nəzərə almadılar. Köhnə və ən yeni müşahidələrin, həmçinin ərəblərin arada müşahidə etdikləri aytutulmalarının diqqətlə araşdırılması mənə göstərdi ki, bu sürətlənməyə səbəblər böyük ehtimala malikdirlər. Bu nöqteyi-nəzərdən, mən Ay nəzəriyyəsinə yenidən baxdım və tapdım ki, Ayın əsrlik tənliyi Yer orbitinin ekssentrisitetinin əsrlik dəyişməsi ilə əlaqədar olaraq, bu peykə Günəşin təsiri ilə baş verir, bu isə Ay orbitinin perigelisinin və düyünlərinin hərəkətlərinin əsrlik tənliklərinin kəşfinə gətirdi. Bu nəzəriyyənin bütün qədim və yeni müşahidələrlə olduqca gözəl uzlaşması onu yüksək dərəcədə açıq-aşkar etdi.

Ehtimal hesabı, oxşar surətdə, məni Yupiter və Saturnun hərəkətlərindəki böyük düzgün olmamazlıqların mövcudluğu səbəbinə gətirdi. Halley (Halley Edmund, 1656–1742) ən yeni müşahidələri qədimlərilə müqayisə edərək, Yupiterin hərəkətində sürətlənmə və Saturnun hərəkətində yavaşımanı tapdı. O, bu müşahidələri uzlaşdırmaq üçün, bu hərəkətləri müxtəlif işarələrlə və 1700-ci ildən keçən zamanın kvadratı kimi artan iki əsrlik tənliklərə tabe etdi. Eyler və Laqranj, iki planetin hərəkətlərində qarşılıqlı cazibə yaradacaq dəyişiklikləri analiz etdilər. Onda onlar əsrlik tənlikləri tapdılar; lakin onların nəticələri o dərəcədə müxtəlif idi ki, bunlardan heç olmazsa biri yalnış olmalı idi. Buna görə də, mən Göy mexanikasının bu mühüm məsələsi ilə məşğul olmaq qərarına gəldim və mən, planetlərin orta hərəkətlərinin dəyişməzliyini qəbul etdim, bu isə Halleyin Yupiter və Saturnun cədvəllərinə daxil etdiyi əsrlik tənliklərin yox edilməsi məcburiyyətini yaratdı. Beləliklə, bu planetlərin hərəkətlərindəki düzgün olmamazlıqların izahı, bir də, yalnız kometlərin cazibələri ola bilərdi ki, buna bəzi astronomlar müraciət etdilər, daha bir izah isə hər bir planet üçün əks işarələrlə təyin olunan, bu iki planetin qarşılıqlı təsirlə hərəkətlərdə olduqları uzun müddətdə bunların hərəkətlərinin bərabərsizliyinin mövcudluğudur. Bu növ bərabərsizliklər haqqında mənim tapdığım teorem, bu bərabərsizliyi mənim üçün olduqca doğruyaoxşar etdi. Bu teoremdən belə nəticə alınır ki, əgər Yupiterin hərəkəti sürətlənirsə, onda Saturnun hərəkəti yavaşıyır, bu isə Halleyin qeyd etdiyinə oxşar nəticədir; bundan başqa, bu teoremdən Yupiterin hərəkətinin sürətlənməsi barədə alınan nəticə Saturnun hərəkətinin yavaşıması nəticəsinə gətirir ki, bu da Halleyin əsrlik tənliklərin bir-birilə münasibətləri haqqındakı aldığı nəticə kimidir. Yupiter və Saturnun orta hərəkətlərini tədqiq etdikdə mənə asanlıqla aydın oldu ki, Yupiterin iki misillə götürülmüş hərəkəti, Saturnun beş misillə götürülmüş hərəkətini, yalnız çox kiçik kəmiyyət qədər aşır. Bu arqument üçün ola bilən bərabərsizlik periodu, təxminən doqquz əsrə bərabər ola bilərdi. Əslində, onun əmsalının dərəcəsi orbitlərin ekssentrisitetlərinin kublarının dərəcəsi kimi olmalı idi. Lakin mənə məlum idi ki, ardıcıl inteqrallanmalar nəticəsində, bu əmsalda, bu bərabərsizliyin arqumentində zamanın çox kiçik vuruğunun kvadratlarının böləni də alınır ki, bu da onun böyük ədədi qiymət almasına səbəb ola bilər: bu bərabərsizliyin mövcudluğu, buna görə də, mənə çox ehtimallı göründü. Aşağıdakı qeyd onun ehtimalını daha da artırdı. Tixo Bragenin müşahidələri zamanı mən bu arqumenti sıfra bərabər götürərək gördüm ki, ən yeni müşahidələrin köhnələrilə müqayisəsindən Halley özünün göstərmiş olduğu dəyişiklikləri tapmalı idi, bununla belə ən yeni müşahidələrin öz aralarında müqayisəsi, Lambertin bu müqayisədən çıxaracaqlarına oxşar və zidd dəyişiklikləri verməli idi. Buna görə də, bu qeyri-bərabərliyin mövcudluğuna əmin olmağım üçün, mən tərəddüd etmədən, zəruri olan uzun və yorucu hesablama apardım: bu hesablama bundan başqa mənə çox sayda digər bərabərsizlikləri aşkar edən hesablama nəticəsi ilə təsdiq olundu, bunların çoxluğu sayəsində Yupiter və Saturn cədvəlləri müşahidələrin özlərinin ən dəqiqliyinə qədər başa çatdırıldı.

Ehtimalların hesablanmasının köməyilə Yupiterin ilk üç peykinin orta hərəkətlərinin çox gözəl qanununu da kəşf etmək mənə müyəssər oldu; bu qanuna görə birinci peykin orta uzunluq dairəsi minus ikinci peykin uzunluq dairəsinin üç misli plyus üçüncünün uzunluq dairəsini iki misli dəqiq olaraq yarımçevrəyə bərabərdir. Bu ulduzlar kəşf olunduqları zamandan onların orta hərəkətləri yaxınlaşma ilə bu qanunu ödəyirlər, yaxınlaşma isə böyük doğruyaoxşarlıqla bu qanunun mövcudluğunu göstərirdi: mən bunların qarşılıqlı təsirindəki səbəbi axtarmağa başladım. Bu təsirin diqqətlə araşdırılması nəticəsində mənə aydın oldu ki, bunların orta hərəkətlərinin bu qanuna yalnız məlum sərhədlərdə belə yaxınlaşan belə ilkin münasibəti kifayət edərdi ki, onların qarşılıqlı təsiri bu qanunu qərarlaşdırsın və onu dəqiqliklə müdafiə edə bilsin. Beləliklə, bu üç peyk fəzada öz hərəkətlərini, əgər hər hansı səbəblər, məs., kometlər onların Yupiter ətrafında hərəkətlərini gözlənilmədən pozmasalar, əvvəlki qanunla daima davam etdirəcəklər.

Buradan görünür ki, təbiətin göstəriciləri çoxsaylı müşahidələrin nəticəsi olduğundan və buna görə də, məlum üsullarla izah oluna bilinmədiyindən bu göstəricilərə olduqca diqqətlə yanaşılmalıdır. Dünya sisteminə aid məsələlərin olduqca çətin olması, həndəsəçiləri yaxınlaşmalara müraciət etməyə məcbur etdi, belə yaxınlaşmalarda həmişə atılan kəmiyyətlərin hiss olunacaq təsir göstərə biləcəyindən duyulan narahatlıq hissi qaçılmaz olur. Müşahidələrdən belə təsirin olduğu aşkar ediləndə, onlar yenidən bunların analizinə başlayırdılar; yoxlama nəticəsində onlar müşahidə olunmuş anomaliyaların səbəbini həmişə tapırdılar; onlar bu anomaliyaların qanununu təyin edirdilər və əksər hallarda, hətta müşahidələrdən də hələ aşkar olunmamış qeyri-bərabərlikləri kəşf edərək, bu müşahidələri qabaqlayırdılar və baş verə biləcək nələrisə söyləyə bilirdilər. Beləliklə, belə demək olar ki, ümumdünya cazibə qüvvəsinə əsaslanan nəzəriyyələrin analitik

təkmilləşdirilməsinə təbiətin özü şərait yaratmışdı və mənim fikrimcə, bu, təəccüb doğurmağa layiq bu prinsipin gerçəkliyinin ən güclü sübutlarından biridir.

Dünya sisteminin ən gözəl qeyri-adi hadisələrindən biri, – öz oxu ətrafında bütün fırlanma hərəkətləri və Günəşin öz oxu ətrafında fırlanması ilə eyni istiqamətdə və demək olar ki, onun ekvator müstəvisində planet və peyklərin fırlanma hərəkətləridir. Belə bir gözəl fenomen heç də təsadüfi deyildir: o, bu hərəkətləri təyin edən ümumi səbəbin olmasını göstərir. Bu səbəbin hansı ehtimalla baş verdiyini bilmək üçün nəzərə alınır ki, hal-hazırdakı kimi bizə məlum planetlər sistemi, – heç olmasa Gerşel kimi, Uran planetinə də altı peyk aid edilərsə, – on bir planet və on səkkiz peykdən ibarətdir. Günəşin, altı planetin, Ayın, Yupiterin peyklərinin, Saturnun halqasının və onun peyklərindən birinin öz oxu ətrafında fırlanma hərəkətləri məlumdur. Bu hərəkətlər fırlanma hərəkətləri ilə birlikdə eyni bir istiqamətdə cəmisi qırx üç hərəkət təşkil edir; ehtimalların analizindən biz belə nəticəyə gəlirik ki, bu qaydanın təsadüfün nəticəsi olmadığı əleyhinə dörd min milliard şans vardır; bu isə bizim şübhə etmədiyimiz belə tarixi hadisələrin ehtimalından daha böyük olan bir ehtimaldır. Odur ki, ən azı biz, həmin əminliklə qəbul etməliyik ki, hər hansı bir ilkin səbəb planetlərin hərəkətlərini istiqamətləndirmişdir, xüsusilə də, əgər nəzərə alınarsa ki, bu hərəkətlərin böyük əksəriyyətinin Günəş ekvatoruna meyl etməsi çox da böyük deyildir.

Günəş sisteminin digər gözəl bir fenomeni planet və peyklərin orbitlərinin ekssentrisitetlərinin kiçik olmasına rəğmən, komet orbitlərinin olduqca dartılmış şəkildə olmasıdır, odur ki, bu sistemdə orbitlər böyük ekssentrisitetlərin kiçiklərinə aralıq keçid və təzahürünü yaratmırlar. Burada biz yenə də requlyar səbəbin təsirinin olduğunu qəbul etməliyik: təsadüf, bütün planetlərin və onların peyklərinin orbitlərinə, təxminən dairəvi forma verə bilməzdi; buna görə də, zəruridir ki, Göy cisimlərinin hərəkətlərini təyin edən bu səbəb onları, demək olar ki, dairəvi formalı etsin. Bundan başqa, kometlərinin orbitlərinin ekssentrisitetlərinin böyük olması üçün zəruridir ki, bunların böyüklüyü bu səbəbin mövcudluğu nəticəsində alınsın və bu səbəb, bununla belə, bu hərəkətlərin istiqamətlərinə təsir edə bilməsin; çünki demə, əksinə və düzünə hərəkət edən kometlər o qədərdir ki, bunların bütün orbitlərinin ekliptikaya orta meyli düzbucağın yarısına çox yaxındır, bu isə bu cisimlərin yalnız təsadüfi qaydada səpələnməsi halında mümkün ola bilərdi.

Söhbət gedən bu səbəbin nə cür təbiətli olmasından asılı olmayaraq, əgər o, planetlərin hərəkətinə səbəb olmuşsa və onları istiqamətləndirmişdirsə, onda zəruridir ki, bu səbəb bütün bu cisimləri də əhatə etməliydi, bunları bir-birindən ayıran məsafələrə gəldikdə isə səbəb yalnız möhtəşəm cazibə mayesi ola bilərdi: Günəş ətrafında eyni bir istiqamətdə, təxminən dairəvi formalı hərəkət yaratmaq üçün bu maye bu ulduzu atmosfer kimi əhatə etməli idi. Planetlərin hərəkətlərinin öyrənilməsi, beləliklə, bizi belə bir fikrə gətirir ki, Günəş atmosferi qeyri-adi istilik nəticəsində əvvəlcə bütün planetlərin orbitləri ətrafını bürümüş və getdikcə hazırdakı sərhədlərinə qədər sıxılmışdır.

Fərz etdiyimizə görə, Günəş öz əvvəlki vəziyyətində dumandan ibarət ləkələrə oxşayırmış, bunlar teleskopda dumana bürünmüş az və ya çox parlayan nüvə görüntüsü yaradır, bu duman nüvənin səthi üzərində getdikcə sıxlaşaraq, gözəl bir gündə onu ulduza çevirir. Əgər biz analoji olaraq, belə hesab edəriksə ki, bütün ulduzlar belə yaranmışdır, onda belə fərz edə bilərik ki, onlar əvvəlki ilkin duman vəziyyətindən daha əvvəlki elə vəziyyətlərdə olmuşlar ki, bu vəziyyətlərdə duman materiyası getdikcə daha çox səpələnmiş, nüvə isə getdikcə daha az parlaq və sıx olmuşdu. Beləliklə, mümkün olduğu qədər daha uzağa nəzər sala bilərsə, biz dumanın elə səpələnmiş vəziyyətdə olduğu nəticəsinə gəlirik ki, biz onun varlığını belə yalnız çox çətinliklə fərz edə bilərik.

Gerşelin özünün güclü teleskopları ilə xüsusi diqqətlə tədqiq etdiyi duman ləkələrininin ilkin vəziyyəti əslində belədir, o, bu ləkələrdən yalnız birini izləməmişdi; bu proqress yalnız yüzilliklərdən sonra, onların toplumu üçün bizə aydın ola bilər; bu ona bənzəyir ki, böyük bir meşədə müxtəlif yaşlı ayrı-ayrı ağaclarda ağacların böyüməsi izlənilir. O, duman materiyasını əvvəlcə Göyün müxtəlif hissələrində uzun bir sahədə ayrı-ayrı topalar şəklində səpələnmiş kimi müşahidə etmişdi. O görmüşdü ki, bu materiya bəzi topalarda bir və ya bir neçə, az parlayan nüvələr ətrafında sıxlaşmışdır. Digər duman ləkələrində bu nüvələr onları bürümüş dumanla müqayisədə daha çox parıldayır. Əgər bəzi ayrı-ayrı nüvələrin atmosferləri sonrakı sıxlaşma nəticəsində ayrılırlarsa, onda hər biri atmosferlə əhatə olunmuş, bir-birinə çox yaxın yerləşmiş parlaq nüvələrdən ibarət mürəkkəb duman ləkələri əmələ gəlir: bəzən, duman materiyası müntəzəm sıxlaşaraq, *planet ləkələri* adlanan duman ləkələrini əmələ gətirirdi. Nəhayət, olduqca böyük sıxlaşma bu duman ləkələrini ulduzlara çevirir. Bu fəlsəfi nöqteyi-nəzərə əsasən, duman ləkələrinin təsnifi onların gələcəkdə ulduzlara çevriləcəyini və mövcud ulduzların əvvəldə duman vəziyyətində olmasını göstərir. Aşağıdakı mülahizələr bu analogiyalardan çıxarılmış isbatların sübutudur.

Adi gözlə görünən bəzi ulduzların xüsusi düzülüşü müşahidəçi filosofları çoxdan təəccübləndirirdi. Metçel artıq qeyd etmişdi ki, məs., Ülkər bürcünün ulduzlarının, yalnız təsadüfün şansları nəticəsində bu ulduzlar yerləşən çox böyük olmayan fəzanı belə sıx doldura bilməsi, çox az ehtimallıdır; buradan o, belə nəticə çıxarır ki, ulduzların bu qruplaşması və belə qruplaşmaya oxşar digərləri də, təbiətin ümumi bir qanununun bir başlanğıc-ilkin səbəbinin nəticəsidir. Bu qruplaşma bir neçə nüvəli duman ləkələrinin sıxlaşmasının zəruri nəticəsidir; çünki aydındır ki, duman materiyası müxtəlif nüvələrlə daima cəzb olunduğundan, onlar zaman ötdükcə Ülkər qrupuna oxşar ulduzlar qrupu yaratmalıdırlar. Eynilə də, iki nüvəli duman ləkələrinin sıxlaşması, bir-birinə çox yaxın yerləşən və biri o birisinin ətrafında fırlanan ulduzları əmələ gətirir, belə ulduzlar – hərəkətləri Gerşelin müşahidə etdiyi ulduzlara oxşar ulduzlardır. Altmış birinci ulduz və bu ulduzun ardınca gələn Qu bürcünün ulduzları da belədir: Bessel onların məxsusi hərəkətlərinin çox az fərqləndiklərini və olduqca mühüm olduqlarını qeyd etmişdir, bu isə bu ulduzların yaxın olduğuna və onların ümumi ağırlıq mərkəzi ətrafında hərəkət etdiklərinə kiçicik belə şübhə qoymur. Beləliklə, duman materiyasının sıxlışması proqresindən biz belə nəticəyə gəlirik ki, Günəş əvvəllər nəhəng atmosferlə əhatə olunmuş imiş, necə ki, biz gördük ki, Günəş sisteminin təzahürlərinin öyrənilməsi belə bir nöqteyi-nəzərə gətirir. Bir-birilə üst-üstə düşən belə gözəl izah Günəşin əvvəlki vəziyyətinin belə olduğu izahına gerçəyə çox yaxın olan ehtimal verir.

Lakin Günəş atmosferi planet və peyklərin öz oxu ətrafında fırlanma hərəkətlərini nə cür təyin etmişdir? Əgər bu cisimlər bu atmosferin dərinliyinə keçə bilsəydilər, onda atmosferin müqaviməti onların Günəş üzərinə düşməsinə səbəb olardı. Bu isə planetlərin Günəş atmosferinin ardıcıl hüdudlarında əmələ gəldiyi ehtimalının böyük olduğunu düşünməyə sövq edir, guya atmosfer soyuduqca sıxlaşaraq, özünün ekvator müstəvisində buxarlar zolaqlarını ayırmalı idi ki, bunlar öz növbəsində molekullarının qarşılıqlı cazibəsi nəticəsində müxtəlif sferoidlərə çevrilməliydilər.

Mənim «Kainat sisteminin Şərhim»də mən bu hipotezi çox geniş inkişaf etdirmişəm və mənə belə gəlir ki, bu hipotez bu sistemdə rast gələn bütün fenomenlərlə uzlaşır.

Bu hipotezə görə kometlər, planet sisteminə nə isə yad olan cisimlərdir. Onların yaranmasını duman ləkələrinin yaranması ilə əlaqələndirərək, onlara ayrı-ayrı Günəş sistemlərindən digərlərinə təsadüfi dolaşma hərəkəti edən, nüvələri olan, çox da böyük olmayan duman ləkələri və bütün kainatda hər tərəfə yayılmış duman materiyasının sıxlaşması nəticəsində yaranmış cisimlər kimi baxmaq olar. Beləliklə, necə ki, aerolitlər Yerə nəzərən yad cisimlərdir, kometlər də bizim sistemə nəzərən yad olmalıymışlar. Bu ulduzlar bizə göründükləri zaman onların duman ləkələrinə elə tam oxşar olduğu təsəvvürünü yaradır ki, onları çox vaxt ayırd edə bilmirlər; və yalnız onların hərəkətləri üzrə və Göyün müəyyən hissəsində görünən bütün duman ləkələri məlum olduğundan, onları bir-birindən fərqləndirmək mümkün olur. Bu fəziyyə, insanları düşündürən böyük cazibəni və Günəşə yaxınlaşdıqca kometlərin quyruqlarını və həmçinin, bu quyruqların hədsiz seyrəkləşməsini çox yaxşı izah edir, həmin o quyruqların ki, özlərinin çox böyük qalınlığına baxmayaraq, onlardan sayrışaraq görünən ulduz parıltılarını heç də zəiflədə bilmir.

Çox da böyük olmayan duman ləkələri Günəşin cazibəsinin çox olduğu fəza hissəsinə çatdıqda, biz bu hissəni bu ulduzun *təsir sferası*

adlandıracağıq, bu sfera onları elliptik və ya hiperbolik orbitlər cızmağa məcbur edir. Lakin onların sürətləri bütün istiqamətlər üzrə bərabərimkanlı olduğundan, onlar bütün istiqamətlər üzrə və ekliptikaya bütün mümkün meyllilikləri ilə ixtiyari qaydada hərəkət etməlidirlər; bu da müşahidələrlə uzlaşır.

Komet orbitlərinin böyük ekssentrisiteti də əvvəlki hipotezdən alınır. Doğrudan da, əgər bu orbitlər elliptik formaya malikdirlərsə, onda bunlar çox uzun formalı olmalıdırlar, çünki onların böyük oxları ən azı Günəşin təsir dairəsinin radiusuna bərabərdir. Lakin bu orbitlər hiperbolik formada da ola bilər və əgər bu hiperbolaların oxları Günəşin Yerdən orta məsafəsi ilə müqayisədə çox böyük olmazsa, bu orbitləri cızan kometlərin hərəkətləri hiss olunacaq qədər hiperbolik formada görünəcəkdir. Bununla belə, elementləri artıq məlum olan yüz kometdən, məlum olduğu kimi, hər biri hiperbola üzrə hərəkət etmir; aydındır ki, hiperbolanın görünməsini yaradan şanslar əks şanslarla müqayisədə olduqca nadir olmalıdırlar.

Kometlər o qədər kiçikdirlər ki, onlar yalnız perigelidə onların birbirindən məsafələri çox olmadıqda görünə bilinirlər. Bu vaxta qədər bu məsafə Yer orbitinin diametrinin iki mislindən çox olmamışdı, əksinə, tez-tez bu orbitin radiusundan kiçik olurdu. Belə yaxın məsafədə Günəşə yaxınlaşmaq üçün onların təsir sferasına daxil olduqları andakı sürətləri, aydındır ki, dar hüdudlarda olan qiymətə və istiqamətə malik olmalıdırlar. Ehtimalların analizi vasitəsilə, bu hüdudlar çərçivəsində, görünən hiperbola verən şansların parabola ilə qarışıq salına bilən orbit verən şanslara nisbətini təyin edərək, mən tapdım ki, Günəşin təsir sferasına daxil olan və müşahidə oluna bilən duman ləkəsinin ya olduqca uzun formalı ellips və ya hiperbola cızması üçün bir şansa qarşı ən azı altı min şans vardır, hiperbola isə öz oxunun uzunluğuna görə müşahidə olunan hissədə parabolaya olduqca yaxınlaşır. Odur ki, heç də təəccüblü deyildir ki, bu vaxta qədər hiperbolik hərəkət tanınmamışdı.

Planetlərin cazibəsi, həm də ola bilər ki, efir mühitinin müqaviməti, bir çox komet orbitlərini, böyük oxu Günəşin təsir radiusundan kiçik olan ellipslərə çevirməli idi, bu isə elliptik orbitlərin şanslarını artırır. Belə hesab etmək olar ki, belə dəyişiklik 1759-cu ilin kometi və dövretmələri müəyyən olunmuş digər bəzi kometlər üçün baş vermişdi.

İndi isə mən, Yer və onu örtən mayelərə baxacağam. Yer qatlarının düzgünlüyünü ən çox işıqlandıra bilən – onun üzərində ağırlığın dəyişilməsidir. Bu dəyişiklik eyni bir rəqqasın müxtəlif yerlərə keçirilməsilə təyin olunur, məlum zaman intervalında rəqqasın rəqsləri sayılır; yaxud saniyə rəqqasının uzunluğunun bilavasitə ölçülməsi ilə təyin olunur. Bu sınaqlar asandır və indi olduqca dəqiq aparıla bilinər. Yer nəzəriyyəsi üçün bunlar mühüm olduğundan, onlar xüsusilə dəniz səyyahlarına tövsiyyə oluna bilinər. Baxmayaraq ki, daha yaxşı nəticələr də ola bilərdi, bununla belə, artıq aparılmış sınaqlar böyük bir düzgünlüyü və ən sadə dəyişilmə qanununa yaxınlaşmanı, yəni en dairəsinin sinusunun kvadratı qanununu aşkar edir; Şimal və Cənub yarımkürələri bu mənada o qədər də fərqlənmirlər, ən azı elə bir fərq yoxdur ki, onu müşahidə xətalarına aid etmək mümkün olmasın. Əgər ölçü vahidi kimi ekvatorda saniyə rəqqasının uzunluğu götürülərsə, onda bütün bu müşahidələr, nəticə etibarilə, en dairəsinin sinus'nun kvadratına mütənasib həddin əmsalı üçün on mində əlli dörd ədədini verəcəkdir. Bu nəticəyə mənim ehtimal düsturlarımın tətbiqi nəticəsində bir şansa qarşı iki min şansdan artıq şansın olduğu alınır, bu isə onu göstərir ki, əsl əmsal beş mində birlə altı mində bir arasındadır. Əgər Yer fırlanma ellepsoidini təmsil edirsə, onda biz yüzmində 875-dən cazibə qanununun əmsalını çıxaraq, onun sıxlığını öyrənirik; beləliklə, beş mində bir əmsalı – 1/272 sıxılmasına uyğundur. Deməli, Yerin sıxılmasının bu kəsrdən kiçik olması üçün bir şansa qarşı dörd min şansdan artıq şans vardır. Yerin bircinsliyinə uyğun Yer sıxılması və Yer qatlarının sıxlığının bu planetin mərkəzinə yaxınlaşdıqca artması üçün bir şansa qarşı miyardların milyonu qədər şans olacaqdır. Yerin səthində ağırlığın müntəzəmliyi göstərir ki, bu qatlar mərkəz nöqtəsi ətrafında simmetrik yerləşmişlər. Maye vəziyyətin qaçılmaz bu iki şərti, bütün Yerin ilk əvvəl bu vəziyyətdə, – onun yalnız qeyri-adi istilik nəticəsində düşdüyü vəziyyətdə olduğunu olduqca doğruyaoxşar edir; bu isə Göy cisimlərinin yaranması haqqında bizim təsdiq etdiyimiş hipotezi təsdiqləyir.

Elmlər Akademiyasının təklifinə görə keçən yüzilliyin əvvəlində Brestdə altı il ərzində ardıcıl surətdə qabarma və çəkilmələr üzrə müşahidələr aparılmışdı. Bu növ müşahidələr üçün bu portun seçilməsi olduqca əlverişli idi. Bu port dənizlə çox böyük reydlə qurtaran kanala birləşir, bu reydin ən içəri hissəsində port salınmışdır. Beləliklə, dəniz hərəkətindəki düzgün olmamazlıqlar bu porta çatana kimi olduqca zəifləyir, gəminin düzgün olmayan hərəkəti nəticəsində barometrin borusunun daralması ilə barometrdə rəqslərin zəifləməsi kimi. Bundan başqa, Brestdə qabarma və çəkilmələr olduqca çox olduğundan, küləkdən asılı təsadüfi dəyişikliklər bu prosesə az təsir göstərir; qabarma və çəkilmələr üzərində müşahidələrdə burada elə böyük bir düzgünlük müşahidə olunur ki, onu bu portun reydində itib-batan kiçik bir çay heç bir vəhclə poza bilməz. Bu düzgünlüyə heyrətlənərək, mən dövlətə belə bir xahişlə müraciət etdim ki, Ay orbitinin düyünlərinin bütün hərəkəti dövründə Brestdə bir sıra yeni müşahidələr aparılsın, bu xahişim isə yerinə yetirildi. Bu müşahidələrə 1806-nın iyunun 1-dən başlanıldı və indiyə qədər onlar fasiləsiz davam olunur, odur ki, bu müddət mənim qeyd etdiyim dövrün yarısını da ötür. Bu müşahidələr, mənim ehtimal düsturlarımı təbiətin ən möhtəşəm təzahürlərindən birinə tətbiq etmək üçün olduqca əlverişli şərait yaratdı və mən bundan istifadə etməyə bilməzdim. Mən tapdım ki, bunlar Ayın fazalarından, ilin fəsillərindən və Ay və Günəşin Yerdən olan məsafəsindən asılı olaraq, qabarma və çəkilmələr arasındakı müddətlər və hündürlüklərin qanunlarını böyük ehtimalla müəyyənləşdirirdi. Bu mənada bu müşahidələr ən mükəmməl surətdə yüz il əvvəl aparılmış müşahidələrlə uzlaşır. Bunlar ümumdünya cazibə qanunu ilə də elə bu dərəcədə uzlaşırlar; bu qanunu elə bu müşahidələrin köməyilə də kəşf etmək olardı.

Göy mexanikasının dördüncü kitabında bu qanunla uzlaşan, mənim verdiyim qabarma və çəkilmə nəzəriyyəsi dinamikanın bir prinsipinə əsaslanır və bu prinsip portun yerli, hesablanılması olduqca çətin şərtlərdən, bu nəzəriyyənin asılı olmamazlığını və olduqca sadə olmasını təmin edir. Ümumdünya cazibəsi, doğrudan da, dəniz qabarmaları və çəkilmələrinin əsl səbəbləridirsə, bu prinsipin köməyilə bu şərtlər, bu müşahidələri bu surətdə ifadə edən analizin nəticələrinə, ixtiyari sabitlər kimi daxil olur. Bir çox digər təzahürlərə də tətbiq olunan bu prinsip belədir: *cisimlər sisteminin vəziyyətində başlanğıc-ilkin hərəkət şərtləri, bu sistemin məruz qaldığı müqavimətlər nəticəsində yox olmuşlarsa, sistemin vəziyyəti, onda təsir göstərən qüvvələr kimi, periodik olaraq yenidən bərpa olunur.* Bu prinsipi çox kiçik dəyişikliklərin birgə mövcud olması prinsipinə birləşdirərək, mən qabarma və çəkilmənin hündürlüyü üçün ifadə tapdım, bu ifadədə ixtiyari sabitlər portun yerli şərtlərinin təsirini özündə ehtiva edir. Qabarma və çəkilmələrdəki çoxsaylı müxtəlifliklər və bu şərtlər nəticəsində onlardakı dəyişikliklərin hamısı bu ifadədə dəqiqliklə ifadə olunmuşdur. Bu qəbildən olan ən gözəl dəyişikliklərdən biri – sizigiy və kvadratur anlarında ən böyük və ən kiçik qabarmalar və çəkilmələrdə bir gün yarım müddət ərzində gecikmədir. Qeyd olunan ifadə göstərir ki, bu gecikmə yerli şərtlərlə əlaqədar olaraq, okeana təsir edən ulduzun hərəkət sürətindən asılıdır; həmin bu səbəb isə Brestdə Günəş və Ayın təsirinin nisbətində artım əmələ gətirir. Analiz, bu artımı təyin etmək üçün, müşahidələrin köməyilə müxtəlif üsullar verir və nəticədə bu artım təxminən əsl nisbətin səkkizdə birinə bərabərdir.

Günəş və Ayı okeandan ayıran bizim atmosferdə şübhəsiz olaraq onların göstədikləri təsir qabarma və çəkilmə təzahürlərinə oxşar dəyişikliklərə səbəb olur; lakin bu dəyişikliklər çox zəif olduqlarından onları atmosfer hərəkətləri çoxluğundan seçib ayırmaq mümkün olmadığından, qeyri-requlyar atmosfer dəyişikliklər mühüm olmayan ekvatorda, əsas etibarilə, çox gözəl barometrlər vasitəsilə olduqca çox saylı bir sıra müşahidələr aparmaq zəruridir.

Mənim qabarma və çəkilmələr nəzəriyyəmin əsası olan prinsipimi qeyri-sabit səbəblər də qoşulan bütün təzahürlərin düzgün qanunlarına tabe olduğu hala da ümumiləşdirmək olar. Bu səbəblərin təsiri çoxsaylı təzahürlərin nəticələrində eyni bir qanuna tabe fərqlənmələr əmələ gətirir, bunu isə ehtimalların analizinin köməyilə aşkar etmək olar. Təzahürlərin sayı artdıqca bu fərqlənmələr artan ehtimalla aşkar olunur və əgər təzahürlər sayı sonsuz olsaydı, bu ehtimal yəqinliklə

qovuşardı. Bu teorem, mənim sabit səbəblərin təsiri haqqında əvvəllər inkişaf etdirmiş olduğum teoremə analojidir. Beləliklə, biz gördükdə ki, gedişatı düzgün olan səbəb məlum növ hadisələrə təsir göstərə bilər, biz müşahidələri çoxaldaraq, bu səbəbin təsirini öyrənməyə cəhd göstərə bilərik və bizə belə gələrsə ki, bu təsir aşkar olunur, onda ehtimalların analizi onun varlığının və onun yəqinliyinin ehtimalını təyin edir. Odur ki, gündüzdən gecəyə keçdikdə temperatur dəyişməsi atmosfer təzyiqini və həm də deməli, barometrin hündürlüyünü dəyişə bildiyindən, təbii olaraq düşünmək olar ki, bu hündürlük üzərində Günəş istisinin təsiri aşkar olunmalıdır. Əslində də ekvatorda bu təsir, məncə göründüyü kimi lap çox olduğundan, barometrin bir günlük çox da böyük olmayan rəqsi artıq çoxdan müəyyən olunmuşdu, bu rəqsin *maximumu* səhər saat doqquza yaxın radələrdə, *minimumu* isə axşam saat dördə yaxın olur. İkinci *maximum* axşam saat onbirə yaxın, ikinci *minimum* isə səhər saat dördə yaxın olur. Bu dəyişikliklər iki millimetr arasında baş verdikdə, gecə vaxtı bunlar gündüzə nisbətən az olur. Bizim iqlimin qeyri-sabitliyi bu dəyişiklikləri bizim müşahidəçilərimizin nəzərindən yayındıra bilmədi, baxmayaraq ki, bu dəyişikliklər burada tropiklər arasındakından da azdır. Son bir neçə ardıcıl illər ərzində Ramondun apardığı çoxsaylı dəqiq müşahidələrə ehtimal düsturlarını tətbiq edərək, biz görürük ki, bunlar bu təzahürün mövcudluğunu olduqca ehtimallı edir. Bu müşahidələr ona ilin fəsillərindən asılı olan barometrin daha bir dəyişikliyini aşkar etməyə imkan yaratdı. O, qış Günəş qarşıdurmasından dərhal sonra, barometrin birinci orta aylıq hündürlüyünün *maximumunu*, birinci *minimumun* isə apreldə olduğunu tapır; ikinci *maximum* yay Günəş qarşıdurmasına yaxın vaxtda, ikinci *minimum* isə sentyabrda baş verir. Analiz bu nəticələrin doğruyaoxşar nəticələr kimi qeyd olunduğunu bizə göstərir. Bundan başqa bunlar digər müşahidələrlə də təsdiq olunur. Zaman göstərəcəkdir ki, müxtəlif iqlimlərdə eyni bir aylarda ən böyük və ən kiçik hündürlük olur. Barometrin illik və birgünlük dəyişiklikləri, şübhəsiz ki, passatlar və mussonlar kimi Yerin fırlanma hərəkəti ilə əlaqədar Günəş istisindən asılıdırlar. Lakin bu dərəcədə mürəkkəb təzahürləri hesablamaq, demək olar ki, qeyri-mümkündür.

Ehtimalların analizi məlum səbəblərin mövcudluğunu və ya təsirini yoxlamaq üçün də tətbiq oluna bilinər, bizə belə gəlirdi ki, bu səbəblər mütəşəkkil canlılarda da nəzərə çarpır. Təbiətin nəzərə çarpmayan qüvvələrini dərk etmək üçün bizim tətbiq edə biləcəyimiz vasitələrdən ən həssası sinirlərdir, xüsusilə də, hansısa xüsusi səbəblər onların həssaslığını artırarsa. Bunların köməyilə, iki müxtəlif cinsli metalların bir-birinə toxunmasından zəif elektrikin yaranması kəşf olduqdan sonra fizik və kimyaçılar qarşısında tədqiqatçılar üçün geniş meydan açıldı. Bəzi insanlarda sinirlərin qeyri-adi həssaslığından yaranan özünəməxsus təzahürlər, hansısa yeni bir agentin, *canlı maqnetizm* adlandırılan agentin varlığı barədə müxtəlif fikirlər yaratdı, bu maqnetizmin adi maqnetizm və bəzi əsəb üzüntüləri olduqda Günəş və Ayın təsiri nəticəsində yarandığı; nəhayət, metalların və axar suyun yaxınlığından təəssüratlar təsiri nəticəsində yarandığı fərz olunurdu. Bu səbəblərin təsirinin çox zəif olduğunu və bu təsirin təsadüflər nəticəsində asanlıqla pozula biləcəyini düşünmək təbiidir, odur ki, bəzi hallarda hətta bu təsir aşkar olunmadıqda belə onun varlığını inkar etmək olmaz. Biz təbiətin bütün qüvvələrindən və onların müxtəlif təzahürlərinin bilgisindən o qədər uzağıq ki, hazırda yalnız bizim biliklərimiz çərçivəsində onların izah olunmadığı səbəbindən onları inkar etmək heç də elmi olmazdı. Onları fərz etmək nə qədər çətin olsa da, biz onları yalnız çox diqqətlə və hərtərəfli tədqiq etməliyik; məhz burada, ehtimalların hesablanması ona görə zəruri olur ki, müşahidələr və ya sınaqlar bunlarda aşkar olunan ehtimalların nə dərəcədə yaxşı olmasını müəyyən etmək üçün elə münasib vaxtda dayandırılmalıdır ki, bu ehtimallar digərlərini qəbul etməmək üçün olan əsaslardan üstün ola bilsin.

Elmlərdə tətbiq olunan, gümanlara əsaslanan metodların üstün və çatışmayan cəhətlərini ehtimalların hesablanılması ilə qiymətləndirmək olur. Məs., hər hansı bir xəstəliyin müalicəsində artıq tətbiq olunan metodlardan hansının ən yaxşı olduğunu bilmək üçün bu metodlardan hər birini eynilə oxşar şərtlərdə, eyni sayda xəstələr üzərində yoxlamaq kifayətdir; xəstələrin sayı çox olduqca, ən əlverişli metodun üstünlüyü getdikcə aşkar olunacaqdır; hesablama isə onun üstünlüyünün uyğun ehtimalını və digərlərilə müqayisədə üstünlüyünü ifadə edən münasibəti verir.

Ehtimal hesabının mənəvi elmlərə tətbiqi

Biz indicə, səbəbləri məlum olmayan və ya olduqca mürəkkəb olduğundan təsirlərini hesablamaq mümkün olmayan təbii təzahürlərin qanunlarını axtardıqda, ehtimalların analizinin faydalı olduğuna əmin olduq. Bu, mənəvi elmlərin demək olar ki, bütün obyektlərinə də aiddir. İnsan təsisatlarına gözlənilməz və ya gizli və ya qiymətləndirilməsi mümkün olmayan o qədər səbəblər təsir göstərir ki, onların nəticələri haqqında *a priori* fikir yürütmək mümkün deyildir. Zamanın hökmü ilə baş verən bir sıra hadisələr bu nəticələri açıqlayır və bunlardan zərərlilərinin qarşısını almaq üçün vasitələr də göstərir. Bu mənada mütəmadi olaraq, müdrik qanunlar tərtib olunurdu; lakin bu zaman motivlərin qorunub-saxlanılmasına etinasızlıqdan onların bir çoxu faydasız kimi hesab olunaraq ləğv olunmuşdu və bu qanunların bərpası üçün, onların zəruriliyini hiss etmək üçün acı təcrübə yaranmalıydı. Deməli, ictimai idarəetmənin hər bir sahəsində dövlətlərin böyük miqyasda keçirdikləri sınaqların uyğun sayından ibarət, tətbiq edilən müxtəlif vasitələrlə həyata keçirilən effektlərin dəqiq reyestrinin tərtib olunması olduqca mühümdür. Müşahidə və hesablamalara əsaslanan, təbii elmlərdə çox yaxşı xidmət göstərmiş metod siyasi və mənəvi elmlərə də tətbiq oluna bilinir. Maariflənmənin inkişafının qaçılmaz nəticələrinə, əksər hallarda səmərəsiz və təhlükəli olan müqaviməti göstərməyəcəyik, amma biz, yalnız olduqca ehtiyatla, bizim təsisatlarımızı və artıq çoxdan vərdiş etdiyimiz adətlərimizi dəyişdirəcəyik. Biz keçmişin təcrübəsinə görə yaxşı bilirik ki, bunlar nə qədər narahatlıqlar yaradır, lakin bununla belə biz bilmirik ki, bunların dəyişdirilməsinin verdiyi ziyan nə dərəcədə böyük ola bilər. Belə qeyri-müəyyənlikdə ehtimal nəzəriyyəsi hər cür dəyişkənlikdən yan keçməyi tövsiyyə edir: xüsusilə də, gözlənilməz dəyişkənliklərdən qaçmaq lazımdır, belə ki, bunlar həm mənəvi, həm də fiziki surətdə heç bir zaman canlı qüvvənin böyük itkisi olmadan baş vermir.

Ehtimal hesabı mənəvi elmlərin bir çox predmetlərinə müvəffəqiyyətlə tətbiq olunurdu. Mən burada onun əsas nəticələrini verəcəyəm.

Şahid ifadələrinin ehtimalı haqqında

Bizim mülahizələrimizin böyük əksəriyyəti şahid ifadələrinin ehtimalına əsaslandığından, bu ehtimalı hesablamaq səyi olduqca mühümdür. Bu doğrudur ki, əksər hallarda, çətin olduğundan onların şahidlik etdikləri müşayiətedici faktorların, şəraitlərin çox saylıolması səbəbindən şahidlərin doğruçuluğunu qiymətləndirmək mümkün olmur. Lakin, əksər hallarda, qarşımıza çıxan suallarla böyük oxşarlığı olan məsələləri həll etmək mümkün olur və bunların həllinə, bizi düzgün olmayan qərarlar verməyə sövq edən səhvlər və təhlükələrdən qoruyan və istifadə üçün yararlı bir yaxınlaşma kimi baxıla bilinər. Belə bir yaxınlaşma, əgər yaxşı yerinə yetirilmiş olarsa, ən doğruyaoxşar nəticələr sayılanlarla müqayisədə üstünlük verməlidir. Bu məqsədə çatmaq üçün bir neçə ümumi qaydanı verməyə cəhd edək.

İçərisində min ədəd kürəcik olan urndan bir nömrə çıxarılmışdır. Bu çıxarılmaya şahid olanlardan biri 79 №-li kürəciyin çıxdığını elan edir; bu nömrənin çıxma ehtimalı nəyə bərabərdir? Fərz edək ki, təcrübədən bizə məlumdur ki, bu şahid hər on dəfədən birində yalan söyləyir, odur ki, onun şahidlik ehtimalı 9/10-a bərabərdir. Belə hadisə qeyd olunmuşdur: şahid təsdiq edir ki, № 79 çıxmışdır. Bu hadisə aşağıdakı iki hipotezin nəticəsində baş verə bilər: məhz, şahid doğru söyləyir, ya da ki, o yalan söyləyir. Müşahidə olunmuş hadisələrdən çıxarılmış səbəblərin ehtimalları üçün bizim şərh etdiyimiz prinsipə görə, əvvəlcə hər bir hipotezə nəzərən bu hadisənin ehtimalı *a priori* təyin olunmalıdır. Birinci hipotezdə şahidin № 79-u elan etməsi ehtimalı eyni zamanda bu nömrənin çıxması ehtimalıdır, yəni 1/1000-dir. Bu ehtimal şahidin doğru söyləməsi ehtimalı 9/10-a vurulmalıdır; deməli, bu hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı $9/10\,000$ olacaqdır. Əgər şahid yalan söyləyirsə, onda № 79 çıxmamışdır; bu halda ehtimal 99/1000-a bərabərdir. Lakin bu nömrənin çıxdığını elan etmək üçün

şahid onu çıxmamış 999 nömrə içərisindən seçməlidir; lakin şahidin nömrələri seçərkən birinə digərlərilə müqayisədə üstünlük verməsinə heç bir səbəbi olmadığından, onda onun № 79-u seçməsi ehtimalı 1/999-ə bərabərdir; bu ehtimalı əvvəlkinə vurduqda, ikinci hipotezdə şahidin № 79-u elan edəcəyi ehtimalı üçün 1/1000 ədədini alırıq. Daha sonra, bu ehtimal hipotezin özünün ehtimalı 1/10-a vurulmalıdır və nəticədə bu hipotezdə bu hadisənin ehtimalı üçün 1/10000 ehtimalı alınır. Əgər surəti – birinci hipotezdəki ehtimal, məxrəci – hər iki hipotezlərdəki ehtimallar cəmi olan kəsr yazarıqsa, onda altıncı prinsipə əsasən, birinci hipotezin ehtimalını almış olarıq ki, bu ehtimal da 9/10-a bərabər olardı, yəni şahidin doğruçuluğunun həmin ehtimalı alınardı. Bu ehtimal – həmçinin № 79-un çıxması ehtimalıdır. Şahidin yalan söyləməsi, № 79-un çıxmadığı ehtimalı isə 1/10-ə bərabərdir.

Əgər şahid aldatmaq istəyərək, çıxmayan nömərələr arasında № 79-un seçilməsində hər hansı cür maraqlı olsaydı; əgər o, belə hesab etsəydi ki, məs., bu nömrə üçün oyuna böyük məbləğ ortaya qoymaqla bu nömrənin çıxması ilə o, öz kreditini artıracaq, onda onun bu nömrəni seçməsi ehtimalı, əvvəlki kimi, 1/999 olmayacaqdır; bu ehtimal onun bu nömrənin elan olunmasında nə dərəcədə maraqlı olmasında asılı olaraq, 1/2, 1/9 və s. ola bilər. Bu ehtimalın 1/9 olduğunu fərz edərək, onu 999/1000 ehtimalına vuraraq, yalan hipotezlə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalını almaq üçün o, 1/10-ə də vurulmalıdır; onda ikinci hipotezdə bu hadisənin ehtimalı üçün 11/10000 qiyməti alınır. Birinci hipotezin ehtimalı və ya № 79-un çıxması, onda, əvvəlki qaydaya görə, 9/120-ə bərabər olur. Deməli, № 79-un çıxdığını elan edən şahidin marağı nəzərə alınarsa, bu ehtimal olduqca kiçiləcəkdir. Doğrudur, həmin bu maraq, əgər № 79 çıxarsa, şahidin doğru söyləməsi ehtimalı 9/10-u artırır. Lakin bu ehtimal vahidi və ya 10/10-u aşa bilməz; beləliklə, № 79-un çıxması ehtimalı 10/121-dan artıq ola bilməz. Sağlam düşüncə bizə təlqin edir ki, bu maraq inamsızlıq doğurmalıdır, hesablama isə bu marağın təsirini qiymətləndirir.

Şahidin elan etdiyi nömrənin ehtimalı, *a priori* olaraq, bir bölünmüş urndakı nömrələr sayına bərabərdir; bu ehtimal, şahidliyə əsasən şahidin doğruçuluğunun özünə çevrilir; deməli, bu şahidliyin özü ilə ehtimal azala da bilinər. Əgər, məs., urnda yalnız iki nömrə olarsa, № 1-in çıxmasının *a priori* ehtimalı 1/2 olur; əgər № 1-in çıxdığını elan edən şahidin doğru elan etməsi ehtimalı 4/10-ə bərabərdirsə, onda buna əsasən, № 1-in çıxması az ehtimalla olur. Əslində, aydındır ki, bu halda həqiqətdən çox yalana meylli şahid özünün şahid ifadəsi ilə şahidlik göstəriləcək faktın ehtimalını hər dəfə, bu ehtimal 1/2-ə bərabər olduqda və ya onu aşdıqda, kiçiltməlidir. Lakin, əgər urnda üç nömrə olarsa, № 1-in çıxmasının *a priori* ehtimalı doğruçuluğu 1/3-i aşan şahidin ifadəsi ilə artır.

Fərz edək ki, urnda 999 qara və bir ağ kürəcik vardır və urndan kürəciyi çıxaran şahid ağ kürəcik çıxdığını elan edir; müşahidə olunan hadisənin birinci hipotezə nəzərən *a prori* ehtimalı, burada əvvəlki sualdakı kimi $9/10\,000$-a bərabərdir. Lakin fərz olunarsa ki, şahid yalan söyləyir, ağ kürəcik çıxmamışdır, bu halın ehtimalı $999/1\,000$-a bərabərdir. Bu ehtimal yalan ehtimalı 1/10-ə vurulmalıdır, onda ikinci hipotezlə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı $999/10\,000$ olur. Bu ehtimal əvvəlki məsələdə yalnız $1/10\,000$-ə bərabər idi: belə böyük fərqin olması ondan asılıdır ki, qara kürəcik çıxdıqda, aldatmaq istəyən şahid üçün, əgər o, ağ kürəciyin çıxmasını elan etmək istəyirsə, çıxmayan 999 kürəcikdən seçim etmək şansı qalmır. Əgər surətləri – hər bir hipotezdəki ehtimallar, ümumi olan məxrəcləri – bu ehtimalların cəminə bərabər iki kəsrə baxılarsa, birinci hipotezin və ağ kürəciyin çıxması ehtimalı $9/1\,008$, ikinci hipotezin və qara kürəciyin çıxması ehtimalı $999/1\,008$ olardı. Bu sonuncu ehtimal yəqinliyə olduqca yaxınlaşır; o, yəqinliyə daha çox yaxınlaşar və $999\,999/1\,000\,008$-a bərabər olardı, bu şərtlə ki, urnda milyon kürəcik və bunlardan yalnız biri ağ olsaydı, odur ki, ağ kürəciyin çıxması, bu halda daha çox qeyri-adi hadisə olardı. Buradan görünür ki, faktın özü daha da qeyri-adi olmağa başladıqca yalan ehtimalı da necə artır.

Bu vaxta qədər biz fərz edirdik ki, şahid heç vaxt səhv etmir; lakin, əgər onun səhv edə biləcəyi fərz olunarsa, onda qeyri-adi fakt daha da güman edilməz olur. Onda iki hipotez əvəzinə aşağıdakı dörd hipotez irəli sürülür, məhz: şahid yalan söyləmir və özü də səhv etmir; şahid yalan söyləmir və səhv edir; şahid yalan söyləyir və səhv etmir; və nəhayət, şahid yalan söyləyir və səhv edir. Bu hipotezlərdən hər birində müşahidə olunan hadisənin ehtimalını *a priori* təyin edərək, altıncı prinsipə əsasən tapırıq ki, göstərilən faktın yalan olduğu ehtimalı: surəti – urndakı qara kürəciklər sayının şahidin aldatmaması və səhv etməsi və ya da ki, aldatması və səhv etməməsi ehtimalları cəminə hasili olan, məxrəci – bu surət ilə şahidin aldatmaması və səhv etməməsi və ya da ki, aldatması və bununla yanaşı səhv etməsi ehtimallarının cəminə bərabərdir. Buradan aydındır ki, əgər urnda qara kürəciklərin sayı olduqca çox olarsa, ağ kürəciyin çıxması qeyri-adi hadisə olacaqdır, qeyd olunan faktın mövcud olmaması ehtimalı isə yəqinliyə olduqca yaxınlaşacaqdır.

Bu nəticənin bütün qeyri-adi faktlara şamil olunmasından belə nəticə çıxır ki, səhv ehtimalı və ya şahidin yalanı ehtimalı, baxılan fakt nə qədər qeyri-adi olarsa, o qədər böyük olur. Bəzi müəlliflər əksini iddia edirdilər, onlar ona əsaslanırdılar ki, qeyri-adi faktın forması adi faktın formasına tamamilə oxşar olduğundan, eyni bir motivlər bizi şahidə bu faktlardan hansı birinin olduğunu iddia etməsindən asılı olmayaraq, eynilə inandırmağa sövq etməlidir. Sadə sağlam düşüncə belə qəribə iddianı qəbul etmir; lakin ehtimal hesabı sağlam düşüncənin göstərişlərini təsdiq edərək, qeyri-adi faktorlar haqqında şahidlik ifadələrinin doğruyaoxşar olduğunu daha çox qiymətləndirir.

Təkid etmək və belə fərz etmək olar ki, inanılan iki şahiddən biri ifadə verir ki, o, adamı iki həftə əvvəl ölü görmüşdür, digəri isə onu dünən sap-sağlam görmüşdür. Bu faktorlardan heç biri doğruyaoxşar olmayan heç bir şeyi ifadə etmir. Birlikdə götürülən bu faktların nəticəsi bu adamın dirilməsidir; bu şahid ifadələri birbaşa o adama birbaşa təsir etmədiyindən, nəticənin qeyri-adiliyi bu faktlara göstərilən inamı heç bir vəhclə azaltmamalıdır (Encyclopédie, art. Certitude).

Lakin, əgər şahid ifadələrindən çıxarılan nəticə qeyri-mümkün olsaydı, onda onlardan biri hökmən yalan olmalıydı; qeyri-mümkün nəticə isə səhv doğruyaoxşarolmamazlığın limiti olduğu kimi, qeyri-adi nəticə – qeyri-adi nəticələrin limitidir; qeyri-mümkün nəticə halında şahid ifadəsinin qiyməti sıfra bərabər olduğundan, qeyri-adi nəticə halında bu qiymət olduqca azalmalıdır və bu da əslində ehtimal hesabı ilə təsdiq olunur.

Bunu göstərmək üçün, birində (A-da) milyon ağ kürəcik, ikincisində (B-də) milyon qara kürəcik olan urna baxaq. Bunlardan birindən bir kürəcik çıxararaq, onu ikinci urna qoyub, sonra bu urndan bir kürəcik götürülür. İki şahiddən biri – birinci tiraja şahidlik edən, ağ kürəcik çıxdığını gördüyünü bəyan edir. Verilən ifadələrdən hər biri ayrı-ayrılıqda doğruyaoxşardır və aydındır ki, haqqında ifadə verilən faktın ehtimalı şahidin özünün doğruçuluğunu ifadə edir. Lakin şahid ifadələrindən belə nəticə çıxır ki, birinci tirajda A urnundan ağ kürəcik çıxmışdır və sonra bu ağ kürəcik B urnuna qoyulduqdan sonra, o, yenidən ikinci tirajda çıxmışdır, bu isə olduqca qeyri-adi bir nəticədir, belə ki, bu ikinci urnda bu halda bir ağ, milyon qara kürəcik olur, ona görə də, bu urndan ağ kürəcik çıxması ehtimalı $1/1\,000\,001$-ə bərabər olur. Hər iki şahid ifadələrinin ehtimallarının nəticə etibarilə zəiflənməsini təyin etmək üçün, biz qeyd etməliyik ki, burada müşahidə olunmuş hadisə, bu şahidlərdən hər birinin ağ kürəcik çıxdığının gördüyünü iddia etməsidir. Fərz olunur ki, 9/10 şahidin doğru ifadə verməsi ehtimalıdır; bu indiki halda o zaman mümkündür ki, şahid aldatmır və səhv etmir və o aldıdarsa, onda həm də səhv edir. Aşağıdakı dörd fərziyyəni irəli sürmək olar.

1) Birinci və ikinci şahid doğru ifadə vermişlər. Bu halda ağ kürəcik əvvəlcə A urnundan çıxarılmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/2-ə bərabərdir, çünki birinci tirajda çıxarılmış kürəcik iki urndan birindən çıxarıla bilinər. Sonra, A urnundan çıxarılmış və B urnuna qoyulmuş kürəcik yenidən ikinci tirajda çıxarıldı; bu hadisənin ehtimalı – $1/1\,000\,001$-ə bərabərdir; buna görə də, göstərilən faktın ehtimalı – $1/2\,000\,002$-ə bərabərdir. Bu ehtimalı 9/10 və 9/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, $81/200\,000\,200$ ehtimalını – birinci hipotezdə və

şahidlərin 9/10 ehtimalı ilə doğru ifadə verdikləri halındakı ehtimalı almış oluruq.

2) Birinci şahid doğru, ikinci şahid yalan ifadə verir, ikinci şahidin doğru ifadə verməməsi ya onun aldatması və səhv etməməsi və ya da onun aldatmaması və səhv etməsi ilə bağlı ola bilər. Deməli, birinci tirajda ağ kürəcik çıxmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/2-ə bərabərdir. Sonra bu kürəcik B urnuna qoyulduqdan sonra, bu urndan qara kürəcik çıxarılmışdır: bu hadisənin ehtimalı 1 000 000/1 000 001 -a bərabərdir; deməli, mürəkkəb hadisənin ehtimalı 1 000 000/ 2 000 002 -a bərabər olur. Bu ehtimalı, birinci şahidin 9/10 ehtimalı ilə doğru, ikincinin 1/10 ehtimalı ilə yalan ifadə verdikləri halında 9/10 və 1/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, ikinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 9 000 000/ 200 000 200 qiymətini alırıq.

3) Birinci şahid doğru ifadə vermir, ikincisi isə doğru ifadə verir. Deməli, qara kürəcik birinci tirajda B urnundan çıxmışdır, sonra isə o, A urnuna qoyulmuş və A urnundan ağ kürəcik çıxarılmışdır. Bu hadisələrdən birincisinin ehtimalı 1/2-ə, ikincisinin ehtimalı – 1 000 000/1 000 001 -a bərabərdir; deməli, mürəkkəb hadisənin ehtimalı 1 000 000/ 2 000 002 -a bərabərdir. Bu ehtimalı birinci şahidin 1/10 ehtimalı ilə yalan və ikinci şahidin 9/10 ehtimalı ilə doğru ifadə verdikləri halında, 1/10 və 9/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, uyğun hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 9 000 000/ 200 000 200 ehtimalını alırıq.

4) Nəhayət, hər iki şahid yalan ifadə verir. Deməli, birinci tirajda qara kürəcik B urnundan çıxarılmışdır, sonra o, A urnuna qoyulduqdan sonra, o, ikinci tirajda A urnundan çıxarılır. Bu mürəkkəb hadisənin ehtimalı 1/ 2 000 002 -ə bərabərdir. Şahidlərin hər birinin 1/10 və 1/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, bu hipotezdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı üçün 1/ 200 000 200 ehtimalını alırıq.

İndi isə iki şahid ifadəsinin ehtimalını, yəni hər bir tirajda ağ kürəcik çıxması hadisəsinin ehtimalını müəyyən etmək üçün birinci hipotezə uyğun ehtimal dörd hipotezin hamısına uyğun ehtimallar cəminə bölünməlidir və nəticədə bu ehtimal üçün olduqca kiçik kəsr – 81/ 18 000 082 ədədi alınır.

Əgər iki şahiddən birincisi ağ kürəciyin A və B urnundan birindən çıxarıldığını; ikincisi də ağ kürəciyin oxşar surətdə A və B urnlarından birindən çıxarıldığını təsdiq etsəydilər, hər iki şahidin ifadələrinin ehtimalı onların şahidlik ehtimallarının hasilinə və ya 81/100-ə bərabər olardı: deməli, bu ehtimal, heç olmasa, yüz səksən min dəfə əvvəlki ehtimaldan çox olardı. Buradan aydın görünür ki, iki şahid ifadəsinin qeyri-adi nəticəsi – birinci tirajda ağ kürəcik çıxdığı halda, birinci haldakı kimi ikinci tirajda ağ kürəciyin çıxması kimi qeyri-adi nəticə, – iki şahid ifadəsinin əhəmiyyətini nə dərəcədə azaldır.

Biz, yüz zərin atılmasında bütün zərlərin eyni üzlə düşməsinə şahidlik edən bir şəxsə inanmazdıq: əgər biz özümüz bu hadisənin şahidi olsaydıq, biz öz gözlərimizlə gördüyümüzə inanardıq, yalnız bundan sonra bütün şərtləri diqqətlə yoxlayardıq və bundan sonra da hər hansı bir şəxsi də şahidlik etməyə dəvət edərdik ki, gördüyümüzə tamamilə əmin olaq ki, burada heç bir qallyusinasiyalara, heç bir fokusa yol verilməmişdir; amma bütün bunlardan biz, tərəddüd etmədən, bu hadisənin fövqəladə qeyri-doğruyaoxşarolmasına baxmayaraq, onu qəbul edərdik və heç bir kəs onun izahı məqsədilə görmə qanunlarının inkar olunmasına cəhd belə göstərməzdi. Buradan biz nəticə çıxarmalıyıq ki, təbiət qanunlarının sabitliyinin ehtimalı bizim üçün qeyd olunan hadisənin baş verə bilməyəcəyi ehtimalından üstündür, o ehtimaldan ki, o, öz növbəsində şübhə doğurmayan əksər tarixi faktların ehtimalından üstündür. Buna əsaslanaraq, şahid ifadələrinin nə dərəcədə olduqca böyük çəkiyə malik olması barədə mühakimə yürütmək olar, çünki sonra təbii qanunların pozulduğunu etiraf etmək mümkün olsun və bu halda tənqidin adi qaydalarının pozulduğunu etiraf etmək mümkün olsun və bu halda tənqidin adi qaydalarının tətbiqi sui-istifadə kimi qiymətləndirilə bilinsin. Belə ciddi şahid ifadələrini təqdim etmə-

yənlərin hamısı bu qanunlara zidd olan və onların nümayiş etdirdikləri hadisələri müdafiə edirlər, əslində isə onların təlqin etmək istədiklərinə inam artmaq əvəzinə zəifləyir, çünki bu halda bu hekayələr bu müəlliflərin səhvə yol verdiklərini və ya yalanını çox ehtimallı edir. Maariflənmiş insanların inamını azaldan nə varsa, həmişə möcüzə gözləyən qara camaatın inamını əksər hallarda çoxaldır.

Elə şeylər var ki, onların qeyri-doğruyaoxşarlığını heç bir şey şübhə altına qoya bilməz; lakin hökmran baxışların təsiri altında bu qeyri-doğruyaoxşarlıq o dərəcədə zəif ola bilər ki, şahid ifadələrinin ehtimalından kiçik görünə bilinər; bu baxışlar dəyişdikdə, o əsrdə bir səslə qəbul olunmuş, bu baxışın doğurduğu cəfəngiyat məhz sonrakı əsrlər üçün ən yaxşı əqllərə ümumi fikrin böyük təsirinin yeni sübutu kimi görünəcəkdir. XIV Lyudovik əsrinin iki dahi şəxsi – Rasin və Paskal buna olduqca gözəl nümunədir. İnsan qəlbinin gözəl rəssamı və bütün şairlərdən ən mükəmməli Rasinin, Port-Royal abbatlığının keçmiş pansioneri və Paskalın bacısı qızı (qardaşı qızı) gənc Peryenin guya ki, çox yaxşı sağalması haqqında nə cür canfəşanlıqla danışdığını görmək təəssüf doğurur; bu haqda Paskalın mülahizələrini oxumaq çox ağırdır, o, bu mülahizələrilə isbat etməyə çalışır ki, bu möcüzə din üçün zəruri idi ki, bu abbatlığın o zamanlar iyezuitlərin təqibinə məruz qalmış rahibə qadınların doktrinasına haqq qazandıra bilsin. Gənc Perye artıq üç il yarım idi ki, göz yaşının fistulasından əziyyət çəkirdi, o, öz xəstə gözü ilə guya ki, Xilaskarın çələng tikanı olan müqəddəs tütyaya toxunduğu anda özünü sağalmış hiss etmişdi. Bir neçə gündən sonra həkimlər və cərrahlar sağalmanı təsdiq etmişdilər, onların fikrincə bu hadisədə nə təbiətin, nə dərmanların iştirakı olmamışdır. 1656-da baş vermiş bu hadisə çox böyük səs-küyə səbəb olmuşdu; Rasinin dediyi kimi, «bütün Paris» «Port Royala axışdı». Hər gün insan axını çoxalırdı və belə təəssürat yaranırdı ki, bu kilsədə baş verən möcüzələr sayının çoxluğu xalqın mömünliyini artırmaq üçün elə Allahın özünə də xoş idi. Hələ o vaxtlar möcüzələr və sehrbazlıq inanılmaz görünmədiyindən və bunlara təbiətdəki bütün qəribəliklər şübhə edilmədən şamil olunduğundan, onları başqa cür izah edə bilmirdilər.

Qeyri-adi təzahürlərə bu baxışa XIV Lyudovik əsrinin ən gözəl əsərlərində təsadüf olunur, hətta müxtəlif razılaşmaları nəzərdə tutan, müdrik Lokk insan idrakı haqqında «Təcrübə» əsərində deyir ki: «ümumi təcrübə və şeylərin adi axarının insan əqlinə təsir göstərməyə tam əsası olduğuna baxmayaraq, bu razılaşmada nəyə inanmaq, nəyi isə inkar etməklə razılaşmağa onları sövq etmək üçün, bununla belə, elə hallar da olur ki, faktdakı qəribəlik bu faktın əsasına xidmət edən əsl şahidliyə bizim göstərəcəyimiz inamı heç də azaltmır. Əgər fövqəladə hadisələr verilən şəraitdə və verilmiş zamanda təbiətdə şeylərin axarını dəyişmək iqtidarında olan şəxsin qarşısına qoyduğu məqsədlərə uyğun olursa, onda bizim ağlımız, bunlara, bunlarla ziddiyyətin olması çoxaldıqca və ya bunlar adi müşahidələrdən də üstün olduqca, böyük inamla yanaşa bilər». Beləliklə, idrakın əsas etibarilə öz proqresinə səbəb olan şahid ifadələrinin ehtimallarının gerçək prinsipləri, filosoflar tərəfindən qəbul edilmədiklərindən, mən bu məsələ üçün hesablama nəticələrini geniş surətdə şərh etməyi özümə borc bildim.

Burada Paskalın məhşur arqumentini araşdırmaq yerinə düşərdi, bu arqumentə ingilis riyaziyyatçısı Kreq tərəfindən həndəsi forma verilmişdi. Bir neçə şahid belə ifadə verir ki, Allahın özü tərəfindən onlara ayan olmuşdur ki, hər hansı məlum şeylə razılaşaraq, bir və ya iki deyil, sonsuz sayda xoşbəxt günlərdən həzz almaq mümkündür. Şahid ifadələrinin ehtimalının kiçik olmasına baxmayaraq, əgər bu ehtimal sonsuz kiçik olmazsa, aydındır ki, bununla razılaşan kəslərin qazancı sonsuz böyükdür, çünki bu qazanc bu ehtimalın sonsuz mənfəətinə hasilidir: buna görə də, bu qazancı əldə etməkdə tərəddüd etmək belə olmaz.

Bu arqument Allahın adı ilə şahidlərin vəd etdikləri xoşbəxt günlərin sonsuz sayda olacağına əsaslanmışdı. Deməli, onların dedikləri yerinə yetirilməli idi, məhz ona görə ki, onlar öz vədlərində bütün hədləri, sağlam düşüncəyə zidd nəticəni aşırdılar. Hesablama isə bizə göstərir ki, vədlərin məhz belə şişirdilməsi, şahid ifadələrinin ehtimalını o qədər zəiflədir ki, bu şişirtmə ehtimalı sonsuz kiçik edir və ya sıfra çevirir. Əslində bu hal ona gətirir ki, bu halda şahid çoxlu nömrələr olan urndan yalnız bir nömrə çıxarıldıqda onun ən böyük nömrə olduğunu elan etsin; digər tərəfdən bu şahidin bu nömrənin çıxmasını elan etməsində çox maraqlı olduğu da məlumdur. Biz əvvəl gördük ki, onun maraqlılığı bu şahidliyin qiymətini nə dərəcədə azaldır. Şahid əgər yalan söyləyirsə,

1/2-lə onun ən böyük nömrəni götürəcəyi ehtimalını qiymətləndirərək, biz hesablamadan sonra alarıq ki, onun elan etdiyinin ehtimalı – surəti vahidə, məxrəci isə vahid üstəgəl *a priori* baxılan və ya elan ediləndən asılı olmayaraq, yalan ehtimalının nömrələr sayına hasilinin yarısına bərabər olan kəsrdən kiçikdir. Bu hal ilə Paskalın arqumenti aid olan hal arasında müqayisə aparmaq üçün urnun nömrələrini xoşbəxt həyatların bütün mümkün ədədlərilə göstərmək kifayətdir, nəticədə bu nömrələrin sayı sonsuz olur və qeyd olunmalıdır ki, əgər şahidlər yalan ifadə verirlərsə, bununla onlar üçün ən əlverişli hal əbədi səadət vəd etməkdir, çünki onda onlar öz yalanlarını sənədləşdirmiş olurlar. Onların verdiyi ifadələrin ehtimalının ifadəsi bu halda sonsuz kiçik olur. Bu ehtimalı vəd olunmuş xoşbəxt günlərin sonsuz sayına vurduqdan sonra, sonsuzluq hasildə itir, yox olur, bu hasil bu vəddən doğan mənfəəti ifadə edir ki, bu da Paskalın arqumentini alt-üst edir.

İndi isə müəyyən bir fakta aid bir neçə şahid ifadələri toplusunun ehtimalına baxaq. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, bu fakt – içərisində yüz nömrə olan urndan yalnız bir nömrə çıxarılmasıdır. Bu tirajın iki şahidi elan edir ki, № 1 çıxmışdır və bu şahid ifadələrindən alınan ehtimal təyin olunmalıdır. Aşağıdakı iki hipotezi fərz etmək olar: şahidlər doğru söyləyirlər və şahidlər yalan söyləyirlər. Birinci hipotezdə № 1 çıxmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/100-ə bərabərdir. Bu ehtimalı 9/10 ehtimalı ilə doğru söyləyən şahidin və 7/10 ehtimalı ilə doğru söyləyən digər şahidin doğruçuluq ehtimallarına vurmaq lazımdır: beləliklə, bu hipotezdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalının 63/10 000 olduğunu alırıq. İkinci hipotezdə № 1 çıxmamışdır və bu hadisənin ehtimalı 99/100-a bərabərdir. Onda şahidlərin razılaşdırılmış ifadələri belə tələb edir ki, aldatmaq üçün onların hər ikisi çıxmamış 99 nömrədən № 1-i seçmişlər: bu seçimin ehtimalı 1/99 kəsrinin özünə hasilinə bərabərdir; sonra bu iki ehtimalı bir-birinə vurduqdan sonra, bu hasili də şahidlərin aldatma ehtimalları 1/10 və 3/10-ə vurmaq lazımdır, beləliklə də, ikinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 1/330 000 qiymətini alırıq. Birinci hipotezə uyğun ehtimalı hər iki hipotezə uyğun ehtimalların cəminə bölərək, şahidlik olunan faktın və ya № 1-in çıxması ehtimalını tapırıq. Bu ehtimal, beləliklə, 2079/2080 olacaqdır, nömrənin çıxmaması ehtimalı və şahidlərin yalan ifadələri ehtimalı isə 1/2 080 1/2080 olacaqdır.

Əgər urnda yalnız 1-ci və 2-ci nömrələr olsaydı, onda biz həmin bu qayda ilə № 2-nin çıxması ehtimalının 21/22 olduğunu və deməli, şahidlərin yalan ifadələri üçün 1/22 ehtimalını almış olardıq, bu ehtimal əvvəlki ehtimaldan heç olmasa doxsan dörd dəfə böyükdür. Buradan aydın olur ki, şahidlərin yalan ifadə vermələri ehtimalı, onların şahidlik edəcəkləri fakt özlüyündə az ehtimallı olduqda, necə kiçilir. Əslində, aydındır ki, əgər şahidlər aldadırlarsa, şahid ifadələrinin öz aralarında razılığı, əgər onlar bir-birilə şərtləşməmişdirlərsə və biz bu halı burada fərz etmədiyimizi də nəzərə alarıqsa, az ehtimal olunan haldır.

Əvvəlki halda, urnda yalnız iki nömrə olduqda və buna görə də, göstərilən faktın ehtimalı *a priori* 1/2 olduğundan, şahid ifadələri nəticəsində alınan ehtimal – şahidlərin doğruçuluqları ehtimallarının hasilinin, bu hasil ilə onların uyğun yalan ehtimallarının hasilinin cəminə nisbətinə bərabərdir.

Bundan sonra biz kimlərinsə verdikləri bir sıra şahid ifadələrinin faktların ehtimalına zamanın etdiyi təsirə baxmalıyıq. Şahid ifadələrinin bu sırası uzandıqca, aydındır ki, bu ehtimal azalmalıdır. Əgər fakt özü-özlüyündə tamamilə ehtimal olunmayandırsa, onda bu faktın şahid ifadələrindən sonra alacağı ehtimal, şahidlərin doğruçuluq ehtimallarının hasili ilə birlikdə, azalır. Əgər fakt özü-özlüyündə ehtimala malikdirsə, əgər, məs., bu fakt – içərisində sonlu sayda nömrələr olan urndan, yəqinliklə, bir nömrənin çıxması məlum olduqda № 2-nin çıxması faktı olarsa; kimlərinsə verdiyi şahid ifadələrinin bu ehtimalla verə biləcəyi əlavə ilə bu hasil bu ehtimal ilə azalırsa və bu hasilin birinci vuruğu urndakı nömrələr sayından bir vahid az olan ədədin həmin nömrələr sayına nisbətinə bərabər; digər vuruqlardan hər biri, hər bir vuruq isə hər bir şahidin doğruçuluq ehtimalının, onun yalanı ehtimalının urndakı nömrələr sayından bir vahid əskik ədədə nisbəti qədər az olan ədədə bərabərdirsə, onda faktın ehtimalının limiti, *a priori* və ya şahid ifadələrindən asılı olmayaraq, baxılmış bu faktın limitidir, bu ehtimal bir bölünmüş urndakı nömrələr sayına bərabərdir.

Buna görə də, zamanın göstərdiyi təsir tarixi faktların ehtimalını aramsız olaraq azaldır, necə ki, zamanın təsiri ən möhkəm abidələrdə belə öz izini qoyur. Doğrudur, bu təsiri şahid ifadələrini və onların söykəndiyi abidələri qoruyaraq və çoxaldaraq yavaşıtmaq olar. Bu məqsəd üçün ən möhtəşəm vasitə – bədbəxtlikdən, qədim dövr insanına məlum olmayan kitab nəşridir. Kitab nəşrinin yaratdığı sonsuz saylı üstünlüklərə baxmayaraq, yer səthinin zamanın qaçılmaz təsiri ilə həmişəlik məruz qaldığı fiziki və mənəvi inqilablar onunla nəticələnəcəkdir ki, minilliklər ötdükcə indi yəqin görünən tarixi faktlar şübhə doğuracaqdır.

Kreq xristian dininin dəlillərinin tədricən zəifləməsini hesablamağa cəhd göstərmişdi: o fərz etmişdi ki, dünyanın sonu o vaxt baş verəcəkdir ki, bu din öz ehtimalını itirmiş olsun, o tapır ki, bu onun hesablamasından 1454 il sonra baş verəcəkdir. Lakin onun analizi, dünyanın varlığının davamı haqqındakı hipotez qəribə olduğu qədər səhvdir.

Seçkilər və iclasların qərarları haqqında

Hər hansı iclasın qərarlarının ehtimalı bu iclası təşkil edən üzvlərin səs çoxluğundan, onların maariflənmiş olub-olmadığından və onun üzvlərinin qərəzsizliyindən asılıdır: bu qərarlara o qədər xüsusi maraq və istəklərin təsiri olur ki, bu ehtimalı hesablamaq mümkün olmur. Bununla belə, sadə sağlam düşüncə və hesablanma ilə təsdiq olunmuş bir neçə ümumi nəticələr vardır. Məs., əgər iclasda baxılan məsələ ilə əlaqədar onun üzvləri az məlumatlı olarsa, bu məsələ üçün çox incə mülahizələr tələb olunarsa və ya bu bənddə həqiqət məlum mühakimələrə ziddirsə, səs verən hər bir kəsin həqiqətdən yayınması bir şansa qarşı birdən çox şansın olması ilə baş verərsə, onda əksər çoxluğun qərarının çox pis olacağı güman olunur, bu mənada gözlənilən təhlükə iclas üzvlərinin sayı çox olduqca daha da doğru sayılacaqdır. İctimai maraq xatirinə iclasda, yalnız onun üzvlərinin böyük əksəriyyəti üçün anlaşılan məsələlərə baxılmalıdır; olduqca mühümdür ki, maariflənmə hər tərəfli olsun və ağla, təcrübəyə əsaslanmış yaxşı kitablar özükimilərin taleini həll edənləri və ya onları idarə edənləri düzgün istiqamətləndirsinlər və onları yalnış baxışlardan və cahil əqidələrdən qorusunlar. Alimlər tez-tez müşahidə edirlər ki, ilk təəssürat çox vaxt aldadıcı olur və həqiqət, gerçək olan, həmişə doğruyaoxşar olmur.

İclas üzvlərinin fikir müxtəlifliyi halında iclasın iradəsini öyrənmək və müəyyənləşdirmək çətin olur. Adi iki hala baxaraq, qeyd etdiyimizə nəzərən bir neçə qaydanı verməyə çalışaq: bir neçə namizəd arasında seçim və eyni bir mövzuya aid olan bir neçə təklif arasında seçim.

Bir və ya bir neçə eyni tip yerə namizəd olan bir neçə nəfər arasında iclas seçim etməlidirsə, səs verən şəxsin namizədlərin adlarını onların layiq olduğu qayda ilə yazması ən sadə üsul hesab oluna bilinər. Əgər fərz edilərsə ki, o, bu adları siyahıda vicdanla yerləşdirir, onda bu siyahılar olan vərəqlərə baxdıqda, namizədlərin öz aralarında hansı üsulla müqayisə olunmasına baxmayaraq, seçkinin nəticələri aşkar olunacaqdır, odur ki, yeni seçkilər bu baxımdan heç bir şeyi dəyişdirməyəcəkdir. Bundan sonra üstünlük qaydası müəyyən olunmalıdır, bu qayda namizədlər üçün siyahıları müəyyənləşdirir. Fərz edək ki, hər bir seçiciyə içərisində sonsuz sayda kürəcik olan urn verilmişdir, bu kürəciklər vasitəsilə o, namizədlərə aid olan bütün cəhətləri qeyd edə bilir; bir də fərz edək ki, o, öz urnundan hər bir namizədin üstün cəhətinə mütənasib sayda kürəcik çıxarır və fərz edək ki, ədəd siyahı vərəqində namizədin adının yanında yazılmışdır. Aydındır ki, hər bir namizədin hər bir siyahı vərəqindəki adının qarşısındakı ədədlərin hamısının cəmi təyin olunduqdan sonra, ən böyük cəmi almış namizəd iclasın layiq bildiyi namizəd olacaqdır və ümumiyyətlə, namizədlərin üstünlüyü qaydası onlardan hər birinə aid olan cəmlərin düzülüşü qaydası olacaqdır. Lakin siyahı vərəqlərində hər bir seçicinin namizədlərə verdiyi kürəciklər sayı qətiyyən qeyd olunmur; bunlarda, yalnız, birinci namizədin ikincidən çox, ikinci namizədin üçüncüdən çox və s. kürəcik saylarının qeyd olunduğu göstərilir. Deməli, əgər baxılan siyahı vərəqində birinci namizədin qarşısında hər hansı kürəciklər sayı yazılarsa, onda əvvəlki şərtləri ödəyən kiçik ədədlərin bütün birləşmələri eyni cürə mümkündür; beləliklə, biz hər bir kombinasiyanı təşkil edən bütün ədədlərin cəmini

təyin edərək və onu bütün kombinasiyalar sayına bölərək hər bir namizədin kürəciklərinin sayını alarıq. Çox sadə analiz göstərir ki, hər bir vərəqdə sonuncu adın, sonuncudan əvvəlki adın və s. yanında yazılmalı olan ədədlər 1, 2, 3, … ədədi silsiləsinin hədlərinə mütənasibdirlər. Biz hər bir vərəqdə bu silsilənin hədlərini bu qayda ilə yazsaq və hər bir namizədə bu vərəqlərdəki hədləri əlavə etsək, onda müxtəlif cəmlər özünün qiyməti ilə namizədlər arasında müəyyən olunacaq üstünlük qaydasını göstərəcəkdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin göstərdiyi seçki üsulu belədir. Əgər hər bir seçici öz vərəqində namizədlərin adını bu namizədlərin layiq olduğu üstünlüklərinə görə sıra ilə yazsaydı, bu üsul, şübhəsiz ki, ən yaxşı üsul olardı; lakin xüsusi maraqlar və üstünlükləri nəzərə almayan bir çox yad mülahizələr bu qaydanı pozacaqdır və bəzən belə məcburiyyət yaranacaqdır ki, üstünlük verilən namizəd axırıncı yerdə olacaqdır, bu isə ən təhlükəli hala – orta üstünlüyü olan namizədlərə olduqca böyük üstünlük verilməsinə səbəb olacaqdır. Buna görə də, belə təcrübənin qəbul edildiyi müəssisələrdə bu qaydadan imtina olundu.

Səslərin tamamilə böyük əksəriyyəti üzrə aparılan seçkilər bu əksəriyyətin səs vermədikləri namizədlərdən heç birinin keçə bilməyəcəyi ilə yanaşı belə bir üstünlüyü də ifadə edir ki, bu əksəriyyət iclasın iradəsini ifadə edir. Seçkilər yalnız iki namizəd olduğu halda əvvəlki üsulla həmişə üst-üstə düşür. Doğrudur, bunlar elə namünasiblik yaradır ki, seçkiləri sonsuz edir, lakin bununla belə təcrübə göstərmişdir ki, bu namünasiblik yox olur və seçkilərə son qoymaq üçün ümumi bir arzu bir namizəd ətrafında səslərin əksəriyyətini birləşdirir.

Hər hansı bir əşyaya aid olan bir neçə təklifdən birinin seçilməsi, belə çıxır ki, bir neçə namizəd arasında seçimin qaydaları kimi olmalıdır. Lakin bu iki hal arasında fərq vardır, belə ki, bir namizədin üstün cəhətləri onun rəqiblərinin üstün cəhətlərini istisna etmir; amma birbirinə zidd təkliflərdən birini seçdikdə, bir təklifin doğruluğu digərlərin doğruluğunu istisna edir. Bu halda məsələyə aşağıdakı kimi baxılmalıdır.

Hər bir seçiciyə bir urn verək; bu urn içərisində sonsuz sayda kürəcik vardır və fərz edək ki, o, bu kürəcikləri müxtəlif təkliflər arasında bunlara verdiyi ehtimallara uyğun olaraq, mütənasib surətdə paylayır. Aydındır ki, kürəciklərin hamısının sayı yəqinliyi ifadə edirsə, seçici isə fərz olunduğuna görə əmindirsə ki, təkliflərdən biri doğrudur, o, bu ədədi (sayı) təkliflər arasında paylaşdırır. Beləliklə, məsələ kürəciklərin yerləşdirilməsi üçün birləşmələr sayının təyin olunmasına gətirilir ki, bu halda siyahı vərəqində birinci təklif üçün kürəciklər ikincidən, ikinci üçün, üçüncü üçün olduğundan daha çox olmalıdır; bu ona görədir ki, bu müxtəlif birləşmələrdə hər bir təklifə aid bütün kürəciklər sayının cəmini təyin etmək, bu cəmi bu birləşmələrin sayına bölmək üçün: alınan nisbətlər hər hansı siyahı vərəqindəki təklifə aid göstərici kimi yazılan ədədi ifadə edəcəkdir. Analizin köməyilə biz tapırıq ki, axırıncı təklifdən başlayaraq, birinciyə çatmaq üçün bu nisbətlər birbirilə aşağıdakı kəmiyyətlər kimi nisbətdə olur: 1) vahid bölünmüş təkliflərin sayı; 2) bir vahid artırılmış əvvəlki kəmiyyət bölünmüş bir vahid az təkliflər sayı; 3) bir vahid artırılmış bu ikinci kəmiyyət bölünmüş iki vahid az təkliflər sayı və s. Bu kəmiyyətləri hər bir vərəqdə onların aid olduqları təkliflərin yanında yazaraq, müxtəlif vərəqlərdəki eyni bir təklifə aid bütün kəmiyyətləri toplayaraq, iclasın bu təkliflərə verdiyi üstünlüyü və öz qiyməti ilə qaydanın göstəricisi olan cəmi almış oluruq.

İclasları yeniləşdirmək, yəni müəyyən olunmuş bir neçə ildən sonra onları tamamilə dəyişdirmək haqqında bir neçə söz deyək: bu yeniləşmə birdən-birə olmalıdırmı və ya bu illər ərzində həyata keçirilməlidirmi? İclas, bu qaydaya görə, o vaxtlar hökmran olan müxtəlif fikirlərin təsiri altında təşkil olunmalıydı, onda bu iclasda hökmran olan rəy, bütün bu fikirlər arasında çox güman ki, orta bir fikir olardı. Beləliklə, zaman ötdükcə, iclas onun üzvlərinin təmsil etdiyi ərazinin bütün hissələrində seçkilərin təşviqatının ona verə biləcəyi qədər üstünlük əldə edə bilərdi. Əgər onu nəzərə alarıqsa ki, təcrübə də çox yaxşı göstərmişdi ki, seçkilər həmişə hökmran baxışların ən şişirdilmiş mənasında istiqamətlənir, onda biz bu baxışların bəzilərini digərlərilə qismən yeniləşdirməklə onları cilovlamağın necə də faydalı olduğunu görərdik.

Məhkəmə qərarlarının ehtimalı haqqında

Sadə sağlam düşüncənin bizə təqlin etdiyi analiz də sübut edir ki, məhkəmənin tərkibi çoxsaylı və hakimlər daha maarifli olduqca məhkəmə qərarlarının yumşaqlığı daha çox ehtimallı olur. Buna görə də, apellyasiya məhkəmələrinin bu iki şərti ödəmələri məqsədəuyğun olardı. Məhkəmənin müttəhimə daha yaxın olan birinci instansiyaları ehtimal olunan ilkin hökmün xeyri barədə onları xəbərdar edir və onlar çox vaxt ya razılığa gəlirlər, ya da ki, öz iradlarından əl çəkirlər. Lakin əgər məhkəmə çəkişməsinin mövzusunda inamsızlıq və onun mühümlüyü iddiaçını apellyasiya məhkəməsinə müraciət etmək məcburiyyətində qoyursa, iddiaçı böyük ehtimalla ədalətli hökm, öz sağlamlığı üçün böyük təhlükəsizlik, yeni prosesin doğuracağı görüləsi işlər və məsrəflər üçün təzminat almağa nail olmalıdır. Məhz bu, dairə məhkəmələrinin (tribunaux de département) qarşılıqlı apellyasiya institutunda yerinə yetirilmirdi, bu institut, buna görə də, vətəndaşların maraqlarına çox ziyan verirdi. Bəlkə də, ehtimalların hesablanması ilə, apellyasiya məhkəmələrində aşağı məhkəmənin hökmünü ləğv etmək üçün, heç olmasa iki səs çoxluğunu tələb etməyi razılaşdırmaq lazım idi. Əgər cüt sayda hakimlərdən ibarət apellyasiya məhkəmələrində səslərin bərabərliyi halında qərar qüvvədə qalsaydı, onda bu nəticə alına bilinərdi.

Mən xüsusən cinayət işləri üzrə qərarlara baxacağam.

Şübhəsiz ki, müttəhimi cəzalandırmaq üçün hakimlər onun törətdiyi cinayəti sübut edən ən güclü dəlillərə malik olmalıdırlar; lakin mənəvi isbat həmişə yalnız fərziyyədir və təcrübə olduqca yaxşı göstərmişdir ki, hətta ən ədalətli sayılan cinayət hökmlərində nə cür səhvlər ola bilir. Ölüm hökmünün ləğvinə tərəfdar olan filosoflar üçün bu səhvləri düzəltmək mümkünlüyü ən əsas arqumentdir. Beləliklə, biz riyazi aşkarlığı gözləməli olsaydıq, məhkəmə təxirə salınmalı idi. Cinayətin cəzasızlığı ilə baş verə bilən təhlükə isə bizi mühakimə etməyə vadar edir. Bu məhkəmə, mən səhv etmirəmsə, aşağıdakı məsələnin həllinə gətirilir: müttəhimin təqsirinin sübutu zəruri olan ən böyük ehtimala malikdirmi ki, vətəndaşlar məhkəmənin səhvlərilə: əgər ittiham olunan şəxs günahsızdırsa və cəzalandırılmışdırsa, əgər o günahkardırsa və bəraət qazanmışdırsa, onun cəzalandırılması onun yeni cinayətlərinə və bundan nümunə götürən bədbəxtlərin də cinayətlərinə səbəb ola biləcəyi kimi hallarla daha az üzləşsinlər. Bu məsələnin həlli çox böyük çətinliklə dərk olunan bir çox elementlərdən asılıdır: cinayətkar cəzasız qalarsa, cəmiyyəti qorxuya salan təhlükənin sovuşmadığı gündəmdə olur. Bu təhlükə bəzən o qədər böyük olur ki, magistrat cəzasızlığı qorumaq üçün düşünülmüş surətdə müəyyən olunmuş formalardan imtina etmək məcburiyyətində qalır. Söhbəti gedilən bu məsələni, demək olar ki, həllolunmaz edən amil – müttəhimin mühakimə olunması üçün zəruri olan ehtimalı təyin etməyin və müqəssirin törətdiyi əməlin ehtimalını dəqiq qiymətləndirməyin mümkünsüzlüyüdür. Hər bir hakim belə hallarda öz taktına müraciət etməlidir: o, müxtəlif şahid ifadələrini və cinayətin müşayiət olunduğu vəziyyətləri öz mülahizələri və öz təcrübəsinin nəticələri ilə müqayisə edərək, öz fikrini qərarlaşdırır; bu halda ifadə almaqda və müttəhimlərin mühakimə edilməsində qazanılan uzun təcrübə, çox vaxt bir-birinə zidd ifadələr arasında gerçəyi aşkar etmək üçün böyük üstünlüklər verir.

Bundan başqa, əvvəlki məsələ cinayətə verilən cəzanın ölçüsündən asılıdır, belə ki, aydındır ki, ölüm hökmü üçün dəlil-sübutların bir neçə aylıq həbs qərarına görə lazım ola bilən dəlil-sübutlardan daha tutarlı olması tələb olunur. Bu, cəzanın cinayət ilə müvafiqliyi lehinə səbəbdir, belə ki, yüngül cinayətə verilən ağır cəza bir çox günahkara bəraət vermək zərurətinə səbəb olacaqdır. Cinayət ehtimalının onun ağırlıq ölçüsünə hasili təhlükə ölçüsüdür, bu ölçü cəmiyyəti cinayətkara bəraət vermək məcburiyyətinə sövq edə bilər, onda belə qənaətə gəlmək olar ki, cəza bu ehtimaldan asılıdır. Bu bilavasitə məhz məhkəmələrdə yerinə yetirilir, bu məhkəmələrdə müttəhim müəyyən müddət saxlanılır; bu şəxsin əleyhinə tutarlı dəlillər olur, lakin bunlar onun məsuliyyətə cəlb olunması üçün yetərli olmur. Yeni dəlil-sübutlar toplamaq niyyəti ilə, onu heç də həmən öz əhatəsindəki vətəndaşların arasına qaytarmırlar, çünki o, öz çevrəsi üçün yenidən narahatlıq yarada bilərdi. Lakin bu ölçünün ixtiyariliyi və ondan sui-istifadə fərdi azadlığa böyük dəyər verən ölkələrdə bu ölçünü onu atmağa məcbur etmişdi.

Belə olan halda, yalnız böyük çoxluqla cəzalandıra bilən məhkəmənin qərarının ədalətli olacağı ehtimalı nəyə bərabərdir, yəni bu

qərar yuxarıda qoyulmuş sualın düzgün həllinə uyğun olacaqmı? Bu mühüm məsələnin yaxşı həll olunması müxtəlif məhkəmələri bir-birilə müqayisə etməyə bir vasitə olardı. Məhkəmənin çoxsaylı tərkibi halında çoxluq yalnız bir səslə ifadə olunduqda, baxılan məsələ ən azı şübhə doğurur. Bu halda müttəhimin məsuliyyətə cəlb olunması onun günahsızlığını qoruyan humanizm prinsiplərinə zidd olardı. Hakimlərin həmrəyliyi ədalətli hökm üçün ehtimalın çox böyük olmasına səbəb olardı; lakin belə qərarın məcburiliyi çox günahkarın bəraət almasına da səbəb ola bilərdi. Buna görə də, ya əgər onların həmrəyliyi arzuolunandırsa, hakimlərin sayı azaldılmalı və ya məhkəmə üzvlərinin sayı çox olduğu halda məsuliyyətə cəlb etmək üçün zəruri sayda hakimdən ibarət çoxluq artırılmalıdır. Mən hesablanmanı bu məsələyə tətbiq etməyə çalışacağam, belə ki, sağlam düşüncənin bizə verdiyi məlumatlar əsasında həmişə bu hesablanmanın ən yaxşı nəticə verəcəyinə əminəm.

Hər bir hakimin fikrinin ədalətli olduğu ehtimalı bu hesablamaya başlıca element kimi daxil olur. Bu ehtimal, aydındır ki, hər bir işdə nisbidir. Əgər min bir hakimdən ibarət məhkəmədə beş yüz bir nəfər bir fikirdə və beş yüz nəfər isə əks fikirdə olarsa, onda aydındır ki, hər bir hakimin fikrinin ədalətli olduğu ehtimalı 1/2-dən çox da böyük olmayan kəmiyyət qədər artıq olur, çünki onun olduqca böyük olduğu fərz olunarsa, bir səs fərqi hadisəsi qeyri-mümkün hadisə olardı. Əgər bütün hakimlər bir-birilə razı olarlarsa, bu onu göstərir ki, dəlillər o qədər güclüdür ki, bunlar inam doğurur: bu halda hər bir hakimin fikrinin ehtimalı vahidə və ya hər hansı ümumi ehtiraslar və ya qabaqcadan yaranmış yalnış fikirlər hakimlərin hamısının eyni zamanda səhvə yol verməsinə səbəb olmazsa, gerçəkliyə çox yaxın olur. Bu hallardan başqa, müttəhimin lehinə və əleyhinə səslərin nisbəti, yalnız bu nisbət, bu ehtimalı təyin etməlidir. Beləliklə, mən fərz edirəm ki, bu ehtimal 1/2-dən vahidə qədər dəyişə bilər, lakin o, 1/2-dən az ola bilməz. Əgər bu belə olmasaydı, onda məhkəmənin qərarı püşkatma qədər az əhəmiyyət kəsb edərdi; lakin bu qərar dəyərlidir, belə ki, hakimin qərarı qabaqcadan yalnış fikrə gəlməkdən həqiqətə daha çox yaxındır. Müttəhim üçün əlverişli səslərin (lehinə) əlverişli olmayan səslərə nisbəti vasitəsi ilə mən hakimin fikrinin doğru olması ehtimalını təyin edirəm.

Məlum olan səs çoxluğu ilə mühakimə edən məhkəmənin qərarı doğru verməsi ehtimalının ümumi ifadəsinə malik olmaq üçün bu verilənlər kifayətdir. Səkkiz hakimdən ibarət məhkəmədə müttəhimin mühakimə olunması üçün beş səs kifayət edərdi, qərarın düzgün olmasında mümkün ola bilən səhvin ehtimalı 1/4-dən artıq olardı. Əgər məhkəmənin tərkibi altı üzvdən ibarət olardısa, bunlar isə yalnız dörd səs çoxluğu ilə mühakimə edə bilərdilərsə, mümkün ola bilən səhvin ehtimalı 1/4-dən az olardı: deməli, müttəhim üçün məhkəmə üzvlərinin sayının azaldılması əlverişli olardı. Hər iki halda tələb olunan artıq səs eyni olub, ikiyə bərabərdir. Beləliklə, sabit qalan artıq səs hallarında səhvetmə ehtimalı hakimlərin sayı artdıqca artır: tələb olunan artıq səs, əgər eyni olarsa, bu səs çoxluğunun neçə olmasından asılı olmur. Əgər arifmetik nisbətə bir qayda kimi baxılarsa, onda müttəhim məhkəmə tərkibində üzvlərin sayı çoxaldıqca, getdikcə daha az əlverişli vəziyyətdə olacaqdır. Belə fikirləşmək olardı ki, hakimlərin sayı ixtiyari olduqda, on iki səsdən çoxunun tələb olunduğu məhkəmədə azlığın səsləri çoxluğun bu sayda səslərini neytrallaşdıra bilərdi, İngiltərədə müttəhimin cəzalandırılması üçün zəruri olan qalan on iki səs on iki nəfərdən ibarət məhkəmə iclasçılarından ibarət məhkəmə üzvlərinin həmrəy olduğunu göstərmiş olardı; lakin bu böyük səhv olardı: sağlam düşüncə bizə onu göstərir ki, iki yüz on iki hakimdən ibarət məhkəmənin qərarına görə onlardan yüz on iki nəfəri müttəhimi günahkar bilərsə, yüz nəfəri ona haqq qazandırarsa, bu məhkəmənin qərarı ilə on iki hakimdən ibarət, cəzalandırmaq qərarında həmrəy olan məhkəmə qərarı arasında fərq vardır. Birinci halda müttəhim üçün əlverişli olan yüz səs, bizə belə düşünməyə haqq verir ki, dəlillər hələ o dərəcədə deyildir ki, qərar üçün əminlik doğursun; ikinci halda hakimlərin həmrəyliyi onların bu dərəcəyə çatdıqlarına bizə inanmağa əsas verə bilir. Lakin bu iki halda səhv ehtimalının son fərqini qiymətləndirmək üçün yalnız sağlam düşüncə heç də kifayət etmir; onda hesablama aparmaq olar və nəticədə, birinci halda səhv ehtimalı üçün təqribən beşdə bir, ikinci halda bu ehtimal üçün yalnız 1/8192 qiyməti alınacaqdır ki, ikinci haldakı ehtimal birincinin mində birinə belə bərabər deyildir. Bu belə bir prinsipi təsdiq edir: hakimlərin sayı artırıldıqda müttəhim üçün arifmetik nisbət əlverişli deyildir. Əksinə, bir qayda kimi həndəsi nisbət götürəriksə, hakimlərin sayı artdıqca, qərarın səhv olması ehtimalı azalır. Məs., yalnız səslərin üçdə ikisinin əksəriyyəti ilə cəza verildiyi məhkəmələrdə mümkün ola bilən səhvin ehtimalı hakimlərin sayı altı olduqda təqribən dörddə birə bərabərdir; əgər hakimlərin sayı on ikiyə çatarsa, bu ehtimal 1/7-dən az olur. Beləliklə, əgər biz səhv ehtimalının heç bir halda müəyyən kəsrdən nə yuxarı, nə aşağı olmasını istəmiriksə, nə arifmetik, nə həndəsi nisbətlərdən istifadə etməməliyik.

Onda hansı kəsri götürməli? Məhz bu halda özbaşınalıq başlanır və məhkəmə müəssisələri bu mənada çox müxtəlifliklə fərqlənirlər. Müttəhimin cəzalandırılması üçün səkkiz səsdən beşinin yetərli olduğu xüsusi məhkəmələrdə (tribunaux spéciaux), hökmün yumşaq olmasına görə qorxu ola bilərsə, səhv ehtimalı 65/256-ya bərabərdir və ya 1/4-dən çoxdur. Bu kəsrin qiyməti dəhşət doğurur: buna baxmayaraq, bir tərəfdən belə bir mülahizə adamı onunla razılaşdırır ki, hakim çox hallarda təqsirkara bəraət qazandırarkən, ona günahsız kimi baxmır: o, yalnız onun mühakimə olunması üçün onun əleyhinə kifayət qədər dəlil olmadığını elan edir. Xüsusilə də, adamı sakitləşdirən odur ki, burada mərhəmət hissi özünü göstərir, bu isə təbiətin insan qəlbinə verdiyi bir hissdir və insan əqli bu hissin təsiri ilə müttəhimin məhkəməsində onun təqsirkar olduğunu yalnız çətinliklə görə bilir. Bu hiss, cinayət qərarları vermək səriştəsi olmayan kəslərdə daha canlı olur, məhkəmə iclasçılarının səriştəsizliyi ilə əlaqədar nöqsanları əvəzləyir. Cəza verilməsi üçün əksəriyyəti səkkiz səs tələb olunan, on iki nəfərdən ibarət məhkəmə iclasçısı olan məhkəmədə səhv etmə şübhəsi olduqda, səhvin ehtimalı 1 093/8 192 -ə bərabərdir və ya səkkizdə birdən bir az çoxdur; əgər əksəriyyət doqquz səsdən ibarət olarsa, bu ehtimal təqribən 1/22-ə bərabərdir. Qərarda hamı həmrəy olduqda mümkün ola bilən səhv ehtimalı 1/8 192 -ə bərabərdir, yəni bu ehtimal bizim məhkəmə iclasçılarından ibarət məhkəmələrindəkindən min dəfədən də az olur. Burada fərz olunur ki, hamının həmrəyliyi ilə verilən qərar yalnız müttəhim üçün əlverişli və ya əlverişsiz dəlil-sübutlar nəticəsində verilir; lakin məhkəmə iclasçılarının apardığı məhkəmədə bu qərarın verilməsi hökm üçün zəruri şərt kimi qoyulduqda, tamamilə kənar motivlər bu qərarın verilməsinə səbəb ola bilər. Onda iclasçıların temperamentindən, xasiyyətindən və vərdişlərindən asılı olan bu qərarlar, bəzən, yalnız dəlil-sübutlara əsaslanan iclasçılar əksəriyyətinin qəbul etdiyi qərarlara zidd olur; mənçə, bu üsulla mühakimənin böyük çatışmamazlığı bununla əlaqədardır.

Bizim məhkəmə iclasçılarımızdan ibarət məhkəmələrdə qərarların ehtimalı olduqca zəifdir, mənim fikrimcə, günahsızlığı kifayət qədər qorumaq üçün, heç olmasa on iki səsin doqquzu səs çoxluğu kimi tələb olunmalıdır.

Ölüm cədvəlləri və ömrün, nigahların və hər hansı assosiasiyaların orta yaşama müddətləri üçün cədvəllər

Ölüm cədvəllərini tərtib etmək qaydası olduqca sadədir. Vətəndaş aktlarından doğumu və ölümü göstərilən adamların çox saydası götürülür. Bunlar arasında ömrünün birinci ilində, ikinci ilində və s. ölənlərin sayı təyin olunur. Hər ilin əvvəlində sağ qalmış şəxslərin sayı əvvəlkinə əsasən təyin olunur və bu ədəd cədvəldə il yazılmış ədədlə yanaşı yazılır. Beləliklə, sıfırla yanaşı doğum sayını göstərən ədəd, 1-ci il ilə yanaşı bir yaşı tamam olmuş uşaqların sayı yazılır; 2-ci il ilə yanaşı iki yaşı tamam olan uşaqların sayı yazılır və s. Uşaqların həyatının ilk iki ili ərzində ölüm halları olduqca çox olduğundan, bu ilk yaşlarda hər yarımilliyin sonunda sağ qalan uşaqların sayı böyük dəqiqlik üçün göstərilməlidir.

Ölüm cədvəlində yazılan bütün bu şəxslərin yaşadıqları ömürlərin cəmini, bu şəxslərin sayına böldükdə, bu cədvələ uyğun olaraq, orta ömür müddəti alınar. Buna görə də, 0 və 1-ci illərlə yanaşı yazılmış şəxslərin saylarının fərqinə bərabər olan ədədi – ilk bir il ərzində ölənlərin sayını yarım ilə vurmaq lazımdır: çünki, onların ölüm halları bütün il üçün paylanmalı idi, onda onların orta ömür müddəti yalnız yarım ildir. İkinci il müddətində ölənlərin sayı il yarıma vurulmalı, üçüncü il ərzində ölənlərin sayı iki il yarıma vurulmalıdır və s. Bu hasillərin cəmini doğum sayını göstərən ədədə böldükdə, orta ömür

müddəti alınacaqdır. Onda belə nəticə alınır ki, cədvəldə hər ilin qarşısında yazılmış ədədlərin cəmini taparaq, onu doğum sayına bölərək və alınmış nisbətdən onun yarısını çıxdıqda, bu orta ömür müddəti alınır; bu zaman bir il vahid kimi götürülür. Hər hansı yaşdan başlayaraq, qalan orta ömür müddəti də bu qayda ilə təyin olunur, bu isə bu yaş həddinə çatmış şəxslərin sayları üzərində, yuxarıda doğum saylarını göstərən ədədlər üzərində aparılan həmin əməliyyatların köməyilə təyin olunur. Orta ömür müddəti anadan olduğu andan deyil, insan ilk uşaqlıq çağlarındakı təhlükələri adladıqdan sonra çox olur və bu halda orta ömür müddəti təxminən qırx üç yaşa bərabərdir. Verilən yaş həddindən sonra hər hansı yaşa çatma ehtimalı – bu cədvəldə bu yaş həddindəki şəxslərin saylarını göstərən iki ədədin nisbətinə bərabərdir.

Bu nəticələrin dəqiqliyi üçün tələb olunur ki, cədvəllər tərtib olunarkən doğum saylarını göstərən ədədin olduqca böyük olması nəzərdə tutulsun. Analiz bu halda bu cədvəllərdə göstərilmiş gerçək ədədlərdən yayınmaların çox sıx sərhədlər arasında olduğu ehtimalının qiymətləndirilməsi üçün çox sadə düsturlara gətirir. Bu düsturlardan aydın olur ki, doğum sayını göstərən ədəd daha böyük olduqca bu sərhədlər arasında məsafə azalır, ehtimal isə artır; odur ki, əgər hesaba alınan doğum saylarını göstərən ədəd sonsuz olsaydı, onda cədvəllər əsl ölüm qanununu dəqiq ifadə etmiş olardı.

Deməli, ölüm cədvəli insan ömrünün ehtimal cədvəlidir. Hər bir ilin qarşısında yazılan şəxslər sayının doğum sayını göstərən ədədə nisbəti yeni doğulmuş uşağın bu ilə qədər yaşadığı ehtimalını ifadə edir. Gözləmənin ədədi qiyməti hər bir gözlənilən faydanın bu faydanın alınması ehtimalına hasillərinin cəmlərinin alınması vasitəsilə alındığı kimi, orta ömür müddətini də hər bir ildəki ilin əvvəlindən sonuna qədər yaşamaq ehtimalları cəmlərinin yarısına hasillərin cəmlənilməsi yolu ilə almaq olar, bu isə əvvəl tapdığımız nəticəyə gətirir. Lakin orta ömür müddətinə belə yanaşmanın belə bir üstünlüyü vardır ki, əhalinin sayı sabit qaldıqda, yəni doğum halları sayı ölüm halları sayına bərabər olduqda, orta ömür müddəti, məhz əhalinin sayının illik doğum sayına nisbətidir; belə ki, əhali sayı sabit qalarsa, cədvəlin iki ardıcıl ili arasındakı yaşa malik şəxslərin sayı illik doğum sayının bu yaş həddinə qədər yaşama ehtimallarının cəminin yarısına hasilinə bərabərdir. Bütün bu hasillərin cəmi bütün bu əhalinin sayı olacaqdır. Lakin asanlıqla inanmaq olur ki, illik doğum sayına bölümüş bu cəm, orta yaşama müddəti ilə üst-üstə düşür; bu, bizim tərifimizlə də belədir.

Ölüm cədvəlinin köməyilə, sabit fərz olunan əhali sayı üçün də uyğun cədvəli asanlıqla tərtib etmək olur. Buna görə sıfır və bir yaş, bir və iki yaş, iki və üç yaş və s.-yə uyğun ölüm cədvəlindəki ədədlərin ədədi ortası götürülür. Bütün ədədi ortaların cəmi, məhz, bütün əhalinin sayıdır; bu ədəd sıfır yaşı ilə yanaşı yazılır. Bu cəmdən birinci ədədi orta çıxılır, alınan qalıq bir yaş və ondan böyük şəxslərin sayıdır; alınan bu ədəd 1 yaş ilə yanaşı yazılır. Bu birinci qalıqdan ikinci ədədi orta çıxılır; bu ikinci qalıq iki yaş və ondan böyük şəxslərin sayıdır; o, 2 yaş ilə yanaşı yazılır və s.

Ölüm hallarına təsir edən qeyri-sabit o qədər səbəblər olur ki, ölüm cədvəlləri yerinə və zamanına görə tərtib olunmalıdır. Bu cəhətdən həyatın müxtəlif vəziyyətləri, hər bir vəziyyətlə ayrılmaz olan təhlükələr və çətinliklərə görə olduqca fərqli olurlar, bu yaşama müddəti üçün hesablamalarda hökmən nəzərə alınmalıdır; lakin bu fərqlər kifayət qədər araşdırılmamışdır; nə vaxtsa bu olunacaqdır: o vaxt ki, hər bir ixtisasın insan həyatından hansı qurbanı verməsinin tələb olunması məlum olsun, onda təhlükələrin azaldılması üçün bu bilikdən istifadə olunacaqdır.

Çox və ya az dərəcədə sağlam torpaq, ərazinin hündürlüyü, onun temperaturu, sakinlərin xasiyyətləri və dövlətin tədbirləri ölüm hallarına böyük təsir göstərir; müşahidə olunan fərqlərin səbəbinin axtarılmasından əvvəl bu səbəbin hansı ehtimalla ola biləcəyini təyin etmək lazımdır. Məs., müşahidələrə görə, Fransada iyirmi səkkiz tam üçdə birə qədər artmış illik doğum sayı əhalinin sayına nisbətdə, əvvəlki Milan hersoqluğunda heç iyirmi beşə belə çatmır. Doğum saylarının böyük qiymətləri əsasında təyin olunmuş hər iki nisbət Milanda ölüm hallarının xüsusi bir səbəbinin varlığına şübhə doğurmur və bu səbəbi bu ölkənin dövləti axtarmalı və aradan qaldırmalıdır.

Bəzi təhlükəli və çox yayılmış xəstəliklərin qarşısını nisbətən almaq və ya onları aradan qaldırmaq mümkün olardısa, əhali sayının doğum sayına nisbəti daha artmış olardı. Çiçək xəstəliyi ilə əlaqədar bu alındı və bu zaman bu xəstəliyin peyvənd olunması sayəsində, daha sonra bunu daha uğurlu üsul – vaksinanın peyvəndi üsulu ilə almaq mümkün oldu, bu üsul Cennerin əvəzolunmaz ixtirası olub, onu insanların sağlamlığına töhfələrdən biri etdi.

Çiçək xəstəliyinin xüsusiyyətlərindən biri odur ki, eyni bir adam bu xəstəliyə ikinci dəfə tutulmur və bu hallar nadir olduğundan, onları nəzərə almamaq olar. Vaksinanın kəşfinə qədər bir çoxları ondan qorunmağa çalışsalar da, bu xəstəlik ölümlə nəticələnir və ona tutulmuş xəstələrdən təqribən hər yeddi nəfərdən biri məhv olur. Bəzən bu xəstəlik yüngül formada da keçir və təcrübə göstərmişdir ki, sağlam adamları peyvənd etmək yolu ilə (ilin əlverişli bir mövsümündə, yaxşı rejimlə hazırlanmış şəxslərə) bu xəstəliyin yüngül formada keçməsini təmin etmək olar. Onda bu xəstəlikdən ölənlərin sayının peyvənd olunanların sayına nisbəti hətta üç yüzdə birə belə çatmır. Peyvəndin üstün olan bu xüsusiyyəti və onun xarici görkəmi dəyişməməsi, onun natural çiçəyin fəsadları olan xoşagəlməz nəticələrinin olmaması, bir çoxlarını onu qəbul etmək məcburiyyətində qoydu. Onun tətbiqi olduqca tövsiyyə olunurdu; narahatlıq yaradan hər bir şeylə olduğu kimi, bu tövsiyyə də qızğın tənqidlərə məruz qaldı. Bu mübahisədə Daniil Bernulli peyvəndin orta yaşama müddətinə təsirinin ehtimalını hesablamağı qarşısına məqsəd kimi qoymuşdu. Müxtəlif yaş hədlərində çiçəkdən ölənlərin sayı haqqında məlumatı olmadığından, o fərz etmişdi ki, bu xəstəliyə tutulmaq təhlükəsi və ondan ölmək bütün yaş hədləri üçün eynidir. Bu fərziyyələrin köməyi və incə analiz yolu ilə o, adi ölüm cədvəlini elə cədvəllər şəklinə sala bildi ki, əgər çiçək xəstəliyi mövcud olmasaydı və ya olduqca az saylı xəstələr üçün ölümlə nəticələnən olsaydı, bu cədvəllər yarana bilinərdi; o, belə nəticəyə gəldi ki, çiçəyə qarşı peyvənd aparılması orta ömür müddətini heç olmasa üç ilə qədər uzatmış olardı və ona belə gəlirdi ki, belə tədbirin görülməsinin faydalı olduğuna heç bir şübhə yeri qalmır. Dalamber Bernullinin bu analizinə qarşı çıxırdı, birincisi bu iki hipotezin doğru olmadığına görə, ikincisi onun kifayət qədər yetərli olmamasına görə, belə ki, bu analizdə gələcəkdə baş verə biləcək təhlükə ilə müqayisə nəzərə alınmırdı, peyvənd nəticəsində baş verə biləcək ölüm təhlükəsi çox böyük olmasa da, onun natural çiçəkdən baş verə biləcək daha böyük ölüm təhlikəsi ilə müqayisəsi nəzərə alınmırdı. Bu mülahizə adamların sayı çox olduqda nəzərdən qaçdığına görə, dövlətlər üçün əhəmiyyətsiz olur və onlar üçün peyvəndetmənin faydalı olduğu fikri qüvvədə qalır; lakin bu mülahizə ailə başçısı üçün mühümdür, o, öz övladlarını peyvənd etdirərkən qorxmalıdır ki, o, tez bir zamanda onun üçün həyatda ən qiymətli övladının ölümünü görə bilər və bu ölümün səbəbkarı olmuş olar. Bir çox valideynlər bu qorxu hissinə görə peyvəndetmədən çəkinirdilər, lakin xoşbəxtlikdən vaksinanın kəşfi bu qorxunu aradan qaldırdı. Bu təbiətin bizə bəxş etdiyi bir çox sirlərdən biridir; vaksina da arı zəhəri kimi qoruyucu bir vasitədir; bundan başqa, onun heç bir təhlükəsi yoxdur, heç bir xəstəlik törətmir və çox az qayğı tələb edir; buna görə də, o, tezliklə geniş surətdə yayıldı və onun, ümumiyyətlə, qəbul olunması üçün yalnız xalqın onu təbii surətdə qəbul etməsinə nail olunmalıdır ki, bu da daima diqqət mərkəzində olmalıdır, hətta o hallarda da ki, o, xalqın ən ümdə maraqlarına belə aid olsun.

Hər hansı bir xəstəliyin yox edilməsi nəticəsində alınan mənfəətin hesablanmasının ən sadə üsulu ondan ibarətdir ki, müşahidələr yolu ilə məlum yaş həddi bu xəstəlikdən ölən adamların sayını təyin edib, alınan bu ədədi bu yaşda ölən bütün adamların sayından çıxmaq lazımdır. Bu fərqin verilən yaşdakı bütün adamların sayına nisbəti, əgər bu xəstəlik olmasaydı, bir il ərzində bu yaşda ölən adamların ehtimalı olardı. Deməli, anadan olan gündən müəyyən yaş həddinə qədər belə hesablanmış ehtimalların cəmini hesablayıb, bu cəmi vahiddən çıxdıqda, alınmış fərq, bu xəstəlik yox edildikdə, bu yaş həddinə qədər yaşamağın ehtimalı olacaqdır. Bu hipotezə görə hesablanmış belə ehtimallar sırası ölüm cədvəli olacaqdır və bu cədvələ görə, əvvəlkinə əsasən, orta yaşama müddətini təyin etmək olur. Dyuvilar bu üsulla təyin etdi ki, vaksinanın peyvənd olunması nəticəsində orta ömür müddəti heç olmasa üç il artıq olur. Bu dərəcədə mühüm artım əhalinin olduqca böyük artımına səbəb olardı, əgər, digər tərəfdən, bu artım yaşamaq imkanlarının uyğun azalması ilə məhdudlaşmasaydı.

Yaşamaq imkanlarının çatışmamazlığı əsas etibarilə əhalinin artım hərəkatını gecikdirir. Heyvanların və bitkilərin bütün növlərində təbiət fərdlərin sayını o vaxta qədər artırmağa çalışır ki, bu say yaşamaq imkanları səviyyəsində olsun; insan nəslində mənəvi səbəblər əhaliyə çox təsir göstərir. Əgər torpaq onun asan becərilməsi sayəsində yeni nəsilləri çoxlu qida məhsulları ilə təmin edərsə, çoxuşaqlı ailələri təchiz etmək inamı nigahları dəstəkləyir və onların daha erkən və çoxuşaqlı olmasını alqışlayır. Belə yanaşmada əhalinin və doğumların sayının hər ikisi həndəsi silsilə kimi artmalıdır. Lakin torpağın şumlanması daha çətin və nadir hallarda aparıldıqda, əhalinin artımı azalır: bu artım yaşamaq imkanlarının dəyişkən vəziyyətinə onun ətrafında dəyişərək, aramsız surətdə yaxınlaşır; bu rəqqasın rəqsinə bənzəyir, onu yavaş təsirlə hərəkətə gətirdikdən sonra o, asıldığı nöqtə ətrafında öz ağırlığının təsiri ilə rəqs edir. Əhalinin artımının *maximumunu* təyin etmək çətindir. Bəzi müşahidələrə görə insan nəsli, belə görünür ki, əlverişli şəraitdə hər on beş ildə iki dəfə arta bilərdi. Fərz olunur ki, Şimali Amerikada belə iki dəfə artma dövrü iyirmi iki ilə bərabərdir. Belə vəziyyətdə əhali, doğumlar, nigahlar, ölüm – hamısı həndəsi silsilə kimi artır, bu halda ard-ardınca gələn hədlərin sabit nisbəti iki dövr ərzində illik doğumlar üzərində müşahidələrdən alınır.

Ölüm cədvəli insan ömrünün ehtimalını göstərdiyindən bu cədvəlin köməyilə nigahların nə qədər davam etməsini təyin etmək olur. Sadəlik üçün fərz edək ki, ölüm hər iki cins üçün eynidir; əgər biz elə kəsrlər siyahısı tərtib etsək ki, onların ümumi məxrəci ailə qurmuş şəxslərin yaşlarına uyğun cədvəlin iki ədədinin hasili, surəti isə bu yaşlara uyğun bir il, iki, üç və s. il artırılmış ədədlərin ardıcıl hasilləri olsun, onda bu nigahların bir il, iki il, üç il və s. davam edəcəyi ehtimalını alarıq. Əgər bir il vahid kimi götürülərsə, bu kəsrlərin cəmlərini bu cəmlərin yarısı qədər artırdıqda, alınmış ədəd nigahın orta davam müddəti olacaqdır. Bu qaydanı üç və ya daha çox nəfərdən ibarət birliyə tətbiq etdikdə, bu birliyin orta davam müddətini də təyin etmək olar.

Müəssisələrdə baş verən hadisələrin ehtimalları əsasında verilən mənfəətlər haqqında

Biz burada gözləmə haqqında dediklərimizi xatırlayaq. Biz gördük ki, bir neçə – bəzilərinin mənfəət, digərlərinin ziyan gətirdikləri bir neçə sadə hadisə səbəbindən mənfəət alınması üçün, hər bir əlverişli hadisənin ehtimalının onun gətirdiyi gəlirə hasillərini toplayıb, bu cəmdən hər bir əlverişsiz hadisənin ehtimalının bu hadisə ilə bağlı ziyana hasillərinin cəmini çıxmaq lazımdır. Bu cəmlərin fərqləri ilə ifadə olunan gəlirin necə olmasından asılı olmayaraq, bu sadə hadisələrdən ibarət bir mürəkkəb hadisə hələ əsl ziyan qorxusunu aradan qaldırmır. Aydındır ki, bu mürəkkəb hadisə təkrarlandıqda bu qorxu hissi də azalmalıdır. Ehtimalların analizindən aşağıdakı ümumi teorem alınır.

Mənfəət gətirən sadə və ya mürəkkəb hadisənin təkrar olunmasından əsl mənfəət getdikcə daha çox ehtimallı olur və aramsız olaraq artır; təkrarlanmalar sayının sonsuz olması fərz olunduqda, bu mənfəət gerçəkləşir; bu mənfəəti təkrarlanmalar sayına böldükdə, nisbət və ya hər bir hadisənin orta mənfəətini alırıq, bu isə riyazi gözləmə və ya bu hadisəyə müvafiq mənfəət olacaqdır. Əgər hadisə əlverişsiz olarsa, ziyan halı üçün də belə olur, bu ziyan da get-gedə yəqinliyə çevrilir.

Mənfəət və ziyanlar haqqında bu teorem sadə və ya mürəkkəb hadisələrin qeyri-müəyyən surətdə təkrarlanmasında meydana çıxan nisbətlər haqqında bizim əvvəldə verdiyimiz teoremlərə analojidir; və bu teoremlərdə olduğu kimi bu teorem də isbat edir ki, düzgünlük sonda hətta *təsadüf* adlandırdığımıza ən çox tabe olunan şeylərdə də özünü göstərir.

Analiz gerçək mənfəətin müəyyən sərhədlər arasında olması ehtimalı üçün daha bir olduqca sadə ifadə verir, bu ifadə ehtimallar haqqında ümumi qanuna daxildir, bu qanun isə hadisələr sayının qeyri-müəyyən surətdə artırılmasından alınan ehtimallar haqqında biz danışarkən, bizim tərəfimizdən yuxarıda verilmişdir.

Ehtimallara əsaslanan müəssisələrin davamlılığı, bundan əvvəlki teoremin doğruluğundan asılı olur. Bu ehtimalları bu müəssisələrə tətbiq etmək üçün onlar müəssisələrin sayını artırmaqla əlverişli hadisələri çoxaltmalıdırlar.

İnsan həyatına aid ehtimallar əsasında müxtəlif təsisatlar qurulmuşdur, məs., ömürlük rentalar və tontinlər belə təsisatlardandır. Bu təsisatların mənfəət və məsrəflərinin ən ümumi və ən sadə hesablanılma metodu – onları kapitalların müasir dəyərinə müvafiqləşdirməkdən ibarətdir. Vahidin illik artımı – *faiz məzənnəsi* adlandırılan kəmiyyətdir. Hər ilin sonuna hər bir kapital (vahid plyus faiz məzənnəsi) qədər vuruğa malik olur; bu kapital, deməli, həndəsi silsilə şəklində artır, bu nisbətdə məxrəc həmin bu vuruğa bərabər olur. Əgər, məs., faiz məzənnəsi 1/20-ə və ya yüzdə beşə bərabər olarsa, onda kapital təxminən on dörd ildən sonra iki dəfə, 29 ildən sonra dörd dəfə artır və üç yüz ildən sonra o, iki million dəfə artır.

Belə heyrətamiz artım onu dövlət borcunun ödənilməsi üçün istifadə etmək fikrini yaratdı. Əgər ilk ödəmə fondu faizlərilə birlikdə daima yaradılaraq, ictimai müəssisələrə yerləşdirilərsə, xüsusilə də, endirilmə anlarında və əgər dövlətin ehtiyacları üçün borc tələb olunduğu hallarda, onun bir hissəsi isə ödəmə fondunun artırılması üçün verilərsə, onda aydındır ki, bu əməliyyat bu fondun artması və kreditin və ictimai müəssisələrə dəstək olmaq üçün ikiqat mənfəət əldə edəcək və ödəmə xəzinəsi zaman ötdükcə dövlət borcunun böyük bir hissəsini ödəyə biləcəkdir. Uğurlu təcrübələr bu mənfəəti tamamilə təsdiq etdi. Lakin belə müəssisələrin uğurları üçün olduqca zəruri olan öhdəçiliklərdə dürüstlüyə və möhkəmliyə, yalnız, qanuni hakimiyyəti bir neçə, birbirindən asılı olmayan hakimiyyətlərə bölünmüş dövlət tərəfindən tamamilə zəmanət verilə bilinər. Bu hakimiyyətlərin qaçılmaz yarışmalarının doğurduğu etibar, dövlətin əzəmətini ikiqat artırır və dövlət başçısı qanuni hakimiyyətdən, özhakimiyyətliliklə müqayisədə itirdiyindən, daha çox qazanmış olur.

Əvvəlkilərdən belə nəticə alınır ki, yalnız məlum qədər illər keçdikdən sonra, ödənilən miqdara bərabər kapitalın müasir dəyəri – bu miqdarın bu müddət ərzində ödənilməsi ehtimalına hasilinin (1 + faiz məzənnəsi)-nin bu illərin sayına bərabər qüvvət üstünə nisbətinə bərabərdir.

Bu prinsipi bir və ya bir neçə şəxs üçün ömürlük rentalara, əmanət xəzinələri və hər növ sığortalara da tətbiq etmək olar. Fərz edək ki, verilən ölüm cədvəli üzrə biz ömürlük renta cədvəli tərtib etmək istəyirik. Beş il keçdikdən sonra ödəniləcək ömürlük renta, məs., həm də müasir dəyərlərlə hesablanılacaq renta, bu prinsipə görə aşağıdakı iki kəmiyyətin hasilinə, məhz: rentanın (1 + faiz məzənnəsi)-nin beşinci dərəcə qüvvət üstünə nisbəti ilə bu faiz məzənnəsinin ödənilməsi ehtimalına hasilinə bərabərdir. Faiz məzənnəsinin ödənilmə ehtimalı – renta təyin ediləcək şəxsin beş il artıq götürülmüş yaşı qarşısında cədvəldəki şəxslər sayının tərs nisbətinə bərabərdir. Məxrəcləri – renta təyin olunacaq şəxs yaşındakı və hələ həyatda olan şəxslərin ölüm cədvəlində göstərilən şəxslər sayının ardıcıl götürülən qüvvət üstlü (1 + faiz məzənnəsi)-nə hasillərinə, surətləri – rentanın həmin yaşdakı və ardıcıl olaraq bir yaş, iki yaş və s., artıq götürülmüş hələ sağ olan şəxslər sayına hasillərinə bərabər kəsrlər sırası tərtib edərək, bu kəsrlərin cəmi ilə ifadə olunan, bu yaşda ömürlük renta üçün tələb olunan kapitalı alırıq.

Fərz edək ki, hər hansı bir şəxs, ömürlük renta vasitəsilə öz varislərini onun öldüyü ilin sonunda ödəniləcək kapitalla təmin olunmasını arzu edir. Bu rentanın miqdarını təyin etmək üçün, belə fərz etmək olar ki, bu şəxs hər hansı bir xəzinədən (1 + faiz məzənnəsi)-nə bölünmüş kapitalı ömürlük borc götürür və onu həmin xəzinəyə daimi faizlərlə yerləşdirir. Aydındır ki, bu kapital bu xəzinənin bu şəxsin varislərinə onun öldüyü ilin sonunda ödəyəcəyi borcu alacaqdır; lakin xəzinə hər il yalnız ömürlük faizlərin daimi faizlərdən qalan artıq hissələri ödəyirdi. Ömürlük renta cədvəllərində bu şəxsin hər il nə qədər ödəməsi göstərilir və bu da onun ölümündən sonra bu kapitalın xəzinədə olmasını təmin edir.

Dəniz sığortaları, yanğınlardan və fırtınalardan sığortalar və ümumiyyətlə, bu növ sığortalar həmin prinsiplərə əsasən hesablanır. Tacirin dənizdə gəmiləri vardır və o, bunların dəyərini və bu gəmilərdəki yüklərin dəyərini onların məruz qala biləcəkləri təhlükələrdən qorunmaq üçün sığortalamaq istəyir; bu məqsədlə o, hər hansı cəmiyyətə – onun gəmiləri və yükünün dəyərinə görə qiymətə müvafiq cavabdeh cəmiyyətə məlum məbləği ödəyir. Gəmilər və yükün bu dəyərinin sığorta mükafatı kimi ödəniləcək ödəniş miqdarına nisbəti gəmilərin məruz qaldıqları təhlükələrdən asılıdır və bu ödəniş miqdarı portdan yola düşən həmin

marşrutla hərəkət edən gəmilərin taleyi ilə bağlı çoxsaylı müşahidələr vasitəsilə və yalnız bu yolla qiymətləndirilə bilinər.

Əgər sığortalanmış şəxslər sığorta cəmiyyətinə yalnız ehtimalların hesablanmasından alınan məbləği ödəsəydirlər, onda bu cəmiyyət onun müəssisəsi ilə bağlı xərclərin öhdəsindən gələ bilməzdi, buna görə də, onların daha yüksək sığorta mükafatı vermələri zəruridir. Belə olan halda onların mənfəəti nədədir? Burada qeyri-müəyyənliklə bağlı mənəvi mənfəətsizliyə baxmaq zəruriliyi yaranır. Aydındır ki, ən ədalətli oyun mənfəətsiz olursa, biz əvvəldə gördüyümüz kimi, oyunçu oyuna qoyduğu etibarlı sayılan məbləği etibarsız uduşa dəyişdiyi üçün etibarsızlığı etibarlılığa dəyişdirilən sığorta mənfəətli olmalıdır. Bu isə, həqiqətən də, mənəvi gözləmənin tərifi üçün bizim yuxarıda verdiyimiz qaydadan bir nəticə kimi alınır, bundan əlavə görünür ki, mənəvi gözləmənin sığorta cəmiyyətinə verə biləcəyi qurban, mənəvi mənfəəti qorumağa davam etməklə nə qədər uzana bilər. Deməli, bu mənfəəti təmin edərək və özü də böyük gəlir əldə edərək, cəmiyyət bunu həyata keçirə bilər, bu şərtlə ki, cəmiyyətin yaşamasının möhkəmliyi üçün zəruri şərt – sığortalanmış şəxslərin sayı olduqca çox olsun. Bu halda cəmiyyətin mənfəəti yəqin olur, riyazi gözləmə isə mənəvi gözləmə ilə üst-üstə düşür; belə ki, analizdən aşağıdakı ümumi teorem alınır: əgər gözlənilən faydaların sayı olduqca çox olarsa, onda hər iki gözləmə daima bir-birinə yaxınlaşır və nəhayət, bu faydaların sayı sonsuz böyük olduqda onlar üst-üstə düşür.

Riyazi və mənəvi gözləmələrdən danışdıqda, biz fərz etmişdik ki, gözlənilən mənfəət riskinin ayrı-ayrı hissələrə paylaşdırılmasında mənəvi mənfəət vardır. Məs., hər hansı uzaq bir portdan müəyyən bir məbləği keçirmək üçün onu bir gəmiyə yerləşdirməkdənsə, bir neçə gəmi arasında paylaşdırmaq daha yaxşıdır. Buna isə qarşılıqlı sığortanın köməyilə nail olunur. Əgər iki müxtəlif gəmidə eyni bir portdan çıxmış, eyni bir yerə yollanmış eyni məbləğə malik iki şəxs, onların alacaqları bütün pulları bərabər bölməyə razı olarlarsa, onda aydındır ki, bu razılaşmaya görə bu şəxslərdən hər biri onların gözlədikləri məbləği hər iki gəmi üçün bərabər paylaşdırır. Lakin qeyd etmək lazımdır ki, bu növ sığorta hələ də hansı itkinin ola biləcəyi barədə suala cavab verməmişdir. Lakin bu məlumatsızlıq ən az iştirakçıların sayının artması ilə əlaqədar olaraq azalır: mənəvi qazanc get-gedə artaraq, nəhayət, özünün təbii sərhədi – riyazi mənfəətlə üst-üstə düşür. Bunun sayəsində qarşılıqlı sığorta şirkətləri çox sayda şəxsdən ibarət olduqda, bu şirkətlər sığortaçılar üçün mənəvi mənfəətdən aldıqları gəlir riyazi gözləmədən həmişə az olan sığorta şirkətlərindən daha əlverişli olur. Bütün bu nəticələr, biz əvvəldə gördüyümüz kimi, mənəvi mənfəəti ifadə edən qanundan asılı deyildirlər.

Azad bir xalqa, üzvləri öz əmlakları üçün qarşılıqlı öhdəçiliklər götürən, bu öhdəçiliklər üzrə mütənasib xərclər çəkən böyük bir qurumlar kimi baxmaq olar. Bir neçə xalqın konfederasiyası bu xalqlardan hər birinə, cəmiyyətdə yaşayan hər bir insanın ala bildiyi dəyərlər kimi dəyərlər verərdi. Onların nümayəndələrindən ibarət konqress hamı üçün eyni dərəcədə mühüm məsələləri müzakirə edə bilərdi, onda fransız alimlərinin təklif etdikləri çəki, ölçü və pul vahidləri sistemi şübhəsiz ki, bu konqress tərəfindən kommersiya münasibətlərində təklif olunmuş tədbirlərdən ən səmərəlisi kimi qəbul olunardı.

İnsan həyatına aid ehtimallara əsaslanan müəssisələrdən ən yaxşıları – öz ehtiyacları üçün vəsaitin çatmayacağı qorxusu olduğu müddət ərzində öz gəlirinin kiçik bir hissəsini istifadə edərək, özü və öz ailəsini təmin edə bilən müəssisələr hesab olunur. Oyun nə dərəcədə mənəviyyatsız olarsa, bu müəssisələr mənəviyyatı o dərəcədə yaxşılaşdırır, ən zəif təbii vərdişlərə əlverişli mühit yaradır. Buna görə də, dövlət bu müəssisələri dəstəkləməlidir və ictimai nailiyyətlərdəki yanlışlıqlara göz yumulmamalıdır, çünki onların təqdim etdikləri gözləmələr uzaq gələcəyə aid olduğundan, onların möhkəmliyi yalnız hansısa təhlükədən qorunduqları halda inkşaf edə bilər. Təmsiledici idarənin üstün cəhətlərindən biri ondan ibarətdir ki, o, bu zəmanəti verir.

İstiqrazlar haqqında bir neçə söz deyək. Aydındır ki, daimi istiqraz üçün hər il kapitalın faiz məzənnəsi hasilinə bərabər məbləğ ödənilməlidir. Lakin bu kapitalı müəyyən illər ərzində bərabər miqdar məbləğlə ödəmək olar, – bu ödəmələr a n n u i t e t l ə r adlanır və onların miqdarı belə alınır: hər bir annyuiteti hazırki vəziyyətə gətirmək üçün qüvvət üstü bu annuitetin ödənilməsi üçün keçən illərin sayına bərabər (vahid + faiz məzənnə)-sinə bölünməlidir. Birinci həddi (vahid + faiz məzənnə)-sinə bölünmüş bu annuitet, sonuncu həddi isə qüvvət üstü bu annuitetin ödənilməsi üçün keçən illərin sayı bərabər (1 + faiz məzənnə)-sinə bölünmüş bu annuitet olan həndəsi silsiləni quraraq, bu silsilə cəminin borc alınmış kapitala bərabər olduğunu almış oluruq. Əgər ömürlük istiqraz arzu olunarsa, onda görmək çətin deyildir ki, sadə uyğunluq onu göstərəcəkdir ki, kapital borc götürülən şəxsə nə qədər renta ödənilməlidir, bu halda nəzərə alınmalıdır ki, ömürlük renta cədvəllərində ixtiyari yaş həddinə uyğun ömürlük rentanı təyin etmək üçün zəruri kapital göstərilmişdir. Bu prinsiplərin köməyilə istiqrazların bütün mümkün növlərini hesablamaq olur.

Ehtimalların qiymətləndirilməsində illüziyalar haqqında

Əqlin görmə hissi kimi öz illüziyaları vardır; lamisə görmə hissində düzəliş etdiyi kimi, mülahizə və hesablama əqldə düzəlişlər edir. Gündəlik təcrübəyə əsaslanan və ya qorxu və ümidlə artan ehtimal bizi böyük, lakin hesablamanın sadə nəticəsi olan ehtimaldan daha çox təəccübləndirir. Məs., biz, fransız lotereyasında kvin çıxması ehtimalından daha az ehtimallı təhlükələrə öz həyatımızı məruz qoyaraq, cüzi mənfəət almaqdan heç də qorxmuruq; bunula belə, bu kvin çıxdığı halda həyatını itirmək əminliyi olduqda, heç bir kəs bu mənfəəti əldə etmək istəməzdi.

Bizim ehtiraslarımız, bizim xurafat və hökmran baxışlarımız bunlar üçün əlverişli ehtimalları artırıb, əlverişli olmayan ehtimalları azaldaraq, təhlükəli illüziyaların çoxsaylı mənbələrini təşkil edir.

Əsl pislik və onu doğuran səbəb bizə, əks olan səbəbin doğurduğu pislik barədə xatirələrdən daha güclü təsir edir; bu isə bizə onun və ya o birisinin çatışmamazlıqlarını və bizi bunlardan qoruya biləcək vasitələrin ehtimalını ədalətlə qiymətləndirməkdə mane olur. Bu da növbə ilə despotizmə və anarxiyaya sürükləyir, düzgün vəziyyətdən çıxan xalqlar həmişə yalnız uzun və qəddar həyəcanlardan sonra yenə həmin vəziyyətə qayıdırlar.

İştirak etdiyimiz hadisələrdə hiss etdiyimiz canlı təəssürat, başqalarının müşahidə etdikləri əks hadisələri görməkdən bizi yayındıraraq, bizim kifayət dərəcədə qoruna bilinmədiyimiz səhvetmələrimizin əsas mənbələrindən biridir.

Oyunda əksər hallarda belə olur ki, illüziyalar ümid verir və bu ümidi əlverişsiz şanslar əleyhinə dəstəkləyir. Lotereyada iştirak edən insanların əksəriyyəti onların xeyrinə və əleyhinə nə qədər şans olduğunu bilmir. Onlar yalnız oyuna qoyduqları kiçik məbləğin böyük uduş gətirəcəyini, onların gözündə bu məbləği ala bilmə ehtimallarının çox olacağı kimi uşaq təxəyyülünün fərziyyələrini nəzərdə tuturlar: xüsusilə də, kasıb, daha yaxşı qismətə çatacağı həvəsi ilə, bu oyunun ona böyük mənfəət gətirəcəyi ümidilə ən əlverişsiz variantlardan belə yapışaraq, özü üçün zəruri olan hər şeyi təhlükəyə məruz qoyur. Şübhəsiz ki, əgər oyuna qoyulmuş olduqca böyük məbləğin uduzulduğunu bilsəydilər, onda bu hamını qorxudardı; lakin əksinə olaraq, uduşlar barədə daha çox məlumat verilərək, çox zəruri bu oyuna həvəsi artırmaq üçün səylər göstərilir.

Fransız lotereyasında hər hansı bir nömrə uzun müddət çıxmırsa, kütlə bu nömrəyə qoyulan məbləği artırır. Kütlə belə fikirləşir ki, uzun müddət çıxmayan nömrə digərlərindən daha çox şansla ən yaxın tirajda çıxmalıdır. Belə ümumi səhvə, məncə, illüziyalar nəticəsində yol verilir, bu səhv bizi hadisələrin başlanğıcına qaytarır. Məs., «*gerb və şəbəkə*» oyununda *gerb* üzünün on dəfə ardıcıl düşməsi çox az doğruyaoxşardır. Bu doğruyaoxşarolmamazlıq onuncu dəfə də *gerb* üzünün düşdüyü halda belə, bizi təəccübləndirsə də, bizi onuncu dəfə *şəbəkə* üzünün düşəcəyi fikrindən çəkindirmir. Lakin müşahidə göstərirsə ki, *şəbəkə* üzünün düşməsindən çox *gerb* üzünün düşməsinə böyük meyllilik vardır, onda bu, hadisələrdən ikincisinin daha çox ehtimalla baş verəcəyini göstərir: bu, biz gördüyümüz kimi, xaç üzünün növbəti dəfə düşməsi ehtimalını artırır. Belə illüziya çoxlarını belə nəticəyə götirir ki, lotereyada çox güman ki, udmaq mümkündür, buna görə də, nömrənin çıxmasına qədər həmin nömrəyə oyuna qoyulan bütün məbləğlər cəmindən artıq məbləğ qoyulmalıdır. Lakin, əgər belə alverlər onların dəstəklənməsi qeyri-mümkün olduğuna görə davam etdiyindən, bunlar,

hər halda alverçilərin itkilərinin riyazi gözləməsini azaltmazdı və onların itkilərinin mənəvi gözləməsini artırmış olardı, çünki hər bir tirajda alverçilər hər dəfə öz varidatının böyük hissəsini oyuna qoymuş olardılar.

Mən görmüşəm ki, oğlu olmasını həddən artıq arzu edən şəxslər, ata olacağı ayda oğlan uşaqlarının doğulduğunu kədərlə qarşılayırdılar. Onların təsəvvürünə görə doğulan oğlan uşaqlarının sayının qız uşaqlarının sayına nisbəti ixtiyari ayın sonunda eyni olmalıdır, onlar belə hesab edirdilər ki, doğulan oğlanlar yaxın zaman ərzində qızların doğulacağı ehtimalını daha da çoxaldır. Məs., içərisində məhdud sayda ağ və qara kürəciklər olan urndan ağ kürəciyin çıxarılması, bu verilən mənada, növbəti tirajda qara kürəciyin çıxarılması ehtimalını artırır. Lakin bu halı bu doğumlar halına oxşatmaq üçün fərz olunmalıdır ki, urndakı kürəciklər sayı qeyri-məhdud olsun, onda belə hal yaranmır. Əgər hər hansı ay ərzində oğlanlar qızlardan daha çox doğulmuş olsaydı, onda belə şübhələnmək olardı ki, onların mayalanma zamanına yaxın bir vaxtda oğlan mayalanmasına hər hansı ümumi səbəb əlverişli şərait yaratmışdır və nəticədə yaxın müddətdə oğlan doğumunu daha ehtimallı etmişdir. Lotereya oyununda, hər tirajda nömrələrin çıxması şansını tamamilə eyni etmək məqsədilə bütün nömrələr qarışdırıldığından, təbiətdə düzgün olmayaraq, baş verən təzahürlər lotereyada nömrələrin çıxması ilə dəqiqliklə müqayisə edilə bilinmir. Bu təzahürlərdən birinin tezliyi, onun baş verməsinə səbəb olan, müəyyən müddət təsir göstərmiş səbəbi guya göstərir və bu da onun gələcəkdə təkrar olunacağı ehtimalını artırır; və onun uzun müddət davamlı olaraq təkrar olunması, məs., uzun sürən yağışlı günlərin olması, bu təzahürlərdəki dəyişikliklərin naməlum səbəblərini aydınlaşdıra bilər, odur ki, hər bir gözlənilən təzahürdə, lotereyanın hər bir tirajında olduğu kimi, baş verəcək hadisə baxımından biz eyni bir qeyri-müəyyənlik vəziyyətinə qayıtmırıq. Bununla belə, bu təzahürlər üzərində müşahidələr çoxaldıqca bu nəticələrin lotereya nəticələri ilə müqayisəsi daha da dəqiqləşir.

Əvvəlkilərə əks olan illüziyalara görə, Fransız lotereyasında aparılmış tirajlarda ən çox təsadüf olunan nömrələr axtarılır, bu isə oyuna qoyulan məbləği faydalı surətdə yerləşdirmək üçün bu nömrələrdən birləşmələr qurmaq məqsədilə edilir. Lakin bu lotereyada nömrələrin yerləşdirilməsi üsuluna görə keçmişin gələcəyə heç bir təsiri olmamalıdır. Hər hansı bir nömrənin daha tez-tez çıxması yalnız təsadüfün anomaliyasıdır; bu hallardan əksəriyyəti üçün mən hesablamalar apardım və mən bu hesablamalardan həmişə tapırdım ki, bütün nömərələrin çıxmaları eyni imkanlı olduğu fərz olunduğu hesablama nəticələri göstərirdi ki, hər hansı nömrənin tez-tez çıxması elə sərhədlər arasında yerləşir ki, bu sərhədlərin doğruyaoxşar olmadığını hesab etmək olmaz.

Eyni cür hadisələrin uzun bir sırasında yalnız təsadüfün şansları bəzən bu xoşbəxtlik və ya bədbəxtliklərin qəribə zolağının səbəbi ola bilir, oyunçuların əksəriyyəti də bu şansları hər hansı bir qismətin təzahürü kimi nəzərdə tutmayacaqdır. Eyni zamanda təsadüfdən və oyunçuların məharətindən asılı olan oyunlarda, bir çox hallarda belə olur ki, uduzan şəxs, özünün uduzmasından pərt olaraq, başqa bir halda etmədiyi təsadüfi gedişlər edərək, vəziyyətdən çıxmaq istəyir; bu üsulla o, öz bədbəxtliyini daha da dərinləşdirir və onun daha da çox davam etməsinə səbəb olur. Halbuki məhz onda ağıl zərurətə çevrilir və ona inanmaq gərəkdir ki, əlverişsiz şanslarla əlaqədar itkinin mənəvi gözləməsi bədbəxtliyin özü nəticəsində artır.

Özünü təbiət tərəfindən xüsusi qayğı ilə əhatə olunan predmet hesab edən insan, uzun müddət özünü kainatın mərkəzi saydığından doğan hiss, hər bir ayrıca şəxsi özünü çox və ya az geniş dairənin mərkəzi hiss etməyə, düşünməyə və inanmağa meyl etməyə sövq etdirir ki, təsadüf onu daha çox qiymətləndirəcəkdir. Bu baxışla dəstəklənən oyunçular bir çox hallarda oyunlarda olduqca böyük məbləği oyuna qoyurlar, baxmayaraq ki, bu oyunlardakı şanslar, onlara məlum olduğu kimi əlverişsizdir. Həyatda belə baxış bəzən öz üstünlüklərinə malikdir, lakin əksər hallarda bu başlanacaq çox ziyanlı işə gətirir. Burada və hər şeydə olduğu kimi illüziyalar təhlükəlidir və yalnız həqiqət həmişə faydalıdır.

Ehtimal hesabının böyük xidmətlərindən biri odur ki, o, ilk təəssüratlara inanmamağı öyrədir. Bu təəssüratları hesablamaq mümkün olan hallarda belə aydın olur ki, bu təəssüratlar əksər hallarda aldadıcı olur, odur ki, belə nəticə çıxarılmalıdır ki, digər hallarda da yalnız son dərəcə ehtiyatla bunlara inanmaq olar. Bunu misallarla göstərək.

Urnda dörd ağ və ya qara kürəciklər vardır, lakin bunların hamısı eyni rəngdə deyildir. Ağ rəngdə bir kürəcik çıxarılmışdır; bu kürəcik urna qaytarılır və yenidən belə tiraja başlanılır. Sual olunur ki, dörd növbəti tirajda yalnız qara kürəcik çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir?

Əgər ağ və qara kürəciklərin sayı eyni olsaydı, bu ehtimal – qara kürəcik çıxması ehtimalı – 1/2-in dördüncü dərəcəsinə bərabər olardı; deməli, bu ehtimal 1/16 olardı. Lakin birinci tirajda ağ kürəcik çıxmışdırsa, bu belə bir təəssürat yaradır ki, urnda ağ kürəciklər çoxdur; çünki, urnda üç ağ və bir qara kürəcik olsaydı, onda urndan ağ kürəcik çıxması ehtimalı 3/4 olardı; əgər iki ağ və iki qara kürəcik olsaydı, bu ehtimal 2/4-yə bərabər olardı; nəhayət, urnda üç qara və bir ağ kürəcik olsaydı, bu ehtimal 1/4 olardı. Təcrübədən alınmış səbəblərin ehtimal prinsipinə əsasən, bu üç fərziyyənin ehtimalları öz aralarında 3/4, 2/4, 1/4 kimi münasibətdədir; deməli, bu fərziyyələrin ehtimalları 3/6, 2/6, 1/6 ədədlərinə bərabərdirlər. Beləliklə, qara kürəciklərin sayı az olarsa və ya ən çoxu ağların sayına bərabər olarsa, bir şansa qarşı beş şans olur. Belə fikirləşmək olar ki, birinci tirajda ağ kürəcik çıxmasına görə ardıcıl dörd ağ kürəciyin çıxması ehtimalı – hər iki rəngdən eyni sayda olduğu halındakı ehtimaldan kiçik olmalıdır və ya on altıda birdən az olmalıdır. Halbuki, bu belə deyildir və olduqca sadə hesablama ilə tapırıq ki, bu ehtimal on dörddə birdən çoxdur. Əslinə qaldıqda, bu ehtimal urndakı kürəciklərin rənginə görə əvvəlki birinci, ikinci və üçüncü cümlələrə görə 1/4, 2/4, 4/3-ün dördüncü dərəcəsinə bərabər olmalı idi. Hər bir qüvvətə yüksəldilmiş bu ədədləri uyğun fərziyyə ehtimalına vurduqda, yəni 3/6, 2/6, 1/6 ehtimallarına vurduqda, bu hasillərin cəmi ardıcıl olaraq dörd qara kürəciyin çıxarılması ehtimalına bərabər olacaqdır. Beləliklə, bu ehtimal üçün 1/14-dən böyük olan 29/384 ehtimalını alırıq. Bu ziddiyyət izah oluna bilinir, əgər biz nəzərə alsaq ki, birinci tirajın ağ kürəciklərin qara kürəciklərdən üstünlüyünü göstərməsi təəssüratı qara kürəciklərin ağlar üzərində üstünlüyünü istisna etmir, – o üstünlüyü ki, o, bu və ya o biri rəngli kürəciklərin eyni sayda olması fərziyyəsini istisna edir. Bu üstünlük, az doğruyaoxşar olmasına baxmayaraq, qara kürəciklərin verilmiş sayda ardıcıl çıxması ehtimalını böyütməlidir, nəinki, son fərziyyə yerinə yetdikdə, əgər verilən ədəd böyük olarsa; və biz görürük ki, dörddən başlayaraq, belə də olur.

İçərisində bir neçə ağ və qara kürəcik olan bir urn halına da baxaq. Əvvəlcə fərz edək ki, bu urnda yalnız bir ağ və bir qara kürəcik vardır. Onda bərabər şanslarla mərc gəlmək olar ki, bir tirajda ağ kürəcik çıxacaqdır. Lakin görünür ki, mərcin bərabərliyi üçün, ağ kürəciyin çıxmasına mərc gələn şəxsə, əgər urnda iki qara və bir ağ kürəcik olduğu halında iki tirajda iştirak etməyə imkan verilməlidir; əgər urnda üç qara və bir ağ kürəcik olarsa, üç tiraj imkanı yaradılmalıdır və s; fərz olunur ki, hər bir tirajdan sonra çıxarılmış kürəcik yenidən urna qaytarılır.

Lakin asanlıqla əmin olmaq olur ki, bu ilk təəssürat səhvdir. Əslinə qaldıqda, bir ağ kürəcik və iki qara kürəcik olduğu halda, iki tiraj aparıldıqda iki qara kürəciyin çıxması ehtimalı 2/3-nin ikinci dərəcəsinə və ya 4/9-ə bərabərdir; lakin iki tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı ilə toplanmış bu ehtimal yəqinliyə və vahidə bərabərdir, çünki yəqinliklə məlumdur ki, iki qara kürəcik çıxmalıdır və ya heç olmazsa bir dəfə ağ kürəcik çıxmalıdır; buna görə də, bu sonuncu halın ehtimalı 5/9-ə – 1/2-dən böyük olan bir kəsrə bərabərdir. Urnda beş qara və bir ağ kürəcik olan halda beş tirajda ağ kürəciyin çıxmasına mərc gəlmək əlverişli olardı; bu sonuncu mərc hətta dörd tirajda belə faydalıdır; bu halda bu mərc bir zərin dörd dəfə atılmasında altı xalının düşməsi üçün mərcə gətirilir.

Paskalın dostu – ehtimal hesabının təməlini qoymuş Kavaler de Mere, bu böyük həndəsəçini bu sahədə məşğul olmağa sövq edərək ona deyirdi ki: «aşağıdakı səbəbə görə o, ədədlərdə düzgün olmamazlığı tapmışdır: bir zərin dörd dəfə atılmasında altı xalının düşməsi üçün 671:625 nisbətində əlverişli şanslara malik olmaq olar». Əgər iki zəri atdıqda 12 almaq məqsədi qarşıya qoyularsa, onda 24 dəfə atmaq hüququ əlverişsiz şanslar verir. Bununla belə, 24 ilə iki zərin bütün üzləri cütlərinin sayı 36-nın olduğu nisbət, 4-ün bir zərin üzləri sayı

6-ya nisbəti ilə eynidir. «Belədir, – Paskal Fermata yazırdı; keçirdiyi böyük təəsüf hissi onu cəsarətlə belə söyləməyə vadar etdi: bu teoremlər dəyişməz deyildirlər və arifmetika özü-özünə ziddiyyətlidir…. O, dərin əqlə malikdir, lakin o, həndəsəçi deyil, bu isə siz bildiyiniz kimi böyük çatışmamazlıqdır». Kavaler de Mere, yalnış analogiya ilə səhvə yol verərək, fərz edirdi ki, mərcə gələnlərdə bərabərlik olarsa, zəratmalar sayı bütün mümkün ola bilən şansların sayına mütənasib olaraq artmalıdır, bu isə dəqiq olmasa da, bu say böyük olduqca dəqiqliyə daha çox yaxınlaşır.

Soyadlarını davam etdirəcək oğul arzusunda olan ataların ümumi arzusu ilə oğlan uşaqlarının qız uşaqlarından çox doğulduğunu izah etməyə cəhd göstərdik. Məs., eyni miqdarda, sonsuz sayda ağ və qara kürəciklər olan urn olduğunu təsəvvür edib, fərz edərək ki, çox saylı insanlardan hər biri bu urndan kürəcik çıxarır və tiraj ağ kürəcik çıxana qədər davam etdirilir; belə düşünürdülər ki, bu məqsəd çıxarılan ağ kürəciklər sayının qara kürəciklər sayından çox olmasını göstərəcəkdir. Əslində, bütün tirajlardan sonra, bu üstünlük, insanlarda ağ kürəciklər sayının hökmən heç olmasa insanların sayına bərabər olduğunu təmin edəcəkdir; və ola bilər ki, bu tirajlarda qara kürəcik heç olmasın. Lakin asanlıqla görmək olar ki, bu nöqteyi-nəzər illüziyadan başqa bir şey deyildir, çünki əgər biz fərz edəriksə ki, birinci tirajda bütün insanlar urndan hamısı birdən bir kürəcik çıxarır, onda aydındır ki, onların məqsədlərinin bu tirajda çıxarılan kürəciklərin rənglərinə heç bir təsiri olmayacaqdır. Bu tirajın yeganə nəticəsi – birinci tirajda ağ kürəcik çıxarmış şəxslərin ikinci tiraja buraxılmamasıdır. Oxşar surətdə, aydındır ki, yeni tirajda iştirak edən şəxslərin məqsədlərinin bu tirajda çıxacaq kürəciklərin hansı rəngdə olmasına heç bir təsiri olmayacaqdır və növbəti tirajlarda bu belə olacaqdır. Deməli, bu məqsəd bütün tirajlarda çıxan kürəciklərin nə rəngdə olacağına tamamilə təsir etməyəcəkdir; bu hər bir tirajda iştirak edəcək şəxslərin çox və ya az olmasına səbəb olacaqdır. Çıxarılan ağ kürəciklərin sayının qara kürəciklərin sayına nisbəti, beləliklə, vahiddən çox az fərqlənəcəkdir. Buradan belə nəticə alınır ki, insanların sayının olduqca çox olduğunu fərz edərək, əgər müşahidə də çıxarılan kürəciklərin rəngləri arasında vahiddən çox az fərqlənən nisbəti verərsə, onda vahid və urndakı ağ kürəciklərin qara kürəciklərin nisbəti arasındakı həmin fərqin mövcudluğu, demək olar ki, olduqca ehtimallıdır.

Mən, ehtimal hesabından sıraların cəmlənməsində Leybints və Daniil Bernullinin etdikləri tətbiqi illüziya hesab edirəm. Əgər biz, surəti vahid, məxrəci isə vahid plyus dəyişən olan kəsri bu dəyişənin qüvvət üstünə görə sıraya ayırsaq, onda asanlıqla görmək olar ki, dəyişəni vahidə bərabər götürdükdə, kəsr 1/2-ə bərabər olur, sıra isə *plyus vahid, minus vahid, plyus vahid, minus vahid* və s.-yə çevrilir. Bu sıranın ilk iki həddini, sonra növbəti iki həddini və s. toplayaraq, bu sıranı başqa bir sıraya çeviririk ki, alınmış bu sıranın hər bir həddi sıfra bərabərdir. İtalyan iyezuiti Qrandi buradan yaratmanın mümkünlüyü barədə nəticə çıxarmışdar; sıra həmişə 1/2-ə bərabər olduğundan, o fərz edir ki, bu kəsr sonsuz sayda sıfırlardan əmələ gəlir və ya heç nədən. Eyni şey Leybnitslə baş vermişdi: O, belə fikirləşirdi ki, oxşar yaranmaları onun ikilik arifmetikasında da görmək olar, o, burada yalnız iki işarədən istifadə edirdi: sıfır və vahid. O, belə düşünürdü ki, vahid Allahı, sıfır isə heç nəyi ifadə edə bilərdi, düşünürdü ki, Ali Varlıq bütün olanları heç nədən yaratmışdır, necə ki, vahid və sıfır hesab sistemində bütün ədədləri ifadə edə bilir. Bu ideya Leybnitsin o qədər xoşuna gəlmişdir ki, o, bu düşüncələrini Çində riyaziyyat kafedrasının nümayəndəsi, iyezuit Qrimaldi ilə bölüşərək, ümid bəsləyir ki, bu yaranma emblemi elmləri xüsusilə sevən o vaxtkı imperatoru xristianlığı qəbul etməyə sövq edər. Mən bu cəhəti xüsusilə vurğulayıram ki, göstərəm ki, uşaqlıq xurafatı ən böyük şəxsiyyətləri belə nə dərəcədə yalnış düşündürə bilir.

Leybnits, hələ də qəribə və olduqca sərbəst metafizikanın təsiri altında belə hesab edirdi ki, *plyus vahid, minus vahid, plyus vahid, minus vahid* və s. sırası hədlərinin sayı cüt və ya tək olmasından asılı olaraq, sıfır və ya vahidə bərabər olur; və buna görə də, sonsuzluqda cüt ədədə tək ədəddən üstünlük verməyə heç bir səbəb olmadığından, ehtimal qaydalarına görə nəticələrin bu iki növə ədədlərə aid – sıfır və vahid bərabər olan nəticələr götürülməlidir ki, bu da sıranın ədədi qiyməti üçün 1/2-i verir. Daniil Bernulli sonra bu mülahizəni periodik hədlərdən ibarət sıraların cəmləri üçün genişləndirmişdi. Lakin bütün bu sıraların, əslinə qaldıqda, ədədi qiyməti yoxdur: bu sıralar üçün ədədi qiymətlər yalnız onların hədlərini vahiddən kiçik hər hansı dəyişənin ardıcıl qüvvət üstünə vurduqda alınır. Bu halda bu sıralar, dəyişən və vahid arasındakı fərz olunan fərqin nə qədər kiçik olmasından asılı olmayaraq, həmişə yığılır; və çox asanlıqla isbat etmək olur ki, ehtimal nəzəriyyəsi əsasında Bernullinin təyin etdiyi ədədi qiymətlər, məhz, sıraları əmələ gətirən kəsrlərin ədədi qiymətləridir, bu halda bu kəsrlərdəki dəyişənin vahidə bərabər olduğu fərz olunur. Bu ədədi qiymətlər, həm də, dəyişən vahidə yaxınlaşdıqca sıraların get-gedə daha yaxınlaşdıqları limitlərdir. Lakin dəyişən nə vaxtsa vahidə bərabər olursa, bu sıralar artıq yığılan olur, onlar bu sıraların sonlu sayda hədlərini götürdükdə ədədi qiymətlər alır. Periodik sıraların ədədi qiymətllərinə ehtimal hesabının bu tətbiqinin gözəl münasibəti fərz edir ki, bu sıraların hədləri dəyişənin bütün ardıcıl qüvvət üstlərinə vurulmuşdur. Lakin bu sıralar sonsuz sayda müxtəlif kəsrlərin ayrılışlarından da alına bilinər; bu kəsrlərdə bu yerinə yetir. Məs., *plyus vahid*, *minus vahid*, *plyus vahid*, *minus vahid* və s., sırası surəti – vahid plyus dəyişən, məxrəci – dəyişənin kvadratı qədər artırılmış bu surətə bərabər olan kəsrin ayrılışından da yarana bilinər. Dəyişənin vahid olduğunu fərz etdikdə, bu ayrılış verilən sıraya çevrilir və yaradıcı kəsr 2/3-yə bərabər olur; onda ehtimal qaydaları yanlış nəticələr verərdi, bu isə onu sübut edir ki, xüsusilə də, öz metodlarının dəqiqliyi ilə yüksək dərəcədə fərqlənən riyazi elmlərdə belə mülahizələri tətbiq etmək nə dərəcədə təhlükəli olardı.

Biz, təbii olaraq, belə düşünməyə meylliyik ki, Yer üzündə hər şey gördüyümüz kimi, yeniləşir və bu qayda həmişə olmuşdur və olacaqdır. Əslində, kainatın hal-hazırdakı vəziyyəti tamamilə əvvəl yaranmış olduğu vəziyyətinə oxşasaydı, onda o, öz növbəsində oxşar vəziyyət yaratmış olardı. Onda bu vəziyyətlərin əvəz olunması əbədi olardı. Ümumdünya cazibə qüvvəsinə analizin tətbiqi ilə mən öyrəndim ki, planet və peyklərin fırlanma hərəkətləri və kükrəntilər və onların orbitləri və ekvatorlarının vəziyyətləri yalnız periodik bərabərsizliklərə tabedirlər. Ayın əsri tənliyi nəzəriyyəsini qədim Aytutulmaları ilə müqayisə edərək, mən tapdım ki, Hipparx dövründən bəri günün uzunluğu, hətta saniyənin yüzdə biri qədər belə dəyişməmişdir və Yerin orta temperaturu yüzdə bir dərəcə belə azalmamışdır. Beləliklə, hazırki vəziyyətin sabitliyi elə bil ki, eyni zamanda nəzəriyyə və müşahidələrlə pozulur, bu səbəblərə diqqətlə baxıldıqda bu dəyişiklik nəzərə çarpır və bu səbəbləri hesablamaq belə mümkün olmur.

Okeanın, atmosferin və meteorların təsirləri, zəlzələlər və vulkan püskürmələri Yer səthini daima dəyişikliklərə məruz qoyur və zaman ötdükcə bunlar Yer səthində mühüm dəyişikliklər yaradacaqdır. İqlim temperaturu, atmosferin həcmi və atmosferi təşkil edən qazların hansı nisbətdə olması hiss olunmayacaq tərzdə dəyişə bilinər. Yeniləşən alətlərin və bu dəyişikliklərin müəyyənləşdirilməsi üçün yararlı vasitələrin olmasına baxmayaraq, müşahidələr bu mənada bu vaxta qədər heç bir nəticəyə gətirə bilməmişdir. Bununla belə olduqca az doğruyaoxşardır ki, bizim havanı təşkil edən qazların udulması və bərpası səbəbləri onların uyğun miqdarlarını dəqiqliklə saxlamış olsun. Uzun əsrlər sırası bütün bu elementlərin məruz qaldıqları, mütəşəkkil varlıqların qorunub saxlanılması üçün olduqca mühüm dəyişiklikləri dərk etmək imkanını verir. Tarixi abidələrin ən qədim dövrlərə aid olmamasına baxmayaraq, bunula belə təbii səbəblərin yavaş və davamlı təsirləri nəticəsində onlar məruz qaldıqları olduqca böyük dəyişikliklərin olduğunu göstərir.

Yerin dərinliklərinə baş vuraraq, nə vaxtsa mövcud olmuş və hazırkı təbiətdən tamamilə fərqli olan çoxsaylı təbiət qalıqları kəşf olunur. Bundan başqa, əgər, göründüyü kimi, hər şey necə ki, bütün Yerin əvvəlcə maye şəklində olduğunu göstərirsə, onda aydındır ki, onun bu vəziyyətdən indiki olduğu vəziyyətə keçidində onun səthi nəhəng dəyişikliklərə məruz qalmalı idi. Hətta Göy, öz hərəkətlərindəki qaydaya baxmayaraq, dəyişməz deyildir. İşığın və digər efir mayelərin müqaviməti və ulduzların cazibəsi, olduqca çox əsrlər keçdikdən sonra planetlərin hərəkətlərini olduqca dəyişməlidir. Ulduzlarda və dumanların formalarında müşahidə olunmuş dəyişikliklər bu nəhəng cisimlər sistemində zamanın edəcəyi dəyişiklikləri hiss etməyə bizi

məcbur edir. Kainatın ardıcıl vəziyyətlərini absisi zamanı, ordinatları bu müxtəlif vəziyyətləri ifadə edə bilən əyri şəklində təsvir etmək olardı. Bu əyrinin hər hansı bir elementini bildikdə, biz onun başlanğıcına çata biləcəyimiz mümkünlüyündən uzağıq və əgər təxəyyülü maraqlandıran təzahürlərin səbəbləri barədə bilgisizliyin hələ də doğurduğu təşvişdə olan təxəyyülə istirahət vermək üçün hansısa vəziyyətləri irəli sürməyə risk edilərsə, onda bunlar ən azı olduqca hərtərəfli düşünərək, ağılla təklif olunmalıdır.

Ehtimalları qiymətləndirdikdə illüziyaların bir növü vardır ki, o, xüsusən ağlın quruluşu qanunlarından asılı olub, bu illüziyaların təsirindən qorunmaq üçün bu qanunları dərinliklə sınaqdan keçirməlidir. Gələcəyə baş vurmaq arzusu və bəzi qəribə hadisələrə, astroloqların, falçıların və kahinlərin öngörülərinə, hissetmələrə və yuxulara, xoşbəxt və ya bədbəxt sayılan ədədlərə və günlərə münasibət, hələ indi də, çox yayılmış olan çoxsaylı xurafatı yaratmışdı. Heç bir hiss yaratmayan və ya nəzərdən yayınmış və ya naməlum qalmış bir-birilə uzlaşmayan çoxsaylı hallar haqqında düşünən heç yoxdur; bununla belə bunları bilmək o dərəcədə zəruridir ki, bir-birilə üst-üstə düşən belə halların səbəblərinin ehtimallarını qiymətləndirmək mümkün olsun. Bu qiymətləndirmə, şübhəsiz ki, bu xurafatlara görə bizim əqlimizin diktə etdiyini təsdiq etmiş olardı. Məs., ən qədim filosoflardan birinə Allahın məbəddə qüdrətinin tərifini Göylərə qaldırmaq üçün, bu Allaha *ex-voto* səcdə edərək xitab edən, gəmi qəzasından xilas olanları göstərərək, onların bu xilasının Allaha yalvarmaları və inamının nəticəsində baş verdiyini misal çəkənlərə o, ehtimal hesabı ilə uzlaşan belə fikri söyləmişdi: o, yalvaran, dua edən və bu qəzada ölmüş şəxslərin adlarını görmür. Siseron bütün bu xurafatları böyük ağılla və gözəl natiqliyi ilə, özünün fala baxma haqqında Traktatında təkzib edərək, sonda belə yazmışdı: çünki onlar keçmiş filosoflarda dünyəvi əqlin cəhətlərini tapmağı sevirlər, elə bir əqlin ki, o, özünün nuru ilə bütün xurafatları alt-üst edərək, insani qanunların yeganə əsasına müraciət edəcəkdir.

Roma natiqi belə deyir: – «Yuxulara görə falabaxma və bütün oxşar xulafatlar rədd olunmalıdır». Hər yerdə mövhumat ağılların çox hissəsini məhkum etmiş və insan zəifliyinə nail olmuşdu. Məhz bunu, Allahların təbiəti haqqında kitablarımızda, biz inkşaf etdirirdik, xüsusilə də, bu əsərdə, çünki biz inanırdıq ki, əgər biz xurafatı darmadağın edə bilsək, başqalarına və özümüzə fayda gətirəcəyik. Lakin (və mən xüsusilə arzu edirəm ki, bu anlamda mənim fikrim yaxşı anlaşılsın) xurafatı darmadağın etməklə, mən, dinə toxunmaq fikrindən uzağam. Ağıl bizə Allahlara sitayişə aid olan, bizim əcdadlarımızın adət və ənənələrini və təsisatlarını dəstəkləməyi tələqin edir. Bundan başqa, kainatın gözəlliyi və Göy təzahürlərindəki qayda, bizi insan övladının qeyd edə biləcəyi və səcdə edəcəyi hansısa ali təbiətin varlığının olduğunu qəbul etməyə məcbur edir. Təbiətin dərk olunması ilə bağlı olan dini yaymaq nə qədər münasibdirsə, xurafatın yerli-dibli aradan qaldırılması üçün də o qədər səy göstərilməlidir, çünki bunlar bizə iztirab verir, sizi əsir edir və hər yerdə sizi daima izləyir. Əgər siz falçıdan və ya kahindən məsləhət istəsəniz, əgər siz qurban versəniz, əgər siz quşun uçuşuna baxsanız, əgər siz heyvanların daxili orqanlarına görə falçını və ya gildanini (1. Qədim Babilistan övladlarında yaşamış Gildani xalqına mənsub adam; 2. xaldlar – rus. халды – Van gölü həvalisində yaşamış və miladdan əvvəl XIV-VII əsrlərdə Urartu dövlətində hakimiyyət sürmüş tayfa, – H. M.) qarşılayarsınızsa, əgər ildırım çaxırsa, əgər Göy guruldayırsa, əgər tufan qopursa, nəhayət, əgər hər hansı müdhiş bir nəhəng doğulur və ya yaranırsa, – bütün bu hadisələrdən çox vaxt hansı biri hökmən baş verirsə; onda sizə hakim kəsilmiş xurafat sizə rahatlıq verməyəcəkdir. Hətta insanların ağır anlarında və zəhmətlərində dinclik tapdıqları yuxu belə, onların öz günahları isbatından onlar üçün yeni bir narahatlıq və qorxu predmetinə çevrilir».

Onların tələqin etdikləri bütün bu xurafatlar və qorxu hissi fizioloji səbəblərdən asılıdır ki, bunlar bəzən, ağlımız bizi səhvlərimizi görməyə yönəltdikdə belə, sonradan güclü təsir etməkdə davam edir. Lakin bizim mövhumatımıza zidd olan əhvalatların təkrar olunması bunları həmişə darmadağın edə bilər. Bunu aşağıdakı mülahizələrimiz sübut edəcək.

Gözlə görünən fiziologiya sərhədində bu fiziologiyadan çoxsaylı təzahürləri ilə fərqlənən digər fiziologiya başlayır, bu təzahürlər özlərinin uyğun qanunlarına tabedirlər ki, bunları bilmək olduqca mühümdür. Bu fiziologiya, onu biz *psixologiya* adlandıracağıq, şübhəsiz ki, gözlə görünən fiziologiyanın davamıdır. Lifləri itib-batan sinirlər xaricdəki əşyalardan aldıqları təəssüratları beyin maddəsinə bütün beyin üzrə paylaşdırır və orada daimi təəssüratları saxlayır və bunlar bizə məlum olmayan şəkildə sensorium və ya fikrin yerini dəyişir.

Xarici hisslər bizə bu dəyişikliklərin təbiəti üzrə heç bir şey öyrədə bilmir; özlərinin sonsuz müxtəlifliyi, bir-birindən fərqlənmələri və onları özündə yerləşdirmiş kiçik bir fəzada qayda saxlamalarına görə bu dəyişikliklər barədə işıq və elektrikin hədsiz rəngarəngliyi bizə müəyyən anlayış verir. Lakin bu dəyişiklikləri duymağa təkcə qadir ola biləcək daxili hisslər üzərində müşahidəyə xarici hisslər üzərində müşahidələrdə istifadə olunan metodu tətbiq edərək, insan idrakı nəzəriyyəsinə, natural fəlsəfənin digər sahələrinə daxil olunmuş eyni dəqiqliyi də daxil etmək olar.

Psixologiyanın bəzi prinsipləri* artıq qəbul olunmuşdur və müvəffəqiyyətlə inkişaf etdirilmişdir. Oxşar orqanizmli bütün varlıqların öz aralarında harmoniya təsbit etmə cəhdi belədir. *Simpatiya* təşkil edən bu cəhd, hətta müxtəlif növ heyvanlarda belə vardır: onların orqanizmləri bir-birinə az oxşadıqca, bu cəhd azalacaqdır. Eyni orqanizmli varlıqlar içərisində bəziləri bir-birilə başqalarından daha tez yaxınlaşırlar. Qeyri-üzvü təbiətdə belə hadisələr məlumdur: eyni bir altlıq üzərinə çox az fərqlə işləyən iki – divar və ya cib saatı qoyulduqda sonda bunlar tamamilə eyni cür işləməyə başlayır; səsli simlərin sistemində bir simin rəqsi bütün harmonik rəqslərin həmahəng səslənməsinə səbəb olur. Səbəbləri yaxşı məlum olan bu hadisələr üzərində hesablamalar aparılmış və nəticədə məlum olmuşdur ki, bu hesablamalar daha da mürəkkəb səbəblərdən asılı olan bu anlamdakı simpatiya haqqında doğru anlayış verir.

Xoşagəlmə hissi, demək olar ki, simpatiyadakı dəyişməni həmişə müşayiət edir. Heyvan növlərinin əksəriyyətində ayrı-ayrı fərdlər bu tərzdə bir-birilə qovuşur və toplumlar kimi birləşirlər. İnsan nəslində güclü şəxslər zəiflər üzərində hakimlikdən əsl xoşbəxtlik duyur və zəiflər isə öz növbəsində onlara tabe olduqlarından özlərini heç də az xoşbəxt hiss etmirlər. Simpatiya hissi eyni zamanda çoxsaylı insanda həyacan doğurduqda, qarşılıqlı reaksiya nəticəsində artmağa başlayır; necə ki, bunu teatrda müşahidə etmək mümkündür. Bu hissdən doğan zövq, oxşar baxışlı insanları bir-birinə yaxınlaşdırır, onlar birləşdikdə bu hal onları bəzən fanatizmə qədər belə alovlandırır. Beləliklə də, sektalar yaranır, bunların oyatdığı meyllər və onların yayılması sürətlənir. Tarixdə bunlar simpatiya hissinin hakim kəsilməsinə ən heyrətamiz və ən ziyanlı misallardır. Tez-tez elə hal müşahidə olunur ki, simpatik təsirlər necə də asanlıqla, heç bir digər səbəb olmadan bu təsirə duçar olanlara yalnız onunla əlaqədar olaraq sirayət edir, məsələn, gülüş kimi. Sensoriuma simpatiyanın təsiri, şübhəsiz ki, olduqca güclüdür: simpatiyaının sensoriuma verdiyi vibrasiyalar, çox güclü olduqları halda, heyvani qənaətə təsir göstərəcək, qeyri-adi təsirlər oyadır, bunlar xurafat əsrlərində fövqəltəbii qüvvələrə aid olunmuş və öz müstəsnalığı ilə müşahidəçilərin diqqətini cəlb etmişdir.

Rəhmdillik, xeyirxahlıq və bir çox digər hisslər simpatiyadan yaranmışdır. Bu hissin təsiri altında özgə iztirabını hiss etmək və yardım göstərilmiş bədbəxt bir kəsin sevincini bölüşdürmək olur. Lakin mən burada yalnız psixologiyanın prinsiplərini, onların nəticələrinin inkişafına varmadan, şərh etmək istəyirəm.

Bu prinsiplərin hamısından ən məhsuldar olan biri – sensoriumda eyni zamanda və ya düzgün ardıcıllıqla mövcud olan bütün şeylərin əlaqə prinsipidir, elə əlaqənin ki, bu şeylərdən biri qayıtdıqda, digərlərini də qaytarır. Mürəkkəb, mücərrəd və ümumi ideyaların yaranması və analizindən ötrü və mühakimə yürütmək üçün hisslər, duyğular və ideyalar doğurmaq məqsədilə işarələr və dillərin istifadəsi bu prinsipə aiddir. Bir çox filosoflar bu predmeti yaxşı inkişaf etdirmişlər və o, indiyə qədər metafizikanın real hissəsini təşkil edir.

Hətta müəyyən etmək olur ki, psixologiya prinsipi kimi, eyni bir predmetdən müxtəlif hisslərdə tez-tez təkrar olunan təəssuratlar,

* Mən burada *prinsip* sözü ilə təzahürlərin ümumi münasibətlərini adlandırmışam.

sensoriumu elə dəyişirlər ki, predmetdən yalnız bir hissə alınan xarici təəssurata uyğun daxili təəssürat əvvəl olduğundan olduqca fərqlənir. Bu prinsipi aydınlaşdırmaq məqsədilə kor doğulmuşa görmə qabiliyyətinin verildiyi hala baxaq. Onun gözünün tor qişasında əşyanın həkk olunmuş obrazı, onun sensoriumunda təəssürat yaradır, mən onu birincidən fərqləndirmək üçün və onun təbiəti barədə heç bir fikir söyləmədən, onu *ikinci obraz* adlandıracağam. Bu ikinci obraz, əvvəlcə, əşyanın düzgün obrazı deyildir; lakin hiss etmə vasitəsilə əşyadan yaranan təəssüratların görmə qabiliyyətindən yaranan təəssüratlarla adətə görə müqayisəsi, sensoriumu dəyişdirərək, nəhayət, elə hal yaradır ki, ikinci obraz hissetmə ilə doğru ötürülmüş gerçəkliklə uzlaşır. Tor qişada həkk olunmuş obraz dəyişmir, lakin onun yaratmış olduğu daxili obraz görmə qabiliyyəti bərpa olunmuş kor doğulmuş bir çoxları üzərində aparılan təcrübələrin göstərdiyi kimi o cür qalmır.

Sensorium bu dəyişikliklərə, əsas etibarilə, uşaqlıqda məruz qalır. Uşaq görmə və hissetmə orqanları ilə eyni bir əşyadan aldığı təəssüratları daima müqayisə edərək, görmə təəssüratlarında düzəlişlər edir. O, öz sensoriumunu gördüyü əşyalara təəssüratları ilə sıx bağlı, bunların həmişə doğurmuş olduğu hiss təəssüratlarının ona təlqin etdiyi formanı verməyə öyrədir. Onda görünmüş əşyalar, hiss olunmuş kimi eyni gerçəkliklə təsvir oluna bilinir. Görmə üçün işıq şüası hissetmə üçün çubuğun yaratdığını etmiş olur. Bu hisslərdən birincisi bu qayda ilə özünün təəssüratlar obyektləri oblastlarını ikincisindən daha da çox genişləndirə bilir. Hətta təsəvvürümüzdə səyyarələrin bərkidilmiş olduğu Göy qübbəsi hələ çox məhdud sayılmışsa da, biz yalnız uzun-uzadı aparılan müşahidələr və hesablamalar yolu ilə bu göy cisimlərinin olduqca böyük uzaq məsafələrilə olduğunu dərk edə bilmişik və onların ucsuz-bucaqsız fəzada, bir-birindən qeyri-müəyyənliklə aralı yerləşdiklərini öyrənə bilmişik.

Heyvanların bir çox növləri, ehtimal ki, sensoriumun məsafələrini qiymətləndirmək qabiliyyətinə malikdirlər. Lakin təbiət instinkt hissini insanda, demək olar ki, hər barədə ağılla əvəz etmişdir və insan instinkt əvəzinə müşahidələrə və müqayisələrə ehtiyac duyur və bunlar onun əqli qabiliyyətini təəccüb doğuracaq qədər inkişaf etdirir və bu inkişaf sayəsində onun yerin hakimi olmasını təmin edir.

Daxili obrazlar, buna görə də, yalnız səbəbin təsiri ilə yaranmır; bunlar ya eyni zamanda eyni bir və ya müxtəlif hiss orqanları ilə alınmış təəssüratlardan, yaxud yaddaşın yaratdığı daxili təəssüratlardan yaranır. Bu təəssüratların qarşılıqlı təsiri – zəngin nəticələri olan psixoloji prinsipdir. Bundan əsaslarını açıqlayaq.

Müşahidəçi tam qaranlıqda, eyni bir diametrli iki işıq saçan kürəciyi müxtəlif məsafələrdən görür: bunlar ona eyni ölçülü kimi görünməyəcəkdir. Bunların daxili obrazları gözün tor qişasında həkk olunmuş uyğun təsvirlərə mütənasib olacaqdır. Lakin işıqda, o, əgər kürəciklərlə bütün aradakı fəzanı da görərsə, onda bu görüntü daha uzaqdakı kürəciyin daxili obrazını böyüdür və onu digər kürəciyin obrazı ilə sanki bərabər edir. Bundan da belə alınır ki, iki və üç metr məsafədən görünən adam, bizə eyni ölçülü görünür: onun daxili obrazı, gözün tor qişasındakı təsvirlərdən birinin digərindən iki dəfə çox olmasına baxmayaraq, dəyişmir. Eynilə də, aralıqdakı əşyalardan yaranan təəssüratlar sayəsində üfüqdə Ay zenitdəki Aydan böyük görünür. Biz gözə yaxın budaq üzərində əşyanı uzaq məsafədəki kimi qəbul etdiyimizdən o, çox böyük görünür. Sonra, biz o əşyanı budaqla birləşdirən əlaqəni öyrənirik: biz bu əlaqəni anlayan kimi o, daxili təsviri dəyişərək, onun olduqca kiçik ölçülərdə olduğunu müəyyən edir. Bütün bunlar bəzi metafiziklərin fikirləşdikləri kimi sadəcə mülahizələr deyildir; bu eyni bir əşyadan bir neçə hiss orqanında, xüsusilə də, hiss və görmə orqanlarında, sensoriumda yaranan təəssüratların, adət olunmuş müqayisə yolu ilə aldığı bacarıqlardan doğan fizioloji effektlərdir.

Kənardakı əşyalardan doğan təəssüratlara yaddaşın qoyduğu izlərin təsiri bir çox hallarda özünü göstərir. Uzaqdan hərflər görünür, lakin bu hərflərlə hansı sözün yazıldığını müəyyən etmək olmur. Əgər kimsə bu sözü tələffüz edərsə və ya hansısa bir səbəb bu sözü onun yadına salarsa, onda həmin an bu tərzdə yeniləşmiş şəkildəki bu hərflərin daxili təsviri, əgər mən belə ifadə edə bilərəmsə, xarici işarələrin təəssüratından yaranan, aydın olmayan təsvir üzərinə həkk olunur və onu aydınlaşdırır. Hərflərin şəkli onlara uyğun səslərin izlərini yaradır; bu izlər isə səsin aydın olmayan sədaları ilə qarışaraq, onları fərləndirməyə imkan verir. Qorxu, çox vaxt bu tərzdə, olduqca zəif işıqda ayırd edə bilmədiyimiz əşyaları, onlara oxşar qorxunc əşyalar kimi görməyə səbəb olur. Bu sonuncu (eybəcərləşmiş şəkildəki) əşyaların sensoriumda qorxudan olduqca güclü şəkildə həkk olunmuş təsvirinin, xaric əşyaların təəssüratlarından yarandığı fərz olunur. Yalnız çox zəif təəssürat doğuran təzahürlərin müşahidələrindən çıxarılan nəticələrdə illüziyaların bu səbəbindən özünü qorumaq vacibdir: planet və peyklər üzərində işığın azalmasının müşahidəsi belədir və bundan isə onların atmosfer sıxlığının varlığı və onların fırlanma hərəkətləri haqqında nəticələr çıxarılmışdı. Bir çox hallarda daxili obrazların bu təəssüratları özünə oxşadacağından qorxmaq lazımdır: biz hisslərdən alınmış təəssüratlarla təsvir tapmış belə şeylərin varlığına inanmağa meylliyik.

Bu gözəl meyllilik xüsusi xarakterdən asılıdır, xaricdən alınan bu təəssüratlar təxəyyülün yaratdığı və ya yaddaşın doğurduğu izlərdən bu xarakter vasitəsilə fərqləndirilir. Sensorium və ya orqanlarda, onlara təsir edən pozulmalar nəticəsində, bəzən bu izlər xaric təəssüratların xarakteri və canlılığını almış olur. Gecənin qaranlığı və sakitlik bu illüziyalara əlverişli şərait yaradır, bunlar yuxu mərhələsində bütövləşir və yuxugörmələri doğurur; biz nəzərə alarıqsa ki, qaranlıqda bizim təxəyülümüzdə təsvir olunan əşyaların izləri yuxu ərəfəsində böyük gərginliyə malik olur, onda bunlar haqqında bizdə doğru təsəvvür yaranacaqdır.

Hamıda belə fikir formalaşmışdır ki, lunatiklərdə (somnambul) bəzi hisslər oyaq olur. Məs., əgər, xaric əşyalara toxunmadan yaranan hissiyyat az da olsa qalmışsa, onda əşyalardan yaranan sensoriuma ötürülən zəif təəssüratlar, lunatikin yuxu obrazları ilə birlikdə onları dəyişə bilir və onun hərəkətlərini idarə edə bilir. Mən bu mülahizələri nəzərə alaraq, lunatiklərin etdikləri qeyri-adi şeylər haqqında yaxşı yoxlanılmış hekayətləri tədqiq etdikdə, mənə belə gəlir ki, bunlara sadə izah vermək mümkündür.

Bəzən gələcəyi görən (bəsirətli) adamlara belə gəlir ki, onlar təsəvvür etdikləri adamların danışdığını eşidirlər və onlar bu adamlarla əlaqəli söhbət aparırlar; həkimlərin əsərləri bu növ faktlarla doludur.

Bonne, tez-tez müşahidə etdiyi ana babasını – «qocanı» misal gətirərək, belə deyir: «tam sağlam olan bu «qoca», heç bir xaric təəssürat olmadan, zaman-zaman, qarşısında kişi, qadın, quş, ekipaj, tikili və s. kimi obrazlar görür. O, bu obrazların müxtəlif hərəkətlərlə dəyişdiklərini, bir-birinə yaxınlaşdıqlarını, bir-birindən uzaqlaşdıqlarını, yüyürdüklərini, ölçülərdə kiçilib və böyümələrini, gözə görünüb-yox olmalarını və yenidən göründüklərini görür. Lakin o, bu görüntülərin tamamilə gerçək olduğunu qəbul etmir; onun ağlı bunlarla məzələnir. O bilmir ki, hər bir növbəti anda gözünə hansı görüntü görünəcəkdir. Onun ağlı – səhnələr göstərən, özü də ki, tamaşaçı üçün çox qəribə olan, onun tamamilə görmədiyi səhnələr göstərən bir teatrdır». Janna D'Arkın tarixçəsini oxuduqca, biz bu qeyri-adi qızın təmiz qəlbli bəsirətli bir insan olduğunu qəbul etməyə bilmirik; onun cəsarətli, comərd eksaltasiyası Fransanın düşmənlərdən azad olunmasına səbəb olmuşdu. Olduqca mümkündür ki, özlərinin bilgilərinin fövqəltəbii varlıqdan alındığını iddia edən bu bəsirətli adamlardan bir çoxu öncənigörən adamlar idi: onlar özlərinin əmin olduqlarına digərlərini də inandırmağa çalışırdılar. Onların dinlə əlaqələndirdikləri yalanlara və güclü vasitələrə, onların insanlar üçün zəruri həqiqət hesab etdiklərini yaymaq məqsədilə onların özləri tərəfindən də bəraət qazandırılırdı.

Bizim xaric əşyalardan yaranan təəssüratlarımızın yaddaşla doğurulan izləri təxəyyül məhsullarından xüsusi xarakterlə fərqləndirilir. Biz bu əşyaların bizim yaddaşımızın təyin etdiyi qaydada keçmişdə mövcud olduğunu sanki instinktlə qəbul etməyə meylliyik. Daima aparılan təcrübələr bizim davranışımız üçün buradan çıxarılan nəticələrin doğruluğunu təsdiq edir və bu meylliliyi möhkəmlədir. Sensoriumun bu əməliyyatında bizim mülahizələrimizi müəyyən edən mexanizm necədir? Biz onun haqqında heç nə bilmirik və yalnız onun təsiri nəticələrini görə bilirik. Bu mexanizmin köməyilə yaddaşın zəif izləri belə onların ilkin gücünü qiymətləndirməyə bizə imkan verir, beləliklə də, biz bu gücü ətrafımızdakı əşyalardan yaranan oxşar təəssüratlarla müqayisə edə bilirik. Beləliklə, bizə belə gəlir ki, öncə gördüyümüz işıq

hal-hazırda gözümüzə görünən işıqdan daha parlaqdır.

Yaddaşdakı izləri müqayisə edən təəssüratlar, bizə, onların səbəblərini xatırlatmağa kömək edir. Bizə nə barədə isə danışılmış xatirəyə, bu hekayəti söyləyən şəxsə bizim inam hissimizin xatirəsi də əlavə olunduqda, əgər həmin şəxsin adını xatırlaya bilmiriksə, biz danışdığımız adamların adlarını bizə bu inamı təlqin etmiş şəxsin adına çatana qədər bir-bir xatırlayırıq.

Ətrafdakı bizim əvvəldə gördüyümüz əşyalar onlarla əlaqədar olan bizim ilk gördüyümüz şeylərin izlərini canlandırır. Bu izlər isə eyni tərzdə digər əşyaların izlərini canlandırır və s., odur ki, hər hansı ətrafdakı şey haqqında, biz onları sonsuza qədər xatırlaya bilərik və onlardan hansılarına baxmaq istədikdə, diqqətimizi o anda bunlar üzərində saxlayırıq.

Uşaqlıqda bizdə təlqin olunmuş təəssüratlar insanın ən qoca dövrünə qədər qorunub saxlanılır və hətta ahıl yaşda ən güclü təəssüratlar silinmiş olduqda belə bunlar canlanır. Sensoriumda dərin həkk olunmuş ilk təəssüratlar, sanki yenidən canlanmaq üçün yaşla və ya xəstəliklə sonrakı təəssüratların yalnız zəifləməsini gözləyirlər, necə ki, gündüz işığının görünməz etdiyi ulduzlar gecə və ya Günəş tutulmalarında görünürlər.

Yaddaşın izləri zamanın təsiri və bizim xəbərimiz olmadan gərginlikdə yaranır. Bizim axşam öyrəndiyimiz nəsə, sensoriumda yuxu zamanı yaddaşda həkk olunur və bu qayda ilə asanlıqla yaddaşda qalır. Mən dəfələrlə müşahidə etmişəm ki, mən ən mürəkkəb məsələlər haqqında bir neçə gün fikirləşmədikdə, bunlara mən yenidən nəzər saldıqda, onlar mənə asan görünürdü.

Əgər biz, öz ölçüsü ilə bizi heyrətləndirmiş əşyanı, onunla bircins olan daha böyük əşyaları tez-tez müşahidə etdikdən uzun müddət sonra yenidən görürüksə, o əşyaların doğurduğu təəssürat, bu əşyanın ölçüsünün kiçik olduğu təəssüratını yaratdıqda, onda biz bu təəssüratların fərqli olmasına təəccüblənirik.

Bəzi adamlar heyrətamiz yaddaşa malikdirlər. Eşitdikləri uzun söhbətləri onların dəqiqliklə təkrar etməsi bizi təəccübləndirir. Lakin insanların əksəriyyətinin yaddaşında hər şeyin qorunub qaldığı haqqında düşündükdə, yaddaşın bir-birilə qarışmadan nə qədər şeyi özündə saxlamasına daha da çox təəccüblənirsən. Səhnədə müğənniyə nəzər salın: onun yaddaşı onun rolunun hər bir sözünü, bunların ölçüsünü və hansı hərəkətlərlə müşayət ediləcəyini ona xatırladır. Əgər yeni rol birinci roldan sonra gəlirsə, onda birincisi sanki yaddaşdan silinir, yaddaş ikinci rolun bütün hissələrini lazimi şəkildə bərpa edir və müğənninin öyrənmiş olduğu bütün müxtəlif rolları oxşar şəkildə bərpa edə bilir. Sayı olduqca çox olan bu izlər və ya heç olmasa bu izləri doğura bilən hal, onun sensoriumunda bir-birinə qarışmadan mövcuddur və aktyor öz arzusu ilə bunları canlandıra bilir. Mən burada təkrar etməliyəm ki, *iz*, *obraz*, *dəyişikliklər* (rus. колебание) və s. sözləri ilə mən, yalnız, sensoriumun hallarını ifadə etmək istəmişəm və onların təbiəti və onların səbəbləri barədə heç bir mülahizə yürütmək fikrində olmamışam; bunu mexanikada effektlərin yalnız *güc*, *cazibə*, *oxşayış* və s. sözlərlər ifadə edilməsinə analoq kimi hesab etmək olar.

Sensoriumun təsirləri və sensorimun yerinə yetirmək üçün məcbur etdiyi hərəkətlər daha da yüngül və tez-tez təkrar olunduğundan təbii olur. Bu psixoloji prinsipdən bizim vərdişlərimiz yaranır. Simpatiya ilə müxtəlif cür birləşərək, o, özünəməxsus vərdişlər və adətlər, xüsusiyyətlər əmələ gətirir. Bu prinsipə əsasən hər hansı bir xalq digəri üçün ümumqəbul olunan nəyəsə dəhşətlə baxır. Romalıların ehtirasla sevdikləri qladiator döyüşləri və insan qurbanları vermə tamaşaları – xalqlar salnamələrini ləkələyən belə tamaşalar – bizə dəhşətli görünərdi. Hindistanda qulların acınacaqlı vəziyyətlərinə, parilərin alçaldılmasına, bizim bütün hisslərimizin dəlillərinə və ağlımıza zidd olan çoxsaylı etiqadların mənasızlığına baxdıqda, kədər hissi ilə görürsən ki, kölelik və xurafat insanları nə dərəcədə alçalda bilir.

Sensoriumun tez-tez təkrar olunmalar yolu ilə gələ bildiyi bu vəziyyət, insan orqanizmindən asılı olan meyllərdən yaranmış adətlərin fərqləndirilməsini olduqca çətinləşdirir; çünki, təbii olaraq, fikirləşirsən ki, heyvanlarda olduqca yayılmış və möhtəşəm olan instikt, insanlarda da tamamilə itmir və ananın övladına bağlılığı da məhz bu instikt nəticəsindədir. Adət və simpatiyanın ikiqat təsiri bu meylləri dəyişir və çox vaxt bunları möhkəmlədir; bəzən o, bunları o dərəcədə dəyişdirir ki, onlar özlərinə əks olanları ilə əvəz olunurlar. İnsanlar və heyvanlar üzərində aparılan və davamlı olaraq, aparılması böyük maraq kəsb edən bəzi müşahidələr, adətən, bizi belə fərz etməyə sövq edir ki, adətlərin sensoriuma böyük dayanıqlılıq vermiş olduğu dəyişikliklər atalarından övladlarına, bir çox üzvü bacarıqların keçilməsi kimi, nəsildən nəslə keçir.

Daimi təmrinlərin orqanlara sirayət etmiş olduğu asanlıqla şəklini dəyişmə xüsusiyyəti nəticəsində, bu orqanlar, iradə vasitəsilə ötürülmüş hərəkətləri öz-özünə yerinə yetirməkdə davam edir. Biz yolu getdiyimiz zaman, beynimiz hər hansı bir fikirlə məşğul olduğu halda, bizim hər bir andakı hərəkətimizi yeniləşdirən səbəb, bizim iradəmizin iştirakı olmadan təsir göstərir və biz bu barədə hətta heç düşünmürük. Belə hallar olmuşdur ki, yol getdiyi zaman yuxuya dalmış adamlar öz yollarına, yalnız hər hansı maneə ilə qarşılaşana qədər davam edirlər. Belə görünür ki, sanki belə gediş, hərəkət sisteminə yol getmək istəyi verən vəziyyətlə əlaqədar baş verir, bu da spiral yayın burulması nəticəsində saatın işləməsinə bənzəyir. Heyvani qənaətcillikdə pozuntu belə vəziyyəti yarada bilər. Gəzmə hərəkəti iradədən asılı olmadan baş verən xəstəliyə duçar olmuş bir xəstəni müalicə edən çox savadlı bir həkimdən mən öyrəndim ki, xəstə yalnız tərpənməyən dayaq nöqtəsindən tutarsa, o, dayana bilər. Beləliklə, həkimlər öz məharətlərini və dəqiq kritik münasibət bildirən riyaziyyatın və ehtimallar haqqında elmin xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi qabiliyyətini verən uzlaşan elmlərin bilgisini birləşdirdikdə, xəstəliklər üzərindəki müşahidələr psixologiyanı olduqca aydınlaşdıra bilər.

Sensoriumun izlərinin qarşılıqlı təsiri barədə bizim dediklərimizdən belə aydın olur ki, musiqi tez-tez təkrar olunması yolu ilə bizim hərəkətlərimizə öz ölçüsünün düzgünlüyü barədə məlumat verə bilər. Məhz bunu, biz, rəqslərdə və bu tərzdə tənzimlənən müxtəlif məşqlərdə hərəkətlərin bizə qeyri-adi görünən dəqiqliyini müşahidə edirik. Musiqi bu requlyarlığı ilə, adətən, bir çox adamın eyni zamanda yerinə yetirdikləri hərəkətləri yüngülləşdirir.

Olduqca gözəl psixoloji təzahür – diqqətin sensoriumun izlərinə güclü təsiridir. Bu təsir onların canlılığını artırır və kənardan olan müşayiətedici təəssüratları azaldır. Əgər biz əşyaya onun hansısa xüsusiyyətlərini fərqləndirmək məqsədilə çox diqqətlə baxırıqsa, onda bu diqqət bizi, gözün tor qişasına digər əşyalardan olan təəssüratlara qarşı hissiyyatsız edə bilir. Bu diqqətin köməyilə bizim müqayisə etmək istədiyimiz əşyaların obrazları yalnız onların münasibətlərinin bizim diqqətimizdə olması üçün zəruri güc əldə edir; o, bu müqayisəni edə biləcək yaddaş izlərini oyadır və bunun nəticəsində diqqət insan əqlinin möhtəşəm payına çevrilir.

Diqqət əşyaların hər hansı xüsusi bir keyfiyyətinə tez-tez yönəldikdə, o, orqanlara elə incə hissiyyat aşılayır ki, hər bir xüsusiyyət, hətta adi adam üçün sezilmədiyi halda belə, o, bu keyfiyyəti görməyə səbəb olur.

Bu prinsiplər mənzərələrin yaratdığı qəribə effektləri izah edir. Perspektiv qaydalara bunlarda yaxşı riayət olunmuşdursa, onda əşyalar gözün tor qişasında real olduğu kimi həkk olunur; onda tamaşa edən şəxs əşyaların reallıqda yarada bildiyi vəziyyətdəki vəziyətdə olur. Lakin perspektiv eyniliyin mükəmməl həddə çatması üçün kafi olan dəqiqliyə çata bilmir. Bundan başqa, kənar təəssüratlar, hətta zəifləri belə, perspektivin yaratdığı əsas təəssüratlara qarışaraq, əvvəlcə illüziyanı məhv edir. Mənzərəyə toparlanmış diqqət onları məhv edir; lakin bundan ötrü sensoriumun vəziyyətindən və mənzərənin mükəmməlliyindən asılı olaraq çox və ya az uzun zaman tələb olunur. Mənim gördüyüm bütün mənzərələrdə tam illüziya almaq üçün, zəruri olaraq, mənə bir neçə dəqiqəlik vaxt kifayət etmişdi.

Psixologiyanın növbəti prinsipi bu əsərin predmetinə birbaşa aidiyyatı olan təzahürlərin böyük əksəriyyətini izah edir: «Əgər sensoriumun xüsusi bir dəyişikliyindən yaranan hərəkətlər tez-tez təkrar olunarsa, onda onların bu orqana reaksiyası bu dəyişilməni yalnız artırmaq deyil, hətta bəzən onun səbəbi də ola bilir». Məsələn, sallanmış uzun bir zənciri tutan əlin hərəkəti zəncir boyunca onun axırıncı son nöqtəsinə qədər yayılır; və zəncir hərəkətsiz vəziyyətdə olduqdan sonra, onun bu ucunu hərəkətə gətirdikdə, zəncirdəki hərəkət ələ qədər qalxaraq, öz növbəsində onu hərəkət etdirəcəkdir. Bu qarşılıqlı hərəkətlər tez-tez təkrar olunduqda qarşılıqlı hərəkətlər yüngülləşir.

Bu prinsipin inama təsiri olduqca yaxşıdır. İnam və ya məlum təkliflə bizim razılığımız, adətən, aşkar-aydınlığa, hisslərin dəlillərinə və ya ehtimallara əsaslanır; bu sonuncu halda onun güc dərəcəsi ehtimalın nə dərəcədə olmasından asılıdır, bu isə öz növbəsində verilənlərdən – özünün mülahizə predmeti haqqında hər bir şəxsin malik ola bildiyi verilənlərdən asılıdır.

Biz tez-tez öz inamımızla həmahəng hərəkət edirik və onun dəlil-sübutlarını yada salmağa belə ehtiyac duymuruq. Deməli, inam sensoriumun dəyişilməsidir, bu dəyişilmə bu dəlil-sübutlardan asılı olmadan mövcuddur, hətta bunlar çox vaxt unudulmuş olur və bizi, onun təsir sonrası olan hərəkətləri yerinə yetirməyimizə sövq edir. Bizim indicə şərh etdiyimiz bu prinsipə görə bu hərəkətlərin tez-tez təkrar olunması bu dəyişilmələri yarada bilir, xüsusilə də, əgər bunlar çox sayda adamlar tərəfindən təkrar olunurlarsa, çünki, onların reaksiyalarının gücünə simpatiya üçün zəruri olan təqlidetmə hakimliyi birləşmiş olur. Bu hərəkətlər üzərimizə şərtlər qoyan bir öhdəçilik olduqda, onda bizim sağlamlığımız üçün ən əlverişli vəziyyət almağa sövq edən heyvani qənaətcilliyə can atmaq, həm də bizi inamlı olmağa təhrik edir və bu inam nəticəsində biz bu hərəkətləri zövq hissi ilə yerinə yetiririk. Bütün bu səbəblərin təsiri altına düşməyən insanların sayı azdır.

Paskal öz fikirlərinin bir fəslində bu effektləri çox yaxşı açıqlamışdır; bu fəslin özünəməxsus başlığı vardır: *Allahın varlığını təbii dərketmə yolu ilə isbat etmək olduqca çətindir və bu yolda ən doğru olanı – Ona inanmaqdır*. O, etiqadsızlara xitabən öz fikrini belə ifadə edir: «Siz dinə qovuşmaq istəyirsiniz və ona aparan yolu bilmirsiniz; siz inamsızlıqdan yaxa qurtarmaq istəyirsiniz və buna bir çarə yolunu soruşursunuz. Siz bu çarəni sizin kimi olanlardan və hazırda dini etiqada heç bir şübhəsi olmayanlardan öyrənin. Onlar sizin getmək istədiyiniz bu yolu getmişlər və onlar sizin sağalmaq istədiyiniz bu xəstəlikdən sağalmışlar. Onların başladıqları kimi başlayın. Onların daxili vəziyyətində hələ ola bilmirsinizsə, onların xarici hərəkətlərini təqlid edin; sizi son dərəcə məşğul edən bu boş əyləncələri atın. Siz deyirsiniz ki, əgər mən inansaydım, bu əyləncələri o anda hökmən atardım. Mən isə sizə deyirəm ki, əgər siz bu əyləncələri atmış olsanız, siz onda həmin anda mənə inana bilərdiniz. Başlanğıc sizin tərəfdən qoyulmalıdır. Əgər mən bacarsaydım, mən sizə bu inamı verərdim; mən bunu edə bilmirəm və deməli, sizin dediklərinizin doğru olduğuna inanmağı bacarmıram; siz isə əyləncələri tamamilə ata bilər və sınaqdan keçirə bilərsiniz ki, mənim dediklərim doğrudur, ya yox».

«Çaşmaq lazım deyildir: biz nə dərəcədə cismani bədəniksə, o dərəcədə də ruhuq; buradan alınır ki, hər hansı bir əqidəyə qovuşma vasitəsi yalnız sübut-dəlillərdən ibarət deyildir. Nə qədər az şey isbat olunmuşdur! İsbatlar yalnız ağlı inandıra bilir; vərdişlər bizim isbatlarımıza böyük güc verir. Bunlar bizim ruhumuzu əyləndirən hisslərimizi bizdən xəbərsiz müxtəlif hallara salır. Kim isbat etmişdir ki, sabah gün olacaqdır ki, biz öləcəyik. Başqa elə bir şey varmı ki, ona olan inam daha çox yayılmış olsun? Deməli, bizi inandıran vərdişdir; bu nə qədər insanı türk və bütpərəst edir, bu vərdiş bəzilərini sənətkar, digərlərini əsgər və s. edir. Doğrudur, həqiqətə* qovuşmaq üçün ondan başlanılmamalıdır, lakin ağıl həqiqətin harada olduğuna inanmışdırsa, həmişə bizim nəzərimizdən yayınan bu inama qovuşmaq və onun dərinliyinə varmaq və nurlanmaq üçün bu vərdişlərə müraciət gərəkdir; belə ki, həmişə hazır şəkildə olan dəlil-sübuta malik olmaq olduqca çətindir. Ən yüngül etiqada yiyələnmək lazımdır, beləsi – adət olunmuş etiqaddır, bu etiqad zor tətbiq olunmadan, isbat olunmadan, bacarıq tələb etmədən bizi nəyəsə inanmağa məcbur edir və bizim gücümüz bu etiqada sitayiş edir, odur ki, bizim ruhumuz təbii olaraq ona tabe olur. Əgər bizim hisslərimiz bizi əks istiqamətə yönəldirsə, yalnız inamın gücünə inanmaq kifayət deyildir. Ona görə də, bizim varlığımızın hər iki cəhəti işə salınmalıdır: ağıl – dəlillər vasitəsilə, o dəlillər ki, onları bir dəfə nəzərdən keçirmək kifayətdir və vərdişlər vasitəsilə, lakin hisslər bu zaman bu hisslərin zidd olanlara meyl etməsinə imkan verməlidir».

* burada Paskal unudur ki, o, elə indicə məsləhət görürdü ki, inama qovuşmaq üçün məhz xarici təsirlərdən başlanılmalıdır.

Paskalın etiqadsızları etiqada gətirmək üçün təklif etdiyi vasitə, uşaqlıqdan qazanılmış və vərdişdən asılı olaraq, kök salmış mövhumatı darmadağın etmək üçün müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilinər. Mövhumatların belə növü çox vaxt fəal təsəvvürlərdə ən sadə boş səbəbdən yaranır. Fərz edək ki, hər hansı bir şəxs *sol* sözü ilə bədbəxtlik haqqında fikri əlaqələndirir, hər gün sağ və sol əlin görə biləcəyi işi sağ əli ilə görür; bu vərdiş bu işdə sol əldən istifadəyə nifrəti o dərəcədə artıra bilər ki, ağıl bu mövhumat qarşısında gücsüz ola bilər. Bir çox cəhətdən qeyri-adi ağıla malik Avqustun özünü bir zəif cəhətinə görə qınadığını fərz etmək olar: o, yarmarkadan sonrakı gündə yola çıxmağa cürət etmirdi və o, bu zəifliyindən xilas olmaq istəyirdi. Lakin o, bədbəxt sayılan bu günlərdən birində gəzintiyə çıxmaq təşəbbüsündə olduğu anda öz-özünə belə deyə bilərdi ki, gəzintini təxirə salmaq *daha təhlükəsiz* olardı, o, bu hissin təsiri altında olma vərdişi ilə bu tərzdə öz nifrətini daha da artırırdı. Bu mövhumatlara zidd hərəkətlərin tez-tez təkrarlanması, zaman ötdükcə onları zəiflətməli və tamamilə yox olmağa məcbur etməlidir.

Bizim çox vaxt minnətdar olduğumuz insanlara hiss etdiyimiz bağlılıq, bizim indicə inkişaf etdirdiyimiz prinsipdən alınır. Onların hərəkətlərinin tez-tez təkrarlanması təbii nəticəsi onların özü olan hissi onların xeyrinə çoxaldır və hətta bəzən də onu doğurur. Hər hansı bir şeyə meyllilik, bizi onu dəfələrlə təkrar etməyə məcbur edən hərəkətlər, bu meylliliyi bir ehtirasa çevirir.

Əvvəldə qeyd etdiklərimizdən görünür ki, bizim etiqadımız bizim vərdişlərimizdən nə dərəcədə asılıdır. Məlum növ ehtimallara əsasən hərəkət etməyə və mühakimə yürütməyə vərdiş etdiyimizdən, biz bu ehtimalları instiktiv olaraq dəstəkləyir və bunlar bizi mülahizə və ya hesablama nəticəsi olan daha yüksək sayılan ehtimallardan daha çox inandırır. Doğruyaoxşar olmayan şey bizi çox vaxt şübhələndirir: əgər o, bizim adət etdiyimiz ehtimallara zidd olursa, biz onu tərəddüd etmədən nəzərə almırıq. İllüziyaların bu səbəbini mümkün olduqca zəiflətmək üçün əqlə təsəvvür və hisslərin köməyi olmalıdır. Uyğun ehtimalları əyrilər şəklində təsvir edəriksə, biz bunların fərqini olduqca yaxşı hiss edə bilərik. Qeyri-adi faktı möhkəmlədən şahid ifadəsinin ehtimalını təsəvvür edən əyri, bu faktın doğruyaoxşar olmağını təsvir edən əyri ilə yanaşı yerləşdirildikdə, bu şahid ifadəsinin səhv ehtimal olduğunu çox nəzərə çarpdırardı, necə ki, dağların hündürlüyü təsvir olunmuş şəkil, bu hündürlüklərin bir-birilə nə cür nisbətdə olduğu haqqında təsəvvür yaradır. Bu vasitə bir çox hallarda tətbiq oluna bilinər. Kainatın hüdudsuzluğunu hiss etmək üçün, millimetrin onda bir hissəsini Fransa ərazisinin ən böyük uzunluğu ilə – demək olar ki, çox kiçik bir kəmiyyətlə ifadə edək; Yerdən Günəşə qədər məsafə on dörd metrə bərabər olacaqdır; ən yaxın ulduza qədər olan məsafə bir milyon yarım metrdən də artıq olacaqdır, yəni ən yuxarı nöqtədən gözlə görünən ən geniş üfüqün radiusunun yeddi və ya səkkiz mislinə bərabər olacaqdır. Hətta bununla belə, ən parlaq ulduzlardan sonsuzluğa qədər uzanan kainatın böyüklüyünün yalnız ən zəif mənzərəsini ala biləcəyik. Lakin bu mənzərənin zəifliyinə baxmayaraq, bu kifayət edir ki, insanın bütün təbiət üzərində üstünlüyü haqqında təsəvvürlərinin – bu dərəcədə qəribə nəticələr çıxarılmış təsəvvürlərin mənasızlığını, hiss etməyə məcbur etsin.

Nəhayət, psixoloji prinsip kimi gümanların ehtiraslarla artmasını göstərək. Bizim ən çox qorxduğumuz və ya arzu etdiyimiz şey, bizə, məhz buna görə də, daha ehtimallı görünür. Sensoriumda onun güclü həkk olunmuş obrazı zidd gümanların təəssüratlarını zəiflədir və bəzən onları o dərəcədə hamarlaşdırır ki, bizi bu şeyin baş verdiyinə inanmağa belə məcbur edir. Mülahizələr və zaman, bu hisslərin canlılığını azaldaraq, əqlə hadisələrin ehtimallarının düzgün qiymətləndirilməsi üçün zəruri olan sakitliyi bərqərar edir.

Sensoriumdakı bütün dəyişikliklər, bütün hərəkətlər kimi dinamikanın qanunlarına tabedirlər və bunu təcrübə də sübut etmişdir. Bunların əzələ sisteminə ötürdüyü hərəkətləri bu sistem kənar cisimlərə ötürür, bu – yayın açılmasında olduğu kimi baş verir və bu hərəkətlər belədir ki, bizim bədənimizin və onun hərəkətə gətirdiklərinin ümumi ağırlıq mərkəzi tərpənməz qalır. Bu dəyişikliklər, mayedə dalğaların birləşdiyi kimi bir-birilə qarışmadan yığılır. Səs verən cismin rəqsləri onun əhatəsindəki cisimlərə sirayət etdiyi kimi, bu dəyişmələr də insanlara sirayət edir. Mürəkkəb ideyalar sadələrdən yaranır, necə ki, dəniz qabarması Günəş və Ayın təsiri ilə yaranan hissəvi qabarmalardan

yaranır. Bir-birinə əks olan niyyətlər arasındakı tərəddüd bərabər qüvvələrin tarazlığıdır. Sensoriumda yaranan ani dəyişikliklər müqavimətlə qarşılaşır, bu müqaviməti də maddi sistem oxşar dəyişikliklərə qarşı qoyur; və əgər biz sarsıntılara məruz qalmamaq və canlı qüvvəmizi itirmək istəmiriksə, onda elə bu sistemdəki kimi, hiss edilməyəcək keçidlər vasitəsilə hərəkət etməliyik. Gərgin və davamlı diqqət sensoriumu əldən salır, necə ki, elektirik zərbələri dirəklərin voltlarını və ya elektrik cərəyanı balıqların orqanlarını zəiflədir. İntellektual şeyləri hiss olunan etmək üçün, maddi cisimlərdən bəhs etdiyimiz müqayisələlərin, demək olar ki, hamısı mahiyyət etibarilə eyniliklərdir.

Mən arzu edirəm ki, əvvəlki düşüncələrimiz, fikirlərimiz özünün mükəmməl olmamasına baxmayaraq, tədqiqatçı filosofların diqqətini sensoriumun qanunlarına və ya intellektual aləmə cəlb edəydi, – o qanunlara ki, onların məğzinə varmaq, fiziki aləmin qanunlarına varmaq kimi, bizim üçün o qədər də önəmlidir. Bu iki aləmin təzahürlərinin izahı məqsədilə müəyyən dərəcədə bir-birinə oxşar hipotezlər fikirləşmişlər; lakin bu hipotezlərin əsası bizim bütün tədqiqat və hesablama üsullarından yayındığına görə, bunlar haqqında Montenlə birgə belə söyləmək olar ki, *cahillik və hər şeyi öyrənmək həvəsinin olmaması – iki yumşaq yastıqdır ki, düşünə bilən başı uyutsun*.

Yəqinliyə yaxınlaşmanın müxtəlif üsulları

İnduksiya, faktlara söykənən və yeni müşahidələrlə həmişə yoxlamalara əsaslanan hipotezlərin analogiyası, bunların göstərişləri ilə təcrübənin hər dəfə müqayisə olunması ilə əsaslandırılan xoşbəxt təbii fakt, – budur gerçəkliyə qovuşmanın əsas vasitələri.

Əgər bircins əşyalara diqqətlə baxılarsa, onda bunlar arasında və onlardakı dəyişikliklərdə elə münasibətləri görmək olar ki, bu müşahidələri davam etdirdikcə, bunlar getdikcə daha çox aşkar olunur və bu münasibətlər daima daha çox yayılaraq və ümumiləşərək, sonda onların yaranmış olduqları prinsipə gətirir. Lakin əksər hallarda bu münasibətlər o qədər kənar təsirlərlə görünməz olur ki, bunları seçib ayırmaq və bu prinsipə gəlib çatmaq üçün həddən artıq ağıl tələb olunur: əsl elm dahisi bunlarla səciyyələnir. Analiz və natural fəlsəfə özünün mühüm kəşflərinə görə *induksiya* adlanan məhsuldar metoduna borcludur: Nyüton özünün binom haqqındakı teoremi və ümumdünya prinsipinə görə bu metoda borcludur. Ən sadə münasibətlərin mahiyyətcə ən adi münasibətlər olduğuna, analizdə alınan təsdiqlənmiş düsturlara və təbii proseslərdə, o cümlədən, kristallaşmada, kimyəvi birləşmələrdə tapdıqlarımıza əsaslanan induksiya nəticələrinin ehtimallarını qiymətləndirmək çətindir. Münasibətlərin belə sadəliyi, əgər nəzərə alınarsa ki, təbiətdə bütün baş verənlər, – çox olmayan dəyişməz qanunların riyazi nəticələrindən başqa bir şey deyildir.

Lakin elmin ümumi prinsiplərini kəşf etməyə imkan verən induksiya onların dəqiqliyini müəyyənləşdirmək üçün kifayət etmir. Bunlar hələ isbatlarla və ya son təcrübələrlə təsdiq olunmalıdır, belə ki, elm tarixi bizə göstərir ki, induksiya bəzən dəqiq olmayan nəticələrə gətirmişdir. Sadə ədədlər haqqında Fermatın bir teoremini misal çəkmək istəyirəm; bu dahi həndəsəçi bu ədədlərin nəzəriyyəsinə dərindən diqqət yetirərək, elə bir düstur axtarırdı ki, bu düstur yalnız sadə ədədlərlə ifadə olunaraq, əvvəlcədən verilən ixtiyari ədəddən böyük olan sadə ədədi bilavasitə tapmaq üçün istifadə oluna bilsin. İnduksiya onu belə fikrə gətirmişdi ki, ikinin qüvvət üstünə bərabər qüvvətə yüksəldimiş iki rəqəmi üzərinə vahid əlavə edildikdən sonra alınan ədəd sadə ədəddir. Məsələn, kvadrata yüksəldilmiş iki, üstəgəl vahid sadə ədəd – beşə bərabərdir: ikinin kvadratına yüksəldilmiş iki və ya on altı üstəgəl vahid onyeddiyə bərabərdir. O tapmışdı ki, bu, hətta, ikini səkkiz və onaltıncı dərəcədən qüvvətə yüksəlib, vahid əlavə etdikdən sonra alınan ədədlərin sadə ədədlər alınması ilə təsdiq olunan üsul – doğru üsuldur; və bu induksiya bir çox arifmetik mülahizələrə əsaslandığından bu nəticəyə, o, ümumi bir nəticə kimi baxmaq fikrinə gəlmişdi. Lakin o etiraf edir ki, o, bu nəticəni isbat etməmişdir. Əslində, Eyler tapmışdı ki, bu müddəa ikini ötuz dərəcədən qüvvət üstünə yüksəldib, vahid əlavə etdikdə yerinə yetmir, belə ki, alınan 4 294 967 297 ədədi sadə ədəd olmayıb, 641-ə bölünür.

Biz induksiyaya əsasən fikirləşirik ki, əgər, məs., müxtəlif hadisələr, hərəkətlər, uzun müddət ərzində sadə münasibətlə əlaqələnmiş şəkildə daima baş verirsə, onda onlar bu münasibətə həmişə tabe olaraq baş verəcəklər: buradan isə biz ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanaraq, belə nəticə çıxarırıq ki, bu münasibət təsadüfdən deyil, requlyar səbəbdən asılıdır. Beləliklə, Ayın dövr etmə və fırlanma hərəkətlərinin bərabərliyi, Ay ekvatorunun və orbitinin düyünlərinin hərəkətlərinin bərabərliyi və bu düyünlərin üst-üstə düşməsi; Yupiterin üç ilk peykinin hərəkətləri arasındakı xüsusi münasibət: – birinci peykin orta uzunluq dairəsi minus ikincinin orta uzunluq dairəsinin üç misli plyus üçüncünün uzunluq dairəsinin iki misli iki düz bucağa bərabərdir; Ayın meridiandan keçdiyi anlar arasındakı zamanın qabarma və çəkilmə arasındakı müddətlərin bərabərliyi; ən güclü qabarma və çəkilmələrin sizigiyalarla birlikdə ən kiçiklərinin isə kvadraturları ilə qayıtması, – bütün bunlar tətbiq olunmağa başlanıldığından dəyişməyən səbəblərin varlığını hədsiz doğruyaoxşarlıqla göstərir; və bu səbəbləri ümumdünya cazibə qanunu ilə əlaqələndirmək həndəsəçilərə müyəssər olmuşdur, bunu bilmək isə münasibətlərin qeyd olunan sabitliyini yəqinliyə çevirir.

Əsl fəlsəfi metodun fəal tərəfdarı və gözəl natiq – Kansler Bekon, olduqca qəribə tərzdə induksiyadan sui-istifadə edib ki, Yerin hərəkətsizliyini isbat etsin. O, özünün əsərlərindən ən dəyərlisi – *Novum organumda* belə mühakimə edir. Səyyarələrin şərqdən qərbə hərəkəti Yerdən uzaqlaşdıqca daha sürətli olur. Bu hərəkət ulduzlar üçün daha sürətlidir: Saturn üçün bu hərəkət bir az, Yupiter üçün bir az çox və s. yavaşıyır, Aya qədər və daha yüksəklikdəki kometlər üçün də bu belə davam edir. Bu atmosferdə də görünür, xüsusilə də, tropiklər arasında havanın molekulları ilə yaranan böyük dairələr nəticəsində; nəhayət, okean üçün bu, demək olar ki, görünmür; odur ki, bu hərəkət Yer üçün sıfra bərabərdir. Lakin bu induksiya yalnız onu sübut edir ki, Saturn və ondan aşağıdakı səyyarələr öz məxsusi hərəkətlərinə malikdirlər və bu hərəkətlər həqiqətdə olduğuna əks və ya Şərqdən Qərbə bütün Göy qübbəsini zəbt etmiş kimi görüntüsü və daha uzaq səyyarələr üçün daha yavaş hərəkət görüntüsünü verir və bu da optik qanunlarla uzlaşır. Əgər Yer hərəkətsiz olsaydı, səyyarələrin öz birgünlük dövrünü başa vurması üçün onların hərəkətlərinin sürətləri ağlasığmaz olmalıydı ki, bu da Bekonu heyrətləndirmiş olardı, əgər Yerin fırlandığı fərz olunardısa, o, bir-birindən olduqca uzaq cisimlərin – ulduzlar, Günəş, planetlər və Ayın bu fırlanmaya tabe olduqları kimi olduqca sadə izahına da çox təəccüblənmiş olardı. Okean və atmosferə gəldikdə, Bekon bunların hərəkətlərini Yerdən çox uzaq səyyarələrin hərəkətlərinə bənzətməməliydi, belə ki, hava və dəniz Yer kürəsinin bir hissəsi olduğundan, onun hərəkətini və ya hərəkətsizliyini paylaşmalıdırlar. Çox təəssüf doğurur ki, çox yüksək nöqteyi-nəzərlərə öz dühası ilə diqqət yetirən Bekon kainat haqqında Kopernik sisteminin möhtəşəm təsəvvürünə maraq göstərməmişdi. Əgər o, bu marağı göstərmiş olsaydı, bu sistemin xeyrinə ona məlum olan Qaliley kəşflərində güclü analoqlar tapa bilərdi. Həqiqəti tədqiq etmək üçün o, məsləhətlər verirdi, lakin misal göstərmirdi. Diqqətin müşahidə və təcrübələrə cəlb olunması üçün o, öz dəlil-sübutları və gözəl natiqlik qabiliyyəti ilə, məktəbin boş incəliklərdən imtina etməsi zəruriliyində təkid edərək və təzahürlərin ümumi səbəblərinə keçməyin əsl metodunu göstərərək, bu dahi filosof, ömrünü başa vurduğu o gözəl əsrdə, insan ağlının nail olduğu möhtəşəm uğurlara səbəb olmuşdu.

Analogiya belə ehtimala əsaslanır ki, oxşar şeylər bircins səbəblərdən baş verir və eyni nəticələrə malikdirlər. Bu oxşarlıq mükəmməl olduqca, bu ehtimal da o dərəcədə artır. Odur ki, biz şübhə etmədən belə qərara gəlirik ki, eyni orqanlara malik varlıqlar eyni hisslər keçirirlər və eyni istəklərlə hərəkət edirlər. Öz orqanları üzrə bizə yaxın heyvanların bizim hissiyyatımıza analoji hissiyata malik olması ehtimalı bizim növdən fərdlərə aid ehtimaldan kiçik olsa da, hələ də olduqca böyükdür və bəzi filosofları, heyvanların sadə avtomatlar olduqlarını düşünməyə məcbur etmək üçün, bütün dini xürafatın təsiri lazım olmuşdu. Heyvanların orqanlarının bizim orqanlara oxşarlığı azaldıqda, onlarda hissiyyat olması da azalır; bununla belə, bu ehtimal hətta həşəratlar üçün çox böyükdür. Eyni növ həşəratların nəsildən-nəslə, tamamilə eyni tərzdə, olduqca mürəkkəb hərəkətlər yerinə yetirdiklərini görərək, biz onlardan öyrənməyərək, belə düşünməyə meylliyik ki, onlar məlum növ

yaxınlığa görə hərəkət edirlər; bu – kristalların molekullarını yaxınlaşdıran yaxınlığa analogiyadır, lakin bu yaxınlıq bütün canlı orqanizmlərə xas olan hissiyyatla qarışaraq, kimyəvi birləşmələrə xas olan düzgünlüklə daha çox qeyri-adi birləşmələr yaradır: seçici yaxınlıq və hissetmənin bu qarışığını, bəlkə də, *heyvani oxşarlıq* adlandırmaq olardı. Bitki və heyvanların quruluşu arasında çoxlu analogiya olmasına baxmayaraq, mənə belə gəlir ki, bitkilərin hissiyata malik olduğunu düşünmək üçün bu kifayət etmir; lakin bunu istisna etməyə də heç bir şey bizə haqq vermir.

Günəş öz işığı və istisi ilə Yer üzündəki canlılara və bitkilərə yaxşı təsir etdiyindən, biz, analoji olaraq, belə düşünürük ki, o, digər planetlərə də belə təsir göstərir: belə ki, gördüyümüz kimi fəaliyyəti hərtərəfli inkişaf edən materiyanın Yupiter kimi böyük bir planetdə inkişafsız qaldığını düşünmək qeyri-təbii olardı; bu planetin Yer kürəsi kimi öz gündüzləri, öz gecələri və öz illəri vardır və burada aparılan müşahidələrə görə olduqca fəal qüvvələrin olduğu gümanı verən dəyişikliklər baş verir. Lakin buradan planetlərin və Yer sakinlərinin oxşarlığı barədə nəticə çıxarmaq analogiyanın olduqca genişləndirilməsi olardı. Nəfəs aldığı atmosferə və yaşadığı temperatura öyrənmiş insan, məncə, digər planetlərdə yaşaya bilməzdi. Bizim kainatın aləmlərinin müxtəlif şəraitlərinə uyğun orqanizmlərinin sonsuz bir çoxluğu mövcud ola bilməzmi? Əgər yalnız mühit və iqlimdəki fərq Yerin xəlq olunmuşlarına belə müxtəliflik verirsə, onda müxtəlif planetlərin və onların peyklərinin xəlq olunmuşları nə dərəcədə çox fərqlənməlidirlər? Ən güclü təsəvvür belə bunlar haqqında heç bir təsvir yarada bilməz; lakin onların mövcudluğu olduqca doğruyaoxşardır.

Güclü analogiya bizi ulduzlara, bizimkinə oxşar, kütləsinə mütənasib cazibə qüvvəsinə malik və məsafələrinin kvadratına isə tərs mütənasib olan günəşlər kimi baxmağa sövq etdirir. Çünki, bu qüvvə Günəş sisteminin bütün cisimləri və onların ən kiçik molekulları üçün isbat olunmuşdur, onun bütün materiyaya xas olduğu güman edilir. Bir-birinə yaxın olduğundan, *əkiz* adlandırılan kiçik ulduzların hərəkətlərindən artıq görünür ki: bunların qarşılıqlı cazibəsinin olduğunu heç bir şübhə altına almamaq üçün, bunların bəzilərinin digərləri ətrafında dövretmə hərəkətini təsdiq edən, ən çoxu bir yüzillik, dəqiq müşahidələr aparılmalıdır.

Bizi hər bir ulduzu planet sisteminin mərkəzi kimi fərz etməyə sövq edən analogiya əvvəlki analogiyadan daha az güclüdür, lakin o, bizim ulduzlar və Günəşin yaranması barədə təklif etdiyimiz hipotezə əsasən doğruyaoxşar olur; çünki bu hipotezə görə hər bir ulduz, Günəş kimi, əvvəlcə geniş bir atmosferlə əhatə olunmuşdu, təbii olaraq, bu atmosferə də Günəşi əhatə etmiş atmosferdə baş verənləri şamil etmək olar və fərz etmək olar ki, bu atmosferin sıxılması nəticəsində planetlər və peyklər əmələ gəlmişdir.

Çoxlu elmi kəşflərə görə biz analogiyaya borcluyuq. Elektrik təzahürlərinin ildırım effektlərilə analogiyası atmosfer elektrikin kəşfi kimi ən gözəl bir kəşfə səbəb oldu.

Həqiqət axtarışında ən doğru metod, – induksiyanın köməyilə hadisələrdən qanunlara, qanunlardan qüvvələrə keçməkdən ibarətdir. Qanunlar, məhz, ayrı-ayrı təzahürləri bir-birilə əlaqələndirən münasibətlərdir: bunlar yarandıqları qüvvələrin ümumi prinsipini açıqladığı zaman, əgər mümkünsə, bu prinsipi ya bilavasitə təcrübələrlə yoxlayırlar, ya da ki, o, məlum təzahürlərlə uzlaşdığını tədqiq edirlər; əgər ciddi analiz vasitəsilə bütün bunların ən kiçik xırdalıqlarına qədər bu prinsipdən alındığına əmin olurlarsa, əgər bundan başqa bunlar olduqca müxtəlif və çoxdurlarsa, onda elm ona müyəssər ola bilən mükəmməlliyi və ən yüksək dərəcəli yəqinliyi qazanmış olur. Ümumdünya cazibəsinin kəşfi astronomiyanın belə olmasına səbəb olmuşdur.

Elm tarixi göstərir ki, induksiyanın keçmiş olduğu bu çətin və uzun yol hər zaman kəşf edənlərin yolu olmamışdır. Səbəbləri müəyyənləşdirməyə səbrsizliklə tələsən təsəvvür, hipotezlər irəli sürməyi sevir; əksər hallarda onun irəli sürdüyü bu hipotezlərə faktları tabe etmək üçün o, bu faktları təhrif edir; onda bu hipotezlərin nəzərə alınması təhlükəlidir. Lakin bu təzahürlərin qanunlarını aydınlaşdırmaq üçün bu hipotezlərə yalnız onları bir-birilə əlaqələndirən vasitə kimi baxılarsa, onlara reallığı şamil etməkdən yayınmaq istədikdə, onlar daima yeni müşahidələrlə düzəldilir, bunlar əsl səbəblərə çatdıra bilir və ya bizə, heç olmasa, müşahidə olunmuş təzahürlərdən verilmiş şəraiti doğuracaq təzahürləri müəyyən etmək imkanını yaradır.

Təzahürlərin səbəbləri barədə təklif ediləcək bütün hipotezləri biz yoxlasaq, biz xaricetmə yolu ilə doğru hipotezi müəyyən edə bilərik. Bu qayda uğurla tətbiq olunurdu: bəzən bütün məlum faktları eyni cürə yaxşı izah edən bir neçə hipotezlər müəyyən olunurdu və bunlar barədə alimlər o vaxta qədər fikir ayrılığında olurdular ki, həlledici tədqiqatlar doğru hipotezi müəyyən etmiş olsun. Onda insan ağlının tarixi üçün maraq kəsb edən odur ki, bunların köməyilə çoxlu faktlar izah oluna bilinsin və təbiətlə uzlaşmaq üçün onların məruz qala biləcəkləri dəyişikliklər təyin edilə bilinsin. Beləliklə, bizə Göyün yalnız görə bildiyimizin təsvirini verən Ptolomey sistemi, planetlərin Günəş ətrafında hərəkət etdiyi hipotezinə gətirir, lakin bu halda Ptolomey, dairələri və episiklləri Günəş orbitinə bərabər və paralel götürürdü və bunları o, hər il qeydə almağa məcbur edirdi və bununla belə, o, bunların qiymətlərini qeyri-müəyyən saxlayırdı. Bu hipotezi dünyanın əsl sisteminə çevirmək üçün sonradan Günəşin gördüyümüz hərəkətini tərs mənada Yerə şamil olunmalıdır.

Bu müxtəlif üsullarla alınmış nəticələrin ehtimallarını hesablamaq, demək olar ki, həmişə mümkün olmur: bu, oxşar surətdə tarixi faktlar üçün də belədir. Lakin izah olunmuş təzahürlərin və ya sübutların toplusu bəzən elə olur ki, onların ehtimallarını qiymətləndirmək mümkün olmadıqda, onlar barədə hər hansı bir şübhəyə yol vermək əsassız olardı. Digər hallarda onları yalnız böyük bir ehtimalla soyuqqanlılıqla qəbul etmək məsləhətdir.

Ehtimal hesabının tarixi oçerki

Ən sadə oyunlarda oyunçular üçün əlverişli və ya əlverişsiz mümkün halların nisbətləri artıq çoxdan təyin olunmuşdu: oyüna qoyulan məbləğ və məmc bu nisbətlərə uyğun olaraq, müəyyən olunurdu. Lakin Paskal və Fermata (P. Fermat, 17-ci əsr) qədər bu predmetə hesablama metodları və prinsiplərini hələ heç bir kəs verməmişdi və bu növ heç olmasa bir neçə məsələlər həll olunmamışdı. Buna görə də, ehtimal haqqında elmin ilk elementləri bu iki dahi həndəsəçiyə şamil olunmalıdır, onun bir elm kimi kəşfi insan ağlına ən çox şərəf gətirmiş XVII əsri əlamətdar edən ən gözəl hadisələr arasında yer almalıdır. Onların müxtəlif yollarla həll etdikləri əsas məsələ, bizim əvvəldə gördüyümüz kimi, ondan ibarətdir ki, oyuna qoyulan məbləğ eyni bacarıqlı oyunçular arasında ədalətlə bölünsün və onlar oyun başa çatmamış partiyanı bir az tez qurtarmağı şərtləşsinlər; oyunun şərti ondan ibarətdir ki, partiyalarda uduş üçün birinci oyunçu verilən sayda xal toplamalıdır. Aydındır ki, bu bölüşdürülmə oyunçuların bu partiyanı udmalarının nisbi ehtimallarına mütənasib başa çatdırmalıdır; bu ehtimallar onlara udmaq üçün çatışmayan xallardan asılıdır. Paskal metodu çox incə bir metoddur və mahiyyət etibarilə bu məsələnin xüsusi fərqlərlə tənliyi olub, oyunçuların uduş ehtimallarının ardıcıl təyin olunması üçün kiçik ədədlərdən sonra gələn ədədlərə keçirilərək tətbiq olunur. Bu metoda yalnız iki oyunçu halı üçün baxılmışdı: birləşmələrə əsaslanan Fermat metoduna ixtiyari sayda oyunçu üçün baxılmışdı. Paskal əvvəlcə belə fikirləşirdi ki, bu metod onun özününkü kimi yalnız iki oyunçu üçündür; buna görə də, onlar arasında mübahisə yaranır, bu mübahisənin sonu – Paskalın, Fermat metodunun ümumi olduğunu etiraf etməsilə nəticələnir.

Hüygens artıq həll olunmuş müxtəlif məsələləri toplayaraq və yenilərini də əlavə edərək, bu predmet haqqında birinci traktatında onları da buraya daxil etmişdi; traktakt belə adlandırılmışdı: «*De Ratiociniis in Ludo alea*». Bundan sonra, bu məsələlərlə bir çox həndəsəçilər məşğul olmağa başladılar: Huds (Huddes) və Hollandiyada dahi pensionariy Vitt və İngiltərədə Halley hesablamaları insan həyatı ehtimallarına tətbiq etdilər və Halley, bu məqsədlə, ilk ölüm cədvəlini nəşr etdirdi. O ərəfədə Yakov Bernulli həndəsəçilərə ehtimallar haqqında müxtəlif məsələlər təklif etdi və sonradan onların həllərini də o, özü verdi. Nəhayət, o, «Ars conjectandi» adlı özünün gözəl bir işini yazdı ki, bu əsər 1706-da onun ölümündən yeddi il sonra işıq üzü gördü. Ehtimal haqqında elmə, burada Hüygensin işi ilə müqayisədə, daha dərinliklə baxılmışdı: müəllif burada birləşmələrin və cəmlərin ümumi nəzəriyyəsini verir və o, bu nəzəriyyəni təsadüflərlə

əlaqədar bir çox çətin məsələlərə tətbiq edir. Bu iş özünün doğru-düzgünlüyü və nöqteyi-nəzərlərinin incəliyi ilə, bu qəbildən məsələlərdə binom düsturunun istifadə olunması və aşağıdakı teoremin isbatı ilə çox gözəldir: müşahidələr və sınaqlar qeyri müəyən sayda təkrar olunduqda, müxtəlif növ hadisələr nisbəti limitdə bu hadisələrin uyğun mümkünlükləri nisbətinə yaxınlaşır və bu müşahidələr və sınaqların sayı artdıqca onlar arasındakı fərq azalaraq, əvvəlcədən verilmiş bir ədəddən kiçik olmağa başlayır. Müşahidələrin, qanunların və təzahürlərin səbəblərinin dərk olunması üçün bu teorem olduqca yararlıdır. Bernulli haqlı olaraq, bu teoremin isbatına böyük əhəmiyyət verirdi; onun dediyinə görə o, bu isbatı iyirmi il ərzində təfərrüfatı ilə düşünmüşdü.

Yakov Bernullinin ölümü ilə onun əsərinin nəşri arasındakı müddət ərzində Monmort və Moavr (Muavr) ehtimal hesabı haqqında iki traktat nəşr etdirdilər. Monmort əsərini «*Essai sur les geix de hazard*» adlandırmışdı: burada ehtimal hesabının müxtəlif oyunlara çoxsaylı tətbiqi verilirdi. Bu əsərin ikinci nəşrinə müəllif, Bernullinin bir çox çətin məsələlərinin incə və səlis həlləri verilən məktublarını əlavə etmişdi. Monmortun traktatından sonra çıxmış Moavrın traktatı, 1711-də, əvvəlcə «*Transactions philosophiques*»-də nəşr olunmuşdu. Sonradan müəllif onu ayrıca nəşr etdirmiş və üç ardıcıl nəşrlərdə onu mükəmməlləşdirərək dərc etdirmişdi. Bu iş, əsas etibarilə, binom düsturuna əsaslanmışdı və buradakı məsələlər və onların həlləri olduqca ümumi xarakter daşıyır. Bu işin səciyyəvi cəhəti – qayıdışlı sıralar nəzəriyyəsi və onların bu sahədə tətbiqidir. Bu nəzəriyyə – sabit əmsallarlı, sonlu fərqlərlə xətti tənliklərin inteqrallanmasıdır, elə bir inteqrallama ki, Moavr ona çox uğurlu bir üsulla nail olur.

Moavr öz əsərində çoxsaylı müşahidələrlə təyin olunmuş nəticələrin ehtimalları haqqında Yakov Bernulinin teoreminə yenidən müraciət edir. O, Bernulli kimi baş verəcək hadisələr nisbətinin onların uyğun mümkünlük nisbətlərinə sonsuz olaraq yaxınlaşdığı isbatı ilə kifayətlənmir; o, ehtimalın daha sadə və gözəl ifadəsini verir: bu iki nisbətlər arasındakı fərq verilən sərhədlər arasındadır. Buna görə o, binomun ayrılışındakı ən böyük dərəcəli ən böyük həddin onun bütün hədlərinin cəminə nisbətini və bu həddin yaxın hədlərdən artıq hissəsinin hiperbolik loqarifmini təyin edir. Ən böyük hədd bu halda çox sayda vuruqların hasili olduğundan, onun ədədi qiymətini təyin etmək mümkün olmur. Onun yığılan bir yaxınlaşmasını ala bilmək üçün Moavr binomun yüksək dərəcəyə yüksəldilmiş orta həddi haqqında Stirlinq teoremini tətbiq edir; bu teorem onunla dəyərlidir ki, bu teorem çevrə uzunluğunun onun radiusuna nisbətinin kvadrat kökünü, məncə, bu transsendentliyə yad olan ifadəyə daxil edir. Moavr özü bu nəticəyə olduqca təəccüblənmişdi, Stirlinq bu nəticəni çevrənin ifadəsindən sonsuz hasillərin vasitəsilə ala bilmişdi; çevrə üçün bu ifadəni Vallis olduqca faydalı və maraqlı – müəyyən inteqrallar nəzəriyyəsinin rüşeymlərini tərkibində saxlayan xüsusi bir analizin köməyi ilə almışdı.

Bir çox alimlər, o cümlədən, *Déparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maur, Simpson, Sussmilch, Messéne, Moheau, Price, Baily* və *Duvillard,* əhali, doğum, nigah, ölüm haqqında çoxlu sayda dəyərli məlumatlar toplamışdılar. Onlar ömürlük təqaüd, tontin, sığorta ilə əlaqədar düsturlar və cədvəllər vermişdilər. Lakin mən, bu qısa yazımda, bu original ideyalara keçmək üçün mənim üçün faydalı olmuş işləri yalnız qeyd edə bilərəm. Riyazi və mənəvi gözləmələrin qiymətləndirilməsi, həm də mənəvi gözləmənin analizə tabe olması üçün Daniil Bernullinin vermiş olduğu incə prinsip belə işlərdəndir. Çiçək peyvəndlənməsinə ehtimal hesabının uğurlu tətbiqi də onların belə işlərindən biridir. Xüsusilə də, müşahidə olunmuş hadisələrdən alınmış hadisələrin mümkünlüklərinin bilavasitə baxılması bu original ideyalar sırasına aid olunmalıdır. Yakov Bernulli və Moavr bu mümkünlüklərin məlum olduğunu fərz edirdilər və gələcək sınaqların nəticəsinin onların ifadə oluna biləcəyi bir nəticəyə getdikcə yaxınlaşacağı ehtimalını axtarırdılar. Beyes (Bayes) 1763-ün «Transactions philosophiques»-ində aparılmış sınaqlar nəticəsində artıq alınmış olan mümkünlüklərin verilən sərhədlər arasında olduğu ehtimalını bilavasitə tapmaq istəyirdi və o, bu arzusuna bir az qarmaqarışıq olsa da, çox incə və səlis bir üsulla nail ola bildi. Bu predmet müşahidə olunmuş hadisələrdən alına bilinən gələcək hadisələrin və səbəblərin ehtimal nəzəriyyəsinə, – mümkün ola bilmələr arasında ola bilən bərabərsizliklərin təsviri haqqında qeydlə, bir neçə il sonra prinsiplərini şərh etdiyim nəzəriyyəyə yaxındır. Bu bərabərsizliklər üçün hansı hadisələrin əlverişli olduğunu bilmədiyimizə baxmayaraq, bu bilgisizlik əksər hallarda mürəkkəb hadisələrin ehtimalını artırmış olur.

Ehtimallarla əlaqədar məsələlərin və analizin ümumiləşdirilməsi məni sonlu xüsusi fərqlər hesabına gətirdi, sonradan Laqranj olduqca sadə metodun köməyilə bu sonlu xüsusi fərqlərə baxdı və bunlardan bu növ məsələlərə incə tətbiqlər edə bildi. Elə bu ərəfədə verdiyimiz doğuran funksiyalar (fonctions génératices) nəzəriyyəsi onun əhatə etdiyi predmetlər arasında bu predmetləri də əhatə edir və ehtimal haqqında ən çətin məsələlərə ən böyük ümumiləşmə ilə özü-özlüyündə tətbiq olunur. Bundan başqa, çox sayda hədlər və vuruqlardan ibarət funksiyaların ədədi qiymətlərini bu nəzəriyyə çox yaxşı yığılan yaxınlaşmalar vasitəsilə təyin edir və bu zaman aşkar edir ki, çevrə uzunluğunun radiusa nisbətinin kvadrat kökü bu qiymətlərə çox tez-tez daxil olur və göstərir ki, buna sonsuz sayda digər transsendentlər də daxil ola bilir.

Şahid ifadələrinin, səsvermələrin, seçici və müzakirə iclaslarının qərarlarının və məhkəmə qərarlarının ehtimallarını da hesablamaq mümkün olmuşdu. Bu predmetlərə aid məsələləri o qədər ehtiraslar, müxtəlif maraqlar və şəraitlər mürəkkəbləşdirir ki, bunları demək olar ki, həll etmək mümkün olmur. Lakin bunlara olduqca analoji olan daha sadə nəticələrin həlli bu çətin və mühüm məsələlərə aydınlıq gətirir, elə bir aydınlıq ki, o, məhz, hesablanmanın doğruluğuna ən doğruyaoxşar mülahizələrdən daha çox üstünlük verilir. Ehtimal hesabının ən maraqlı tətbiqlərindən biri orta qiymətlər tapılması ilə əlaqədardır ki, bunlar müşahidə nəticələrindən seçilməlidir. Bir çox həndəsəçilər bununla məşğul olmuşlar, Laqranj bu orta qiymətlərin tapılması üçün «Mémoires de Turin»-də müşahidə xətalarının qanunu məlum olduğu hal üçün gözəl bir metodu nəşr etdirmişdi. Mən bu məqsəd üçün hətta analizin başqa məsələlərində də səmərəli tətbiq oluna bilən, xüsusi bacarığa əsaslanan metod vermişəm və bu metod məsələnin növü üzrə məşdudlaşmış funksiyaların hər hansı bir uzun hesablanmasının bütün gedişi üzrə onu qeyri-müəyyən surətdə genişləndirməyə imkan verməklə yanaşı, o, məhdudiyyətlər nəticəsində son nəticənin hər bir həddində ola bilən dəyişiklikləri göstərir. Biz əvvəl görmüşdük ki, hər bir müşahidə birinci dərəcəli şərti tənlik verir və bu tənlik həmişə elə yazıla bilinər ki, onun bütün hədləri bir tərəfdə olsun, ikinci tərəfi isə sıfra bərabər olsun. Bu tənliklərin istifadə olunması, bizim astronomik cədvəllərin böyük dəqiqliyi üçün əsas səbəblərdən biridir, çünki bu üsulla gözəl müşahidələrin əksəriyyətini onların elementlərinin müəyyənləşdirilməsinə yönəltmək mümkün ola bilərdi. Yalnız bir element təyin etmək tələb olunduğu hal üçün Côtes elə şərti tənliklər tərtib etməyi tövsiyyə etmişdi ki, naməlum elementin əmsalı bu tənliklərdən hər birində müsbət olsun və bundan sonra son tənliyi almaq üçün bütün bu tənliklər cəmlənməli və bu son tənlikdən isə bu elementin ədədi qiyməti tapılsın. Côtes üsuluna bütün hesablama aparanlar riayət edirdilər; amma bir neçə elementi təyin etmək tələb olunduğu halda zəruri sonuncu tənliklərin alınması məqsədilə şərti tənliklərin birləşdirilməsi üçün heç bir müəyyən qayda yox idi; hər bir element üçün yalnız onun təyin olunmasına ən münasib müşahidələr seçilirdi.

Bu üsullardan hansının seçilməsini təyin etmək məqsədilə, Lejandr və Qauss şərti tənliklərin sağ hissələrinin kvadratlarını toplamağı və sonra bunların cəmini, hər bir naməlum element dəyişdikcə, minimumlaşdırmağı qərara aldılar; bu üsulla bilavasitə elementlərin sayı qədər son tənliklər alınır. Lakin belə sual yaranır ki, bu tənliklərlə alınmış ədədi qiymətlər digər üsullarla alına bilməyən bütün qiymətlərdən yaxşıdırmı? Bu suala cavabı ehtimal hesabı verə bilər. Mən ehtimal hesabını bu mühüm predmetə tətbiq edərək, incə analizin köməyilə elə bir qayda tapdım ki, bu qayda üzrə axtarılan elementlər müəyyən prosesin köməyilə alınır; bu qaydanın elə üstün cəhəti vardır ki, bu elementlər müşahidələr çoxluğundan şübhə doğurmayan olduqları ilə seçilir və bunların elə ədədi qiymətləri tapılır ki, bunlarda yalnız ən kiçik xətalar ola bilir.

Lakin aldığımız nəticələr bunlarda ola biləcək xətaların qanunu məlum olmadığı halda mükəmməl hesab oluna bilməz; bu xətaların

verilən sərhədlər arasında olması ehtimalını göstərə bilmək zəruridir, bu isə nəticənin *çəkisi* adlandırdığım ehtimalın təyin olunmasına gətirir. Analiz bunlara aid ümumi və sadə düsturlara gətirir; mən bu analizi geodeji müşahidələrin nəticələrinə tətbiq etdim. Ümumi məsələ ondan ibarətdir ki, olduqca çox sayda müşahidə xətalarının bir və bir neçə xətti funksiyalarının ədədi qiymətlərinin hansısa sərhədlər arasında olduğu ehtimalı təyin olunmalıdır.

Müşahidə xətalarının qanunu bu ehtimalların ifadələrinə sabit kəmiyyətlə daxil olur, bu kəmiyyətin ədədi qiyməti isə demək olar ki, həmişə naməlum bu qanun haqqında bilgi olmasını sanki tələb edir. Bu sabit kəmiyyət xoşbəxtlikdən müşahidələrin özü ilə təyin oluna bilinər. Astronomik elementlərin axtarışlarında bu kəmiyyət hər bir müşahidə və hesablama arasında fərqlərin kvadratlarının cəmi ilə verilir. Güman olunan xətalar bu cəmin kvadrat kökü ilə eyni cür mütənasib olduqlarından, bu kvadratları müqayisə edərək, eyni bir ulduzun müxtəlif cədvəllərinin nisbi dəqiqliyini qiymətləndirmək olar. Geodeji əməliyyatlarda bu kvadratlar hər bir üçbucağın üç bucağının müşahidə olunmuş cəmləri xətalarının kvadratları ilə əvəz olunur. Bu xətaların kvadratlarının müqayisəsi bucaqların ölçüldüyü alətlərin nisbi dəqiqliyi haqqında mühakiməyə imkan verir. Bu müqayisədən görünür ki, geodeziyada təkrar-təkrar müşahidələr alətlərlə müqayisədə nə cür üstünlüyə malikdir.

Müşahidələrdə tez-tez xətalara səbəb olan çoxlu mənbələr olur: məs., ulduzların vəziyyətini meridian borusu və dairə vasitəsilə təyin etdikdə, bunların hər biri xətalara məruz ola bilir və bu halda onların xəta ehtimalları qanununun eyni olduğu fərz olunmur; odur ki, bu hallarda yaranan elementlər də bu xətaları özündə daşıyır. Bu elementləri almaq üçün bizim tərtib etdiyimiz şərti tənliklərə hər bir alətin xətaları daxildir və bunların əmsalları müxtəlifdir. Təyin olunacaq elementlərin sayı qədər sonlu tənliklər tərtib etmək tələb olunduğundan, bu tənlikləri almaq üçün vuruqlar sistemi götürülür və uyğun olaraq, şərti tənliklərə vurulur; bu vuruqlar sistemi ən münasib sistem olub, hər bir şərti tənlikdə əmsallar sistemindən böyük olmur. Mənim tətbiq etdiyim analiz, xəta mənbələrinin sayından asılı olmayaraq, ən yaxşı nəticələr verən sistemə və ya elə vuruqlara gətirir ki, eyni bir xəta ixtiyari başqa bir sistemdə ola bilən xətadan daha az ehtimallı olur. Həmin analiz bu nəticələrin xəta ehtimallarının qanununu təyin edir. Bu düsturlarda xəta mənbələrinin sayı qədər naməlum sabitlər vardır və onlar bu xətaların qanunlarından asılıdırlar. Biz gördük ki, mənbə yeganə olduğu halda bu sabiti təyin etmək mümkündür: buna görə də, kvadratlar cəmi və hər bir şərti tənliyin qalıqları tərtib edilib, sonra elementlər üçün tapılmış ədədi qiymətlər bu şərti tənliklərdə yerinə yazılmalıdır. Belə bir proses, sabitlərin sayından asılı olmayaraq, ümumiyyətlə, bu sabitləri ədədi qiymətlərini almağa xidmət edir, bu isə ehtimal hesabının müşahidə nəticələrinə tətbiqini tamamlayır.

Mən burada mühüm bir qeyd etməliyəm. Müşahidələr sayı bir o qədər də böyük olmadığı halda, mənim sabitlərin ədədi qiymətləri barədə indicə qeyd etdiklərim, müşahidələrə görə kiçik bir şübhə doğurur və analizin köməyilə təyin olunmuş ehtimalları bir qədər şübhəli edir. Lakin, demək olar ki, həmişə bilmək yetərlidir ki, alınmış nəticələrin kiçik bir aralıqda olması ehtimalı vahidə olduqca yaxındırmı və əgər bu belə deyildirsə, bilmək kifayətdir ki, alınmış nəticə barədə heç bir ağlabatan şübhə doğurmayan ehtimal üçün müşahidələr sayı nə vatxa qədər artırılmalıdır. Ehtimallar üçün analitik düsturlar bu məqsədə çatmaq üçün çox yaxşıdır və bu anlamda bunlara, xətalar ola bilən müşahidələr toplusuna əsaslanan elmlərə zəruri bir əlavə kimi baxmaq olar. Bunlar, hətta təbii və mənəvi elmlərdəki çox sayda məsələlərin həlli üçün olduqca zəruridir. Təzahürlərin əksəriyyətinin baş vermə səbəbləri ya məlum olur və ya o dərəcədə mürəkkəbdir ki, onları hesablamaq çətindir; bundan başqa onların təsiri çox vaxt təsadüfi və dəyişən səbəblərlə pozulur; lakin bu təsirin izləri, bu səbəblərlə baş vermiş hadisələrdə həmişəlik qalır və bunlarda dəyişikliklərə səbəb olur ki, bu dəyişiklikləri müşahidələrin uzun sırası ilə müəyyənləşdirmək mümkün olur. Ehtimalların analizi bu dəyişiklikləri aydınlaşdırır və onların doğruyaoxşarlıq dərəcəsini təyin edir. Məs., atmosferdə həmişə dəyişikliklər yaradan daimi səbəblər arasında, gündüz gecə ilə və qış yay ilə əvəz olunduqda, günəş istisinin periodik olaraq dəyişməsi – bu nəhəng maye kütləsinin təzyiqində və barometrin uyğun hündürlük səviyyəsində bir günlük və illik dəyişikliklər yaradır və bunlar, bizim yəqinlik kimi qəbul etdiyimiz faktların ehtimalına ən azı bərabər olan ehtimalla çoxsaylı barometrik müşahidələrdən aydın olur. Eynilə də, bir sıra tarixi hadisələr cəmiyyəti hər mənada hərəkətə gətirən müxtəlif maraqlar və ehtiraslar arasında mənəviyyatın böyük prinsiplərinin daimi təsirinin olduğunu göstərir. Təqdirəlayiqdir ki, oyunların öyrənilməsi ilə təməli qoyulmuş elm insan biliyini ən mühüm predmetlər səviyyəsinə qədər yüksələ bilmişdir.

Mən bütün bu metodları özümün «Analitik ehtimal nəzəriyyəm»də topladım və burada qarşıma qoyduğum məqsəd – ehtimal hesabının ən ümumi şəkildə prinsiplərini və analizini, həmçinin, hesablama üçün maraqlı və ən çətin məsələlərin həllinə şərh etmək olmuşdu.

Bu əsərdən görünür ki, *ehtimal nəzəriyyəsi,* mahiyyət etibarilə, *hesablamaya gətirilmiş sağlam düşüncədir*: o, dürüst ağılların çox vaxt düşünmədən sanki instinktlə hiss etdiklərini dəqiqliklə qiymətləndirməyə məcbur edir. Əgər bu nəzəriyyədən yaranmış analitik metodlar, onun əsası olan prinsiplərin doğruluğu, onun məsələlərinin həlli üçün tələb olunan incə və zəif məntiqi, bu nəzəriyyəyə əsaslanan ictimai faydanın təsisatı və mənəvi elmlər və natural fəlsəfənin ən mühüm məsələlərinə onu tətbiq etdikdə onun almış olduğu və hələ ola biləcəyi yayılma nəzərə alınarsa; əgər, sonra, o da qeyd olunarsa ki, hətta hesablama tətbiq olunmayan oblastlarda belə, bu nəzəriyyə bizim mülahizə və mühakimələrimizdə bizi idarə edən ən doğru-düzgün baxışı təlqin edir və bizi çox vaxt yoldan sapdıran illüziyalardan qorunmağı öyrədir – biz görərik ki, elə bir elm yoxdur ki, bizim düşüncələrimiz, fikirlərimiz üçün ondan daha dəyərli qiymətli olsun və çox faydalı olar ki, bu nəzəriyyə xalq maarifi sisteminə daxil olunsun.

MÜNDƏRİCAT

Tərcüməyə ön söz
Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış
Ehtimal haqqında
Ehtimalların hesablanmasının ümumi prinsipləri
Gözləmə haqqında
Ehtimalların analitik metodları haqqında
Ehtimalların hesablanmasının tətbiqi. Oyunlar haqqında
Bərabər fərz olunan şanslar arasında mümkün ola bilən naməlum qeyri-bərabərliklər haqqında
Hadisələrin qeyri-müəyyən artması nəticəsində yaranan ehtimal qanunları haqqında
Ehtimal nəzəriyyəsinin natural fəlsəfəyə tətbiqi
Ehtimal hesabının mənəvi elmlərə tətbiqi
Şahid ifadələrinin ehtimalı haqqında
Seçkilər və iclasların qərarları haqqında
Məhkəmə qərarlarının ehtimalı haqqında
Ölüm cədvəlləri və ömrün, nigahların və hər hansı assosiasiyaların orta yaşama müddətləri üçün cədvəllər
Müəssisələrdə baş verən hadisələrin ehtimalları əsasında verilən mənfəətlər haqqında
Ehtimalların qiymətləndirilməsində illüziyalar haqqında
Yəqinliyə yaxınlaşmanın müxtəlif üsulları
Ehtimal hesabının tarixi oçerk

ОСНОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СОЧИНЕНИЕ

В. Я. БУНЯКОВСКОГО,

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ОРДИНАРНОГО АКАДЕМИКА,
ПРОФЕССОРА С ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА И
ДОКТОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИИ.

САНКТПЕТЕРБУРГ

В Типографии Императорской Академии Наук

1846.

Müntəxəbatın ikinci hissəsinin titul səhifəsi belədir. «Müəllifdən» başlığı altında girişdə ehtimal nəzəriyyəsi üzrə bu ilk rus dərsliyinin müəllifi qarşısında duran məsələlər şərh olunmuşdur. Bundan əlavə, müasir oxucu, şübhəsiz ki, «Son» başlıqlı məqaləni və «Riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin tədrici inkişafının qısa tarixi oçerki»ni də çox maraqla oxuyacaqdır. Bu hissələrin hər üçü o dövrun orfoqrafiyasına riayət olunaraq yazılmışdır. Dərsliyə daxil olan mövzuların müxtəlifliyini «В и МСЭ» adlı ensiklopediyada dərc olunmuş «Mündəricat»-da (bax, səh. 867-69) görmək olur, bu mündəricat originalda 13 səhifədən ibarət olub, müəllifin «Kitabın ətraflı mündəricatı»-nın qısaldılmış variantıdır.

MÜƏLLİFDƏN

Tətbiqi Riyaziyyat oblastına daxil olan Analitik Ehtimal nəzəriyyəsi, sırf analizin digər tətbiqlərindən olduqca fərqlənir. Həndəsədə və Natural Fəlsəfə predmetlərində, məs., ümumcazibə təzahürlərində, işıq, istilik, səs, elektrik və s. nəzəriyyələrdə bütün tədqiqatların bir hissəsi, həqiqətən də, mövcud olan və ya yalnız təsəvvür etdiyimiz müxtəlif kəmiyyətlər barədə bizim düşüncələrimizə əsaslanır, bir hissəsi – belə sınaqlardan çıxarılmış qanunlara və ya belə sınaqlar başlanğıcda yetərli olmadıqda az və ya çox doğruyaoxşar hipotezlərə əsaslanır. Əksinə, Ehtimal Analizi yalnız bizə tamamilə məlum olmayan səbəblərdən asılı təsadüfi hadisələri deyil, hətta bizim bilgisizliyimizə görə heç bir fərziyyə irəli sürə bilmədiyimiz halda belə hadisələri araşdırmağa və ədədi qiymətləndirməyə xidmət edir. Bu məqsədə gətirən dərin ağlın incə nəticələri, bütünlüklə şərtsiz gerçəkliyin aşkar edilməsinə ən etibarlı yolu göstərməsə belə, heç olmazsa, bu gerçəkliyə mümkün qədər yaxınlaşmağa imkan yaradır. Biz nə vaxt nəzərə alsaq ki, ehtimal haqqında riyazi nəzəriyyə özünün belə mühüm rolu ilə özünün tətbiqlərində fiziki və mənəvi aləmin predmetlərini əhatə edə bilir, onda biz əminliklə deyə bilərik ki, bu nəzəriyyə – ağlın onu daha çox uca edə bilən məhsuludur və onun aşa bilməyəcəyi sərhədə aparan yolların sonunu sanki göstərə bilir.

İndi təklif edilən kitab, Rus dilində ilk əsər olub, ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi əsaslarının, həm də onun ictimai həyata, Natural Fəlsəfəyə, eynilə də, Siyasi və Mənəvi Elmlərə mühüm tətbiqlərinin ətraflı şərhidir. Sonuncu, XII fəsil, Ehtimal Analizinin tədrici inkişafı barədə tarixi təfsilata həsr olunmuşdur. Kitabın sonunda sırf riyazi məzmunlu *on Qeyd* verilmişdir; bunlar bəzi oxucuları Ehtimal hesabında tez-tez təsadüf olunan müxtəlif nəzəriyyələri digər traktatlarda və ya memuarlarda axtarmaq zəhmətindən azad edəcəkdir. Qeydlərdən sonra, mənim əsərimə əlavə olunmuş iki faydalı cədvəlin *İzahı* və nəhayət, sonda bir maraqlı məsələnin həlli şərh olunmuş *Əlavə* verilir. Bununla belə mən Mündəricata baxmağı məsləhət görürəm, burada kitaba daxil olmuş predmetlərə ətraflı göstərişi görmək olar.

Mən bu əsərimin tərtib olunması haqqında bir neçə söz deyəcəyəm. Laplasın burada istifadə olunmuş ölməz əsəri: «Theorie analitiques des Probabilités», analizin incəliyi, həmçinin mülahizələrin dərin mənalılığı ilə daima mənim üçün bir nümunə olmuşdur. Lakin, bununla yanaşı, onun yaratdığı bir çox nəzəriyyələri təklif etdikdə, mən həmişə imkan daxilində onların üslubunu və isbatını, eyni dərəcədə də analizin özünü asanlaşdırmağa çalışmışam. Cəsarətlə ümid edirəm ki, riyaziyyatçılar mənə o mənada haqq qazandıracaqlar ki, mən Laplasın bu kitabının öyrənilməsini olduqca asanlaşdırmışam, çünki bu kitab özünün yığcamlığı və predmetə xas olan xüsusi çətinliklərə görə olduqca az adamlar üçün başa düşüləndir. Digər məşhur həndəsəçilərin, xüsusilə də, *Eylerin, Laqranj* və *Puassonun* elmi araşdırmaları da mənim üçün çox faydalı olmuşdu. Mən Puassonun Mühakimə üsulunun riyazi nəzəriyyəsinin şərhindən iqtibas etmişəm. Mənim digər əsərlərim barədə mənim kitabımda yer almış bəzi tənqidi qeydlərə istinadlarla, eyni zamanda, bir çox düsturların çıxarılışında dəyişikliklərin və müxtəlif hallarda istifadə olunan analitik üsullarda etdiyim dəyişikliklərin faydalı olduğunu etiraf etməyimlə kifayətlənəcəyəm. VII və X fəsillərə xüsusilə diqqət yetirməyi məsləhət bilirəm. Oxucu mənim kitabımdakı bir çox məqalələri oxuduqda və bunları digər məşhur əsərlərdəki şərhlərlə müqayisə etdikdə bu dəyişiklikləri özü görəcəkdir. Məhz mənə aid daha hərtərəfli araşdırmalar mətnin özündə göstərişlərlə verilir. Daha bir qeyd edəcəyəm. Bu vaxta qədər bizdə Riyazi Ehtimal nəzəriyyəsi haqqında heç bir ayrıca əsər, hətta tərcümə belə olmadığından, bizim hələ ki, Rus dilində bu predmet haqqında heç üslub və ifadə tərzimiz olmadığından, mənim qarşımda bu predmet haqqında yazmaq problemi dururdu. Ümid edə bilmirəm ki, mən Ehtimal Analizi üçün özünün sadəliyi və təyin ediciliyi ilə tamamilə mükəmməl bir ehtimal dili yarada bilmişəm; lakin hər halda, məndə belə əminlik hissi xoş bir duyğu yaradır ki, mən bu məqsədə çatmaq üçün imkan daxilində bütün səylərimi yerinə yetirə bilmişəm.

Sonda bir arzumu bildirmək istəyirəm; təklif etdiyim bu əsər, mənim həmvətəndaşlarım arasında sağlam düşüncə tərzinin və faydalı praktiki gerçəkliklərin yayılmasına xidmət edə bilsin. Və əgər mənim oxucularımdan bəzilərinin, Ehtimal haqqında Nəzəriyyənin predmetini təşkil edən bütün nəzəriyyələrin analitik şərhini izləmək üçün kifayət dərəcədə riyazi təhsili olmazsa, hətta bələləri üçün belə mənim kitabımın diqqətli mütaliəsi səmərəsiz olmayacaqdır. Onlar bu kitabdan olduqca müxtəlif, ümumtətbiqi nəticələrdən bəhrələnə biləcəklər və bu nəticələr onlara bizim ictimai həyatımızla əlaqədar bir çox maraqlı məsələ və gerçəklikləri əslində olduqları kimi göstərə biləcəkdir.

SON.
EHTİMALIN RİYAZİ NƏZƏRİYYƏSİNƏ ƏSASLANAN NƏTİCƏLƏR HANSI MƏNADA ANLAŞILMALIDIR?

Ehtimal Analizinin riyazi əsaslarını və onun ictimai həyat məsələlərinə, Natural Fəlsəfəyə və Mənəvi Elmlərə əsas tətbiqlərini bu əsərdə ardıcıllıqla şərh edərək, biz artıq qısa şəkildə də olsa, bu nəzəriyyədən nəyi gözlədiyimizi və nə tələb etdiyimizi dərk edə bilirik; bu nəzəriyyə, ədalətlə düşünülərsə, bizim nəzəriyyələrimizin ən mühüm sahələri ilə bir sırada dura bilər. Olduqca çox da olmayan, insana miras qalmış, danılmaz həqiqətlərdən başqa təbiətdə və mənəvi aləmdə hər nə varsa, az və ya çox dərəcədə doğruyaoxşar gümanlara əsaslanmışdır;

buna görə də, ehtimal haqqında nəzəriyyə, əslinə qaldıqda, əqli fəaliyyəti demək olar ki, bütünlüklə əhatə edir. Şübhəsizdir ki, bu elmin hərtərəfli rolu, bir tərəfdən fiziki və mənəvi təzahürlər üzərində müşahidələrdən alınmış məlumatların çatışmamazlığı və kafi olmaması ilə, digər tərəfdən, az dərəcədə də olsa, riyazi analizin mükəmməl olmaması ilə olduqca məhdudlaşır. Bununla belə, Ehtimal nəzəriyyəsində bu günə qədər nələrə nail olunmuşdursa, bunlar onu həqiqətin aşkar edilməsi və əşyalara səthi baxışda ağlın çox vaxt edə biləcəyi səhvlərdən qorunmaq üçün ən mühüm əqli bir vasitə səviyyəsinə qaldırır. Çox dərin ağıl bəxş olunmuş şəxsin yalnız öncədən təqribi nəticələri görə biləcəyini bu nəzəriyyə çox vaxt ədədlərlə ifadə olunmuş dəqiq nəticələrə gətirir. Adi Məntiqə sığmayan hər hansı fərz olunan həqiqətin etibarlılıq ölçüsünün qiymətləndirilməsində belə müəyyənlik, şübhəsiz ki, mütəfəkkirlərin tam diqqətinə layiqdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsl ruhunu dərk etməmiş bəzi empiriklər kimi bu ədədi nəticələri qəti mənada qəbul etmək, şübhəsiz ki, düzgün olmazdı. Məs., hər hansı bir hadisə gerçəkliyə və ya onun ehtimalı vahidə çox yaxın olarsa, bundan belə nəticə çıxarmaq olmaz ki, bu hadisə hökmən baş verəcəkdir və ya da ki, əks halda, bu nəzəriyyə səhv nəticələrə gətirir. Belə nəticə başqa mənada anlaşılmalıdır, bu nəticə Yakov Bernullinin məşhur ümumi fikri ilə tamamilə təsdiq olunur. Hadisənin ehtimalının böyük olması yalnız onu sübut edir ki, əgər biz, eyni şərtlər yerinə yetirilməklə sınaqları olduqca çox dəfə təkrar edə bilərik sə, onda hadisənin baş verməsi sayı onun baş verməməsi sayından xeyli çox olardı və baş vermə sayının baş vermə sayı ilə baş verməməsi sayının cəminə nisbəti ehtimal üçün tapılmış qiymətə qeyri-müəyyən surətdə yaxınlaşardı. Ehtimal Analizi şərtlərin qeyri-müəyyənliyi üzrə ayrıca bir sınaq haqqında heç bir müsbət nəticə verə bilmir, necə ki, bu, əvvəldə bu kitabın başlanğıcında da izah olunmuşdu.

Ümumiyyətlə, Ehtimal Analizinin müxtəlif nəticələrinin izahında Yakov Bernullinin teoremi ilə ifadə olunan qanun həmişə nəzərə alınmalıdır. Bizim izah edə bilmədiyimiz təsadüflərdən asılı hadisələrin təkrarlanması sayındakı düzgünlük (*qanunauyğunluq*; H. M.), yalnız olduqca çox saylı sınaqlarda yerinə yetir. Buna görə də, hər bir ayrıca baxılmış halda alınan hər bir nəticəyə yalnız *orta nəticə* kimi baxılmalıdır, bu nəticə bir çox hallarda əsl nəticədən olduqca fərqli ola bilər, bu nəticə isə baş vermiş hadisələrlə *a posteriori* aşkar olunur. Lakin həmin sınağı qeyri-müəyyən say dəfə eyni şərtləri yerinə yetirilməklə təkrar etmək imkanı olsaydı, onda alınmış orta nəticə, müxtəlif hadisələrin baş verməsi arasında axtarılan münasibətləri, sınaqların sayı çox olduğu haldakından daha yaxşı ifadə etmiş olardı.

Xülasə olaraq, biz oxuculara Riyazi Ehtimal Nəzəriyyəsinin tədrici inkişafının qısa tarixi oçerkini təqdim edirik.

RİYAZİ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN TƏDRİCİ İNKİŞAFININ QISA TARİXİ OÇERKİ

118. Ehtimal haqqında mücərrədlik nöqteyi-nəzərdən baxılan ilkin anlayışların aid olduğu dövr bizim bilik sahələrimizin əksərinin başlanğıcında olduğu kimi qeyri-müəyyəndir. Bu elmin riyazi nəzəriyyəsində hələ çox-çox əvvəl, oyunlarda, mərclərdə və s. müxtəlif əlverişli və əlverişsiz hallarda onların saylarının müqayisəsi ilə bu müqayisədən sonra çox və ya az uğurlu da olsa, nəticələr çıxarılırdı. Qədim filosofların əsərlərindəki oxşar mülahizələr və eynilə də bəzi qaydalar, əlbəttə ki, təsadüflər haqqında elmlərə aiddir və hətta elə müsbət dəlillər vardır ki, ehtimala dair elmin bəzi çox gözəl tətbiqləri bizdən olduqca uzaq dövrlərdə də olmuşdur. Məs., Digestdə*, *Q. Libri*** -nin qeydində ərzaq haqqında məsələ ilə əlaqədar qanun verilmişdir və bu qanun çox aydın sübut edir ki, Romalılar müxtəlif yaşlarda orta yaşama müddətinin təyin olunması ilə məşğul olurdular. Daha sonra Q. Libri İtalyan Respublikalarında hələ orta əsrlərdə mövcud olmuş Dəniz Sığorta Cəmiyyətlərindən söhbət açır; məhz bu, fərz etməyə əsas verir ki, o dövrdə gəmi qəzalarının baş vermə ehtimallarını təyin edə bilirdilər. Eyni zamanda məlumdur ki, bir az sonra XVII əsrin başlanğıcında görkəmli *Qaliley* ehtimal nəzəriyyəsinin – xətaların müəyyənləşdirilməsi və onların müşahidə nəticələrinə təsiri kimi olduqca mühüm məsələsi ilə məşğul olurdu. Əlbəttə ki, bu qədər çətin predmet üzrə onun araşdırılmaları arzu edilən müvəffəqiyyətlə nəticələnə bilməzdi. Məncə, insan ömrü ilə bağlı ehtimallara əsaslanan ilk fikir ayrılığı XVII əsrin birinci yarısına aiddir. Neapollu *Lavrentiy Tonti* öz adı ilə indiyə qədər bağlı olan *tontin* (№ 73) adlanan bu növ xüsusi bir təsisat təklif etdi.

Burada indi qeyd olunmuş cəhdlərin, şübhəsiz ki, Ehtimal Analizinə aid olmasına baxmayaraq, bunların ardıcıl olmamaları və qeyri-mükəmməlliyi üzündən, onlar elmin tələblərinə cavab verə bilmirdilər. Təsadüflərin riyazi nəzəriyyəsinin əsasları Paskal və Fermat tərəfindən on yeddinci əsrin yarısında qoyulmuşdu. Onların həll etdikləri ilk məsələ – Paskal Kavaler *Merenin* təklif etmiş olduğu, oyuna qoyulan məbləğin oyun başa çatmamış oyunçular arasında ziyansız bölüşdürülməsinə aid idi. Bu mövzu ilə ətraflı tanış olmaq istəyənlər bizim kitabın № 32 və № 38 bəndlərinə müraciət edə bilərlər. Beləliklə, ədalət naminə demək olar ki, Ehtimal hesabı, özünün ilkin əsasları və müstəqilliyinə görə, bu iki görkəmli şəxsiyyətə borcludur.

Paskal və Fermatın qeyd olunan cəhdlərindən dərhal sonra, onların müasiri *Hüygens* bu predmetlə məşğul olmağa başladı; o, özünə qədər artıq həll olunmuş məsələləri toplayıb və onlara öz araşdırmalarını da əlavə edərək, təsadüflərə məruz oyunlarda abstrakt mühakimə haqqında traktat yazdı. Ehtimal Nəzəriyyəsi üzrə ilk nəşr olunmuş bu əsəri *Şoten*, 1657-də özünün *Exercitationum mathematicarum* kitabında *De ratiocinus in Aleao Ludo* başlığı altında nəşr etdirmişdi. Hüygensin traktatı da *Ars conjectandi* kitabının birinci hissəsində şərh olunmuşdur, bu haqda aşağıda danışacağıq; bu traktat orada Yakov Bernullinin kommentariləri ilə zənginləşdirilmişdir.

Hüygensdən başqa XVII əsrin ikinci yarısında ehtimal nəzəriyyəsi ilə Sovör (Sauveur) də məşğul olmuşdur; o, 1679-da «*Journal des Savans*»-da oyunda, məs., bank və ya farao – *bassète* adlı oyunlarla əlaqədar, mümkün ola bilən halların təyin olunması barədə öz araşdırmalarını vermişdi. *Montyukl*, özünün «*Histoir de Mathématiques*» (1802, cild III, 391 səh.) əsərində «of the Laws of chance» başlıqlı bir traktatı da qeyd edir; qumar oyunları mövzusunda bu traktat müəllifin adı qeyd edilmədən 1962-də Londonda nəşr olunmuşdu. Montyukl fərz edir ki, bu əsər *Benjamin Motta* (Benjamin Motte) məxsusdur. *Van Hudden* (Van Hudden), Hollandiya pensionarisi *Vitt* (Witt) və *Halleyin* insan ömrü ehtimalları mövzusunda əsərləri XVII əsrin sonuna aiddir. Bizə məlum olan ölüm cədvəllərindən tarix etibarilə birincisini 1693-də Halley nəşr etdirmişdir [№ 60]. Onun tədqiqləri 1963-ün n^0 196 -da *Philosophical Transactions*-da nəşr olunmuşdur.

Ehtimal Hesabının qeyd olunan dövrə aid çox da maraqlı olmayan digər nailliyyətləri üzərində dayanmadan, görkəmli *Yakov Bernullinin* əsərlərinə keçək. Artıq 1685-də *Journal des Savans*-da o, riyaziyyatçılara zər oyunu ilə bağlı olduqca çətin bir məsələ təklif edir. O, cavab almayıb, 1960-ın Leybtsiq Aktlarında özünün həllini isbatsız dərc etdirir. Bu hadisə Leybnitsi təklif olunmuş məsələ ilə məşğul olmağa təhrik etdi; o, bu məsələni təxirə salmadan həll edib, özünün həll üsulunun ətraflı şərhini elə həmin Leybtsiq Aktlarında nəşr etdirir. Lakin ehtimalın riyazi nəzəriyyəsinə Yakov Bernullinin göstərdiyi əsas xidməti, şübhəsiz ki, onun uzun illər boyu ətraflı düşünülmüş *Ars conjectandi* adlı gözəl əsəridir. Bu əsər 1713-də, Bazeldə müəllifin ölümündən yeddi il sonra, onun qardaşı oğlu *Nikolay Bernulli* tərəfindən nəşr olunmuşdu. Düzgün və incə ağıllı analitik üsulları ilə seçilən bu əsər dörd hissədən ibarətdir. Bundan əvvəl qeyd etdiyimiz birinci hissə, Hüygensin Traktatına izahedici qeydlərdən ibarətdir. İkinci hissəyə müxtəlif cür birləşmələrin geniş bir nəzəriyyəsi daxil olmuşdur. Üçüncü hissədə müxtəlif oyunlara aid bir çox məsələlərin həlləri verilmişdir. Nəhayət, sonuncu dördüncü hissə, birgə yaşamaq məsələlərinə mənəvi və siyasi elmlərə aid əvvəlki hissələrdə şərh olunmuş məsələlərdə qaydaların nə cür istifadə olunması və onlara əlavələr şərh olunmuşdur. Bu dördüncü bölmə xüsusilə diqqətəlayiqdir, belə ki, burada həll olunan

* *Digest* (və ya *Pandektlər*), məlum olduğu kimi, imperator Yustinianın əmri ilə Qanunlar küllüyatı kimi tərtib edilmiş görkəmli Roma Qanunvericilərinin qərarlar məcəlləsidir. Digestin nəşri 528-ci ilə aid olunur.

** Revue des deux mondes, livraison du 15 Mai 1845; məqalə: Fermat, par M. Libri.

məsələlərdə Ehtimal Hesabında olduqca mühüm rol oynayan Nyuton binomundan istifadə olunmuşdur. Bu dördüncü hissənin ən gözəl məqaləsi, şübhəsiz ki, bizim artıq neçə dəfə qeyd etdiyimiz, Yakov Bernullinin adını daşıyan məşhur teoremin isbatıdır. Bu məqalə barədə ətraflı məlumat bizim № 20, 22, 24, 25, 26, …, 117-ci bəndlərimizdə verilmişdir. Dördüncü hissənin ardınca, *sonsuz sıralar haqqında* traktat, əsərin sonunda isə «*Lettre à un amy sur les Parties du jeu de Paume*» başlığı ilə naməlum müəllifin maraqlı araşdırması şərh olunmuşdur.

Ars conjectandi-nin nəşrçisi Nikolay Bernulli özü bəzi uğurlarla Ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olurdu. O, 1709-da Bazeldə Hüquq Doktoru dərəcəsi almaq üçün Mühakimə üsuluna Ehtimal Hesabının tətbiqi təcrübəsi mövzusunda Dissertasiya müdafiə edir. Nikolay Bernullinin Dissertasiyası «*De Arte conjectandi in Jure*» başlığı ilə 1709-da nəşr olunmuşdur; burada həlləri ilə verilmiş maraqlı məsələlər arasında bir məsələ üçüncü hissənin mövzusudur, yəni: barəsində neçə il heç bir məlumat məlum olmayan şəxsi, qanun üzrə nə qədər müddətdən sonra ölmüş hesab etmək olar?

119. On səkkizinci yüzillik Sırf Riyazi Analizin olduqca parlaq müvəffəqiyyətləri ilə əlamətdar olub, Ehtimal Nəzəriyyəsində də mühüm təkmilləşmələrə səbəb oldu. Bu əsrin başlanğıcında Fransada *Monmort*, İngiltərədə Fransa əsilli *Moavr* xüsusi bir səylə Ehtimal Hesabı ilə məşğul olurdular. Monmort bu predmet haqqında «*Essai d'analyse sur le jeux de hazard*» başlığı ilə öz əsərini nəşr etdirir; burada o, müxtəlif növ kart, zər oyunlarına aid çoxsaylı maraqlı məsələlərin həllini verir. Bu kitabın bir çox cəhətdən düzəldilmiş və əlavələr daxil olunmuş ikinci nəşrində (1713) Yakov və İvan Bernulli qardaşlarının qardaşı oğlu Nikolay Bernulli ilə Monmortun çox maraqlı bir yazışması vardır. Bu yazışmada Nikolay Bernullinin 9 sentyabr 1713-də Monmorta məktubunda «*Peterburq məsələsi*» adlandırılmış məsələnin qoyuluşu və Nikolay Bernullinin bir çox məsələlərin düşünülmüş incə həlləri xüsusilə diqqətəlayiqdir. Bu mövzu ilə əlaqədar ətraflı yazı № 45-də verilmişdir. Monmortun çətin məsələlərin həlli ilə bağlı məşğul olduğu məsələlərdən biri kimi, – oyunun özünün şərtinə əsasən, onun nə vaxt başa çatacağı qeyri-müəyyən olduqda, oyuna qoyulan məbləğin nə cür bölünəcəyini təyin etmək məsələsini misal göstərmək olar. Bu mövzu ilə də elə Moavr məşğul olurdu; lakin həllərin mükəmməl olduğunu söyləmək olmazdı [№ 33 və 40].

Moavr ehtimal nəzəriyyəsi üzrə öz ilk əsərlərini London Krallığı Cəmiyyətinə təqdim edir; bu əsərlər *Philosophical Transactions*-da 1711-də «*De mensurâ sortis*» başlığı ilə verilmişdir. Bundan sonra Moavr öz tədqiqatlarını «*The doctrine of chances*» adlı ayrıca kitab şəklində nəşr etdirir; sonradan bu nəşr hər dəfə təkmilləşdirilərək 1716, 1738 və 1756-da 3 dəfə nəşr olunmuşdur. Bu əsər analitik üsul baxımından ondan əvvəlkilərdən olduqca üstün cəhətləri ilə seçilir. Ümumiyyətlə, buradakı məsələlər Nyuton binomundan istifadə olunaraq, böyük ümumiləşmələrlə həll olunmuşdur. Yakov Bernullinin teoreminə olduqca mühüm yeniliklər, məhz, – onların sadə ehtimallara münasibəti və onların həqiqətən təkrarlanma sayı münasibəti arasındakı fərqin verilmiş sərhədlər arasında olması ehtimalının təyin olunması əlavə olunmuşdur. Buna görə Moavr birinci olaraq, *Stirlinqin* teoremindən istifadə etmişdir (№ 21). Lakin onun bu kitabı, onun özünün icad etdiyi *qayıdışlı sıralar* nəzəriyyəsinin burada şərhi ilə xüsusilə əlamətdardır. Əslində bu nəzəriyyədə, təsadüflər analizinə öz tətbiqləri üzrə çox məhsuldar olan bir üsul – sabit əmsallarlı, sonlu fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üsulu verilmişdir.

Bu dövrə yaxın bir ərəfədə çox və ya az uğurla da olsa, Ehtimal Nəzəriyyəsi ilə bir çox digər riyaziyyatçılar da məşğul olurdular; bunlardan *Meran* [№ 37], *Nikol*: 1730-un «*Histoire d'Academie Royale des Sciences*»-də qeyri-bərabər bacarıqlı oyunçulardan bəzilərinin uduqları partiyalar artıqlaması ilə olduğu halda, bu oyunçuların taleinə aid müxtəlif məsələlərin həllərini nəşr etdirmişdilər.

XVIII əsrin ikinci yarısında bir çox alimlər böyük bir diqqətlə, ümumiyyətlə, əhaliyə, doğum sayına, nigahlara və s. aid müxtəlif məlumatları toplayırdılar. Bunlarla bağlı ədədi göstəricilər, tələb olunan tənqidi araşdırılmalardan sonra, insan ömrünün ehtimalları haqqında müxtəlif praktiki məsələlərin həlli üçün ömürlük gəlirlər, əmanət kassaları, tontinlər, ixtiyari növ sığortalar və buna bənzər tədavüllər haqqında olduqca faydalı bir çox cədvəllərin tərtib olunması üçün istifadə olunmuşdur. Bu mövzu ilə əlaqədar tarixi məlumatları oxucular, «*Histoire des Mathématiques, par Montucla*»-nın üçüncü cildində tapa bilərlər, burada alimlərin əsas əsərlərinə qısa göstərişlərlə kifayətlənəcəyik.

XVIII əsrin ortalarına yaxın bu predmet üzrə İngiltərədə *Foma Simpsonun*, Hollandiyada *Kersebooma* və *Strikin* (*Struyk*) və Fransada *Deparsyenin* əsərləri diqqətəlayiqdir. Deparsye 1746-da «*Essai sur la probabilitié de la dur la vie humaine*» başlığı altında əsərini nəşr etdirir. Stokholm Akademiyasının 1754-ün elmi məcmuələrində İsveç astronomu *Vargentinin* ölüm cədvəlləri haqqında maraqlı tədqiqatları da nəşr olunmuşdu. Bu predmetlə Almaniyada riyaziyyatçı *Lambert* [№ 60], *Eyler* və bəzi digər riyaziyyatçılar da məşğul olurdular.

Keçən əsrin son illərində Deparsye – indi qeyd etdiyimizin qardaşı oğlu, 1981-də «*Traite des annuités*, *accompagné de plusieurs tables*» başlığı ilə əsər nəşr etdirir. Bundan sonra, dərhal *Dyuvilyar* [№ 60] müxtəlif növ maliyyə dövriyyələri haqqında «*Recherches sur les rentes, les emprunts, les remboursements, ets.* » adlı olduqca gözəl bir kitabını 1787-də nəşr etdirir. O vaxta yaxın bir dövrdə, 1783-də, İngiltərədə *Pris*, Siyasi Arifmetikanın müxtəlif predmetləri haqqında, ümumi marağa səbəb olmuş əsərlərini çap etdirir.

İndi isə XVIII əsr ərzində Ehtimal Hesabı sahəsində mühüm nailiyyətləri qısa şəkildə şərh edək.

İvan Bernullinin oğlu *Daniil Bernulli*, Ali Həndəsə və Mexanikanı öz kəşfləri ilə zənginləşdirmiş, riyazi gözləmə və mənəvi gözləmə arasındakı fərqi ilk olaraq təklif edib, mənəvi gözləmənin hələ indi də istifadə olunan ölçüsünü daxil etmişdir (FƏSİL IV). Demək olar ki, onunla eyni vaxtda məşhur Fransa Təbiətşünası Byüffon özünün «*Essai d'Arithmétique moral*» əsərində bu predmetin özü haqqında öz fikirlərini şərh etmişdir [№ 42]. Oxucu «Ouvres complètes de Buffon, Paris, 1827, t. XIII p. 14» adlı kitabda Daniil Bernullinin 19 mart 1762-də Byüffona məktubu ilə tanış ola bilər; məktubla sübut olunur ki, Bernulli Byuffonun mənəvi ehtimala baxışının tamamilə əsaslandırılmış olduğunu qəbul etsə də, onun ölçüsünün tərifi ilə tam razılaşmır. Həmin kitabda Ehtimal Analizindən bir neçə məsələnin riyazi həlləri, insan həyatı, doğumlar, nigahlar, ölüm cədvəlləri və b. aid məsələlərə bu nəzəriyyənin tətbiqi də şərh olunmuşdur. Daniil Bernullinin əsərlərinə qayıdaq. Ehtimal Hesabında onun xidməti öz tətbiqi ilə olduqca məhsuldar olan original bir fikir ilə əlamətdardır: hadisələrin ehtimallarına *a posteriori*, yəni müşahidə olunan təzahürlər əsasında baxılır. Bu mövzu ilə bağlı düsturlar sonradan *Beyes* (Bayes) və *Pris* (Price) tərəfindən 1764 və 1765-in «Philosophical Transactions nəşrində təklif olunmuşdu», daha sonra *Laplas* bunları lazımi qədər ümumiləşdirmişdir. Daniil Bernulli də Ehtimal hesabını çiçəyə qarşı peyvənd məsələsinə tətbiq etdi* № 64] və bu onunla *D'Alambert* arasında olduqca qızğın mübahisəyə səbəb oldu; *D'Alambertin* etirazları onun *Opuscules mathematiq* (II və IV cildlər) və eynilə də, onun *Melanges de philosoplie* (V cild) əsərlərində dərc olunmuşdur. Bu gözəl əsərdə Ehtimal Analizinə aid, Kondorsetin ayrı-ayrı məqalələri də verilmişdir; bunlardan həcmi və məzmununa görə əsas məqalə burada *Probabilité* başlığı ilə verilmişdir. Bu elm üzrə Kondorsetin digər tədqiqləri 1781, 1782 və 1783-cü illərin Paris Akademiyasının Elmi məcmuələrində dərc olunmuşdur. Onun ən diqqətəlayiq əsəri səslər çoxluğu üzrə qərarlar haqqında geniş bir Traktatdır. Qeyd etdiyimiz bu əsər 1785-də «*Essai sur l'application de l'Analyse à la probablilité des décisions rendues a la pluralité des voix*» başlığı ilə dərc olunmuşdur. Bizim bu kitabın XI fəslində biz Kondorsetin bu əsərinin bəzi yerlərinə istinad etmişik.

Eyler sırf və tətbiqi Riyaziyyatın demək olar ki, bütün sahələrini zənginləşdirməklə yanaşı, Ehtimal Nəzəriyyəsinin müxtəlif hissələri üzrə də məşğul olurdu. Bu predmet üzrə onun memuarları olduqca çoxdur. 128. Onun bəzi əsərlərini biz № 35, 65, 72-də göstərmişik. Onun dərc olunmuş tədqiqlərindən başqa, hələ dərc olunmamış əlyazmaları da vardır, məhz: «*Vera Estimatio sortis in Lulis*» və

* Mèmories de l'Académie des Sciens, 1760.

«*Reflexions sur une espèce singulière de loterie nommée Loterie Génoise*». Onun Prussiya Kralı II Fridrix ilə xüsusi növ lotereyalar* mövzusunda hələ heç yerdə dərc olunmamış yazışması da çox maraqlıdır. Lakin onun əsas xidməti İnteqral Hesabının təkmilləşdirilməsilə əlamətdardır ki, bu da Ehtimal Analizinin sürətlə uğurlara nail olmasına səbəb olmuşdur.

Laqranj xüsusi sonlu fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üçün çox sadə və rahat üsul təklif edərək, onun Ehtimal Hesabının çətin və eyni zamanda maraqlı məsələlərinin həllində tətbiqini göstərmişdir. Bu mühüm predmet haqqında bizim bu əsərimizdə III Fəsil və VII-nin Qeydlərində ətraflı yazılmışdır. № № 78 və 79-da biz, müşahidələrin ən əlverişli nəticələrinin təyin olunmasına aid Laqranjın digər bir əsərini də qeyd etmişik.

Ehtimal nəzəriyyəsinə aid *Lakroanın* bir əsərini də qeyd edək. Paris Elmlər Akademiyası *dəniz təhlükələrindən sığortalanma* haqqında məsələ təklif edir. Qaneedici həllər almayan Akademiya iki dəfə müsabiqə elan edir və artıq üçüncü dəfə səkkiz cavab əsərini alır; bunlardan ikisi – biri Lakroanın, digər isə Bikileyin (Bicquilley) əsərləri verilən mükafatın yarısının təqdim olunması ilə qəbul edilir. Tam mükafatın məbləği 6000 frank iki müəllif arasında bölünür: Lakroa 1800, Bikiley isə 1200 frank alır. Bundan başqa, Lakroa olduqca yaxşı bir əsər nəşr etdirir: *Traité élémentair de Calcul de Probabilités*; bu əsər artıq Fransada üç dəfə nəşr olunmuşdu. Bikiley də bu elm haqqında «*Du Calcul de Probabilites*» başlığı ilə 1783-də kitab dərc etdirmişdi.

Biz *Lejandr* və *Qaussun* müşahidələrin ən ehtimallı nəticələri mövzusunda əsərləri üzərində dayanmayacağıq. Bu haqda bizim X Fəslimizdə [№ 92] yazılmışdır. Elə bu Fəsildə, şərti tənliklərin ən əlverişli toplusu haqqında digər ətraflı tarixi məlumatlar və yeri gəlmişkən, ingilis riyaziyyatçısı *Kotssun* üsulu da (№ 85-in sonunda) verilmişdir.

Lakin analitik Ehtimal Nəzəriyyəsi heç bir kəsə *Laplas* qədər borclu deyildir. Bizim kitabda onun əsərləri haqqında tez-tez söhbət etdiyimizdən, biz özümüzə borc bilirik ki, bu böyük həndəsəçinin əsas xidmətlərini, ən qısa şəkildə də olsa, qeyd edək.

Laplasın Akademiyanın Elmi məcmuələrində analitik Ehtimal Nəzəriyyəsi haqqında dərc olunmuş çoxsaylı Memuarlarından başqa, o, 1812-də** ilk dəfə bu predmet haqqında onun bütün nəzəriyyəsini və onun bütün əsas tətdiqlərini əhatə edən dahi əsərini nəşr etdirdi. Laplasın heç bir əsərində, onun «*Théorie analytique des Probabilités*» əsərindəki kimi riyazi analizin əzəməti və baxışlarının incəliyi, dərin ağıl belə bir qüdrəti ilə əks olunmamışdı. Təsadüflər analizinin ən çətin məsələlərinin həllində, Laplas bu nəzəriyyəni ən mükəmməl səviyyəyə qaldırdı. Onun ehtimal haqqında nəzəriyyəni ən çox zənginləşdirmiş ən gözəl tədqiqlərindən biri kimi, xüsusi fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üçün doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi xüsusilə qeyd olunmalıdır: Çox böyük ədədlərlə ifadə olunan müxtəlif inteqral düsturların yaxınlaşma yolu ilə hesablanması; belə düsturların xüsusi hallarına əvvəllər də təsadüf olunurdu, məs., ($\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx$ müəyyən inteqralı ilə dəqiq ifadə olunan) $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ [№ 21] hasili üçün *Stirlinq* təqribi düsturu. Müşahidələr üzrə *a posteriori* ehtimalları üçün ümumi düsturlar (Fəsil VII), bərabər mümkün ola bilən hallar kimi qəbul edilən, bərabər mümkün olmayan hallarda baş verə biləcək hadisələrin ehtimallarının hesablanması (Fəsil V). Ehtimal Hesabının Günəş sistemində müşahidə olunan təzahürlərə müxtəlif tətbiqləri; məs., bütün planetləri və onların peyklərini öz oxları ətrafında fırlanaraq və öz orbitləri üzrə qərbdən şərqə, yəni Günəşin fırlanma hərəkəti ilə bir istiqamətdə və demək olar ki, onun ekvatoru ilə bir müstəvidə hərəkətlərinin ilkin səbəbinin varlığının ehtimalının təyin edilməsi. Müşahidələrlə bağlı elmlərə öz tətbiqləri ilə olduqca mühüm olan, müşahidələrin ən əlverişli nəticələri nəzəriyyəsi (Fəsil X), özünün indiki mükəmməlliyi ilə Laplasa borcludur. Laplas geodeji təsirlərə onun tətbiqlərini göstərmiş və inkişaf etdirmişdir. Nəhayət, bu nəzəriyyənin ayrıca bir «*Essai philosophique sur les Probabilités*» adlı əsərində ehtimal analizinin nəzəriyyəsi və tətbiqindən düsturlarsız və hesablamalarsız həqiqətin şərhini və tam xülasəsini aşkar edirik.

Budur, Ehtimal Analizində Laplasın ən mühüm əsərlərinin qısa siyahısı. Burada söylənilənlərdən belə nəticəyə gəlmək olar ki, öz başlanğıcını Fransada Paskal və Fermatın işlərilə almış bu nəzəriyyə özünün sürətlə mükəmməl bir nəzəriyyəyə çevrilməsi ilə, həmçinin Fransız həndəsəçisinə də borcludur.

120. Laplasın və həm də Qauss və Lejandrın indicə qeyd etdiyimiz əsərlərindən başqa bir çox astronom və riyaziyyatçıların müxtəlif tədqiqləri də bizim yüzilliyimizə aiddir. *Bessel, Plana, Enke, Struve, Poasson* (Puasson; H. M.), *Lindenay, Bonenberq* və başqaları müşahidələrin ən əlverişli nəticələri haqqında məsələlər ilə nəzəri və pratiki cəhətdən məşğul olmuşlar (№ № 89, 91, 92, 95). № 94-də göstərilən əsərlərdən başqa, Poasson Ehtimal hesabı haqqında bir neçə digər Memuarlar nəşr etdirmişdi, o cümlədən: «*Mémoire sur la probabilité du tir à la cible**». Çox maraqlı bu əsərdə Poasson, hədəfə atış ehtimalının riyazi nəzəriyyəsini şərh edərək, alınmış düsturlardan odlu silahların sərrastlığı və atıcıların bacarığı üzrə müqayisə üçün qaydalar alır. Fransız artilleriyaçılarının apardığı təcrübələr nəzəriyyəyə tamamilə haqq qazandırdı və alınmış düsturların praktiki cəhətdən faydalı olduğunu sübuta yetirdi. Poassonun bu elmə əsas xidməti – onun Mühakimə üsulunun riyazi nəzəriyyəsi haqqında: «*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, 1917*» adlı ayırıca bir Traktatıdır. Bu əsər *beş* fəsildən ibarətdir; ilk dörd fəsil Ehtimal Hesabının ümumi əsaslarının və onun ən çox istifadə olunan tətbiqlərinin şərhinə, sonuncu isə yalnız mühakimə üsulunun analitik nəzəriyyəsinə həsr olunmuşdur.

Elə bu kitabda Puasson Yakov Bernullinin bu teoremini dəyişə bilən mümkünolmalar halına genişləndirmiş və ümumi fikri *böyük ədədlər qanunu* adlandırmışdır. Bu barədə 35-ci səhifədə qeyd olunmuşdur.

Son illərdə ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olan adlarını çəkdiyimiz riyaziyyatçılardan başqa, bu predmet haqqında yazmış digərlərini də, o cümlədən: *Amper, Furye, Pyuissan, Hanzen, Ketle, Littrov, Mozer* və b. qeyd etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi əsasları, əsas tətbiqləri və uğurlarının qısa xülasəsini ardıcıl Fəsillərdə şərh edərək, biz kitabımızı, insan biliyinin elmləri sırasında bu elmin mühüm əhəmiyyəti haqqında Laplasın** sözləri ilə tamamlayacağıq: «Bütün deyilənlərdən görünür ki, Ehtimal Nəzəriyyəsi, əslində, yalnız sağlam düşüncənin analitik düsturlara çevrilməsidir: o, hətta çox vaxt şüursuz olsa belə, düzgün ağlın gəldiyi qərarın dəqiq qiymətləndirilməsi üçün bir vasitədir». Əgər biz, bir tərəfdən bu nəzəriyyənin yaratdığı bütün analitik üsulları, onun əsası üçün başlanğıcların gerçəkliyini, müxtəlif məsələlərin həllində bunlardan çıxarılmış məntiqi nəticələrin incəliyi və ağırlığını, digər tərəfdən, ehtimallar haqqında elm üzərində bərqərar olmuş ümumfaydalı təsisatları, onun hazırkı inkişafını və şübhəsiz ki, sonradan onun Natural Fəlsəfənin mühüm məsələlərinə və siyasi məsələlərə tətbiqini nəzərə alırıqsa; nəhayət, əgər biz, nəzərə alarıqsa ki, hesablanma aparılması mümkün olmayan predmetlərdə belə, həqiqətin aşkara çıxarılmasında o, bizi olduqca etibar ediləsi baxışlara gətirir, bizə ağlın yol verə biləcəyi səhvlərdən qorunmağı öyrədir, onda biz, bizim düşüncələrimizi ifadə edə bilən digər belə layiqli elmin olmadığı və onu ictimai təhsili təşkil edən nəzəriyyələr sisteminə daxil etmək olduqca faydalı olacağı nəticəsinə gəlirik».

---

* Bu əlyazmalar haqqında mənə məlumat vermiş İmperator Elmlər Akademiyasının daimi katibi P. N. Fussa olduqca minnətdaram. Məhz onda Eylerin müxtəlif riyazi predmetlər üzrə memuarları vardır. Ümid etmək olar ki, bu qiymətli əsərlər nə vaxtsa nəşr olunacaqdır.

** «Théorie analytique des Probabilités» əsəri ikinci dəfə 1814-də, üçüncü dəfə isə 1820-də nəşr olunmuşdur.

* *Memorial de l'Artillerie, Paris*, 1837, n^0 IV. Artilleriya sənəti üzrə bu məqalələrin külliyyatının Brüssel nəşri 1839-da dərc olunmuşdur. Bu nəşrin n^0 III-də, həmçinin Poassonun: «*Formules de probabilités relatives au résultat moyen des observations, qui peuvent ètre utiles dans l'Artillerie*» başlıqlı məqaləsi də dərc olunmuşdur.

** «Essai philosophique sur les Probabilités» əsərinin sonunda.

XIX əsrin 30-cu illərindən Гостехиздат nəşriyyatı tərəfindən buraxılan «Современная математика» seriyasında akademik S. N. Bernşteynin «Современная состояние теории вероятностей» adlı kitabı 1933-də işıq üzü gördü; bu kitaba onun iki məruzəsi daxil olunmuşdur, onlara giriş aşağıda dərc olunmuşdur.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

АКАД. С. Н. Б Е Р Н Ш Т Е Й Н

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО–ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

Moskvada 1927-də, Ümumrusiya riyaziyyatçılar qurultayında oxunmuş məruzə.

Təşkilat komitəsi mənə Qurultayda ehtimal nəzəriyyəsinin müasir vəziyyəti və onun tətbiqləri haqqında məruzə etməyimi təklif etdi. Siz bilirsiniz ki, bu mövzu çox geniş bir mövzudur və buna görə də, bizi maraqlandıran bütün oblastın tam analizini verməyi məndən gözləməməlisiniz, belə ki, buna görə bir neçə məruzəçi və mənə verilən vaxtdan qat-qat çox olan zamanın zəruriliyi tələb olunmalıydı. Belə şəraitdə qarşımda duran əsas çətinlik, materialın seçilməsi, şərtin təşkiledici prinsipinin seçilməsi idi.

Mən belə düşünürəm ki, bu halda mənim qarşımda duran əsas məsələ – ehtimal nəzəriyyəsinin ümumi riyazi problemlərini və onun mühüm tətbiqlərini metodoloji cəhətdən birləşdirən müəyyən bir sintezi verməyə cəhd etməkdir. Bu nöqteyi-nəzərdən mən yalnız xüsusi maraq kəsb edən bir çox riyazi tədqiqatlar haqqında susmağa məcburam və digər tərəfdən ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqlərinə baxarkən uyğun oblastda mühüm rol oynayan məsələlərdən çox prinsipial əhəmiyyəti olan məsələlər üzərində daha çox dayanmalı olacağam.

Çox uzaq keçmişdə deyil, keçən yüzilliyin ikinci yarısına qədər, ehtimal nəzəriyyəsinin bir elmi tədqiqat metodu kimi əhəmiyyəti olduqca məhdud idi; təbiətdə baş verən təzahürlərin öyrənilməsində bu nəzəriyyənin tətbiqinə Bernulli, Laplas, Puasson, Ketle və b.-nın adları ilə bağlı ayrı-ayrı cəhdləri olduqca zəif əsaslandırılmışdı və layiqli olaraq, tənqid hədəfinə çevrilmişdi və bu da 40 il bundan əvvəl Bertranın ehtimal nəzəriyyəsi kursuna yazdığı əsərinin məşhur giriş sözündə özünün ən parlaq ifadəsini tapmışdı.

Lakin Bertranın skeptitizmi, əgər belə ifadə etmək olarsa, ehtimal nəzəriyyəsinin elmin müxtəlif obastlarına sonrakı kortəbii tətbiqini nə yavaşıtmadı, nə də dayandırmadı. Artıq onun müasirləri Maksvell və Boltsmann molekulyar statistikanı fizikanın eksperimental əsaslandırılmış mühüm bölməsinə çevirirlər; digər tərəfdən Mendelin elementar varislik qanununun kəşfi ilə əlaqədar, ehtimal nəzəriyyəsinin biologiyaya tətbiqi, yalnız mümkün olmayıb, eyni zamanda zərurətə çevrilir. Bu zaman bilik sahələrinin demək olar ki, hamısında – astronomiyada, meteorologiyada demoqrafiya və s.-də təsadüf və qanunauyğunluq arasında gizli bir əlaqənin olduğunu aşkara çıxaran geniş statistik material yığılır və bu əlaqənin, təsnifat problemlərinin və statistik sıraların xarakteristikalarının ehtimal nəzəriyyəsi əsasında analizi günün əsas məsələlərindən birinə çevrilir.

Hal-hazırda biz tam əminliklə deyə bilərik ki, insan biliyinin bundan sonrakı sistemləşdirilməsi və ya elmin inkişafı ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi olmadan mümkün deyildir və buna görə də, ən əvvəl belə bir suala cavab verilməlidir: bu nəzəriyyəyə əsaslanan elm ikinci dərəcəlidirmi və ya elmin surroqatıdırmı?

Elə buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsinin əlahiddə riyazi fənn kimi formal cəhətdən məntiqi əsaslandırılması xüsusi bir əhəmiyyət kəsb edir və bu fənni yalnız paradokslardan təmizləndikdən və aksiomatik qurulduqdan sonra, həndəsə kimi, ehtimal nəzəriyyəsindən də dəqiq obyektiv dərketmə metodu kimi istifadə etmək mümkündür və onun tətbiqi hər bir xüsusi halda eksperimental və riyazi yoxlamanı zəruri və mümkün edir.

Sırf riyazi ehtimal nəzəriyyəsində, riyazi ehtimal adlanan əmsalın, hər hansı subyektiv və ya obyektiv praktiki əhəmiyyətinin olub-olmadığı maraq kəsb etməyə bilər. Yeganə riayət olunmalı tələb – ziddiyyətlərin olmamasıdır, məhz: verilən şərtlər ödənilməklə və qəbul olunmuş aksiomların yerinə yetirilməsi şərtilə göstərilən əmsalın müxtəlif hesablanma üsulları eyni bir nəticəyə gətirməlidir.

Bundan başqa, əgər biz ehtimal nəzəriyyəsinin nəticələrinin sadəcə ağlın oyunu olmamasını və empirik yoxlanıla bilinməsini istəyiriksə, onda təkliflər və mülahizələrin yalnız elə toplularına baxmaq zərurudir ki, bunlar haqqında onların gerçək və ya yalnış olduğunu faktiki olaraq, müəyyənləşdirmək mümkün ola bilsin. Mahiyyət etibarilə bərpa olunmayan idrak prosesi məhz ondan ibarətdir ki, mümkün olan təkliflərdən bu və digərlərinin bizim qəbul edə bildiklərimiz gerçəkləşir, yəni baş verir və bu halda onların eyni zamanda inkar edilməsi yanlış və qeyri-mümkün olur.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsinin əlahiddə idrak metodu kimi qurulması tələb edir ki, təklifin gerçəkliyi istisnasız olaraq birqiymətli şəkildə vahidə bərabər götürülən riyazi ehtimalın müəyyən maksimal qiyməti ilə xarakterizə olunsun, təklifin mümkünsüzlüyü isə sıfra bərabər götürülən ən kiçik ehtimala adekvat olsun. Təkliflərin sonlu topluları üçün göstərilən tələblərə əməl etmək çətin deyildir, çünki onların qəti zəruriliyi kifayət dərəcədə aydın etiraf olunmurdu, sonsuz toplulara baxdıqda isə paradokslar yaranır və yaranmaqda davam edir və mən bunlardan biri üzərində dayanmaq istəyirəm.

Mən məşhur bir məsələni nəzərdə tuturam: ixtiyari yazılmış bir kəsrin bölünməz olacağı ehtimalı nəyə bərabərdir? Bu məsələnin həlli Kroneker və Çebışevdən sonra, A. A. Markov tərəfindən onun klassik ehtimal hesabı kursunda verilmişdir.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARASINDA ASILILIQLAR HAQQINDA

Syurixdə 1932-də Beynəlxalq riyaziyyatçılar konqresində edilmiş məruzənin tərcüməsi.

1. Müasir elmin ən səciyyəvi xüsusiyyələrindən biri – onun ehtimal nəzəriyyəsi sxemlərinə ayırdığı böyük roldur. İlk baxışdan elmi mühakimələr metodunun başqa şəklə salınması klassik elmin determinizminə zidd təəssürat yaradır, belə ki, determinizm nöqteyi-nəzərindən, hər bir konkret təzahür – differensial, funksional və ya digər tənliklərlə əlaqələnən bəzi müşahidə olunan kəmiyyətlərin toplusu ilə birqiymətili təyin olunur və baxılan təzahürə bütün aləmin təsiri tam mənası ilə bu tənliklərin birqiymətli həll olunması üçün zəruri sərhəd şərtlərilə ifadə olunur.

Lakin bu determinist düstur – yalnız ümumi eksperimental yoxlanılması mümkün olmayan prinsipial bir deklarasiyadır, çünki tamamilə eyni şərtlərdə sınağı təkrar etmək mümkün deyildir; buna görə də, praktikada dəqiq elmlər həmişə bir qədər başqa düsturdan –

yuxarıda qeyd olunanla yalnız təqribən mümkün ola bilən səbəbolma düsturundan istifadə edirlər. Məhz, real təzahür eyni kəmiyyətlərlə xarakterizə olunan abstrakt sxemlə əvəz olunur və fərz olunur ki, sərhəd şərtləri kainatın ümumi vəziyyətindən asılı olmadan çox və ya az dərəcədə eskperimental verilə bilinər.

Aydındır ki, bu səbəbolma prinsipi – praktiki cəhətdən faydalı, yeganə prinsipdir və o, determinizmin yuxarıdakı tam düsturuna zidd olmayaraq, mütləq və universal tətbiqə iddiada bulunmur; bundan başqa, gerçəkliyi asılı olmayan tamamilə dayanıqlı oblastlara ayıraraq, bununla da, bu prinsip xüsusi bir məntiqi mühakimənin zəruriliyini aşkar edir və bu da asılı olmayan kimi qəbul edilən təzahürləri başqa bir növ sistemdə birləşdirə bilərdi.

Məsələn, maddi nöqtənin hərəkətinin ox üzərində müsbət istiqamətin seçilməsindən asılı olmadığı haqqında fərziyyə riyazi şəkildə belə bir müddəa ilə ifadə olunur: sürətin hər iki işarəsi bərabər ehtimallıdır. Eynilə də, verilən lotereya biletlərinin bərabər dəyərliliyi və ya simmetrikliyi və lotereya sahiblərinin tirajin istehsalından fiziki asılı olmamazlığı onu ifadə edir ki, hər bir şəxsin uduş ehtimalı onda olan biletlərin sayına mütənasibdir.

Əlbəttə ki, burada fərz olunan asılı olmamazlıq mütləq deyildir. Lakin stoxastik adlandırılan, bu tərzdə qurulan abstraktlaşdırılmış sxemlər müəyyən dərəcədə gerçəkliyə uyğun olur, necə ki, klassik elmin kazual sxemlərinin ətraf aləmdən asılı olmamazlığı fərz olunduğu kimi.

Sadə, ziddiyyətsiz aksiomatik bazaya əsaslanan Riyazi ehtimal nəzəriyyəsi, müşahidələr sayı olduqca böyük olduqda, praktiki cəhətdən adi deterministik sxemlərdən alınan, heç də az gerçək olmayan konkret görüntülərə gətirir və beləliklə, bu da, stoxastik sxemlər və onlarla təsvir olunan real təzahürlər arasında uyğunluğun olub-olmamasını sonsuz sayda üsullarını verir. Mən burada mənim gerçəkliyin hər hansı bir ümumi sxemə tamamilə gətirilə bilinməsinin qeyri-mümkünlüyü ilə on beş il əvvəl verdiyim bu aksiomatikanın prinsipləri üzərində dayanmayacağam.

Yalnız onu qeyd edəcəyəm ki, mənim nöqteyi-nəzərim, ümid edirəm ki, bu sonrakılardan kifayət qədər aydınlıqla aşkar olunacaqdır, empirik nöqteyi-nəzərdən – praktiklərin əksəriyyətinin sükutla üstündən keçdikləri, prof. Mizesin kurslarında sistematik tədris olunan, ehtimalı tezliklə eyniləşdirən nöqteyi-nəzərdən olduqca fərqlənir. Digər tərəfdən, mən burada xüsusilə qeyd etməyi özümə borc bilirəm ki, ehtimal nəzəriyyəsinin real aləmə faktiki tətbiqi üçün eyni ehtimala malik bütün təzahürlərin məntiqi birqiymətliliyini postulatlaşdırmaq zəruridir və ya da kı, eynilə 1 ehtimal yalnız mütləq yəqinliyə uyğundur.

Belə halda biz, hesablama nəticələri kimi tətbiq üçün böyük ədədlər qanunu tipli mühüm teoremlər aldıqda, bunlara əsasən, hər hansı bir sınağın baxılan A nəticəsinin ehtimalı olduqca kiçikdir, $\frac{1}{N}$ -dən də kiçikdir, burada N – olduqca böyük tam ədəddir; bu iddia sadəcə onu ifadə edir ki, baxılan sınağın A-ya obyektiv ekvivalent olan ən azı N sayda uyuşmayan nəticələri vardır (yəni, elə nəticələr ki, bunlar arasında fərq yalnız sınağın gedişindən asılı olmayan əlamətlər və ya razılaşmalarla ifadə olunur) və bu nəticələrdən isə yalnız biri baş verir.

2. Bu ilkin qeydlərdən sonra biz elementar stoxastik sxemi elə ideallaşdırılmış sınaq kimi təyin edə bilərik ki, bu sınaqda dəqiq müəyyən olunmuş α şərtlər kompleksi ödənildiyi A hadisəsi ya baş verə bilər, ya baş verməz, həm də α şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında obyektiv əlaqə A hadisəsinin riyazi ehtimalı adlandırılan p skalyar kəmiyyəti ilə tam mənada xarakterizə olunur (verilən şərtlər ödənildikdə).

Bu sadə sxemə diqqətlə baxaq.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА

МАТЕМАТИКА,

ЕЕ СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ И ЗНАЧЕНИЕ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА 1956

1132

1956-da «Издательство АН СССР» nəşriyyatında «Математика, ее содержание, методы и значение» adlı üç cildlik kollektiv əsər işıq üzü gördü. Girişdən bəzi parçalar belədir: «Bu kitabın tərtib olunmasında müəlliflər kollektivi sovet ziyalılarının olduqca geniş dairəsini ayrı-ayri riyazi fənlərin məzmunu və metodları ilə tanış etmək məqsədində olmuşlar … », «Oxucunun ilkin riyazi biliyinin minimum səviyyəsi üçün yalnız orta məktəb kursunu bilməsi fərz olunur, lakin bu materialın mənimsənilməsi nöqteyi-nəzərindən, üç cilddən hər biri digərindən fərqlidir … », «Kitabdan bütünlüklə, əsas etibarilə, yalnız riyazi analiz metodlarının tətbiqində bəzi vərdişlərə malik oxucular istifadə edə bilərlər … ».

Bu əsərin 2-ci cildi, XI fəsil – Ehtimal nəzəriyyəsi – akademik A. N. Kolmoqorov tərəfindən yazılmışdır və bu günə qədər təbiətşunaslıq və mühəndis mütəxəssisləri, riyaziyyat müəllimlərinin nümayəndələri üçün maraq doğurur.

§1. Ehtimal qanunauyğunluqları

Təbiət elmləri ilə müəyyən olunmuş ən sadə qanunauyğunluqlar – bizi maraqlandıran hər hansı hadisənin doğrudan da baş verib və ya baş verməməsi üçün şərtlərin təyin olunmasından ibarətdir; bu şərtlər aşağıdakı iki sxemdən biri ilə ifadə oluna bilinər:

1) əgər S şərtlər kompleksi yerinə yetirsə, onda A hadisəsi yəqinliklə baş verir;

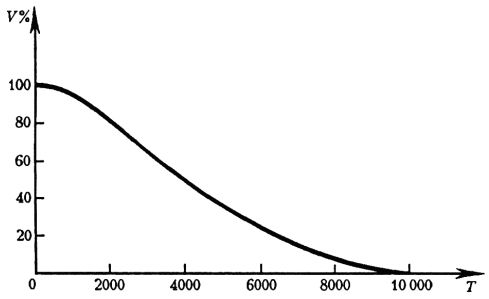
2) əgər S şərtlər kompleksi yerinə yetmirsə, onda A hadisəsi baş verə bilməz.

Birinci halda A hadisəsi S şərtlər kompleksinə nəzərən «yəqin» və ya «zəruri olan» hadisə, ikinici halda – «qeyri-mümkün» hadisə adlanır. Məs., atmosfer təzyiqi və $0^\circ < t < 100^\circ$ arasındakı t temperaturunda (– S şərtlər kompleksi) su yəqinliklə maye halında olur (A_1 yəqin hadisəsi), qaz və ya bərk halında isə ola bilməz (A_2 və A_3 qeyri-mümkün hadisələri).

S şərtlər kompleksi yerinə yetdikdə A hadisə bəzən baş verə bilirsə, bəzən isə baş verə bilmirsə, A hadisəsi bu şərtlər kompleksinə nəzərən

təsadüfi hadisə adlanır. Belə bir sual yaranır: A hadisəsinin təsadüfiliyi – S şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında heç bir qanunauyğun əlaqənin olmadığı kimi anlaşılmalıdırmı? Fərz edək ki, məs., müəyyən olunmuşdur ki, müəyyən bir zavodun istehsal etdiyi müəyyən tip (S şərtlər kompleksi) lapmalar bəzən 2 000 saatdan artıq yanır (A hadisəsi), bəzən isə bu müddətdən az vaxt ərzində sönərək, yararsız olur. Bununla belə zavodun məhsulunun keyfiyyət xarakteristikası üçün lampaların 2 000 saat işləməsi qabiliyyətini yoxlamaq məqsədilə sınaqlar aparılmalıdırmı? Bəlkə, lampaların praktik olaraq, hamısının fasiləsiz yanması və bütün lampaların sıradan çıxması üçün konkret müddətlə (uyğun olaraq, 500 saat və 10 000 saat) kifayətlənmək gərəkdir? Aydındır ki, lampaların işləmə müddətinin yalnız $500 \le T \le 10\,000$ bərabərsizlikləri ilə xarakteristikası istehlakçının az qane edəcəkdir. Əgər istehlakçıya lampaların təqribən 80% hallarında 2000 saatdan az işləməyəcəyi barədə deyilərsə, istehlakçı bu halda olduqca tam informasiya almış olur. T saatdan az olmayaraq işləyən lampaların, ixtiyari T qiymətində, $\nu(T)$ faizini göstərmək üçün heç olmasa şəkil 1-də təsvir olunmuş qrafikdə lampaların daha tam xarakteristikasını da vermək olar.

$\nu(t)$ -nin əyrisi praktik olaraq, olduqca çox sayda (100 – 200) lampadan ibarət sınaq partiyası ilə sınaqların köməyilə tapılır. Təbiidir ki, belə təyin olunmuş əyrinin yalnız o vaxt gerçək əhəmiyyəti olur ki, o, real qanunauyğunluğu yalnız baxılan sınaq partiyası üçün deyil, həm də materialların verilməsi keyfiyyətində və zavodda bərqərar istehsalat texnologiyasında istehsal olunan lampalar üçün düzgün əks etdirə bilsin, yəni digər sınaq partiyaları ilə aparılan sınaqlarda bu partiyalardakı lampalar da eyni şəraitdə istehsal olunmuşlarsa və sonda yaxın nəticələrə (yəni $\nu(t)$ -yə yaxın əyrilərə) – birinci sınaq partiyası üçün sınaqlar nəticəsində alınmış əyriyə gətirsin. Bu belə anlaşılmalıdır ki,



Şəkil 1

sınaq partiyalarında $\nu(T)$ əyriləri ilə ifadə olunan *statistik* qanunauyğunluq – yalnız lampanın işləmə müddətini, onun hazırlandığı materialların keyfiyyəti və onun hazırlanma texnologiyası ilə əlaqələndirən *ehtimal* qanunauyğunluğunu əks etdirən bir qanunauyğunluqdur.

Bu ehtmal qanunauyğunluğu $\mathrm{P}(T)$ funksiyası vasitəsilə verilir, burada $\mathrm{P}(T)$ – verilən şərtlərdə, ayrıca bir lapmanın T saatdan az yanmayacağı ehtimalıdır.

A hadisəsinin S şərtlərində müəyyən bir

$$P(A \mid S) = p$$

ehtimalının varlığı haqqında hökm belə ifadə olunur: olduqca uzun müxtəlif sınaqlar seriyalarında (yəni S şərtlər kompleksi yerinə yetirilməklə aparılan sınaqlar) A hadisəsinin baş verməsi üçün alınan

$$\nu_r = \frac{\mu_r}{n_r}$$

tezlikləri təxminən eyni olub, p -yə yaxın olur (burada n_r , – r -ci seriyadakı sınaqlar sayı, μ_r , – A hadisəsi baş verən sınaqların sayıdır).

Sınaqlar sayı çox olduqca, ν tezliklərinin, «ümumiyyətlə», daha yaxın ola bildiyi $p = P(A \mid S)$ konstantının varlığı haqqında hipotez (S şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında əlaqənin xarakteri ilə obyektiv şərtləşdirilmiş) təsadüfi hadisələrin geniş sinfi üçün özünü yaxşı doğruldur. Belə təsadüfi hadisələr təbii olaraq, *ehtimali – təsadüfi*[*] hadisələr adlandırılır. Yuxarıda baxılan məsələ kütləvi istehsalatın ehtimal qanunauyğunluqları oblastına aiddir. Belə qanunauyğunluqların reallığı heç bir şübhə doğurmur. Kütləvi məhsulun statistik seçimi nəzarətinin olduqca mühüm praktik üsulları bu qanunauyğunluqlara əsaslanır. Ehtimali qanunauyğunluqların yaranması cəhətdən ona yaxın oblast – atəş nəzəriyyəsində əsas əhəmiyyət kəsb edən – mərmilərin səpələnməsinin ehtimal qanunauyğunluqları oblastıdır. Bu misal, ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının texniki məsələlərə real tətbiqinə aid ilk misallardan biri olduğundan, biz atəş nəzəriyyəsinin bəzi ən sadə məsələlərinə sonradan qayıdacağıq.

Sınaqların sayı n -in böyük qiymətlərində p ehtimalının ν tezliyinə «yaxınlığı» barədə yuxarıdakı mülahizələr bir qədər aydın deyildir; biz n -in bu və ya digər qiymətlərində $\nu - p$ fərqinin nə dərəcədə kiçik olması haqqında heç bir söz demədik. ν -nün p -yə yaxınlıq dərəcəsi §3-də kəmiyyətcə qiymətləndiriləcəkdir. Qeyd etmək maraqlıdır ki, bu sualla əlaqədar hər hansı bir qeyri-müəyyənliyi tamamilə istisna etmək olmaz. ν və p -nin yaxınlığı haqqında müddəa, sualın incələnməsində göründüyü kimi, yalnız ehtimali xarakter daşıyır.

§ 2. Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları və əsas düsturları

Statistik qanunauyğunların böyük rolunun olduğu heç bir şübhə doğurmadığından, qarşıya bunların öyrənilməsi üçün metodlar haqqında məsələ çıxır. İlk əvvəl onların sırf empirik eksperimental mümkünlüyü haqqında fikir yaranır. Ehtimali qanunauyğunluq kütləvi proseslərdə aşkar olunduğundan, onun aşkar olunması üçün kütləvi eksperiment aparılması zəruridir.

Belə təsviretmə yalnız qismən doğrudur. Bəzi ehtimali qanunauyğunluqları eksperimental olaraq müəyyənləşdirib, bəzi ümumi fərziyyələr vasitəsilə məntiqi yolla və ya hesablama yolu ilə bunlardan yeni ehtimali qanunauyğunluqlar almaq olar. Bunu nə cür etmək üsulunu göstərməzdən əvvəl, biz ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi əsas təriflərini və düsturlarını verməliyik.

Ehtimalın $\nu = \dfrac{m}{n}$ tezliyinin normal qiyməti kimi təsəvvüründən, $0 \le m \le n$ və $0 \le \nu \le 1$ olduqda ixtiyari A hadisəsinin ehtimalı $\mathbf{P}(A)$ -nın sıfır və vahid[*] arasında qiymət aldığını hesab etmək təbiidir, yəni

$$0 \le \mathbf{P}(A) \le 1 . \qquad (1)$$

S şərtlər kompleksi yerinə yetdikdə, hər ikisi eyni zamanda baş verməyən hadisələrə *uyuşmayan* hadisələr deyilir. Məs., oyun zərinin atılmasında cüt xalın düşməsi hadisəsi və üç xalının düşməsi uyuşmayan hadisələrdir. A_1 və A_2 hadisələrindən heç olmasa biri baş verdikdə baş verən A hadisəsinə, A_1 və A_2 hadisələrinin *birləşməsi* deyilir. Məs., oyun zərinin atılmasında A_1 , – 1 və ya 2 xalının, A_2 , – 2 və ya 3 xalının düşməsi hadisələri olarsa, A , – 1, 2 və ya 3 xalının düşməsi hadisəsidir. Aydındır ki, iki uyuşmayan A_1 və A_2 hadisələrinin və onların birləşməsi $A = A_1 \cup A_2$ hadisələrinin baş vermə sayları, uyğun olaraq, m_1 , m_2 və m olarsa, $m = m_1 + m_2$ bərabərliyi doğrudur, bu isə uyğun tezliklər üçün $\nu = \nu_1 + \nu_2$ bərabərliyini verir.

Bu – A_1 və A_2 uyuşmayan hadisələr, $A_1 \cup A_2$ onların birləşməsi olduqda aşağıdakı, ehtimalların toplanması aksiomunun:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) \qquad (2)$$

[*] Bəzən bunlar *stoxastik* adlandırılır.

[*] $\mathbf{P}(A \mid S)$ işarələnməsini qısalıq naminə $\mathbf{P}(A)$ ilə işarə edəcəyik.

bərabərliyi ilə ifadəsinin təbiiliyinə gətirir.

Daha sonra U yəqin hadisəsi üçün

$$\mathbf{P}(U) = 1 \tag{3}$$

qəbul etmək təbiidir.

Bütün riyazi ehtimal nəzəriyyəsi (1) , (2) və (3) tipli sadə aksiomlar üzərində qurulur. Sırf riyazi nöqteyi-nəzərdən, *ehtimal* – «hadisənin» elə ədədi funksiyasıdır ki, o, bir sıra aksiomatik qeyd olunmuş xassələrə malikdir. Əgər hadisə anlayışının, hadisələrin birləşməsi və aşağıda tərifi verilən hadisələrin *birgə baş verməsi* (rus. *совмещение событий*) kimi anlayışların özlərini aksiomatizasiyasında israr olunmazsa, ehtimalın (1), (2) və (3) düsturları ilə ifadə olunan xassələri elementar ehtimal nəzəriyyəsi adlandırılan nəzəriyyəsinin qurulması üçün yetərli əsasdır. Bu nəzəriyyəni öyrənmək istəyənlər üçün «hadisə» və «ehtimal» terminlərinin anlaşılmasına inamla yanaşmaq faydalıdır, lakin onu bilmək də faydalıdır ki, bu anlayışların tam mənası ilə formalaşması çətin olduğundan onların real mənası ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlaşdırılmış təmiz riyazi şərhinin tam formal və aydın surətdə anlaşılmasına təsir etmir.

İxtiyari sayda baxılan $A_1, A_2, ..., A_s$ hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəni bu hadisələrin birləşməsi adlandıracağıq. Onda ixtiyari sayda cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, ..., A_s$ hadisələri və onların birləşməsi A hadisəsi üçün toplanma aksiomundan

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ ... \ + \mathbf{P}(A_s)$$

bərabərliyi alınır (ehtimalların toplanma teoremi adlandırılan).

Əgər bu hadisələrin birləşməsi yəqin hadisədirsə (yəni S şərtlər kompleksi hər dəfə yerinə yetdikdə A_k hadisələrindən biri hökmən baş verirsə), onda

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ ... \ + \mathbf{P}(A_s) = 1 \ .$$

Bu halda $A_1, A_2, \ ... \ , A_s$ hadisələr sistemi – hadisələrin tam sistemi adlanır.

İndi, ümumiyyətlə, iki – uyuşan A və B [*] hadisələrinə baxaq. Əgər C hadisəsi A və B hadisələrinin hər ikisi baş verdikdə hadisədirsə, C hadisəsini A və B hadisələrinin eyni zamanda baş vermə (birgəlik, kəsişməsi H. M.) hadisəsi adlandıracağıq ($C = AB$, $= A \cap B$ H. M.).

Məs., A – oyun zəri atıldıqda düşən xallar sayının cüt olması hadisəsi, B – düşən düşən xalın 3-ə bölünən olması hadisəsi olarsa, onda C hadisəsi düşən xalın altıya bərabər olmasıdır.

Təkrarlanan n sayda (n – böyük fərz olunur) sınaqlarda A hadisəsinin m dəfə, B hadisəsinin l dəfə, lakin k dəfə A hadisəsi ilə birgə baş verdiyi fərz olunur. k/m nisbətini təbii olaraq, B hadisəsinin A şərtinə nəzərən şərti tezliyi adlandırmaq olar. $\frac{k}{m}$, $\frac{m}{n}$ və $\frac{k}{n}$ tezliklərini bir-birilə əlaqələndirən

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{n} : \frac{m}{n}$$

düsturuna aşağıdakı tərifi vermək təbiidir.

A şərtində B hadisəsinin *şərti ehtimalı* – $\mathbf{P}(B \mid A)$, aşağıdakı nisbətə deyilir:

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} \ .$$

Əlbəttə, burada $\mathbf{P}(A) \neq 0$ olduğu fərz olunur.

Burada, əgər A və B hadisələri mahiyyətcə bir-birilə əlaqəli deyildirlərsə, təbii olaraq, belə fərz etmək olar ki, A hadisəsi baş verərsə, ümumiyyətlə, bütün sınaqlara baxıldığı halda B hadisəsinin nə çox, nə az dəfə baş verməsinin əhəmiyyəti yoxdur, yəni təqribən $\frac{k}{m} \sim \frac{l}{n}$ və ya

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n} \sim \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{n} \ .$$

Sonuncu təqribi bərabərlikdə $\frac{m}{n} = \nu_A$, – A hadisəsinin tezliyidir, $\frac{l}{n} = \nu_B$, – B hadisəsinin tezliyidir, nəhayət, $\frac{k}{n} = \nu_{AB}$, – A və B hadisələrinin birgəlik (kəsişməsi) hadisəsinin tezliyidir.

Biz görürük ki, bu tezliklər

$$\nu_{AB} \sim \nu_A \cdot \nu_B$$

münasibəti ilə əlaqəlidirlər. Buna görə də, A , B və AB hadisələrinin ehtimalları üçün uyğun olaraq,

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \tag{4}$$

dəqiq bərabərliyini götürmək təbiidir.

(4) bərabərliyi A və B hadisələrinin *asılı olmamazlığının* tərifinin ifadəsidir.

İxtiyari sayda hadisələrin asılı olmamazlığının tərifini analoji vermək olar. Bundan başqa ixtiyari sayda sınaqların asılı olmamazlığının tərifini də vermək olar (bu kobud deyimdə belə anlaşılmalıdır ki, sınaqların bir hissəsinin bu və ya digər nəticəsi, digər sınaqların nəticəsinə heç bir tərzdə təsir etmir)[*].

Şəkil 2

Asılı olmamazlıq anlayışının real mənasının müzakirəsinə biz §4 -də bir daha qayıdacağıq.

İndi isə n sayda asılı olmayan sınaqlardan hər birində p ehtimalı ilə baş verən hər hansı A hadisəsinin k dəfə baş verməsi ehtimalı P_k -nı hesablayaq. $\overline{A}$ ilə A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəni işarə edək. Aydındır ki,

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - p \ .$$

Sınaqların asılı olmamazlığının tərifinə əsasən A hadisəsinin k dəfə baş verməsindən və $n-k$ dəfə A hadisəsinini baş verməməsindən təşkil olunan hər hansı müəyyən ardıcıllığın ehtimalı

$$p^k (1-p)^{n-k} \tag{5}$$

hasilinə bərabərdir.

Məs., $n = 5$, $k = 2$ olduqda nəticələrin $A\overline{A}A\overline{A}A$ ardıcıllığının ehtimalı, – $p(1-p)\,p(1-p)(1-p)$ olacaqdır.

---

[*] analoji olaraq ixtiyari sayda $A_1, A_2, \ ... \ , A_S$ hadisələrinin kəsişməsi – C hadisəsi, bütün bu hadisələr baş verdikdə baş verən hadisədir.

[*] Dəqiq olaraq, *sınaqların asılı olmamazlığı* aşağıdakı kimi anlaşılır. n sayda sınağı hər hansı cür iki qrupa bölək: A – birinci qrupun bütün sınaqlarının əvvəlcədən verilmiş hər hansı nəticələrlə ifadə olunduğu hadisə, B – ikinci qrupun hər hansı əvvəlcədən verilmiş nəticələrlə ifadə olunduğu hadisə olsun. Əgər ixtiyari bölgüdə və nəticələrin ixtiyari cür verildiyi halında A və B hadisələri (4) mənasında asılı olmazlarsa, sınaqlar *asılı olmayan* (küllüyyatca) sınaqlar adlanır.

Toplanma teoreminə əsasən A hadisəsinin k dəfə baş verməsi və $n-k$ dəfə baş verməməsi ehtimalı bütün ardıcıllıqların ehtimallarının cəmi P_k -ya bərabər olacaqdır, yəni (5)-ə əsasən, bütün belə ardıcıllıqlar sayının $p^k(1-p)^{n-k}$ hasilinə bərabər olacaqdır. Belə ardıcıllıqların sayı, aydındır ki, n elementdən k elementli birləşmələrin sayına bərabərdir, çünki k sayda əlverişli nəticə n sayda sınaqlar sırasında, ixtiyari k yerdə ola bilər.

Beləliklə, nəticədə

$$P_k = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}, \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,n) \tag{6}$$

(binomial paylanma adlandırılan) münasibətini alırıq. Yuxarıda verilmiş tərif və düsturların nə cür tətbiq edildiyini görmək üçün atəş nəzəriyyəsinə aid bir misala baxaq.

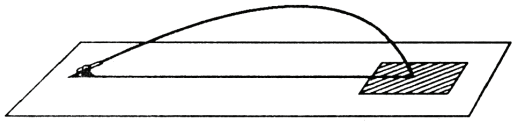
Hədəfin məhvi üçün hədəfə beş dəfə düşmə kifayətdir. Bizi belə bir sual maraqlandırır: 40 atəş nəticəsində zəruri olan beş dəfə düşməyə biz əmin ola bilərikmi? Bu məsələnin sırf empirik həll metodu aşağıdakı kimi ola bilərdi. Hədəfin verilmiş ölçüləri ilə verilən atəş məsafəsində hər dəfə 40 atəş açmaq şərtilə çoxlu (məs., 200) atəş açılır və beş dəfədən az olmamaq şərtilə hədəfə düşmə üçün neçə dəfə atəş açılması təyin olunmalıdır. Əgər bu nəticə 200 atəşdən 195-ində alınmışdırsa, onda P ehtimalı təqribən

$$P = \frac{195}{200} = 0{,}975$$

qiymətini alır.

Araşdırmanın baxılan sırf empirik resepti üzrə biz olduqca xüsusi bir məsələnin həlli üçün 8 000 mərmi sərf etməli olardıq. Əlbəttə ki, praktikada belə hərəkət etmirlər. Əvəzində isə hədəfin ölçüləri nəzərə alınmadan verilən atış məsafəsində mərmilərin səpələnməsi araşdırılır. Əslində isə, məsafənin uzaqlığı üzrə yayınmalar və orta düşmə nöqtəsindən yan tərəflərə yayınmalar, tezlik anlamında təsadüf olunan müxtəlif ölçülü yayınmalır, şəkil 2-də təsvir olunma qanununu tabedirlər. Burada B hərfi ilə ehtimal yayınması kimi adlandırılmış yayınma işarə olunmuşdur. Ümumiyyətlə isə, ehtimal olunan yayınma, məsafə uzaqlığı üzrə yayınmalar və yan tərəflərə yayınmalar müxtəlifdir və atəş məsafəsinin artırılması ilə o da artır. Hər bir silah və mərmi növü üçün müxtəlif uzaqlıq məsafələri üzrə ehtimal olunan yayınmalar artilleriya poliqonlarında sınaq atışları vasitəsilə empirik olaraq tapılır. Bundan sonra bu tip mümkün ola bilən, yuxarıda qoyulduğu kimi qoyulan xüsusi məsələlərin həlli hesablanma yolu ilə aparılır.

Sadəlik üçün fərz edək ki, bizi maraqlandıran hədəf – bir tərəfi atəş xətti boyu istiqamətlənmiş, uzunluğu isə uzaqlıq üzrə ehtimal olunan yayınmanın iki mislinə bərabər, digər tərəfi isə atəş xəttinə perpendikulyar, uzunluğu yan tərəflərə ehtimal olunan yayınmanın iki mislinə bərabər, düzbucaqlı şəklindədir. Daha sonra fərz edək ki, hədəf yaxşı atəşə tutulmuşdur və mərmilərin orta uçuş trayektoriyası hədəfin mərkəzindən keçir.



Şəkil 3

Bir də fərz edək ki, yan tərəflərə yayınma və uzaqlıq üzrə yayınma bir-birindən asılı deyildirlər*. Onda verilmiş mərminin hədəfə düşməsi üçün – onun uzaqlıq və yan tərəflərə yayınmalarının uyğun ehtimal olunan yayınmaları aşması zəruri və kafidir. Şəkil 2-yə uyğun olaraq bu hadisələrdən hər biri, təxminən atılmış mərmilərin 50%-i üçün, yəni $1/2$ ehtimalı ilə müşahidə olunacaqdır. Bu hadisələrin ikisi də birlikdə atılmış mərmilərin 25%-i üçün baş verəcəkdir, yəni ayrıca bir mərminin hədəfə düşməsi ehtimalı –

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

ayrıca bir atəşdə hədəfə düşməməsi ehtimalı

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

olacaqdır.

Hər biri ayrı-ayrı atəşlərdə hədəfə düşmələr asılı olmayan hadisələr olduğundan (6) binomial düsturunu tətbiq edərək, 40 atəşdə yalnız k dəfə hədəfə düşmə ehtimalının

$$P_k = C_{40}^k\, p^k\, q^{n-k} = \frac{40\cdot 39\cdot \ldots\cdot (39-k)}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{40-k}$$

olduğunu alırıq. Onda bizi maraqlandıran, hədəfə beş dəfədən az olmamaq şərtilə düşmə hadisəsinin ehtimalı – $P = \sum_{k=5}^{40} P_k$ düsturu ilə ifadə olunacaqdır. Lakin bu ehtimalı $P = 1 - Q$, $Q = \sum_{k=0}^{4} P_k$ düsturu ilə hesablamaq daha münasibdir.

P_k ehtimallarını hesablamaq olur:

$$P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \sim 0{,}00001,$$

$$P_1 = 40\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{39}\cdot\frac{1}{4} \sim 0{,}00013,$$

$$P_2 = \frac{40\cdot 39}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{38}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \sim 0,\ 00087,$$

$$P_3 = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{37}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 \sim 0{,}0037,$$

$$P_4 = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{36}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 \sim 0{,}0113,$$

və buradan

$$Q = 0{,}016, \quad P = 0{,}984$$

olduğunu alırıq.

P ehtimalı üçün aldığımız qiymət hətta vahidə yaxındır və o, qoyulan məsələnin yerinə yetirilməsini təmin edə biləcək mərmiləri sayının təyin olunmasında atış nəzəriyyəsində, adətən, kafi sayılan ehtimaldan da çoxdur. Çox vaxt qoyulmuş məsələnin 0, 95 ehtimalı ilə yerinə yetəcəyini təmin edən mərmilər sayını göstərməyin mümkün olduğu hesab edilir.

Baxılan misal bir qədər sxematik olsa da, ehtimal hesablamalarının mühümlüyünü kifayət qədər inandırıcı nümayiş etdirir. Ehtimal olunan yayınmaların atış məsafəsindən asılılığının sınaqdan asılılığını poliqonda az da olsa, atışlar etməklə (bu kifayət edir) müəyyən etdikdən sonra, biz bəzi, çox da çətin olmayan hesablamaların köməyilə ən müxtəlif suallara cavab ala bilirik. Çoxsaylı təsadüfi faktorların birgə təsiri də digər bütün oblastlarda də statistik qanunauyğunluqlara gətirir. Kütləvi müşahidələrin bilavasitə işlənilməsindən sonra bu statistik qanunauyğunluqlardan yalnız ən sadələri aşkar olunur, yəni yalnız ilkin ehtimallar tapılır. Sonra ehtimal nəzəriyyəsinin qanunlarının köməyilə, bu ilkin ehtimallar əsasında daha mürəkkəb hadisələrin ehtimalları hesablanılır və bu hesablamalara əsaslanaraq, bizi maraqlandıran mürəkkəb təsadüfi hadisələri idarə edən statistik qanunauyğunluqlar haqqında nəticələr çıxarılır.

* Asılı olmamazlılığın bu fərziyyəsi sınaqla təsdiq olunur.

Bəzən ilkin ehtimallar olduqca inandırıcı simmetriya mülahizələrindən təyin oluna bilindiyindən, kütləvi statistik material toplamağa ehtiyac duyulmur. Məs., oyun zəri, yəni bircins maddədən hazırlanmış kub, olduqca yüksək hündürlükdən atıldıqda öz üzlərindən hər bir üzü üstə eyni $1/6$ ehtimalla düşməsi haqqında ənənəvi nəticəyə, bu nəticənin doğruluğunu sübut etmək üçün kifayət edəcək qədər müşahidə materialının toplanılmasından xeyli əvvəl gəlinmişdir. Bu növ sistematik sınaqlar, ehtimal nəzəriyyəsi bir elm kimi formalaşdıqdan sonra, əsas etibarilə, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə dərsliklərin müəllifləri tərəfindən XVIII-XX əsrlərdə aparılmışdı. Bu sınaqların nəticəsi qaneedici olsa da, belə fəaliyyətin yeni analoji hallar üçün genişləndirilməsi çətin ki, maraq doğursun. Məs., hələ ki, bizə məlum olduğuna görə, heç bir kəs tərəfindən bircins materialdan hazırlanmış düzgün oniki üzlünün atılması ilə bağlı olduqca geniş sınaqlar aparılmamışdır. Lakin əgər, məs., 12 000 belə eksperiment aparılsaydı, şübhəsiz ki, onikiüzlü hər bir üzü üstə təxminən min halda düşə bilərdi.

Simmetriya və ya bircinslik baxımından ilkin ehtimalların təyin olunması bir çox ciddi elmi məsələlərdə böyük rola malikdir, məs., heç bir qaydaya tabe olmadan (xaotik; H. M.) hərəkət edən qaz molekullarının və ya qalaktika ulduzlarının toqquşması və ya bir-birinə yaxınlaşması kimi bütün məsələlərdə belə ehtimalların təyin olunması kimi.

Əlbəttə ki, belə daha incə hallarda heç olmasa şərtləşdirilmiş razılaşmalar dolayısı ilə də olsa, bunlardan alınmış nəticələrin sınaqla müqayisəsi yolu ilə yoxlanılmalıdır.

§3. Böyük ədədlər qanunu və limit teoremləri

Sınaqların «böyük» seriyalarında hadisənin baş verməsi tezliklərinin onun ehtimalına «yaxın» olması haqqında müddəanın kəmiyyətcə dəqiqləşdirilməsinə ehtiyacın duyulması tamamilə təbiidir. Bu məsələnin məlum incəliyi aydın təsəvvür olunmalıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi üçün ən tipik hallarda belə olur ki, olduqca uzun sınaqlar seriyalarında tezliyin hər iki «sərhəd» qiymətləri nəzəri olaraq mümkün olur, yəni

$$\frac{\mu}{n}=\frac{n}{n}=1 \quad \text{və} \quad \frac{\mu}{n}=\frac{0}{n}=0$$

qiymətləri. Buna görə də, sınaqlar sayı n -in qiymətindən asılı olmayaraq, məs., tam yəqinliklə hökm etmək olmaz ki,

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\frac{1}{10}$$

bərabərsizliyi ödəniləcəkdir.

Məs., A – oyun zəri atıldıqda altı xalının düşməsi hadisəsidirsə, onda sınaqları n dəfə təkrar etdikdə, $\left(\frac{1}{6}\right)^n>0$ ehtimalı ilə altı xalı həmişə alınacaqdır, yəni $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ ehtimalı ilə altı xalının düşməsi tezliyinin *vahidə* bərabər qiyməti alınacaqdır, $\left(1-\frac{1}{6}\right)^n>0$ ehtimalı ilə altı xalı heç bir dəfə də düşməyəcəkdir, yəni altı xalının düşməsi tezliyi *sıfra* bərabər olacaqdır.

Belə tip bütün məsələlərdə tezlik və ehtimal arasında yaxınlığın qeyri-trivial qiyməti tam yəqinliklə alınmır, bu, yalnız vahiddən kiçik ehtimalla alınır. Məs., isbat etmək olur ki, asılı olmayan sınaqlarda* baxılan hadisənin ehtimalı sabit p ədədinə bərabərdirsə, onda $n=10000$, p isə ixtiyari olarsa $(0<p<1)$, $\frac{\mu}{n}$ tezliyi üçün

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<0,02 \tag{7}$$

bərabərsizliyi

$$P>0,9999 \tag{8}$$

ehtimalı ilə ödəniləcəkdir.

Burada biz ilk əvvəl onu qeyd etmək istəyirik ki, bu tərzdə verilmiş şərhdə $\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p ehtimalına yaxınlığı yeni daxil olunmuş P ehtimalı ilə bağlıdır. 128. (8) qiymətləndirilməsinin real mənası belədir: n sınaqdan ibarət N sayda seriyalar apardıqda (7) bərabərsizliyinin ödənildiyi seriyaların sayı M -i hesabladıqda, N -in olduqca böyük qiymətlərində

$$\frac{M}{N}\approx P<0,9999 \tag{9}$$

münasibəti təqribən ödəniləcəkdir. Lakin biz (9) münasibətini $\frac{M}{N}$ -in P -yə yaxınlıq dərəcəsi cəhətdən, həm də etibarlılıq cəhətdən dəqiqləşdirmək istəsək, bu etibarlılıq baxımdan bu yaxınlığın olacağını hökm etmək olarsa, onda $\frac{\mu}{n}$ və p -nin yaxınlığına tətbiq etdiklərimizə analoji surətdə davranmalıyıq. Lazım gələrsə, bu mülahizənin qeyri-məhdud sayda təkrar etmək olar, lakin tamamilə aydındır ki, bu bizə son mərhələdə ehtimallara bu terminin primitiv kobud mənasında müraciət etmək zərurətindən tamamilə xilas olunmağa imkan yaradacaqdır.

Bu növ çətinliklərin ehtimal nəzəriyyəsinə xas olan bir xüsusiyyət olduğunu düşünmək olmaz. Real təzahürlərin riyazi öyrənilməsində biz onları həmişə sxemləşdiririk. Gerçək təzahürlərin nəzəri sxemdən yayınmalarını öz növbəsində riyazi cəhətdən öyrənmək olar. Lakin buna görə, yayınmaların özləri də hər hansı surətdə sxemləşdirilməlidir və bu sxemdən isə ondan asılı olmayan yayınmaların formal riyazi analizi olunmadan istifadə etmək olar.

Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, n sınaqdan ibarət bir seriyaya

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<0,02\right\}>0,9999 \tag{10}$$

qiymətləndirilməsini* real olaraq, tətbiq etdikdə biz eyni zamanda simmetriyanın hər hansı mülahizələrinə istinad edirik: (10) bərabərsizliyindən görünür ki, seriyaların böyük N qiymətlərində (7) münasibəti 99,99%-dən az olmayan hallarda ödəniləcəkdir; təbii olaraq, böyük əminliklə gözləmək olar ki, məsələn, (7) bərabərsizliyi n sınaqdan ibarət bizi maraqlandıran müəyyən bir seriyada ödəniləcəkdir, bu şərtlə ki, bu seriyanın digər seriyalar sırasında heç bir xüsusilə seçilən bir vəziyyəti olduğuna bizim heç bir əsasımız olmazsa.

Müxtəlif praktiki məsələlərdə nəzərə alınmayan ehtimallar müxtəlifdir. Yuxarıda qeyd olunmuşdu ki, mərmilərin nə qədər istifadə edilməsinin bu qoyulan məsələnin həllinə zəmanət verən hesablamalarında qoyulan məsələnin 0,95 ehtimalı ilə həllindəki mərmilər sayının norması ilə kifayətlənmək olur, yəni 0,05-i aşmayan ehtimallar nəzərə alınmır. Bu onunla izah olunur ki, yalnız 0,01-dən kiçik olan ehtimallar nəzərə alınmadıqda, aparılan hesablamalar bizi mərmilər sayının normasının böyük olmasına gətirərdi, yəni praktik olaraq, bir çox hallarda bu məsələnin həlli üçün verilmiş zaman ərzində onun həllinin qeyri-mümkünlüyü və ya mərmi ehtiyatının faktiki olaraq, istifadə oluna bilinəcəyi nəticəsinə gətirmiş olardı.

Bəzən, hətta eyni araşdırmalarda belə, 0,05-dən kiçik ehtimalların nəzərə alınmaması ilə hesablamalara əsaslanan statistik qaydalarla kifayətlənilir. Lakin bunu yalnız daha geniş material toplamaq çətin olduğu hallarda etmək olur. Belə qaydalara bir misal kimi aşağıdakı məsələyə baxaq. Fərz edək ki, hər hansı bir xəstəliyin müalicəsində

* s. 1099-dəki haşiyəyə bax, (8)-in isbatı 1101-da verilir.

* (7) bərabərsizliyinin ehtimalı üçün (8) qiymətləndirilməsi belə yazılır.

müəyyən şərtlərlə istifadə olunan dərman 50% hallarda, yəni 0,5 ehtimalı ilə müsbət nəticə verir. Yeni dərman təklif olunur və onun köhnədən üstünlüyünü yoxlamaq üçün köhnə dərmanın effektivliyi müəyyən olunmuş 50% xəstələrdən qərəzsiz seçilmiş on nəfər üzərində onu yoxlamaq planlaşdırılır. Əgər on haldan səkkizində bu yeni dərman müsbət nəticə verərsə, onda onun üstün olduğu isbat olunmuş sayılır. Asanlıqla hesablamaq olar ki, belə qərar 0,05 tərtibdən ehtimalla səhv nəticə (yəni yeni dərmanın köhnəsi ilə eyni güclü və ya hətta ondan da pis olmasına baxmayaraq, onun üstün olduğu haqqında nəticə) almaq ehtimalının nəzərə alınmaması ilə əlaqədardır. Əslinə qaldıqda, on sınaqdan hər birində müsbət nəticənin ehtimalı p -yə bərabərdirsə, on sınaqda 10, 9 və 8 müsbət nəticə alınması ehtimalları, uyğun olaraq,

$$P_{10}=p^{10},$$

$$P_9=10p^9(1-p),$$

$$P_8=45p^8(1-p)^2,$$

olacaqdır. $p=\frac{1}{2}$ halında bu ehtimalları cəmləyərək,

$$P=P_{10}+P_9+P_8=\frac{56}{1024}\sim 0{,}05$$

olduğunu alırıq. Beləliklə, biz yeni dərmanın köhnəsilə doğrudan da, eynigüclü olduğunu fərz edərək, biz səhv qərar çıxarmaqla, yəni yeni dərmanın köhnəsindən, $0{,}05$ tərtibdən ehtimalla yaxşı olduğu haqqında qərar verməklə risk edirik. Bu ehtimalı sınaqlar sayı $(n=10)$ n -i artırmadan təqribən 0,01 tərtib ehtimala gətirmək üçün müəyyən olunmalıydı ki, yeni dərmanın üstünlüyü yalnız o halda sübut olunmuş sayılır ki, onun tərtibi on haldan doqquzunda müsbət nəticə vermiş olsun. Əgər bu tələb yeni dərmanın tərəfdarlarına olduqca sərt görünərsə, onda sınaqlar sayı n , 10-dan olduqca böyük götürülməlidir. Əgər, məs., $n=100$ olduqda yeni dərmanın üstünlüyü $\mu>65$ olduğu hal üçün isbat olunmuş hesab edilərsə, onda səhv ehtimalı yalnız $P\approx 0,0015$ olacaqdır.

Əgər elmi tədqiqatlarda 0,05 ehtimalında norma açıqdan-açığa kifayət deyilsə, onda astronomik müşahidələr üzərində işlənilmələr qəbilindən olan akademik və ətraflı araşdırmalarda da 0,001 və ya 0,003 tərtib səhv ehtimalları da əksər hallarda nəzərə alınmır. Buna baxmayaraq, ehtimal qanunauyğunluqlarının tərtibinə əsasən elmi nəticələr, bəzən də olduqca böyük yəqinliyə (yəni olduqca kiçik ehtimallar nəzərə alınmadan qurulmuş) malik olurlar. Bu haqda bir qədər sonra.

Baxılan misallarda biz artıq (6) binomial düsturunun xüsusi hallarını, yəni hər bir sınaqda p ehtimalı ilə müsbət nəticə ola bilən, n sayda asılı olmayan sınaqlarda yalnız m sayda müsbət nəticə hadisəsinin ehtimalı P_m üçün dəfələrlə

$$P_m = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}$$

düsturunu tətbiq etmişik. Bu düsturun köməyilə bu paraqrafın əvvəlində

$$P = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \tag{11}$$

ehtimalı haqında qoyulmuş suala qayıdaq, burada μ – müsbət nəticələrin faktiki sayıdır*. Aydındır ki, bu ehtimalı

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon \tag{12}$$

bərabərsizliyini ödəyən P_m ehtimallarının cəmi şəklində yazmaq olar, yəni

$$P = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_m \tag{13}$$

cəmi şəklində; burada m_1 , – (12) bərabərsizliyini ödəyən m -lərdən ən kiçiyi, m_2 – belə m -lərdən ən böyüyüdür.

(13) düsturunu n -in çox böyük qiymətlərində bilavasitə istifadə etmək çox çətindir. $p=1/2$ halı üçün Muavrın, ixtiyari p üçün ($0<p<1$, H. M.) Laplasın kəşf etdikləri asimptotik düsturlar – P_m ehtimallarını olduqca sadəliklə tapmağa və n -in böyük qiymətlərində asimptotikanı öyrənməyə imkan yaratdı. Bu düstur aşağıdakı təqribi bərabərliklə ifadə olunur:

$$P_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n\, p(1-p)}}\; e^{-\frac{(m-n\,p)^2}{2n\,p(1-p)}}. \tag{14}$$

Əgər p sıfra və ya vahidə çox yaxın olmazsa, onda 100 tərtibdən n qiymətlərində bu düstür artıq kifayət qədər dəqiq olur. Əgər

$$t = \frac{m-n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} \tag{15}$$

işarələməsini götürsək, (14) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n\, p(1-p)}}\; e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{16}$$

(13) və (16)-dan (11) ehtimalı üçün aşağıdakı təqribi ifadəni almaq olar:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = F(T), \tag{17}$$

burada

$$T = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}. \tag{18}$$

(17)-nin sağ və sol tərəflərinin fərqi p -nin sıfır və vahiddən fərqli sabit qiymətlərində $n\to\infty$ olduqda, ε -a görə sıfra müntəzəm yığılır. $F(t)$ funksiyası üçün ətraflı cədvəllər tərtib olunmuşdur. Bunlardan bəziləri aşağıda verilir:

T	1	2	3	4
F	0, 68269	0, 95450	0, 99730	0, 99993

$T\to\infty$ olduqda $F(T)$ funksiyasının qiyməti vahidə yaxınlaşır.

(17) düsturunun köməyilə

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right|\right\} < 0{,}02$$

ehtimallarını $n=10000$ olduqda qiymətləndirək. $T=\frac{2}{\sqrt{p(1-p)}}$ olduğundan,

$$P \approx F\left(\frac{2}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

olur. $F(T)$ funksiyası T artdıqca monoton artdığından, P -nin p -dən asılı olmayan qiymətləndirilməsində T -nin ən kiçik mümkün

* μ , – $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ qiymətlərini P_m ehtimalları ilə alır, yəni $P\{\mu=m\}=P_m$.

qiymətini (müxtəlif p qiymətlərində) götürmək lazımdır. T belə ən kiçik qiymətini $p=1/2$ olduqda alır və o, 4-ə bərabər olur. Buna görə də, təqribi olaraq,

$$P \geq F(4) = 0,99993. \qquad (19)$$

(19) bərabərsizliyində (17) düsturunun təqribilik xüsusiyyətilə yaranan xəta nəzərə alınmamışdır. Bu xəta ilə bağlı qiymətləndirmə apararaq, hər hansı $P > 0,9999$ olduğunu müəyyən etmək mümkündür.

(17) düstunun tətbiqi ilə baxılan misalla əlaqədar olaraq, qeyd etmək lazımdır ki, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə elmi əsərlərdə (17) düsturunun qalıq həddi verilən qiymətləndirilmələr üçün uzun müddət qənaətbəxş hesab olunmurdu. Buna görə də, (17) və ona oxşar düsturların n -in çox da böyük olmayan və ya p ehtimallarının 0 və ya 1-ə çox yaxın qiymətlərində hesablamalarda tətbiqində (xüsusilə, böyük qiymətləri alan ehtimallar olduğu bir çox hallarda), çox vaxt mümkün ola bilən xətanın yəqinliklə müəyyən edilmiş qiymətləndirilmələrinə deyil, yalnız məhdud sayda misallar üçün belə növ nəticələrin yoxlanılması təcrübəsinə əsaslanırdılar. Bundan başqa, daha ətraflı araşdırmalar göstərdi ki, yuxarıda verilmiş asimptotik düsturların praktiki sayılan bir çox mühüm hallarda qalıq həddinin yalnız qiymətləndirilməsinə deyil, eyni zamanda dəqiqləşdirilməsinə ehtiyac vardır (belə ki, qalıq həd dəqiqləşdirilmədikdə çox böyük olur). Hər iki istiqamətdə ən tam nəticələr S. N. Bernşteynə aiddir.

(11), (17) və (18) münasibətlərini

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right| < t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \sim F(t) \qquad (20)$$

münasibəti şəklində yazmaq olar. t -nin olduqca böyük qiymətlərində (20) düsturunun sağ tərəfində n yoxdur və o, vahidə, yəni tam yəqinliyə uyğun olan ehtimal qiymətinə olduqca yaxındır. Beləliklə, bizə aydın oldu ki, *bir qayda olaraq,* $\frac{\mu}{n}$ *tezliyinin* p *-dən yayınması* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *tərtibdəndir*. Ehtimal qanunauyğunluqlarının müşahidələr sayının kvadratik kökünə belə mütənasib təsiri bir çox digər məsələlərdə də müşahidə olunur. Bəzən hətta bir qədər sadələşdirilmiş qaydada, populyarlaşdırma məqsədilə, « n -in kvadratik kökü qanunu» haqqında ehtimal nəzəriyyəsinin əsas qanunu kimi də söylənilir. Bu fikir böyük rus riyaziyyatçısı P. L. Çevışevin müxtəlif ehtimal məsələlərini cəmlər və «təsadüfi kəmiyyətlərin» ədədi ortaları üçün «riyazi gözləmələrin» və «dispersiyaların» hesablanmalarına sistematik gətirilmə metodunun istifadə olunmasını daxil etdikdən sonra tamamilə aydın oldu.

Verilmiş S şərtlərində müəyyən ehtimallarla müxtəlif qiymətlər alan kəmiyyətə *təsadüfi kəmiyyət* deyilir. Bizim üçün yalnız sonlu sayda müxtəif qiymətlər ala bilən təsadüfi kəmiyyətlərə baxmaq kifayətdir. Belə ξ təsadüfi kəmiyyətinin, ehtimal paylanmasını (belə deyilən kimi) göstərmək üçün onun mümkün ola bilən $x_1, x_2, ..., x_r$ qiymətlərini və

$$P_s = \mathbf{P}\{\xi = x_s\}$$

ehtimallarını göstərmək kifayətdir. ξ kəmiyyətinin bütün müxtəlif mümkün ola bilən qiymətləri üzrə bu ehtimalların cəmi həmişə vahidə bərabərdir:

$$\sum_{s=1}^{r} P_s = 1.$$

Təsadüfi kəmiyyətə misal kimi n sınaqda müsbət nəticələr sayı μ -nü (yuxarıda şərh olunmuş) göstərmək olar.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin *riyazi gözləməsi* –

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{s=1}^{r} P_s\, x_s$$

ifadəsinə, ξ kəmiyyətinin *dispersiyası*, – $\xi - \mathbf{M}(\xi)$ yayınmasının kvadratının riyazi gözləməsinə, yəni

$$\mathbf{D}(\xi) = \sum_{s=1}^{r} P_s\,(x_s - \mathbf{M}(\xi))^2$$

ifadəsinə deyilir. Dispersiyanın kvadrat kökünə –

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)}$$

ifadəsinə təsadüfi kəmiyyətin *kvadratik orta yayınması* deyilir.

Dispersiya və kvadratik orta yayınmaların ən sadə tətbiqləri aşağıdakı məhşur Çebışev bərabərsizliyinə əsaslanır:

$$\mathbf{P}\{\,|\xi - \mathbf{M}(\xi)| \leq t\,\sigma_\xi\} \geq 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (21)$$

Bu bərabərsizlikdən görünür ki, ξ -nin $\mathbf{M}(\xi)$ riyazi gözləməsindən yayınmalarından σ_ξ -ni olduqca aşa bilən yayınması nadir hallarda ola bilər.

Təsadüfi kəmiyyətlərin

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(n)}$$

cəmlərini başqa şəklə saldıqda, onların riyazi gözləmələri üçün

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}(\xi^{(1)}) + \mathbf{M}(\xi^{(2)}) + ... + \mathbf{M}(\xi^{(n)}) \qquad (22)$$

bərabərliyi həmişə doğrudur. Dispersiyalar üçün də analoji bərabərlik yalnız bəzi məhdudiyyətlərlə doğrudur, yəni

$$\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + ... + \mathbf{D}(\xi^{(n)}). \qquad (23)$$

(23) bərabərliyinin ödənilməsi üçün kifayətdir ki, müxtəlif nömrəli $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ kəmiyyətləri öz aralarında «korrelyar» olmasınlar, yəni $i \neq j$ qiymətlərində aşağıdakı bərabərlik ödənilsin*:

$$\mathbf{M}((\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))((\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)})) = 0. \qquad (24)$$

Əgər $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər** olarsa, (24) bərabərliyi həmişə doğrudur. Beləliklə, qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün (23) bərabərliyi həmişə ödənilir.

$$\xi = \frac{1}{n}(\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(n)})$$

ədədi ortaları üçün (23)-dən

---

* $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsalı* aşağıdakı ifadəyə deyilir:

$$R = \frac{\mathbf{M}\{(\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))((\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)}))\}}{\sigma_\xi^{(i)}\,\sigma_\xi^{(j)}}.$$

Əgər $\sigma_\xi^{(i)} > 0$ və $\sigma_\xi^{(j)} > 0$ olarsa, (24) şərti $R = 0$ olması ilə eynigüclüdür.

Korrelyasiya əmsalı R təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı asılılığı xarakterizə edir. Həmişə $|R| \leq 1$; $R = \pm 1$ yalnız $\eta = a\xi + b$ $(a \neq 0)$ xətti asılılığı halında olur. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün $R = 0$.

** $x_1, x_2, ..., x_m$ və $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymətlərini uyğun olaraq, ala bilən ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı tərifə görə onu ifadə edir ki, ixtiyari i və j qiymətlərində $A_i = \{\xi = x_i\}$ və $B_j = \{\eta = y_i\}$ hadisələri §2-də verilmiş tərif mənasında asılı deyildirlər.

$$\mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{n^2}\left(\mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + ... + \mathbf{D}(\xi^{(n)})\right) \qquad (25)$$

bərabərliyi alınır.

İndi isə fərz edək ki, bütün toplananları üçün hər bu dispersiyalar hansı sabiti aşmır:

$$\mathbf{D}\xi^{(i)} \le C^2 .$$

Onda (25)-dən

$$\mathbf{D}(\xi) \le \frac{C^2}{n}$$

və Çebışev bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari t üçün

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi - \mathbf{M}(\xi)\right| \le \frac{tC}{\sqrt{n}}\right\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (26)$$

(26) bərabərsizliyi Çebışevin verdiyi formada böyük böyük ədədlər qanunu kimi adlandırılan qanunu özündə əks etdirir: əgər $\xi^{(i)}$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və məhdud dispersiyalara malikdirlərsə, onda n artdıqca, onların ədədi ortası onların riyazi gözləmələrinin ədədi ortasından getdikcə az yayınacaqdır.

Daha dəqiq, *əgər* ξ *-nin uyğun ədədi ortaları üçün* və *ixtiyari* $\varepsilon > 0$ *qiymətində* $n \to \infty$ olduqda,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi - \mathbf{M}(\xi)\right| \le \varepsilon\right\} \to 1 \qquad (27)$$

münasibəti ödənilərsə,

$$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(n)}, ...$$

təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı böyük ədədlər qanununa tabedir, deyilir.

(26) bərabərsizliyindən (27) limit münasibətini almaq üçün

$$t = \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{C}$$

əvəzləməsini aparmaq kifayətdir.

(27) limit münasibətinin tətbiqi şərtlərinin, yəni böyük ədədlər qanununun tətbiqi şərtlərinin mümkün olduqca çox genişləndirilməsi məsələsinə A. A. Markov, S. N. Bernşteyn, A. Ya. Xinçin və başqalarının çoxsaylı araşdırmaları həsr olunmuşdur. Bu araşdırmaların prinsipial əhəmiyyəti vardır. Lakin daha mühüm əhəmiyyət kəsb edən araşdırma, $\xi - \mathbf{M}(\xi)$ yayınmasının ehtimal paylanmasının tədqiqidir.

Ehtimal nəzəriyyəsində rus klassik məktəbinin böyük xidməti – olduqca geniş şərtlərlə

$$\mathbf{P}\{t_1\sigma_\xi < \xi - \mathbf{M}(\xi) < t_2\sigma_\xi\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt \qquad (28)$$

bərabərliyinin asimptotik (yəni n qeyri-məhdud artdıqca daha böyük dəqiqliklə) doğru olması faktının müəyyənləşdirilməsidir. Çebışev, toplananlar məhdud və qarşılıqlı asılı olmadığı halda, bu düstürün, demək olar ki, tam isbatını vermişdir. Markov Çebışevin mülahizələrindəki çatışmayan cəhəti tamamlamış və (28) düsturunun tətbiqi şərtlərini genişləndirmişdir. Daha geniş şərtlər A. M. Lyapunov tərəfindən verilmişdir. (28) düsturunu asılı toplananlar cəmi üçün S. N. Bernşteyn xüsusilə hər tərəfli öyrənmişdi.

(28) düsturu olduqca çox sayda xüsusi məsələləri əhatə etmişdir ki, onun uzun müddət ehtimal nəzəriyyəsinin mərkəzi limit teoremi adlandırırdılar. Ehtimal nəzəriyyəsinin ən yeni inkişaf dövründə onun daha ümumi qanunauyğunluqlar sırasına aid olunmasına baxmayaraq, hal-hazırda belə onun əhəmiyyətini qiymətləndirmək çətindir.

Əgər toplananlar asılı olmayandırlarsa və onların dispersiyaları eyni və bərabərdirlərsə, (25) münasibətini nəzərə aldıqda, (28) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq məqsədəuyğundur:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{t_1\sigma}{\sqrt{n}} < \xi - \mathbf{M}(\xi) < \frac{t_2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt . \qquad (29)$$

Göstərək ki, (29) münasibətindən bizim əvvəldə baxdığımız məsələnin, $\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p etimallarından yayınmaları haqqında məsələnin həlli alınır. Bu məqsədlə aşağıdakı kimi təyin olunan $\xi^{(i)}$ təsadüfi kəmiyyələrini daxil edək:

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} 0, & i-\text{ci sınağın nəticəsi mənfi olmuşdursa,} \\ 1, & i-\text{ci sınağın nəticəsi müsbət olmuşdursa.} \end{cases}$$

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu halda

$$\mu = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(n)}, \ \frac{\mu}{n} = \xi,$$

$$\mathbf{M}(\xi^{(i)}) = p, \quad \mathbf{D}(\xi^{(1)}) = p(1-p), \quad \mathbf{M}(\xi) = p$$

və (29) düsturundan

$$\mathbf{P}\left\{t_1\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{\mu}{n} - p < t_2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt$$

münasibəti alınır və $t_1 = -t$, $t_2 = t$ olduqda bu münasibətdən yenə də (20) düsturu alınır.

§ 4. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları haqqında əlavə qeydlər

Tezliklərinə dayanıqlılıq xas olan təsadüfi hadisələrdən, yəni məlum şərtlərlə təkrarolunma sayı böyük olduqda tezlikləri hər hansı *normal hədd* – $P(A|S)$ ehtimalı ətrafında qruplaşmağa meylli təsadüfi hadisələrdən danışdıqda, biz §1-dəki şərhimizdə iki cəhətdən müəyyən bir qeyri-dəqiqliyə və qeyri-müəyyənliyə yol verdik. Yol verilmiş qeyri-dəqiqlikdən birincisi ondan ibarətdir ki, göstərmədik ki, tezliklərin dayanıqlılığının aşkar olunması üçün sınaqlar seriyasının zəruri olan sayı n_r nə qədər böyük götürülməlidir və ayrı-ayrı seriyalardakı sınaqlar sayları $n_1, n_2, ..., n_r$ olduqda $\frac{\mu_s}{n_s}$ tezliklərinin bir-birindən və onların normal səddi p -dən mümkün ola bilən yayınmaları necədir. Belə qeyri-dəqiqlik yeni elmin anlayışlarının formalaşmasında qaçılmazdır. Bu nöqtənin və ya düz xəttin *fiziki* anlamda ən sadə metrik anlayışlarına xas olan məlum qeyri-müəyyənlikdən heç də çox deyildir. İşin bu tərəfi sonra §3-də dəqiqləşdirildi.

Bizim şərhimizdəki digər gizli mühüm qeyri-müəyyənlik – A hadisəsinin baş vermə tezliyinin dayanıqlılığını aşkara çıxaracaq seriyaların formalaşdırılması qaydası ilə bağlıdır.

Biz artıq gördük ki, statistik və ehtimali araşdırma metodlarına hadisələrin gedişatının qabaqcadan dəqiq fərdi surətdə söylənilməsi mümkün olmadığı hallarda müraciət olunur. Mümkün olduqca sırf təsadüfi hadisələri süni surətdə yaratmaq məqsədilə, xüsusilə, elə edirlər ki, A hadisəsi onun baş verməsi üçün normal tezlikdən daha tez-tez baş verəcəyi halların əvvəlcədən heç bir mümkün vasitələrlə seçilib-ayırılması mümkün ola bilinməsin.

Məs., dövlət istiqrazlarının tirajları belə təşkil olunur. Əgər istiqrazların ümumi sayı N -ə bərabər tirajında M saydası uduşlu olmuşdursa, onda bir istiqrazın uduş ehtimalı – $p = \frac{M}{N}$ olacaqdır. Bu o deməkdir ki, tiraja qədər bütün istiqrazların sayı n -i olduqca böyük götürsək belə, biz praktik olaraq, əmin olmalıyıq ki, μ sayda uduşlu

istiqrazların bütün istiqrazlar sayı n -ə nisbəti p -yə çox yaxın olacaqdır. Məs., cüt nömrəli istiqrazlar almağa üstünlük verən şəxsləri tək nömrəli istiqrazlar alan şəxslərdən heç bir sistematik üstünlüyü olmayacaqdır; eynilə də, istiqraz nömrələri sadə vuruğa ayrılan və ya nömrələri əvvəlki tirajdakı uduşlara düşən nömrələrin birləşmələrindən alınan nömrəli istiqrazlar almaq fikrində olanların da digərlərilə müqayisədə heç bir üstünlüyü olmayacaqdır və s.

Tamamilə eynilə, buraxılan məhsul üçün adi nəzarət keçmiş mərmilər normal qayda ilə götürüldükdə, yaxşı öyrədilmiş xidmət personalının verilən nümunədən qüsursuz silahdan atışında, biz təxminən bütün halların *yarısında* əvvəlcədən müəyyən olan B yayınmasından az olan – orta nöqtədən yayınmanı alacağıq. Bu mütənasiblik ardıcıl atışlar sırası üçün də dəyişilməyəcəkdir, hətta bu hal cüt və ya tək saylı (zaman üzrə növbələnmiş) atəşlər üçün B -dən kiçik yayınmaların sayını ayrıca hesabladıqda belə dəyişmir. Lakin biz xüsusilə bircins mərmiləri (onların çəkisi və s. görə) seçəriksə, biz yayınmanı bir qədər azalda bilərək, elə mərmilər seriyasını ala bilərik ki, bu seriya üçün standart B yayınmasından böyük olan yayınmalar bütün yayınmaların yarısından olduqca az olacaqdır.

Beləliklə, A -nın «ehtimali–təsadüfi» hadisə olduğunu söyləmək və ona

$$p = P(A \mid S)$$

ehtimalını qarşı qoymaq yalnız o halda mümkündür ki, sınaqlar seriyalarının formalaşdırılmasının mümkün üsullarının sinfi göstərilmiş olsun. Bu sinif göstərilərsə, onun S şərtlərinə də daxil olduğunu hesab edəcəyik.

Verilmiş S *şərtlərində* A -nın ehtimali, – təsadüfi hadisə olması xassəsi və ehtimalının isə $p = P(A \mid S)$ olması, – S şərtləri və A hadisəsi arasında *obyektiv* xarakteri ifadə edir. Başqa sözlə, tamamilə təsadüfi hadisələr mövcud deyildir, hadisələr təsadüfi və ya zəruri o halda olur ki, onlara nə ilə əlaqədar baxılır, lakin müəyyən şərtlərdə hadisə tamamilə obyektiv olaraq təsadüfi ola bilər və onun bu xassəsi hər hansı müşahidəçinin bilik səviyyəsindən asılı olmur. Əgər belə bir müşahidəçinin olduğu fərz olunarsa ki, o, mərmilərin uçuşunu xüsusi hallarının fərqli xassələrini bütün təfsilatı ilə hiss edə bilir və beləliklə, bunlardan hər birinin orta trayektoriyadan fərdi yayınmalarını qabaqcadan söyləyə bilirsə, onda onun bu müşahidələrdə iştirak edib-etməməsinin mərmilərin ehtimal nəzəriyyəsinin qanunları ilə səpələnməsinə heç bir təsiri ola bilməyəcəkdir (əlbəttə, əgər atış bizim təsəvvür etdiyimiz müşahidəçinin göstərişi üzrə deyil, adi qaydada aparılarsa).

Bu barədə qeyd edək ki, yuxarıda müzakirə olunmuş – seriyaların formalaşdırılmasında tezliklərin normal qiymət – ehtimal ətrafında qruplaşma anlamında sabitliyə meyllilik aşkar olduqda da, bu meyllilik bizim müdaxiləmizdən tamamilə asılı olmayan real şəraitdə də baş verir. Məs., qazda molekulların hərəkətlərinin məhz ehtimali-təsadüfi xarakterliliyi çox kiçik vaxt müddətinə və qazın olduğu qabın divarının hər hansı bir sahəsinə və ya qaz içərisinə yerləşdirilmiş cisimlərin səthinə böyük dəqiqliklə mütənasib olur. Zərbələrin sayı böyük olmadığı hallarda bu mütənasiblikdən yayınmalar da ehtimal nəzəriyyəsinin qanunları ilə baş verir və Braun tipli təzahürlərə səbəb olur; bu haqda bir az sonra.

Asılı olmamazlıq anlayışının real mənasını izah edək. Xatırladaq ki, A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} \qquad (30)$$

düsturu ilə təyin olunur. Eyni zamanda onu da xatırladaq ki, A və B asılı olmayan hadisələr o halda adlanırdı ki, əgər (4)-ə əsasən

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

bərabərliyi ödənilmiş olsun. A və B hadisələrinin asılı olmamazlığından və $\mathbf{P}(B) > 0$ şərtindən,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$$

bərabərliyi alınır.

Asılı olmayan hadisələr haqqında ehtimal nəzəriyyəsinin bütün teoremləri, (4) şərtini ödəyən ixtiyari hadisələrə və ya çox sayda hadisələrin qarşılıqlı asılı olmamazlığı halına, onun ümumiləşmələrinə tətbiq oluna bilinir. Əgər bu tərif real asılı olmayan (səbəbi mənada) təsadüfi hadisələrin xassələrilə əlaqədar olmasaydı, bu teoremlər onda az maraq doğurardı.

Məsələn, aydındır ki, yeni doğulan uşağın oğlan olması ehtimalı olduqca dayanıqlı, $\mathbf{P}(A) = 22/43$ qiymətinə bərabərdir. Əgər B – doğumun Yupiterin Marsla görüşdüyü gündə baş verdiyi şərti olarsa və planetlərin vəziyyətlərinin fərdi insan talelərini təyin etmədiyi də fərz edilərsə, onda $\mathbf{P}(A \mid B)$ şərti ehtimalı, eyni $\mathbf{P}(A \mid B) = 22/43$ ehtimalına bərabər olacaqdır, yəni oğlan uşaqlarının doğulmasının faktiki tezliyi belə xüsusi astroloji şərtlərdə də, məhz $22/43$ tezliyinə gətirəcəkdi. Belə hesablama ola bilsin ki, heç bir kəs tərəfindən kifayət qədər geniş miqyasda aparılmadığına baxmayaraq, onun nəticəsinə şübhə etməyə heç bir əsasımız yoxdur.

Bizim, məzmun etibarilə bir qədər köhnəlmiş bu misalı çəkməkdə məqsədimiz o oldu ki, göstərək ki, insan idrakının inkişafı yalnız təzahürlər arasındakı əsl əlaqələrin müəyyən olunmasından deyil, həm də təsəvvür olunan əlaqələrin təkzib olunmasından, yəni baxılan hallarda təzahürlərin hansısa iki çevrələrin asılı olmamazlığı haqqında tezisin müəyyən olunmasından ibarətdir. Astroloqların bir-birilə bağlı olmayan iki təzahür çevrəsinin bir-birilə əlaqəli olduğunu göstərmək cəhdinin mənasızlığının sübutu belə klassik misallardan biri oldu.

Təbiidir ki, belə növ asılı olmamazlığı mücərrədləşdirmək olmaz. Məs., şübhəsiz ki, ümumdünya cazibə qüvvəsinə görə Yupiterin peyklərinin yerini dəyişməsi, məs., artilleriya mərmisinin uçuşuna təsir edir. Lakin aydındır ki, praktikada biz bu təsirləri nəzərə almaya bilərik. Fəlsəfi nöqteyi-nəzərdən, ola bilər ki, asılı olmamazlıq əvəzinə baxılan konkret şəraitdə bu və ya digər asılılıqların əhəmiyyətsizliyi barədə danışmaq daha düzgün olardı; bu nöqteyi-nəzər elə nöqteyi-nəzərlərdən biridir ki, onlar ümumi nəzəriyyə ilə qovuşaraq, bu nəzəriyyələrə gətirir, bunun sayəsində bunlar əsl kəşf hesab olunurlar. Lakin bununla belə, hadisələrin asılı olmamazlığı termininin indi izah olunmuş konkret və nisbi anlamı – bütün təzahürlərin ümumi əlaqə prinsipilə, heç bir vəchlə, ziddiyyət yaratmır, o, yalnız bu prinsipin zəruri tamamlayıcısıdır.

Bu və ya digər hadisələrin asılı olmamazlığı haqqında fərziyyələrdən alınmış düsturlarla ehtimalların hesablanılması yalnız o halda real maraq doğurur ki, əvvəlcə asılı olmayan hadisələr bu hadisələrin gedişatı ilə sonradan bir-birilə əlaqəli olurlar. Məs., kosmik şüalanma hissəciklərinin onların keçdiyi mühit hissəcikləri ilə toqquşması ehtimalını, hissəciklərin hərəkətinin onların yaxınlığında sürətlə hərəkət edən kosmik şüalanma hissəciyinin görünməsinə qədər bu hissəciyin yerini dəyişməsindən asılı olmayaraq, baş verməsi fərziyyəsi şərtilə hesablamaq olar. Düşmən gülləsinin fırlanan pərin qanadına dəyməsi ehtimalını, pərin oxa nəzərən vəziyyətinin güllənin trayektoriyasından asılı olmaması fərziyyəsi şərtilə (əlbəttə ki, bu fərziyyə pərin fırlanması nəzərə alınmaqla propellerdən açılan atəşin məxsusi gülləsinə nəzərən səhv olardı) hesablamaq olar və s.; belə misalların sayını qeyri-məhdud davam etdirmək olar.

Hətta belə demək olar ki, harada ki, ehtimal qanunauyğunluqları olduqca aydın şəkildə baş verir, biz bir-birindən tam mənası ilə asılı olmayan çox saylı faktorların olmasa da, bu və ya digər bir-birilə zəif əlaqəli faktorların təsirini görürük.

Bu heç də belə anlaşılmamalıdır ki, bu və ya digər asılı olmamazlıqlar haqqında fərziyyələri hər yerdə tənqidsiz daxil etmək olar. Əksinə, bu belə bir məcburiyyət yaradır ki, birincisi, asılı olmamazlıq haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün olduqca mükəmməl kriterilər işlənilməlidir, ikincisi isə faktorlar arasındakı asılılığın nəzərə alınması zərurəti yarandıqda, lakin bu asılılıqlar ehtimali qanunauyğunluqların dəyişilmiş və mürəkkəb şəkildə aşkara çıxmasına səbəb olduqda baş verə bilən aralıq hallar, xüsusilə, mükəmməl surətdə araşdırılmalıdır. Yuxarıda artıq qeyd olunmuşdur ki, bu istiqamətlərdən ikincisində ehtimal nəzəriyyəsinin klassik rus məktəbi çox geniş araşdırmalar aparmışdı.

Asılı olmamazlıq məsələsinə baxılmasını yekunlaşdıraraq, qeyd edək ki, iki hadisənin asılı olmamazlığının (4) düsturu ilə tərifi kimi, bir neçə təsadfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığının formal tərifi, bir-birilə səbəbən bağlı olmayan təzahür çevrələrinə aidlik mənasında real asılı olmamazlıq anlayışından daha geniş anlam daşıyır.

Fərz edək ki, ξ nöqtəsi $[0, 1]$ parçasına elə düşür ki,

$$0 \le a < b \le 1$$

olduqda, bu nöqtənin $[a, b]$ parçasına düşməsi ehtimalı bu parçanın uzunluğu $b-a$ -ya bərabərdir. Asanlıqla göstərmək olur ki, ξ nöqtəsinin absisinin onluq kəsrlərə

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots$$

ayrılışında α_k işarələmələri öz mənşəi etibarilə bir-birilə əlaqəli* olsalar da, bir-birilə qarşılıqlı asılı deyildirlər. (Bu mülahizədən bir çox nəzəri və bir qədər də praktiki maraq kəsb edən nəticələr alınır).

Asılı olmamazlılığın formal tərifinin belə çevikliyi onun üçün qüsur sayılmamalıdır. Əksinə bu, asılı olmamazlıq haqqında bu və ya digər fərziyyələrlə müəyyən olunmuş teoremlərin tətbiq oblastının yalnız genişlənməsinə səbəb oldu. Bu teoremlər, asılı olmamazlıq real mülahizələrə əsaslandırılmaqla postulatlaşdırıldığı kimi, asılı olmamazlığı araşdırılan hadisələrin və təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimal paylanmaları haqqında əvvəllər qəbul edilmiş fərziyyələrə əsaslanaraq, hesablama ilə isbat olunur.

Ümumiyyətlə, ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi aparatının formal strukturunun tədqiqi maraqlı nəticələrə gətirmişdir. Belə aydın oldu ki, bu aparatın müasir riyaziyyatın əsas obyektlərinin, tədricən, nəzərdə tutulan təsnifatlaşdırılmasında tamamilə müəyyən və xüsusi yeri vardır.

Bizi artıq iki A və B hadisələrinin birgə baş verməsi anlayışını (yəni AB) və birləşməsi anlayışını (yəni $A \cup B$) vermişik. Xatırladaq ki, A və B hadisələri, onların birgə baş verməsi mümkün olmadıqda, yəni $AB = N$ olduqda uyuşmayan hadisələr adlanır, burada N – qeyri-mümkün hadisənin işarələməsidir.

Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin əsas aksiomu: $AB = N$ olduqda

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

bərabərliyinin ödənilməsi müddəasıdır (bax, §2).

Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının – təsadüfi hadisələr və onların ehtimallarının xassələri müstəvi fiqurları və onların sahələrinin xassələrinə tamamilə analojidir. Kifayətdir ki, AB – iki fiqurun kəsişməsi (onların ümumi hissəsi) kimi, $A \cup B$ – onların birləşməsi kimi N kimi, şərti daxil olunmuş «boş fiqur», $\mathbf{P}(A)$ isə A fiqurunun sahəsi kimi anlaşılsın və onda nəzərdə tutulmuş bu çərçivədə analogiya tam mənası ilə aydın olur.

Üçölçülü fiqurların həcmləri də bu xassələrə malikdir.

Hal-hazırda həcmlər və sahələr nəzəriyyələrini xüsusi hal kimi tərkibində saxlayan belə oxşar tip qurumların ən ümumi nəzəriyyəsi – *ümumi ölçü nəzəriyyəsidir*.

Yalnız qeyd etmək lazımdır ki, ehtimal nəzəriyyəsində ümumi ölçü nəzəriyyəsi və ya xüsusi olaraq, sahələr və həcmlər nəzəriyyəsi ilə müqayisədə bəzi spesifik cəhətlər vardır: ehtimal heç vaxt vahiddən böyük olmur. Bu maksimal ehtimalı zəruri baş verən U hadisəsi alır, yəni

$$\mathbf{P}(U) = 1 .$$

Analogiya səthi anlam daşımır. Belə görünür ki, riyazi ehtimal nəzəriyyəsi formal cəhətdən bütünlüklə xüsusi bir fərziyyə irəli sürülməklə ölçü nəzəriyyəsi kimi qurula bilinər, bu şərtlə ki, buna görə «bütün U fəzasının» ölçüsü vahidə bərabər götürülməlidir**.

Məsələyə belə yanaşma riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin formal olaraq qurulmasına tam aydınlıq gətirməklə yanaşı, ehtimal nəzəriyyəsinin tamamilə konkret proqresinə və bu nəzəriyyə ilə əlaqəli riyazi nəzəriyyələrin də formal olaraq qurulmasına səbəb oldu. Ehtimal nəzəriyyəsində həqiqi dəyişənli funksiyaların metrik nəzəriyyəsində işlənilmiş incə metodlar müvəffəqiyyətlə istifadə olundu. Ehtimal metodları, eyni zamanda, riyaziyyatın onunla əlaqəli oblastlarının məsələlərində «analogiyaya» görə deyil, onların yeni oblastlara formal olaraq ciddi şəkildə keçirilməsi yolu ilə tətbiq olundu. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarının tətbiq oluna bilindiyi hər yerdə, heç olmazsa baxılan oblastın real təsadüfiliklə heç bir ümumi cəhəti olmadıqda, bu aksiomların nəticələri də tətbiq oluna bilinir.

Aksiomlaşdırılmış ehtimal nəzəriyyəsinin mövcudluğu – ehtimalı «təyin etmək» üçün, onları təbii-elmi əminliklə bilavasitə birləşdirməyə üstünlük verərək və onlara əsaslanaraq, formal olaraq ciddi riyazi nəzəriyyə qurmağa xidmət edən üsulları seçmək kimi yanlış bir addıma yol verməkdən çəkindirir. Belə tərifləri (ehtimal «təyin etmək» üçün; H. M.), təxminən, həndəsədə nöqtənin «tərifini» («təyin edilməsini»; H. M.) – fiziki cismi hər bir tərəfdən sonsuz dəfə kəsərək, onu hər dəfə kiçiltməyə, məs., onun diametrini hər dəfə iki dəfə azaltmağa uyğun olardı.

Belə tərifləri – ehtimalın sınaqların sayı qeyri-məhdud artırıldıqda tezliklərin limiti kimi baxılan tərifi də aiddir. Sınaqların ehtimali xarakterliliyi haqqında fərziyyə öz-özlüyündə (hər hansı bir təzahürün «təsadüfülüyü» haqqında fərziyyə kimi) yalnız bəzi şərtlər dəyişilmədən ödənildikdə doğru olur və bu şərtlər uzun müddət qeyri-məhdud olaraq və qeyri-məhdud dəqiqliklə dəyişilmədən yerinə yetə bilinmir. Buna görə də,

$$\frac{\mu}{n} \to p$$

limitə dəqiq keçilməsinin real mənası olmur. Belə limitə keçilmədə tezliklərin dayanıqlılıq prinsipinin ifadə oluna bilinməsi – sınaqların sonsuz ardıcıllıqlarının axtarışı üçün məqbul sayılan üsulların təyin olunmasını zəruri edir, bu isə yalnız riyazi fiksasiya oluna bilər. Əgər nəticədə elə bir özünəməxsus nəzəriyyənin qurulması alınsaydı ki, digər başqa yollarla onun ciddi əsaslandırılmasına müyəssər oluna bilinməzdi və belə olduqda, anlayışların belə ağırlaşdırılmasına ciddi yanaşmaya ehtiyac yaranardı. Lakin yuxarıda qeyd olunduğu kimi riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin ölçü nəzəriyyəsinin müasir vəziyyətində əsaslandırılması, sadəcə olaraq,

$$\mathbf{P}(U) = 1$$

şərtinin əlavə olunması ilə yerinə yetirilir.

Ümumiyyətlə, ehtimal anlayışının real analizində onun formal tərifinin verilməsinə heç də hökmən cəhd göstərmək zəruri deyilir. Mənə belə gəlir ki, ehtimal haqqında sırf formal nöqteyi-nəzərdən aşağıdakı şərhdən artıq olan heç bir şey söyləmək olmaz: $\mathbf{P}(A \mid S)$ *ehtimalı elə bir ədəddir ki, S şərtlərində və bu şərtlər ödənilməklə seriyaların formalaşdırılmasında tezliklər bu ədəd ətrafında qruplaşmağa meylli olurlar və bu seriyaların sayı ağlabatan qədər artdıqca və şərtlərin bircinsliyi də pozulmadıqda, bu meyl olduqca böyük bir aydınlıq və dəqiqliklə, baxılan konkret şəraitdə, seriyaların qəbul saylarında kafi ehtibarlılığa və dəqiqliyə çata-çata aşkar olunur.*

Həqiqətən də, mühüm məsələ bu tərifin formal dəqiqləşdirilməsi deyil, şərtlərin mümkün olduqca geniş aydınlığıdır ki, bu şərtlərdə belə tip ehtimali təsadüfilik aşkar olunsun. Aydınlıqla anlaşılmalıdır ki, hər hansı bir təzahürün ehtimali xarakteri haqqında hipotez, yalnız olduqca

---

* ξ ədədinin

$$\xi = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \ldots$$

ayrılışında da n -in ixtiyari qiymətində α_k işarələmələri eyni şərtləri ödəyirlər.

** Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi həll olunan məsələlərinin mahiyyəti etibarilə müstəqil riyazi fənn olaraq qalır; ehtimal nəzəriyyəsi üçün əsas nəticələr (§3-də şərh olunmuşlara oxşar şəkildə) sırf ölçü nəzəriyyəsi nöqteyi-nəzərindən süni və lazımsız görünür.

nadir hallarda, statistik yoxlamaya bilavasitə əsaslana bilir. Yalnız ehtimal metodlarının hər hansı yeni oblastda ilk müdaxiləsində, iş çox vaxt onunla başlanılırdı ki, tezliklərin sabitliyi empirik olaraq qeyd olunurdu. §3-dəki deyilənlərə əsasən, tezliklərin sabitliyin ε dəqiqliyinə qədər statistik aşkar olunması üçün $n=1/\varepsilon^2$ sınaqlarından ibarət seriyalardan istifadə etmək zəruridir. Məs., baxılan konkret məsələdə 0,0001 dəqiqliyi ilə təyin olunacaq ehtimalı almaq üçün bu təxminən hər biri 100 000 000 sınaqdan ibarət sınaqlar seriyaları ardıcıllığını aparmaq zəruridir. Ehtimali təsadüfi hipotezi olduqca çox hallarda simmetriya mülahizələri əsasında və ya ayrı-ayrı təzahürlər sıralarının kəsişməsindəki praktiki asılı olmamazlıq mülahizələri əsasında daxil olunur və s.

Sonra bu hipotez dolayı yolla yoxlanılır. Məs., sonlu həcmli qablarda qaz molekullarının sayı 10^{20} tərtib ədədlərlə ifadə olunduğundan və qazların kinetik nəzəriyyəsinin ehtimali nəticələrinə uyğun olan $\sqrt{n}$ ədədi çox böyük olduğundan, həqiqətən də, bu nəticələr böyük dəqiqliklə doğrudur. Məs., sakit havada, asılmış plastinkanın əks üzlərinə olunan təzyiq, hətta bizim gözümüz üçün mikroskopik sayılan ölçülər üçün belə ciddilikə eyni olur, hətta bu üzlərdən birinə olunan təzyiq digər üzə olunan təzyiqdən, sınağın müvafiq qoyuluşunda, faizin mində biri qədər artıq olduqda baxmayaraq belə, bu nəzərə çarpmaya bilinərdi.

§ 5. Determinik və təsadüfi proseslər

Bütün təzahürlərin səbəbi şərtləşdirilmə prinsipi, real proseslərin differensial tənliklərin köməyilə öyrənilməsi metodunda ən sadə riyazi ifadəsini tapır.

Öyrənilən sistemin t anında vəziyyətinin n sayda

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$$

parametrləri vasitəsilə təyin olunduğu fərz olunur. Bu parametrlərin dəyişilmə sürəti, məlum olduğu kimi zaman üzrə

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}$$

törəmələri ilə ifadə olunur.

Əgər bu sürətlər parametrlərin qiymətlərinin funksiyaları olarsa, onda biz aşağıdakı differensial tənlər sistemini alarıq:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n)\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Qalileyin cisimlərin düşmə qanunu ilə başlanan riyazi təbiətşünaslığın yaranması dövründə kəşf olunmuş təbiət qanunlarının böyük əksəriyyəti məhz bu şəkildə ifadə olunur. Qaliley öz kəşfini göstərilən standart formaya sala bilməmişdi, çünki o vaxt müvafiq riyazi anlayışlar hələ işlənilməmişdi. Bunu Nyüton etmiş oldu.

Mexanikada və fizikanın bir çox digər oblastlarında ikinci tərtib differensial tənliklərə prinsipial nöqteyi-nəzərdən müraciət heç bir yenilik gətirmir, belə ki, sürətləri yeni

$$v_k = \dot{x}_k$$

işarələmələri ilə götürdükdə, biz bu kəmiyyətlərin ikinci tərtib törəmələri üçün

$$\frac{d\,x_k}{d\,t^2} = \dot{v}_k$$

ifadəsini alırıq və n sayda $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ kəmiyyətləri üçün ikinci tərtib tənliklər $2n$ sayda $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ \ v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n$ kəmiyyətləri üçün birinci tərtib tənliklərə çevrilir. Misal kimi, ağır cismin Yer atmosferinə düşməsi məsələsinə baxaq. Fərz edərək ki, yalnız Yer səthindən çox da yuxarı olmayan hündürlüklərə baxılır, mühitin müqavimətinin hündürlükdən deyil, yalnız sürətdən asılı olduğunu da fərz edəcəyik. Öyrənilən sistemin vəziyyəti iki parametrlə xarakterizə olunur: cismin yer səthindən məsafəsi z və onun sürəti v ilə. Bu iki kəmiyyətin zaman üzrə dəyişməsi iki differensial tənliklə təyin olunur:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z} &= -\,v,\\
\dot{v} &= g - f(v)
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

burada g – ağırlıq qüvvəsinin təcili, $f(v)$ – baxılan cisim üçün hər hansı «müqavimət qanunudur».

Əgər sürətlər çox da böyük olmazsa və cisim olduqca böyük həcmli olarsa, məs., orta ölçülü daş bir neçə metr hündürlükdən düşdükdə havanın müqavimətini nəzərə almamaq olar, (31) tənlikləri

$$\left.\begin{aligned}
\dot{z} &= -\,v,\\
\dot{v} &= g
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

tənliklərinə çevrilir. Əgər t_0 başlanğıc anında z və v kəmiyyətlərinin qiymətlərinin z_0 və v_0 olduğu fərz olunarsa, onda (32) tənliklərini asanlıqla həll edərək, düşmə prosesini bütünlüklə təsvir edən

$$z = z_0 - v\,(t - t_0) - g\left(\frac{t - t_0}{2}\right)^2$$

düsturunu almaq olur. Məs., $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ olduğunu fərz etsək, Qalileyin kəşf etdiyi

$$z = z_0 - \frac{g\,t^2}{2}$$

düsturunu alarıq.

Ümumi halda (31) tənliklərinin inteqrallanması bir qədər çətindir, lakin prinsipial nəticə ($f(v)$ funksiyaları üzərinə qoyulan olduqca ümumi məhdudiyyətlə) eyni olur: başlanğıc t_0 anında z_0 və v_0 qiymətləri üzrə cismin Yer səthinə düşdüyü t anına qədər (t də daxil olmaqla) bütün anlarda z və v -nin qiymətləri birqiymətli təyin olunur. Cismin z -in mənfi qiymətlərində düşməyə davam etməsini fərz edərək, qeyd etdiyimiz məhdudiyyəti də istisna etmək olar. Bu tərzdə sxemləşdirilmiş məsələ üçün belə nəticə çıxarmaq olar: əgər $f(v)$ funksiyası v artdıqda monoton artırsa və $v \to \infty$ olduqda sonsuzluğa yaxınlaşırsa, onda cismin düşməsi məhdudiyyətsiz davam etdikdə, yəni t dəyişəni qeyri-məhdud artdıqca, v sürəti sabit c limitinə yaxınlaşır və c , –

$$g = f(c)$$

tənliyinin həllidir.

Qoyulmuş məsələnin riyazi analizindən alınmış bu nəticə belə baxdıqda aydındır: cismin düşmə sürəti, ağırlıq qüvvəsinin təcili havanın müqaviməti ilə tarazlaşana qədər, artır. Açıq paraşütlə tullanmada v stasionar sürəti – saniyədə beş metrə yaxın sürət, olduqca tez qərarlaşır*. Açılmamış paraşütlə uzun çəkən tullanmada havanın müqaviməti azdır və buna müvafiq olaraq, stasionar sürət çox olur və yalnız paraşütçü olduqca böyük məsafə qət etdikdən sonra bu sürət qərarlaşır.

Yüngül cisimlərin enməsində, məs., havaya atılmış lələk və ya tükün, başlanğıc vaxtda sürətli hərəkəti hiss olunacaq qədər çox olmur və buna görə də, bəzən bu hərəkət tamamilə görünməz olur. Enmənin stationar sürəti tez bir zamanda qərarlaşır və məlum yaxınlaşma ilə həmişə $v = c$ götürmək olar. Bu halda bir differensial tənlik

$$\dot{z} = -c$$

tənliyi qalır ki, o da asanlıqla inteqrallanır və nəticədə

* burada nəzərdə tutulur ki, v sürəti özünün sabit limit qiyməti c-yə praktik olaraq, kifayət qədər yaxın olur.

$$z = z_0 - c(t - t_0)$$

tənliyi alınır. Tamamilə sakit havada tük belə enəcəkdir.

Bizim yuxarıda baxdığımız deterministik konsepsiya dinamik sistemlərin müasir nəzəriyyəsində tamamilə ümumi şəkildə şərh olunur; bu sahədə bir sıra mühüm işlər sovet riyaziyyatçıları – N. N. Boqolyubov, V. V. Stepanov və bir çox digər riyaziyyatçılar tərəfindən yerinə yetirilmişdir. Bu ümumi nəzəriyyə xüsusi halları və real təzahürlərin elə riyazi sxemlərini əhatə edir ki, bunlarda sistemin vəziyyəti, bir və ya bir neçə funksiyanın parametrlərinin sonlu sayı ilə təyin olunur, necə ki, bu məs., kəsilməz mühit mexanikası üçün tipik haldır. Belə hallarda «sonsuz kiçik» vaxt ərzində vəziyyətin elementar dəyişilməsi qanunauyğunluqları adi differensial tənliklərlə deyil, xüsusi törəməli tənliklər və ya başqa vasitələrlə verilir. Lakin real proseslərin bütün riyazi determinik sxemlərində ümumi cəhət – birincisi, öyrənilən sistemin vəziyyəti o halda hərtərəfli surətdə təyin olunmuş hesab edilir ki, o, hər hansı ω riyazi obyekti ilə verilsin (n sayda həqiqi ədədlərin sistemin bir və ya bir neçə funksiya və s. ilə); ikincisi, $t > t_0$ anlarındakı ardıcıl qiymətlər başlanğıc t_0 anına uyğun ω_0 qiyməti ilə birqiymətli təyin olunur:

$$\omega = F\ (\ t_0,\ \omega_0,\ t\ )\ .$$

Biz artıq gördük ki, differensial tənliklərə ifadə olunan proseslər halında F funksiyasının tapılması üçün $t = t_0$ olduqda $\omega = \omega_0$ başlanğıc şərtlərilə bu differensial tənliklər inteqrallanmalıdır.

Mexanistik materializmin nümayəndələri hesab edirdilər ki, təsvir olumuş sxem real təzahürlərin determinikliyinin – səbəbiyyətin fiziki prinsipinin dəqiq və əsl ifadəsidir. Laplasın ideyasına əsasən, dünyanın baxılan anda vəziyyəti sonsuz sayda differensial tənliklərə tabe olan sonsuz sayda parametrlərlə təyin olunur. Əgər müəyyən bir «hərtərəfli ağıl» bütün bu tənlikləri yaza və onları inteqrallaya bilsəydi, onda o, Laplasın fikrinə görə, sonsuz zaman ərzində dünyanın bütün evolyusiyasını tam dəqiqliyi ilə əvvəlcədən söyləyə bilərdi.

Lakin əslində riyazi sonsuzluq kəmiyyətcə, gerçək aləmin keyfiyyətcə hərtərəfli ifadə olunması ilə müqayisədə, olduqca kobuddur. Nə parametrlərin sonsuz sayda daxil edilməsi, nə kəsilməz mühitlərin vəziyyətlərinin fəzanın nöqtəsinin funksiyası vasitəsilə təsviri, real proseslərin sonsuz mürəkkəbliyinin adekvat inikası deyildir.

Real proseslərin araşdırılması həmişə məsələyə daxil olunan parametrlər sayının artırılması istiqamətində aparılmır; ümumiyyətlə isə, baxılan proseslərin hesablamaları üçün istifadə olunan riyazi sxemdə «sistemin vəziyyətini» ayrıca təyin edən ω -nın xarakteristikasını hər dəfə mürəkkəbləşdirmək məqsədəuyğun deyildir. Tədqiqatçının məharəti əsas etibarilə ondan ibarətdir ki, o, elə sadə Ω faza fəzası* tapmalıdır ki (yəni ω qiymətlərinin elə çoxluğunu və ya sistemin mümkün vəziyyətlərinin çoxluğunu), bu fəza real prosesi bu fəzada ω nöqtəsinin determiniklənmiş yerdəyişmə prosesi ilə əvəz etdikdə, real prosesin bütün *mümkün* cəhətlərini nəzərə almağa imkan yaratmış olsun.

Lakin biz real prosesin mühüm cəhətlərini seçib, ayırd etdikdən sonra müəyyən bir qalıq alırıq ki, onun təsadüfi olduğunu qəbul etmək məcburiyyətində oluruq. Nəzərə alınmayan təsadüfi faktorlar prosesin gedişatına həmişə müəyyən bir təsir göstərir. Riyazi cəhətdən öyrənilən olduqca az proseslər mövcuddur ki, nəzəriyyə ilə müşahidələri müqayisə etdikdə, bunlar üçün nəzərə alınmamış təsadüfi faktorların təsirini görmək mümkün olmurdu. Planetlərin cazibə qüvvəsinin təsiri altında hərəkəti nəzəriyyəsi ilə vəziyyət ya belədir və ya sanki belədir: planetlər arasında məsafələr onların ölçüləri ilə müqayisədə o qədər böyükdür ki, onların maddi nöqtə kimi ideallaşdırılmış təsviri demək olar ki, həmişə tətbiq oluna bilinir; planetlərin hərəkət etdikləri fəza elə «seyrəklənmiş» materiya ilə doludur ki, onun müqaviməti itəcək qədər kiçikdir; planetlərin kütləsi o dərəcədə böyükdür ki, onların hərəkətində işıq təzyiqi demək olar ki, heç bir rol oynamır. Belə olduqca gözəl şərtlər belə bir nəticə çıxarmağa əsas verir ki, n sayda maddi nöqtədən ibarət sistemin hərəkəti haqqında məsələnin həlli $6n$ sayda parametrlərlə (sistemin «vəziyyətinin» parametrləri ilə)** təsvir olunur, vəziyyətin dəyişməsi yalnız cazibə qüvvəsi nəzərə alınaraq hesablanılır və bu da planetlərin hərəkətlərinin müşahidələri ilə olduqca yaxşı üst-üstə düşür.

Planetlərin hərəkəti halı ilə artilleriya mərmisinin uçuş halı bir qədər yaxındır, bu halda mərminin hərəkət tənliyinə havanın müqavimətinin daxil edildiyi fərz olunur. Bu – riyazi araşdırma metodunun olduqca tez və sürətlə böyük uğurlar qazanmış olduğu klassik oblastlardan biridir. Lakin burada təsiredici təsadüfi faktorların rolu artır, olduqca böyükdür və mərmilərin səpələnməsi, yəni onların baxılan atəş üçün təyin olunmuş normal başlanğıc şərtlərə və atəş vaxtı atmosferin orta vəziyyətinə uyğun nəzəri trayektoriyadan yayınmaları, onlarla metrlərlə, böyük məsafələrdə isə hətta yüz metrlərlə ölçülür. Belə yayınmaların qismən başlanğıc istiqamətin və başlanğıc sürətin normadan təsadüfi yayınmaları nəticəsində, qismən kütlənin və mərminin müqavimət əmsalından təsadüfi yayınmaları nəticəsində, qismən də küləyin qeyri-sabitliyi və şiddətlənmələri və real Yer atmosferində hökmran olan dəyişkən və olduqca mürəkkəb rejimlə bağlı digər təsadüfi şəraitlər nəticəsində yaranır.

Mərmilərin səpələnməsi ehtimal nəzəriyyəsinin metodları ilə ətraflı surətdə öyrənilir və bu araşdırmaların nəticələri atəş praktikası üçün olduqca mühümdür.

Əslində təsadüfi təzahürlərin tədqiqi nə anlam daşıyır? Belə təsəvvür yaranır ki, təzahürün baxılan sxemləşdirilməsində təsadüfi «qalıq» o qədər böyük olmuşdur ki, onu nəzərə almamaq mümkün deyildir; bu halda yeganə mümkün ola bilən yol ondan ibarətdir ki, təzahürün təsviri yeni parametrlər daxil edilərək, mürəkkəbləşdirildikdən sonra, belə mürəkkəbləşdirilmiş sxemdə təzahür, determinə olunmuş təzahürlərin elə həmin riyazi sxemi üzrə, daha ətraflı tədqiq olunmalıdır.

Bu – bir çox hallarda praktik olaraq mümkün olmayan bir yoldur. Məs., maddi cismin enməsinin araşdırılmasında, onun qeyri-sabit şiddətli külək axını olan (adətən, turbulent axın adlandırılan) strukturlu atmosferdə enməsində iki – z və v parametrləri əvəzinə bu strukturun tam təsviri üçün tamamilə çox böyük bir riyazi aparat daxil etmək lazım gələrdi.

Lakin bu çətin yol, əslində yalnız o hallarda zəruri olur ki, bizim prosesin gedişatına qalıq «təsadüfi» faktorların təsvirini hərtərəfli və hər bir fərdi hal üçün nəyin hesabına olursa-olsun izləyə bilmək tələb olunsun. Xoşbəxtlikdən, həqiqətdə, bir çox hallarda bizim real tələbatlarımız tamamilə başqa bir şeylə bağlıdır: yalnız olduqca böyük zaman parçasında və ya öyrənilən prosesin olduqca çox dəfələrlə təkrar olunmasında təsadüfi faktorların təsirinin toplam effektini qiymətləndirmək zərurəti yarandığı hallarda.

Misal kimi qumun su axını ilə çayda və ya bu və ya digər süni hidrotexniki qurğuda yerini dəyişməsinə baxaq. Adətən, bu yerini dəyişmə elə baş verir ki, qum dənələrinin əksəriyyəti dibdə sakit vəziyyətdə olur və dibin yaxınlığında yalnız hərdənbir baş verən burulğanlar qum dənələrini yerindən qopararaq elə həmin anda olduqca uzaq məsafəyə, hər hansı yeni bir yerdə gözlənilmədən dayanana qədər, apara bilir. Sırf nəzəri cəhətdən hər bir belə qum dənəsinin hərəkəti fərdi olaraq, hidromexanika qanunları ilə hesablanıla bilinərdi. Onda buna görə biz dibin başlanğıc halı və axın haqqında hərtərəfli olaraq, hökmən məlumatlı olmalıyıq, qum dənəsinin hərəkətini addımbaaddım hesablamalıyıq, hər hansı sakit vəziyyətdə olan qum dənəsini hərəkəti gətirmək üçün tələb olunan təzyiq olunmuş anları qeyd edərək, yerindən tərpənmiş qum dənəciklərinin dayandığı ana qədər etdikləri yerdəyişmələri izləməliyik. Real elmi tədqiqat üçün bu məsələnin belə qoyuluşunun absurd olması aydındır. Lakin buna baxmayaraq, orta nəticələr və ya dibdəki nasosların su axınları ilə yerini dəyişmələrinin statistik qanunauyğunluqları (belə deyiliş qəbul edilmişdir) tamamilə öyrənilə bilinir.

---

* Cisimlərin enməsinə dair yuxarıda verilmiş misalda Ω – iki ədədin $(z,\ v)$ sistemidir, yəni müstəvidir.

** Hər bir nöqtənin üç koordinatı və sürətin üç komponenti.

Çoxsaylı təsadüfi faktorların təsirinin tamamilə aydın statistik qanunauyğunluqlara gətirdiyi misalların sayını asanlıqla çoxaltmaq olar. Perspektivliyinin genişliyinə görə və eyni zamanda belə tip ən məşhur və ən maraqlı olan misallardan birinə kinetik qaz nəzəriyyəsinə baxılmışdır; bu misalda görünür ki, molekulların çoxsaylı təsadüfi toqquşmalarının birgə təsirindən elə dəqiq qanunauyğunluqlar yaranır ki, qazın bir tam kimi divarlara təzyiqi, bir qazın digər qazda diffuz yayılması və s. bu qanunauyğunluqlara tabedir.

§ 6. Markov tip təsadüfi proseslər

§5-də

$$\omega = F(t_0,\ \omega_0,\ t)$$

tənliyinin köməyilə yazılmış deterministik sxemi bilavasitə ümumiləşdirilmiş ehtimali sxemin qurulması A. A Markovun xidmətidir. Düzdür, Markov yalnız belə bir hala baxmışdı ki, öyrənilən sistemin faza fəzası sonlu sayda vəziyyətlərdən ibarət hala baxmışdı, yəni $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ və o, sistemin vəziyyətindəki dəyişiklikləri yalnız t-ni diskret addımlara ayıraraq öyrənirdi. Lakin o, belə olduqca sxemləşdirilmiş modeldə bir sıra qanunauyğunluqları aşkar etməyə nail ola bilmişdi.

Markov, sistemin ω vəziyyətini $t > t_0$ anında onun t_0 anındakı ω_0 vəziyyətinə görə birqiymətli təyin edən F funksiyası əvəzinə

$$P(t_0,\ \omega_i;\ t, \omega_j)$$

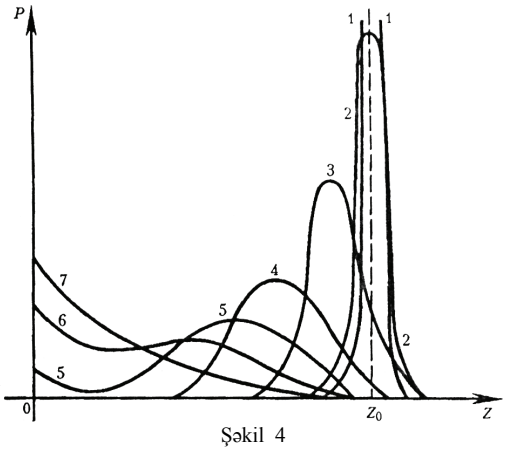
ehtimallarını daxil edir; $P(t_0,\ \omega_i;\ t, \omega_j)$ – sistem t_0 anında ω_0 vəziyyətində olduqda onun t anında ω_j vəziyyətində ola bilməsi ehtimalıdır. Markov bu ehtimalları –

$$t_0 < t_1 < t_2$$

münasibətini ödəyən ixtiyari üç t_0, t_1, t_2 anları üçün

$$P(t_0,\ \omega_i;\ t_2, \omega_j) = \sum_{k=1}^{n} P(t_0,\ \omega_i;\ t_1, \omega_k)\ P(t_1,\ \omega_k;\ t_2, \omega_j) \qquad (33)$$

münasibətilə əlaqələndirir; bu münasibəti Markov proseslərinin əsas tənliyi adlandırmaq olar.



Şəkil 4

Faza fəzası kəsilməz çoxobrazlı olduqda, (t_0, t) zaman parçasında ω_0 vəziyyətindən ω vəziyyətinə keçid üçün $p(t_0, \omega_0; t, \omega)$ *ehtimal sıxlıqlarının* varlığı olan hal ən tipik haldır. Bu halda t_0 və t anları arasındakı müddət ərzində ω_0 vəziyyətindən hər hansı ω vəziyyətinə keçid ehtimalı, ω_0 və ω, Ω faza fəzasının G oblastına aid olduqda,

$$P(t_0,\ \omega;\ t, G) = \int_G p(t_0,\ \omega_0;\ t, \omega)\, d\omega \qquad (34)$$

düsturu şəklində yazılır, burada $d\omega$ – faza fəzasında həcm elementidir*. $p(t_0, \omega_0; t, \omega)$ ehtimal sıxlığı üçün (33) əsas tənliyi aşağıdakı kimi yazılır:

$$p\ (t_0,\ \omega;\ t_2, \omega_2) =$$

$$= \int_{\Omega} p(t_0,\ \omega_0;\ t_1, \omega_1)\ p(t_1,\ \omega_1;\ t_2, \omega_2)\ d\omega \qquad (35)$$

(35) tənliyini həll etmək olduqca çətindir, lakin məlum məhdudiyyətlərlə bu tənlikdən xüsusi törəməli tənliklər almaq olur və bunların öyrənilməsi asan olur. Bu tənliklərdən bəziləri çox da ciddi olmayan fiziki mülahizələrdən fizik Fokker və Plank tərəfindən alınmışdı. Stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsi kimi adlandırılmış nəzəriyyə tam şəkildə sovet alimləri tərəfindən qurulmuşdu (S. N. Bernşteyn, A. N. Kolmoqorov, İ. Q. Petrovskiy, A. Ya. Xinçin və b.).

Biz bu tənliklər barədə burada yazmayacağıq.

Stoxastik differensial tənliklər metodu imkan yaradır ki, məs., sakit atmosferdə çox kiçik cismin orta enmə sürəti c, onun ölçüləri kiçik olduğundan havanın molekullarının onun qarşı tərəflərinə zərbələri nəticəsində yaranan «Braun hərəkətinin» sürətindən çox kiçik olduğundan tamamilə qərarlaşmadıqda, bu cismin hərəkəti haqqında məsələni asanlıqla həll etmək mümkün olur.

c – orta enmə sürəti, D – diffuziya əmsalı olsun. Əgər fərz edəriksə ki, hissəcik Yer səthində $(z = 0)$ qala bilmir, yəni Yer səthinə çatan kimi Braun qüvvələrinin təsiri altında atmosferdə yenidən hərəkətini davam etdirir, t_0 anında hissəciyin z_0 hündürlüyündə olduğunu fərz edəriksə, hissəciyin t anında z hündürlüyündə olacağının ehtimal sıxlığı –

$$p(t_0,\ z_0;\ t, z) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \left[e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4D(t-t_0)}} + e^{-\frac{(z+z_0)^2}{4D(t-t_0)}} \right] e^{-\frac{c(z-z_0)}{2D} - \frac{c^2(t-t_0)}{4D}} +$$

$$+ \frac{c}{D\sqrt{5}} e^{-\frac{cz}{D}} \int_{\frac{z+z_0-c(t-t_0)}{2\sqrt{D(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Şəkil 4-də t-nin ardıcıl anlarında $p(t_0, z_0; t, z)$ əyrilərinin nə cür dəyişməsi təsvir olunmuşdur.

Biz görürük ki, hissəciyin hündürlüyü orta qiymətcə azalır və onun vəziyyəti get-gedə qeyri-müəyyən (daha çox «təsadüfi») olur. Ən maraqlısı odur ki, ixtiyari t_0 və z_0 qiymətlərində və $t \geq 0$ olduqda

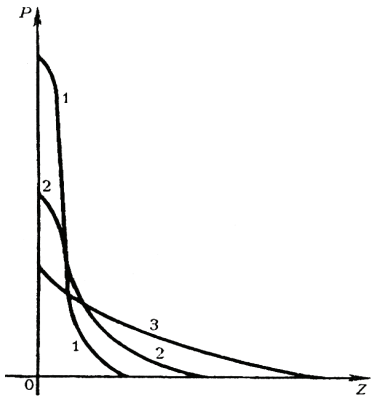
$$p\ (t_0,\ z_0;\ t,\ z)\ \rightarrow \frac{c}{D}\, e^{-\frac{c^2}{D}} \qquad (36)$$

münasibəti ödənilr, yəni hissəciyin hündürlükləri üçün limit paylanması vardır və hissəciyin yerləşdiyi hündürlüyün riyazi gözləməsi t artdıqca müsbət limitə yaxınlaşır:

* Əslində, (34) bərabərliyi ehtimal sıxlığının tərifidir. $pd\omega$ kəmiyyəti – t_0-dan t anına qədər keçən müddətdə ω_0 vəziyyətindən həcm elementi $d\omega$-ya keçid ehtimalıdır (sonsuz kiçilən tərtib dəqiqliklə).

$$z^* = \frac{c}{D}\int_0^\infty z e^{-\frac{cz}{D}} dz = \frac{D}{c} \qquad (37)$$

Beləliklə, hissəcik yerdən yuxarıda olmasına baxmayaraq, ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında həmişə aşağı enməyə meylli olur, o, bu prosesi qeyri-məhdud surətdə davam etdikcə (atmosferdə təsadüfi dolaşma hərəkəti edərək), orta hesabla müəyyən bir müsbət hündürlükdə olacaqdır. Əgər biz başlanğıc z_0 qiymətini z^* -dan kiçik götürmüş olsaydıq, onda belə olacaqdı ki, olduqca böyük müddətdən sonra hissəciyin orta vəziyyəti başlanğıcdan hündür olacaqdır, necə ki, bu $z_0 = 0$ olduqda şəkil 5-də təsvir olunmuşdur.



Səkil 5

Ayrıca götürülmüş bir hissəcik üçün söhbət gedən z^* orta qiymətləri yalnız riyazi gözləmələrdir, lakin olduqca çox sayda hissəciklər üçün böyük ədədlər qanununa görə bunlar real olaraq alınacaqdır: bu növ hissəciklərin hündürlük üzrə yerləşməsi sıxlığı qeyd olunan qanunauyğunluqlarla baş verəcəkdir və xüsusilə də, kifayət qədər böyük zaman keçdikdən sonra (36) düsturu ilə uzlaşaraq stabilləşəcəkdir.

Bütün bu deyilənlərin hamısı c və D -nin atmosferin vəziyyəti ilə bağlı əvvəlcədən müəyyən edilmiş kəmiyyətlər olduğu fərz edildiyindən, yalnız havaya az konsentrasiyada qarışmış qazlara və tüstülərə tətbiq oluna bilinir. Lakin bəzi mürəkkəbləşdirilmələrlə bu nəzəriyyə atmosferi təşkil edən qazların qarşılıqlı diffuziyasına və bu diffuziya əsasında yaranan hündürlüklər üzrə sıxlıqların paylanmalarına tətbiq oluna bilinir.

Hissəciklərin öçüləri artdıqca $\frac{c}{D}$ nisbəti artır və buna görə də, onların yerlərini dəyişmə prosesi diffuzion xarakter əvəzinə §5-də baxılmış qanunlar üzrə qanunauyğun enmə xarakterinə malik olur. Nəzəriyyə sırf diffuziya hərəkəti və belə qanunauyğun enmə arasındakı bütün keçidləri izləməyə imkan verir.

Turbulent yerini dəyişmənin təsiri nəticəsində çəkili hissəciklərin atmosferdə hərəkəti məsələsi olduqca mürəkkəbdir, lakin prinsip etibarilə bu məsələ də analoji ehtimal metodlarına tabe oluna bilinər.

Ədəbiyyat

Populyar ədəbiyyat

Гнеденко Б. В., Хинчин А .Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, 3-е изд., М. – Л., 1952.

Müasir universitet kursları

Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946,
Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 2-е изд., М. – Л., 1954.

Xüsusi monoqrafiya

Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, пер. с англ., М., 1953.
Эйнштейн А., Смолуховский М., Брауновское движение, пер. с нем., Сб. статей, М. – Л., 1936.

ENSİKLOPEDİK MƏQALƏLƏR.

XIX əsrin əvvələrinə qədər ensiklopediyalarda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika məsələlərinə çox az yer ayrılmışdı. Bu mövzu üzrə ən ilkin (bəlkə də birinci) məqalə – X. Volfun (Ch. Wolff, 1716) «Stoxastika. Təkliflər məharəti», «Leksikona» (Mathematisches Lexicon) məqaləsi olmuşdu; bu məqalənin rus dilinə tərcüməsi «Математический энциклопедический словарь» (М., 1988, s. 776) adlı Ensiklopediyada dərc olunmuşdur. D. Didronun (D. Diderot) Ensiklopediyasında (Encyclopedie, P., 1751-80) və onun sistemləşdirilmiş nəşrində (Encyclopédie méthodique, P., 1782-1832) J. D'Alamber (J. D'Alembert) və M. Kondersenin (M. Condercet) ehtimal nəzəriyyəsi üzrə yazdıqları məqalələr dərc olunmuşdu; həcmi və məzmununa görə əsas məqalə – «Probabilité» M. Konderseya məxsusdur.

XX əsrin əvvəllərinə qədər rus dilində nəşr olunmuş ensiklopediyalarda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikaya bir o qədər də diqqət yetirilməmişdi, bu da görünür ki, elmlərin formalaşması ilə əlaqədar olmuşdu. Yalnız «Большая Советская энциклопедия» adlı ensiklopediyanın 1-ci nəşrində, 1936-da, xüsusilə də, A. N. Kolmoqorovun bu redaksiyaya gəlişindən sonra, bu sahədə canlanma hiss olundu.

«Большая Советская энциклопедия»-nın 2-ci nəşrində nəzəri-ehtimali tematika olduqca layiqlə işıqlandırılmışdır. Məs., 18 məqalə A. N. Kolmoqorov tərəfindən yazılmışdır ki, bunlardan ən mühümləri aşağıda verilir.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU – elə bir ümumi prinsipdir ki, bu prinsipə əsasən çoxsaylı təsadüfi faktorların birgə təsiri, bəzi olduqca ümumi şərtlərdə, təsadüfdən asılı olmayan nəticəyə gətirir. B. ə. q.-nun dəqiq ifadəsi və onun tətbiqi üçün şərtlər ehtimal nəzəriyyəsində verilmişdir. B. ə. q. – təsadüfilik və zərurilik arasındakı dialektik əlaqənin ifadələrindən biridir. B. ə. q.-nun xüsusi halı, ilk dəqiq isbat olunmuş teorem Ya. Bernulliyə məxsusdur (1713-də ölümündən sonra dərc olunmuşdur). Bernulli teoremini Puasson ümumiləşdirmişdir və onun «Mülahizələrin ehtimalı haqqında tədqiqat» («Исследование о вероятности суждений», 1837) əsərində «böyük ədədlər qanunu» termini ilk dəfə istifadə olunmuşdu. Bu terminin ən ümumi anlamı P. L. Çebışevin «Orta kəmiyyətlər haqqında» («О средних величинах») əsərində əsaslandırılmışdır. Bu müasir anlamda B. ə. q.-nda iddia olnur ki, dəqiq göstərilən bəzi şərtlər ödənildikdə, olduqca böyük n qiymətlərində x_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortası –

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

vahidə olduqca yaxın ehtimalla öz riyazi gözləməsi $a = \mathbf{M}\,\bar{x}$ -dən olduqca az fərqlənir [bax, *Riyazi gözləmə* (*Ожидание математическое*)].

Çebışevin isbat etdiyi teoremin dəqiq ifadəsi belədir: əgər $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının elementləri cüt-cüt asılı olmayan və məhdud *dispersiyaları* (bax) olan, yəni

$$\mathbf{D}(x_k) = \mathbf{M}\{x_k - \mathbf{M}(x_k)\}^2 \le C$$

şətini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda ixtiyari müsbət $\varepsilon > 0$ qiymətində $\left|\bar{x} - a\right| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalı $n \to \infty$ olduqda vahidə yaxınlaşır.

$\bar{x}$ ədədi ortasının və ya

$$X = x_1 + x_2 + ... + x_n = n\,\bar{x}$$

cəminin özünün uyğun riyazi gözləmələri a -dan və

$$A = \mathbf{M}(X) = n\,a$$

kəmiyyətindən yayınmalarının daha dəqiq xarakteri ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində göstərilmişdir. $x - a$ yayınmalarının $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tərtibdən, buna müvafiq olaraq, $X - A$ yayınmalarının isə $\sqrt{n}$ tərtibdən olduğu hal, ən tipik hal sayılır, baxmayaraq ki, a və A riyazi gözləmələri 1 və n tərtibdəndirlər. Məsələnin sadələşdirilmiş populyar şərtlərində bu münasibətlər bəzən « n -in kvadrat kökü qanunu» adlandırılır: asılı olmayan təsadüfi toplananların sayı artdıqca onların cəmi n -ə mütənasib olaraq artır, lakin bu qanunauyğun orta qiymətdən təsadüfi yayınmalar yalnız $\sqrt{n}$ -ə mütənasib olaraq artır. Bununla belə, məsələnin daha mürəkkəb anlaşılması üçün, daha dəqiq ifadələnmələrə müraciət etmək zəruridir; hər halda B. ə. q.-nun təsiri haqqında bu «kobud» təsəvvür, toplananların sayının nə dərəcədə böyük götürüləcəyi və B. ə. q.-nun bundan sonra bu və ya digər hansı bir dəqiqliklə ödəniləcəyi haqqında mülahizə yürütməyə imkan yaradacaqdır.

Məs., əgər hər bir x_k toplananı yalnız iki – 1 və 0 qiymətlərini, $x_k = 1$ qiymətini p_k ehtimalı ilə və $x_k = 0$ qiymətini $1 - p_k$ ehtimalı ilə alarsa, asanlıqla hesablamaq olur ki,

$$a = \frac{p_1 + p_2 + ... + p_m}{n}$$

olur, $\bar{x}$ isə $\frac{m}{n}$ tezliyinə çevrilir, burada m , – $k \le n$ nömrəli və 1-ə bərabər bütün r_k -ların sayıdır. Bu halda B. ə. q. onu ifadə edir ki, n -in böyük qiymətlərində $\frac{m}{n}$ tezliyi ehtimalların ədədi ortasına çox yaxın olur. Bu – Puasson B. ə. q.-dur. Puasson teoremi dəqiq belə ifadə olunur: əgər $A_1, A_2, ... A_n, ...$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi hadisələrdirsə, m , – $k \le n$ nömrəli, həqiqətən də, baş verəcək A_k hadisələrinin sayı olduqda, $\frac{m}{n}$ tezlikləri üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\left|\frac{m}{n} - a\right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyin ehtimalı $n \to \infty$ olduqda vahidə yaxınlaşır. Puasson teoreminin ciddi isbatını P. L. Çebışev «Ehtimal nəzəriyyəsinin bir ümumi təklifinin elementar isbatı» («Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», 1843) məqaləsində vermişdir. Bernulli teoremi Puasson teoreminin xüsusi halıdır, bu halda bütün p_k -lar eyni bir p ədədinə $(0 < p < 1)$ bərabər götürülür. Bernulli teoremində $a = p$ və B. ə. q.-nda hökm olunur ki, n -in böyük qiymətlərində, vahidə olduqca yaxın ehtimalla, $\frac{m}{n}$ tezliyi p ehtimalına olduqca yaxın olacaqdır.

B. ə. q.-nun mənası və əhəmiyyəti haqqında təsəvvür aşağıdakı misaldan aydın olur. Qapalı qabda N sayda qaz molekulu vardır. Kinetik nəzəriyyəyə əsasən hər bir molekul qabın içərisində digər molekullar tərəfindən və qabın divarlarından məruz qaldığı çoxsaylı zərbələr altında xaotik hərəkət edir. Seçilmiş zaman parçasının t saniyəsi ərzində qabın divarının hər hansı σ sahəsinə dəyən molekul bu sahəyə f_k impulsunu verir. f_k impulsu tipik təsadüfi kəmiyyətdir, baxılan qazın vəziyyəti yalnız bu impulsun

$$a = \mathbf{M}(f_k)$$

riyazi gözləməsini təyin etdiyindən baxılan molekulun implsunun faktiki qiyməti baxılan zaman parçasında ən müxtəlif qiymətlər (əgər baxılan molekul σ sahəsinə dəyməmişdirsə, sıfırdan başlayaraq) ala bilər. Bütün molekullardan baxılan müddət ərzində σ sahəsinə ötürülən impulsların cəmi –

$$F = \sum_{k=1}^{N} f_k \ ,$$

– riyazi gözləməsi $A = N\,a$ -ya bərabər təsadüfi kəmiyyətdir. Lakin burada B. ə. q.-na əsasən (burada bu qanun N çox böyük ədəd olduğundan xüsusi bir dəqiqliklə aşkar olunur) F , həqiqətən də, ayrı-ayrı molekulların hərəkətində təsadüfi təsirlərdən demək olar ki, asılı olmur, yəni, demək olar ki, dəqiqliklə öz riyazi gözləməsi A -ya bərabər olur. Kinetik nəzəriyyə nöqteyi-nəzərindən bununla belə bir fakt izah olunur: σ sahəsinə qazın təzyiqi praktiki olaraq, ciddi surətdə sabitdir və xaotik olaraq dəyişmir.

Çox vaxt B. ə. q.-nu, qaz molekulları ilə əlaqədar məsələdə olduğu kimi, təsadüfi toplananların sayı o qədər də böyük olmadığı halda tətbiq etmək məcburiyyəti yaranır; bu halda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin bu cəmin riyazi gözləməsindən yayınmaları olduqca böyük ola bilər. Bu halda bu yayınmaları qiymətləndirməyi bacarmaq olduqca mühümdür. Məs., hər birində 100 ədəd hər hansı bir məmulat olan 1 000 partiyanın hər birindən ixtiyari 10 saydası sınaq üçün götürülmüşdür və yoxlanılmış 10 000 məmulatın 125-i qüsurlu olmuşdur. Əgər n_k ilə k -cı partiyadakı qüsurlu məmulatların sayını işarə edəriksə, onda qüsurlu məmulatların ümumi sayı –

$$n = \sum_{k=1}^{1000} n_k$$

olacaqdır; k -cı partiyadan sınaq üçün götürülmüş on məmulat arasında qüsurluların sayının (təsadüfi kəmiyyətdir) riyazi gözləməsi

$$S_k = \frac{10}{100}\,n_k$$

olacaqdır, hər birində 10 məmulat olmaqla 1000 yoxlamada qüsurlu məmulatların ümumi sayının riyazi gözləməsi isə

$$S = \sum_{k=1}^{1000} S_k = \frac{1}{10}\,n$$

olacaqdır. B. ə. q.-a əsasən, $\frac{1}{10} \cdot n \sim 125$ götürmək təbiidir, yəni 100 000 məmulatdan ibarət bütün partiyalarda 1250 qüsurlu vardır. Ehtimal nəzəriyyəsinin köməyilə daha dəqiq araşdırma belə nəticəyə gətirir: əgər hər bir partiyadan seçilmiş məmulatlar, doğrudan da, ixtiyari qaydada seçimdirsə, onda kifayət qədər əminliklə hökm etmək olar ki, faktiki olaraq, $1000 < n < 1500$, lakin $1100 < n < 1400$ götürülərsə, belə qiymətləndirilmə kifayət qədər etibarlı olmayacaqdır, $1200 < n < 1300$ qiymətləndirilməsi üçünsə heç bir ciddi əsas yoxdur. n üçün daha dəqiq qiyməti yalnız olduqca çox məmulatı sınaqdan keçirərək almaq olar.

Toplananların asılı olmamazlığı, əgər B. ə. q.-nun tətbiqlərinin əksəriyyətində yerinə yetirilirsə də, bu yalnız bu və ya digər yaxınlaşma ilə olur. Məs., qazın ayrı-ayrı molekullarının hərəkətinə aid birinci misalda bu hərəkətlərin bir-birindən asılı olmadığını iddia edə bilmərik.

Buna görə də, a s ı l ı toplananlar halında B. ə. q.-nun tətbiq olunması üçün şərtlərin olduqca tam surətdə araşdırılmasının böyük əhəmiyyəti vardır. Bu istiqamətdə əsas riyazi işlər A. A. Markov, S. N. Bernşteyn və A. Ya. Xinçinə məxsusdur. Keyfiyyət etibarilə bu araşdırmaların nəticələrindən belə iddia etmək olar ki, əgər mühüm asılılıq yalnız birbirilə qonşu və ya yaxın (nömrələrinə görə) toplananlar arasında olarsa, uzaq nömrəli toplananlar arasında asılılıq isə olduqca zəif olarsa, B. ə. q.-nu tətbiq etmək olar. Məs., temperatur və ya havanın təzyiqi üzərindəki meteoroloji müşahidələrin nəticələrinin sıralarında vəziyyət belədir. Buna görə də, baxılan bir bölgədə, ilin verilən bir anında temperatur və təzyiqlərin çoxillik orta qiymətləri baxılan ərazi üçün obyektiv xarakteristika olan və bunlar üçün hesablanmış riyazi gözləmələrə yaxın olur.

B. ə. q. ilə bağlı məsələlərin riyazi tərəfi «Ehtimal nəzəriyyəsini limit teoremləri» və «Ehtimal nəzəriyyəsi» (bax) məq.-də ətraflı işıqlandırılmışdır. B. ə. q.-nun tətbiqlərində onun tətbiq olunması üçün şərtlərin nisbətən sadə riyazi ifadə olunmuşlarından istifadə etmək, adətən, kifayət edir, lakin onları real vəziyyətlə ədaqədar olaraq, olduqca diqqətlə yoxlamaq gərəkdir.

Əd.: Ч е б ы ш е в П. Л., О средних величинах, Полное собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; Б е р н ш т е й н С. Н., О работах П. Л. Чевышева по теории вероятностей, в кн.: Научное паследие П. Л. Чебышева [Сб. статей], в .1, М. – Л., 1945; Б е р н ш т е й н С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946: К о л м о г о р о в А. Н., Роль русской науки в развитии теории вероятностей, «Ученые записи Московского гос. ун-та», 1947, в. 91, с. 53-64; Г н е д е н к о Б. В. и К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей в кн.: Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. Сб. статей под ред. А. Г. Куроша [и др.], М. – Л., 1948; Г н е д е н к о Б. В. и Х и н ч и н А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, М. – Л., 2-е изд., 1950.

A. N. Kolmoqorov (БСЭ-2, 1950, том 5).

İNFORMASİYA – *kibernetikanın* (bax) əsas anlayışıdır. Bizim təfəkkürümüzün bizi maraqlandıran kəmiyyətlər və ya təhahürlər haqqında nəticə çıxarmaq üçün bu və ya digər «verilənlərdəki» İ. üzərində işləməyə qadir olduğu barədə təsəvvürün hamı üçün anlaşılan olduğunu hesab etmək olar (məs., $x^2 = 1$ tənliyindəki İ.-nın, $x = \pm 1$ kimi nəticənin çıxarılmasında, baxılan gün ərzində meteoroloji stansiyalar şəbəkəsinin müşahidə nəticələrindəki İ.-nin qarşıdakı gün üçün hava proqnozunda). Kibernetikada belə növ təsəvvürlər ümumiləşdirilir və qəbul olunur, canlı orqanizm (şüurlu və şüursuz) və ya avtomatik işləyən maşınla yerinə yetirilən ixtiyari idarəetmə və ya tənzimləmə prosesində «giriş siqnallarındakı» İ.-nın yenidən işlənilib, «çıxış siqnallarına» ötürülməsi baş verir. İ. nəzəriyyəsi (bax, *Информаџии теория*, 51 т.) rabitə texnikasının ehtiyacları ilə bağlı yaranmışdı və o, teleqraf lentində tire və nöqtələrə, elektrik impulslarına və s. obyektlərə İ. daşıyıcıları kimi baxır. Bütün bu hallarda İ.-nın m i q d a r ı, onun etibarlılığının çox və ya az tamlığı barədə danışmaq olar. İ. haqqında bu anlayışın dəqiq tərifi və müxtəlif fikirlərin mənası barədə sual yaranırdı və çoxdan bəri müxtəlif xüsusi hallara tətbiq olunaraq, uğurla həll olunurdu. Bu qəbildən məntiqi problemlər bütün genişliyi ilə yalnız kibernetikada və İ. nəzəriyyəsində yaranır. İ.-ya onun 1) miqdarı, 2) məzmunu, 3) verilməsi üsulu nöqteyi-nəzərindən baxmaq olar.

Misal 1. Beşrəqəmli ədəd verildikdə ondakı minlik və onluqlar göstərildiyi haldakı İ., ondakı onluqların və vahidlərin göstərildiyi haldakı İ. qədərdir və yalnız onun vahidləri göstərildiyi haldakı İ.-dan iki dəfə çoxdur. Ədədin yalnız vahidlərinin göstərildiyi haldakı İ., onun vahidlərinin və onluqların göstərildiyi İ.-nın tərkibində daşınır və o, bu sonuncunun yarısını təşkil edir.

Misal 2.

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad (1)$$

münasibətinin x və y məchulları barədə daşıdığı İ.,

$$x - y = 0 \qquad (2)$$

münasibətindəki İ.-nın tərkibində daşınır (çünki (2) (1)-dən alınır), lakin onunla üst-üstə düşmür [çünki (1) və (2) tənlikləri eyni güclü deyildirlər] (2) və (3)

$$x + y = 0 \qquad (3)$$

münasibətlərində daşınan informasiya

$$x = 0, \quad y = 0 \qquad (4)$$

bərabərlikləri ilə verilən informasiya ilə üst-üstə düşür [çünki (2–3) tənliklər sistemi (4) sistemi ilə eynigüclüdür]. (2) – (3) və (4) sistemlərində daşınan İ. yalnız hansı formada verilməsi ilə fərqlənirlər.

Müxtəlif verilənlərin daşıdığı İ.-ların məzmun etibarilə ust-üstə düşməsi şərtləri barədə daha mürəkkəb məsələlər riyazi statistikada yaranmış və əsasən ing. statistiki R. Fişer (1921) tərəfindən həll olunmuşdu. Statistika çoxsaylı müşahidə nəticələrilə iş görür və bunları tamamilə göstərmək əvəzinə, adətən, onların bəzi «sərbəst xarakteristikalarını» göstərir. Bəzən belə «əvəzləmədə» «İ. itkisi» yaranır, lakin bəzi şərtlərdə yeni alınmış xarakteristikalar bütün verilənlərdə olan bütün İ.-nı daşıyır. Bu halda yeni alınmış xarakteristikaların məsələnin *məqbul statistikalar* sistemini əmələ gətirir (bax, 51 т.) .

İ. miqdarını ölçmək üçün ümumi üsullar haqqında ilk dürüst təkliflər, məncə, R. Fişerə (riyazi statistikanın problemləri ilə bağlı) və R. Hartliyə (İ.-nın rabitə kanalları ilə ötürülməsi və yaddaş qurğularında İ.-nın qorunub saxlanılması ilə bağlı) aiddir. Bu təkliflər öz axırıncı ifadəsini Amerika alimi K. Şennonun (1948) yaratdığı İ. nəzəriyyəsində tapmış oldu.

Fərz olunur ki, əvvəlcədən məlumdur ki, a hadisəsi

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

variantlarından birində baş verə bilər, bu barədə b məlumatı isə

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

tiplərindən biri ola bilər. İ. nəzəriyyəsində fərz olunur ki, a və b birgə ehtimal paylanmasına malikdirlər:

$$P(a = a_i,\ b = b_j) = p(a_i, b_j)$$

və bu paylanma a və b -nin paylanmalarını ayrı-ayrılıqda təyin edir:

$$p(a_i) = \sum_j p(a_i, b_j),$$

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i, b_j).$$

Şennona görə a hadisəsi barədə b -də olan İ. miqdarı

$$\mathbf{I}(a, b) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j) \log_2 \frac{p(a_i, b_j)}{p(a_i) p(b_j)} \qquad (5)$$

düsturu ilə ifadə olunur (İ. nəzəriyyəsində loqarifm 2 əsasına görə götürülür). Əgər hər bir b_j -yə yeganə bir a_i uyğun olursa və bu a_i üçün $p(a_i, b_j)$ ehtimalı müsbət olarsa, yəni a_i variantı b_j ilə birqiymətli təyin olunarsa, onda asanlıqla hesablamaq olur ki,

$$\mathbf{I}(a, b_j) = H(a) = \sum_i p(a_i) \log_2 p(a_i). \qquad (6)$$

$H(a)$ kəmiyyəti $p(a_i)$ paylanmasının e n t r o p i y a s ı d ı r; $H(a)$, – a hadisəsinin baş verməsi üçün a_i variantlarından hansının baş verməsinin zəruriliyini dəqiq göstərmək üçün tam İ. miqdarına bərabərdir. b_j -nin verilməsi a_i -ni birqiymətli təyin edə bilmədiyi bütün digər hallarda

$$\mathbf{I}(a, b) < H(a).$$

$$\mathbf{I}(a, b) \geq 0$$

münasibəti həmişə doğrudur;

$$\mathbf{I}(a,\ b) = 0$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğru olur ki, a və b bir-birindən asılı olmasınlar, yəni

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) \cdot p(b_j)$$

bərabərliyi ödənilsin. a hadisəsinin baş verməsi variantı birqiymətli göstərildiyi halda İ. miqdarı aşağıdakı şərtlə təyin olunur:

$$\mathbf{I}(a,\ a) = H(a);$$

$$p(a_1) = p(a_2) = ... = p(a_m) = \frac{1}{m}$$

olduqda o,

$$H(a) = \log_2 m$$

maksimum qiymətini alır.
Bu nəticə İ. miqdarının ehtimal nəzəriyyəsinə dəxli olmayan İ. miqdarının digər mümkün ifadəsinə uyğundur. Əgər

$$2^{k-1} \le m < 2^k$$

münasibəti ödənilərsə, onda

$$H(a) = \log_2 m \ \sim \ n$$

münasibəti təqribən ödənilir, burada n – ikilik işarələrinin (0 və ya 1) sayıdır və o, ixtiyari tam ədədin $1 \le i \le m$ sərhədlərində (yəni mümkün olan a_i qiymətlərinin nömrəsi i -nin) ikilik sistemində yazılışı üçün kifayət edir.

A. N. Kolmoqorov (БСЭ-2, 1958, том 51).

KORRELYASİYA (riy.), – təzahürlər (təsadüfi hadisə və ya proseslər) arasında əlaqədir. K. anlayışı funksional asılılıq anlayışından daha ümumidir (bax, *Функция*). Məs., məlumdur ki, uca boylu valideynlərin uşaqları da kiçik boylu valideynlərin uşaqları ilə müqayisədə uca boylu olurlar. Bununla belə, ata və ananın boyu məlum olduğu halda hər bir ayrı-ayrı halda uşağın boyunu hesablamaq mümkün deyildir. İki təzahür arasında K. iki halda yaranır: ya bu təzahürlərdən biri bu təzahürü təyin edən səbəblər arasında olduqda və ya hər iki təzahürə təsir göstərən ümumi səbəblər olduqda. İki təzahür arasında K. haqqında mülahizənin obyektiv məna daşıması üçün zəruridir ki (funksonal asılılıq kimi xüsusi hal istisna olunur), baxılan təzahürlər qeyri-məhdud dəfə təkrar oluna bilinsin və bu zaman baş verə biləcək kombinasiyaların *ehtimalları* (bax, *Вероятность*) haqqında danışmaq mümkün ola bilsin.

İki hadisə arasında K. İki – A və B hadisələrinə baxaq. $\overline{A}$ ilə A hadisəsinə əks olan hadisəni (yəni A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəni), $\overline{B}$ ilə B -yə əks hadisəni işarə edək. Əgər B hadisəsi A hadisəsi hər dəfə baş verdikdə baş verirsə və əksinə, A hadisəsi hər dəfə B hadisəsi baş verdikdə baş verirsə, onda A və B hadisələri bir-birilə *düz funksional asılılıqla* əlaqəlidirlər. Əgər A hadisəsi, yalnız və yalnız, B hadisəsi baş vermədikdə baş verirsə, onda A və B *tərs funksional asılılıqla* əlaqəlidirlər. Bu iki hal istisna olunmaqla, A və B hadisələri arasında asılılığı qiymətləndirmək üçün ehtimal anlayışından hökmən istifadə olunmalıdır. $P_A(B)$, – A hadisəsi baş verdiyi halda B hadisəsinin ehtimalı, $P_{\overline{A}}(B)$, – A hadisəsi baş vermədiyi halda B hadisəsinin ehtimalı olsun. Əgər $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$ olarsa, onda B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir. $\rho_B = P_A(B) - P_{\overline{A}}(B)$ fərqinə B hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən reqressiya əmsalı deyilir.

Belə bir misala baxaq: difteriyanın müalicəsində difteriya əleyhinə zərdab istifadə olunur. Zərdabın istifadə olunmasını A, xəstənin sağalmasını B ilə işarə edək. Əgər zərdab tətbiq olunduqda bütün xəstələr sağalsaydı və əgər o, tətbiq olunmadıqda onların hamısı ölsəydi, onda bu düz funksional asılılıq olardı; əgər $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$ olsaydı, yəni sağalma halları həm zərdab tətbiq olunduqda, həm də tətbiq olunmadıqda bərabər olsaydı, onda aydındır ki, zərdabın tətbiqi mənasız olardı, çünki onsuz, yuxarıda verilmiş tərifə görə, B hadisəsi (sağalma) A hadisəsindən (zərdabın tətbiqi) asılı olmazdı. Əgər, məs., $P_A(B) = 0{,}97$, $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}85$ olarsa, onda reqressiya əmsalı $\rho_B = 0{,}12$, zərdabın tətbiqi və sağalma arasında müsbət əlaqənin olduğunu göstərərdi.

Reqressiya əmsalı ρ_B – funksional əlaqə müsbət olduqda +1, B -nin A -dan asılı olmadığı halda – sıfra, funksional əlaqə mənfi olduqda –1-ə bərabərdir; digər hallarda 0, –1 və +1 arasında, sıfırdan fərqli qiymətlər alır. Misalların çoxunda A və B arasında əlaqəni A hadisəsinin B -yə nəzərən analoji $\rho_B = P_A(B) - P_{\overline{A}}(B)$ reqressiya əmsalı ilə deyil, hökmən ρ_B əmsalının vasitəsilə təyin etmək üçün heç bir əsas yoxdur. Bu halda A və B hadisələri arasında K. əmsalı – $R = \pm\sqrt{\rho_A \rho_B}$ istifadə oluna bilinər. R -in işarəsi reqressiya əmsallarının hər ikisinin işarəsi ilə üst-üstə düşməlidir (onların hər ikisinin də işarəsi həmişə eyni olur). K. əmsalı, yalnız və yalnız, o halda sıfra bərabər olur ki, A və B asılı olmayan hadisələr olsun (əgər B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildirsə, onda asanlıqla isbat olunur ki, A hadisəsi də B -dən asılı deyildir və yalnız onlar arasında funksional asılılıq olduğu halda o, ± 1 -ə bərabər olur, yəni $R = \pm 1$ olur.

İki kəmiyyət arasında K. Əgər x -in hər bir qiymətinə tamamilə müəyyən bir $y = f(x)$ kəmiyyəti uyğun olursa, y kəmiyyəti x -dən funksional asılıdır. Əgər belə asılılıq yoxdursa, onda statistik təzahürlər halında (bu təzahürlərin müəyyən ehtimallarla qeyri-məhdud surətdə təkrarlanan olduğu hallarında) biz, x -in hər bir mümkün qiyməti üçün uyğun $\mathbf{M}_x(y) = f(x)$ *riyazi gözləməsini* təyin edə bilərik (bax). $y = f(x)$ tənliyinə *y kəmiyyətinin x -ə nəzərən reqressiya tənliyi* $(x,\ y)$ müstəvisində $y = f(x)$ əyrisinə *y -in x -ə nəzərən reqressiya əyrisi* deyilir. y -in riyazi gözləməsini (şərtsiz riyazi gözləməsini) $a_y = \mathbf{M}(y)$ ilə işarə edək. x və y kəmiyyətləri asılı olmadıqları halda reqressiya tənliyi $y = a_y$ şəklində olur [çünki, bu halda $\mathbf{M}_x(y) = \mathbf{M}(y) = a_y$]. Qeyd edək ki, reqressiya tənliyinin $y = a_y$ olmasından x və y -in asılı olmamazlığı alınmır; məs., x dəyişdikdə y -in riyazi gözləməsi dəyişməz qala bilər, lakin y -in heç olmasa, $\mathbf{M}_x(y - a_y)^2$ ilə ölçülə bilən orta dəyişikliyi x -dən asılı ola bilər. Reqressiya tənliyinin y -in dəyişməsini nə dərəcədə yaxşı verə bilməsini təyin etmək, başqa sözlə, x və y arasındakı asılılığın funksional asılılığa nə dərəcədə yaxın olduğunu təyin etmək arzusu təbiidir. Bu suala cavabı y -in x -ə korrelyasion nisbəti verir [*Pirson* tərəfindən daxil olunmuşdur, bax]:

$$P_y = + \sqrt{1 - \frac{\mathbf{M}[y - \mathbf{M}_x(y)]^2}{\mathbf{M}(y - a_y)^2}}$$

$P_y = 0$, yalnız və yalnız, reqressiya tənliyi $y = a_y$ şəklində olduqda olur; yəni y -in riyazi gözləməsi x -dən asılı olmasın; $P_y = +1$ – yalnız y -in x -dən asılı olduğu halda doğrudur. Digər hallarda P_y , – 0 və +1 arasında qiymətlər alır.

Praktiki olaraq, reqressiya tənliyi məhdud sayda, məhdud dəqiqliyə malik müşahidələr üzrə hesablanılır. Sınağın verilənləri bilavasitə korrelyasion cədvəllə ifadə olunur; bu cədvəldə x və y kəmiyyətlərinin qiymətlərinin verilən hər hansı kombinasiyasının müşahidələrin

neçəsində alındığı göstərilir (bax, cədvəl 1-də sxematik misal).

Cədvəl 1

y	x									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	–	1	–	–	–	–	–	1	1
2	1	1	2	–	–	–	1	2	–	2
3	–	2	1	3	1	1	–	4	2	–
4	–	–	–	1	4	3	4	1	–	–
5	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–

Əgər x -in hər bir ayrıca qiymətinə çoxsaylı ayrı-ayrı müşahidələr uyğun olursa, onda reqressiya əyrisi $y = f(x)$ təqribi olaraq olduqca sadə təyin oluna bilinir: hər bir $x = x_i$ qiyməti üçün y kəmiyyətinin orta qiyməti $\bar{y}_i$, müşahidələrdə verilmiş $x_i = x_i$, $\bar{y}_i = f(x_i)$ qiyməti ilə təyin olunur və o, reqressiya əyrisini təqribən ifadə edir. Lakin hər bir $x = x_i$ qiymətinə uyğun müşahidələr sayı kifayət qədər böyük olmazsa, onda belə metod tamamilə təsadüfi nəticələrə gətirə bilər.

Cədvəl 2-də cədvəl 1-də verilmiş qiymətlərə uyğun $\bar{y}_i$ -lər verilir. Sadə sağlam düşüncədən belə nəticəyə gəlmək olur ki, reqressiya əyrisi $y = f(x)$, $x = 1$ olduqda təxminən 1,5-dən təxminən 4-ə qədər $x = 5$ və ya 6 ətrafında qalxaraq, x -in sonrakı artan qiymətlərində yenidən aşağı enməlidir. Lakin, məs., $x = 2$ olduqda, $\bar{y}_i$ -nin əlavə maksimumunun $x = 3$ olduqda $\bar{y}_i$ -nin sonradan azalması kimi halları, müşahidələrin verilmiş sayında tamamilə təsadüfi hesab oluna bilinər.

Cədvəl 2

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}_i$	1,5	2,7	2,0	3,2	4,1	4,4	3,4	2,8	2,2	1,7

İki kəmiyyət arasında normal K. (eht. nəz.-də, H. M.) 45. Akad. S. N. Bernşteynin nəzəri cəhətdən ən müfəssəl surətdə öyrənmiş olduğu bir sıra əsaslara görə, iki x və y kəmiyyətləri arasında korrelyasion asılılıq əksər hallarda məlum yaxınlaşma ilə normal sayılır, yəni koordinatları x və y olan nöqtənin (x, y) müstəvisinin hər hansı bir g oblastına düşməsi ehtimalı təqribən

$$\frac{1}{\Delta} \iint\limits_{g} e^{\frac{-1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2R(x-a_x)(y-a_y)}{\sigma_x \sigma_y}\right]} dx\,dy$$

inteqralı ilə ifadə olunacaqdır, burada $\Delta = 2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}$, $a_y = \mathbf{M}(y)$, $\sigma_y = +\sqrt{\mathbf{M}(y-a_y)^2}$, – y kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və kvadratik orta yayınması, $a_x = \mathbf{M}(x)$, $\sigma_x = +\sqrt{\mathbf{M}(x-a_x)^2}$, – x kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və kvadratik orta yayınması və nəhayət, R , – x və y kəmiyyətlərinin K. əmsalıdır:

$$R = \frac{\mathbf{M}\{(x-a_x)(y-a_y)\}}{\sigma_x\ \sigma_y}.$$

Normal K. halında reqressiya tənliyi $y = f(x)$ aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$y = a_y + \rho_y(x - a_x),$$

burada

$$\rho_y = R\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

yəni normal K. halında reqressiya əyrisi – düzxəttdir. Normal K. halında korrelyasion Pirson nisbəti P_y korrelyasiya əmsalı R -ə bərabərdir. K. əmsalının x və y arasında normal asılılıqdan olduqca çox fərqlənən əlaqələr halında, asılılıq ölçüsü kimi istifadə edilməsi, bəzən səhv nəticələrə gətirir, belə ki, K. əmsalı hətta y x -dən funksional asılı olan halda belə sıfra bərabər ola bilər. Cədvəl 1-dən y -in x ilə olduqca güclü əlaqəsi olduğunu görünür, lakin bununla belə K. əmsalı sıfra yaxındır. Bir də qeyd edək ki, normal K. halında x -in y -ə nəzərən reqressiya tənliyi –

$$x = a_x + \rho_x(y - a_y)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\rho_x = R\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Cədvəl 3. – Əsgəri xidmətə çağrılanların boyu və çəkisi arasında korrelyasion əlaqə

Çəki kq	boy sm-lə								
	154-ə kimi	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-dən çox
45-ə kimi	32	42	29	9	1	2	–	–	–
45-49	63	304	421	233	60	9	3	–	–
49-53	40	273	952	1.050	433	91	13	2	–
53-57	13	174	874	1.730	1.288	482	60	12	1
57-61	7	43	317	1.175	1.543	947	219	29	–
61-65	–	7	87	381	903	866	360	61	7
65-69	–	1	4	61	245	377	231	80	8
69-73	–	–	1	13	43	86	91	48	9
73-77	–	–	2	2	6	27	31	14	13
77-dən çox	–	–	–	–	5	10	9	11	3

ρ_y və ρ_x əmsalları y -in x -ə nəzərən və x -in y -ə nəzərən reqressiya əmsalları adlanır. ρ_x və ρ_y -in işarələri həmişə eynidir (və R -in işarəsi ilə üst-üstə düşür). Aydındır ki, $R = +\sqrt{\rho_x\rho_y}$. K. əmsalı faktiki olaraq, aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$R^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

burada $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$, n – müşahidələr sayı, x_i və y_i , – x və y -in i -ci müşahidədəki qiymətləridir. Bu düstur – verilən müşahidələr sırasının empirik K. əmsalı adlandırılan R^* üçün bilavasitə verilən K. əmsalıdır. Ayrı-ayrı müşahidələrin sayı n -in böyük qiymətlərində R^* empirik K. əmsalı əsl K. əmsalı R -ə yaxın olur.

Cədvəl 3 normal K. hipotezi ilə yaxşı uzlaşan korrelyasion əlaqəyə bir misaldır. Burada empirik K. əmsalı R^* $0,6279$ -a bərabərdir.

Cədvəl 1. – 624 ədəd Şimal şam ağaclarının gövdələrin diametrlərinin və hündürlüklərinin paylanması.

Diametr sm.-lərlə	Hündürlük (m.-lərlə)														
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
14-17 18-21 22-25 26-29 30-33 34-37 38-41 42-45 46-49 50-53 54-57 58 və daha çox	2 1 1	2 3 1	5 3 1	1 12 3	15 18 7 1	9 24 18 5 1	4 29 30 18 3 2	14 43 29 17 2	7 31 35 33 10 4 3 1	3 18 26 19 13 7 4 1	2 7 12 16 6 6 4 1 1	1 6 4 8 2 2 1	1 1	1	10 47 98 134 114 98 53 32 22 12 3 1
Cəmisi	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624

Müşahidələr sayı tamamilə kifayət edir ki, R-in R^*-ya olduqca yaxın olduğu hesab edilsin.

Toplam K. (rus. множественная К.). İkidən çox hadisələr və kəmiyyətlər arasında əlaqə analoji üsullarla öyrənilir. Bir çox tətbiqi məsələlərdə (məs., məhsuldarlığın proqnozu, çayların daşması) naməlum kəmiyyəti məlum kəmiyyətlər sırası ilə əlaqələndirən reqressiya tənliklərinin tətbiq olunması böyük əhəmiyyətə malikdir. Toplam K. halında çox da olmayan müşahidələrdən alınmış verilənlər əsasında nəticələr çıxarmaq olduqca təhlükəlidir. K. nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biri – etibarlı reqressiya tənliklərinin tətbiq olunması üçün bu və ya digər şəraitlərdə kifayət ediləcək müşahidələr sayının nə qədər olmasının aydınlaşdırılmasıdır.

Əd.: Определения и основные понятия, см. – Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 3 изд., М. – Л., 1934; Слуцкий Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Чупров А А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями, [М.], 1926; Tschuprow A. A., Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, Lpz., 1925.

A. N. Kolmoqorov (БСЭ-1, 1937, том 34).

KORRELYASİYA (riyazi statistikada) – ümumiyyətlə, ciddi funksional asılılığa malik olmayan statistik və ehtimali asılılıqdır. Funksional asılılıqdan fərqli olaraq, korrelyasion asılılıq yalnız o halda yaranır ki, dəyişənlərdən biri yalnız ikincinin verilənlərindən deyil, həmçinin bir sıra dəyişən şərtlərdən də asılı olur və ya hər iki dəyişən onların hər ikisi üçün ümumi olan müəyyən şərtlərdən asılı olur. Bu növ asılılıq cədvəl 1-də verilmişdir (bax, səh. 1149). Cədvəldən görünür ki, şam ağacının hündürlüyü orta qiymətcə artdıqda, onların gövdələrinin diametri də artır; lakin verilmiş hündürlüklü şam ağaclarının (məs., 23 m.) diametrlərinin *paylanması* olduqca yayınmalara malik olur. Əgər orta hündürlüyü 23-metrlik şam ağacları 22-metrlik ağaclardan qalın gövdəli olarsa, ayrı-ayrı şam ağacları üçün bu nisbət fərqli dərəcədə pozula bilər.

Belə bir misala baxaq: difteriyanın müalicəsində difteriya əleyhinə zərdab tətbiq olunur. Zərdabın tətbiq olunmasını A, xəstənin sağalmasını B ilə işarə edək. Əgər zərdab tətbiq olunduqda bütün xəstələr sağalmış olsaydı, lakin onun tətbiq olunmadığı bütün hallarda bütün xəstələr dünyalarını dəyişmiş olardılarsa, onda düz ciddi asılılıq halı ilə qarşılaşırıq; əgər $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B \setminus \overline{A})$ bərabərliyi ödənilsəydi, yəni sağalma hallarının nisbi miqdarları, zərdabın tətbiq edilib-edilməməsindən asılı olmayaraq eyni olardı, onda aydındır ki, yuxarıda verilən tərifə uyğun olaraq B hadisəsi (sağalma) A hadisəsindən (zərdabın tətbiqi) asılı olmamalı idi. Məs., əgər $\mathbf{P}(B \setminus A) = 0{,}97$, $\mathbf{P}(B \setminus \overline{A}) = 0{,}85$ olarsa, onda reqressiya əmsalının $\rho_B = 0{,}12$ qiyməti zərdabın tətbiqi ilə sağalma arasında müsbət əlaqənin olduğunu göstərmiş olardı.

Düz ciddi asılılıqda reqressiya əmsalı $\rho_B = +1$, B hadisəsi A-dan asılı olmadıqda $\rho_B = 0$, əks ciddi asılılıq halında $\rho_B = -1$; digər hallarda reqressiya əmsalı –1 və +1 arasında sıfra bərabər olmayan qiymətlər alır. Bir çox məsələlərdə A və B arasındakı əlaqəni reqressiya əmsalının

$$\rho_A = \mathbf{P}(A \setminus B) - \mathbf{P}(A \setminus \overline{B})$$

analoji ifadəsinin köməyilə deyil, hökmən ρ_B əmsalı vasitəsilə ölçmək üçün heç bir əsas yoxdur. Bu halda hətta A və B hadisələri arasında korrelyasiya əmsalı

$$R = \pm\sqrt{\rho_A \rho_B}$$

də istifadə oluna bilinər. R-in işarəsi reqressiya əmsallarınınhər ikisinin də əmsalının işarəsi ilə üst-üstə düşməlidir (bunlar həmişə eyni işarəlidir). K. əmsalı – yalnız və yalnız, A və B hadisələri asılı olmadıqları halda sıfra bərabər olur (əgər B hadisəsi A-dan asılı deyildirsə, onda A hadisəsinin B-dən asılı olmamazlığı asanlıqla isbat olunur) və ± 1 qiymətlərini, yalnız və yalnız, ciddi asılı olmamazlıq halında alır.

İki kəmiyyət arasında korrelyasiya. Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında ciddi (funksional) əlaqə yoxdursa, müəyyən ehtimalların olduğu hallarda, ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər bir mümkün $\xi = x$ qiyməti üçün uyğun $\mathbf{M}(\eta \mid \delta = x) = f(x)$ şərti riyazi gözləməsini təyin etmək olur (bax, Ожидание математическое). $y = f(x)$ tənliyi – η kəmiyyətinin ξ-yə nəzərən reqressiya tənliyi, $x\mathrm{O}y$ müstəvisində $y = f(x)$ əyrisi isə η-nın ξ-yə nəzərən reqressiya əyrisi adlandırılır. $m_\eta = \mathbf{M}(\eta)$ ilə η-nın şərtsiz riyazi gözləməsini işarə edək. ξ və η – asılı olmayan kəmiyyətlər olduqda, reqressiya tənliyi $y = m_\eta = \text{const}$ münasibətilə ifadə olunur, yəni $\mathbf{M}(\eta \mid \xi = x) = \mathbf{M}(\eta)$ olduqda bütün şərti riyazi gözləmələr şərtsiz riyazi gözləmələrlə üst-üstə düşür. Tərsi həmişə doğru olmur. ξ-nin aldığı qiymətlər dəyişdikcə reqressiya tənliyinin η-nın dəyişməsinə necə təsir etməsini təyin etmək arzusu başqa sözlə asılılığın ciddi asılılığa nə dərəcədə yaxın olmasını təyin etmək arzusu təbiidir. Bu məqsədlə $\xi = x$ verilmiş qiymətində η-nın şərti dispersiyasından və ya onun orta qiyməti – η-nın reqressiya əyrisi ətrafında dispersiyası –

$$\sigma^2_{\eta/\xi} = \mathbf{M}[\eta - \mathbf{M}(\eta \mid \xi = x)\,]^2$$

kəmiyyətindən istifadə etmək olar. Əlaqə göstəricisi kimi, adətən,

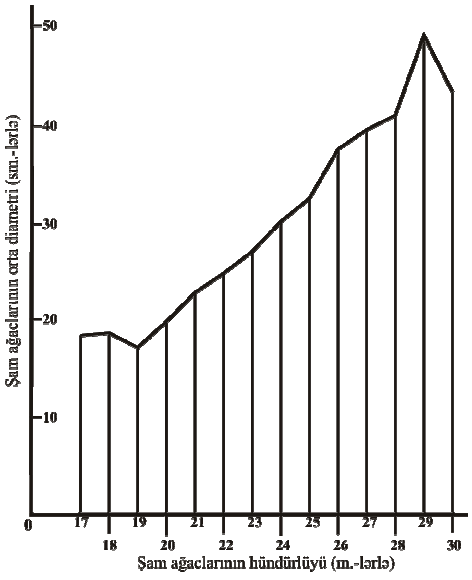
$$\theta^2_{\eta|\xi} = 1 - \frac{\sigma^2_{\eta|\xi}}{\sigma^2_\eta}$$

– korrelyasion münasibətinə baxılır, burada σ^2_η, – η kəmiyyətinin dispersiyasıdır. $\theta^2_{\eta|\xi}$ korrelyasion münasibəti də analoji təyin olunur. $\theta^2_{\eta|\xi}$ kəmiyyəti, yalnız və yalnız, reqressiya tənliyi $y = m_\eta$ şəklində olduğu halda, yəni η-nın riyazi gözləməsi ξ-dən asılı olmadığı halda sıfra bərabər olur; $\theta^2_{\eta|\xi}$, – η kəmiyyətinin ξ-dən ciddi asılılığı halında +1-ə bərabər olur. Digər hallarda $\theta^2_{\eta|\xi}$, – 0 və +1 arasında qiymətlər alır.

Ehtimalı reqressiya əyrisi olduqca geniş korrelyasion cədvəl üzrə tətbiqi olaraq yenidən bərpa oluna bilinər; $f(x)$-ın təqribi qiyməti kimi η-nın $\xi = x$ olduğu haldakı müşahidələrdə aldığı qiymətlərin ədədi ortası götürülür. Lakin ξ-nin hər bir qiymətinə uyğun müşahidələrin sayı çox da böyük olmazsa, onda belə metod tamamilə təsadüfi nəticələrə gətirilə bilər.

Şəkildə, araşdırılmış şam ağaclarının diametrlərinin orta uzunluğunun onların hündürlüyündən asılılığı, cədvəl 2-yə (bax, səh. 1149) müvafiq olaraq, statistik reqressiya əyrisi təsvir olunmuşdur. Göründüyü kimi bu xətt orta hissədə əsl qanunauyğunluğu yaxşı ifadə edir. Reqressiya xəttinin 29 və 30 m.-ə hündürlüyə uyğun nöqtələri materialın kifayət qədər olmaması səbəbindən etibarlı deyildirlər. 17, 18 və 19 m. hündürlüklərə uyğun nöqtələr materialın seçilməsi sistemi ilə təhrif olunmuşdur: cədvələ yanız diametrləri ≥ 14 sm. olan şam ağacları daxil olmuşdur.

Riyazi statistikada (bax) məhdud statistik material üzrə reqressiya əyrilərinin və korrelyasion münasibətin təqribi tapılması üçün digər, daha mükəmməl üsullar, həmçinin statistik tapılmış belə reqressiya əyrilərinin və korrelyasion münasibətin dəqiq qiymətləndirilməsi üsulları işlənilmişdir (bax, *Reqressiya*).



şimal şam ağaclarının orta diametrinin hündürlükdən asılılığı üçün reqressiyanın statistik asılılığı

İki kəmiyyət arasında normal korrelyasiya. ξ və η kəmiyyətləri arasındakı korrelyasiyon asılılığın bir çox hallarda məlum yaxınlaşması ilə normal olduğunu sovet riyaziyyatçısı S. N. Bernşteyn bir sıra əsaslandırılmalarla ən mükəmməl surətdə nəzəri cəhətdən öyrənmişdir, yəni o göstərmişdir ki, koordinatlar x və y olan nöqtənin xOy müstəvisinin hər hansı G oblastına düşməsi ehtimalı təqribi olaraq

$$\frac{1}{\Delta}\iint_\Delta e^{Q(x,y)}dxdy$$

inteqralı ilə ifadə olunacaqdır, burada

$$Q(x,y) =$$

$$= \frac{-1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-m_\xi)^2}{\sigma^2_\xi} + \frac{(y-m_\eta)^2}{\sigma^2_\xi} - \frac{2R(x-m_\xi)(y-m_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}\right].$$

$$m_\xi = \mathbf{M}(\xi), \quad m_\eta = \mathbf{M}(\eta),$$

$$\sigma^2_\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2, \quad \sigma^2_\eta = \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2$$

– ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsi və dispersiyası, $\Delta = 2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-R^2}$ və R, – ξ və η kəmiyyətlərinin K. əmsalıdır –

$$R = \frac{\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Normal K. halında reqressiya tənliyi $y = f(x)$ aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$y = m_\eta + \rho(x - m_\xi),$$

burada

$$\rho_\eta = R\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi},$$

yəni reqressiya əyrisi – düzxəttdir. Normal K. halında korrelyasion münasibət $\theta^2_{\xi|\eta}$ – korrelyasiya əmsalı R-ə bərabərdir. Normaldan olduqca fərqlənən əlaqələr halında ξ və η arasında asılılıq ölçüsü olaraq, K. əmsalının istifadə olunması bəzən səhv nəticələrə gətirir, belə ki, K. əmsalı hətta η-nın ξ-dən adi asılı olduğu halda belə sıfra bərabər ola bilir. Bir də onu qeyd edək ki, normal K. halında ξ-nin η-ya nəzərən reqressiya tənliyi

$$x = m_\xi + \rho_\xi(y - m_\eta)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\rho_\eta = R\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}.$$

ρ_η və ρ_ξ əmsalları – η və ξ-yə nəzərən və ξ-nin η-ya nəzərən reqressiya əmsalları adlandırılır. ρ_η və ρ_ξ-nin işarəsi həmişə eynidir (və R-in işarəsi ilə üst-üstə düşür). Aydındır ki,

$$R = \pm\sqrt{\rho_\xi \rho_\eta}.$$

(ξ, η) kəmiyyətlərinin eyni bir ikiölçülü paylanmasına müvafiq müşahidələrin sayı böyük olduqda, yuxarıda təyin edilmiş statistik korrelyasiya əmsalı r, nəzəri korrelyasiya əmsalı R-ə yaxındır. Riyazi statistikada R-in r üzrə təyin olunmasının dəqiq qiymətləndirmə metodları işlənilmişdir.

Toplam korrelyasiya. İkidən çox hadisə və ya kəmiyyətlər arasında əlaqə analoji üsullarla öyrənilir. Antropoloji dəyişənlər arasında toplam K. aydın ifadə olunmuş şəkildə müşahidə olunur. Bu vəziyyət bir sıra sovet alimlərinin araşdırmalarında şəxsi istifadə əşyalarının (geyimin, ayaqqabının və s.) kütləvi istehsalında əhalinin tələbatının ən yaxşı surətdə öyrənilməsini təmin edən standartlar sisteminin hazırlanması üçün zəmin olmuşdur.

Cədvəl 2. Orta diametrləri asılılığı (cədvəl 1-in verilənləri üzrə)

	Hündürlük (m.-lərlə)														Cəmisi
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Şam ağaclarını sayı	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624
Orta diametr (sm.-lərlə)	18,5	18,8	17,7	20	22,9	25	27,2	30,1	32,7	38,3	40	41,8	42,8	43,5	31,2

Bir çox tətbiqi məsələlərdə (məs., məhsulun proqnozlaşdırılması, çayların daşması) naməlum kəmiyyəti bir sıra məlum kəmiyyətlərlə əlaqələndirilən reqressiya tənliklərinin tərtib edilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır. Toplam K. halında müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük ədəd olmadığı halda verilənlər əsasında nəticələr çıxarmaq xüsusilə təhlükəlidir. K. nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biri – etibarlı reqresiyya tənliklərinin tərtib olunması üçün, bu və ya digər hallarda, müşahidələrin kifayətedici sayının təyin olunmasıdır.

K. nəzəriyyəsi üzərində qurulmuş nəticələrin əsaslandırılması üçün zəruridir ki: 1) seçilmiş ehtimal sxeminin verilən hadisə və ya prosesə tətbiq edilə bilinməsi əsaslandırılsın; 2) toplanılmış materialın reprezentativ olub-olmadığı diqqətlə yoxlanılsın, yəni toplanmış materiallarda öyrənilən dəyişənlərin paylanmasının təyin olunacaq ehtimal paylanmasından sistematik yayınması üçün səbəblərin olmadığı yoxlanılsın.

K.-nın ölçülməsində emprik üsulların düzgün tətbiqi – yalnız onun mahiyyətinin, baxılan təzahürlərin təbiətinin düzgün anlaşıldığı halında mümkündür. K. – hadisə və ya proseslərin ümmi əlaqə qanununun təzahürüdür. Onun funksional əlaqədən fərqli «natamam» xarakterinin mənbəi, elə məhz həmin qanundur – başqa şərtlərdən asılılığı mövcud olmasıdır.

Burjua elmi çox vaxt bu natamamlıqdan əlaqə qanununu inkar etmək üçün istifadə edir. İngilis bioloq F. Qalton varislər və əcdadların əlamətləri arasında əlaqəni tədqiq edərək, bütün diqqətini onun natamamlığına yönəltmişdi və nəticədə orta göstəricilər növünə reqressiya «qanununu» almışdı; bu «qanun», daniya bioloqu V. İohansen tərəfindən bu asılılığın tamamilə inkar edilməsi kimi «qanuna» çevrildi və bu da özlüyündə «təmiz xətlərin» dayanıqlılığı haqqında antidarvin nəzəriyyəsinə gətirdi. Digər tərəfdən unutmaq olmaz ki, iki təzahür (əlamət) arasında K. heç də belə anlaşılmamalıdır ki, bunlardan biri – səbəb, digəri nəticədir, necə ki, bəzən burjua alimləri bunu aktları tərtif etmək məqsədilə öz istədikləri səmtə yönəldirlər. K. – yalnız bu əlamətlərdəki dəyişilmələrdəki paralelizmi ölçür; bu dəyişikliklərin mənbəi isə üçüncü bir hər hansı faktorun hər iki əlamətə təsiri ola bilir.

Əd.: С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, К., 1912; Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями. Л., 1926; Р о м а н о в с к и й В. И., Математическая статистика, М. – Л., 1938; К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; Теория и методы антропологической стандартизайии применительно к массовому производству изделий личного пользования, М., 1951.

RİYAZİ STATİSTİKA – natamam verilənlər üzrə statistik kollektivlərin xassələrinin riyazi təsviri və təyin olunması haqqında elmdir. Hər hansı müəyyən əlamətlərinə görə tam və bircins vəhdətdə birləşmiş, digər əlamətlərinə görə isə qruplara və ya siniflərə bölünmüş (məs., müəyyən bir zaman anında müəyyən bir ölkənin yaş qrupları üzrə bölünmüş əhali) əşyalar və ya təzahürlər çoxluğuna s t a t i s t i k k o l l e k t i v deyilir. Statistik kollektivin qruplara və ya siniflərə bölgüsünə səbəb əlamətlər statistik kollektivin argumentləri adlanır. Statistik kollektivin üzvlərinin sayı onun həcmini təşkil edir. Statistik kollektivin ayrı-ayrı qruplarında və ya siniflərindəki üzvlərinin sayı onların elementlərinin sayı və ya onların argumentlərinin uyğun qiymətlərinin tezlikləri adlanır.

R. s. iki növ məsələyə baxır: təsviri və normativ. Təsviri məsələlər ayrı-ayrı konkret satistik kollektivlərin təsviri ilə həll olunur və bu təsvir – onların statistik xarakteristikalarının və ya ümumi əlamətlərin (orta qiymətlərinin, dispersiyalarının, momentlərinin və s.) tezliklərin paylanmasında qanunauyğunluqların və arqumentlərin arasındakı əlaqələrin müəyyənləşdirilməsində ibarətdir. R. s.-nın normativ məsələləri – baxılan statistik kollektiv üçün müəyyən olunmuş xassələrin, bir hissəsi verilən kollektiv olan, lakin daha ümumi öyrənilməmiş kollektivə (ümumi statistik kollektiv) və ya verilən kollektivə analoji kollektivlər toplusuna köçürülə bilinməsi mümkünlüyünü araşdırmaqdan ibarətdir. Bu halda bəzi əlavə şərtlərdə, verilən kollektiv təsadüfi seçim və ya sadəcə olaraq, ümumi kollektivdən seçim adlanır; R. s.-nın mühüm bölmələrindən biri – seçimlər nəzəriyyəsinin əsas problemi ondan ibarətdir ki, seçimin həcmi və xarakteri təyin olunmalı, bunlar əsasında seçim haqqında verilən dəqiqliklə və ehtimalla ümumi çoxluq üçün də istifadə oluna bilinsin. Statistik xarakteristikalara orta qiymətlər, dispersiya, momentlə haqqında nəzəriyyədə və statistik xarakteristikaların qiymətləndirmə nəzəriyyəsində baxılır. Statistik kollektivlərin tezliklərinin paylanmasındakı qanunauyğunluqların təsiri ilə paylanma əyrilərinin nəzəriyyəsi, onların arqumentləri arasında əlaqələrin təsviri ilə korrelyasiya və birləşmələr (assosiyasiyalar) nəzəriyyəsi məşğul olur.

O r t a q i y m ə t l ə r, d i s p e r s i y a, m o m e n t l ə r. Statistik kollektivlərin təsvir edilməsindən ibarətdir ki, bu cədvəllərdə kollektivlərin arqumentləri, sinifləri, bu siniflərin elementlərinin sayı və cədvəllərin diaqramm, poliqon, histoqram (pilləvari qrafiklər) və s. şəklində həndəsi təsvirləri göstərilir. Statistik kollektivlərin öyrənilməsində sonrakı ən mühüm vasitə kimi, orta qiymətlərin – statistik kollektivin vəziyyətini təsvir edən statistik xarakteristikaların tərtib olunmasıdır. Məs., birölçülü S statistik kollektivinə (bir miqdar arqumenti bir ədəd olan kollektiv) baxaq, S – aşağıdakı cədvəllə təsvir olunur:

x	$x_1\ x_2\ \ldots x_s$	$\sum n_x = n$
n_x	$n_1\ n_2\ \ldots n_s$	

bu cədvəldə $x_1, x_2, \ldots, x_s$, – x arqumentinin qiymətləri, $n_1, n_2, \ldots, n_s$ isə x-in bu qiymətləri müşahidə olunmuş halların sayıdır. S üçün x arqumentinin ədədi orta və ya sadəcə $\bar{x}$ orta qiyməti –

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_s x_s$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və o, ən sadə və geniş yayılmış statistik xaraktristikadır. Orta qiymətlər arasında mühümlərindən biri də mediandır (bax) və bu xarakteristika arqumentin elə qiyməti ilə təyin olunur ki, x-in S-də bu qiymətdən kiçik və böyük qiymətləri eyni tezliklə təsadüf olunur. Ən çox istifadə olunan bu orta qiymətlərdən başqa, harmonik, həndəsi və s. orta qiymətlərə də baxılır. Mühümlüyü etibarilə növbəti statistik xarakteristikalar – statistik kollektivdə arqumentin qiymətlərinin səpələnmə ölçüləridir: kvadratik orta yayınma, dispersiya, ehtimalı yayınma, mütləq orta yayınma, kvartillər və s. Bu ölçülərdən ən çox istifadə olunanlar kvadratik orta yayınma və dispersiyalar; kvadratik orta yayınma

$$\sigma = +\sqrt{\frac{1}{n} \sum n_s (x_s - \bar{x})^2}$$

bərabərliyi ilə, təyin olunur, dispersiya isə σ^2-na bərabərdir. Əsl kollektivlərin əksəriyyəti üçün kvadratik orta yayınmanın belə bir

xassəsi vardır ki, x -in kollektivdə olan bütün qiymətlərindən 99%, $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ intervalında yerləşir. Beləliklə, σ nə qədər kiçik olarsa, arqumentin qiymətləri onun orta qiyməti ətrafında o qədər çox topalanacaqdır. Hər hansı statistik xarakteristikanın dəqiqliyini və etibarlılığını təyin edir və buna görə də, statistik xarakteristikanın kvadratik orta yayınmalarının axtarılması – R. s.-nın mühüm məsələlərindən biridir. Kvadratik orta yayınma və ya $\bar{x}$ orta qiymətinin kvadratik orta xətası $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ -ə bərabərdir.

Dispersiyanın orta qiymətləri və ölçüləri statistik kollektivlərin öyrənilməsində daha ümumi vasitələrin – *momentlər* adlandırılan xarakteristikaların xüsusi halıdır, bu momentlərdən başlanğıc, mərkəzi və ixtiyari başlanğıclı momentləri qeyd etmək olar. Başlanğıc momentlər –

$$m_h = \frac{1}{n}\sum n_x x_s^h$$

bərabərliyi ilə, mərkəzi momentlər –

$$\mu_h = \frac{1}{n}\sum n_s (x_s - \bar{x})^h$$

bərabərliyi ilə, ixtiyari a başlanğıcı ətrafında momentlər –

$$\upsilon_h = \frac{1}{n}\sum n_s (x_s - a)^h$$

düsturu ilə təyin olunur; h – momentin tərtibi adlanır və ixtiyari müsbət qiymətlər alır. Birinci başlanğıc moment – $\bar{x}$ orta qiymətidir, ikinci mərkəzi moment $-\sigma^2$ dispersiyasıdır, üçüncü mərkəzi momentin vasitəsilə arqumentin paylanmasının asimmetriyasını ölçən asimmetriya əmsalı – $K = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ qurulur və dördüncü mərkəzi momentin vasitəsilə paylanmanın yüksək və ya alçaq zirvəli olmasını ölçən eksses – $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ xarakteristikası (forma xarakteristikası H. M.) qurulur.

Daha yüksək tərtib momentlər R. s.-da çox nadir hallarda istifadə olunur. Yenilikcə R. s.-da momentlərə analoji, onlara nisbətən bəzi üstünlüklərə malik, R. Fişerin kumulyantlarından istifadə etməyə başlamışlar.

Paylanmalar və paylanma əyriləri. Birölçülü statistik kollektivlərin təsviri üçün digər vasitə – bəzi paylanmalar və *paylanma əyrilərdir* (bax). Belə paylanmalardan ən mühümləri – Puassonun binomial paylanması və normal və ya Qauss paylanmasıdır. Birincisi – hər bir sınaqda sabit ehtimalla baş verən, asılı olmayan sınaqlarda hər hansı hadisənin tezliklərinin paylanması ilə müqayisə oluna bilinən paylanmaların təsvir olunmasına xidmət edir. İkinci – nadir hadisələr və proseslərin paylanmalarının təsviri üçün istifadə olunur, üç uşaq, dörd uşağın doğulması, radioaktiv maddələrin parçalanmasında α -hissəciklərin buraxılması və s.).

$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(A)}$$

tənliyi ilə verilən normal paylanma, R. s-da nəzəri və praktiki, fundamental rol oynayır və çoxsaylı asılı olmayan və ya sanki asılı olmayan səbəblərin təsiri nəticəsində yaranan arqumentlərə toplananlar kimi baxdıqda, bu arqumentlərin paylanmasının təsvirinə xidmət edir (məs., belə arqument insan boyu ola bilər ki, bircins böyük bir kollektivkv üçün onun paylanması normal paylanma qanununa dəqiqliklə tabedir). (A) tənliyi həndəsi anlamda, kəsilməz paylanmaların (arqumenti kəsilməz paylanmaların) təsviri üçün paylanma əyrilərindən biri – normal əyrini ifadə edir. Bu paylanmalar ümumi şəkildə

$$y = n f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada θ_i – verilən konkret paylanma üçün müəyyən qiymətlər alan paylanma parametrləridir. Paylanma əyrisi vasitəsilə verilmiş α və β sərhədləri arasında arqumentin qiymətlərinin tənlikləri – $n_{\alpha\beta} = n\int_{\alpha}^{\beta} f\,dx$ tapılır və paylanma əyriləri nəzəriyyəsinin məsələsi – müxtəlif paylanmalar və ya onların sinifləri üçün f funksiyanın uyğun formalarının axtarılması və θ_i parametrlərinin qiymətlərinin axtarılmasının elə üsullarının müəyyənləşdirilməsidir ki, hesablanmış $n_{\alpha\beta}$ tezlikləri verilmiş kollektivin bütün (α, β) sinifləri üçün müşahidə olunmuş tezliklərə mümkün qədər yaxın ola bilsinlər.

Parametrlərin axtarılması üçün ən çox istifadə olunan: ən kiçik kvadratlar üsulu (bax) və momentlər üsuludur. Birinci üsul ondan ibarətdir ki, parametrlərin elə qiymətləri axtarılır ki, onlar paylanmanın hesablanılmış müşahidə olunmuş tezlikləri arasında fərqlərin kvadratları cəminin minimumunu təmin etsin, ikincisi – θ_i -nin elə qiymətlərinin tapılmasından ibarətdir ki, bunlar paylanma əyrisi üzrə və verilmiş paylanma üzrə hesablanılmış birinci tərtibdən başlayaraq, [$(S-1)$ -ci tərtibə qədər] momentlərin bərabər olmalarını təmin edə bilsin. 112. Axır vaxtlarda R. Fişerin təklifinə görə ən böyük doğruyaoxşarlıq üsulu tətbiq olunmağa başlanılmışdır, bu metod ondan ibarətdir ki, θ_i parametrlərinin elə qiymətləri axtarılır ki, onlar müşahidə olunmuş tezliklərə bərabər müşahidə ehtimalına mtənasib olan, doğruyaoxşarlıq kəmiyyətləri adlanan xüsusi bir kəmiyyətin maksimum qiymət olmasını təmin edə bilsin.

$f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ funksiyasının ən çox istifadə olunan formaları – K. Pirsonun

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

differensial tənliyi ilə təyin olunan funksiyadır və Puasson paylanmasına və normal paylanmaya ümumiləşməyə yardımçı – Şarlye sıralarıdır. $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ paylanma əyrisinə ümumi kollektivdə arqumentin paylanma qanunu kimi baxıldıqda, f funksiyasının formasının nəzəri əsaslandırılması və θ_i parametrlərinin tapılmış qiymətlərinin qiymətləndirilməsi kimi məsələlər yaranır. f funksiyasının forması ümumi kollektivin real təbiəti haqqında mülahizələr əsasında seçilə bilinər, θ_i parametrlərinin qiymətləndirilməsi ən sadə yolla – onların kvadratik orta xətalarının axtarılması ilə alınır. Bu qiymətləndirilmə məsələsinin dəqiq həlli o halda alınır ki, araşdırılan konkret paylanmanın verdiyi seçimlərə analoji seçimlərin sonsuz toplusunda θ_i parametrlərinin paylanmasını tapmaq mümkün olun. Paylanma əyrisi tapıldıqda bu əyri üzrə tezliklər hesablandıqdan sonra belə bir sual doğur: bunlar müşahidə olunmuş nezlikləri nə dərəcədə bərpa edə bilir. Bu məsələnin həlli üçün ən çox Pirsonun uzlaşma kriterisi

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_x - n_x')^2}{n_x'}$$

istifadə olunur, burada, n_x' – hesablanmış və n_x – müşahidə olunmuş tezliklərdir və bu kriteri xüsusi cədvəllərin köməyilə təsadüfi $n_x - n_x'$ fərqlərinin ehtimallarını tapmağa imkan verir; bu fərqlər müşahidə olunmuş fərqlərin ehtimallarına ya bərabərdir və ya ondan kiçikdir; P kiçik olduqda n_x və n_x' arasında uzlaşma qeyri-kafi hesab olunur.

S e ç i m i m e t o d. R. s.-nın normativ məsələlərinin həlli üçün ən mühüm vasitə – seçimi metoddur. Öyrənilən statistik kollektiv sonsuz və ya olduqca böyük və hərtərəfli statistik araşdırma üçün çətin olduqda və ya hər hansı digər səbəblərə görə hərtərəfli araşdırıla bilinmədikdə

(məs., bu araşdırma obyektlərinin xarab olması və ya tamamilə sıradan çıxması ilə əlaqədar olarsa) ümumi kollektivin yalnız hər hansı bir hissəsi öyrənilir və bu hissə isə elə seçilir ki, bu hissədə öyrənilən arqumentin paylanması onun ümumi kollektivdəki paylanmasına olduqca yaxın olsun. Buna görə seçim müəyyən stoxastik sxemlərə müvafiq aparılır və bu seçimin həcmi qənaətbəxş olmalıdır. R. s.-da yalnız arqumenti normal paylanmaya tabe olan ümumi kollektivdən seçimlər kifayət qədər tam öyrənilmişdir. Bunlar, həm də normal paylanmanın R. s. metodlarında istisna rolu olması cəhətindən çox mühümdür. Müasir R. s.-da kiçik həcmli, yəni həcmi çox kiçik də ola bilən ixtiyari həcmli seçimlər, xüsusilə, mühüm rol oynayır. Bunların nəzəriyyəsinin mühümlüyü ondan aydın olur ki, biologiyada, aqronomiyada, texnikada və s. statistik araşdırmaları əksər hallarda həcmi böyük olmayan kollektivlər verir. Kiçik həcmin əsas problemi – bu seçimlərdə müxtəlif statistik xarakteristikaların dəqiq paylanmalarının axtarılmasıdır. Məs., arqumenti normal paylanmaya tabe kollektivlərin ixtiyari verilmiş həcmli seçimlərdə orta qiymətin, dispersiyanın və bəzi digər xarakteristikaların paylanmaları məlumdur. Bu paylanmalar ən yeni statistik kriterilərin: t-Styudent, z-Fişer və s. kimi kriterilərin və s. yaranmasına səbəb oldu; bunlar da olduqca geniş və hərtərəfli tətbiqlər tapmış bir sıra ən yeni statistik araşdırma metodların əsasını təşkil etmiş oldu.

Çoxölçülü statistik kollektivlər – bir neçə arqumentli kriterilərdir. Bunların öyrənilməsində statistik asılılıqların əsas öyrənilmə problemi ilə bağlı bir sıra yeni məsələlər yaranır. Statistik asılılıqlar funksional asılılıqlara qarşı qoyulur və məs., ikik arqument üçün aşağıdakı kimi təyin olunur: əgər y-in şərti paylanmaları, yəni y-in x-in verilmiş qiymətlərinə uyğun palanmaları x-in dəyişməsi ilə dəyişirsə, y bu halda x-dən statistik asılıdır, deyilir (bax, həm də *Korrelyasiya*). Statistik sıraların dayanıqlılıq nəzəriyyəsi, zaman sıraları nəzəriyyəsi və assosasiya nəzəriyyəsi – statistik kollektivlərin keyfiyyət arqumentləri arasında əlaqəni öyrənən nəzəriyyə də R. s.-ya aiddir.

R. s.-ya aid ilk məsələlərə Artıq ya Bernulli və Laplasın əsərlərində. Ehitmal nəzəriyyəsinin ictimai, iqtisadi, mənəvi və demoqrafik məsələlərə tətbiqi ilə əlaqədar baxıldışdı. Lakin onun banisi A. Ketle (1796-1874) hesab olunur; o, riyazi statistika metodlarını demoqrafiya və antropometriyada tətbiq etmişdi. Müasir R. s.-nın baniləri Fransiz Qalton (1822-1911) və Karl Pirson (1857-1936) hesab olunur; Qalton korrelyasiya nəzəriyyəsinin və biometriyanın əsasını qoymuş, Pirson isə bunları geniş surətdə inkşaf etdirərək R. s.-nın bir sıra müasir metodlarını yaratmışdır (momentlər nəzəriyyəsi, paylanma əyrilər, χ^2-kriterisi və s.). Ən son dövrdə Ronald Fişer statistik xarakteristikaların qiymətləndirilməsinin ümumi nəzəriyyəsini. Dispersion analiz metodları, kiçik seçimlər nəzəriyyəsi və b.). Son dövrlərin riyaziyyatçı statistiklərindən Qauss və Puasson paylanmalarını ümumiləşdirən sıraları qurmuş Şarlye və A. A. Çuprovu qeyd etmək olar. R. s.-nın statistikanın riyazi üsullarının aparatı kimi rolu haqqında, bax, *Statistika* məqaləsinə.

Əd.: Чупров А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями. Л., Математические методы в статистике Сб. ст. под ред. Г. Л. Ритца, пер. и обработ. С.П. Бобров, М., 1927; Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, М. – Л., 1924; Лахтин Л. К., Кривые распределения …, М., [1922]; Эльдертон В. П., Кривые распределения численностей и корреляция, пер. с англ., М., 1924; Слуцкий Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Романовский В. И., Элементы теории корреляции, 2 изд. Ташкент, 1928; Yule G. U. An Introduction to the theory of Statistics, 10 ed., L., 1932; Fisher R. A., Statistical methods for research workers, 5 ed., L. – Edinburgh, 1934; Anderson O. N., Einführung in die mathematische Statistik, W., 1935; Darmois G., Statistique mathématique, P., 1928; Jordan Ch., Statistique mathématique, P., 1927; Risser R. et Traynerd C. E., Les principes de la statistique mathématique, P., 1933.

RİYAZİ STATİSTİKA.

Mündəricat:

I. Riyazi statistikanın predmeti.
II. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi.
III. Statistik təsvirin ən sadə üsulları.
IV. Statistik paylanmaların ehtimal paylanmaları ilə əlaqəsi. Parametrlərin qiymətləndirilməsi. Ehtimali hipotezlərin yoxlanılması.
V. Seçimi metod.
VI. Riyazi statistikanın qarşıdakı məsələləri.
VII. Tarixi məlumat.

Riyazi statistika – riyaziyyatın bir bölməsidir, elmi və praktik nəticələri üçün statistik verilənlərin sistemləşdirilməsi, yenidən işlənilməsi və istifadə olunmasının riyazi metodlarına həsr olunmuşdur. Burada statistik verilənlər – bu və ya digər əlamətlərə malik, çox və ya az geniş hər hansı çoxluğun obyektləri sayı haqqında məlumatlara deyilir (məs., 1a və 2a cədvəllərində verilənlər belələridir).

I. Riyazi statistikanın predmeti.

Obyektlər çoxluğunun statistik təsviri – bir tərəfdən, çoxluğun obyektlərindən hər birinin fərdi təsviri, digər tərəfdən, çoxluğun onun ümumi – ayrı-ayrı obyektlərə ayrılmasını heç də tələb etməyən xassələri üzrə təsviri arasında aralıq bir vəziyyət tutur. Statistik verilənlər, birinci üsulla müqayisədə çox və ya az dərəcədə heç bir əlamətləri ilə seçilmirlər və yalnız məhz fərdi verilənlər mühüm olan hallarda, məhdud əhəmiyyət kəsb edirlər (məs., müəllim siniflə tanış olarkən, ondan əvvəlki müəllimin qoymuş olduğu əla, yaxşı, kafi və qeyri-kafi qiymətləri ifadə edən ədədlər statistikasından vəziyyət haqqında yalnız olduqca səthi məlumat alacaqdır). Digər tərəfdən çoxluğun kənardan müşahidə olunmuş toplum xassələri haqqında verilənlərlə müqayisədə, statistik verilənlər işin mahiyyətinə daha dərin varmağa yardım edir.

Məs., süxurun qranulometrik analizinin verilənləri (yəni süxuru əmələ gətirən hissəciklərin ölçüləri üzrə paylanması haqqında verilənlər) hissələrə ayrılmamış nümunələrinin yoxlanılması ilə müqayisədə dəyərli əlavə informasiya verir və müəyyən dərəcədə onun xassələrini izah etməyə, onun nə cür yaranmasını izah etməyə imkan yaradır.

Obyektlərin bu və ya digər çoxluqları haqqında statistik verilənlərə baxılmasına əsaslanan araşdırma metodu statistik metod adlanır. Statistik metod ən müxtəlif bilik oblastlarında tətbiq olunur. Lakin müxtəlif təbiətli obyektlərə tətbiqdə statistik metodun cəhətləri o qədər özünəməxsusluğu ilə seçilir ki, məs., ictimai-iqtisadi statistikanı [sözün əsl mənasında *statistika* adlandırılan (bax)], fizika statistikanı (bax, *Statistik fizika*), ulduz statistikasını (bax, *Ulduz astronomiyası*) və s. bir elm kimi birləşdirmək mənasız olardı.

Biliyin müxtəlif oblastlarında statistik metodun ümumi cəhətləri bu və ya başqa qruplara daxil olan obyektlərin sayının hesablanmasına, kəmiyyət əlamətlərinin paylanmasının baxılmasına, seçim metodunun tətbiqinə (geniş bir çoxluğun bütün obyektlərinin ətraflı araşdırılması çətin olduğu hallarda), bu və ya digər nəticələrin çıxarılması üçün müşahidələr sayının yetərli olub-olmadığını qiymətləndirdikdə ehtimal nəzəriyyəsinin istifadə olunmasına gətirilir. Araşdırmanın statistik metodlarının məhz bu formal riyazi, öyrənilən obyektlərin spesifik təbiətinə etinasızlıq kimi cəhət R. s.-nın predmetini təşkil edir.

II. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi.

R. s.-nın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi müxtəlif hallarda müxtəlif xarakter daşıyır. *Ehtimal nəzəriyyəsi* (bax) kütləvi hadisə və ya prosesləri deyil, təsadüfi hadisə və ya prosesləri, məhz «ehtimali-təsadüfi» hadisə və ya prosesləri, yəni elələrini öyrənir ki, onlara uyğun ehtimal paylanmaları haqqında danışmaq məna kəsb etsin. Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi, ixtiyari təbiətli, ehtimali-təsadüfi kateqoriyaya aid olmayan belə, kütləvi hadisə və ya proseslərin statistik öyrənilməsində müəyyən rol oynayır. Bu – ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan *seçim metodu* nəzəriyyəsi (bax) və ölçmə xətaları nəzəriyyəsi (bax, *Xətalar nəzəriyyəsi*) vasitəsilə həyata keçirilir. Bu hallarda ehtimal qanunlarına öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri deyil, onları araşdırma üsulları tabe olur.

Ehtimal nəzəriyyəsi ehtimalı hadisələrin statistik araşdırılmalarında ən mühüm rol oynayır. Burada R. s.-nın ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan: ehtimali hipotezlərin statistik yoxlanılması nəzəriyyəsi, ehtimal paylanmalarının və bunlara daxil olan parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsi və s. kimi bölmələri tam mənası ilə tətbiqini tapa bilirlər. Bu daha dərin statistik metodların tətbiq oblastı olduqca dardır, çünki burada tələb olunur ki, öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri kifayət qədər müəyyən ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olsunlar. Məs., radioqəbuledici cihazlarda turbulent su axınlarının və ya fluktuasiyalarının rejiminin statistik öyrənilməsi stasionar ehtimalı proseslər (stasionar stoxastik proseslər, H. M., bax) nəzəriyyəsi əsasında aparılır. Lakin həmin nəzəriyyənin iqtisadi zaman sıralarına tətbiqi kobud səhvlərə gətirə bilər, belə ki, bu halda, stasionar prosesin tərifinə daxil edilmiş: uzun müddət ərzində ehtimal paylanmalarının zamandan asılı olmayaraq dəyişməzliyi haqqında fərziyyə, bir qayda olaraq mümkünsüzdür.

Ehtimal qanunauyğunlqları böyük ədədlər qanunu (bax, *Böyük ədədlər qanunu*) əsasında statistik ifadə oluna bilinir (ehtimallar – tezliklər kimi, riyazi gözləmə – orta qiymətlər kimi götürülür).

III. Statistik təsvirin ən sadə üsulları.

n obyektdən ibarət öyrənilən toplu hər hansı keyfiyyət əlaməti A-ya görə $A_1, A_2, \dots, A_r$ siniflərinə ayrılır. Bu bölgüyə uyğun statistik paylanma ayrı-ayrı siniflərdəki obyektlərin sayı («tezlikləri») – $n_1, n_2, \dots, n_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r} n_i = n\right)$ göstərilməklə verilir. n_i-lərin əvəzinə uyğun – $h_i = \frac{n_i}{n}$ nisbi tezlikləri göstərilir (bunlar isə aydındır ki, $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ şərtini ödəyir). Əgər

Cədvəl 1a – kütləvi məhsulu statistik araşdırılmasında detalın mm.-lərlə diametrinin paylanması.

Diametr	Əsas seçim	1-ci seçim	2-ci seçim	3-cü seçim
13.05–13.09	–	–	1	1
13.10–13.14	2	–	–	–
13.15–13.19	1	–	1	1
13.20–13.24	8	–	–	–
13.25–13.29	17	1	2	1
13.30–13.34	27	1	1	2
13.35–13.39	30	2	3	1
13.40–13.44	37	2	1	1
13.45–13.49	27	1	–	–
13.50–13.54	25	2	1	–
13.55–13.59	17	–	–	–
13.60–13.64	7	1	–	2
13.65–13.69	2	–	–	1
Cəmisi	200	10	10	10
$\bar{x}$	13,416	13,430	13,315	13,385
S^2	2,3910	0,0990	0,1472	0,3602
x	0,110	0,105	0.128	0,200

Cədvəl 1b – olduqca böyük qruplaşdırma intervalları halında əsas seçimin (cədvəl 1a-dan) detalının diametrinin paylanması.

Diametr	Detalların sayı
13.00–13.24	11
13.25–13.49	138
13.50–13.74	51
Cəmisi	200

hər hansı kəmiyyət dəyişəni öyrənilirsə, onda onun n obyektdən ibarət topludakı paylanmasını həmin dəyişənin müşahidə olunmuş $x_1, x_2, \dots, x_r$ qiymətlərini artan qaydada bilavasitə hesablamaqla vermək olar. Lakin n-in böyük qiymətlərində bu olduqca ağır üsuldur və eyni zamanda paylanmanın mühüm xassələrini aydın aşkar etmir (bir kəmiyyət dəyişəni olan paylanmanın ən sadə xarakteristikaları və təsviri üsulları haqqında ətraflı məlumat üçün bax, *Variasion sırası*, *Paylanmalar*). Praktikada n-in olduqca böyük qiymətlərində adətən, müşahidə olunmuş olunmuş x_i qiymətlərinin tam cədvəli tərtib olunmur və sonrakı işlərdə bütünlüklə elə cədvəllərdən istifadə olunur ki, müvafiq seçilmiş intervallar üzrə müşahidə olunmuş qiymətləri qruplaşdırdıqda, bunlarda yalnız siniflərdəki obyektlərin sayı göstərilsin.

Məs., Cədvəl 1a-nın birinci sütununda 0,05 mm uzunluqlu intervallar üzrə qruplaşdırılmış detalların diametrlərinin ölçmə nəticələri verilmişdir. Əsas seçim texnoloji prosesin normal gedişatına uyğundur. 1-ci, 2-ci və 3-cü seçimlər istehsalın bu normal gedişatının dayanıqlılığını yoxlamaq üçün bəzi zaman intervallarından bir edilmişdir. Cədvəl 16-da 0,25 mm uzunluqlu intervallar üzrə qruplaşdırmada detalların əsas seçiminin ölçmə nəticələri verilmişdir. Adətən, hər birində 15-20% x_i qiymətləri olan 10-20 intervallar üzrə qruplaşdırma, paylanmanın bütün mühüm xassələrinin olduqca tam şəkildə aşkar olunması və paylanmanın əsas xarakteristikalarının etibarlı hesablanması üçün kifayət edir (bunlar barədə aşağıda; bax). Belə qruplaşdırılmış verilənlər üzrə tərtib olunmuş *histoqram* (bax) paylanmanı əyani təsvir edir. Olduqca kiçik qruplaşma əsasında tərtib olunmuş histoqram adətən çoxzirvəli olur və paylanmanın mühüm xassələrini əyani əks etdirmir.

Şəkil 1.-də misal kimi Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənlərinə əsasən 200 diametrin paylanmasının histoqramı, şəkil 3-də həmin paylanmanın 0,01 mm intervalında histoqramı verilmişdir (müvafiq cədvəl böyük olduğundan verilmir).

Digər tərəfdən çox böyük intervallar üzrə qruplaşdırma paylanmanın xarakteri barədə aydın təsəvvürün itməsinə və paylanmanın orta qiyməti və digər xarakteristikalarının hesablanılmasında kobud xətalara səbəb ola bilər (bax, cədvəl 16 və uyğun histoqrama şəkil 2-də).

R. s. çərçivəsində qruplaşdırma intervalları haqqında məsələyə yalnız belə formal cəhətdən baxıla bilinər: paylanmanın riyazi təsvirinin tamlığı, qruplaşdırılmış verilənlər üzrə orta qiymətlərin hesablanılması dəqiqliyi və s. Öyrənilən çoxluqdakı keyfiyyətcə müxtəlif qruplara ayırmaq məqsədi qruplaşmalar haqqında bax, *Qruplaşdırma*, *statistikada*.

İki dəyişənin birgə paylanması öyrənildikdə ikigirişli cədvəllər istifadə olunur. İki keyfiyyət dəyişəninin birgə paylanmasına misal cədvəl 2a-nı göstərmək olar.

Cədvəl 2a – Moskva Mərkəzi univermağı işçilər inin arasında qriplə xəstələnmiş və xəstələnməmiş qrip əleyhinə zərdab almış və almamış işçilərin paylanması (1939).

	Xəstələnməmə	Xəstələnmə	Cəmi
Zərdab almış	1675	150	1825
Zərdab almamış	497	4	501
Cəmisi	2172	154	2326

Ümumi halda material A əlaməti üzrə $A_1, A_2, \dots, A_r$ siniflərinə B əlaməti üzrə $B_1, B_2, \dots, B_s$ siniflərinə ayrıldıqda cədvəl eyni zamanda A_r və B_j siniflərindən olan obyektlərdəki obyektlərin sayı n_{ij}-lardan ibarət olur.

$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$, $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ düsturları ilə A_i və B_j siniflərinin özündəki obyektlərin sayı alınır (aydındır ki, $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} = n$, burada n – öyrənilən toplunun bütün obyektlərinin sayıdır). Sonradan aparılacaq araşdırmanın məqsədindən asılı olaraq nisbi tezliklərdən bəziləri hesablanır, məs.:

$$h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad h_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}, \quad h_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n},$$

$$h_{i(j)} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}, \quad h_{(i)j} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}.$$

Məs., qripə xəstələnənlərə zərdabın təsirini öyrənilməsində cədvəl 2a-dan istifadə edərək, cədvəl 2b-də verilmiş nisbi tezlikləri hesablamaq təbiidir.

Cədvəl 2b – Nisbi tezliklər
(cədvəl 2a-dakı verilənlərə uyğun)

	Xəstələnməyənlər	Xəstələnənlər	Cəmisi
Zərdab almış	0,918	0,082	1,000
Zərdab almamış	0,992	0,008	1,000

İki kəmiyyət dəyişəninin birgə paylanması üçün cədvəllər *Korrelyasiya* məq.-də verilmişdir (bax).

Cədvəl 1a qarışıq hala misaldır: material hər hansı bir keyfiyyət əlaməti üzrə (istiehsal prosesinin orta səviyyəsinin təyini olunması üçün əsas seçmə aid olunma və bu normal səviyyənin saxlanılmasının yoxlanılması üçün müxtəlif zaman anlarında aparılmış üç seçimə aid olunma) və hər hansı bir kəmiyyət əlaməti üzrə (detalların diametri) qruplaşdırılır.

Bir kəmiyyət əlamətinin (dəyişəninin) paylanmasının ən sadə ümumi xarakteristikaları aşağıdakılardır:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

və ya

$$D^2 = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k^2 - \bar{x}^2 ,$$

burada r – qruplaşdırılma intervallarının sayı, a_k – onların ortaları (cədvəl 1a halında bu ortalar – 13,07; 13,12; 13,17; 13,22 və s.). Əgər material olduqca böyük intervallar üzrə qruplaşdırılmışdırsa, onda belə hesablama olduqca kobud nəticələrə gətirir. Bəzən belə hallarda qruplaşdırmaya düzəlişlər kimi xüsusi düzəlişlərdən istifadə etmək yaxşı nəticə verir. Lakin bu düzəlişlər yalnız müəyyən ehtimali fərziyyələr şərtində məna kəsb edir.

Müxtəlif tip paylanmalar və onların digər xarakteristikaları barədə bax, *Variasion sıra*, *Paylanmalar*. İki və ya daha çox dəyişənlərin (əlamətlərin) birgə paylanması haqqında bax, *Korrelyasiya* və *Reqressiya*.

IV. Statistik paylanmaların ehtimal paylanmaları ilə əlaqəsi. Parametrlərin qiymətləndirilməsi. Ehtimali hipotezlərin yoxlanılması.

Yuxarıda yalnız bəzi seçilmiş ən sadə statistik təsvir üsulları şərh olunmuşdu və bunlar hal-hazırda yaxşı işlənilmiş anlayışlar və hesablama texnikası sistemi ilə olduqca geniş bir fənn mövzusudur. Statistik təsvirin üsulları maraqlıdır, lakin öz-özlüyündə deyil, yalnız öyrənilən hadisə və ya proseslərin tabe olduqları qanunauyğunluqlar haqqında, bu və ya digər müşahidə olunmuş statistik paylanmalara hər bir ayrıca halda gətirmiş səbəb haqqında statistik materialdan bir vasitə olaraq maraqlıdır.

Məs., cədvəl 2a-da göstərilən verilənləri belə nəzəri sxemlə əlaqələndirmək təbiidir. Univermağın hər bir işçisinin qriplə xəstələnməsini təsadüfi hadisə hesab etmək olar, çünki işin və müayinə olunmuş işçilərin həyatlarının ümumi şərtləri bu və başqa bir işçinin xəstələnməsi faktının özünü deyil, yalnız xəstələnmənin hər hansı *ehtimalını* (bax) təyin edə bilər. Statistik verilənlərə görə, zərdab almış və zərdab almamış xəstələnməsi ehtimalları (p_1 və p_0) müxtəlifdir: bu verilənlər p_1 -in p_0 -dan olduqca kiçik olduğunu fərz etməyə əsas verir. R. s. qarşısında belə məsələ durur: müşahidə olunmuş $h_1 = \frac{4}{501} \approx 0{,}008$ və $h_0 = \frac{150}{1825} \approx 0{,}082$ tezlikləri üzrə p_1 və p_0 ehtimallarını qiymətləndirmək və yoxlamaq ki, statistik material kifayət edirmi ki, $p_1 < p_0$ olduğu qəbul edilmiş hesab olunsun (yəni zərdab olunduqda xəstələnmə ehtimalı həqiqətən azdır). Qoyulmuş suala kafi cavab cədvəl 2a-nın verilənləri halında R. s.-nın incə vasitələri olmadan belə olduqca inandırıcıdır. Lakin olduqca şübhli hallarda R. s.-da işlənilmiş xüsusi kriterilərə müraciət etmək zəruridir.

Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənləri, istesalatın normal gedişatında hesablama üçün diametri 13,40 mm. olan detalların hazırlanmasındakı dəqiqliyin müəyyənləşdirilməsi məqsədi ilə toplanılmışdır. Bu halda müəyyən nəzəri mülahizələrlə əsaslandırılmış ən sadə fərziyyə – ayrı-ayrı detalların diametrinə

$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1)$$

– normal – ehtimal paylanmalarına tabe təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılmasıdır. Əgər bu fərziyyə doğrudursa, onda a və σ^2 parametrlərinin ehtimal paylanmasının orta qiymətini və dispersiyasını – kifayət qədər dəqiqliklə statistik paylanmanın uyğun xarakteristikaları üzrə qiymətləndirmək olar (müşahidələr sayı olduqca böyük, yəni $n = 200$ olduğuna görə). Nəzəri dispersiya – σ^2 üçün statistik qiyməti kimi $D^2 = \frac{S^2}{n}$ statistik dispersiyasına deyil,

$$s^2 = \frac{S^2}{n-1}$$

– *meylsiz statistik qiymətinə* üstünlük verilir. Nəzəri kvadratik orta yayınma üçün meylsiz statistik qiymətin ümumi ifadəsi (ixtiyari ehtimal paylanmasında yaraya bilən) yoxdur. σ üçün statistik qiymət kimi (ümumimiyyətlə, meylli) əksər hallarda S istifadə olunur. a və σ üçün $\bar{x}$ və s statistik qiymətlərinin dəqiqliyi uyğun dispersiyalarla verilir və bunlar (1) normal paylanması halında aşağıdakı münasibətlərlə verilir:

$$\sigma_a = \frac{\sigma^2}{n} \sim \frac{s^2}{n},$$

$$\sigma_{s^2}^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1} \sim \frac{2s^4}{n},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2n} \sim \frac{s^2}{2n},$$

burada $\sim$ işarəsi n-in böyük qiymətlərində təqribi bərabərliyi ifadə edir. Beləliklə, statistik qiymətlərə $\pm$ işarəsi kvadratik yayınmanı əlavə etməyi şərtləşərək, (1) normal paylanması fərziyyəsində n -in böyük qiymətlərində

$$\left.\begin{aligned} a &= \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}, \\ \sigma &= x \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

olduğunu alırıq. Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənləri halında (2) düsturlarından

$$a = 13{,}416 \pm 0{,}008,$$

$$\sigma = 0{,}110 \pm 0{,}006$$

alınır. Seçimin $n = 200$ olması «böyük seçimlər» nəzəriyyəsinin bu düsturlardan istifadənin qanuniliyi üçün kifayət edicidir.

Nəzəri ehtimal paylanmasının parametrlərinin qiymətləndirilməsi haqqında sonrakı məlumatlar barədə «*Statistik qiymətlər*», «*Etibarlı sərhədlər*» məq.-nə bax. Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənlərinin köməyilə paylanmanın normal olduğu, müşahidələrin asılı olmamazlığı barədə ilkin hipotezləri yoxlaya bilmək üçün üsullar barədə bax, *Paylanmalar*, *Qeyri-parametrik metodlar*, *Hipotezlərin statistik yoxlanılması* məq.-nə.

Cədvəl 1a-nın sonrakı sütunlarının verilənlərinə baxdıqda, bu sütunların hər birinin 10 ölçmə əsasında tərtib olunduğu nəzərə alınarsa, böyük seçimlər nəzəriyyəsinin düsturlarından yalnız birinci «yanaşma» kimi istifadə etmək olar, belə ki, bu düsturlar yalnız $n \to \infty$ olduqda limit düsturları kimi təyin olunmuşdu. a və σ parametrlərinin təqribi statistik qiymətləri olaraq əvvəlki kimi x və s kəmiyyətləri istifadə olunur, lakin bu statistik qiymətlərin dəqiqliyi və etibarlığı üçün *kiçik seçimlər* (bax) nəzəriyyəsini tətbiq etmək zəruridir. Cədvəlin birinci sütunu üzrə qiymətləndirilmiş a və σ parametrləri normal üç seçim üçün cədvəl 1a-nın sonuncu sətrində R. s.-nın qaydaları üzrə $\bar{x}$ və s üçün yazılmış qiymətləri müqayisə etdikdə aşağıdakı nəticələri çıxarmaq olur: birinci seçim istehsal prosesinin gedişatında mühüm dəyişikliklər olacağını fərz etməyə heç bir əsas vermir, ikinci seçim a orta diametrinin azalması nəticəsinə gəlməyə əsas verir (bax, «*Styudent kriterisi*»), üçüncü seçim – dispersiyasının artması haqqında nəticəyə gətirir (bax, «*Xi-kvadrat kriteri*»).

Parametrlərin statistik qiymətləri və hipotezlərin yoxlanılması üçün ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan bütün qaydalar yalnız müəyyən $\omega < 1$ – *mühümlük ölçüsü* ilə tətbiq oluna bilinir, yəni bu qaydalar $\alpha = 1 - \omega$ ehtimal ilə səhv nəticələrə gətirə bilər. Əgər normal paylanma və nəzəri dispersiyanın məlum olduğu hipotezi ilə a -nı $\bar{x}$ üzrə

$$\bar{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

qaydası üzrə qiymətləndirsək, onda səhv ehtimalı a -ya bərabər olacaqdır və a k ilə aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidir (bax, cədvəl 3):

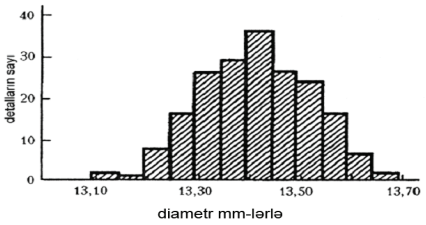
$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_k^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

Verilmiş konkret şərtlərdə mühümlük ölçüsünün rasional seçilməsi haqqında məsələ (məs., kütləvi məhsula statistik nəzarətin qaydalarının işlənilməsində) olduqca mühümdür. Bu zaman mühümlük ölçüsü yalnız yüksək olan (vahidə yaxın) qaydaları tətbiq etmək arzusuna əks olan bir vəziyyət yaranır ki, müşahidələr sayı məhdud olduqda belə qaydalarla yalnız çox zəif nəticələr çıxarılır (bunlar, tezliklərin hiss olunacaq bərabərsizliyində belə ehtimalların bərabərsizliyini müəyyənləşdirməyə imkan vermir və s.).

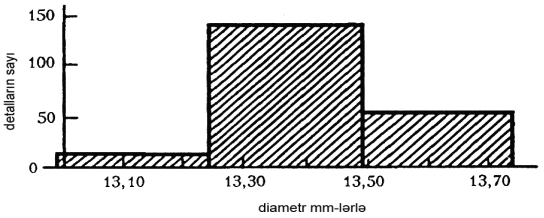
Cədvəl 3 – a və $\omega = 1 - \alpha$ -nın k -dan asılılığı.

k	1,96	2,58	3,00	3,29
α	0,050	0,010	0,003	0,001
ω	0,950	0,990	0,997	0,999

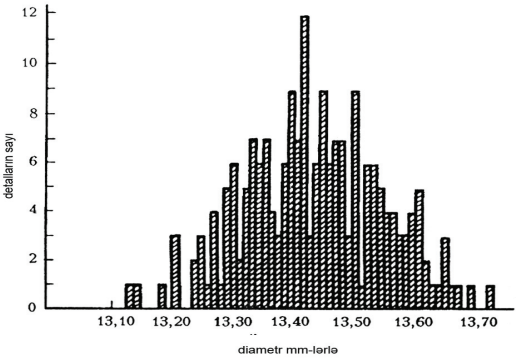
IV bölmədə ehtimal paylanmasının və ya onun parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün n sayda müşahidələrin nəticələrinin a s ı l ı o l m a m a z l ı ğ ı (lakin bu qeyd olunmamışdı) nəzərdə tutulmuşdu (bax, *Ehtimal nəzəriyyəsi* və xüsusilə də, *asılı olmamazlıq*). A s ı l ı müşahidələrin istifadəsinə yaxşı öyrənilmiş misal – N obyektdən ibarət «ümumi çoxluqdan» $n < N$ obyektdən ibarət aparılmış «seçim» üzrə statistik paylanma və ya parametrlərinin qiymətləndirilməsidir.



Şəkil 1. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histoqramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0, 05 mm.



Şəkil 2. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histoqramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0, 5 mm.



Şəkil 3. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histoqramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0, 01 mm.

V. Seçimi metod.

T e r m i n o l o j i q e y d. Çox vaxt ehtimal paylanmasının qiymətləndirilməsi üçün aparılmış n sayda müşahidə toplusunu da «seçim» adlandırırlar. IV bölmədə istifadə olunmuş «kiçik seçimlər nəzəriyyəsi» termini bununla izah olunur. Belə ternilogiya onunla əlaqələndirilir ki, bir çox hallarda ehtimal paylanması təsəvvürdə fərz olunan sonsuz «ümumi çoxluqda» statistik paylanma kimi güman olunur və şərti olaraq hesab edilir ki, müşahidə olunan n obyekt bu çoxluqdan «seçilir». Belə fərzlərin aydın bir məğzi yoxdur. Sözün əsl mənasında seçimi metod həmişə ilkin ümumi çoxluğun sonlu olduğunu fərz edir.

Seçimi metodun tətbiqinə aid aşağıdakı misala baxaq. N məlumatdan ibarət partiyada X saydası qüsurludur. Bu partiyadan ixtiyari qaydada $n < N$ məmulatdan idarət seçim aparılır (məs., $n = 100$, $N = 10000$). Seçimdəki qüsurlu məmulatlar sayı x -in m -ə bərabər olması ehtimalı –

$$\mathbf{P}\{x = m\} = \frac{n!\,(N-n)!\,X!\,(N-X)!}{m!\,(n-m)!\,(X-m)!\,(N-X-n+m)!\,N!}$$

(*hiperhəndəsi paylanma*, H. M., bax)

düsturu ilə təyin olunacaqdır. Beləliklə, x və $h=\frac{x}{n}$ nisbi tezliyi təsadüfi kəmiyyətləridir ki, bunların paylanması X parametrlərindən və ya ki, $H=\frac{X}{N}$ parametrlərindən asılıdır. Seçimi h nisbi tezliyi üzrə H nisbi tezliyinin qiymətləndirilməsi məsələsi, n asılı olmayan sınaqlar halında olduğu kimi, h tezliyi üzrə, P ehtimalının nisbi qiymətləndirilməsi məsələsinə olduqca oxşardır. n-in böyük qiymətlərində, ehtimalın qiymətləndirilməsi məsələsində

$$p \sim h$$

təqribi bərabərliyi, nisbi tezliyin qiymətləndirilməsi məsələsində

$$H \sim h$$

təqribi bərabərliyi vahidə yaxın ehtimalla ödənilir. Lakin H-in qiymətləndirilməsi məsələsində düsturlar olduqca mürəkkəbdir, h-in H-dan yayınmaları isə ehtimalın qiymətləndirilməsi məsələsində (həmin n qiymətlərində) h-in p-dən yayınmasından orta hesabla bir qədər kiçikdir. Beləliklə, partiyada qüsurlu məmulatların hissəsi H-ın n həcmli verilmiş seçimdə qüsurlu məmulatların hissəsi h üzrə qiymətləndirilməsi (N-in ixtiyari qiymətində), n asılı olmayan sınaqlarda p ehtimalının h nisbi tezliyi üzrə qiymətləndirilməsi ilə müqayisədə bir qədər dəqiq olur. $\frac{n}{N}\to\infty$ olduqda seçimlə bağlı məsələdəki düsturlar p ehtimalının qiymətləndirilməsilə bağlı məsələnin düsturlarına asimptotik olaraq keçir (bax, *Seçimi metod*).

VI. Riyazi statistikanın qarşıdakı məsələləri.

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsi və ümumiyyətlə, sabit ehtimal paylanması ilə verilən n sayda asılı olmayan sınaqların nəticələrindən istifadə olunmaqla çıxarılmış statistik nəticələr nəzəriyyəsi və qeyd olunmuş n həcmli seçimlər halı üçün seçimi metod nəzəriyyəsi – R. s.-nın ən çox işlənilmiş bölmələri olaraq hesab edilir. Klassik korrelyasiya nəzəriyyəsi asılı olmayan müşahidələr toplusu əsasında, kəmiyyətlər arasında asılılığı öyrənir. Məs., ξ və η kəmiyyətləri arasında asılılıq – hər biri ξ və η kəmiyyətlərinin araşdırılan birgə paylanmasına tabe (x_i, y_i) qiymətlər cütünü verən n sayda, öz aralarında asılı olmayan müşahidələr vasitəsilə araşdırılır. Kəmiyyət dəyişənləri (əlamətləri) arasında asılılıq *dispersion analizin* (bax) köməyi ilə analoji sxem üzrə aparılır.

Asılı müşahidələrin tədqiq metodları, R. s.-da, yalnız zaman sıraları nəzəriyyəsində, əsas etibarilə, onların stasionarlığının olduqca məhdudlaşdırdığı hallarında dərin surətdə işlənilmişdi. (bax, *Stasionar ehtimalı* (*stoxastik* H. M.) *proseslər*). Statistik eksperimentin planlaşdırılması da böyük əzəmiyyətə malikdir. Ən sadə halda bu – verilən mühümlük ölçüsü ilə tələb olunan dəqiqliklə və tamlıqla nəticələrin alınması üçün zəruri olan, müşahidələr sayı n-in təyin olunması məsələsidir. Lakin çox vaxt müşahidələr sayını aprior təyin etmək mümkün olunur (və ya məqsədəuyğun olunur, beləki müşahidələr sayını əvvəlcədən qeyd etmədik və onu yalnız eksperimentin gedişində təyin etdikdə, onun riyazi gözləməsini azaltmaq mümkündür). Müşahidələr sayı əvvəlcədən qeyd olunmayan, lakin eksperimentin gedişində təyin olunan statistik eksperimentin metodlarını, hazırda ümumi – *ardıcıl analiz* adı altında birləşdirilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, bu növ ən sadə üsullar çoxdan işlənilmişdi [bax, məs., *Statistik qəbul nəzarəti* məq.-də ikiqat seçim metodu]. Ciddi dedikdə, kütləvi məhsula nəzarətin statistik metodları – R. s.-nın hələ təşəkkül tapmamış bölməsinin tətbiq oblastıdır; bu oblast seçimi statistik verilənlər üzrə proseslərin tənzimlənməsi problemlərinə həsr oluşmuşdur və burada statistik qaydalar, verilmiş mühümlük ölçüsünə görə nəticələrin alınması məsələsilə deyil, tənzimlənən prosesin müəyyən gedişatının təmin olunması məsələsilə diktə olunur (məs., məhsulun keyfiyyətinin verilmiş səviyyəsinə zəmanət verən istehsal rejiminin müəyyənləşdirilməsi).

VII. Tarixi məlumat.

R. s.-nın ilkin əsaslarını, artıq, ehtimal nəzəriyyəsinin təməlini qoymuş alimlərin – İsveçrə riyaziyyatçısı Y. Bernulli (XVII əsrin sonu – XVIII əsrin əvvəli), fransız riyaziyyatçıları P. Laplas (XVIII əsrin 2-ci yarısı – XIX əsrin başlanğıcı) və S. Puassonun (XIX əsrin 1-ci yarısı) əsərlərində tapmaq olurdu. Rusiyada V. Y. Bunyakovski (1846) ehtimal nəzəriyyəsinin əsasında R. s.-nın mtodlarını demoqrafiya və sığorta məsələlərinə tətbiq etməklə inkşaf etdirirdi. R. s.-nın bütün sonrakı inkişafında XIX əsrin 2-ci yarısı – XX əsrin başlanğıcı dövründə rus klassik ehtimal nəzəriyyəsi məktəbinin işləri həlledici rol oynadı (P. L. Çebışev, A. A. Markov, A. M. Lyapunov, S. N. Bernşteyn). Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri mahiyyət etibarilə xətalar nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodunun əsasında işlənilmişdir [alman riyaziyyatçısı K. Qauss (XIX əsrin 1-ci yarısı) və rus iryaziyyatçısı A. A. Markov (XIX-un sonu – XX əsrin başlanğıcı)]. Burjua ədəbiyyatında əksər hallarda R. s.-nın baniləri kimi adlandırılan A. Ketle (XIX ə., Belçika), F. Qalton (XIX ə., İngiltərə) və K. Pirsonun (XIX-in sonu – XX əsrin başlanğıcı) işləri çox böyük əhəmiyyətə malik idi, lakin ehtimal nəzəriyyəsinin nailiyyətlərindən istifadə səviyyəsinə görə rus məktəbinin işlərindən geri qalırdı, lakin R. s. metodlarının ictimai və bioloji elmlərdə istifadə sahəsində onların işləri mürtəce istiqamətli idi. R. s. metodlarının tətbiqi üçün zəruri olan funksiyalar cədvəllərini tərtibi üzrə geniş işlər K. Pirson tərəfindən aparılırdı. Kiçik seçimlər nəzəriyyəsinin, hipotezlərin yoxlanılması və statistik qiymətləndirilməsi, ardıcıl analizin ümumi nəzəriyyəsinin yaradılmasında ingilis-amerikan məktəbinin olduqca gənc nümayəndələrinin [Styudent (təxəllüsü V. Qosset), R. Fişer, E. Prison – İngiltərə, Y. Neyman, A. Vald – ABŞ] rolu olduqca mühümdür; onlar fəaliyyətə 20-ci əsrin 20-ci illərində başlamışdılar. SSRİ-də R. s. sahəsində V. İ. Romonovski, Y. Y. Slutski mühüm nəticələr almışdı: Y. Y. Slutski stasionar sıralarla bağlı statistika üzrə mühüm işlər görmüşdür, N. V. Smirnov R. s.-nın qeyri-parametrik nəzəriyyəsinin əsaslarını qoyaraq, mühüm nəticələr almışdı: R. s.-nın əsasında kütləvi istehsalın tədqiqi və nəzarətinin statistik metodları, hidrologiya sahəsində, iqlimşünaslıqda, ulduz astrononiyasında və s. statistik metodlar xüsusi bir intensivliklə işlənilmişdi. Sovet alimləri R. s. sahəsində burjua elm məktəblərinin səhv metodoloji qoyuluşu, formalizmi və sadələşməni tənqid edirdilər. Biologiya və ictimai elmlərə R. s.-nın tətbiqi məsələlərinə sovet elmində yenidən baxılmışdı, bu elmlərdə burjua alimləri antielmi məqsədlərində R. s.-nın formal metodlarından xüsusilə tez-tez istifadə edirdilər.

Əd.: Романовский В. И. Элементарный курс математической статистики, М., – Л., 1939; Митропольский А. К., Техника статиститческого исследования, М., – Л., 1931; его же, Статистическое исследование, т. 1-2, Л., 1952; Длин А. М., Математическая статистика в технике, 2 изд., М., 1951; Бородачев Н. А. и Журавлев А. Н., Статистические методы анализа и контроля качества продукции, хода технологического процесса и состаяния производственного оборудования, в кн.: Машиностроение. Энциклопедический справочник, т.15, М., 1950 (стр. 597-647); Романовский В. И., Математическая статистика, М., – Л., 1938; Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; Арлей Н. и Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; Pearson K., Tables for statisticians and biometricians, pt 1-2, L., 1930-31; Kendall M. G., The advanced theory of statistics, v. 1-2, L., 1948; Hald A., Statistical theory with engineering applications, N. Y. – L., 1952; его же, Statistical tables and formulas, N. Y., 1952.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÜSULU – təqribi hesablamalar metodudur, əsas məsələsi – bir və ya bir neçə naməlum kəmiyyətin axtarılmasıdır; bu kəmiyyətlərin əsl qiymətlərinə ən yaxın olanları – axtarılan kəmiyyətlərlə ifadə olunan digər kəmiyyətlərin ölçmə qiymətləri və hesablanmış qiymətlər arasındakı fərqlər kvadratlarının

minimumunu təmin edən qiymətlərdir. Məs., $y_1', y_2', \dots, y_n'$ ölçmə qiymətlərinin təyin olunacaq $x_1, x_2, \dots, x_m$ qiymətlərindən müəyyən şəkildə asılı olduğu, yəni bunların funksiyaları olduğu fərz olunur:

$$y_i' = f_i\ (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Fərz edək ki, müşahidələrin sayı (n), naməlum kəmiyyətlərin sayından (m) çoxdur. Fərz olunur ki, bu müşahidələrdə (m müşahidə xətaları ilə birlikdə) $y_1', y_2', \dots, y_n'$ kəmiyyətləri üçün $y_1, y_2, \dots, y_n$ nəticələri alınmışdır. Fərz edək ki, ölçmələrin hamısı eynilə dəqiq deyildirlər və onların nisbi dəyərləri $p_1, p_2, \dots, p_n$ çəkiləri ilə qiymətləndirilir və bu çəki uyğun ölçmə xtalarının kvadratik ortalarının kvadratlarına tərs mütənasib, hər hansı müsbət ədədlərdir; p_i kimi həmçinin xüsusi, dəqiq elə ölçmələrin sayını göstərmək olar ki, y_i – onlardan ortada olanlarıdır. İndi isə y-in ölçmə qiymətlərinin hesablanılmış qiymətlərdən yayınmalarının çəkili kvadratlarının cəmi olan $S = \sum p_i (y_i - y_i')^2$ cəmini götürək. Onda naməlum $x_1, x_2, \dots, x_n$ kəmiyyətlərinin axtarılması üçün Ə. k. k. ü. ondan ibarətdir ki, onlar üçün ən yaxşı elə yaxın qiymətləri götürülür ki, onlar S cəminin minimumunu təmin etmiş olsunlar. Bu qiymətlər, differensial hesabının məlum qaydalarına əsasən

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - y_i'') \frac{\partial y_i'}{\partial x_h} = 0$$

tənliklərdən tapılır; bu tənliklər $\frac{\partial y_i'}{\partial x_h}$ törəmələrini sıfra bərabər götürməklə alınır və n o r m a l t ə n l i k l ə r adlanırlar.

Əgər f_i funksiyaları

$$\bar{y} = a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + \dots + a_m^{(i)} x_m, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tənliklərinə görə xətti funksiyalardırsa, onda normal tənliklər $x_1, x_2, \dots, x_m$-ə görə xətti tənliklər sistemi olur və bu tənliklərin həlli yaxşı məlumdur və çox və ya az dərəcədə asan yerinə yetirilə bilinir.

Əgər f_i funksiyaları $x_1, x_2, \dots, x_m$-ə görə xətti funksiyalar olmasalar, onda normal tənliklərin həlli çox çətin ola bilər. Beləliklə, Ə. k. k. ü. ən böyük uğurla və ən çox halda gətirilə bilindikdə tətbiq oluna bilinir. Məsələn, dəmirin maqnitləşdirilməsində meydanın gərginliyi H maqnit induksiyası B ilə $B = \frac{H}{x_1 + Hx_2}$ şəklində bərabərliklə əlaqələdirlər, burada x_1 və x_2 ölçmə yolu ilə B və H-ın alınmış qiymətlərinə görə tapılmalıdır. Burada $f = \frac{H}{x_1 + Hx_2}$, – x_1 və x_2-nin qeyri-xətti funksiyasıdır. Lakin bizim bu tənliyimizi asanlıqla ona ekvivalent olan $\frac{1}{B} = \frac{1}{H} x_1 + x_2$ tənliyinə çevirmək olar ki, burada $\frac{1}{B}$ və $\frac{1}{H}$, – B və H ilə birlikdə məlum olacaqlar və x_1 və x_2 isə bu tənliyə artıq xətti olaraq daxil olur. Ə. k. k. ü. ən çox xətalar nəzəriyyəsinə tətbiqdə işlənilmişdir. Bu nəzəriyyədə onun əsas tətbiqlərinə baxaq.

B i r n a m ə l u m o l a n h a l. Fərz olunur ki, naməlum x kəmiyyətinin axtarılması üçün n sayda asılı olmayan müşahidə aparılmışdır. Əgər p_i ilə aparılan ölçmələrin çəkilər işarə olunarsa, onda Ə. k. k. ü.-na əsasən, x-in $\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x)^2$ cəmini minimuma çevirə bilən təqribi qiyməti $\bar{x} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$ olacaqdır. p_i çəkiləri x_i qiymətlərinin kvadratik orta xətalarının kvadratlarına tərs mütənasibdirlər, yəni $p_i = \frac{K}{\sigma_i^2}$, burada $\sigma_i^2 = \mathbf{M}(x_0 - x_i')^2$, x_0, – x_i' təsadüfi dəyişəninin riyazi gözləməsidir, x_i', – x-in i-ci ölçmə nəticəsindəki mümkün qiymətidir. Ölçülərdə sabit xəta olmaqda x_0 kəmiyyəti x-in əsl qiyməti kimi götürülür. x kəmiyyəti üçün alınmış təqribi $\bar{x}$ qiymətinin çəkisi $P = \sum p_i$ bərabərliyi ilə təyin olunur, $x_0 \approx \bar{x}$ təqribi bərabərliyinin kvadratik orta xətası $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{P}}$ düsturu ilə verilir, burada σ – ayrıca bir ölçmənin kvadratik orta xətanı vahid çəki ilə ifadə edir və

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum p_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

təqribi bərabərliyi ilə təyin olunur.

Bəzi əlavə fərziyyələrlə göstərmək olar ki, $x_0 - \bar{x}$ fərqi orta xətaya və σ_x^2 dispersiyasına malik normal paylanma qanununa tabedir, məs., $x_0 - \bar{x}$ xətasına, bir-birindən asılı olmayan çoxsaylı faktorların eyni zamanda təsirindən yaranan biri digərindən asılı olmayan eyni kiçik tərtibli çoxsayda elementar xətalar cəmi kimi baxmaq olar. Bu halda, $x_0 - \bar{x}$ xətasının paylanma qanununun məlum olması – $\bar{x}$ və x_0 arasında mümkün ola bilən müxtəlif yayınmaların ehtimallarını ehtimalların inteqral cədvəlləri üzrə hesablanmasına və beləliklə də, x kəmiyyətinin alınmış təqribi qiymətinin dəqiqliyi dərəcəsini də qiymətləndirməyə imkan yaradır.

Ç o x s a y d a n a m ə l u m l a r o l a n h a l. Fərz edək ki, n sayda asılı olmayan, $p_1, p_2, \dots, p_n$ çəkilərli ölçmələr nəticəsində y kəmiyyəti isə naməlum $x_1, x_2, \dots, x_m$ kəmiyyətləri ilə $y = a_1 x + a_2 x_2 + \dots + a_m x_n$ xətti münasibətilə əlaqədardır, $m < n$, $a_1, a_2, \dots, a_m$ parametrləri isə bizim ölçmələrimiz üçün dəqiq, bizə məlum olan $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) qiymətlərin alır. Bu halda x_i üçün Ə. k. k. ü. ilə ən yaxşı təqribi qiymətlərin tapılması – onların

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - a_1^{(i)} x_1 - \dots - a_m^{(i)} x_m)^2$$

cəminə minimum verə bilən qiymətlərin tapılmasına gətirilir.

Bu qiymətlər aşağıdakı normal tənliklərdən tapılır:

$$x_1 \sum p_i a_1^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_1^{(i)} a_2^{(i)} + \dots + x_m \sum p_i a_1^{(i)} a_m^{(i)} = x_1 \sum p_i y_i a_1^{(i)}$$

$$\dots\dots\dots

$$\sigma_h \approx \sqrt{\frac{\sum p_i \lambda_i^2}{n-m}} \frac{\Delta_{hh}}{\Delta}$$

olacaqdır, burada $\lambda_i = y_i - \sum_{h=1}^{m} a_h^{(i)} \bar{x}_h$.

İndi araşdırdığımız məsələnin xüsusi halı – y və x kəmiyyətləri arasında empirik əlaqənin parabolik əyri şəklinə salınmasıdır, yəni bu kəmiyyətlər üçün müşahidə və ölçmələr nəticəsində y_i, x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) cütləri n_i tezlikləri ilə alınmışdır, yəni Ə. k. k. ü.-na əsasən y və x arasında $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ ($m < n$) şəklində (burada $a_1, a_2, \ldots, a_m$ naməlum kəmiyyətlər fərz olunur) ən yaxşı təqribi asılılığın axtarılması elə aşağıdakı normal tənliklərdən tapılır:

$$S_0 a_0 + S_1 a_1 + \ldots + S_m a_m = T_0,$$

$$S_1 a_0 + S_2 a_1 + \ldots + S_{m+1} a_m = T_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_m a_0 + S_{m+1} a_1 + \ldots + S_{2m} a_m = T_m,$$

burada

$$S_0 = \sum n_i, \quad S_1 = \sum n_i x_i,$$

$$S_2 = \sum n_i x_i^2 \quad \text{və s.},$$

$$T_0 = \sum n_i y_i, \quad T_1 = \sum n_i y_i x_i,$$

$$S_2 = \sum n_i y_i x_i^2 \quad \text{və s.}$$

Əgər biz $a_1, a_2, \ldots, a_m$ -lərin

$$\sum n_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_m x_i^m)^2$$

cəminə minimum verən qiymətləri axtarsaq, bu normal tənliklər alınır.

Sonda qeyd edək ki, Ə. k. k. ü.-nun baniləri Qauss və Lejandr olmuşdur. Lejandr Ə. k. k. ü.-nu ilk dəfə özünün «Nowelles méthodes pour la détermination des comètes» (1805-06) əsərində daxil etmişdir. Bu üsulu Qauss Lejandrdan asılı olmadan kəşf etmiş və onu özünün məhşur «Theoria motus corporum coelestium» (1809) əsərində nəşr etdirmişdir. Ə.k.k.ü.-nun ilk elmi əsaslandırılması Qaussa aiddir; o, bunu ədədi orta prinsipindən xətaların normal paylanma qanununun köməyilə etmişdir. Sonrakı Ə. k. k. ü. ilə bir çox tədqiqatçılar, o cümlədən, Laplas, Qlişer, Enke, Bessel, A. A. Markov və b. məşğul olmuşlar. Ə. k. k. ü.-nun ən ciddi və gözəl əsaslandırmalarından biri Markova aiddir.

Ədd.: М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924, гл. VII; К р ы л о в А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3 изд., Л. – М., 1935; Ш и л о в П. И., Способ наименьших квадратов, 2 изд., М., 1936; Ч е б о т а р е в А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, 2 изд., М., 1936; G a u s s C. F r., Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, B., 1887; D e l t h e i l R., Erreurset moindres carrés, P., 1930.

A

Abel inteqral tənliyi 7
- qrupu 8
- teoremləri 8
- tipli teoremlər 8
Abstrakt erqodik teorem 9
- həlledici qayda 9
Açıq xidmət sistemi 9
- təsadüfi çoxluq 9
Açım(ı) seçimin 9
Adamar matrisi 9
Adaptasiya alqoritmi 9
Adaptə olunmuş (uzlaşdırılmış) təsadüfi proses 9
F – **Adaptiv** funksiya 9
- idarəolunan təsadüfi proses diskret zamanlı 9
- prosedur 9
- statistik qiymət 9
Addım(ı) paylanmanın 9
- vuruğu 10
Addımı, arifmetik paylanmanın 10
Additiv funksional inteqral tipli 10
-- (ı) Markov prosesinin 10
-- (ı) Viner prosesinin 10
- funksiya 10
- funksiyası çoxluqların 10
- küy 10
- məsələlər(i) ədədlər nəzəriyyəsinin 10
- model 11
σ – - ölçü 11
- təsadüfi proses 11
Affin şeyp 11
Ağac(ı) imtinalar 11
- təsadüfi 11
Ağacvari xətti kod 11
- kod 11
Axın 11
- Bernulli axını 11
- kəsilməz 11
- ölçülən 11
K – **Axın** 11
- parametri 11
Axını σ – cəbrlərin 11
Axının intensivliyi 12
Axırıncı gələnə ilk xidmət (AGİX) 12
Akaike informasion kriterisi 12
- kriterisi 12
Aksiomatik kvant meydan nəzəriyyəsi 12
Aktiv dəyişən 12
- eksperiment 12
Aldous – Rebolledo şərti 12
Aleksandrov fəzası 12
- teoremi 12
Alfa – ekssessiv funksiya 13
- – faktor analiz 13
- – nüvəsi, potensialların 13
- – potensial 13
Alqoritmik entropiya 13
Alle paradoksu 14
Alt pillə anı 14
-- boyu 14
-- indeksi 14
-- təsadüfi kəmiyyətləri 14
Alternativ 14
- hipotez 14
- meteoroloji proqnoz 14
Alternlənən bərpa prosesi 14
Altproses 15
Altsinfi, vəziyyətlərin Markov zəncirinin 15
Altşəbəkə 15
Amplitud modulyasiya 15
Amplitud – modulyasiyalanmış harmonik rəqs 16
-- impulsal proses 16
-- təsadüfi proses 16
- tezlikli xarakteristika 17
Analitik xarakteristik funksiya 17
Analoqlar metodu 17
Anderson bərabərsizliyi 17
- – Yensen teoremi 18
Andre inikas prinsipi 18
An(ı) dayanmanın 18
Ani spektral sıxlıq 8
- vəziyyət 18
Anosov dinamik sistemi 18
Ansari – Bredli kriterisi 18
Antiferromaqnit model 18
Antisimmetrik Fok fəzası 19
- seçmə metodu 19
Antitetik dəyişənlər metodu 19
Aparı əmsalı 19
- əmsalları 19
- vektoru 19
Aparıcı funksiya 19
- ölçüsü, axının 19
Aposterior ehtimal 19
- orta qiymət 19
- paylanma 19
- risk(i) həlledici funksiyanın 20
Approksimasiya teoremi 20
Approksimasiyası, mürəkkəb paylanmaların daha sadələrilə 20
(K,Φ) - **approksiməedici funksional** 20
Approksimələolunan hadisə 20
Aprior ehtimal 20
- informasiya 20
- informasiyadan istifadə 20
- paylanma 20
- risk(i) həlledici funksiyanın 21
Ardıcıl analiz 21
- dekodla(n)ma 24
- etibarlı sərhədlər 25
- kriterisi ehtimallar nisbətinin 26
- qiymətləndirmə 27
- qiymətləndirmə planı 27
- planlaşdırılması, eksperimentlərin 27
- simpleks metod 29
- statistik qiymət 29
- statistik qiymətlər 29
- struktur 29
- yoxlanılması, hipotezlərin 30
Arifmetik modelləşdirmə(si) təsadüfi proseslərin 31
- paylanma 31
Arifmetikası, ehtimal paylanmalarının 31
ARİSO – proses 31
Arksinus qanunu 31
- paylanması 32
Arktangens qanunu təsadüfi matrislər üçün 32
Aronşayn – Kolmoqorov teoremi 32
ARSO – prosesi 32
Artan təsadüfi proses 32
Artım nöqtəsi 33
Asılı hadisələr(i) 33
Asılı olmamazlıq 33
-- xassəsi, hadisələr sinfinin 35
-- kriterisi 35
- olmayan (statistik asılı olmayan) hadisələr 36
Asılı olmayan hadisələr küllüyyatca 36
--- cəbrləri 36
--- cəbrləri, P ehtimalına nəzərən 36
--- σ – cəbrləri 36
--- P ehtimalına nəzərən 36
Asılı olmayan hadisələr sinifləri 36
---- küllüyyatca 36
-- seyrəklənmə(si) nöqtəvi prosesin 36
-- sınaqlar 36
-- sınaqların effektiv / ekvivalent sayı 37
-- spektral tipi, ölçülərin 37
Asılı olmayan təsadüfi hadisələr 37
---- cüt-cüt 37
-- yerinidəyişmə(si) nöqtəvi prosesin 37
- sınaqlar 37
Asılılıq 37
- radiusu 38
Asimmetrik kanal 38
Asimmetriya əmsalı 38
Asimmetriyası, paylanmanın 39
Asimptotik asılı olmamazlıq 39
-- olmayan təsadüfi kəmiyyətlər 39
Asimptotik ayrılış 39
-- (ı) paylanmanın 40
-- (ı) statistik qiymətin riskin 41
-- (ı) statistik qiymətlərin 41
Asimptotik Beyes kriterisi 41
- birgə effektiv statistik qiymətlər ardıcıllığı 41
- çoxalması, vəziyyətlərin Markov zəncirinin 42
- dayanıqlılıq ehtimala görə 42
- defekt 42
- effektiv statistik qiymət 42
- effektivlik(y i) kriterinin 42
Asimptotik effektivliyi, statistik qiymətlərin Bahadura görə 43
---- Raoya görə 43
---- Volfovitsə görə 43
- əhəmiyyətsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı 44
- əhəmiyyətsizlik 44
- ən güclü kriteri 44
- ən güclü meylsiz kriteri 44
- qiymətləndirmə nəzəriyyəsi 44
- meylsiz kriteri 48
- meylsiz statistik qiymət 48
- məqbulluq(ğ u) statistik kriterinin 49
Asimptotik minimaks kriteri 49
-- statisik qiymət 49
Asimptotik müntəzəm ən güclü kriteri 49
-- paylanma 49
Asimptotik nisbi effektivlik Bahadura görə 50
--- Hoces–Lemana görə 50
--- Pitmənə görə 50
Asimptotik normal ardıcıllıq 50
-- çevirmə 50
-- statistik qiymət 50
-- təsadüfi kəmiyyətlər 51
- normallıq 51
- optimal kriteri 51
- Pirson çevirməsi 51

- plan 51
- sıxlıq(ğı) çoxluğun 51
Asinxron çoxgirişli kanal 51
- kanal 51
Assosiyalanmış spektri, prosesin 51
Asta dəyişən funksiya 51
Aşağı dəyəri (qiyməti), oyunun 51
- etibarlı sərhəd 51
- kvartil 51
- limit(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının 51
Asimptotik sərhəd(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının 52
- - funksionalı 52
Aşkarlanma məsələsi, **pozulmanın** 52
Aşma 52
Aşma – enmə 52
- - müddəti 52
Aşma – enməsi, təsadüfi proses və meydanın 52
Atom 54
Atomik komponent 54
- ölçü 54
- paylanma 55
Atsiklik / Aperiodik Markov zənciri 55
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 55
Attraktor 55
Avtoinformativlik ölçüsü 55
Avtokorreloqram(ı) təsadüfi prosesin 55
Avtokorrelyasion funksiya 55
Avtokorrelyasiya(sı) təsadüfi prosesin 55
- funksiyası, xüsusi 55
Avtokovariasion funksiya 55
Avtokovariasiya(sı) təsadüfi prosesin 56
- – xüsusi avtokovariasiya funksiyası 56
Avtomat ehtimali 56
Avtomatik təsnifat 56
Avtomodel limiti, paylanmanın 56
- limiti, təsadüfi meydanın 56
- paylanması, vəziyyətlərin 56
- proses 56
Avtomodellik 56
- tənlikləri 56
- **Avtomorfizm**(i) ölçülü fəzanın 56
- sıfır modulu üzrə 56
K – **Avtomorfizm** 56
Avtoreqressiv – inteqrallanan sürüşən orta proses 56
- model 57
- proses 57
- proses kəsri tərtibli 57
- spektral statistik qiymət 57
Avtoreqressiya 57
Ayırdetmə zolağı və hesablama zolağı 58
A – **ayırıcı plan** 58
Ayrılan ehtiyatda saxlama 58
- xarakteristik funksiya 58
- Markov zənciri 58
- şaxələnən proses 58
Ayrılanlıq 59
- kriterisi 59
Ayrılış qanunu 59
Ayrılmayan paylanma 59
- şaxələnən proses 59

B

Bakster teoremi 61
Balanslanmış blok plan 61
Banax fəzası dayanıqlı p tip 61
- - Sazonov xassəli 61
- - l_p^n -ni özündə müntəzəm saxlayan 61
- - PIP xassəli 62
- - p kotip 62
- - p tip 62
Banax – Mazur məsafəsi 63
Barimərkəz(i) ehtimal ölçüsünün 63
Bartl – Danford – Şvarts teoremi 63
Bartlett korrelyasion pəncərəsi 63
- kriterisi 63
- statistik qiyməti 63
Bartlett – Şeffe kriterisi 63
Baş komponentlər analizi 63
- - metodu 64
Bayes düsturu 64
BBQKİ tənliklər zənciri 64
Bell ədədləri 64
Bellman optimallıq prinsipi 64
- tənliyi 64
- – Harris prosesi 64
Belyayev alternativi 64
Benford qanunu 64
Ber σ – cəbri 64
- çoxluğu 64
- funksiyası 64
- ölçüsü 64
- sinfi 65
- təsnifatı 65
Berens – Fişer problemi 65
Berq metodu avtoreqressiya parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün 65
Berlinq bərabərsizliyi 65
Bernşteyn bərabərsizliyi 65
- teoremi 66
Bernulli axını 66
- ardıcıllığı 66
- avtomorfizmi 66
- dolaşması 66
- endomorfizmi 67
- ədədləri 68
- paylanması 68
- sxemi 68
- sınaqları 68
- teoremi 69
- təsadüfi kəmiyyəti 69
- vektoru 69
- yerinidəyişməsi 69
Berr paylanması 70
Berri – Esseen bərabərsizliyi 70
- - teoremi 70
Bertran məsələsi 71
- paradoksu 71
Bessel operatoru 71
- prosesi 71
Beta – approksimasiya 71
- – paylanma 72
- – paylanma çoxölçülü 73
Beyes düsturu 73
- həlledici funksiyası 73
- həlledici qaydası 73
- həlli 73
- kriterisi 73
- ölçməsi 73
- prinsipi 74
- reqressiyası 74
- riski 74
- statistik qiyməti 74
- strategiyası 74
Beyes yanaşması 74
- - empirik 74
- - statistik məsələlərə 76
- yayınması 77
Bərabərçəkili dinamik sistem 77
- paylanma 77
- potensial 77
- statistik mexanika 77
Bərabərehtimallı yerləşmə sxemi, hissəciklərin; qruplarla yerləşmənin bərabərehtimallı sxemi 77
- yerləşməsi hissəciklərin 77
Bərpa(sı) Markov prosesinin 77
- axını 77
- anı 78
- funksiyası 78
- intervalı 78
- nəzəriyyəsi 78
Bərpa prosesi 78
- - superpozisiya 79
Bərpa teoremi 79
- - elementar 80
- tənliyi 80
Bəyaz küy 80
- - diskret 81
- - kəsri 81
- - tezliklərin sonlu zolağında 81
Bəyazlanma 81
Bhattaçarya – Rao sferik məsafəsi 82
Bixətti model(i) təsadüfi prosesin 82
Bikompakt topoloji $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ fəzasında 82
Bilyard 82
Bimodal paylanma 82
Binar münasibətlər statistikası 83
- şaxələnən proses 83
- təsadüfi proses 83
Binomial əmsal 83
- paylanma 84
- seçim 85
Bir ehtimal fəzası metodu 86
Biraddımlı keçid ehtimalı 86
Bircins xaos 86
- izotrop korrelyasion funksiya 86
- kanal 86
- keçid funksiyası 86
- korrelyasion funksiya 86
- Markov prosesi 86
- Markov zənciri zaman üzrə 86
- ölçü 86
- Puasson ölçüsü 86
- sinifi, funksiyaların Renyiyə görə 86
Bircins təsadüfi meydan 86
- - proses asılı olmayan artımlarlı 86
- - proses zaman üzrə 86
- ümumiləşmiş meydan 87
- və həndəsi proses 87
- və izotrop təsadüfi meydan 87
Birgə ölçmə 88
- paylanma 88
- sıxlığı, ehtimal paylanmalarının 88
Birxətli xidmət sistemi 88
Birinci Laplas qanunu 88
Birkanallı xidmət sistemi 88
Birkhoff – Xinçin erqodik teoremi 88
Birqiymətlilik xassəsi çoxluğun ölçüyə nəzərən 88

Birləşdirilmiş spektri, prosesin 85
Birləşmə(s i) h a d i s ə l ə r i n 85
- / cəm(i) t ə s a d ü f i h a d i s ə l ə - r i n 85
- t ə k r a r s ı z 88
Birölçülü diffuziya 89
- - ; s ə r h ə d l ə r i n i n t ə s n i f a t ı 89
- təsadüfi proses 90
Birparametrli Eyler ədədləri 90
Birseçimli Styudent kriterisi 90
Birtərəfli Bernulli yerdəyişməsi 90
- doğurucu 90
- paylanma 90
- sonsuz bölünən paylanma 90
- Styudent kriterisi 90
Bispektr 90
Bispektral funksiya 90
- sıxlıq 90
Bit 90
Blekman – Tyuki metodu 90
Blekuell teoremi 91
Blok 91
- dekodla(n)ması 91
- kod 91
- plan 91
- – sxem 92
- – struktur 92
- tezlik 92
Blyumental – Getur – Mak – Kin teoremi 92
Boxner inteqralı 92
- – Xinçin teoremi 93
Boks – Cenkins metodu 93
- - prosesi 94
Boks – Uilson metodu 94
Boqolyubov tənliklər zənciri 94
Bolşev approksimasiyası 94
Boltsman paylanması 94
- statistikası 94
- tənliyi 95
Bonferroni bərabərsizliyi 95
Borel cəbri 96
Borel σ - cəbri 96
- çoxluğu 96
- funksiyası 96
- qanunu, gücləndirilmiş böyük ədədlərin 96
- inikası 97
Borel meydanı, çoxluqların 97
- - , hadisələrin 97
- mənada ölçülən funksiya 97
- modeli 97
- ölçüsü 97
- «sıfır – vahid» kriterisi 97
- teoremi 97
Borel – Kantelli lemması 97
- - – Levi lemması 97
- – Tanner paylanması 97
Boş bloklar kriterisi 97
- qutular kriterisi 98
Boyskaut bıçağı (qatlanan bıçaq) metodu 98
Boze – Eynşteyn modeli 98
- - statistikası 99
Bozon fəzası 99
Bölgü 99
- (s ü) n a t u r a l ə d ə d i n 99
K – - 99
Bölünən / Dizyunkt ölçülər ailəsi 99
- statistika 100
Bölünənlik şərti 100
Bölünmə prinsipi 101
Böyük ədədlər qanunu 101
- - - B a n a x f ə z a l a r ı n d a 104
- - - q e y r i - s t a s i o n a r t ə s a - d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n 104
- - - M a r k o v p r o s e s l ə r i ü ç ü n 105
- - - s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n 106
- - - t ə s a d ü f i ç o x l u q l a r ü ç ü n 106
- - - t ə s a d ü f i m e y d a n l a r ü ç ü n 106
Böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu 107
- - - - s t a s i o n a r t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n 109
- - - - t ə s a d ü f i ç o x l u q l a r ü ç ü n 110
Böyük kanonik ansambl 110
- dim.-ölçülər effekti 110
Böyük yayınmalar e m p i r i k p a y l a n m a f u n k s i y a s ı ü ç ü n 111
- - t ə s a d ü f i d o l a ş m a ü ç ü n 112
- - t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r ü ç ü n 114
- - ehtimalları 116
Braun ekskursiyası 116
Braun hərəkəti ç o x p a r a m e t r - l i 116
- - e k s k u r s i y a 116
- - prosesi 117
- - prosesi ç o x ö l ç ü l ü 117
Braun körpüsü 117
- meandrı 117
- mələfəsi 117
- proqnozlanma metodu 117
- vəraqi 118
Bucaq modulyasiyası 118
- tezliyi 118
Bufer yaddaş 118
Bul cəbri n o r m a l a n m ı ş 118
- funksiyası t ə s a d ü f i 118
- modeli 118
Bunyakovski bərabərsizliyi 118
Burgers tənliyi 118
Burkholder – Qandi – Devis bərabərsizlikləri 118
Butstrəp – qiymət 119
- qiymətləndirmə metodu 119
«-» metod 119
- – paylanma 121
Bütün reqressiyalar metodu 121
Byeneme – Çebışev bərabərsizliyi 121
Byuffon halqası 121
- iynə məsələsi 121
- – Silvestr məsələsi 122

C

Calaşdırı(l)ma(s ı) t ə s a d ü f i p r o s e s l ə r i n 123
Cari ödəmə 123
Cazibə oblastı 123
- - d a y a n ı q l ı q a n u n u n 123
- - q r u p d a d a y a n ı q l ı p a y - l a n m a n ı n 124
- - o p e r a t o r d a y a n ı q l ı p a y l a n m a n ı n 124
- sərhədi 126
Cessen – Vintner teoremi 126
Ceyms – Steyn statistik qiyməti 126
Cəbr , A çoxluğunun doğurduğu 127
* – - 127
Cəbri dekodlama 127
- , hadisələrin 127
σ – cəbri , hadisələrin 128
- , kvazilokal müşahidələnənlərin 128
- , müşahidələnənlərin 128
- , silindrik çoxluqların 129
- təsadüfi tənlik 129
Cəknayf metodu 129
Cəmi, təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətlərin 129
Cəmlənmə sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin 129
p **– cəmləyici operator** 129
Cırlaşan paylanma 129
Cırlaşmayan paylanma, m ə x s u s i p a y l a n m a 130
- şaxələnən proses 130
Cırlaşmış ikiölçülü normal paylanma 130
- ölçü 130
Ciddi dayanıqlı paylanma 130
Ciddi Markov xassəsi 130
- - prosesi 130
Conson – Uelç çevirməsi 131
Cüt – cüt asılı olmamazlıq 131
Cütlüyün korrelyasiya əmsalı 131

Ç

Çatılabilinən sərhəd 132
- vəziyyət 132
Çatılmayan sərhəd 132
- vəziyyət, M a r k o v z ə n c i r i ü ç ü n 132
Çatım müddəti / defekt 132
Çebışev bərabərsizliyi 132
- - ; ç o x ö l ç ü l ü a n a l o q l a r 133
- teoremi 133
Çekon – Cemison teoremi 133
Çentsov statistik qiyməti p a y l a n - m a s ı x l ı ğ ı n ı n 133
Çernov sərhədi 133
Çevirmə düsturu 134
Çevirməsi, zamanın 134
Çevrilmiş Markov prosesi 134
- - zənciri 134
Çəki 135
- (si) p l a n n ö q t ə l ə r i n i n 135
- matrisi 135
Çəkiləmə planı 135
Çəkili ən kiçik kvadratlar metodu 135
- kvadratik yayınma 135
Çəp fırlanması, f a k t o r o x l a r ı n ı n 135
- Viner prosesi 135
Çıxıqlar metodu 135
Çıxış ehtimalının sıxlığı 135
- intensivliyi 135
- siqnalı 135
Çjun təkrar loqarifm qanunu 135
Çoxaldılması, vəziyyətlər(i n) M a r - k o v z ə n c i r l ə r i n i n 135
Çoxaltma funksiyası 135
Çoxgirişli kanal 135
- qoşmalıq cədvəli 136
Çoxgirişlilik 136
- t ə s a d ü f i 137
Çoxxətli xidmət sistemi 137
Çoxkanallı xidmət sistemi 137
Çoxkaskadlı xidmət sistemi 137
Çoxkomponentli kanal 137
- məlumatlar mənbəi 137
Çoxqat qarışma 137
- stoxastik inteqral 138
- Viner inteqralı 138

Çoxölçülü Beta paylanma 138
- Braun hərəkəti prosesi 138
- müşahidə 138
- normal paylanma 138
- paylanma 138
- sıxlıq 139
- statistik analiz 139
- şkallanma 142
- təsadüfi dolaşma 143
- təsadüfi kəmiyyət 143
- təsadüfi proses 144
- verilənlərin sturuktur modeli 144
- verilənlərin vizualizasiyası 144
- Viner prosesi 145
Çoxparametrli Braun prosesi 145
Çoxtərəfli kanal 145
Çoxzirvəli paylanma 145

D

Dadli metrikası 146
- şərti 146
Daxil edilmiş bərpa prosesi 146
-- Markov zənciri 147
-- şaxələnən proses 147
Daxiletmə və xaricetmə metodu 147
Dairəvi qanun 148
Dar topologiya 148
Dar yığılma 148
-- topologiyası 148
Darlinq teoremi 148
Darmua – Skitoviç teoremi 18
Daşıyıcı(sı) ölçünün 148
- (sı) planın 148
- siqnal 148
- tezlik 148
Davamolunması, ölçülərin 148
Dayaq nöqtəsi, planın 149
Dayanıqlı alqoritm 149
- altfəza 149
Dayanıqlı paylanma 149
-- Banax fəzasında 151
-- ;inteqral çevirmələri 151
-- qrupda 151
-- ;sıralarla ifadə 152
-- təsadüfi kəmiyyətlərin generasiyası 153
-- funksiyası 153
-- göstəricisi 153
- proses 153
- semi - qrup 154
- statistik qiymət 154
- təsadüfi çoxluq 154
- tipi, paylanmanın 154
- vəziyyət 154
Dayanıqlılıq(ğ ı), ehtimal paylanmalarının kompozisiyaya ayrılışlarının 154
- ehtimala görə zəif və güclü mənada 155
- xidmət sistemlərinin 155
- Markov proseslərinin 157
- paylanmaların xarakterizasiyalarının 157
- regenerativ proseslərin 158
- statistik prosedurun 158
- stoxastik modelin 159
- stoxastik modelin; kəmiyyəti statistik qiymətlər 159
- təsadüfi təyinedici elementlərli differensial tənliklərin 160

Dayanıqlılıq parametri 161
Dayanıqlılıq teoremi xidmət sistemləri nəzəriyyəsində 161
-- ;metrik yanaşma 161
-- ;sınaq funksiyaları metodu 162
-- ;yeniləşmələr metodu 162
Dayanma anı 163
-- axına nəzərən 163
Dayson paylanması 164
Debütü, çoxluğun 164
Defekt 164
- asimptotik 164
- (i) dolaşmanın, çatım 164
- (i) kriterinin 165
Dekodlama 166
- ardıcıl 166
- cəbri 166
- mürəkkəbliyi 166
- siyahı ilə 166
Dekodla(n)ma(sı) blok 166
- doğruyaoxşarlıq maksimumu üzrə 166
Demodulyasiya 166
- kompleks 166
Demoqrafik statistika 166
Dendoqram 168
Desil 168
Desimasiya 168
Determinik xaos nəzəriyyəsi 169
- kanal 169
- – taktlı interval 169
Devis bərabərsizlikləri 169
Dəqiq aşağı sərhəd(i) təsadüfi hadisələrin 169
- endomorfizm 169
- plan 169
- yuxarı sərhəd(i) təsadüfi hadisələrin 169
- zolaq 169
Dəstəsiz ölçü 169
Dəyər 169
- (i) modelin 169
- (i) oyunun 169
- funksiyası 169
Dəyişən fərqlər metodu 169
- kod, zaman üzrə 170
Dəyişənişarəli ölçü 170
Dınkin düsturu 170
Diaqnostik yoxlaması Boks və Cenkinsə görə 170
Diaqram metodu 170
- texnikası 171
Differensial entropiya 171
- operator, təsadüfi əmsallarlı; spektral nəzəriyyə 171
Differensiallanması, sistemin 172
- , təsadüfi prosesin 172
Diffuz ölçü 173
Diffuzion proses 173
-- əksedici sərhədli 173
-- idarəolunan 173
-- qrupda 173
-- şaxələnən 175
Diffuziya əmsalları 176
- vektoru 176
Dixotomik təsadüfi proses 176
Dik yüksəliş metodu 176
Dilatasiya 176
Dinamik proqnoz 176
Dinamik proqramlama; həssas kriterilər 176
-- stoxastik 177
- Riçardson ədədi 177
Dinamik sistem 177
-- xalis nöqtəvi spektrli 177
-- ;kiçik stoxastik kükrəntilər 177
-- (i) statistik mexanikanın 178
Diofant yaxınlaşmaları; erqodik məsələlər 178
Dirak ölçüsü 178
Dirixle fəzası 178
- forması 178
- məsələsi stoxastik 178
- paylanması 178
Diskontlama 179
- əmsalı 179
Diskret ansambl 179
- ayrılış(ı) Karunen – Loev 179
- bəyaz küy 179
- bölünənlik xassəsi, verilənlərin hissəsinin 179
- ehtimal paylanması 179
- Furye çevirməsi 179
- mənbə 180
- modulyasiya 180
- ölçü 180
- paylanma 180
- paylanma funksiyası 180
- renormqrup 180
- seçimi, prosesin 180
- təsadüfi kəmiyyət 180
Diskretizasiya problemi 181
Diskretlənən təsadüfi meydan 181
Diskriminant analiz 181
- funksiya 182
- model 183
Diskriminəedici eksperimentlərin planlaşdırılması 183
Dispersion analiz 184
-- ;qarışıq model 186
- metod ədədlər nəzəriyyəsində 187
- nisbət paylanması 187
Dispersiya 187
- (sı) empirik paylanmanın 189
- ;statistik qiymət 189
- təsadüfi çoxluğun 189
Dissipasiya(sı) turbulentlik enerjisinin 189
Dissipativ Markov zənciri 189
Dizyunkt spektral tipi, ölçülərin 189
- təsadüfi hadisələr ardıcıllığı 189
DLR – şərti 189
Doc planı 189
Doğruyaoxşarlıq funksiyası 189
Doğruyaoxşarlıq nisbəti 189
-- monoton 190
-- təsadüfi proseslər üçün 190
-- kriterisi 190
Doğruyaoxşarlıq prinsipi güclənidirilmiş 191
-- zəif 191
- tənliyi 191
Doğum anı 191
- və ölüm prosesi 191
Doğuran funksional(ı) ölçülərin kəsilməz konvolüsion semi-qrupunun 191
Doğuran funksiya ehtimali 192
-- eksponensial 192
-- (sı) ədədi ardıcıllığın 192
-- (sı) momentlərin 192

-- (sı) tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətin 193
-- (sı) təsadüfi kəmiyyətin 193
-- (sı) təsadüfi vektorun 193
Doğuran operator 193
-- (u) diffuzion prosesin 193
-- (u) prosesin 193
Doğurucu 193
Dolaşma 193
Doldurulma 193
Dominar vektor 193
- vektorlar ardıcıllığı 193
Dominarlanan ailəsi, paylanmaların 193
Donsker – Proxorov invariantlıq prinsipi 193
Döblin şərti 193
- teoremi 194
- universal qanunu 194
Dual Markov prosesi 194
- öngörül proyeksiya 194
Dub bərabərsizlikləri 194
Dub mərkəzləndirici funksiyası 194
-- sabitləri 194
- **– Meyer ayrılışı** 195
Dubllama / birdəfəlik ehtiyatda saxlama 195
Dubllaşdırma texnikada 195
Düyün / dayaq nöqtəsi planın 195
Düyünlər modeli 195
Düz tənliyi, Kolmoqorovun 195
Düzbucaqlı paylanma 195
Düzəldici strategiya 195
Düzəliş, kəsilməzlik üçün 195
Düzgün dəyişən funksiya 195
- statistik qiymət 196
Dvoretski lemması 196
- proseduru 196
- – **Rocers teoremi** 196

E

Edcvort sırası 197
- – Kramer ayrılışı 197
Effektiv statistik qiymət 198
Effektivlik(yi) ikinci tərtib statistik qiymətlərin 198
- resursun 199
- statistik prosedurun 199
Effektivliyi, proqnozun meteorologiyada 199
- saxlama əmsalı 200
Ehtimal 200
- kvant fizikasında 200
- , aposteriori 201
- apriori 202
- əlaqəlik, ehtimalı təsadüfi qrafın 202
Ehtimal fəzası 202
-- təsadüfi kəmiyyətin doğurduğu 202
-- metodu 202
- ; inteqral ehtimalı 202
- ; keçid ehtimal 202
- ; udum ehtimalı Markov zəncirində 203
- kombinatorikası 204
- metodları ədədlər nəzəriyyəsində 207
- metrikalarının müqayisəsi 207
Ehtimal metrikası 208
-- ; bircinslik 208
-- ; requlyarlıq 208
-- ; struktur 209
Ehtimal məsafəsi 210
Ehtimal nəzəriyyəsi 210
-- cəbri strukturlarda 215
Ehtimal olunan yayınma 215
Ehtimal ölçüsü 215
-- qrupda 216
Ehtimal paylanmalarının arifmetikası 217
--- Abel qruplarında 217
- paylanması 218
- vərəqi normal 218
Ehtimalı, səhv təsnifin 219
Ehtimali avtomat 219
- Borel ölçüsü 219
- doğuran funksiya 219
- ədədlər nəzəriyyəsi 219
- həlli, differensial tənliklərin 224
- xarakterizasiya(sı) qrupların 225
- kodlama 226
Ehtimali proqnozu, havanın 226
--- keyfiyyətin statistik qiyməti 227
- proses 227
Ehtimalları, böyük yayınmaların 227
Ehtiyatda saxlama 227
-- çoxqat 228
-- müvəqqəti 228
-- optimal
-- ümumi 228
-- ; struktur tip ehtiyatda saxlama 228
Ekskursiya(sı) Braun hərəkətinin 228
- Markov prosesinin 228
- Viner prosesinin 228
Eksperiment xətası 229
Eksponensial ailəsi, paylanmaların 229
- avtoreqression model 229
- avtoreqqressiv proses 229
- bərabərsizlik 229
- çevirmə(si) təsadüfi trayektoriya uzunluğunun 230
- p – dayanıqlılıq 230
- doğuran funksiya 230
- paylanma 230
Eksses(i) dolaşmanın 230
- paylanmanın 231
- əmsalı 231
Ekssessiv funksiya Markov zənciri üçün 231
-- Viner prosesinin hissəsi üçün 232
α – **Ekssessiv funksiya** 232
Ekssessiv ölçü Markov zənciri üçün 232
α – **Ekssessiv ölçü** 232
Ekstrapolyasiya(sı) təsadüfi proseslərin 232
Ekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması 232
- qiymətlər paylanması 233
- statistik məsələ 234
Ekvivalent additiv funksionallar 234
- bölgülər 234
- ölçülər 234
- təsadüfi kəmiyyətlər 234
- yığılan ardıcıllıqları, təsadüfi kəmiyyətlərin 235
- yüklər 235
Ekvivariant statistik qiymət 235
Elayzinq 235
Elementar çoxluq 235
- ehtimal 235
- hadisə 235
- hadisələr fəzası 235
- ölçü 235
Elfinq ekvivalentlik teoremi 235
Elliptik qanun 236
- tənlik; Monte-Karlo metodu ilə həll 236
Emiqrasiya şaxələnən prosesdə 236
Empirik Beyes həlledici funksiyası 236
-- statistik qiyməti 236
-- yanaşması 237
- kovariasion matris 237
- moment 237
- orta qiymət(i) təsadüfi çoxluğun 237
- ortoqonal funksiyalar 237
- ölçü 238
- paylanma 238
- paylanma funksiyası 239
- proses 239
- reqressiya əyrisi 239
- təsir funksiyası 239
Endomorfizm dəqiq 239
- sıfır modulu üzrə 239
- ölçülü fəzanın 240
Energetik norma 240
- spektr 240
Enerji 240
- səviyyəsi 240
Enerjisi, hissəciyin 240
Eninə korrelyasion funksiya 240
Enqset düsturu 240
Enliklə – impulsal modulyasiya 240
Enmə 240
Entropik güc 240
- kriteri 240
Entropiya 240
- alqoritmik 241
- (sı) bölgünün 241
- differensial 241
- (sı) dinamik sistemin 241
- (sı) dinamik sistemin, topoloji 242
- (sı) kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin 242
- (sı) qrupda təsadüfi dolaşmanın 242
- nisbi 242
- (sı) ölçülən D bölgüsünün 243
- prefiks 243
- (sı) sonlu obyektlərin 243
- (sı) stasionar prosesin 243
- şərti 243
ε – **Entropiya** 243
W – **Entropiya** 243
Epidemik proses 243
Epsilon – entropiya ε - **entropiya** 243
Erqodik Markov zənciri 244
- məsələlər(i) Diofant yaxınlaşmalarının 244
- nəzəriyyə 246
- sinif(fi) Markov zəncirinin 248
Erqodik teoremlər 248
-- Markov prosesləri üçün 249
--stasionar təsadüfi proseslər və bircins meydanlar üçün 250

- - Viner prosesləri üçün 252
- təsadüfi proses 252
Erqodiklik 253
Erlanq düsturu 254
- paylanması 254
Eroziya 254
Esseen teoremi 254
Etibarlı çoxluq 254
- ehtimal 254
- interval 254
- qiymətləndirmə 255
- limit 256
- oblast 256
- sərhəd 256
Etibarlı zolaq 256
- - α hüdudlu 256
- zona 257
Etibarlılığın optimizasiyası 257
- riyazi nəzəriyyəsi 257
Etibarlılıq 260
- əmsalı 260
Etibarlılıq funksiyası 260
- - , etibarlılıq əmsalı 260
- göstəriciləri, sistemin 260
- göstəricisi 261
- hüdudu / səviyyəsi 261
- nəzəriyyəsi; analitik-statistik metod 261
Evklid kvant meydan nəzəriyyəsi 262
- meydanı 262
- şeypi 262
- yanaşması 262
Evolyusion senzurlama 262
Evolyusional stoxastik differensial tənlik 262
Evolyusionar spektral funksiya 263
- - ifadə 264
- - ölçü 264
Eyler ədədləri 264
Eynşteyn – Smoluxovski modeli 264

Ə

Ədədi simulyasiya(sı), təsadüfi təzahürün 265
Əhəmiyyətsiz çoxluq 265
- zona 265
Əks hadisə 265
Əksedici baryer 265
- sərhəd 265
Əlaqələr modeli 265
Əlaqəli vəziyyətlər(i) Markov zəncirinin 265
Əlavə müşahidələnənlər 265
Əlverişli elementar hadisə A hadisəsi üçün 265
Ən böyük doğruyaoxşarlıq metodu 265
- - - prinsipi 266
- ciddi kriteri 266
Ən dəqiq etibarlı çoxluq 266
- - invariant etibarlı çoxluq 266
- - sərhəd 266
Ən əlverişsiz paylanma 266
- - paylanma 267
- güclü kriteri 267
- kiçik ekssessiv majorant 268
- kiçik kvadratlar çəkili metodu 268
Ən kiçik kvadratlar metodu 268
- - - - qiymətləndirilmiş kovariasion matrisli 273
- - - - məhdudiyyətli 273
- sadə nöqtəvi proses 274
- selektiv etibarlı çoxluq 274
«**Ən yaxın** qonşu» alqoritmi 274
- - ümumi əcdad 274
Ən yaxşı xətti meylsiz statistik qiymət 274
- - - proqnoz 274
Əngələdavamlılıq 274
Əngələdayanıqlı statistik qiymət 274
Əngəlləyici parametr 274
Əsas bərpa teoremi 275
- hipotez 275
Əvəzetmə / permutasion / yerdəyişmə təsadüfi/substision 275
Əyri xətli stoxastik inteqral 275

F

Faktor 276
Faktor analiz 276
- - ; modelin identifikasiyası 277
- - ; sxemlər 277
- çoxluq 277
- eksperiment 277
- model 279
Faktorial moment 279
- oxlarının fırlanması 279
- semi - invariant 280
Faktorizasion eyniliklər 280
Faktorizasiya metodu 282
- teoremi 282
Faktorların qarşılıqlıtəsir effekti 282
Faktorsistem(i) dinamik sistemin 283
Fano alqoritm 283
- bərabərsizliyi 283
Faydalılıq funksiyası 283
- nəzəriyyəsi 283
Faza 286
- diaqramı 286
Faza fəzası Markov zəncirinin və ya Markov prosesinin 286
- - təsadüfi prosesin 286
- keçidi 287
- modulyasiyası 287
- sıxlığı 287
- spektri 287
- tezlik xarakteristikası 287
- yerinidəyişməsi 287
Fazaca modulyar rəqs / ossilyasiya 287
Fefferman bərabərsizliyi 288
Feller həlli stoxastik differensial tənliyin 288
- keçid funksiyası 288
- Markov zənciri 288
- prosesi 288
- semi - qrupu 289
Fermi – Dirak statistikası 289
Fermion fəzası 289
Fernik teoremi 289
Feydinqlər / donmalar kanalda 289
Feynman – Kas düsturu 289
Fərq psevdomomenti 289
Fərqlər funksiyası, meteoroloji itkilərin 289
- şkalası 289
Fərqli ölçmələrin xaric olunması 289
Fəza(sı) 2-ci növ kəsilməyə malik olmayan funksiyalar 290
S – **Fəza** 290
σ – **Fəza** 290
- , σ topologiya ilə 291
Fəzası elementar hadisələr 291
- , həllərin (qərarların) 291
- , kəsilməz funksiyaların 291
- , ölçülərin 291
Fəzası vəziyyətlərin Markov zəncirinin 291
- - təsadüfi prosesin 291
Fəzavi statistik struktur 291
Fi – şaxələnən proses 291
Fidusial ehtimal 292
- interval 292
- paylanma 292
Fiktiv vəziyyət 293
Filtr fazası 293
Filtrasiya(sı) semi-martinqalın 293
- siqnalın 293
- təsadüfi proseslərin 293
Filtrasiya tənliyi diffuzion prosesin filtrasion sıxlığı üçün 293
- - diffuzion proseslər üçün 294
Filtrin gücləndirmə əmsalı 294
Filtrlənmiş Puasson prosesi 294
Final ehtimal 294
- - şaxələnən prosesin 294
- ödəmə 294
- tip şaxələnən prosesdə 294
Finit axın 294
- potensial 294
- sərhəd 294
Fisk inteqralı 294
- – Stratonoviç inteqralı 294
Fişer approksimasiyası 294
- çevirməsi 294
- z – çevirməsi 294
- dəqiq kriterisi 295
- F – paylanması 296
- z – paylanması 296
- – İrvin kriterisi 297
- – Yeyts kriterisi 297
Fiziki realizasiya olunma şərti 297
- spektr sıxlığı 297
- statistik hava proqnozu 297
FKJ – bərabərsizliyi 297
Fok fəzası 297
- ifadəsi kommutativ və antikommutativ münasibətlərdə 297
Fokker – Plank tənliyi 298
- - – Kolmoqorov tənliyi 298
Forsayt metodu 298
- münasibəti 298
Forte – Xarkeviç – Rozanov spektri 298
Forte – Kas teoremi 298
- – Murye metrikası 299
Foster kriterisi 299
Fraktal 299
- Braun hərəkəti 300
Fundamental lemma(sı) riyazi statistikanın 300
Fundamental matris Markov zəncirinin 300
Funksional ehtiyatda saxlama 300
- inteqral 300
Furye çevirməsi diskret 300
- - qrupda ehtimal paylanmalarının 300
- - sonlu 301
- - sürətli 301

- – Stiltyes çevirməsi 301

G

Gelfand inteqralı 302
Generator(u) korrelyasion pəncərənin 302
- prosesin 302
Genişləndirilmiş stoxastik inteqral 302
Genişyayımlı kanal 303
Gəncləşən paylanma 303
Gətirilmiş açım 303
Gibbs fenomeni 303
- limit vəziyyəti 304
- paylanması 304
- postulatı 305
- sıxlığı 305
- sonlu vəziyyəti 305
- təsadüfi meydanı 305
Giriş axını 306
-- ixtiyari keçmişi təsirsiz 307
-- keçmişi məhdud təsirliliyə malik 307
-- keçmişi təsirsiz 307
-- requlyar, keçmişi təsirsiz 307
-- sinqulyar, keçmişi təsirsiz 307
- brakı 307
- qanunu 307
- paylanması 307
- siqnalı 307
Gözləmə müddəti 307
Gözlənilən faydalılıq 307
- gəlir kriterisi 307
Güc(ü) statistik kriterinin 307
- funksiyası, kriterinin 308
- spektri 308
Gücləndirilmiş prinsipi, doğruyaoxşarlığın 308
Gücləndirmə əmsalı 308
- birzirvəli paylanma 308
Güclü Feller xassəsi Markov proseslərinin 308
-- keçid funksiyası 308
-- prosesi 308
- harmoniklənməlik(y i) təsadüfi prosesin 309
- infinitezimal operator 309
- ölçülən inikas 309
- təsadüfi xətti operator 309
- unimodal / güclü təkzirvəli paylanma 309
- yığılma 309
Gücü gücləndirmə əmsalı 309

H

Haar ölçüsü 310
Hadisə 310
A hadisəsi B hadisəsini doğurur 310
Halqası, çoxluqların 310
σ – **halqası**, çoxluqların 310
τ – **hamar ölçü** 310
Hamarla(n)ma bərabərsizliyi 310
Hamarlama parametri 311
Hamarlayıcı paylanma 311
Hamburger teoremi 311
Hamilton strategiyası 311
Han teoremi, yüklər haqqında 311
Hanninq pəncərəsi 311
Hant prosesi 311
Hardi entropiyası 311
Harmonik ayrılış metodu 311
Harmonik funksiya, Markov prosesi üçün 311
-- Markov zənciri üçün 311
- interpolyasiya 312
- ortalama 312
Harmoniklənən korrelyasion funksiya 312
- təsadüfi meydan 312
- təsadüfi proses 312
Harmoniklənmə şərtləri 313
Harris qayıdışlı Markov zənciri 314
Harrison mövsüm modeli 314
Hartli 315
Hartman – Vintner –Ştrassen teoremi 315
Hasil(i) σ – cəbrlər ailəsinin 315
- ehtimal fəzalarının 315
- ölçülən fəzalarının 315
- ölçülərin 315
Hausdorf psevdometrikası 316
- strukturu ehtimal metrikasının 316
- teoremi 316
Hazırolma əmsalı 316
Helli teoremi 316
Hellinger inteqralı 316
- metrikası 316
- məsafəsi 317
- prosesi 318
Hemminq pəncərəsi 318
Hennan – Kuinn kriterisi 318
Hermit müsbət funksiyası 318
- təsadüfi matrisi 319
Hesabi – additiv funksiyası, çoxluqlar 319
- ehtimali avtomat 319
- Markov zənciri 319
- tip σ – cəbr 320
Hesablanılma məsələləri kombinator analizdə 320
Heteroskedastik reqressiya 320
Heyzenberq modeli 320
Həddənziyadəlik 320
Həlledici funksiya 321
-- ; Beyes həlledici funksiya 321
-- invariant 321
-- meylsiz 321
-- məqbul 321
-- minimal 321
-- ; minimal tam sinif 321
-- müntəzəm yaxşı 321
-- optimal 321
-- randomlanmamış 321
-- randomlanmış 321
-- ; tam sinif 321
- kriteri 321
- qayda 321
Həndəsi ehtimallar 322
- erqodik Markov zənciri 322
- paylanma 322
Həndəsi proses 323
-- izotrop 324
-- stasionar (bircins) 324
Həndəsiləşdirilməsi, statistik nəzəriyyənin 324
Həssaslıq kobud xətalara 324
Hidrodinamik limit 324
-- keçidi 324
- tənlik 324
Hidrodinamika tənlikləri 324
Hilbert çevirməsi 325
- təsadüfi funksiyası 325
Hille – İosida teoremi 325
Hiperhəndəsi paylanma 325
Hiperqrup 326
Hiper – yunan – latın kubu 326
--- kvadratı 326
Hissəvi xətti aqreqat 326
-- proses 326
Histoqram 326
Hitsuda – Skoroxod konstruksiyası 327
Hodces statistik qiyməti 327
Holl teoremi 327
-- Uinters modeli 327
Homoskedastik reqressiya 327
Hotellinq kriterisi 327
- T^2 – paylanması 328
- T^2 – statistikası 329
Höfdinq ölçüsü 329
Hölder bərabərsizliyi 329
Hörst fenomeni 329

X

Xalis Beyes strategiyası 331
- strategiya 331
- vəziyyət 331
Xaos 331
- bircins 332
Xarakteristik çevirmə 332
Xarakteristik funksional 332
-- (ı) təsadüfi ölçünün 335
Xarakteristik funksiya 335
-- analitik 335
-- metodu 335
- göstərici, dayanıqlılıq parametri 336
- operator(u) 336
Xarakterizasion teoremlər 337
-- Abel qruplarında ehtimal paylanmaları üçün 337
Xarakterizasiyası, paylanmaların 338
Xaricetmə metodu 339
Xarici ölçü 339
Xəta 339
- ehtimal olunan 339
- (sı) eksperimentin 339
- kvadratik orta 339
- sistematik 339
- standart 339
- təsadüfi 339
Xətalar inteqralı 339
- nəzəriyyəsi 339
- vektoru 340
Xətti approksimasiya 340
Xətti asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər 340
----- ardıcıllığı 340
- cəbr stoxastik 340
- filtr 340
- funksiya, meylsiz statistik qiymət almaq üçün 341
- hipotez 341
- ifadə olunabilən təsadüfi proses 342
- interpolyasiya(sı) reqressiya funksiyasının 342
- kod 342
- korrelyasiya 342
- kriteri 342
- ranq statistikası 342
- reqression eksperiment 342
- reqressiya 342
- requlyar stasionar proses 343
- sistem 343

Xətti statistik qiymət 343
--- ən kiçik dispersiyalı 343
--- məqbul 343
Xətti stoxastik differensial tənlik 343
---- həllərin dayanıqlılığı 343
-- parabolik tənlik ikinci tərtib 344
- tənlik; Monte-Karlo metodu ilə həll 344
Xəttivari Markov prosesi 344
Xi – dağılma 344
Xi – kvadrat kriteri 344
-- paylanma 347
- – paylanma 347
Xidmət qaydası 348
Xidmət sistemi 348
-- açıq 348
-- birxətli 348
-- birkanallı 348
-- çoxxətli 348
-- çoxkanallı 348
-- çoxkaskadlı 348
-- ;dayanıqlılıq 348
-- gözlənməli, birkanallı 348
-- gözlənməli, çoxkanallı 349
-- imtinalarlı 350
-- qapalı 350
-- natamam girişli 350
-- tamgirişli 350
Xidmət sistemləri nəzəriyyəsi 350
--- ;asimptotik metodlar 352
--- ;əlavə dəyişənlər metodu 353
--- ;invariantlıq problemi 353
- sistemlərinin statistik modelləşdirilməsi 353
- şəbəkəsi 353
Xinçin bərabərsizliyi asılı olmayan funksiyalar üçün 354
- düsturu 355
- spektral funksiyası 355
Xinçin teoremi 355
-- ayrılış (faktorizasiya) haqqında 355
-- xidmət sistemi nəzəriyyəsində 355
-- stasionar təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində 355
- – Kolmoqorov teoremi 356
Xüsusi koherentlik 356
- korrelyasion funksiya 356
Xüsusi kovariasiya əmsalı 356
- / Marginal paylanma 357
- semi - qrupların hesabı / arifmetikası 357
- semimartinqal 357

İ

İdarəedici ardıcıllıq 358
İdarəetmə paylanmış parametrlərli sistemləri 358
İdarəolunan diffuzion proses 358
- Markov prosesi 360
- Markov zənciri 360
- obyekt 361
- semi – Markov prosesi / semi–Markov qərar qəbuletmə prosesi 361
- sıçrayışvari Markov prosesi 361
- sıçrayışvari proses 361
- təsadüfi ardıcıllıq 362
İdarəolunan təsadüfi proses 362
--- diskret zamanlı 362
İdarəolunma 366
İdeal qaz 366
- metrika 367
İdempotent ölçü qrupda 368
İflas məsələsi 368
İki təsadüfi kəmiyyət arasında məsafə 369
İkiqat ardıcıllıq(ğı) təsadüfi kəmiyyətlərin 369
- stasionar təsadüfi proses 369
İkiqat stoxastik matris 370
- - Puasson prosesi (Koks prosesi) 370
İkiqollu bandit 371
İkili Markov prosesi 371
İkilik simmetrik kanal 371
- vahid(i) informasiya miqdarının 371
İkinci Laplas qanunu 372
İkiölçülü normal paylanma 372
İkiseçimli T^2-statistikası 372
İkiseçimli Styudent kriterisi 372
İkitərəfli Bernulli yerinidəyişməsi 373
- eksponensial paylanma 373
- etibarlı interval 373
- hipotez 373
- Markov prosesi 373
- Styudent kriterisi 373
- üstlü paylanma 373
İkizirvəli paylanma 373
İqlim / Klimat 373
- norması 373
- proqnozu 374
- sistemi 374
- zaman sıraları 374
İqlimin stoxastik modelləri 374
İlk çatım anı / ilk çıxış müddəti 374
- çıxış anı 374
- çıxış müddəti 374
- daxilolma / ötüm anı 374
- keçmə anı, sərhədi 374
- qayıdış anı 375
- mühüm rəqəm qanunu 375
İlkin hipotez 376
- / başlanğıc paylanma(sı) Markov zəncirinin(prosesinin) 376
İllüstrativ dəyişən 376
İmitasiyası, təsadüfi təzahürün 376
- şaxələnən proses 376
İmpuls əngəl 376
- – fazalı modulyasiya prosesi 376
İmpulsal – bərpa prosesi 376
- keçid funksiyası 376
- küy 376
İmpulsal proses taktlı intervallarla modullanmış 377
-- , sabit taktlı intervallarlı 377
- Puasson prosesi 377
- səda funksiyası 377
- təsadüfi proses 377
İmtina (sıradan çıxma) 378
- axtarışı 378
- üçün orta işləmə müddəti 378
İmtinalar ağacı 378
İmtinası, elementin 378
- sistemin 378
İmtinasız / fasiləsiz işləmə ehtimalı 378
- işləmə müddətinin paylanma funksiyası α_1 rejimində 378
İmtinasızlıq 378
İmtinaya qədər qamma – faizli işləmə müddəti 378
-- orta işləmə müddəti 378
İndeks(i) təsadüfi kəmiyyətin; paylanmanın 378
İndikator(u) hadisənin 379
- dəyişən 379
- metrika 379
- , çoxluğun 379
İndividual erqodik teorem 379
İnersion proqnoz 379
İnfinitezimal matris 379
- operator 379
- sistemi, ölçülərin 380
İnformant 380
İnformasion ardıcıllıq 381
- dayanıqlılıq 381
- ehtiyatda saxlama 382
- korrelyasiya əmsalı 382
İnformasion matris 382
-- Fişer informasiyası üzrə 382
- metrika(sı) Riman 383
- məsafə 383
- ölçü 384
- sıxlıq 385
- yayınma(sı) Kullbak–Leybler–Sanovun 385
İnformasiya 385
- apriori 385
İnformasiya miqdarı 385
-- qeyri–parametrik 386
- nəzəriyyəsi 386
- ötürmə sürəti 390
İnformativlik 390
- (yi) dəyişənlər toplusunun 390
İnikas prinsipi 390
İnteqral bərpa teoremi 391
- çevirmə 391
- ehtimali 391
- həndəsə 392
- limit teoremi 393
- miqyas(ı) korrelyasiyanın 394
- struktur(u) ehtimal metrikanın 394
- , trayektoriyalar üzrə 394
İnteqrallanma Boxnerə görə 394
- Pettisə görə 394
İnteqrallanması, təsadüfi prosesin 394
İnteqrallanmış spektr(i) qeyri-stasionar prosesin 394
İntensivlik 394
- (yi) axının 394
- ani 394
- (yi) düzxətlər prosesinin 394
- funksiyası, imtinanın 394
- qızılgülü 394
- ölçüsü 394
İntensivliyi, lif prosesinin 395
- , prosesin 395
İnterdesil açım (genişlik) 395
- genişlik 395
İnterferens kanal 395
İnterval statistik qiymət 395
- verilənlərin statistikası 395
İntervallar şkalası 395
σ – **invariant** halqa 395

- kriteri 395
- ölçü 396
σ – - ölçü 396
- paylanma 396
- paylanmalar ailəsi 396
İnvariant statistik qiymət 396
- - struktur 396
- statistika 396
İnvariantlıq statistik oyunlar nəzəriyyəsində 396
- (ğı) statistik prosedurun 397
İnvariantlıq prinsipi Banax fəzalarında 398
- - xidmət sistemi nəzəriyyəsində 398
- - sanki yəqin 398
- - təsadüfi proseslər üçün 398
- - ;yığılma sürəti 399
İnversiya 400
İonesku Tulçi teoremi 400
İrrequlyar nöqtə 400
İstiqamət qızılgülü 400
İstiqamətləndirici statistika 400
İstiqamətlənmiş çoxluq 400
İşarə metodu, korrelyasion analizin 400
İşarələr kriterisi 400
İşarəvi – invariant ailə(si) təsadüfi kəmiyyətlərin 401
İşarəvi korrelyasiya funksiyası 401
İtki funksiyası 401
İto düsturu 401
- ifadəsi 401
- prosesi 402
- stoxastik inteqralı 402
- – Nisio teoremi 402
- – Ventsel düsturu 402
İyerarx prosedurları, təsnifatın 402
İynə 402
İzinq modeli 402
İzinvermə qabiliyyəti 403
İzomorfizmi, dinamik sistemlərin metrik 403
İzotrop sonlu fəza 404
İzotrop təsadüfi çoxluq 404
- - meydan 404
- - proses 404

J

Jirina prosesi 405
Jordan ayrılışı 405

K

Kafi statistik qiymət 406
Kafi statistika 406
- - minimal 407
- - zəruri 407
- topologiya 407
Kafilik statistik oyunlar nəzəriyyəsində 407
Kahan daralma prinsipi 407
Kalibrləmə modeli statistik mexanikanın 407
Kalman filtri 408
- – Byusi metodu 408
Kanal additiv küylü 408
- asimmetrik 409
- asinxron 409
- bircins 409
- çoxgirişli 409
- çoxkomponentli 409
- çoxtərəfli 409
- determinik 409
- genişyayımlı 409
- ikilik simmetrik 409
- interferens 409
- kvant rabitə kanalı 409
- (ı) Qauss 409
- qeyri–antisipativ 409
- ;ötürücülük qabiliyyəti 409
- pisləşmiş 409
- ;rabitə kanalı 409
- semideterminik 410
- sıfır xətalı 410
- simmetrik 410
- sinxron 410
- sinxronizasiya xətalarlı 410
- sonlu yaddaşlı 410
- stasionar 410
- şəbəkə 410
- tərs rabitəli 410
- vəziyyətləri sayı sonlu 411
- yaddaşsız 411
Kanonik kəmiyyət 411
Kanonik korrelyasiya 411
- - əmsalları 412
Kanonik korrelyasiyalar analizi 412
- - və kəmiyyətlər 412
- ölç(ül)mə 412
- parametr 412
- paylanma 413
- spektral tənlik 413
- və natural parametrizasiya 413
Kantor paylanması 414
Kantoroviç metrikası 414
- məsafəsi 414
- teoremi 415
Karateodari teoremi ölçülər haqqında 415
Karleman kriterisi 415
- şərti 415
Karunen teoremi 415
Karunen – Loev ayrılışı 415
- - - diskret 416
Kaskad desimasiya 417
- kod 417
Kateqorik hava proqnozu 417
Keçid ehtimalı Markov zəncirində 417
- - sıxlığı 417
- funksiyası 417
- intensivliyi 418
- matrisi 418
- sıxlığı 418
Kemeni medianı 418
- məsafəsi 419
Kempbell ölçüsü 419
- teoremi 419
Kendall əmsalı ranq korrelyasiyasının 419
KEPSTR 420
Kepteyn paylanmaları 420
Kesten amenabellik kriterisi 420
Keyfiyyətcə dayanıqlılıq(ğı) stoxastik modellərin 420
Keyfiyyətli robastlıq 421
Kəmiyyət robastlığı 421
Kəmiyyətcə dayanıqlılıq(ğı) stoxastik modellərin 421
Kənar funksiya 421
Kəsik – ekvivalent təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllıqları 421
- paylanma 421
- seçim 421
- təsadüfi kəmiyyət 422
Kəsilməz axın 422
σ - **kəsilməz funksiyası** 422
Kəsilməz paylanma 422
- semi - qrup 422
Kəsişmə(si) / hasil(i) təsadüfi hadisələrin 423
Kəskin fərqlənən müşahidələr, aşma–enmələr 423
Kəsmə metodu 423
Kəsri Bəyaz küy 423
- Braun hərəkəti 424
Kəsri faktor eksperiment 424
- - plan 424
- küy prosesi 424
Ki Fan metrikası 424
Kiçik kanonik ansambl 424
- yayınmalar təsadüfi proseslər və dolaşmalar üçün 424
Kifer – Veys məsələsi 425
- – Volfovits proseduru stoxastik approksimasiyanın 425
Kimyəvi potensial 425
Kinetik köçürmə tənliyi bir hissəcik halında paylanma funksiyası üçün 425
Klark düsturu 426
Klassifikator 426
Klaster 426
- – anlayışı 426
- model 426
- – prosedur 426
Klasterlərə ayrılış metodu 426
Kobud xətalar modeli 426
Kod 427
- ağacvari 427
- (u) blok 427
- xətti 427
- (u) kaskad 427
- konvolyusion 427
- qeyri–müntəzəm 427
- qruplu 427
- rekurrent 427
- ;sürət 427
- şəbəkəvari 427
- şəbəkəvari xətti 427
- tsiklik 427
- uzunluğu 427
- ;yaddaş 427
- ardıcıllığı 427
- məsafəsi 428
- söz 428
Koder 428
Kodla(n)ma 428
- baxışla 428
- ehtimali(stoxastik) 428
- kombinator 428
- ;mürəkkəblik 428
- təsadüfi 428
- universal 428
- baxışla 428
Kodlama teoremləri 428
Kodlanma(sı) əlavə informasiyalı mənbənin 428
- məlumatlar mənbəinin 428
Koherentlik 429
- əmsalı 430
- spektri 430
Kokran teoremi 430
Koks nöqtəvi prosesi 430
- prosesi 430
Kolmoqorov aksiomatikası ehtimal nəzəriyyəsinin 430
- bərabərsizliyi 431
- düsturu 432

- kriterisi 432
- metrikası 432
- modeli 432
- oxşarlıq hipotezi 432
- orta kəmiyyətləri 432
- paylanması 433
- statistikası 433
- şərti 433
Kolmoqorov teoremi seçimi funksiyaların kəsilməzliyi haqqında 433
-- sonlu-ölçülü paylanmalar haqqında 434
-- uzlaşdırılmış paylanmalar haqqında 434
-- «üç sıra» haqqında 434
Kolmoqorov tənlikləri 434
-- ikinci momentlər üçün 436
Kolmoqorov tənliyi düz 437
-- tərs 437
- üçdə iki qanunu 437
- – Arak teoremi 437
- – Deyev şərti 437
Kolmoqorov – Dub bərabərsizliyi 437
--- kvazimartinqallar üçün 437
- – Petrovski məsələsi 437
- – Smirnov kriterisi 437
- – Smirnov statistikası 439
Kombinator analiz 439
- ədədlər 442
- inteqral həndəsə 443
- kodlama 443
- konfiqurasiya 427
- məsələlər klassik 443
- riyaziyyat 445
Kombinatorika 445
- , ehtimali 445
Kompakt 445
- ölçü 445
- təkrar loqarifm qanunu 445
Kompaktifikasiyası, faza fəzasının 445
Kompaktlıq(ğı) ölçülər ailəsinin 445
μ – **Kompaktlıq** 445
Kompensator 446
-(u) nöqtəvi prosesin 446
Kompleks demodulyasiya 447
- Qauss prosesi 447
Komponent analiz 447
Kompozisiya 447
- paylanmaların 448
- metodu 448
Kompozisiyalı semi – qrup 448
Kompozisiyası, stoxastik nüvələrin 448
Konfiqurasiya 448
Konflikt 448
Konflyuent analiz 448
Konkordasiya əmsalı 449
Konsentrasiya funksiyası 449
Konservativ keçid funksiyası 449
- / infinitezimal matris 449
- zolaq 449
Konstruktiv kvant meydan nəzəriyyəsi 449
Kontaktlar prosesi 450
Kontiqual alternativlər 450
- inteqral 450
Kontiquallıq 451
Kontrast 451
Konvolyusion(u) ehtimal ölçülərinin 451
- kod 452
Konvolyusion semi - qrup(u) ehtimal ölçülərinin 452
-- , ölçülərin; kanonik ifadə 453
Konyuksiya(sı) / uyuşma(sı) hadisələrin 454
Korniş – Fişer ayrılışı 454
Korolyuk teoremi 455
Korrektləmə qaydaları 455
Korrektləyici kod, xətanı 455
Korreloqram 455
Korrelometr 455
Korrelyasion analiz 455
- asılılıq 455
- bərabərsizliklər 455
- cədvəl 456
- funksional 456
Korrelyasion funksiya 456
-- harmoniklənən 457
-- xüsusi 457
-- işarəvi 457
-- qarşılıqlı 457
-- ; qiymətləndirmə 457
-- ortalanmış 458
-- polyar 458
-- reley 458
-- seçimi 459
-- statistik mexanikada 459
-- ümumiləşmiş 459
- matris 459
- meydan 460
- nəzəriyyə 460
- nisbət 460
- ölçü 460
- pəncərə 460
- tənliklər 461
- üsul 461
Korrelyasiya 462
- əmsalı 463
- funksiyası 464
- radiusu 464
Korrelyator 464
Korvin qrupu 464
Kosinor – analiz 464
Kospektr və kvadratur spektr 464
Kospektral funksiya 464
- sıxlıq 464
Koşi paylanması 464
- – Bunyakovski bərabərsizliyi 465
Kotelnikov teoremi 465
- – Şennon düsturu 466
Kovariasion analiz 466
- funksiya 466
Kovariasion funksiya qarşılıqlı 466
-- seçimi 466
Kovariasion matris 466
-- ; spektral ayrılış 466
- operator(u) ehtimal ölçüsünün 466
- pəncərə 467
Kovariasiya 467
-(sı) təsadüfi qapalı çoxluğun 467
- , xüsusi kovariasiya funksiyası 468
Köçürtmə – qoşma məsələsi 468
- məsələsi; statistik modelləşdirmə 468
- teoremi 468
Kök(ü) təsadüfi ağacın 468
Kökləri – kompakt qrup 468
Körpü, Braun körpüsü 468
Kraft – Mak – Millan bərabərsizliyi 468
Kramer bərabərsizliyi 468
- çevirməsi 468
- sırası 469
- şərtləri 469
- teoremi 469
Kramer – Mizes kriterisi 470
-- – Smirnov kriterisi 470
-- – Rao bərabərsizliyi 470
- – Vold teoremi 471
- – Mod – Yagers prosesi 471
Kreyn teoremi 471
Krılov statistik qiymətləri, paylanmanın 471
Krikkeberq ayrılışı 471
Kriptoqrafiya 471
Kriteri statistik 474
A – **kriteri** 474
D – **kriteri** 474
E – **kriteri** 474
FPE – **kriteri** 474
L_C – **kriteri** 474
χ^2 – **kriteri** 474
t – **kriteri** 474
T^2 – **kriteri** 474
ω^2 – **kriteri** 474
Φ_α – **kriteri** 475
Kritik ehtimal 475
- funksiya 475
- hüdud, p – qiymət, müşahidəolunan ölçü 475
- indeks 475
- qiymət 475
- nöqtə 475
- oblast 475
- şaxələnən proses 475
Kritikaltı şaxələnən proses 476
Kritiküstü şaxələnən proses 476
Kross – periodoqramm 477
-- – spektral sıxlığı 477
Kubo – Anderson prosesi 477
Kullbak yayınması 477
Kullbak – Leybler dağılanlığı 477
-- informasion kəmiyyəti 477
Kullbak – Leybler informasion məsafəsi 477
--- – Sanov informasion yayınması 477
Kumulyant 477
Kumulyanta 477
Kumulyativ spektr 477
Kumulyativ spektral funksiya 477
-- sıxlıq 477
Kunita – Vatanabe bərabərsizlikləri 477
Kükrəntilər metodu 478
Kütləvi xidmət nəzəriyyəsi 478
Kvadratik balanslaşdırılmış model 478
- xarakteristika(sı) martinqalın 478
- xəta 478
- inteqrallanan martinqal 478
- itki funksiyası 479
Kvadratik orta xəta / standart xəta 479
-- reqressiya 479
-- yayınma 479
-- yayınma(sı) seçimin 479
- risk 479

- variasiya(sı) martinqalın 479
- / standart yayınma 479
Kvadratur düsturlar təsadüfi düyünlərli 479
- spektr 480
- spektral funksiya 480
- spektral sıxlıq 480
Kvant Braun hərəkəti 480
- dekodla(n)ması 480
- dinamik semi - qrup 480
- ehtimal nəzəriyyəsi 480
- Evklid meydanı 480
- kodla(n)ması 480
Kvant meydan nəzəriyyəsi aksiomatik 480
--- Evklid 480
--- konstruktiv 480
- nəzəriyyəsi, hipotezlərin yoxlanılması və qiymətləndirilməsinin 481
- ölçməsi 483
- rabitə kanalı 484
- stoxastik differensial tənliyi 484
- stoxastik hesabı 484
- təsadüfi prosesi 484
- vəziyyəti 485
Kvantil 485
- ;asimptotik düsturlar 485
Kvantlama zaman üzrə 485
Kvantlanması, məlumatların 486
Kvapen teoremi 486
- – Şvarts teoremi 486
Kvartil 486
- məsafə 486
Kvaziaçım(i) seçimin 486
Kvazidiffuzion proses 486
Kvazihamar Markov prosesi 486
Kvaziinfinitezimal operator 486
Kvaziinvariant ölçü 486
σ – **kvaziinvariant ölçü** 487
Kvazikəsilməz proses, soldan 487
Kvazikəsilməzlik, soldan σ – cəbrlər axının 487
Kvazikompaktlıq şərti 487
Kvazimartinqal 487
Kvazimetrika 487
Kvaziməqbul statistika 487
Kvaziölçü 487
Kvazirequlyar sistem 487
Kvazisimmetrik paylanma 487
Kvazivariasion bərabərsizlik 487
-- ;diffuzion prosesləri impulsal idarəetmə məsələləri 487

Q

Qalerkin yaxınlaşması 489
Qalığı, paylanmanın 489
Qalıq cəmi, kvadratların 489
- – ekvivalent ardıcıllıqları, təsadüfi kəmiyyətlərin 489
- hadisə 489
Qalıqlar 489
Qallager funksiyası 489
Qalma müddəti 489
Qalton – Vatson prosesi 489
Qamma – approksimasiya 489
- – faizli işləmə (imtinaya qədər) müddəti 490
Qamma – paylanma 490
Qapalı çoxluq 491
- xidmət sistemi 491
- plan 491
- sinif 491
- təsadüfi çoxluq 491
Qarışdırma metodu 491
Qarışıq(ğı) vəziyyətlərin 491
Qarışıq avtoreqressiv – sürüşən orta modeli 491
---- proses 491
---- prosesi; çevrilənlik şərti 492
- model(i) dispersion analizin 492
- moment 492
- oyun 492
- strategiya 492
Qarışıqlar fəzası 492
Qarışma 492
- çoxqat 492
K – **qarışma** 492
Qarışma şərtləri təsadüfi meydan üçün 493
-- təsadüfi proses üçün 493
Qarşılıqlı asılı olmamazlıq 494
- faza spektri 494
- korrelyasion funksiya 494
- korrelyasiya funksiyası 494
- kovariasion funksiya 495
Qarşılıqlı kovariasiya funksiyası 495
-- operatoru 495
- kvadratik xarakteristika 495
- reley korrelyasion funksiyası 495
- spektr 495
Qarşılıqlı spektral funksiya 495
-- sıxlıq 495
- təsir 495
- təsir(i) faktorların 495
Qauss bərabərsizliyi 495
- bəyaz küyü 495
- çevirməsi 495
- dinamik sistemi 495
- kanalı 496
- kovariasiyası 496
- qanunu 496
- Markov prosesi 497
- modeli 498
Qauss ölçüsü 498
-- Banax fəzasında 498
Qauss paylanması 499
-- lokal kompakt Abel qrupunda 499
Qauss prosesi 499
-- ;statistik məsələlər 500
-- ;Viner inteqralları ilə ifadəsi 500
- semimartinqalı 501
- silindrik ölçüsü 502
Qauss təsadüfi çoxluğu 502
-- elementi 502
-- kəmiyyəti 502
-- matrisi 503
- vəziyyəti 503
- – Laplas paylanması 504
- – Markov teoremi 504
- – Nyuton metodu 504
Qaydalı statistika 504
- şkala 505
Qayıdış orta müddəti 505
Qayıdışlı hadisə 505
- Markov prosesi 505
- Markov zənciri 505
ν – **qayıdışlı** Markov zənciri 506
- vəziyyət 506
Qayıdışlılıq(ğı) təsadüfi dolaşmanın 506
Qayıdışsız Markov zənciri 506
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 506
Qeyd olunmuş / sürüşən ehtiyatda saxlama 506
Qeyri – antisipativ funksiya 506
- strategiya 506
- təsadüfi proses 506
Qeyri – atomik ölçu 506
- paylanma 506
Qeyri – bircins Markov zənciri 506
- şaxələnən proses, zaman üzrə 506
Qeyri – dissipativ Markov zənciri 507
Qeyri – ədədi təbiətli obyektlərin statistikası 507
Qeyri – həssaslıq problemi 507
Qeyri – xətti avtoreqressiv prosesi 488
- filtrasiya(sı) təsadüfi proseslərin 507
- korrelyasiya 508
- modellər(i) təsadüfi proseslərin 509
- proqnozlanma(sı) təsadüfi proseslərin 509
- reqression eksperiment 509
- reqressiya 510
- tənlik; Monte-Karlo metodu ilə həll 510
Qeyri – kommutativ ehtimal nəzəriyyəsi 510
- inteqrallama nəzəriyyəsi 513
Qeyri – korrelyar təsadüfi kəmiyyətlər 513
Qeyri – metrik çoxölçülü şkallanma 513
Qeyri – məhdud təsadüfi dolaşma 513
Qeyri – məxsusi paylanma 513
Qeyri – məqbul / mənfi olmayan müəyyən funksiya 513
Qeyri – məqbul statistik qiymət 513
Qeyri – mərkəzi xi – kvadrat pay-lanma 513
- T^2 - paylanması 514
- χ^2 - paylanması 514
Qeyri – mərkəzilik parametri 514
-- xi–kvadrat kriterisi 514
Qeyri – müəyyənliklər münasibəti 514
Qeyri – mühüm vəziyyət(i) Markov zəncirinin 514
- vəziyyətlər sinfi Markov zəncirinin 514
Qeyri – mümkün hadisə 514
Qeyri – müntəzəm kod 514
Qeyri – parametrik diskriminant analiz 515
- informasion miqdar 515
- kriteri 515
- qiymətləndirilmə(si) ehtimal sıxlığının 516
- qiymətləndirmə 516
- reqression analiz 519
- spektral statistik qiymət 521
- statistik qiymət(i) spektral sıxlığın 521
- təsnif 521
- yoxlanılması, hipotezlərin 521
Qeyri – periodik Markov zənciri 524
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 524
Qeyri – requlyar şaxələnən proses 524
Qeyri – səlis çoxluq 524
- çoxluqlar statistikası 524
Qeyri – simmetrik təsadüfi matris 525
Qeyri – stasionar axın 525

Qeyri – stasionar təsadüfi proses; böyük ədədlər qanunu 525
--- ; spektral nəzəriyyələr 525
Qeyri – stasionarlıq ranqı 526
Qeyri – tarazlıqlı statistik mexanika 526
Qəbulolunma ədədi 526
Qəribə attraktor 526
Qırılan Markov prosesi 526
Qırılma anı 526
Qırılmayan Markov prosesi 526
Qırmızı küy 526
Qismən balanslanmış blok plan 526
- Beyes yanaşması 526
- cazibə oblastı sonsuz bölünən G qrupunun 526
Qiymətləndirilməsi, minimal məsafənin 527
Qlison teoremi 527
Qlivenko teoremi 527
- – Kantelli teoremi 527
Qlobal kriteri 527
- limit teoremləri 527
Qnedenko teoremi 527
Qocalan paylanma 528
Qoşma köçürtmə məsələsi 528
- paylanmalar 528
Qoşmalıq cədvəli, əlamətlərin 528
Qram – Şarliye sırası 529
Qranulometriya 530
Qrenander – Rozenblatt tip statistikalar(ı) spektral sıxlığın 530
Qriffits bərabərsizlikləri 530
Qrin alfa-funksiyası 530
- funksiyası 530
- α - funksiyası 530
Qross topologiyası 530
Qruplu kod 530
Qrupda diffuzion proses 531
Qrupla gecikmə 531
Qumar, oyun 531
Qursa stoxastik məsələsi 531
Qurşayıcı funksiyası, gücün 531
Qurşayıcısı, siqnalın 531
- , təsadüfi prosesin 531
Qüvvət sırası Kolmoqorov tənliyinin 531
Qüvvətüstlü momentlər problemi 532

L

Laq 533
Laqlar / paylanmış lokal model 533
Lanjeven tənliyi 533
Laplas metodu 533
- paylanması 533
- teoremi 534
- – Qauss paylanması 534
Latın altkvadratı 534
- düzbucaqlısı 534
- kubu 534
- kvadratı 535
Lay 536
Laylanmış seçim 536
Laylı seçim metodu 536
Lebeq ayrılışı 536
- ölçüsü 536
- teoremi 536
Lebovits bərabərsizliyi 536
Leksikoqrafik münasibət 536
Leman – Şeffe teoremi 536
Lenard – Cons potensialı 536
Levenberq – Markvardt metodu 536
Levi ayrılışı asılı olmayan artımlarlı təsadüfi proseslərin 537
- bərabərsizliyi 537
- inikası 538
Levi kanonik ifadəsi 538
--- Banax fəzasında 538
- metrikası 538
- meydanı 539
- ölçüsü 540
- sinfi 540
- sistemi Markov prosesi üçün 540
- spektral funksiyası 540
- teoremi 540
Levi – Xinçin düsturu semi-martinqallar üçün 540
-- kanonik ifadəsi 540
- – Kramer teoremi 540
- – Pareto paylanması 541
- – Proxorov metrikası 541
Levinson alqoritmi 541
- – Derbin alqoritmi 542
Ləngidici baryer 542
- vəziyyət 542
Ləngimə / gecikmə 542
- əmsalı 542
- pəncərəsi 542
Liflər prosesi 542
Limit teoremləri 542
-- diofant yaxınlaşmalarının metrik nəzəriyyəsinin 542
-- kompakt qruplarda 546
-- Markov prosesində nisbətlər üçün 548
-- Markov prosesləri üçün 548
-- Markov zəncirində nisbətlər üçün 548
-- Markov zəncirləri üçün 548
-- martinqal və semi-martinqallar üçün 549
-- stoxastik differensial tənliklər üçün 552
-- təsadüfi çoxluqlar üçün 554
-- təsadüfi matrislər üçün 555
-- təsadüfi proseslər üçün 556
-- təsadüfi proseslər üçün; martinqal metodları 562
- teoremlərinin davamolunanlığı 563
Limiti, təsadüfi hadisələr ardıcıllığının 564
Lindeberq şərti 564
-- təsadüfi matrislər üçün 564
- – Feller teoremi 564
Lindelöf xassəsi 565
Linnik dispersion metodu 565
- sinfi 565
- yığılma zonaları 565
Littl düsturu 565
Liuvill stoxastik differensial tənliyi 565
Logistik paylanma 565
Lokal bərpa teoremi 566
- bircins təsadüfi meydan 566
- bircins təsadüfi proses asılı olmayan artımlarlı 566
- erqodik teorem 566
- ən güclü kriteri 566
- inteqrallanan proses 567
- izotrop təsadüfi meydan 567
- limit teoremləri 567
Lokal martinqal 567
-- ; inteqral ifadə 568
- sonlu ölçü 568
Loqarifmik doğruyaoxşarlıq funksiyası 568
- normal paylanma 568
- paylanma 569
Loqnormal paylanma 569
Lyapunov bərabərsizliyi 569
- kəsri 569
- stoxastik funksiyası 569
- şərti 570
- teoremi 570
Lyusian 570

M

Mahalanobis metrikası 571
- məsafəsi 571
Mahiyyətcə tam sinif(fi) kriterilərin 571
Maksimal addım(ı) paylanmanın 571
Maksimal doğruyaoxşarlıq metodu 571
-- prinsipi 573
-- spektral statistik qiyməti 573
-- statistik qiyməti 573
- entropiya; spektral statistik qiymət 573
- korrelyasiya əmsalı 574
- kütlə metodu 574
- kriteri 574
- sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin 575
Maksvell paylanması 575
- – Bolsman statistikası 576
Maliyyə riyaziyyatı 576
Mallyavin hesabı 579
- stoxastik törəməsi 580
Maltus parametri 580
Mann – Uitni kriterisi 581
Marginal doğruyaoxşarlıq funksiyası 581
- paylanma 581
- paylanma funksiyası 581
- yanaşma 581
Markov anı 581
- avtomorfizmi 581
- bərabərsizliyi 581
Markov bərpa prosesi 581
-- tənliyi 581
- dinamik semi - qrupu 581
Markov xassəsi 581
-- geniş mənada 582
- inikası; dinamik inikas 582
- keçid funksiyası 582
- Qauss prosesi 582
- məlumatlar mənbəi 582
- modeli 583
- ölçüsü 583
Markov prosesi 583
-- ; additiv funksional 585
-- bircins 586
-- ; böyük ədədlər qanunu 585
-- ; çevirmələr 586
-- çevrilmiş 587
-- ; davamı 587
-- ; dayanıqlılıq 587
-- Dirixle forması 587

-- ;ekskursiya 588
-- ;enerji 588
-- ;faza fəzası 588
-- ;faza fəzasının kompaktifikasiyası 588
-- ;funksional 589
-- geniş mənada 589
-- ;hissəsi 589
-- xəttivari 589
-- idarəolunan 589
-- ikili / dual 589
-- ikitərəfli 589
-- ;infinitezmal xarakteristikalar 589
-- ;keçid funksiyası 590
-- kvazihamar 590
-- qarşılıqlı təsirli 590
-- qayıdışlı 591
-- ;qərarların qəbulu 591
-- qırılan 591
-- qırılmayan 591
-- ;Levi sistemi 591
-- ;limit teoremləri 591
-- limit teoremləri nisbətlər üçün 591
-- ;lokal müddət 591
-- ;mərkəzi limit teoremi 592
-- ;mütləq paylanma 592
-- normal 592
-- ;rezolvent 592
-- sağ 593
-- ;sərhəd şərti 593
-- sıçrayışvari 593
-- ;sıfır vahid qanunu 594
-- standart 594
-- stasionar 594
-- ;statistik məsələlər 594
-- şərti 594
-- topoloji qayıdışlı 594
-- ;trayektoriyaların daxili xassələri 594
-- vəziyyətləri çoxluğu hesabi 594
-- vəziyyətləri çoxluğu sonlu 597
-- ;zamanın təsadüfi əvəzlənməsi 600
-- , sıçrayışvari idarəolunan 601
- semi - qrupu 601
- strategiyası 601
Markov təsadüfi dolaşması 601
-- meydanı 601
L– -- meydanı 602
- yerinidəyişməsi 602
- yerləşməsi, hissəciklərin 602
Markov zənciri 602
-- açılmış formada 607
-- atsiklik / aperiodik 607
-- ayrılan 607
-- ayrılmayan 607
-- bircins 607
-- çevrilmiş 607
-- daxil edilmiş 607
-- dissipativ 607
-- ;ekssessiv funksiya 608
-- ;ekssessiv ölçü 608
-- erqodik 608
-- ;erqodik sinif 608
-- ;əlaqəli vəziyyətlər 608
-- faza fəzası 608
-- ;fundamental matris 608
-- ;harmonik funksiya 608
-- Harris qayıdışlı 608
-- hesabi 608
-- idarəolunan 608
-- ;keçid ehtimalı 608
-- klassik mənada 608
-- qayıdışlı 608
-- qayıdışsız 608
-- qeyri - bircins 608
-- qeyri-dissipativ 608
-- qeyri-periodik 608
-- ;limit teoremləri 608
-- ;limit teoremləri nisbətlər üçün 608
-- mürəkkəb 608
-- ;mütləq paylanma 608
-- ;orta qayıdış müddəti 609
-- periodik 609
-- ;potensial nəzəriyyəsi 609
-- requlyar 609
-- ;statistik modelləşdirmə 609
-- təkrar loqarifm qanunu 609
-- tranzitiv 609
-- tsiklik 609
-- ;tsiklik vəziyyət 609
-- ;uducu vəziyyət 609
-- ;vəziyyətlərin altsinfi 609
-- ;vəziyyətlərin çoxaldılması 609
-- ;vəziyyətlərin əhəmiyyətsiz sinfi 609
-- ;vəziyyətlərin mühüm sinfi 609
-- ;vəziyyətlərin müsbət sinfi 609
-- ;vəziyyətlərin sıfır sinfi 609
-- ;vəziyyətlərin təsnifatı 609
Martin kompaktı 611
- sərhədi Markov prosesinin 611
Martinqal 612
- dayandırılmış 615
- ;kvadratik xarakteristika 615
- kvadratik inteqrallanan 615
- ;kvadratik variasiya 615
- ;limit teoremləri 616
- lokal 616
- ;moment eynilikləri 616
- ;öngörül xarakteristika 616
- öngörül kvadratik variasiya 616
- çevirməsi 616
- problemi 616
Masse kriterisi 617
Median 617
- – meylsiz statistik qiymət 617
Mellin – Stiltyes çevirməsi 617
Mellous C_p **- kriterisi** 617
Meşə təsadüfi 617
Meta teoremi 617
Meteoroloji informasiyanın optimal istifadəsi 617
- itkilər funksiyası 618
- ölçmələrin statistik nəzəriyyəsi 618
- proqnoz alternativ 619
- zaman sıralarının əlaqəliliyi 619
Metrik çoxölçülü şkala(n)ma 620
- entropiya(sı) dinamik sistemin 620
- ətraf 620
- invariant 620
- izomorfizm 620
- məsafələr metodu 620
- tranzativ stasionar təsadüfi proses 620
- tranzitivlik 620
Meydan; σ – meydan 620
Meyer ayrılışı 620
Meyl 620
- (i) statistik qiymətin 620
Meylədüzəliş metodu 620
Meylli statistik qiymət 621
Meylsiz etibarlı çoxluq 621
- həlledici funksiya 621
- xətti statistik qiymət 621
- kriteri 621
- ölçmə 621
- plan 621
Meylsiz statistik qiymət 621
--- orta mənada 622
--- , risk funksiyasına nəzərən 622
Meylsizlik statistik oyunlar nəzəriyyəsində 622
- (yi) statistik prosedurun 622
Məhdud şaxələnən proses 623
- təkrar loqarifm qanunu 623
- təsadüfi xətti operator 623
- variasiya 623
Məhdudlayıcı 623
Məhdudluq ehtimala görə 623
Məxsusi ədədlər, empirik kovariasion matrislərin kənar məxsusi ədədləri 623
- / cırlaşmayan paylanma 623
Məqbul həlledici funksiya 623
- kriteri 623
- matris 624
- plan 624
Məqbul statitsik qiymət 624
--- xətti 624
- topologiya 624
- yerinidəyişmə(si) ölçünün 624
- zolaq 625
Məqbulluq(ğu) həlledici funksiyanın 625
- statistik kriterinin 625
- statistik prosedurun 625
- təsnifat prosedurunun 626
Məqsədyönlü proyeksiyala(n)ma(sı) çoxölçülü verilənlərin 626
Məlumat 626
Məlumatlar mənbəi 626
-- çoxkomponentli 627
-- Markov 627
-- yaddaşsız 627
Məlumatların bərpaolunma dəqiqliyi 627
- hasilolunma sürəti 628
- kvantlanması 628
Mənbəi məlumatların 628
Mənbələr və kanallar şəbəkələri 628
Mənfi binomial paylanma 629
- hiperhəndəsi paylanma 630
- korrelyasiya 630
- müəyyən funksiya 630
- müəyyən nüvə 631
- polinomial paylanma 631
Mənsubluq funksiyası 631
Mərkəz(i) təsadüfi kəmiyyətin 631
Mərkəzi qarışıq moment 631
Mərkəzi limit teoremi 631
--- Banax fəzasında 634
--- qruplarda 636

- - - Markov prosesləri üçün 637
- - - təsadüfi çoxluqlar üçün 637
- - - təsadüfi determinantlar üçün 637
- moment 637
Mərkəzlənmə və normalanma(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının 638
Mərkəzlənmiş korrelyasion funksiya 638
- qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası 638
- qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası təsadüfi proseslərin 638
Məşğulluq periodu 638
Mikrokanonik paylanma 638
Miqrasiya şaxələnən prosesdə 638
Miqyas çevirməsi 638
Miqyas parametri 638
- - ; statistik qiymət 638
Minimaks həll (qərar) 639
- kriterisi 639
- risk 639
- statistik qiymət 639
- strategiya statistik oyunlar nəzəriyyəsində 639
- yanaşma 639
Minimakslıq(ğı) statistik prosedurun 639
- kriterisi 640
Minimal ekssessiv funksiya 640
- həlledici funksiya 640
- kafi statistika 640
- kəsiyi, qrafın 640
- metrika 640
- metrikalar metodu 641
- məsafə funksionalı / MM funksional 641
- məsafə statistik qiymət 641
- tam sinif(fi) kriteriləri 641
- tam sinif(fi) strategiyaların 641
- zənciri, qrafın 641
- zəncirlər və kəsiklər metodu 641
Minkovski bərabərsizliyi 641
- əmsəlləri 642
- fəzası 642
- funksionalı 642
- gözlənilən ölçüsü 642
Minlos teoremi 643
Mizes bərabərsizliyi 643
Moda 643
Modal – meylsiz statistik qiymət 643
Model 643
F – **model** 643
XY - **model** 643
XYZ - **model** 643
$P[\varphi]_2$ – **modelləri, kvant meydan nəzəriyyəsinin** 643
Modelləşdirilməsi, təsadüfi kəmiyyətlər və funksiyaların 644
Modelləyici formula 645
Modulyasiya və demodulyasiya 645
Modulyasiyalanmış siqnal 646
Moment 646
- ölçüsü nöqtəvi prosesin 647
- spektral sıxlığı 648
- spektri 648
Momentlər funksiyası 648
Momentlər metodu 649
- - riyazi statistikada 649
Momentlər problemi 649
- - qüvvət üstlü 649
Monoton artan hadisələr ardıcıllığı 649
- azalan hadisələr ardıcıllığı 649
- çoxluqlar sinfi 649
- doğruyaoxşarlıq nisbəti 650
- invariant 650
- paylanma 651
- strukturu, sistemin 651
Monte – Karlo metodu 651
- - - ; alqoritmin zəmanətli dəqiqliyi 652
- - - ; elliptik tənliklərin həlli 652
- - - ; xətti tənliklərin həlli 652
- - - ; qeyri–xətti tənliklərin həlli 652
- - - ; statistik paylanmanın naməlum sıxlığının qiyməti 652
- - - ; zəruri işin həcmi 652
Morqan ədədləri 652
Mozaika 652
Mövsüm dəyişmələri 652
- effekti 653
- modeli / Harris mövsüm modeli 653
Muavr – Laplas teoremi 653
Mud kriterisi 653
Multiekstremal eksperimentlərin planlaşdırılması 654
Multikollinearlıq 654
Multimodal paylanma 654
Multinomial paylanma 654
Multiplikativ erqodik teorem 654
- funksional 655
- funksiya 655
- model 655
Multivariant nöqtəvi proses 655
Mur qrupu 655
Mustafa teoremi 655
Mühüm element(i) sistemin 655
- prediktorların seçilməsi 655
- sinfi, vəziyyətlərin Markov zəncirinin 656
Mühüm vəziyyət(i) Markov zəncirinin 657
Mühümlük kriterisi 657
- ölçüsü 657
Mükəmməl ölçü 657
Müntəzəm approksimasiya, semimartinqal 658
- ən güclü kriteri 658
- faktor eksperiment 658
- inteqrallanan funksiya 658
- inteqrallananlıq 658
- kəsilməz semi - qrup 658
- kvadratik metrika 658
- metrika 659
- optimal plan 659
- optimal strategiya 659
- paylanma 659
- sonsuz kiçilənlik şərti 660
- speysinq 660
- tutarlı qiymətləndirmə 660
Müntəzəm yığılma(sı) empirik paylanmaların 660
- - paylanmaların 661
Mürəkkəb hipotez 661
- Markov zənciri 661
Mürəkkəblik(yi) kodlama və dekodlamanın 661
- paylanmanın modelləşdirilməsinin; statistik qiymət 661
- sonlu obyektlərin 661
- sözün 661
Müsbət müəyyən funksiya 661
- müəyyən nüvə 662
- vəziyyət 662
- vəziyyətlər sinfi Markov zəncirinin 662
Müstəvi – sıxlaşmış ailə(si) ehtimal ölçülərinin 662
Müşahidə xətası 662
- olunan ölçü 662
Müşahidələnən 662
Müşahidələrin davamolunma çoxluğu 663
- dayandırılma çoxluğu 663
- yenidən işlənilməsi 663
Müşayiətedici funksional 663
- sonsuz bölünən paylanma 664
Mütləq kəsilməz paylanma 664
- - təsadüfi kəmiyyət 664
- kəsilməzlik 664
- kəsilməzliyi, ölçülərin 665
Mütləq moment 665
- - r tərtib 666
- paylanma(sı) Markov zənciri və ya Markov prosesinin 666
- psevdomoment 666
- şkala 666
- tezlik 666

N

Nadaraya – Vatson statistik qiyməti 667
Nat 667
Natamam blok planı 667
- girişli xidmət sistemi 667
- latın kvadratı 667
Natural additiv funksional 667
- parametr 667
- parametrizasiya 667
- psevdomoment 667
- vahid(i) informasiya miqdarının, nat 667
Navye – Stoks stoxastik differensial tənliyi 667
Naykvist tezliyi 667
Nelson meydanı 667
Neyman erqodik teoremi 667
- $C(\alpha)$ – kriterisi 668
- metodu, etibarlı intervalların 668
- strukturu 668
- – Pirson lemması 669
- – Ulam sxemi 669
Nəsillər metodu 669
Nəzarət / kontrol kartı 669
- olunan dəyişənlər(i) reqression eksperimentin 669
- / kontrol planı 669
- – ehtimali xassə 669
- korreloqram 669
Nisbi bikompakt çoxluq 669
- effektivlik(yi) kriterinin 670
- entropiya 670
- kompakt çoxluq 670
- kompaktlıq(ğı) ölçülər ailəsinin 670
- tezlik 670
Nişan 670
Nişanlanmış nöqtəvi proses 670
Nişanlar fəzası 670
Nominal əlamət 670

- şkala 670
Nomoqram 670
Norma(sı) təsadüfi elementi 671
Normal approksimasiya 671
Normal cazibə oblastı dayanıqlı G qanununun 671
-- zonası 671
- fəza 671
- keçid funksiyası 671
- Markov prosesi 672
- paylanma 672
- sinfi, çoxluqların 673
- tənliklər sistemi 673
- təsadüfi element 674
- təsadüfi kəmiyyət 674
- tipli proses 674
- yığılma zonası 674
Normalanma(sı) təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının 674
Normalanmış Adamar matrisi 674
- Bul cəbri 674
- korrelyasion funksiya 674
- qarşılıqlı korrelyasiya funksiyası təsadüfi proseslərin 674
- latın düzbucaqlısı 674
- ölçü 674
- təsadüfi kəmiyyət 674
Nöqtəvi paylanma qanunu təsadüfi çoxluğun 675
Nöqtəvi proses 675
-- ;aparıcı funksiya 676
-- ;asılı olmayan seyrəklənmə 676
-- asılı olmayan yerinidəyişmə 676
-- ən sadə 676
-- ;intensivlik 676
-- keçmişi məhdud təsirli 676
-- (i) Koks 676
-- ;kompensator 676
-- qrupda 676
-- ;moment ölçüsü 677
-- multivariant 677
-- nişanlanmış 677
-- ordinar 677
-- (i) Puasson 677
-- sadə 677
-- sonsuz bölünən 677
-- stasionar 677
- statistik qiymət 677
Nöqtəvi təsadüfi meydan 678
-- proses qoyulmuş təsadüfi kəmiyyətlərli 678
Növbə 679
- ;uzunluğu 679
- ;uzunluq kəmiyyəti 679
Növbələr nəzəriyyəsi 679
Nüvə 679
- (si) potensialların 679
α – - (si) potensialların 679
Nüvə statistik qiyməti 679
--- sıxlığın 679

O

Oxşar kriteri 680
- oblast 681
- statistika 681
Oxşarlıq nəzəriyyəsi 681
Oqava konstruksiyası 681
Omeqa – kvadrat paylanma, ω^2 - paylanma 681
Operativ hazırolma əmsalı 682
Operativ xarakteristika(sı) alternativ əlamətə görə nəzarət planının 682
-- kriterinin 682
Operator dayanıqlı paylanma 682
- metodu 683
- ölçü 683
- stoxastik differensial tənlik 683
Operatorqiymətli ölçü 685
Opsional çoxluq 685
- proses 685
- proyeksiyası, prosesin 685
Optimal an 685
- Beyes həlli / π – optimal həll 685
Optimal dayanma 686
-- (sı) təsadüfi prosesin 686
ε – -- anı 686
- ehtiyatda saxlama 686
- həlledici funksiya 687
- interpolyasiya meteorologiyada 687
- kriteri 688
Optimal strategiya 688
ε – **optimal strategiya** 688
Optimallığın yoxlanılması, planın 688
Optimallıq(ğı) statistik prosedurun 688
- prinsipi stoxastik 689
- tənliyi 689
Ordinal dəyişən 689
- əlamət 689
- yanaşma 689
- model(i) 689
- nöqtəvi proses 689
Ordinarlığı, axının 689
Orey teoremi 690
Ornşteyn metrikası 690
- – Ulenbek prosesi 690
Orta əlaqə alqoritmi 691
- faydalılıq 691
- gəlir kriterisi 691
- işlənilmə müddəti 691
- kəmiyyət 691
k – **orta kəmiyyətlər** metodu 691
-- vektoru 691
Orta qiymət 691
-- (i) μ ehtimal ölçüsünün 691
-- (i) təsadüfi çoxluğun 692
Orta qiymət(i) **/ riyazi gözləmə**(si) təsadüfi elementin 692
---- təsadüfi funksiyanın 692
---- təsadüfi kəmiyyətin 692
- metrika 692
- modulyar reqressiya 692
Orta müddət(i) qayıdışın 692
-- udulmaya qədər 692
- mütləq yayınma(sı) seçimin 692
- nisbi yayınma(sı) seçimin 692
- risk 692
- yaşama müddəti 692
- yığılma çəkili 693
Ortalanma(sı) oyunun 693
- prinsipi təsadüfi əmsallarlı differensial operatorlar üçün 693
Ortalanmış energetik spektri 694
- güc spektri 694
- korrelyasion funksiya 694
Ortalanmış spektral funksiya 694
-- sıxlıq 694
- yayınma 695
Ortaölçülü çoxluq 695
Ortoqonal ayrılış(i) təsadüfi prosesin 695
- bloklar 695
- cədvəl 695
- fırlanma(sı) faktor oxlarının 695
- funksiyalar empirik 695
- kublar 695
- kvadratlar 696
- latın düzbucaqlıları 696
- latın kvadratı 696
- planlaşdırılma 696
- reqressiya 696
- təsadüfi matris 696
Ossilyar təsadüfi proses 697
Oyun statistik 697
Oyunu, iki şəxsin 697

Ö

Ölçmə / ölçülmə 700
- xətası 700
Ölçmə şkalası 700
-- təsnifat 700
Ölçmələr nəzəriyyəsi 700
Ölçü 701
- asılı olmayan qiymətlərli 704
- (sü) birölçülü diffuziyanın 704
- ;daşıyıcısı 704
- (sü) kriterinin 704
- ;məqbul yerinidəyişmə 704
- ortoqonal qiymətlərli 704
- təsadüfi 704
- ;variasiyası 704
σ – **ölçü** 704
Ölçülən axın 704
- bölgü 704
Ölçülən çoxluq 704
C – **ölçülən çoxluq** 704
- fəza 704
Ölçülən funksiya 704
σ – **ölçülən funksiya** 705
- inikas 705
- qrup 705
- paralelepiped 705
- seçmə 705
- semi - axını 705
- vektor fəza 705
Ölçülənlik Boxnerə görə 706
- Lebeqə görə 706
- Luzinə görə 706
Ölçülərin qovuşması 706
Ölçülməyən çoxluq 706
Ölçülü fəza 706
dim. – ölçülük / dimensionluq 707
dim. – ölçünün azaldılması 707
Öləzilənməsi Markov prosesinin 707
Öngörül çoxluq 707
- dayanma anı 707
- xarakteristika(sı) martinqalın 707
- kvadratik variasiya(sı) martinqalın 707
- Markov anı 707
- proses 707
- proyeksiyası, prosesin 707
- təsadüfi proses 708

Örtüm ehtimalı / etibarlı ehtimal 708
Ötüm / eksses anı 708
- - kəmiyyəti 708
- müddəti / eksses 708
Örtürmə əmsalı 708
Ötürücü funksiya 708
Ötürücülük qabiliyyəti, kanalın 708
Öyrədici seçim 709
Özü-özünə ayrılan paylanma 709

P

τ **– paçka** 710
Palm axını 710
- düsturları 710
- funksiyaları 710
- paylanması 710
Palm – Xinçin teoremi 710
- - tənlikləri 711
Parabolik interpolyasiya 711
- reqressiya 711
Parametrik model; spektral sıxlığın identifikasiyası 711
- - ;tərtibin seçilməsi 712
- ölçüsü, axının 713
- spektral statistik qiymət 713
Parçalanma metodu 713
Parçalayıcı an 714
Pareto paylanması 714
- planlar çoxluğu 714
Parzen korrelyasion pəncərəsi 714
- kriterisi avtoreqressiv ötürücü funksiyanın 714
- statistik qiyməti 714
Paskal paylanması 714
Passiv eksperiment 714
Patnayk çevirməsi 714
Payerls şərti 715
- tənliyi 715
Paylanma 715
- , bircins fəzada ehtimal paylanması 715
- (sı) ehtimalın 716
- (sı) empirik kovariasion matrisin məxsusi ədədlərin vektorlarının 717
- kvazisimmetrik 717
- (sı) təsadüfi çoxluğun 717
- (sı) təsadüfi kəmiyyətin 717
- (sı) təsadüfi kəmiyyətlərin funksiyasının 717
- (sı) təsadüfi qapalı çoxluğun 718
- (sı) təsadüfi matrisin 718
B **– paylanma** 718
F **– paylanma** 718
χ **– paylanma** 718
χ^2 **– paylanma** 718
Γ **– paylanma** 718
ω^2 **– paylanma** 718
t **– paylanma** 718
T^2 **– paylanma** 718
U **– paylanma** 718
W **– paylanma** 718
z **– paylanma** 718
Paylanma funksiyası; asimptotik düsturlar 718
- - təsadüfi kəmiyyətin 718
- indeksi 719
- qanunu 719
Paylanma sıxlığı; asimptotik düstur 719
- - çoxölçülü 719
Paylanmalar eynitipli 719
- semi - qrupu 719
- tipi 720
Paylanmaların kompozisiyası 720
- konvolyusiyası 720
- qarışığı 720
- yığılması 720
Paylanmanın atomu 720
- qalığı 720
- mərkəzi 720
- səpələnməsi 720
Paylanmış gecikmələr modeli 720
Periodik korrelyar təsadüfi proses 721
- Markov zənciri 722
- paylanmış təsadüfi proses 722
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 722
Periodoqram 722
- statistikası spektral sıxlığın 723
Periodu, yaşama müddətinin 723
Perkolyasiya 723
- nəzəriyyəsi 723
- / sızma prosesi 724
Perron kökü 724
Persentil 724
Pettis inteqralı 724
- teoremi 724
Pillə anı 724
- - birinci (k-cı) 724
- - paylanması 724
Pillə boyu 724
- - birinci (k-cı) 724
- - paylanması birinci (k-cı) 724
- cütü 724
- indeksi birinci (k-cı) 724
- nöqtəsi, birinci (k-cı) ciddi üst 724
- nöqtəsi, birinci (k-cı) üst 724
Pilləvari Markov prosesi 724
Pilləvari təsadüfi proses 724
- - - asılı olmayan artımlarlı 725
Piroqov – Sinay teoremi 725
Pirson çevirməsi 726
- əyriləri 726
- paylanmaları 726
- ranq korrelyasiya əmsalı 727
- teoremi 727
Pisarenko spektral statistik qiyməti 727
Pitmən statistik qiyməti 727
Plan 728
Φ **– Plan** 728
- matrisi 728
Planlaşdırılması, eksperimentin 728
- - ardıcıl 730
- - hipotezlərin yoxlanılması üçün 730
- - riyazi fizikanın tərs məsələləri üçün 730
- - eksperimentlərin 731
- , imitasion eksperimentin 731
- , multiekstremal eksperimentlərin 732
- , süzgəcləyici eksperimentlərin 732
Planşerel eyniliyi 732
Polinomial bircins xaos 732
Polinomial / multinomial əmsal 732
- - paylanma 732
- reqressiya 732
- - sxem 732
- yerləşməsi, hissəciklərin 732
Polispektr 733
Polispektral funksiya 733
- sıxlıq 733
Pollaçek – Spitser eyniliyi 733
Polski fəzası 733
Polyar çoxluq 733
- korrelyasion funksiya 733
- metodu, korrelyasion analizin 734
Populyasion genetikanın ehtimal paylanmaları 734
Potensial 738
α **– potensial** 738
- (ı) Gibbs meydanının 738
- martinqallar nəzəriyyəsində 739
- əngələdayanıqlılıq 739
- funksiya 739
Potensial nəzəriyyəsi Markov prosesi üçün 739
- - Markov zənciri üçün 742
Poya hesablama nəzəriyyəsi 743
- paylanması 743
Poya teoremi 744
- - qeyri-məhdud təsadüfi dolaşmalar üçün 744
Pozulma anı 744
Prediktant 744
Prediktor 744
Prediktorların ən yaxşı altçoxluğunun seçilməsi 744
Prefiks çoxluq 744
Prinsipial tay 744
Prioritet 744
Prioritetli sistem 744
Prodakt – vəziyyət 744
Proxorov kriterisi 744
- metrikası 745
- şərti 745
- teoremi təsadüfi proseslər üçün 745
Proqnozlamanın Braun metodu 745
Proqnozlanması, təsadüfi proseslərin 745
Proqnozu, havanın ehtimali 745
- - kateqorik 745
- - keyfiyyətin statistik qiyməti 745
- - statistik 746
Proqressiv ölçülən proses 746
Prosentil 746
$(E,\ h)$ **– proses** 746
(G,h) **– proses** 746
$(G,\ h_u)$ **– proses** 746
$(M_\lambda,\ h)$ **– proses** 746
h **– proses** 746
Protominimal metrika 746
Proyeksiya(sı) ranq statistikasının 746
- təsadüfi çoxluğun 746
Proyektiv limit ölçülərin proyektiv sisteminin 746
- sistemləri, ölçülərin 747
- statistik qiymət 747
Psevdointeqral 747
Psevdomoment 748
Psevdomomenti, fərq 748
Psevdotəsadüfi ədəd 748
Puankare teoremi qayıdış haqqında 748
Puasson axını 748

- - aparıcı funksiya 748
- Bul modeli 748
- cəmləmə düsturu 748
- həndəsi prosesi 749
- küyü 749
- nöqtəvi prosesi 749
- ölçüsü 750

Puasson paylanması 750
- - lokal kompakt Abel qrupunda 751
- - mürəkkəb/ümumiləşmiş 751
- - ümumiləşmiş 751

Puasson prosesi 752
- - impulsal 752
- - ümumiləşmiş 752
- şəbəkəsi 753
- teoremi 753
- təsadüfi meydanı 753

R

Rabitə kanalı 754

Rademaxer ardıcıllığı 754
- teoremi 754

Radon fəzası 754
- ölçüsü 754

Radon – Nikodim xassəsi Banax fəzasının 754
- - teoremi 755
- - törəməsi 755

Radonlayıcı operator 755

Randomizasiya 756
- (sı) kriteriləri, kriterilərin yerdəyişmələri 756
- (sı) oyunun 756

Randomlanmamış həll 756
- həlledici funksiya 756
- kriteri 756
- - strategiya 756

Randomlanmış bloklar planı 756

Randomlanmış həlledici funksiya 756
- - qayda 756
- kriteri 756
- oyun 756
- plan 756
- statistik qiymət 756
- strategiya, qarışıq strategiya 757

Ranq korrelyasiya əmsalı 757
- korrelyasiyası 757
- kriterisi 758
- statistikası 758

Ranqlanma 758

Ranqlar cəmi kriterisi 758
- vektoru 758

Rao kriterisi 759

Rao – Blekuell teoremi 760
- - – Kolmoqorov teoremi 760

Rao – Kramer bərabərsizliyi 760
- - – Volfovits bərabərsizliyi 760

Raykov teoremi 760

Realizasiya 760
- (sı) təsadüfi funksiyanın 760

Reduksiyası, verilənlərin (əlamətlərin) 760

Redüslənmiş (standart növ) latın kvadratı 761
- sxemi, eksperimentin 761
- şaxələnən proses 761

Regenerasiya 761
- anı 761
- müddəti 761

Regenerativ proses 761
- - ; dayanıqlılıq 762

Rekord qiymət 762

Rekurrent axın 762
- ən kiçik kvadratlar metodu sonlu yaddaşlı 762
- hadisə 763
- kod 763
- qiymətləndirmə 763
- statistik qiymət 764

Reqression analiz 764
- dəyişəni, reqressor 765

Reqression eksperiment 765
- - matrisi 766
- eksperimentlərin planlaşdırılması 766
- əmsallar matrisi 769
- model 771

Reqression proqnoz 771
- - xətası 771
- statistik qiymət 771

Reqressiya 771
- düzxətti 771
- əmsalı 771
- əyrisi 771

Reqressiya funksiyası 771
- - ; xətti interpolyasiya 771
- - ; müşahidələr üzrə statistik qiymət 771
- xətti / əyrisi 772
- matrisi 772
- müstəvisi 772
- səthi 772
- spektri 772
- tənliyi 772

Reqressoqram 773

Reqressor 773

Requlyar birölçülü diffuziya 773
- çoxluq 773
- Dirixle forması 773
- Markov zənciri 773
- nöqtə çoxluq üçün 773
- ölçü 773
- sərhəd nöqtəsi 773
- şərti ehtimal 773
- təsadüfi meydan 773

Requlyarlanma sərhədi 773

Requlyarlığı, ölçünün 773

Requlyarlıq(ğı) təsadüfi prosesinin trayektoriyasının 773

Reley feydinq / donması 773
- – korrelyasion funksiya 773
- metodu korrelyasion funksiyaların təyin olunmasının 774
- paylanması 774
- prosesi 775

Renormalizasion çevirmə 775
- qrup 775

Renyi entropiyası 776
- kriterisi 776
- paylanma funksiyası 777
- statistikası 777

Reprezentativ xəta 777
- seçim 777

Restriktiv statistik qiymət 777

Revuz ölçüsü 777

Rey prosesi 777
- rezolventi 777
- – Nayt kompaktifikasiyası 778

Rezolvent 778
- (i) asılı olmayan artımlarlı təsadüfi prosesin 778
- eyniliyi 778
- tənliyi 778

Rəqəmsal modulyasiya 778

Ridc statistik qiymət 778

Riçardson üçdə dörd qanunu 778

Riman informasion metrikası 778

Risk 779
- minimaks 779
- (i) strategiyanın 779
- funksiyası 779

Riss ayrılışı 779

Riyazi gözləmə 779
- - (si) empirik paylanmanın 780
- - (si) təsadüfi çoxluğun 780
- - (si) təsadüfi elementin 780

Riyazi statistika 780
- - ; asimptotik metodlar 786
- - ; qeyri-parametrik metodlar 789
- statistikanın cədvəlləri 790
- stereologiya 791

Robast statistik qiymət 791

Robastlıq(ğı) statistik prosedurun 793

Robbins – Monro proseduru stoxastik approksimasiyanın 794

Rossberq teoremi 795

Rozenblatt – Parzen statistik qiyməti paylanma sıxlığının 795

S

Sabit kod, zaman üzrə 796
- taktlı interval 796

Sadə hipotez 796
- inikas(ı) Banax fəzasının 796
- kəsiyi, qrafın 796
- metrika 796
- nöqtəvi proses 796
- təsadüfi kəmiyyət 796
- zənciri, qrafın 796

Sağ Markov prosesi 796
- Palm paylanması 797
- təsadüfi dolaşma 797

Sanki Borel funksiyası 797
- invariant kriteri 797
- separabelqiymətli inikas 797
- stasionar təsadüfi proses 797

Sapoqov teoremi 797

Sayıcı ölçü(sü) nöqtəvi prosesin 797
- proses 797

Sazonov xassəsi Banax fəzasının 798
- teoremi 798
- topologiyasi 798

Seçilməsi, ən yaxşı obyektin 798

Seçim 798
- ; açım 799
- kəsik 799
- laylanmış 799
- reprezentativ 799
- senzurlanmış 799
- ; səpələnmə 799

Seçimi asimmetriya əmsalı 799
- baş komponentlər 799
- bloklar 799
- dispersiya 799
- ehtimal fəzası 799
- eksses əmsalı 799
- funksiya 800
  - xarakteristika 800

- intervallar (aralıqlar) 800
- kəsilməzlik(y i) t ə s a d ü f i p r o s e s i n 800
- korreloqram 800
- korrelyasion funksiya 800
- korrelyasiya əmsalı 800
- kovariasion funksiya 801
- kovariasiya 801
- kvantil 801
- median 801
- metod 801
- moment 802
- nöqtə 802
- orta 802
- paylanma 803
- reqressiya əmsalı 803
- statistik araşdırma 803
- tezlik 804
- vahid 804
- verilənlərin çəkiləndirilməsi 804
Seçimin həcmi 804
Seçki məsələsi 804
Seçmə metodu 805
Sehrli kvadrat 805
Selektor 805
Semi - additivlik 805
Semi - axın 805
Semi – cəbri, çoxluqların 805
Semi – dairəvi qanun 805
Semi - dayanıqlı paylanma q r u p d a 805
- proses 805
Semi – deterministik kanal 805
Semi – halqası, çoxluqların 805
Semi - interkvartil genişlik 805
Semi - invariant 805
- spektral sıxlıq 806
Semi - kəsilməz birinci təsadüfi proses a s ı l ı o l m a y a n a r t ı m l a r l ı 806
- yuxarıdan model 806
- yuxarıdan (aşağıdan) sonsuz bölünən proses 806
Semi - qrup 806
Semi – Markov prosesi 806
- - i d a r ə o l u n a n 807
- - ; q e y d o l u n m u ş v ə z i y y ə t - d ə q a l m a m ü d d ə t i 810
- - q ə r a r l a r ı n (h ə l l ə r i n) q ə b u l e d i l m ə s i 810
- təsadüfi çoxluğu 810
Semi – polyar çoxluq 810
Semi – variasiya(s ı) v e k t o r ö l ç ü n ü n 810
Semimartinqal 810
- ; l i m i t t e o r e m l ə r i 810
Semimartinqalın filtrasiyası 810
Sentil 810
Senzurla(n)ma 810
Senzurlama; t ə s a d ü f i 811
- anı 811
- anı, potensial 811
Senzurlanma e v o l y u s i o n 811
Senzurlanmış seçim 811
Seperabel σ – cəbri 811
- münasibət 811
- proses 811
Serial korrelyasiya əsmalı 812
Seriyalar kriterisi 812
- sxemi, üçbucaq sxemi 812
Sevastyanov düsturu 813
- prosesi 813
Seyrəklənmə 813
- (s i) a x ı n ı n 813
Seyrəklənmiş / zərif çoxluq 813
Səda funksiyası 814
- - , filtrin 814
Səhv, xəta, fərq 814
- dekodlama ehtimalı 814
Səpələnmə(s i) p a y l a n m a n ı n 815
- s e ç i m i n 815
- t ə s a d ü f i k ə m i y y ə t i n 815
- ellipsoidi 815
Səpələnmiş ölçü 815
Sərbəst enerji 815
- qaz 816
- Markov meydanı 816
- meydan 816
Sərhəd – çıxış 816
- – giriş 816
- məsələləri t ə s a d ü f i d o l a ş m a l a r ü ç ü n 816
- prosesi 818
Səsvermə prosesi 818
Sferalar üzrə dolaşmalar metodu 818
Sferik Bhattaçarya – Rao məsafəsi 819
- simmetrik paylanma 819
- Viner prosesi 820
Sferiklik kriterisi 820
Sıçrayış anı 820
Sıçrayışlar ölçüsü 820
Sıçrayışvari Markov prosesi 820
- proses i d a r ə o l u n a n 821
- təsadüfi proses 821
Sıfır çoxluq 821
- sinfi, vəziyyətlərin M a r k o v z ə n c i r i n i n 821
Sıfır – vahid qanunu 821
- - - M a r k o v p r o s e s l ə r i ü ç ü n 821
- vəziyyəti M a r k o v z ə n c i r i n i n 822
Sıfıral seriyalar sxemi 822
Sığortalamanın riyazi nəzəriyyəsi 822
Sıx ölçü 823
- yerləşmə sərhədi 823
Sıxlığı, çıxış ehtimalının 823
- ehtimal paylanmasının 823
- ölçülər ailəsinin 823
Sıxlığı, paylanmanın; a s i m p t o t i k d ü s t u r 824
- - ; m ü ş a h i d ə l ə r ü z r ə s t a t i s t i k q i y m ə t 824
- , stoxastik nüvənin 825
Sıxlıq(ğ ı) k e ç i d e h t i m a l l a r ı n ı n 825
- s t o x a s t i k d i f f e r e n s i a l t ə n l i y i n h ə l l i n i n p a y l a n m a s ı n ı n 825
- t ə s a d ü f i m a t r i s i n p a y l a n m a s ı n ı n 825
Sıxlıq, ehtimal sıxlığı 825
- operatoru 826
Sınaq 827
Sınaqların asılı olmamazlığı 828
Sırf artım prosesi 828
- atomik ölçü 828
- kəsilən martinqal 828
Sızma / perkolyasiya nəzəriyyəsi 828
Siqma – cəbri, çoxluqların 828
- - , hadisələrin 828
Siqma cəbrlər / σ –cəbrlər axını 828
- - cəmi / birləşməsi 828
- – topoloji fəza 828
Siqnal / küy nisbət 828
Siqnalın seçilib ayrılması ə n g ə l l ə r f o n u n d a 828
Siqnatur(u) y e r d ə y i ş m ə n i n (p e r m u t a s i o n u n) 828
Silindr 828
F – - 828
Silindrik σ – cəbr 828
- çoxluq 829
- ehtimal 829
- ölçü 829
Simmetrik bölünən statistika 830
- faktor eksperiment 830
- Fok fəzası 830
- kanal 830
- Qauss paylanması 830
- paylanma 830
- stoxastik differensial tənlik 830
- stoxastik inteqral 830
- təsadüfi matris 830
Simmetrizasiya 830
- bərabərsizlikləri 831
- metodu 831
Simpleks metod 831
Simpson paylanması 831
Sinay bilyardı 831
Sinxron çoxgirişli kanal 832
- kanal 832
- nöqtəvi proseslər 832
Sinqulyar ayrılış 832
- komponenti, ölçünün 832
Sinqulyar paylanma 832
- - funksiyası 832
Sinqulyarlığı, ölçülərin 832
K – **sistem** 832
Y – **sistem** 833
Sistematik xəta 833
Siyahı dekodlaması 833
Skalyar cırlaşan ölçü 834
- ölçülən inikas 834
Skedastik xətt 834
Skeylinq münasibət 834
- – proses 834
Skoroxod stoxastik törəməsi 834
- topologiyası 2 - c i n ö v k ə s i l m ə s i o l m a y a n f u n k s i y a l a r ı n $D[0,1]$ f ə z a s ı n d a 834
Slepian bərabərsizliyi 835
- müqayisə teoremi 835
Slustki erqodik teoremi 835
- limit sinusoidal teoremi 836
- şərti 836
- – Yul effekti 835
Smirnov kriterisi 836
- paylanması 837
- statistikası 837
- teoremi 837
Snedekor paylanması 837
Sol Palm paylanması 837
- təsadüfi dolaşma 837
Son qərar funksiyası 837
Sonlu – additiv çoxluq funksiyası 837
- bölgü 837
- ehtimal avtomatı 837
- Furye çevirməsi 837
- Markov zənciri 837
- ölçü 838
σ – - ölçü 838
σ – **Sonlu ölçülü** altçoxluq 838
- - çoxluq 838
- - paylanma 838

- təsadüfi çoxluq 838
- variasiya 838
Sonsuz bölünən nöqtəvi proses 838
Sonsuz bölünən paylanma 838
--- , asimptotikası 840
--- ; ayrılış 840
--- Banax fəzasında 841
--- birtərəfli 841
--- qrupda 841
--- qrupda; daxilolma problemi 841
--- ; Laplas çevirməsi 842
--- müşayiətedici 842
--- ; struktur 842
M – --- 842
Sonsuz bölünən paylanmaların ikililik xassəsi 843
--- qarışması 844
Sonsuz bölünən proses 844
--- aşağıdan(yuxarıdan) semikəsilməz 844
-- təsadüfi çoxluq 844
- kiçilənlik şərti 844
- latın kvadratı 845
Spektr(i) dinamik sistemin 845
- ; faza spektri 845
- (i) koherentlik 845
- (i) Kolmoqorov 845
- kumulyativ 845
- (i) qarşılıqlı faza 845
- (i) planın 845
- (i) prosesin 845
- (i) sonsuz bölünən paylanmanın 845
- (i) stasionar təsadüfi prosesin 845
- (i) təsadüfi bircins meydanın 845
- (i) təsadüfi prosesin 845
Spektal analiz(i) təsadüfi proseslərin və meydanların 845
-- zaman sıralarının 847
- analizator(u) stasionar təsadüfi prosesin 848
Spektal ayrılış(ı) kovariasion matrisin 849
-- təsadüfi funksiyanın 849
Spektral funksiya 851
-- evolyusionar 851
-- kumulyativ 851
-- qarşılıqlı 851
-- ortalanmış 851
-- (sı) sonsuz bölünən paylanmanın 851
-- ; statistik qiymət 851
-- (sı) təsadüfi matrisin 851
Spektral moment 852
-- ölçüsü 852
- nəzəriyyələr(i) qeyri–stasionar təsadüfi proseslərin 852
- ölçü 854
- pəncərə(si) 854
- semi - invariant 854
Spektral sıxlıq kumulyativ 856
-- qarşılıqlı 856
-- ; qeyri–parametrik statistik qiymət 856
-- ortalanmış 858
-- (ğı) n – ölçülü fəzada stasionar təsadüfi prosesin və ya bircins təsadüfi meydanın 858
Spektal tiplər asılı olmayan 859
-- dizyunkt 859
-- (i) ölçünün 859
Spektoqram 859
Spesifikt faktor 859
Speysinq 859
Spirmen əmsalı ranq korrelyasiyasının 859
Spitser – Roqozin eyniliyi 860
Splayn – statistik qiymət 860
Stabil statistik qiymət 860
Standart Braun hərəkəti prosesi 860
- xəta 860
- Markov prosesi 860
- Viner prosesi 860
- yayınma 860
Standartizasiya 860
Stasionar artımlarlı təsadüfi proses 861
- əlaqəli təsadüfi proseslər 861
- həndəsi proses 861
- kanal 861
- kovariasion funksiya 861
- kovariasiya(sı) təsadüfi çox-luğun 861
- Markov prosesi 861
- – nişanlanmış nöqtəvi proses 861
- nöqtəvi proses 861
- ölçü 861
Stasionar paylanma 861
-- (sı) bircins Markov zəncirinin 862
Stasionar proses; statistik məsələlər 862
-- ümumiləşmiş 862
- Puasson axını 862
- strategiya 862
- təsadüfi çoxluq 862
- təsadüfi proses 862
Stasionar təsadüfi proses; böyük ədədlər qanunu 865
--- ; böyük ədədlərin gücləndirilmiş qanunu 865
Stasionarlığı, axının 865
Stasionarlıq geniş mənada 865
Statistik analiz(i) təsadüfi meydanların 865
-- təsadüfi proseslərin 867
Statistik asılı ansambllar 867
-- olmamazlıq 867
-- olmamazlıq(ğı) ansamblların 867
Statistik asılı olmayan ansambllar 867
--- hadisələr 867
- cəm 867
- dayanıqlılığı, tezliklərin 867
- erqodik teorem 867
- həlledici qaydalar kateqoriyası 867
- həllər nəzəriyyəsi 868
- həllərin ümumi nəzəriyyəsi 870
- hidromexanika 871
- hipotez 871
- hipotezlərin yoxlanılması 871
- xarakteristika 874
Statistik kriteri 874
-- ; məqbulluq 874
-- ; tam sinif 874
-- $C(\alpha)$ 875
- qəbul nəzarəti 876
Statistik qiymət 877
-- tam sinif 877
G – **statistik qiymət** 877
G_2 – **statistik qiymət** 877
L – **statistik qiymət** 877
M – **statistik qiymət** 877
R – **statistik qiymət** 879
- qiymətləndirmə 879
- mexanika 881
Statistik məsələlər qruplarda və bircins fəzalarda 883
-- (i) təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinin 884
- model 888
Statistik modelləşdirilmə(s i) xidmət sistemlərinin 888
-- köçürtmə məsələlərinin 888
-- Markov zəncirlərinin 889
- modelləşdirmə 889
- nəzarət, keyfiyyətə 890
- nəzəriyyəsi, qrupların 892
Statistik oyun 892
-- ; invariantlıq prinsipi 894
-- ; kafilik prinsipi 894
-- ; meylsizlik prinsipi 894
- plan 894
- proqnozu, havanın 894
Statistik prosedur 895
-- ; dayanıqlılıq 895
-- ; effektivlik 895
-- ; invariantlıq 895
-- ; meylsizlik 895
-- ; məqbulluq 895
-- minimakslıq 895
-- ; optimallıq 895
-- ; robastlıq 895
-- ; tam sinif 895
- proyeksiyası, planın 896
- seçim 896
- sınaqlar metodu 896
- struktur 896
- test 897
- vəziyyət 897
Statistika 897
- (sı) binar münasibətlərin 897
- bölünən / ayrılan 897
- (sı) interval verilənlərinin 897
- invariant 897
- kafi 897
- kvaziməqbul 897
- (sı) kriterinin 897
- (sı) qeyri-ədədi təbiətli obyektlərin 897
- (sı) qeyri-səlis çoxluqların 899
- oxşar 899
- (sı) ranq 899
- tabe 899
- tam 899
- (sı) təsadüfi çoxluqların 899
- yardımçı 899
- zəruri 900
R/S – **statistika** 900
T^2 – **statistika** 900
Stek – alqoritm 900
- – yaddaş 900
Steyn effekti 900
Stiltyes – Minkovski inteqralı 900
Stirlinq ədədləri 900

Stoxastik axın(ı) diffeomorfizmlərin 901
Stoxastik analiz 901
Stoxastik approksimasiya 901
-- kəsilməz zamanda 903
-- ;modifikasiyalar 904
- ardıcıllıq 905
- asılı olmamazlıq 905
- attraktor 905
- ayrılış(ı) statistik qiymətlərin 905
- bazis 905
Stoxastik differensial 905
-- həndəsə 906
Stoxastik differensial tənlik 910
--- ;diffuzion proses doğuran 914
--- genişləndirilmiş stoxastik inteqral ayrılışı istifadə edən 916
--- ;güclü həll 916
--- ;həllər üçün aşkar düsturlar 916
--- ;həllərin dayanıqlılığı 916
--- ;həllərin güclü yeganəliyi 917
--- ;həllərin zəif yeganəliyi 917
--- ;həllin çevirməsi 917
--- ;həllin momentləri 917
--- ;həllin varlığı haqqında lokal teoremlər 918
--- xüsusi törəmələrli 918
--- ;xüsusi törəmələrli determinik tənliklərlə əlaqə 919
--- ixtiyari meydanlarda 919
--- ;inteqro–differensial operator 920
--- keçirici sərhədli 921
--- ;kiçik parametr üzrə ayrılışlar 921
--- (yi) kvant 921
--- ;limit teoremləri 921
--- (yi) Liuvill 921
--- ;Markov həlləri 921
--- ;müqayisə teoremləri 921
--- (yi) Navye–Stoks 922
--- operator 922
--- ;parametr üzrə differensiallanma 923
--- ;partlayış kriterisi 923
--- sərhədlərli 923
--- simmetrik 924
--- ;sonlu fərqli approksimasiya 924
--- sonlu fəza intervalında 925
--- ;S.d.t-in həllərinə uyğun ölçülərin mütləq kəsilməzliyi 925
--- Stratonoviç formasında; kükrəntilərə nəzərən dayanıqlılıq 925
--- Stratonoviç formasında simmetrik stoxastik differensial tənlik 926
--- ;təkrar loqarifm qanunu 927
--- (yi) tərs 927
--- ;zəif həll 927
- dinamik proqramlaşdırma 927
- eksperiment 928
- eksponent 928
- ekvivalent təsadüfi proseslər 828
- ekvivalentlik 928
- fərqlənməməzlik 929
- hesab 929
- hesablama alqoritmi 929
- həndəsə 929
Stoxastik xətti cəbr 930
-- parabolik tənlik ikinci tərtib 930
-- requlyator 930
Stoxastik inteqral 930
-- çoxqat 931
-- əyrixətli 931
-- genişləndirilmiş 931
-- Hilbert fəzası 931
-- lokal martinqal üzrə 932
-- martinqal ölçüsü üzrə 934
-- martinqal üzrə 935
-- ;paylanmanın qiymətləri 935
-- semimartinqal üzrə 935
-- simmetrik 935
-- (ı) Stratonoviç 935
-- təsadüfi meydanda əyri üzrə 936
-- təsadüfi ölçü üzrə 937
-- tənlik; martinqal və təsadüfi ölçü üzrə 938
- interval 938
Stoxastik kəsilməz keçid funksiyası 938
-- təsadüfi proses 938
- konvolyusion ümumiləşmiş 938
- matris 938
- məhdudluq 939
- model; dayanıqlılıq 939
Stoxastik modellər 939
-- (i) iqlimin 939
- müəyyən proses 940
- / ehtimali nüvə 940
- optimal idarəetmə diskret zamanlı 941
- ölçü 941
- proses 941
- semi - qrup 941
- törəmə 942
Strategiya 942
- ;tam sinif 942
Stratonoviç stoxasik inteqralı 943
λ **– struktur(u) ehtimal metrikanın** 943
ξ **– struktur(u) ehtimal metrikanın** 943
Struktur funksiya(sı) 943
-- sistemin 944
- matris 944
- münasibətlər analizi 945
- ölçü 945
- parametr 945
Styudent kriterisi 945
- paylanması 946
Styudentləndirilmiş qalıq 947
Subadditiv erqodik teorem 947
Sub – Markov inikası 947
- keçid funksiyası 947
- semi - qrupu 947
Submartinqal 947
Substoxastik matris 947
- nüvə 947
Sudakov – Dadli teoremi 947
Supereffektiv statistik qiymət 947
Supermartinqal 948
Superpozisiya metodu 948
Support(u) ölçünün 949
Suslin fəzası 949
Sürət; kod sürəti 949
Sürətli Furye çevirməsi 949
Sürüşən / qeyd olunmuş ehtiyatda saxlama 949
Sürüşən orta metodu 949
-- modeli 950
-- prosesi 950
Süzgəcləyici eksperimentlərin planlaşdırılması 951

Ş

Şaxələnən proses 953
φ **şaxələnən proses** 955
-- ayrılan 955
-- ayrılmayan 955
-- binar 955
-- cırlaşan 955
-- ;cırlaşma 955
-- daxil edilmiş 955
-- diffuzion 955
-- dolaşmalı 956
-- emiqrasiyalı 956
-- enerjili 956
-- ;final ehtimalları 956
-- hissəcikləri qarşılıqlı-təsirli 956
-- hissəciklərinin tipləri sayı sonlu 957
-- immiqrasiyalı 957
-- ;keçid fenomenləri 958
-- kritik 958
-- kritikaltı 958
-- ;kritiklik 958
-- kritiküstü 958
-- qeyri-requlyar 958
-- məhdud 958
-- miqrasiyalı 958
-- redüslənmiş 958
-- requlyar 958
-- ;requlyarlıq 958
-- tənzimlənən 958
-- təsadüfi mühitdə 958
-- ümumi 959
-- yaşından asılı 959
-- zaman üzrə qeyri-bircins 959
Şaxələnən təsadüfi dolaşma 959
-- meydan 960
Şaxələnmə şərti 960
Şaxələr və ehtimallar sərhədləri metodu 960
Şarlye paylanması 960
Şennon düsturu 960
- entropiyası 960
- informasiyası 960
- teoremi 960
Şeppard düzəlişi diskretizasiya üçün 960
-- qruplaşdırma üçün 961
Şerman paylanması 961
Şeyp 961
Şəbəkə(si) ölçülərin 961
- paylanmaların 961
Şəbəkəvari xətti kod 961
- kod 961
- model(i) statistik mexanikanın 961
Şəbəkəvari paylanma 962
-- unimodal 962
Şərti Beyes riski 962

- doğruyaoxşarlıq funksiyası 962
Şərti ehtimal 962
- - paylanması 963
Şərti entropiya 963
- - (sı) bölgünün 963
- faydalılıq 963
- informasiya miqdarı 963
- kriteri 963
- Markov prosesi 964
- orta 964
- paylanma 965
- paylanma funksiyası 965
- riyazi gözləmə 966
- sıxlıq 966
Şibata kriterisi 966
Şoke tutumu 966
Şovene kriterisi 966
Şönberq teoremi 966
Şrödinqer tənliyi təsadüfi potensiallı 966
Şteyner sinfi 967
Ştrassen invariantlıq prinsipi 967
- teoremi 967
- təkrar loqarifm qanunu 967
Şur ifadəsi matrisin 967
Şvarts bərabərsizliyi 967
- – Rissanen kriterisi 967
Şvinger funksiyası 967

T

Tabe statistika 968
Tam ailəsi, paylanmaların 968
- Beyes yanaşma 968
- blok planı 968
- ehtimal düsturu 968
- ehtimal fəzası 968
Tam faktor eksperiment 968
- - plan 968
- işləmə müddəti 968
- qərəzsiz təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı 968
- qərəzsizlik 969
- qrupu, hadisələrin 969
- Latın kvadratı 969
- ölçü 969
- *p* - plan 969
- randomlandırılmış plan 969
- risk 969
- sinif(fi) kriterilərin 969
- statistika 969
- stoxastik bazis 969
- variasiya 969
- variasiya metrikası 969
- yığılma 969
Tamamilə additiv çoxluqlar funksiyası 969
- - ölçü 970
- kəsilən additiv funksional 970
- müsbət inikas 970
- normal fəza 970
Tamamilə ölçülən proses 970
- - proyeksiyası, prosesin 970
- təsadüfi ardıcıllıq 971
Tamamlanma 971
- (sı) ehtimal fəzasının 971
- (sı) ölçünün 971
- prinsipi 971
Tamamlayan hadisə A hadisəsinə 971
Tamgirişli xidmət sistemi 971
Tamlığı, funksiyalar sinfinin Hausdorfa görə 971
Tanınması / müəyyən olunması, obrazların 972
Tauber teoremləri 972
Tay 973
Teleqraf prosesi 973
- siqnalı 973
Termodinamik entropiya 973
- limit keçidi 973
Temperatur Qrin funksiyası 973
Test 973
Teylor stoxastik düsturu 973
Tezlik 973
- ; blok tezliyi 973
- (yi) təsadüfi hadisənin 973
Tezlik – zaman spektral sıxlığı 974
Tezliklər poliqonu 974
Tezliklərin dəyişdirilməsi / elayzinq 974
- üst-üstə düşməsi / tezliklərin dəyişdirilməsi / Elayzinq 974
Tezlikli – modulyar ossilyasiya 975
- modulyasiya 975
Təbii sərhəd 975
Tədqiqi statistik analiz(i) verilənlərin 975
Tədqici donma / feydinq 975
Tədrici Markov xassəsi 975
- yayınmalar zonaları 975
Təhrif ölçüsü 975
Təkmil ehtimal fəzası 975
Təkrar loqarifm qanunu 975
- - - Banax fəzasında 976
- - - empirik ölçülər üçün 977
- - - Markov zəncirləri üçün 978
- - - Viner prosesi üçün 978
Təkrarlanmalar təsadüfi ardıcıllıqlarda 978
Təkzirvəli paylanma 979
Təminlik ehtimalı 979
- - hidrologiyada 979
Təmirəyararlılıq 979
- göstəriciləri, sistemin 979
Tənzimlənən şaxələnən proses 979
Tərs bərabərsizliyi Kolmoqorovun 979
- funksiyalar metodu 979
- stoxastik differensial tənlik 980
Tərs tənliyi, diffuziyanın 980
- - Kolmoqorov 980
Təsadüfi ağac 980
- axın 981
- axtarış 981
- ardıcıllıq 981
- avtomat 982
- bölgü 982
- Bul funksiyası 982
- cəm 983
- çoxgirişlilik 984
Təsadüfi çoxluq 984
- - açıq 985
- - ; böyük ədədlər qanunu 985
- - dayanıqlı 985
- - ; dispersiya 985
- - izotrop 985
- - qabarıq 985
- - qapalı 985
- - (ğu) Qauss 985
- - ; limit teoremləri 985
- - nöqtəvi 985
- - ; nöqtəvi paylanma qanunu 985
- - ; orta qiymət 985
- - ; paylanma 985
- - ; proyeksiya 985
- - ; riyazi gözləmə 985
- - (ğu) semi-Markov 985
- - sonlu 985
- - sonsuz bölünən 985
- - stasionar 985
- - ; statistika 985
- determinant 985
Təsadüfi dolaşma 986
- - çoxölçülü 987
- - ; qayıdışlılıq 988
- - qrupda 988
- - qrupda; lokal teoremlər 989
- - (sı) Markov 990
- - özü-özünü kəsməyən 990
- - ; sərhəd funksionalı 990
- - təsadüfi mühitdə 990
- - , aşağıdan kəsilməz 991
- - , yuxarıdan kəsilməz 991
- ehtimal ölçüsü 991
- element 991
- ədəd 992
- əvəzetmə 992
- fenomen 992
Təsadüfi funksiya 993
- - ; dar mənada xassə 994
- - ; geniş mənada xassə 994
- - ; korrelyasion nəzəriyyə 994
- - ; modelləşdirmə 994
- - ; spektral ayrılış 994
- - ; spektral ölçü 994
- - (sı) zamanın 994
- hadisə 994
- xəta 995
- xətti operator 995
- inikas 995
Təsadüfi kəmiyyət 996
- - ; çevirmə 998
- - kəsik 998
- - ; modelləşdirmə 998
- - normalanmış 998
- - ; sərhədlərin qiymətləndirilməsi 998
- - sonlu qrupda 998
- - , gələcəkdən asılı olmayan 999
- - limitə görə sabit 999
- kəsik(yi) çoxüzlünün 999
Təsadüfi kodla(n)ma 999
- - sərhəd 999
- kompakt çoxluq 1000
- kükrənti(si) dinamik sistemin 1000
- kvadratur düstur 1001
- qabarıq çoxluq 1001
Təsadüfi qraf 1001
- - ; əlaqəlilik ehtimalı 1002
Təsadüfi matris 1002
- - (i) Hermit 1002
- - (i) Qauss 1002
- - qeyri-simmetrik 1002
- - ; limit teoremləri 1002
- - ortoqonal 1002
- - simmetrik 1002
- - ; spektral funksiya 1002
- - unitar 1002
- meşə 1003
Təsadüfi meydan 1003
- - bircins 1004
- - bircins artımlarlı 1004
- - bircins və izotrop 1004
- - böyük ədədlər qanunu 1004
- - harmoniklənən 1004

-- izotrop 1005
-- izotrop artımlarlı 1005
-- lokal bircins 1005
-- lokal izotrop 1005
-- lokal kompakt qrupda 1005
-- nöqtəvi 1006
-- (i) Puasson 1006
-- requlyar 1006
-- ;statistik analiz 1006
-- şaxələnən 1006
-- ümumiləşmiş 1006
- mozaika 1006
- nöqtəvi proses 1006
- ölçü 1006
- parametr 1008
- plan(ı) eksperimentin 1008
- planlaşdırılma 1008
Təsadüfi proses 1008
-- ;arifmetik modelləşdirmə 1011
-- artan 1011
-- asılı olmayan artımlarlı 1011
-- asılı olmayan artımlarlı; asimptotik xassələr 1015
-- asılı olmayan artımlarlı; çatım anı və ötüm (eksses) kəmiyyətinin paylanmaları 1015
-- asılı olmayan artımlarlı dayanıqlı 1016
-- asılı olmayan artımlarlı; xarakteristik funksiya 1016
-- asılı olmayan artımlarlı; izotrot 1016
-- asılı olmayan artımlarlı; Levi ayrılışı 1016
-- asılı olmayan artımlarlı; lokal xassələr 1016
-- asılı olmayan artımlarlı; ordinar bircins 1017
-- asılı olmayan artımlarlı; rezolvent 1017
-- asılı olmayan artımlarlı; yuxarı və aşağı səddlərin paylanması 1017
-- bixətti model 1018
-- binar 1018
-- çoxölçülü parametrli 1018
-- çoxölçülü zamanlı 1018
-- ;differensiallama 1018
-- dixotomik 1018
-- diskret komponentli 1018
-- diskret zamanlı 1018
-- doğruyaoxşarlıq nisbəti 1018
-- erqodik 1019
-- ;filtrasiya 1019
-- harmoniklənən 1019
-- xətti ifadə olunan 1019
-- idarəolunan 1019
-- ikiqat stasionar 1019
-- ikinci növ kəsilmələri olmayan 1019
-- impulsal 1019
-- ;inteqrallanma 1019
-- ;interpolyasiya 1020
-- ;invariantlıq prinsipi 1020
-- ;kanonik ifadə 1020
-- ;kanonik korrelyasiyalar və kəmiyyətlər 1021
-- kenquru tip 1022
-- ;kəsilmələr 1022
-- kvant 1024
-- qarşılıqlı asılı olmayan qiymətlərli 1024
-- ;qeyri-xətti antisipativ 1024
-- ;qeyri-xətti filtrasiya 1024
-- ;qeyri-xətti modellər 1025
-- ;qeyri-xətti proqnozlama 1025
-- ;qurşayan 1025
-- ;limit teoremləri 1025
-- Loev mənada harmoniklənən 1025
-- ;maksimum 1025
-- nöqtəvi 1026
-- opsional 1026
-- ortalanmış spektrli 1026
-- ;ortoqonal ayrılış 1026
-- ossilyar 1026
-- öngörül 1026
-- periodik korrelyarlanmış 1026
-- periodik paylanmış 1026
-- pilləvari 1027
-- ;proqnozla(n)ma, ekstrapolyasiya 1027
-- proqressiv ölçülən 1027
-- Rozanov mənada harmoniklənən 1027
-- sayıcı 1027
-- ;sədd modeli 1027
-- sıçrayışvari 1027
-- ;sıfırlar 1027
-- ;sonluölçülü paylanmalar 1027
-- stasionar 1028
-- stasionar artımlarlı 1028
-- ;statistik analiz 1028
-- ;stoxastik ekvivalentlik 1028
-- stoxastik kəsilməz 1028
-- tamamilə ölçülən 1028
-- ;trayektoriyaların requlyarlığı 1028
-- uzlaşmış 1030
-- ümumiləşmiş 1030
-- vahidi 1030
-- zaman üzrə bircins 1030
-- zəif harmoniklənən 1030
- seçmə qaytarmamaq şərtilə 1030
- şeyp 1030
- – teleqraf siqnalı 1031
- təkrarsız seçim 1031
Təsadüfi tənlik cəbri 1031
-- qrupda 1031
- vektor 1032
- və psevdotəsadüfi ədədlər 1032
- yerdəyişmə / permutasion 1033
- yerləşmə 1033
- yük 1034
- zaman anı 1034
Təsdiqedici analizi, verilənlərin 1034
Təsir funksiyası empirik 1034
Təsirsonrası 1034
Təsnifedici əlamət 1034
- dəyəşən 1034
Tiplərin yığılması 1034
Toqquşmalar metodu qiymətləndirilmənin 1034
Tolerant interval 1035
- sərhədlər 1035
Tolerantlıq 1035
Toplam koherentlik 1035
- korrelyasiya əmsalı 1035
- müqayisələr 1035
- ranq korrelyasiyası əmsalı 1036
- reqressiya 1036
Toplayıcılıq(ğı)limit teoremlərinin 1036
S – **topologiya** 1036
Topoloji entropiya(sı) dinamik sistemin 1036
σ – - fəza 1036
Transfer – matris 1037
Transversal(ı) latın kvadratının 1037
Tranzitiv Markov zənciri 1037
Trayektoriya 1037
- (sı) Markov zənciri 1037
Trayektoriyanın təsadüfi uzunluğu; eksponensial çevirmə 1037
Trend 1037
- (i) meteoroloji kəmiyyətin 1037
Tripleti, öngörül xarakteristikaların 1038
Tsiklik kod 1038
- Markov zənciri 1038
- sinif(f i) Markov zənciri vəziyyətlərinin 1038
- tezlik 1038
- vəziyyət(i) Markov zəncirinin 1038
Tutarlı kriteri 1038
- statistik qiymət 1039
Tutum 1039
F – **tutum** 1039
Tyuki korrelyasion pəncərəsi 1039
- – Hennik statistik qiyməti 1039

U

Uaytman funksiyası 1040
Uducu baryer 1040
Uducu vəziyyət 1040
-- Markov zəncirinin 1040
Udum ehtimalı 1040
Uduş funksiyası 1040
Uilkokson kriterisi 1040
Uilks paylanması 1040
Uinzorlanmış orta qiymətlər 1041
Uişart paylanması 1041
- paylanması ümumiləşmiş 1041
Unimodal / təkzirvəli paylanma 1042
- şəbəkəvari paylanma 1042
Unitar təsadüfi matris 1042
Universal kodlanma 1043
- optimal plan 1043
- ölçülən strategiya 1043
- tutarlılıq xassəsi 1043
Uonq prosesi 1043
Urbanik cəbri 1043
Urn sxemi 1043
Ursell funksiyaları 1044
Uyuşan müşahidələnənlər 1044
Uyuşmayan hadisələr 1044
- müşahidələnənlər 1044
- / dizyunkt təsadüfi hadisələr 1044
«Uzaq qonşu» alqoritmi 1045
F – **uzlaşdırılmış funksiya** 1045

Uzlaşma əmsalı / konkordans əmsal 1045
Uzlaşma kriteriisi 1045
-- ; deterministik interpre- tasiya 1045
Uzlaşmış paylanmalar 1045
- təsadüfi proses 1045
Uzunömürlülük 1046
Uzunömürlülüyü, sistemin / elementin 1046

Ü

Üç sıra teoremi 1047
- siqma qaydası 1047
Üçbucaq paylanma 1047
Üçdə iki qanunu 1047
Üfüq(ü) modelin 1047
Ümumi çoxluq 1047
- qarşılıqlı struktur funksiyası 1047
- statistik analizi, müşahidələrin 1047
- struktur funksiyası 1049
- şaxələnən proses 1049
Ümumiləşmiş arksinus paylanması 1049
- Beyes statistik qiymət 1049
- blok plan 1049
- dispersiya 1049
- korrelyasion funksiya 1049
- Qauss prosesi 1049
- ölçü 1049
- Puasson paylanması 1049
- Puasson prosesi 1049
- reqression eksperiment 1050
- spektral sıxlıq 1050
- stasionar proses 1050
- stoxastik konvolyusiya 1051
- təsadüfi meydan 1051
- təsadüfi proses 1052
- Uişart paylanması 1053
Üst pillə anı 1053
-- boyu 1053
-- indeksi 1053
-- təsadüfi kəmiyyətləri 1053
Üstlü paylanma 1053
Üstünlük indikatoru 1053
- meydanı 1053
- münasibəti 1053
Üstünlüklər analizi 1053

V

Vahidi (sporadik) təsadüfi proses 1054
Vald eyniliyi 1054
- kriterisi 1054
- reduksiyası 1054
- riski 1054
- – Hefdinq bərabərsizliyi 1054
Van Dantsiq sinfi 1055
- der Varden kriterisi 1055
- Hov teoremləri 1055
Vandermond təsadüfi determinantı 1055
Vapnik – Çervonenkis sinfi 1055
Variasion bərabərsizliklər stoxastik idarəetmədə 1055
- prinsip statistik mexanikada 1056
- sıra 1057
Variasiya(sı) ölçünün 1057
- əmsalı 1057
Varşamov – Hilbert sərhədi 1057
Vatanabe teoremi 1057
Vaytman funksiyası 1058
Vektor – bircins və izotrop təsadüfi meydanı 1058
- kriterisi eksperiment planlaşdırılmasının 1058
- ölçü 1058
- təsadüfi proses 1058
Vektorlar konfiqurasiyası 1058
Ventsel şərti 1058
Vergəci, təsadüfi ədədlərin 1058
Verilənlər pəncərəsi 1059
Verilənlərin hissəsi 1059
Veybull paylanması 1059
Veyl düsturu 1059
Vəziyyət 1059
- dövrü Markov zənciri vəziyyətlərinin dövrü 1059
- vektoru 1059
- **Vəziyyət**, **avtomatın** 1059
Vik forması 1059
- monomu 1059
- nizamlanması 1059
Viqner paylanması 1060
- semi - dairəvi qanun 1060
Vilkokson kriterisi 1060
Vilson təsiri 1060
- – Hilferti çevirməsi 1060
Viner funksionalı 1060
-- ; ortoqonal sıralara ayrılış 1061
- inteqralı 1061
- körpüsü 1061
- martinqalı 1062
- meydanı 1062
- ölçüsü 1063
Viner prosesi 1063
-- ani əksolunan 1065
-- çəp 1065
-- çoxölçülü 1065
-- çoxparametrli 1065
-- ; ekskursiya 1065
-- ; erqodik teoremlər 1065
-- kəsilməzlik modulu 1065
-- Li qrupunda 1065
-- ; maksimum və minimumun paylanması 1066
-- ; prosesin hissəsinin ekssessiv funksiyası 1066
-- sferik 1066
-- standart 1066
-- yarımoxda 1066
- prosesinin funksionalı 1067
- sosisi 1067
- vərəqi 1067
Vinoqrad metodu 1068
Virial ayrılış 1068
Virtual gözləmə müddəti 1068
Vitali sistemi 1068
- teoremi 1068
- – Han – Saks teoremi 1068
Vlasov tənliyi 1068
Vold ayrılışı 1069
Voronoy mozaikası 1069
Vuruğu statistik qiyməti, paylanma funksiyasının 1069
Vurulma sxemi, təsadüfi kəmiyyətlərin 1069

Y

Yaddaş(ı) kodun 1070
Yaxın hipotezlər 1070
Yaxınlaşan hipotezlər 1070
Yaxınlıqlar analizi 1070
- ölçüsü 1070
Yalın izi 1070
Yalvari funksiya 1070
- reqresiyya 1070
- statistik qiymət 1071
Yanq – Mills meydanı 1071
Yanlış korrelyasiya 1071
Yardımçı statistika 1071
Yaşama müddəti 1072
-- paylanması 1072
Yayınmalar funksiyası 1072
Yeganəlik teoremi xarakteristik funksiyalar üçün 1074
Yeniləşdirən proses 1074
Yeniləşdirici hadisə 1074
- komponentlər 1074
Yensen bərabərsizliyi 1074
Yerdəyişən hadisə 1074
Yerdəyişmə(si) / permutasion(u) sonlu çoxluğun elementlərinin 1075
-- təsadüfi 1075
Yerdəyişmələr kriterisi 1075
Yerinidəyişdirmə parametri 1075
-- ; statistik qiymət 1075
Yerinidəyişmiş ekskursiya 1075
Yerləşmə / aranjeman 1075
- təsadüfi 1076
Yerləşməsi, hissəciklərin bərabərehtimallı 1076
-- qruplarla 1076
-- ; Markov yerləşməsi 1077
-- ; polinomial yerləşmə 1077
Yeyts düzəlişi 1077
Yəqin hadisə 1077
Yəqinlik 1078
Yığılma ehtimala görə 1078
- (sı) empirik ölçülərin və empirik proseslərin 1078
- əsas etibarilə 1079
- (sı) inteqral funksionalların 1079
- (sı) inteqral tipli funksionalların paylanmalarının 1079
- kvadratik orta 1079
- ölçüyə görə 1079
- (sı) paylanmaların 1080
- ; paylanmaların çəki ilə orta yığılması 1080
- (sı) paylanmaların moment xarakteristikalarının 1080
- paylanmaların müntəzəm yığılması 1080
- paylanmaya görə 1080
- sanki yəqin, vahid ehtimalla 1080
- tam 1081
- tamamilə 1081
- p tərtib orta 1081
- (sı) təsadüfi kəmiyyətlər sıralarının 1081
- (sı) təsadüfi kəmiyyətlərin 1082
- (sı) tiplərin 1082
- vahid ehtimalla 1082
- variasiyaya görə 1082
- zəif 1083
C – **yığılma**(sı) təsadüfi proseslərin 1083
D – **yığılma**(sı) təsadüfi proseslərin 1083
$\mathcal{F}$ – **yığılma**(sı) paylanmaların 1083

$\mathcal{F}$ – **yığılma**(sı) təsadüfi pro-seslərin 1083
G – **yığılma** 1083
Yığılmanı yaxşılaşdıran çevirmə 1083
Yığılmanın ekstremal kriterisi 1083
Yığım metodu 1084
Yuxarı etibarlı sərhəd 1084
- kvartil 1084
- qiyməti, oyunun 1084
- limit(i) təsadüfi hadisələr ardıcıllığının 1084
- sərhəd(i) təsadüfi hadisə-lər ardıcıllığının 1084
- sərhəd funksionalı 1084
- və aşağı ardıcıllıqlar (funksiyalar) 1084
Yul prosesi 1085
Yul – Uoker statistik qiymətləri 1085
- – tənlikləri 1086
Yunan – Latın kubu 1086
- - kvadratı 1086
Yuva vahidi 1086
Yük; ümumiləşmiş ölçü, dəyişənişarəli ölçü 1086
Yüklənmə funksiyası 1087

Z

Zaman xarakteristikası, filtrin 1088
- pəncərəsi 1088
- – selektiv feydinq / donması 1088
- sırası 1088
Zaman üzrə diskretizasiya / kvantlama 1088
- - kvantlama / diskretizasiya 1088
- - orta qiymət 1088
Zəif doğruyaoxşarlıq prinsipi 1088
- harmoniklənmələk(yi) təsadüfi prosesin 1088
- izomorf dinamik sistemlər 1088
- kompakt şəbəkə(si) ehtimal ölçülərinin 1088
- nisbi kompaktlılıq(ğı) ehtimal ölçüləri ailəsinin 1088
- ölçülən inikas 1089
- paylanma 1089
- pilləli artan təsadüfi kəmiyyətlər 1089
- təsadüfi xətti operator 1089
- topologiya 1089
Zəif yığılma 1089
- - (sı) ehtimal ölçülərinin 1090
- - (sı) ölçülərin 1090
- - (sı) topoloji fəzada öl-çülər şəbəkəsinin 1090
Zərif / seyrəklənmiş çoxluq 1090
Zəruri kafi statistika 1091
- statistika 1091
- topologiya 1091
Zigel problemi 1091
- – Tyuki kriterisi 1091
Zirvə(si) paylanmanın 1091

ALLAHVERDİYEV Calal Eyvaz oğlu 17 sentyabr 1929-cu ildə Şuşa şəhərində anadan olmuşdur. Orta təhsilini Şuşa və Bakı şəhərlərində almışdır. 1946–1951-ci illərdə Azərbaycan Dövlət Universitetinin Fizika-riyaziyyat fakültəsini bitirmişdir. 1951–1953, 1954–1956-cı illərdə MDU-nun Mexanika-riyaziyyat fakültəsinin aspirantı olmuşdur (Elmi rəhbəri – akademik M. V. Keldış).

1955-ci ildə namizədlik dissertasiyasını müdafiə şurasına təqdim etmiş, 1957-ci ildə MDU Mexanika-riyaziyyat fakültəsində namizədlik dissertasiyasını müdafiə etmişdir.

1956–1960-cı illərdə ADU-da müəllim, baş müəllim, dosent vəzifələrində çalışmışdır.

Allahverdiyev C. 1960-cı ildən AEA-nın hesablama mərkəzinin müdiri, həmin ilin oktyabrından elmi işlər üzrə direktor müavini vəzifəsində fəaliyyət göstərmişdir. 1965-ci ildən isə AEA-nın Kibernetika İnstitutunda şöbə (laboratoriya) müdiridir. 1968-ci ilin sentyabrında elmlər doktoru və 1969-cu ildə SSRİ Nazirlər sovetinin yanında AAK-nın qərarı ilə professor adına layiq görülmüşdür.

1969-cu ildən AEA-nın Kibernetika İnstitutunun direktor müavini, 1970-1988-cı illər ərzində həmin institutun direktoru olmuşdur.

1998–2004-cü illərdə ADU-nun elmi işlər üzrə prorektoru, 1994-cü ildən Tətbiqi riyaziyyat fakültəsində kafedra müdiridir.

Allahverdiyev C. E. 1972-ci ildən AEA-nın müxbir üzvü, 2001-ci ildən AMEA-nın həqiqi üzvüdür.

Allahverdiyev C. E. 1972-ci ildə Azərbaycan Dövlət mükafatına, 1982-ci ildə əməkdar elm xadimi adına layiq görülmüşdür.

C. E. Allahverdiyevin Funksional analiz və Tətbiqi funksional analiz sahələrindəki elmi işləri bir çox xarici ölkələrdə bu sahədə nəşr olunan kitab və monoqrafiyalarda Allahverdiyev teoremi, Allahverdiyev prinsipi adı ilə verilmiş və onun nəticələri istifadə və tətbiq olunmuşdur.

Allahverdiyev prinsipi ixtiyari tamamkəsilməz operatorun sonlu ölçülü operatorlarla ən yaxşı yaxınlaşmasını tapmağa imkan verir, o cümlədən, ixtiyari sonlu ölçülü operatorların daha kiçik operatorlarla ən yaxşı yaxınlaşmasını tapmağa imkan verir.

Allahverdiyev prinsipinin Banax fəzasına ümumiləşməsi Allahverdiyevin aldığı ən uğurlu nəticələrindən biridir.

C. E. Allahverdiyevin elmi rəhbərliyi altında 7 nəfər elmlər doktoru, 25-dən artıq elmlər namizədi adına layiq görülmüşlər.

Allahverdiyev C. E. Azərbaycanda riyaziyyatın inkişafında dərin iz qoymuş, vətənini dərin məhəbbətlə sevən ziyalı alimlərdəndir.

ƏHMƏDOVA (Rzayeva) Həqiqət Məmmədrza qızı 1941-ci il 22 iyunda Quba şəhərində, müəllım ailəsində anadan olmuşdur. Orta məktəbi Qubada bitirmişdir (1948-1958); Ali təhsilini 1958-1963-cü illərdə ADU-nin mexanika-riyaziyyat fakültəsində almışdır.

1963-də AEA-nın Kibernetika İnstitutunda, 1963-cü ilin noyabr ayından Tacikistan Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat İnstitutunda elmi işçi vəzifəsində çalışmışdır.

1966-69-cu illərdə AEA Kibernetika İnstitutunun aspirantı (rəhbəri akademik Z. İ. Xəlilov) olmuş, sonradan akademik A. V. Skoroxodun elmi rəhbərliyi ilə, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi sahəsində namizədlik dissertasiyasını (1976-1980) müdafiə etmişdir.

1973-ci ilin oktyabrından AEA-nın Kibernetika İnstitutunda elmi işçi, baş elmi işçi vəzifələrində çalışmışdır. Hazırda Kibernetika İnstitutunun aparıcı elmi işçisidir.

1973-cü ildən ADU-nun mexanika-riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat və fizika fakültələrində "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika", "Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsini" tədris edir.

2002-ci ildən BDU-da "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika" kafedrasında dosent vəzifəsində çalışır. Ehtimal nəzəriyyəsi, riyazi statistika, təsadüfi proseslər nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsinin metodologiyasını tədris edir. 18 məqalənin, 5 kitabın müəllıfidir. Məqalələri Kiev, Moskva, ABŞ-da çap olunmuşdur.

E L M İ Ə S Ə R L Ə R İ

1. **Riyazi statistikanın elementləri** (metodik vəsait), Bakı, 2000;
2. **Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika** (dərslik), Bakı, 2002;
3. **Azərbaycanca – türkcə – rusca – ingiliscə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika terminləri lüğəti**, Bakı, 2002, (həmmüəlliflər C. E. Allahverdiyev, A. C. Hacıyev);
4. **Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı** (metodik vəsait), Bakı, 2009;
5. Y a. B e r n u l l i. **Böyük ədədlər qanunu haqqında.** / tərcümə H. M. Əhmədova;
6. **Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika tarixindən** (nəşrə hazırdır).

HACIYEV Asəf Hacı oğlu 29 may 1951-ci ildə Gəncə şəhərində anadan olmuşdur.

1973-cü ildə M. V. Lomonosov adına Moskva Dövlət Universitetinin mexanika-riyaziyyat fakültəsini, 1978-ci ildə aspiranturasını və 1990-cı ildə doktoranturasını bitirmişdir.

1980-ci ildə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində aldığı mühüm nəticələrə görə elm və texnika sahəsində Azərbaycan Lenin komsomolunun mükafatına layiq görülmüşdür.

1986-cı ildə Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə Ümumdünya Bernulli cəmiyyətinin üzvü seçilmişdir.

1996-cı ildən AMEA-nın kibernetika institutunun laboratoriya rəhbəri vəzifəsində çalışır.

1996-cı ildən Azərbaycan Respublikası Milli Məclisin birinci çağırış, 2000-ci ildə ikinci və 2006-ci ildə üçüncü çağırış deputatı seçilmişdir. Elm və təhsil komissiyasının üzvüdür. 2002-2003-cü illərdə Milli Məclis – Avropa Birliyi əməkdaşlıq qrupunun rəhbəri və 2002-ci ildən Qara Dəniz İqtisadi Əməkdaşlıq Təşkilatının (QDİƏT) parlament assambleyasında Milli Məclisin nümayəndə heyətinin başçısıdır.

2001-ci ildən Bakı Dövlət Universitetində kafedra müdiri vəzifəsində çalışır.

2001-ci ildə Azərbaycan Milli elmlər akademiyasının müxbir üzvü seçilmişdir.

Dünyanın aparıcı elmi mərkəzlərinin dəvəti ilə – ABŞ, İsveç, İtaliya, Portuqaliya və digər ölkələrdə mühazirələr oxumuş, elmi araşdırmalar aparmışdır.

2001-ci ildə dünyanın 5 aparıcı aliminin təqdimatı ilə Beynəlxalq Statistika İnstitutunun üzvü seçilmişdir.

2003-cü ildən AMEA-nın Riyaziyyat üzrə Elmi tədqiqatların təşkili və əlaqələndirilməsi şurasının sədridir. 2003-2008-ci illərdə Kibernetika institutu nəzdində müdafiə şurasının sədr müavini, 2009-cu ildən sədridir.

2004-cü ildən Üçüncü dünya elmlər akademiyasının (Triest, İtaliya) üzvü və 2005-ci ildə Əbdüs Salam adına Nəzəri Fizika üzrə Beynəlxalq elmi mərkəzin (senior assosiate) senyor asoşieyt vəzifəsinə seçilmişdi.

2006-2008-ci illərdə Qara Dəniz İqtisadi Əməkdaşlıq Təşkilatının (QDİƏT) Parlament Assambleyasının vitse-prezidenti seçilib. 2000-ci ildən adı gedən təşkilatda Azərbaycan nümayəndə heyətinin rəhbəridir.

2006-cı ildə ABŞ-ın CRDF fondunun qrantına layiq görülmüşdür.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində dünyanın aparıcı nəşrlərində çap olunmuş 100-dən çox elmi məqalənin müəllifidir.

A. Hacıyevin elmi rəhbərliyi altında 3 nəfər elmlər doktoru, 4 nəfər elmlər namizədi adına layiq görülmüşlər.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası. C. E. Allahverdiyev, H. M. Əhmədova, A. H. Hacıyev. – B., 2009. – 1191 səh.

"Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası" – Ehtimal nəzəriyyəsi, riyazi statistika və onun elm və texnikanın müxtəlif sahələrdə tətbiqi üzrə məlumat nəşridir. Ensiklopediyanın 1-ci hissəsi, əsas etibarilə, xülasə məqalələrdən, ayrı-ayrı problemlərə və metodlara həsr olunmuş məqalələrdən, əsas anlayışların tərifləri verilən qısa məlumutlardan ibarətdir. Ensiklopediyada tətbiqi məsələlərə – informasiya nəzəriyyəsi, kütləvi xidmət nəzəriyyəsi, etibarlılıq nəzəriyyəsi, eksperimentin planlaşdırılması, fizika, geofizika, genetika, demoqrafiya, meteorologiya, riyazi sığorta nəzəriyyəsinə və texnikanın qarışıq oblastlarına böyük yer ayrılmışdır. Hər bir məqalənin sonunda istifadə olunan ədəbiyyat verilir. Məqalələrin adı eyni zamanda rus və ingilis tərcüməsində də verilmişdir. Ensiklopediyanın 2-ci hissəsi – "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı" – P. Laplasın "Essai philosophique sur les probabilités" adlı görkəmli əsərinin (1908-də A. K. Vlasovun rus dilinə tərcüməsindən) Azərbaycan dilinə tərcüməsi ilə başlanır. Daha sonra V. Ya. Bunyakovskinin "Основания математической теории вероятностей" (СПб., 1846) adlı ehtimal nəzəriyyəsi üzrə rus dilində ilk dərsliyindən giriş, son və tarixi oçerk, Ş. N. Bernşteynin "Современное состояние теории вероятностей" (M., 1927. Syurix, 1932) adlı iki məruzəsi və nəhayət, A. N. Kolmoqorovun «Математика, ее содержание, методы и значение» (M., 1956) kitabının 2-ci cildindən «Теория вероятностей» fəsli, ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının elementar şərhi verilmişdir. Müntəxəbatın sonuncu hissəsi «Большая Советская энциклопедия»-nın (M., 1937-58) 1-ci və 2-ci nəşrlərində yerləşdirilmiş, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə məqalələrdən rus dilindən tərcümədir.

Ensiklopediyaya daxil olan məqalələr tələbələr, aspirantlar, riyaziyyat sahəsində çalışan elmi işçilər və öz tədqiqatlarında və praktiki fəaliyyətlərində ehtimal metodlarını tətbiq edən digər elm sahəsində çalışan elmi işçilər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Yığılmağa verilmiş XX.XX.XXXX. Çapa imzalanmış XX.05.2009.
Formatı 84x108 1/16. Ofset kağızı №1. Ofset çap üsulu.
Həcmi ç.v. tiraj 300. Sifariş № .
Qiyməti müqavilə ilə.